Аэродинамика

Н. С. АРЖАНИКОВ и В. Н. МАЛЬЦЕВ

АЭРОДИНАМИКА

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

Допущено Главным управлением политехнических и машиностроительных вузов Министерства высшего образования СССР в качестве учебника для авиационных вузов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ОБОРОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ
Москва 1956

Книга представляет собой учебник по теоретической аэродинамике.

Книга написана в соответствии с программой, утвержденной МВО СССР для авиационных институтов.

В первой части излагаются основные понятия и положения аэродинамики несжимаемой жидкости.

Вторая часть посвящена аэродинамике больших скоростей (газодинамике).

Книга предназначена для студентов старших курсов авиационных институтов и будет также полезна для инженерно-технических работников авиационных заводов и конструкторских бюро.

Рецензенты:
докт. техн. наук проф. **Г. Ф. Бураго**,
канд. техн. наук доцент **В. Д. Вотяков**,
канд. техн. наук **Б. Я. Шумяцкий**

Редактор канд. техн. наук **Я. М. Котляр**

Зав. редакцией инж. *А. И. Соколов*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой первого издания настоящей книги, вышедшей в 1952 г., послужил курс лекций по «Аэро- и газодинамике», читанный на самолетостроительном факультете Московского ордена Ленина авиационного института им. Серго Орджоникидзе. В связи с ростом скоростей самолетов авиационная наука и в первую очередь аэродинамика получила исключительное развитие как в области теоретических исследований, так и экспериментальных. Исходя из этого в программу курса «Аэро- и газодинамика» за последние несколько лет были внесены существенные изменения, отражающие новейшие результаты исследований в области теоретической и экспериментальной аэродинамики.

При подготовке второго издания были учтены критические замечания и отзывы, полученные авторами, и несколько уточнены отдельные сведения. Книга соответствует программе и предназначена для студентов самолетостроительных факультетов авиационных институтов. Одновременно она может быть полезной для студентов родственных специальностей, а также служить пособием для работников конструкторских бюро авиационных заводов и научно-исследовательских институтов.

Авторы выражают глубокую признательность и благодарность рецензентам — проф. Г. Ф. Бураго, доценту В. Д. Вотякову и канд. техн. наук Б. Я. Шумяцкому, давшим ценные указания при просмотре рукописи второго издания.

Одновременно авторы выражают благодарность канд. техн. наук Я. М. Котляру и Г. С. Садековой за помощь, которую они оказали при подготовке книги к печати.

Всем товарищам, которые сделают какие-либо замечания или укажут на отдельные недостатки, авторы будут весьма признательны, так как это поможет в дальнейшем улучшению книги.

ВВЕДЕНИЕ

Аэродинамика является наукой, изучающей законы движения как несжимаемой, так и сжимаемой жидкости, к которой можно отнести и воздух.

Изучение законов движения воздуха, изучение силового воздействия, которое воздух оказывает на обтекаемые им тела, составляет предмет аэродинамики.

Рассмотрение воздуха как несжимаемой жидкости приводит к тому, что в аэродинамике существует ряд общих законов, методов и уравнений с гидродинамикой, изучающей законы движения несжимаемой жидкости. В связи с этим эта область аэродинамики часто именуется гидроаэродинамикой.

Современная авиация характеризуется большими скоростями полета самолетов. При больших скоростях движения, сравнимых со скоростью звука, сжимаемость воздуха существенно влияет на характер его движения. Вследствие этого законы движения воздуха с большими скоростями отличны от законов движения при небольших скоростях. Аэродинамика больших скоростей часто именуется газовой динамикой и является, следовательно, наукой, изучающей движение сжимаемых жидкостей — газов.

Аэродинамика является теоретической основой авиации, фундаметом основных аэродинамических расчетов современных самолетов и других летательных аппаратов.

Глава I

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

§ 1. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ ГИДРОАЭРОДИНАМИКИ В XVII—XIX вв.

Характеризовать в кратких чертах историческое развитие гидроаэродинамики — это значит прежде всего осветить историю решения главнейшей ее проблемы — определения силы сопротивления, оказываемого жидкостью движущимся в ней телам.

Первые успехи теории сопротивления, относящиеся к XVII в., были вызваны необходимостью изучить закон падения тел, а также проблему маятника, который служил в то время инструментом для измерения времени. Одновременно изучение этих проблем было необходимо для подтверждения учения Коперника о вращении Земли.

До конца XVII в. в науке господствовала аристотелевская точка зрения: предполагалось, что время падения тел обратно пропорционально их весу, т. е. что тяжелое тело падает быстрее, чем легкое. Учение Аристотеля впервые опроверг Галилей, производивший опыты над падением тел в Пизанском соборе в 1638 г. Иезуит Риччиоли, старавшийся библией доказать лживость учения Коперника, повторил в 1640—1650 гг. эти опыты на башне Азинелли в Болонье, но к своему удивлению обнаружил, что они вполне подтверждают результаты Галилея.

В результате опытов Галилей впервые в истории показал, что сопротивление, испытываемое телами, движущимися в жидкой среде, возрастает с увеличением плотности среды и скорости.

Количественную оценку величины сопротивления Галилей не произвел. Ее впервые дал в 1686 г. ученый Марриот, определивший сопротивление прямоугольной пластинки, помещенной нормально к направлению течения воды в реке.

В конце XVII и начале XVIII века проблеме сопротивления посвятил многочисленные исследования английский ученый Исаак Ньютон (1642—1727).

Изучая падение шара в различных средах, Ньютон установил, что сопротивление шара Q пропорционально величине $\rho v^2 D^2$, где ρ — плотность среды, v — скорость движения шара, D — диаметр шара. Таким образом, был открыт основной закон сопротивления

$$Q = C\rho S v^2,$$

при этом для шара величина C оказалась равной $C=0{,}50$, что неплохо согласуется с современными данными.

Наряду с экспериментальными исследованиями сопротивления Ньютон разработал теорию взаимодействия движущихся твердых тел с некоторыми несуществующими гипотетическими жидкостями. Эти схематизированные модели жидкости, во многом отличающиеся по своим свойствам от действительных жидких сред, были рассмотрены Ньютоном для доказательства того, что межпланетное или межзвездное пространство не заполнено какой бы то ни было средой, существование которой вытекало из неверной теории Аристотеля.

Особенно подробно Ньютон исследовал движение гипотетической разреженной жидкости, состоящей из отдельных (дискретных) частиц — корпускул и лишенной трения. Применительно к ней Ньютон создал так называемую ударную теорию сопротивления пластинки, движущейся под некоторым углом. Ньютон считал, что набегающий на пластинку поток состоит из большого числа твердых неупругих частиц, которые, ударяясь о пластинку, полностью теряют свою скорость. Применяя теорему о количестве движения, Ньютон определил величину силы сопротивления. Именно, полагая, что масса жидкости, набегающая в единицу времени под углом атаки α на пластинку, имеющую площадь S, равна $\rho S v \sin\alpha$, а скорость частиц жидкости, нормальная к пластинке, равна $v \sin\alpha$ и полностью теряется при ударе жидкости о пластинку, Ньютон получил следующую формулу для силы сопротивления R, нормальной к поверхности пластинки:

$$R=\rho S v^2 \sin^2\alpha.$$

Уже после смерти Ньютона многие ученые пытались применить эту его теорию к движению тел в воздухе и неизбежно приходили к неправильным выводам.

Величина подъемной силы крыла, подсчитанная в соответствии с законом «квадрата синуса», получалась настолько малой, что долгое время этот факт приводился как доказательство неосуществимости полета на аппаратах тяжелее воздуха.

В XVIII в. учение о сопротивлении развивалось главным образом под влиянием развития мореплавания, гидроэнергетики и артиллерии.

Так, при решении артиллерийских задач необходимо было точно знать сопротивление пушечного ядра. В связи с этим в 1746 г. английский ученый Робин поставил опыты по определению сопротивления шара, применив для этой цели коловратную машину, вращающую шар. Вес груза P подбирался таким, чтобы вращение шара было равномерным. В этом случае имело место равенство моментов $WR=Pr$, где W — сопротивление шара; R и r — соответствующие плечи. Затем шар снимался и подбирался наименьший груз p, который давал бы то же число оборотов, что и груз P в первом случае. В результате сила сопротивления определялась следующим образом:

$$W = (P - p)\frac{r}{R}.$$

Коэффициент C сопротивления шара Робин получил равным 0,55.

Метод Робина сыграл в исследовании сопротивления, а следовательно, и в истории аэродинамики большую роль как основной способ нахождения силы сопротивления до появления аэродинамических труб.

В 1763 г. капитан французского флота, известный ученый Борда̀, применяя метод Робина, провел многочисленные опыты по определению сопротивления различных тел (шара, пластинки, цилиндра) в воздухе и в воде.

Борда̀ подтвердил квадратический закон сопротивления Ньютона и одновременно, в чем его огромная заслуга, показал неверность ударной теории Ньютона, так как она противоречила всем его опытам. В этом отношении его исследования знаменуют новый этап в изучении теории сопротивления.

Развитие мореходства выдвинуло задачу об определении сопротивления корабля, что заставило ученых еще более детально заняться вопросами сопротивления.

Парижская Академия наук в 70-х годах XVIII в. поставила в связи с проектом постройки целой сети узких каналов вопрос, в какой мере сопротивление зависит от соотношения поперечных сечений канала и корабля. Была создана специальная комиссия под председательством знаменитого механика Даламбера в составе ученых Кондорсе и Боссю для изучения этого вопроса.

В период 1775—1777 гг. ими были проведены опыты по протаске моделей в прямоугольных сосудах. Этим было положено начало широкой постановке такого эксперимента, который ныне вылился в метод протаски моделей глиссеров, судов, гидросамолетов в специальных гидроканалах.

Кондорсе и Боссю в 1778 г. провели специальные исследования для проверки ньютоновского закона пропорциональности силы сопротивления квадрату синуса угла атаки. Наблюдения, выведенные ими из 69 опытов, подтвердили результаты Борда̀ о неверности теории Ньютона.

Известный русский ученый Д. И. Менделеев по этому поводу говорит[1]: «в истории вопроса о сопротивлении такое заключение было главным поводом к падению ньютоновской теории и розысканию новых законов сопротивления».

Следует упомянуть о работах английского ученого Бофуа. В Англии, где особенно сильно развивалось кораблестроение, естественно, огромный интерес проявлялся к изучению сопротивления

[1] «О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании», Сочинения, т. VII, изд. АН СССР, 1946.

корабля. В 1793—1798 гг. Бофуа проделал большое количество опытов по определению сопротивления тел как плавающих, так и погруженных в жидкость. Наибольшей известностью пользуются опыты, проведенные им после того, как организовалось специальное общество «Society for the Improvement of Naval Architecture», давшее возможность Бофуа экспериментировать с большими моделями в обширном водоеме Гренландского дока вблизи Лондона. Особый интерес представляет следующий результат, полученный Бофуа: определяя сопротивление шара, Бофуа нашел коэффициент его сопротивления равным $C=0{,}36$, в то время как все экспериментаторы до него получали $C \approx 0{,}50$ (Ньютон — 0,50; Борда — 0,56, Хуттон — 0,60). Причина этого расхождения заключается в том, что раньше эксперименты велись при таких скоростях, когда обтекание шара было ламинарным, между тем как Бофуа измерял сопротивление в условиях турбулентного режима. Этот результат был подробно изучен в середине XIX в. известными учеными Пуазейлем и Рейнольдсом, открывшими наличие двух режимов движения жидкости — ламинарного и турбулентного.

Большое значение в изучении теории сопротивления имеют исследования Кулона и Дюбуа. Заслуга Кулона заключается в постановке вопроса о сопротивлении трения. Если Ньютон и др. признавали величину трения малой, а Даламбер, Кондорсе и Боссю в своих исследованиях старались убедиться в ее малости, то Кулон считал, что сопротивление выражается суммой двух членов av^2+bv, где второй член зависит от трения.

Кулон предполагал, что при малых скоростях второй член играет решающую роль, а при больших скоростях — наоборот, им можно пренебречь. Кулон проделал большое количество опытов по изучению крутильных колебаний дисков в жидкости. Он установил отличие трения в жидкости от трения твердых тел, а также указал метод для определения той величины, которую Стокс, Максвелл, Мейер и др. называли внутренним трением. Опыты Кулона дали возможность Стоксу обосновать основные дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (1850 г.).

Французский ученый Дюбуа пытался установить новые начала в учении о сопротивлении. В своей работе «Principes d'hydraulique» Paris, 1779 г. он дает описание ряда опытов и говорит: «мы считаем себя счастливыми уже тем, что нам удалось разложить сопротивление, испытываемое движущимся телом в жидкости, на два различных усилия: одно действующее как давление на переднюю часть тела, а другое как недостаток давления сзади. Первое постоянно, если величина и форма передней части тела сохраняются. Второе изменяется с длиной тела и всегда уменьшается с возрастанием длины независимо от кормовой формы, которая также влияет на величину заднего недавления (non pression)». Эту мысль Дюбуа использовали англичане и стали также делить все сопротивление на кормовое и носовое, что особенно ясно выражено в упомянутых выше исследованиях Бофуа.

От Дюбуа ведет свое начало новое учение о сопротивлении, в корне отличающееся от ньютоновского. Характерной его особенностью является выяснение роли кормовой части тела.

Д. И. Менделеев указывает, что «Дюбуа первый ясно осознал, старался выразить и объяснить и влияние трения и влияние длины и много других подробностей учения о сопротивлении. Мне кажется, что этот исследователь и есть первый зачинатель правильного решения задач сопротивления».

Если до Дюбуа сопротивление определялось преимущественно весовым способом (на непосредственном измерении силы были основаны и метод кругового вращения Робина и метод протаски), то Дюбуа впервые ввел метод дренажа для исследования распределения давления по поверхности тела. В качестве приемника давления им была применена трубка Пито, предложенная последним в 1753 г. для измерения скорости течения рек. В этом, несомненно, также огромная историческая заслуга Дюбуа.

Дюбуа также известен тем, что обнаружил известный теперь парадокс, носящий его имя и состоящий в том, что сопротивление неподвижной пластинки в движущейся жидкости больше сопротивления движущейся пластинки в неподвижной жидкости и находится в отношении 1,3 : 1.

Этот парадокс, объясненный Н. Е. Жуковским, являлся следствием различных условий обтекания неподвижной и движущейся пластинок.

С середины XVIII в. в России развернулись теоретические исследования по изучению движения жидкости, положившие начало теоретической гидродинамике. Честь ее создания принадлежит Российской Академии наук в лице двух ее академиков — Леонарда Эйлера (1707—1783) и Даниила Бернулли (1700—1783).

В своем знаменитом труде «Общие принципы движения жидкостей» (1775) Л. Эйлер впервые вывел основные дифференциальные уравнения движения так называемой идеальной жидкости, положив начало важнейшей отрасли механики сплошной среды — гидроаэродинамике.

Л. Эйлеру гидроаэродинамика обязана введением понятия давления и противопоставлением этого понятия ньютоновским «ударам» частиц жидкости о поверхность обтекаемого тела.

Открытие фундаментального закона гидродинамики, устанавливающего связь между давлением и скоростью в потоке несжимаемой жидкости и обобщенного ныне на случай сжимаемой жидкости, принадлежит Д. Бернулли, который опубликовал этот закон в своем труде «Гидродинамика».

Великий русский ученый М. В. Ломоносов (1711—1765) в работе «Размышления об упругой силе воздуха» изучал основные свойства воздуха, исходя из его молекулярного строения.

М. В. Ломоносов на базе своих исследований разработал проект вертолета, предназначавшегося для подъема на высоту созданных им приборов для метеорологических исследований. Таким образом, М. В. Ломоносов впервые в мире сделал серьезную научно обоснованную попытку создания летательного аппарата тяжелее воздуха.

Дальнейшее развитие аналитические методы гидродинамики получили в трудах известного французского ученого Лагранжа, давшего новую форму дифференциальных уравнений гидродинамики и разработавшего теорию потенциального движения жидкости.

Поставленная Даламбером задача о теоретическом определении силы сопротивления тела, обтекаемого потенциальным (безвихревым) потоком идеальной жидкости, привела к неожиданному результату: сила сопротивления оказалась равной нулю.

Этот результат носит название *парадокса Даламбера.* Указанное обстоятельство сыграло роль своеобразного тупика, в котором очутилась теория идеальной жидкости при определении силы сопротивления.

Значительно позже известные немецкие ученые Гельмгольц (1868 г.) и Кирхгофф (1896 г.) сделали новую попытку использовать модель идеальной жидкости для определения сопротивления, предложив совершенно новую схему обтекания тела со срывом струй.

Эта теория была усовершенствована в конце прошлого века проф. Н. Е. Жуковским, а в начале XX в. профессорами Леви-Чивита и А. Вилля и позже получила большое развитие в СССР в работах акад. А. И. Некрасова, проф. Н. С. Аржаникова, проф. Н. А. Слезкина, Мясникова, Я. И. Секерж-Зенькович и др.

Из значительных работ XIX в. по кинематике идеальной жидкости особое место занимают упомянутые выше работы Гельмгольца и исследования Ранкина. Гельмгольцу принадлежит также теория вихревого движения жидкости (1858 г.), которая нашла огромное практическое применение в современной теории крыла и винта. Большое развитие теория Гельмгольца получила в известной работе проф. Н. Е. Жуковского «Кинематика жидкого тела». Применение теории вихрей к построению теории крыла и винта было осуществлено в России Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным, а также проф. Прандтлем в Германии.

В 1862 г. Ранкин дает основы теории источников и стоков, применяемой ныне для построения потенциальных течений около контуров произвольной формы. Этот метод впоследствии в работах Фурмана, Кармана и др. нашел большое практическое применение для построения обводов корабля, фюзеляжа, дирижабля и т. д.

Необходимость учета в уравнениях движения жидкости важнейшего физического фактора, определяющего силу сопротивления — вязкости жидкости,— привела к созданию в середине XIX в. теории движения вязкой жидкости. В 1826 г. французский ученый Навье получил впервые дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости, основываясь на ряде физических гипотез. В 1846 г. знаменитый английский гидродинамик Стокс дал строгий вывод этих уравнений, в силу чего они известны в современной литературе как уравнения Навье-Стокса.

Исключительная сложность решения этих уравнений позволила Стоксу найти с их помощью только сопротивление шара (находящегося в потоке вязкой жидкости) и то лишь при условии пренебрежения инерционными членами уравнений, т. е. в условиях весьма медленного движения жидкости.

Лишь в начале XX в. в связи с ростом внимания ученых к проблемам авиации, т. е. к изучению движения тел в вязкой жидкости с относительно большими скоростями, теория такого движения значительно продвинулась вперед. Именно проф. Л. Прандтлем в 1904 г. была разработана теория пограничного слоя, которая явилась большим вкладом в теорию сопротивления.

Быстрое развитие техники в XIX в. способствовало накоплению экспериментального материала. Интенсивное развитие получила гидравлика и в особенности экспериментальное исследование движения воды и других вязких жидкостей в трубах и каналах. В связи с этим следует остановиться на работах двух крупнейших ученых — Ж. Пуазейля и О. Рейнольдса, проводивших обстоятельные исследования по движению жидкости в трубах малого диаметра. С их именами связано открытие двух режимов движения вязкой жидкости в трубах и каналах — ламинарного и турбулентного. Работы Рейнольдса являются началом создания теории турбулентного движения, получившей ныне большое развитие и огромное применение в аэродинамике, гидравлике и метеорологии.

В конце XIX в., особенно в связи с полетами на специальных планерах немецкого исследователя Отто Лилиенталя и русского экспериментатора — планериста С. С. Неждановского, стали развиваться экспериментальные методы изучения сопротивления воздуха. Опыты производились как на коловратной машине Робина, так и простым замером сил на моделях, обдувавшихся естественным ветром.

В 90-х годах прошлого века зарождается новый метод экспериментального исследования силового воздействия потока воздуха на обтекаемые тела — метод испытаний в аэродинамических трубах, ставший ныне важнейшим методом исследований не только моделей самолетов и отдельных его частей, но и натурных самолетов и крыльев, фюзеляжей и т. д.

В России первая аэродинамическая труба была построена в 1890 г. К. Э. Циолковским, позже Н. Е. Жуковским в Московском университете (1902 г.) и в Кучинском исследовательском институте (1906). За границей первой аэродинамической трубой явилась труба Лакура в Дании (1890 г.), позже Филипса (1894 г.) в Англии, Ренара (1896 г.) во Франции. Не останавливаясь на рассмотрении принципа работы аэродинамических труб и их типов, следует указать, что в настоящее время этот метод экспериментирования настолько вырос и усовершенствовался, что изучение методов аэродинамических исследований в трубах составляет специальный раздел аэродинамики, называемый экспериментальной аэродинамикой.

Проблемами воздухоплавания и авиации в России во второй половине XIX в. занимался акад. М. А. Рыкачев. М. А. Рыкачеву принадлежит ряд опытов по исследованию подъемной силы винта. В 1871 г. он опубликовал статью «Первые опыты над подъемной силой винта, вращаемого в воздухе», в которой разработан метод определения подъемной силы вращающегося винта.

Большое влияние на развитие воздухоплавания и авиации в России оказал гениальный русский ученый Дмитрий Иванович Менделеев (1834—1907), много работавший над проблемами аэродинамики.

В 1875 г. Менделеев высказал мысль о необходимости изучения верхних слоев атмосферы с помощью стратостата с герметической кабиной и 7 августа 1878 г. сам поднялся на аэростате.

В 1888 г. в одном из писем он писал: «воздухоплавание бывает и будет двух родов: одно в аэростатах, другое — в аэродинамах». Д. И. Менделеев предвидел полеты летательных аппаратов тяжелее воздуха. «Этот род воздухоплавания,— говорил Д. И. Менделеев,— указывается самой природой, потому что птица тяжелее воздуха и есть аэродинам». Мысль об овладении воздушным океаном приковала внимание Д. И. Менделеева к проблеме сопротивления воздуха. Его работа «О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании», посвященная этому вопросу, представляет исключительный интерес. Д. И. Менделеев в этой работе не только дал глубокий критический анализ существовавших теорий сопротивления, но и указал на важнейшее значение вязкости при определении силы сопротивления хорошо обтекаемых тел. Великий русский аэродинамик проф. Н. Е. Жуковский, высоко оценивая эту работу, писал: «русская литература обязана ему капитальной монографией по сопротивлению жидкостей, которая и теперь может служить основным руководством для лиц, занимающихся кораблестроением, воздухоплаванием или баллистикой».

В декабре 1880 г. по инициативе Д. И. Менделеева в Русском техническом обществе был создан воздухоплавательный отдел.

Д. И. Менделеев оказывал большую поддержку отечественным изобретателям, работавшим в области воздухоплавания и авиации, в том числе А. Ф. Можайскому, К. Э. Циолковскому и др. Так, в 1877 г. Д. И. Менделеев оказал большое содействие изобретателю первого в мире самолета А. Ф. Можайскому, а в 1890 г. представил Русскому техническому обществу проект цельнометаллического дирижабля К. Э. Циолковского, работы которого сыграли значительную роль в развитии современной реактивной техники.

§ 2. РОЛЬ Н. Е. ЖУКОВСКОГО И С. А. ЧАПЛЫГИНА В РАЗВИТИИ СОВРЕМЕННОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Возникновение и развитие отечественной аэродинамики связано с именами ее создателей, корифеев отечественной науки, крупнейших русских ученых — Николая Егоровича Жуковского и Сергея Алексеевича Чаплыгина.

В лице проф. Н. Е. Жуковского наша наука имела гениального ученого, обогатившего ее фундаментальными исследованиями в области математики, теоретической и прикладной механики, астрономии, гидро- и аэромеханики.

Отличительной особенностью дарования этого великого русского ученого являлось органическое сочетание в его научных исследованиях теории с инженерной практикой.

Роль Н. Е. Жуковского как крупнейшего ученого и инженера была хорошо выражена его ближайшим учеником и другом акад. С. А. Чаплыгиным в речи, посвященной памяти Жуковского: «Огромен был путь, совершенный профессором Николаем Егоровичем Жуковским. Он своей светлой и могучей личностью объединял в себе и высокие математические знания и инженерные науки. Он был лучшим соединением науки и техники, он был почти университетом».

С последнего десятилетия XIX в. творческий пытливый ум замечательного русского ученого Н. Е. Жуковского устремляется к совершенно новой, только зарождающейся, но таящей огромные перспективы развития авиационной технике.

К тому времени многие передовые русские изобретатели и ученые добились значительных результатов в области авиации.

Был осуществлен первый в мире полет на самолете конструкции А. Ф. Можайского. Были опубликованы оригинальные исследования Д. И. Менделеева в области воздухоплавания. Талантливым экспериментатором С. С. Неждановским были проведены исследования полетов воздушных коробчатых змеев и планеров, опередившие во многом результаты немецкого планериста Отто Лилиенталя.

Аэродинамика как теоретическая основа авиации становится излюбленной областью исследований Н. Е. Жуковского.

Своими работами в этой области Н. Е. Жуковский явился родоначальником отечественной школы аэродинамиков.

90-е годы прошлого века Н. Е. Жуковский интенсивно работает над проблемами полета, изучает вопросы парения птиц, движения планеров, Н. Е. Жуковский — пропагандист и организатор во всех областях воздухоплавания. Он участвует в международных конгрессах, организует воздухоплавательные съезды в России, читает публичные лекции по воздухоплаванию в различных обществах и городах России. В этот период им написан ряд работ, в том числе «К теории летания» (1890), «О парении птиц» (1892), «О наивыгоднейшем угле наклона аэроплана» (1897) и др. В работе «О парении птиц» Н. Е. Жуковский рассмотрел вопросы скользящего полета, а также строго доказал возможность выполнения мертвой петли, осуществленной 22 года спустя известным русским летчиком П. Н. Нестеровым. «Впоследствии эта работа Н. Е. Жуковского, намного опередившая свое время, послужила основой всей динамики скользящего полета, и только тогда она была оценена по достоинству» (акад. Л. С. Лейбензон).

В тот период теоретическая механика не могла дать объяснение возникновению подъемной силы крыльев самолета. Самолеты строили вслепую, без надлежащего аэродинамического расчета.

В 1905—1910 гг. появляются блестящие работы Н. Е. Жуковского, в которых он впервые объяснил природу возникновения подъемной силы, поддерживающей летящий самолет в воздухе. В 1905 г. Н. Е. Жуковский докладывает Московскому математическому обществу свою теорему о связи между подъемной силой и циркуляцией. Это открытие обессмертило имя Н. Е. Жуковского.

В период 1912—1918 гг. Н. Е. Жуковский создает теорию гребного винта, полностью решив задачу, которую в течение ряда десятилетий не могли решить экспериментаторы и теоретики всего мира. Эта работа явилась одной из наиболее выдающихся работ XX в. по аэродинамике.

В последующих работах «Динамика аэропланов в элементарном изложении» (1916), «Аэродинамический расчет аэропланов» (1917), «Динамический метод исследования продольной устойчивости аэроплана» (1920) и др. Н. Е. Жуковский создает основы аэродинамического расчета и динамики полета, впоследствии детально разработанные его ближайшими учениками акад. Б. Н. Юрьевым, проф. В. П. Ветчинкиным, а также профессорами В. С. Пышновым, А. Н. Журавченко, И. В. Остославским, В. Н. Матвеевым, В. С. Ведровым, С. Г. Козловым и др.

Ценнейшим вкладом в аэродинамическую литературу явился изданный в 1912 г. курс лекций Н. Е. Жуковского «Теоретические основы воздухоплавания», являвшийся в течение многих лет настольной книгой каждого аэродинамика.

Н. Е. Жуковский был не только создателем теоретических основ авиации. С его именем связано рождение и рост самой русской авиации. Н. Е. Жуковский разработал методы экспериментальных исследований по аэродинамике, построил новые измерительные аэродинамические приборы, создал в 1902 г. первую в России аэродинамическую лабораторию в Московском университете. Спустя несколько лет он создает первоклассную для того времени лабораторию по аэродинамике в Московском высшем техническом училище, сыгравшую большую роль в развитии русской авиации, а также аэродинамическую лабораторию в Кучино. Читая курсы лекций по основам воздухоплавания, руководя исследовательскими работами в аэродинамических лабораториях, Н. Е. Жуковский создал кадры ученых — теоретиков, талантливых экспериментаторов, новаторов-конструкторов.

В 1909 г. в МВТУ организовался студенческий научный воздухоплавательный кружок. Н. Е. Жуковский внимательно следил за деятельностью этого кружка, всячески поощрял студенческие научно-исследовательские работы.

Группировавшаяся вокруг Н. Е. Жуковского в МВТУ и Московском университете молодежь начала разрабатывать проблемы как теоретической, так и экспериментальной аэродинамики, строить аэродинамические трубы и приборы, проектировать летательные аппараты и т. д.

Из членов кружка МВТУ выросли виднейшие ученые-аэродинамики — акад. Б. Н. Юрьев, проф. В. П. Ветчинкин, авиационные конструкторы Герои Социалистического Труда акад. А. Н. Туполев и А. А. Архангельский, известные авиационные деятели акад. Б. С. Стечкин, профессора Г. Х. Сабинин, Г. М. Мусинянц, К. А. Ушаков и др.

Сын великого русского народа, подлинный патриот своей родины, Н. Е. Жуковский горячо приветствовал Великую Октябрьскую социалистическую революцию, открывшую перед ним неограниченные творческие возможности. Несмотря на преклонные годы, Н. Е. Жуковский с большой энергией берется за организацию в молодом советском государстве научно-исследовательских работ по авиации и за подготовку авиационных научных и инженерных кадров.

Начавшаяся в 1918 г. вооруженная интервенция империалистических государств против молодой советской республики потребовала напряженной работы по укреплению военной мощи Красной Армии и ее военно-воздушных сил.

Проводившиеся в тот период исследования по аэродинамике самолетов, двигателей, по прочности авиационных конструкций и изысканию их новых форм были совершенно разрознены и не обеспечивались надлежащей экспериментальной базой. Назрела необходимость в создании мощной экспериментальной базы для проведения исследовательских работ в области авиационной техники и их координации в едином научно-исследовательском центре.

По инициативе Владимира Ильича Ленина Н. Е. Жуковский с группой своих учеников взялся за организацию в 1918 г. Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ). Центральный аэрогидродинамический институт, носящий ныне имя великого русского ученого проф. Н. Е. Жуковского, внес неоценимый вклад в развитие советской авиационной техники.

Велика заслуга Н. Е. Жуковского и в создании авиационных инженерных кадров для советского воздушного флота.

В 1919 г., в разгар гражданской войны, Владимир Ильич Ленин поддержал предложение Н. Е. Жуковского — организовать в Москве Институт инженеров воздушного флота. Ректором этого института был назначен Н. Е. Жуковский. Большая потребность в инженерах по эксплуатации материальной части растущей советской авиации привела к реорганизации этого института в 1922 г. в военно-воздушную академию, носящую ныне имя ее организатора профессора Н. Е. Жуковского.

29 августа 1920 г. исполнилось 50 лет научной и педагогической деятельности Николая Егоровича. Этот знаменательный юби-

лей замечательного русского ученого, выдающегося организатора русской авиации, был отмечен специальным постановлением Совета Народных Комиссаров.

В этом постановлении Владимир Ильич Ленин назвал Н. Е. Жуковского «отцом русской авиации», подчеркивая тем самым его выдающуюся роль в создании теоретических основ авиации, в создании научной базы советского воздушного флота, в подготовке кадров первых русских летчиков и первых авиационных инженеров.

Огромная роль в создании и развитии отечественной аэродинамики принадлежит также академику Сергею Алексеевичу Чаплыгину.

С 1921 г. после кончины Жуковского, советская аэродинамическая наука до 1942 г. развивалась в значительной мере под научным руководством С. А. Чаплыгина.

В лице С. А. Чаплыгина советская авиационная наука имела крупнейшего теоретика в области авиации, одного из творцов современной теоретической аэро- и газодинамики.

В 1902 г. С. А. Чаплыгин опубликовал работу «О газовых струях», сыгравшую огромную роль в развитии газодинамики. Следует отметить, что в тот период эти проблемы так остро не ставились, как ставятся сейчас в связи с бурным ростом реактивной техники.

В этой работе С. А. Чаплыгин, применяя новый метод изучения газовых потоков, получает исключительно оригинальные и важные результаты.

Чаплыгин преобразовывает нелинейные дифференциальные уравнения движения плоского потока газа в линейные. Разработав метод интегрирования этих уравнений, С. А. Чаплыгин применяет его к решению задач об истечении газа и о давлении газового потока на пластинку. Эффективность предложенного С. А. Чаплыгиным метода, позволяющего рассчитывать плоские дозвуковые газовые потоки, делает эту работу наиболее выдающимся исследованием по газовой динамике XX в.

Лишь в годы первых пятилеток, обеспечивших бурный расцвет советской авиационной науки и техники, эта работа С. А. Чаплыгина получила широкое освещение и огромное практическое применение. Она явилась основой новой отрасли аэродинамики — газодинамики.

«Газовая динамика — новая отрасль аэродинамики, созданная учеником Николая Егоровича Жуковского, славным русским ученым, ныне покойным, академиком Сергеем Алексеевичем Чаплыгиным»,— указывает акад. Л. С. Лейбензон,— «представляет новое блестящее завоевание советской науки, вышедшее из школы Николая Егоровича Жуковского».

Работы С. А. Чаплыгина по аэродинамике настолько значительны, настолько двинули эту науку вперед, что он по праву вместе со своим учителем Н. Е. Жуковским считается одним из создателей теоретических основ авиации.

Начиная с 1910 г., т. е. с момента появления его первой фундаментальной работы по аэродинамике «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела», С. А. Чаплыгин целиком отдается разрешению аэродинамических проблем, и его работы тесно связываются с развитием авиации в нашей стране.

В этой работе С. А. Чаплыгин создает общий метод определения результирующей аэродинамической силы и момента, действующих на произвольное тело, находящееся в плоскопараллельном потоке. Пользуясь этим методом, ему удалось разработать плоскую теорию крыла, решив весьма большое количество различных задач.

О глубокой научной проницательности С. А. Чаплыгина свидетельствуют его работы по разрезным крыльям. Еще задолго до появления подобных крыльев в самолетостроении С. А. Чаплыгин предвидел возможность их практического применения. В 1914 г. в работе «Теория решетчатого крыла» он дает метод изучения потоков, обтекающих схематизирующую лопастной аппарат турбомашины решетку, состоящую из параллельных пластинок конечной ширины, а в 1921 г. в работе, посвященной памяти Н. Е. Жуковского, «Схематическая теория разрезного крыла» дает теорию этого крыла.

В 1922 г. появляется одна из наиболее крупных работ С. А. Чаплыгина «К общей теории крыла моноплана».

В этой работе С. А. Чаплыгин открывает ряд аэродинамических свойств крыла и устанавливает критерий его устойчивости. Эта теория С. А. Чаплыгина ныне принята во всей авиационной практике.

Большой интерес для аэродинамики представляет вопрос о неустановившемся движении крыла. В 1926 г. появляется работа С. А. Чаплыгина, посвященная этому труднейшему вопросу, «О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло». В этой работе автор дает выражение для подъемной силы и момента применительно к случаю, когда крыло, кроме поступательного движения, обладает еще некоторым вращательным движением, и применяет свою теорию к эллиптическому крылу и к крылу, имеющему форму дуги окружности.

В работе С. А Чаплыгина, посвященной теории механизации крыла и написанной в сотрудничестве с проф. Н. С. Аржаниковым, «К теории открылка и закрылка» дается новая попытка теоретического объяснения роли закрылка и открылка. Она основана на изучении обтекания прямолинейного контура с отклоненным на различные углы концом. В этой работе дается выражение для циркуляции и подъемной силы в зависимости от угла отклонения конца крыла.

Незадолго до своей смерти (1942) акад. С. А. Чаплыгин опубликовал работу «О новых теоретических профилях типа САЧ», в которой им была предложена новая серия теоретических профилей, отвечающих требованиям, предъявляемым к крыльям скоростных самолетов.

Как указывает акад. С. А. Христианович в предисловии к «Избранным работам С. А. Чаплыгина по теории крыла», «С. А. Чаплыгин не ограничился созданием основ теории крыла, а в течение двадцати лет шаг за шагом разработал законченную теорию этого вопроса. В его трудах получили решение все главные моменты математической теории крылового профиля и решеток профилей, т. е. основы теории крыла и лопаточных машин».

Характеризуя значение работ С. А. Чаплыгина по аэродинамике, следует особо отметить следующий факт.

В ряде аэродинамических лабораторий во время первой мировой войны проводились испытания моделей самолетов, дирижаблей, цеппелинов и т. д. Накопленный экспериментальный материал позволил в 1918 г. немецкому ученому Л. Прандтлю построить теорию крыла конечного размаха.

В настоящее время установлено, что С. А. Чаплыгин еще в 1910 г. пришел к вполне законченным физическим представлениям о вихревой схеме крыла конечного размаха, а 20 октября 1913 г., т. е. за 5 лет до Л. Прандтля, сделал на заседании Московского математического общества доклад, в котором он доложил полученные им выражения для подъемной силы и индуктивного сопротивления крыла конечного размаха.

Однако, в связи с тем, что эти результаты Чаплыгина не были своевременно проверены экспериментально, его работа не была опубликована в печати.

Примерно в то же время Н. Е. Жуковский создал вихревую теорию винта, содержащую как частный случай вихревую теорию крыла конечного размаха. В связи с тем, что ни Чаплыгин, ни Жуковский не выпустили специальных публикаций по теории крыла конечного размаха, это дало возможность зарубежным ученым считать приоритет создания теории крыла конечного размаха принадлежащим немецкому аэродинамику проф. Л. Прандтлю, опубликовавшему свою теорию в 1918 г.

Характеризуя в целом работы С. А. Чаплыгина, следует отметить исключительную монументальность его работ, в которых проявляется огромная творческая сила этого крупнейшего ученого. В его руках сложные математические методы применяются с исключительной виртуозностью и мастерством.

Акад. А. Н. Крылов указывает, что «работы С. А. Чаплыгина надо считать классическими, по ним можно и должно учиться».

Отличительной особенностью творчества С. А. Чаплыгина является общность даваемых им методов, что позволило ему и созданной им школе ученых (к которой принадлежат такие крупные ученые, как академики М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, Л. И. Седов, С. А. Христианович и др.) значительно продвинуть вперед разработку проблем современной аэродинамики.

Великая Октябрьская социалистическая революция открыла перед С. А. Чаплыгиным широчайшие возможности для применения его творческих и организационных способностей. С 1918 г. его имя тесно связано с развитием советской авиации и деятельностью ее ведущего научно-исследовательского института — ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского. В 1920 г. С. А. Чаплыгин становится во главе ЦАГИ в качестве председателя коллегии ЦАГИ и в дальнейшем возглавляет всю научную работу ЦАГИ.

§ 3. ВЕДУЩАЯ РОЛЬ СОВЕТСКИХ УЧЕНЫХ В РАЗВИТИИ АЭРОДИНАМИКИ

Наша страна, являющаяся родиной авиации, до 1917 г. не могла претендовать на роль передовой авиационной державы. Экономическая отсталость царской России, антинародная политика ее правящих классов, стремление царизма обеспечить военно-воздушные силы России материальной частью, ввозимой из-за границы, не давали возможности создать отечественную авиационную промышленность, душили творческую инициативу лучших представителей русской авиационной науки. Только мечтой оставались известные слова Н. Е. Жуковского, сказанные им в речи на XIII съезде русских естествоиспытателей и врачей в 1913 г.: «Позвольте высказать пожелание... чтобы средства наших аэродинамических лабораторий стали в соответствие с могуществом и творческими силами нашей Родины».

Только Великая Октябрьская социалистическая революция создала коренной перелом в развитии отечественной авиации.

Под руководством коммунистической партии наша авиационная промышленность в годы первых пятилеток небывало выросла, и СССР — родина авиации — превратился в мощную авиационную державу.

Партия и Правительство всегда уделяли и уделяют огромное внимание развитию советской авиационной науки и техники, организации научно-исследовательских работ в области авиации.

Многочисленный коллектив советских ученых-аэродинамиков развивает славные традиции русской аэродинамической школы, созданной Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным, ведет деятельную работу во всех направлениях современной аэродинамики.

Вооруженные марксистско-ленинской теорией и ее основным методом познания окружающего нас мира — методом диалектического материализма, советские аэродинамики в своих исследованиях руководствуются принципом сочетания теории и практики.

Многочисленные и исключительные по своему значению исследования в области теории крыла и винта, теории сопротивления и пограничного слоя, флаттера и неустановившегося движения, проблемы аэродинамики больших скоростей и др. выросли из непосредственных запросов советской авиационной промышленности.

Ученики и сподвижники великих русских ученых Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина значительно продвинули вперед исследования в области аэродинамики.

В работах одного из ближайших учеников Н. Е. Жуковского— проф. В. П. Ветчинкина вихревая теория винта получила дальнейшее развитие. Он применил к теории винтов вихревую схему теории крыла конечного размаха с переменной вдоль лопасти циркуляцией и дал новые методы расчета винта.

Серьезное развитие инженерных методов расчета винтов было дано в известных работах акад. Б. Н. Юрьева, проф. Г. Х. Сабинина и Г. И. Кузьмина и др. Теория винтов была развита в теоретических работах акад. М. В. Келдыша, проф. Ф. И. Франкля, проф. Н. Н. Поляхова, проф. Д. В. Халезова и др.

В. П. Ветчинкину принадлежит большая заслуга в деле разработки идей Н. Е. Жуковского, относящихся к динамике полета, а также идей К. Э. Циолковского по теории ракет.

В лице ближайшего ученика Н. Е. Жуковского акад. Б. Н. Юрьева советская аэродинамическая наука имеет виднейшего ученого, значительно продвинувшего вперед теорию крыла конечного размаха, разработавшего инженерные методы расчета винта, проведшего крупные исследования в области теории и расчета вертолетов. Созданный Б. Н. Юрьевым вертолет с автоматом перекоса является первым в мире аппаратом этого рода.

Большая заслуга Б. Н. Юрьева заключается в создании учебников по экспериментальной аэродинамике и винтам, на которых воспитывались поколения советских аэродинамиков и авиационных инженеров.

Цикл крупных теоретических исследований по гидро- и аэродинамике принадлежит ученику Н. Е. Жуковского акад. А. И. Некрасову.

Ценнейшим вкладом в современную гидродинамику являются работы А. И. Некрасова, посвященные теории распространения волн на поверхности тяжелой жидкости. В этих работах он предложил новый оригинальный метод, основанный на применении интегральных уравнений. В дальнейшем теория волн получила большое развитие в работах акад. Н. Е. Кочина, акад. М. В. Келдыша, чл.-корр. Академии Наук СССР Л. И. Сретенского и др.

Разрешению сложной проблемы распространения вихревых явлений в вязкой жидкости посвящена работа А. И. Некрасова «Диффузия вихря». Ценным вкладом в теорию неустановившегося движения крыла явилась монография А. И. Некрасова «Теория крыла в нестационарном потоке», изданная Академией Наук СССР в 1947 г.

Одному из ближайших учеников, помощнику Н. Е. Жуковского по проектированию и созданию аэродинамической лаборатории в Кучино, виднейшему ученому акад. Л. С. Лейбензону принадлежит ряд исследований как в области пограничного слоя, так и в области аэродинамики больших скоростей. Особенно большой вклад в развитие советской науки внес Л. С. Лейбензон своими работами по теории упругости и гидравлике. Гидравлика вязкой жидкости, являющаяся теоретической основой для расчета нефте- и газопроводов, разработана в СССР в основном трудами акад. Л. С. Лейбензона и созданной им научной школы.

Характеризуя кратко основные направления деятельности советских аэродинамиков, следует отметить большие достижения советской школы аэродинамиков в разработке проблем теории крыла. Методы Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина заложили прочную основу теории крыла в плоскопараллельном потоке и привели к установлению практически важных профилей крыла. Дальнейшее развитие этой теории связано с именем ученика Н. Е. Жуковского члена-корреспондента Академии Наук СССР В. В. Голубева. В. В. Голубеву, наряду с трудами в области математики, принадлежат крупные работы по теории обтекания составных крыльев, существенно углубившие идеи С. А. Чаплыгина и его учеников. В. В. Голубев впервые теоретически обосновал возможность получения выигрыша в подъемной силе путем применения различных методов управления пограничным слоем и путем механизации крыла, теоретически исследовал различные виды механизации крыла, в том числе отсос и сдувание пограничного слоя. Крупные исследования проведены В. В. Голубевым по теории машущего крыла, теории вихреобразования и теории крыльев малых удлинений.

Серьезные исследования по теории крыла были проведены академиком М. В. Келдышем, профессорами С. Г. Нужиным, Г. Г. Тумашевым, В. В. Струминским, Я. М. Серебрийским и др.

В СССР вышло много работ, посвященных аэродинамике крыла конечного размаха. Так, в области инженерных методов расчета нестреловидных крыльев крупный вклад внесли акад. Б. Н. Юрьев, проф. Г. Ф. Бураго, проф. С. Г. Нужин, А. Б. Рисберг и др. Теория стреловидного и скользящего крыла была дана акад. А. А. Дородницыным, В. В. Струминским. Инженерные методы расчета таких крыльев были даны работником Казанского авиационного института Н. Ю. Лиссом и другими советскими авторами. Теория крыльев с концевыми шайбами разработана Я. М. Курицкес.

Одной из важнейших проблем аэродинамики является теория неустановившегося движения. В этой области особое положение занимает проблема изучения вибраций крыла и хвостового оперения — так называемая проблема флаттера.

Создателем теории флаттера и целой школы, занимающейся этими вопросами, явился один из выдающихся ученых нашей страны акад. М. В. Келдыш.

Работами М. В. Келдыша, а также исследованиями академиков Л. И. Седова и Н. Е. Кочина и др. по неустановившимся движениям вписаны блестящие страницы в эту труднейшую область современной аэродинамики.

Исключительно крупное теоретическое и практическое значение для авиации имеют исследования советских аэродинамиков в области сопротивления, основанные на теории пограничного слоя. Среди них видное место занимают работы проф. Л. Г. Лойцянского по созданию новых методов расчета пограничного слоя. Ценные исследования в области турбулентного пограничного слоя и изучения влияния шероховатости на сопротивление были проведены профессорами К. К. Федяевским, А. П. Мельниковым и др. Крупный вклад в практическую аэродинамику внесли своими исследованиями по теории ламинизированных профилей профессора И. В. Остославский и К. К. Федяевский.

Большой вклад в учение о пограничном слое при больших скоростях движения внесли советские ученые А. А. Дородницын, Л. Г. Лойцянский и др.

В результате работ советской школы аэродинамиков теория пограничного слоя получила в СССР исключительное развитие.

Другому виду сопротивления, основанному на образовании вихрей за обтекаемым телом, так называемому вихревому сопротивлению, посвящены исследования проф. А. А. Космодемьянского, подсчитавшего силу сопротивления круглого и эллиптического цилиндров, профилей Жуковского и Чаплыгина.

Исключительно крупные исследования, особенно за последние годы, проведены советской школой газодинамиков.

В период, когда скорость полета самолетов не превышала 500 *км/час*, сжимаемость воздуха можно было не учитывать, так как она не оказывала решающего влияния на аэродинамический расчет самолета. С ростом скоростей полета учет сжимаемости воздуха стал неизбежен, в результате чего появилась необходимость в создании методов исследования движения воздуха с большими скоростями, т. е. в создании аэродинамики больших скоростей, иначе называемой газодинамикой.

Проблемой учета сжимаемости при обтекании крыловых профилей занимались и виднейшие зарубежные ученые. Так, немецким профессором Л. Прандтлем и английским профессором Глауэртом была создана приближенная теория крыла в дозвуковом потоке. Как показали исследования, она оказалась справедливой лишь для очень тонких профилей, обтекаемых под весьма малыми углами атаки.

В 1940 г. вышло в свет исследование акад. С. А. Христиановича «Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях», где дается исчерпывающее решение этой проблемы. Метод С. А. Христиановича позволил решить ряд вопросов, необходимых авиационным конструкторам. На его основе были вычислены кривые распределения давления по профилям с учетом сжимаемости, определены так называемые критические числа М, при которых на крыле возникают местные сверхзвуковые зоны, и т. д.

Дальнейший рост скоростей в авиации, а также развитие реактивной техники потребовали неотложного исследования многочисленных вопросов сверхзвукового обтекания тел, а также изучения так называемой смешанной задачи, относящейся к случаю, когда на обтекаемом теле образуются одновременно зоны сверхзвуковых и околозвуковых скоростей. Советские аэродинамики успешно и всесторонне разрешают эти задачи. Крупные достижения в решении этих задач были получены в последующих работах С. А. Христиановича, а также в работах акад. А. А. Дородницына, проф. А. А. Никольского, Г. И. Таганова, Е. А. Красильщиковой, В. В. Таренчика и др.

В трудах Е. А. Красильщиковой, Ф. И. Франкля, Л. А. Галина, С. В. Фальковича, М. Д. Хаскинда и др. получены важные результаты по теории крыла в сверхзвуковом потоке.

Мы не касались обзора работ зарубежных ученых за последний период развития современной аэродинамики из-за ограниченности книги. Интересующихся этим вопросом можно отослать к вышедшей в русском переводе книге под общей редакцией Л. Хоуарта «Современное состояние аэродинамики больших скоростей», Издательство иностранной литературы, 1955.

Советские аэродинамики, опирающиеся на огромный опыт русской аэродинамической школы Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, ведут большие исследования в области авиационной науки, обеспечивая дальнейший технический прогресс и могущество нашей отечественной авиации.

Глава II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГИДРОАЭРОДИНАМИКИ

§ 1. ПОНЯТИЕ ЖИДКОСТИ. МАССОВАЯ И ВЕСОВАЯ ПЛОТНОСТЬ

Движение жидкости значительно сложнее движения твердого тела, так как в жидкой среде отсутствуют жесткие связи, присущие твердому телу.

Истинное строение жидкости — молекулярное, т. е. жидкость состоит из большого числа отдельных молекул, движущихся друг относительно друга с большими скоростями. Однако для изучения практических вопросов силового взаимодействия между жидкой средой и находящимся в ней твердым телом, в чем состоит основная задача гидроаэродинамики, можно отвлечься от молекулярного строения жидкости и рассматривать жидкость как сплошную среду, в которой отсутствуют пустоты, междумолекулярные промежутки и молекулярное движение. Это предположение, общее для всех видов жидкостей, рассматриваемых в гидроаэродинамике, называется *гипотезой непрерывности* или *сплошности жидкой среды.*

Гипотеза сплошности крайне полезна, так как дает возможность рассматривать кинематические и динамические элементы движущейся жидкости (скорость, давление и др.) как непрерывные функции некоторых аргументов (например, декартовых координат x, y, z и времени t), что позволяет использовать математический аппарат, базирующийся на непрерывных функциях.

Известно, что в механике твердого тела или в механике системы, за исключением отдельных случаев, отвлекаются от отдельных физических свойств движущейся материи, в механике же жидкого тела учитывают некоторые физические свойства движущейся жидкости, например, плотность, вязкость, температуру и пр.

Чрезвычайно важной характеристикой жидкой среды является *массовая плотность,* характеризующая распределение жидкой массы в пространстве.

Для определения массовой плотности выделим в жидкости какой-нибудь объем ΔV (фиг. 2. 1). Обозначим массу этого объема через Δm. Тогда отношение $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ будет называться средней массовой плотностью жидкости, находящейся в объеме ΔV. Будем теперь стягивать объем ΔV в точку A. При этом отношение $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ будет стремиться к некоторому пределу, называемому *массовой плотностью в данной точке* и обозначаемому через

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \qquad (2.1)$$

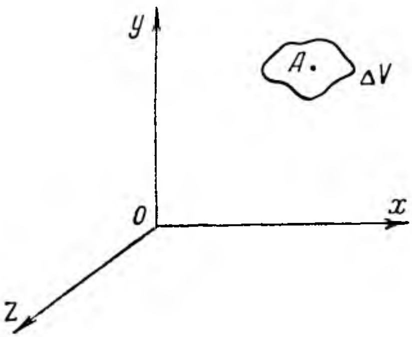
Найдем размерность массовой плотности в технической системе единиц:

$$[\rho] = [\text{масса/объем}] = [\textit{кг сек}^2/\textit{м}^4].$$

Для воздуха при нормальном давлении (760 *мм* рт. ст.) и температуре $t = 15°$ C плотность $\rho = 0{,}125$ *кг сек²/м⁴*, а для воды при $t = 15°$ C плотность $\rho = 102$ *кг сек²/м⁴*.

Пусть вес объема ΔV равен ΔG. Отношение $\frac{\Delta G}{\Delta V}$ называется *средней весовой плотностью*, а предел этого отношения при $\Delta V \to 0$ называется *весовой плотностью в данной точке* и обозначается через

$$\gamma = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta V}. \qquad (2.2)$$



Фиг. 2.1. К определению плотности жидкости в данной точке.

В приведенной ниже таблице дается зависимость от температуры плотности ρ и весовой плотности γ воздуха при давлении 760 *мм* рт. ст.

Таблица 2.1

Плотность ρ и весовая плотность γ воздуха при давлении 760 *мм* рт. ст.

Температура в °C	−20	−10	0	10	20	40	60	80	100
ρ, *кг сек²/м⁴*	0,142	0,137	0,132	0,127	0,123	0,114	0,108	0,101	0,096
γ, *кг/м³*	1,39	1,34	1,29	1,24	1,20	1,12	1,06	0,99	0,94

Между массовой и весовой плотностью нетрудно установить соотношение

$$\gamma = \rho g. \qquad (2.3)$$

В самом деле, известно, что

$$\Delta G = g \Delta m,$$

откуда, деля на ΔV и переходя к пределу, получим соотношение (2.3). Очевидно, что размерность весовой плотности

$$[\gamma] = [\text{вес/объем}] = [\textit{кг/м}^3].$$

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЖИДКОСТЕЙ

Соответственно свойству жидкостей и газов изменять в той или иной степени свой объем под действием давления или температуры жидкости разделяются на *несжимаемые* (т. е. такие, сжимаемостью которых можно пренебречь) и *сжимаемые* или упругие. К числу первых принадлежит, в частности, вода, которая при давлении в 100 *ат* изменяет свой объем лишь на 0,5% первоначального объема.

В первом приближении при решении многих задач воздух также может рассматриваться как несжимаемая жидкость. Однако, как показали исследования, при больших скоростях движения воздух уже не может рассматриваться как несжимаемая жидкость и необходимо учитывать его сжимаемость.

Пренебрежение фактором сжимаемости стирает с математической точки зрения различие между жидкостью и воздухом, и найденные при этом условии законы движения оказываются одинаково применимыми как к жидкости, так и к воздуху. Поэтому аэродинамика, в которой пренебрегают сжимаемостью воздуха, часто именуется гидроаэродинамикой.

Помимо сжимаемости, каждой реальной жидкости присуще свойство сопротивления деформациям сдвига. Вязкость жидкости проявляется в образовании касательных напряжений. Чем более вязка жидкость, тем больше возникающие в ней касательные напряжения.

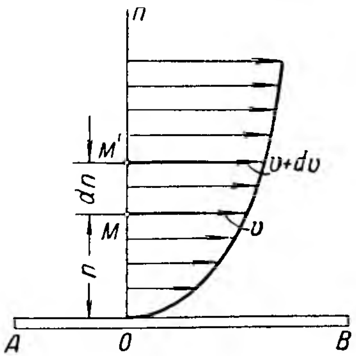
Однако решение задач аэродинамики с учетом вязкости часто приводит к большим математическим затруднениям. Вместе с тем в ряде случаев вязкость жидкости не играет решающей роли и ею можно пренебречь. Поэтому полезна упрощенная модель реальной жидкости — так называемая идеальная жидкость. Под *идеальной жидкостью* понимают такую модель жидкости, у которой отсутствует вязкость, т. е. отсутствует способность оказывать сопротивление силам, производящим относительный сдвиг ее частиц.

Не останавливаясь на физической сущности вязкости, являющейся следствием молекулярного строения жидкости, рассмотрим на одном частном примере, какие силы (напряжения) будут возникать под влиянием вязкости в движущейся жидкости при обтекании ею твердого тела и какие изменения в структуре потока вызовет появление этих сил.

Пусть поток вязкой жидкости двигается вдоль некоторой пластинки AB (фиг. 2.2). Если бы жидкость была идеальной, то все частицы жидкости, находящиеся в данный момент времени на нормали On к пластинке, обладали бы одной и той же скоростью по величине и направлению. В действительности в случае реальной жидкости ее частицы, непосредственно находящиеся на пластинке, под действием молекулярных сил сцепления «прилипают» к ней и их скорость равна нулю.

Далеко же от пластинки (на бесконечности) жидкость двигается с некоторой постоянной скоростью. Влияние вязкости приведет к появлению сил внутреннего трения (касательных напряжений), под действием которых скорости в жидкости будут уменьшаться по мере приближения к пластинке. Таким образом, вследствие влияния вязкости каждый слой жидкости будет двигаться с присущей ему скоростью.

Величину возникающих в вязкой жидкости касательных напряжений можно оценить с помощью установленного Ньютоном в 1687 г. закона внутреннего трения. Существо этого закона состоит в том, что напряжение силы внутреннего трения в жидкости зависит только от вязкости жидкости и относительной скорости скольжения одного ее слоя по отношению к другому. Выразим этот закон аналитически. Рассмотрим для этого какую-нибудь точку M, находящуюся на нормали On (см. фиг. 2.2). Обозначим скорость в этой точке через v. Очевидно, что величина скорости v будет зависеть от координаты n, измеряемой по нормали, т. е. $v=v(n)$.



Фиг. 2.2. Течение вязкой жидкости вдоль пластинки.

Возьмем на нормали точку M', бесконечно близкую к точке M и находящуюся от нее на расстоянии dn. В таком случае скорость v' в точке M' можно выразить с точностью до малых первого порядка в следующем виде:

$$v' = v(n+dn) = v(n) + \frac{\partial v}{\partial n} dn.$$

Как видно из полученного выражения, скорость в точке M' отличается от скорости в точке M на величину $\frac{\partial v}{\partial n} dn$, являющуюся относительной скоростью скольжения одного слоя по отношению к другому. Эта относительная скорость скольжения, от величины которой зависит сила внутреннего трения, характеризуется величиной производной $\frac{\partial v}{\partial n}$, называемой градиентом скорости по нормали. Обозначая силу внутреннего трения, отнесенную к единице площади, через τ, можно закон внутреннего трения Ньютона написать аналитически в следующем виде:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n}, \tag{2.4}$$

где коэффициент пропорциональности μ, зависящий от природы жидкости и ее температуры, называется *динамическим коэффициентом вязкости.*

Из формулы (2.4) нетрудно установить размерность динамического коэффициента вязкости μ. Очевидно, в технической системе единиц

$$[\mu]=\left[\frac{\tau}{\frac{\partial v}{\partial n}}\right]=\left[\frac{кг/м^2}{1/\text{сек}}\right]=\left[\frac{кг\ сек}{м^2}\right].$$

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости часто рассматривают *кинематический коэффициент вязкости* ν, равный частному от деления μ на плотность ρ:

$$\nu=\frac{\mu}{\rho}. \tag{2.5}$$

Размерность кинематического коэффициента вязкости в технической системе единиц следующая:

$$[\nu]=\left[\frac{\mu}{\rho}\right]=\left[\frac{кг\ сек/м^2}{кг\ сек^2/м^4}\right]=[м^2/сек].$$

Так как величина ν имеет чисто кинематическую размерность, то этот коэффициент и называют кинематическим коэффициентом вязкости.

За единицу вязкости в системе *CGS* принимают так называемый пуаз. Если в формулу

$$\mu=\frac{\tau}{\frac{\partial v}{\partial n}}$$

подставить величину τ, равную одной дине на квадратный сантиметр, и $\frac{\partial v}{\partial n}=1$ (с размерностью 1/сек), т. е. считать, что при изменении n на 1 *см* скорость изменяется на 1 *см/сек*, то получаемая при этом величина μ называется *пуазом*. Очевидно, что

$$1\ кг\ сек/м^2=\frac{981\,000}{10\,000}\ дина\ сек/см^2=$$

$$=98{,}1\ дина\ сек/см^2=98{,}1\ \text{пуаз}.$$

Для воздуха при $t=15^\circ$ С численные значения коэффициентов вязкости составляют

$$\mu=1{,}82\cdot10^{-6}\ кг\ сек/м^2,$$

$$\nu=1{,}45\cdot10^{-5}\ м^2/сек.$$

Для воды при $t=15^\circ$ С

$$\mu=1{,}164\cdot10^{-4}\ кг\ сек/м^2,$$

$$\nu=0{,}1145\cdot10^{-5}\ м^2/сек.$$

Сравнивая эти величины, находим, что

$$\frac{\nu_{\text{возд}}}{\nu_{\text{воды}}}=\frac{1,45\cdot 10^{-5}}{0,1145\cdot 10^{-5}}=12,7.$$

т. е. кинематический коэффициент вязкости воздуха в 12,7 раза больше кинематического коэффициента вязкости воды.

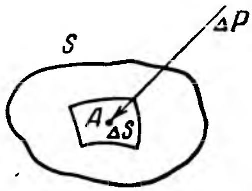
Вязкость воздуха связана с температурой линейным законом, выражаемым следующей формулой:

$$\mu=(1,745\cdot 10^{-6}+5,03\cdot 10^{-9}t\,^{\circ}\text{C})\ \textit{кг сек}/\textit{м}^2.$$

Необходимо отметить, что одновременный учет при изучении движения жидкости рассмотренных выше свойств вязкости и сжимаемости вносит исключительные математические трудности, в силу чего в большинстве случаев отдельно выделяются задачи о движении вязких жидкостей и о движении сжимаемых жидкостей. Изучение движения сжимаемых (идеальных) жидкостей вылилось ныне в отдельную область гидроаэродинамики, которая носит название газовой динамики.

§ 3. ПОНЯТИЕ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ДАВЛЕНИИ В ДАННОЙ ТОЧКЕ ЖИДКОСТИ

Выделим на поверхности S рассматриваемого объема жидкости (фиг. 2.3) элементарную площадку ΔS. Пусть на эту площадку действует результирующая сила воздействия ΔP со стороны окружающей жидкости. Эта сила в идеальной жидкости будет ориентирована нормально к поверхности элемента ΔS, ибо в противном случае имелась бы касательная составляющая, которая, будучи отнесена к площади ΔS, даст касательное напряжение, именуемое напряжением трения, существующее лишь в вязкой жидкости. Для определения интенсивности воздействия окружающей жидкости на точку A площадки будем стремить площадь ΔS к нулю, т. е. стягивать площадку к точке A, и рассмотрим предел отношения



Фиг. 2.3. Сила гидродинамического давления в жидкости.

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta S}=p. \qquad (2.6)$$

Этот предел называется *гидродинамическим давлением в данной точке*. Очевидно, размерность гидродинамического давления

$$[p]=[\textit{кг}/\textit{м}^2].$$

Атмосферное давление обычно измеряется барометром в миллиметрах ртутного столба и обозначается буквой B. Нормальным атмосферным давлением считается давление $B_0=760$ *мм* рт. ст.

В аэродинамике принято измерять давление в килограммах на квадратный метр или в *мм* рт. ст. Часто при расчетах, например, авиадвигателей, пользуются также технической атмосферой, равной 1 *кг/см*².

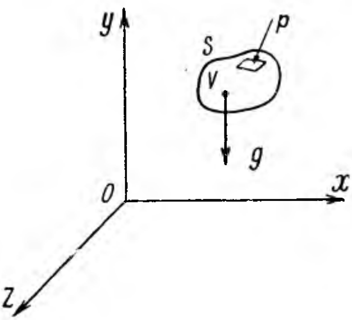
В метеорологии пользуются абсолютной единицей давления *баром*. *Бар* равен дине, отнесенной к квадратному сантиметру и умноженной на 10^6, т. е. бар$=10^6$ *дина/см²*. На практике часто применяют единицу давления *миллибар*, равную одной тысячной бара. Между единицами измерения давления существуют следующие соотношения:

$$1\ \textit{ат}=760\ \textit{мм}\ \text{рт. ст.}=1{,}0333\ \textit{кг/см}^2=10\,333\ \textit{кг/м}^2=$$
$$=10\,333\ \textit{мм}\ \text{вод. ст.}$$
$$1\ \textit{кг/см}^2=10\,000\ \textit{кг/м}^2=735{,}6\ \textit{мм}\ \text{рт. ст.}$$
$$1\ \textit{миллибар}=\textit{дина}\ 10^6/\textit{см}^2\ 10^3=\frac{1}{98{,}1}\ \textit{кг/см}^2$$
$$p\ \textit{миллибар}=1{,}33\ B\ \textit{мм}\ \text{рт. ст.}$$

§ 4. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЖИДКОСТИ

Силы, действующие в жидкости, принято разделять на силы поверхностные и силы массовые.

Выделим в жидкости некоторый произвольный объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S (фиг. 2.4). В результате воздействия на объем V окружающей жидкости по его поверхности S будут распределены определенным образом касательные (если жидкость вязкая) и нормальные напряжения. Эти внутренние, распределенные по поверхности объема силы, обусловленные наличием жидкости вокруг рассматриваемого объема, называются *поверхностными* силами. Как видим, силы гидродинамического давления являются поверхностными силами.



Фиг. 2.4. Поверхностная и массовая силы в жидкости.

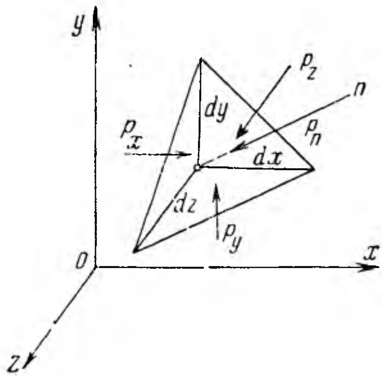
Кроме того, на выделенный объем жидкости будут действовать силы, не зависящие от того, существуют ли рядом с ним другие частицы жидкости и распределенные по всему объему V. Такие силы называются *объемными* или *массовыми*. К массовым силам принадлежат сила тяжести, электромагнитные силы, центробежные и др.

Примем следующие обозначения для массовых сил. Будем относить массовую силу к единице массы, а ее проекции на оси координат обозначать через X, Y, Z. Очевидно, что X, Y, Z — проекции ускорения массовой силы на координатные оси. Например, если на массу m частицы жидкости будет действовать сила тяжести, являющаяся массовой силой, то проекции этой массовой силы на оси координат в принятых обозначениях равны:

$$X=0;\quad Y=-\frac{mg}{m}=-g;\quad Z=0.$$

§ 5. НЕЗАВИСИМОСТЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ОТ НАПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим в движущейся идеальной жидкости бесконечно малую частицу в форме элементарного тетраэдра с ребрами dx, dy, dz. Применим к этой частице принцип Даламбера, т. е., присоединяя к поверхностным и массовым силам, действующим на данную частицу, силы инерции, напишем условие равновесия указанных сил. На каждую грань тетраэдра будут действовать поверхностные напряжения (гидродинамические давления) p_x, p_y, p_z, p_n, являющиеся результатом воздействия окружающей жидкости на данную частицу. Массовые силы (в том числе и инерционные), действующие на тетраэдр, будут величинами третьего порядка малости ввиду их пропорциональности объему рассматриваемой частицы в отличие от поверхностных сил, являющихся малыми второго порядка. Поэтому уравнения равновесия по осям координат можно написать в следующем виде:



Фиг. 2.5. Распределение поверхностных сил по элементарному тетраэдру.

$$p_x\Delta S_x - p_n\Delta S\cos(n,\ x) + \text{беск. мал. третьего порядка} = 0,$$
$$p_y\Delta S_y - p_n\Delta S\cos(n,\ y) + \text{беск. мал. третьего порядка} = 0,$$
$$p_z\Delta S_z - p_n\Delta S\cos(n,\ z) + \text{беск. мал. третьего порядка} = 0,$$

где ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z, ΔS — площади граней, соответственно нормальных осям x, y, z и нормали n.

Так как

$$\Delta S\cos(n,\ x) = \Delta S_x,$$
$$\Delta S\cos(n,\ y) = \Delta S_y,$$
$$\Delta S\cos(n,\ z) = \Delta S_z,$$

то в пределе, при стягивании элементарного тетраэдра в точку, будем иметь

$$p_x - p_n = 0,\ p_y - p_n = 0,\ p_z - p_n = 0,$$

откуда

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p. \qquad (2.7)$$

Таким образом, *гидродинамическое давление в произвольной точке идеальной жидкости не зависит от направления* и в данной точке жидкости в фиксированный момент времени является вполне определенной величиной, т. е. является скалярной функцией только координат и времени:

$$p = f(x,\ y,\ z,\ t).$$

Глава III
КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

§ 1. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Задача кинематического изучения движения жидкости заключается в определении в каждой точке движущейся жидкости для любого момента времени t значений скорости. Зная величины скоростей, можно, как будет показано в дальнейшем, найти распределение давления, а следовательно, и силы, действующие в жидкости.

Движение жидкости можно изучать двумя путями.

Первый путь, называемый методом Эйлера, состоит в определении скорости в той или иной точке пространства, заполненного движущейся жидкостью. Это означает, что в методе Эйлера фиксируется не частица жидкости, а точка пространства с координатами x, y, z и исследуется изменение скорости в этой точке с течением времени. Таким образом, метод Эйлера заключается в выражении скоростей частиц в функции от времени t и координат x, y, z точек пространства, т. е. в задании поля скоростей. Совокупность величин x, y, z, t называют *переменными Эйлера*. Следовательно, движение жидкости по методу Эйлера задается следующим образом:

$$\begin{aligned} v_x&=f_1(x,\ y,\ z,\ t),\\ v_y&=f_3(x,\ y,\ z,\ t),\\ v_z&=f_3(x,\ y,\ z,\ t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Предполагая движение жидкости непрерывным, будем считать указанные функции однозначными, непрерывными и дифференцируемыми функциями координат x, y, z и времени t.

В таком случае для нахождения траектории жидких частиц следует в уравнениях (3.1) заменить v_x, v_y, v_z соответственно через $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ и интегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=f_1(x,\ y,\ z,\ t),\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(x,\ y,\ z,\ t),\\ \frac{dz}{dt}&=f_3(x,\ y,\ z,\ t). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

После интегрирования получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, a, b, c), \\ y &= \varphi_2(t, a, b, c), \\ z &= \varphi_3(t, a, b, c), \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

содержащие три произвольные постоянные a, b, c, значения которых определяются из начальных условий (см. ниже). Исключая из этих уравнений время t, найдем уравнение траектории жидких частиц.

При определении проекций ускорения жидких частиц в переменных Эйлера

$$w_x = \frac{dv_x}{dt},$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt},$$

$$w_z = \frac{dv_z}{dt}$$

следует учесть, что v_x, v_y, v_z в силу уравнений (3. 1) являются функциями x, y, z, где x, y, z в свою очередь при движении частиц жидкости зависят от t. Следовательно, используя правило дифференцирования сложной функции, будем иметь

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

или, так как

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

то

$$w_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Аналогично

$$\left.\begin{aligned} w_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ w_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

Следует еще раз отметить, что когда берутся полные производные (3. 4), то учитывается не только изменение времени t, но и изменение в зависимости от времени координат $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ частицы жидкости при ее движении по траектории. Эти производные называются *конвективными*. Частные производные по времени берутся, как обычно, при фиксированных значениях координат x, y, z и называются *локальными* (местными) производными.

§ 2. МЕТОД ЛАГРАНЖА

Второй путь изучения движения жидкости, называемый методом Лагранжа, в отличие от метода Эйлера рассматривает движение индивидуальных жидких частиц вдоль их траектории. Так как жидких частиц бесчисленное множество, то следует как-то характеризовать данную частицу. Это можно сделать, если в качестве характеристики жидкой частицы выбрать ее координаты в начальный момент времени $t=0$. Пусть при $t=0$ координаты данной частицы будут a, b, c. Это означает, что из всей бесчисленной совокупности траекторий данной частице будет принадлежать та, которая проходит через точку a, b, c. Таким образом, координаты рассматриваемой жидкой частицы x, y, z будут зависеть от величин a, b, c и t, называемых *переменными Лагранжа*, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi_1(t, a, b, c), \\ y&=\varphi_2(t, a, b, c), \\ z&=\varphi_3(t, a, b, c). \end{aligned}\right| \qquad (3.5)$$

Эти уравнения представляют собой уравнения семейства траекторий, заполняющих все пространство, занятое жидкостью; a, b, c являются параметрами, определяющими траекторию.

Таким образом, если в методе Эйлера траектории жидких частиц получаются путем интегрирования дифференциальных уравнений (3.2), в методе Лагранжа они оказываются заданными формулами (3.5). Пользуясь уравнениями (3.5), находим проекции скорости и ускорения частиц:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_1(t, a, b, c)}{\partial t}, & w_x&=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi_1(t, a, b, c)}{\partial t^2}, \\ v_y&=\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_2(t, a, b, c)}{\partial t}, & w_y&=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi_2(t, a, b, c)}{\partial t^2}, \\ v_z&=\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_3(t, a, b, c)}{\partial t}, & w_z&=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi_3(t, a, b, c)}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

Метод Эйлера получил преимущественное распространение в аэродинамике, так как он более прост и дает возможность широко использовать хорошо развитый раздел математики — векторный анализ. Метод Эйлера и используется в последующем изложении.

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ

В наиболее общем случае движения жидкости проекции скорости v_x, v_y, v_z и давление p (для сжимаемой жидкости и плотность ρ) будут являться функциями координат x, y, z и времени t, т. е.

$$\left.\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t), \\ v_y &= f_2(x, y, z, t), \\ v_z &= f_3(x, y, z, t), \\ p &= f_4(x, y, z, t), \\ \rho &= f_5(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Это означает, что в фиксированной точке пространства с координатами x, y, z проекции скорости v_x, v_y, v_z, давление p и плотность ρ будут функциями времени t, т. е. с течением времени будут изменяться. Такое движение жидкости называется *неустановившимся*[1].

Если же в фиксированной точке пространства величины v_x, v_y, v_z, p, ρ со временем не меняются,— движение жидкости называется *установившимся*. Это означает, что всякая жидкая частица, приходящая в данную фиксированную точку пространства, будет в ней обладать такими же значениями v_x, v_y, v_z, p и ρ, какими обладала в ней любая из предшествующих частиц жидкости. В этом случае выражения (3.7) напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z), \\ v_y &= f_2(x, y, z), \\ v_z &= f_3(x, y, z), \\ p &= f_4(x, y, z), \\ \rho &= f_5(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Из определения установившегося движения следует, что для него должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.9}$$

Однако полные производные от этих величин отличны от нуля, так как в общем случае скорость, давление и плотность меняются при переходе от одной точки пространства к другой. Только в част-

---

[1] Это движение имеет место при перемещении твердого тела в жидкости, при вибрациях крыльев или хвостового оперения самолета в полете и в других случаях.

ном случае, если несжимаемая, однородная ($\rho=\text{const}$) жидкость движется равномерно и прямолинейно, т. е. $\bar{v}=\text{const}$ и $p=\text{const}$, то

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv_y}{dt}=\frac{dv_z}{dt}=0$$

и

$$\frac{d\rho}{dt}=0, \qquad \frac{dp}{dt}=0.$$

Если жидкость движется так, что проекции скорости v_x, v_y, v_z являются функциями только одной координаты и времени t, то такое движение называется *одномерным* неустановившимся. В частном случае при движении вдоль оси x ($v_y=v_z=0$) будем иметь

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

Движение жидкости называется *плоским* или двухмерным, если все частицы, находящиеся на одном и том же перпендикуляре к некоторой неподвижной фиксированной плоскости, движутся одинаково параллельно этой плоскости.

При плоском неустановившемся потоке жидкости ($v_z=0$) будем иметь

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial t},$$

$$\frac{dv_y}{dt}=\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_y}{\partial t}.$$

Если пространственное движение жидкости симметрично относительно некоторой оси, то такое движение называется *осесимметричным*.

Осесимметричными течениями являются движения жидости в соплах и диффузорах круглого сечения и осевое обтекание тел вращения различной формы (например, сигарообразной) и т. п.

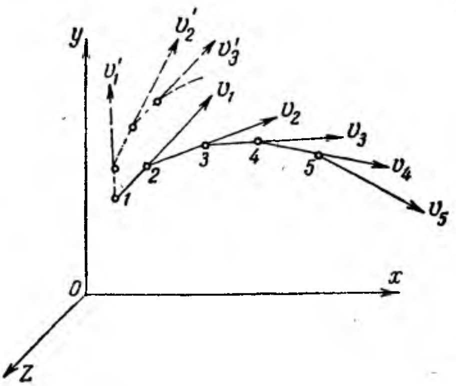
§ 4. ЛИНИЯ ТОКА

В аэродинамике наряду с понятием траектории (кривой, очерчиваемой в пространстве движущейся частицей жидкости) вводится понятие *линии тока*.

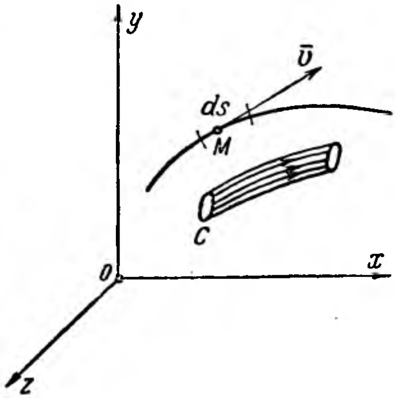
Рассмотрим в данный момент времени t какую-нибудь точку *1* пространства, заполненного жидкостью. Пусть скорость находящейся в ней частицы жидкости изображается вектором v_1 (фиг. 3. 1). В этот же момент времени t возьмем на векторе скорости v_1 точку *2*, бесконечно близкую к точке *1*. В этой точке находится другая частица жидкости. Так как точка *2* имеет другие координаты, чем точка *1*, то и скорость в ней будет другая, изображаемая вектором v_2. В тот же момент времени t возьмем на векторе скорости v_2 точку *3*, бесконечно близкую к точке *2*. В ней вектор скорости будет v_3 и т. д.

В результате такого построения (в данный момент времени) получилась ломаная *1, 2, 3, 4, 5*,..., обладающая тем свойством, что вектор скорости, соответствующий начальной точке любого ее звена, направлен вдоль этого звена.

Будем неограниченно увеличивать число звеньев ломаной, устремляя к нулю длину каждого ее звена. Тогда в пределе (фиг. 3. 2) получится кривая, называемая *линией тока.*



Фиг. 3. 1.. Построение линии тока.



Фиг. 3. 2. Линия тока и трубка тока.

Следовательно, *линия тока обладает тем свойством, что каждая частица жидкости, находящаяся на ней в данный момент времени, имеет скорость, совпадающую по направлению с касательной к этой линии.*

Посмотрим, какой будет картина распределения скоростей в момент времени t'. Если движение неустановившееся, то в момент t' скорость в точке *1* будет v_1', отличная от v_1. Следовательно, для того чтобы передвинуться в соседнюю бесконечно близкую точку, нужно теперь двигаться по новому направлению, изображенному на фиг. 3. 1 пунктиром. Отсюда следует, что для момента t' линия тока будет иной. Это означает, что при неустановившемся движении совокупность линий тока будет меняться по времени.

Если же движение установившееся, т. е. скорости в точках *1, 2* и т. д. не меняются по времени, то очевидно, что и линии тока не будут зависеть от времени.

Очевидно также, что в случае установившегося движения линии тока и траектории совпадают. В самом деле, за время dt частица жидкости переместится вдоль вектора v_1 из положения *1* в положение *2*, где скорость изображается вектором v_2. Так как движение установившееся, то в точке *2* вектор скорости v_2 за время dt не изменится. Это означает, что жидкая частица, придя в точку *2*, пойдет вдоль вектора v_2. Рассматривая последовательно дальнейшее перемещение жидкой частицы, легко убедиться, что при установившемся движении траектория частицы будет совпадать с линией тока.

Найдем дифференциальное уравнение линий тока. Из условия совпадения в данной точке линии тока вектора скорости с касательной к этой линии следует, что

$$[\bar{v}, d\bar{s}]=0,$$

или, представляя векторное произведение в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ v_x, & v_y, & v_z \\ dx, & dy, & dz \end{vmatrix}=0,$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы, направленные по координатным осям. Развертывая этот определитель по первой строке, будем иметь

$$\bar{i}\begin{vmatrix} v_y, & v_z \\ dy, & dz \end{vmatrix}+\bar{j}\begin{vmatrix} v_z, & v_x \\ dz, & dx \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} v_x, & v_y \\ dx, & dy \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$v_y dz - v_z dy = 0,$$
$$v_z dx - v_x dz = 0,$$
$$v_x dy - v_y dx = 0.$$

Полученные уравнения можно написать в следующем виде:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)}=\frac{dy}{v_y(x, y, z, t)}=\frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}. \qquad (3.10)$$

Выражение (3.10) носит название *дифференциальных уравнений линий тока.* Дифференциальные уравнения траектории жидкой частицы могут быть записаны в следующем виде (см. § 1 гл. III):

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)}=\frac{dy}{v_y(x, y, z, t)}=\frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}=dt. \qquad (3.10')$$

Введем понятие о трубке тока. Для этого проведем в жидкости некоторый замкнутый контур C, не являющийся линией тока, и через каждую точку этого контура проведем линию тока.

Совокупность проведенных таким образом линий тока образует поверхность, называемую *трубкой тока* (см. фиг. 3.2). Жидкость, протекающую внутри трубки тока, принято называть *струйкой.*

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Движение жидкости задано проекциями скоростей

$$v_x=-ky, \quad v_y=kx, \quad v_z=0,$$

где k — постоянная. Требуется найти линии тока.

Решение. Так как v_x, v_y от времени явно не зависят, заключаем, что рассматриваемое движение установившееся и, следовательно, линии тока и траектории совпадают. Так как $v_z=0$, то движение плоское. В случае плоского движения дифференциальные уравнения линий тока (3. 10) можно написать в следующем виде:

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}. \qquad (3.11)$$

Подставляя заданные значения v_x, v_y в уравнение (3. 11), получим

$$\frac{dx}{-ky}=\frac{dy}{kx}$$

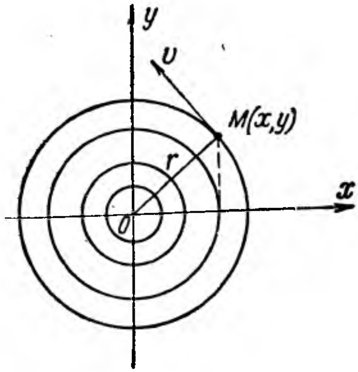
или, разделяя переменные,

$$xdx+ydy=0.$$

Интегрируя, находим

$$x^2+y^2=C,$$

т. е. линии тока представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (фиг. 3. 3). Для определения направления движения найдем косинусы углов между вектором скорости и осями x и y:



Фиг. 3. 3. Движение жидкости по концентрическим окружностям.

$$\cos(\bar{v},x)=\frac{v_x}{v}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos(\bar{v},y)=\frac{v_y}{v}=+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Так как для точки M с положительными значениями координат $\cos(\bar{v},x)<0$, то скорость образует с осью x тупой угол, и, следовательно, движение совершается против часовой стрелки.

Пример 2. Движение жидкости задано следующими проекциями скоростей:

$$v_x=x+t, \quad v_y=-y+t, \quad v_z=0.$$

Требуется определить:

а) семейство линий тока, а также линию тока, проходящую через точку A $(-1, -1)$ в момент $t=0$;

б) траекторию частицы M, которая в момент $t=0$ находилась в точке A $(-1, -1)$.

Решение. Очевидно, что рассматриваемое движение является плоским ($v_z=0$) и неустановившимся, так как в выражение для v_x и v_y явно входит время t. Дифференциальное уравнение (3. 11) линий тока примет следующий вид:

$$\frac{dx}{x+t}=\frac{dy}{-y+t}.$$

Интегрируя полученное уравнение (считая t фиксированным), находим

$$\ln(x+t)=-\ln(-y+t)+\ln C$$

или

$$(x+t)\,(t-y)=C, \qquad (a)$$

т. е. семейство линий тока представляет в каждый момент времени семейство гипербол. Для нахождения линии тока, проходящей в момент времени $t=0$ через точку A $(-1, -1)$, подставляем эти значения t, x, y в уравнение (а); тогда получим

$$(-1)\cdot(+1)=C, \text{ т. е. } C=-1,$$

и уравнение искомой линии тока примет вид

$$xy=1. \tag{б}$$

Для определения траекторий необходимо проинтегрировать следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=x+t, \\ \frac{dy}{dt}&=-y+t. \end{aligned}\right\} \tag{в}$$

Переписав систему (в) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}-x&=t, \\ \frac{dy}{dt}+y&=t, \end{aligned}\right\}$$

замечаем, что каждое из этих уравнений представляет собой линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому

$$x=C_1e^t-t-1. \tag{г}$$

и

$$y=C_2e^{-t}+t-1. \tag{д}$$

Для определения уравнения траектории, которую описывает частица M, находившаяся в момент $t=0$ в точке A $(-1, -1)$, определим значения констант C_1 и C_2. Подставляя в выражения (г) и (д) $t=0$, $x=-1$, $y=-1$, получим $C_1=C_2=0$. Таким образом, для искомой траектории будем иметь

$$x=-t-1,$$
$$y=t-1,$$

откуда, исключая t, находим уравнение траектории

$$x+y=-2,$$

т. е. уравнение прямой.

Этот пример показывает, что линия тока и траектории при неустановившемся движении не совпадают.

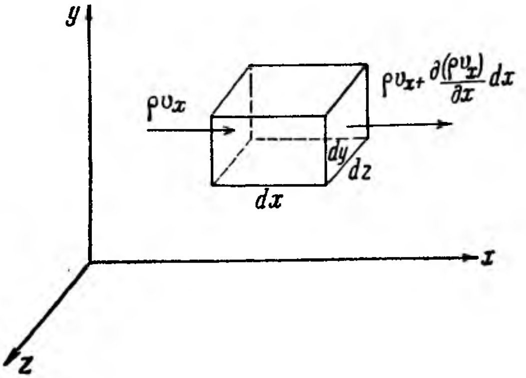
§ 5. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

При рассмотрении движения произвольной сжимаемой жидкости будем предполагать, что движущаяся жидкость сплошь заполняет все пространство или определенную его часть, т. е. что пустоты или разрывы не образуются. Это условие называется *условием неразрывности или сплошности движения.*

В таком случае, рассматривая протекание жидкости через некоторую фиксированную в пространстве замкнутую поверхность, можно заключить, что если за некоторый промежуток времени количество вытекшей жидкости будет превышать количество втекшей, то внутри этой поверхности произойдет изменение плотности. (В случае несжимаемой жидкости количество вытекшей жидкости вследствие условия неразрывности должно в точности равняться количеству втекшей жидкости.) Сказанное выше можно представить аналитически в виде дифференциального уравнения, носящего название *уравнения неразрывности или сплошности движения.*

Уравнение неразрывности в аэродинамике является выражением закона сохранения материи, установленного впервые великим русским ученым М. В. Ломоносовым в 1748 г.

Рассмотрим фиксированную в пространстве замкнутую поверхность, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz, через который протекает некоторая сжимаемая жидкость.



Фиг. 3.4. К выводу уравнения неразрывности в декартовых координатах.

Пусть в единицу времени и через единицу площади левой грани параллелепипеда в направлении оси x протекает масса жидкости ρv_x. Так как ρv_x есть функция координат и времени, т. е. $\rho v_x = f(x, y, z, t)$, то для определения массы жидкости, протекающей в направлении оси x в единицу времени через единицу площади правой грани, надо координате x в функции $f(x, y, z, t)$ дать приращение dx, т. е. надо найти $f(x+dx, y, z, t)$. Но с точностью до малых первого порядка

$$f(x+dx, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

т. е. через единицу площади правой грани в единицу времени протекает в направлении оси x масса жидкости, равная

$$\rho v_x + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} dx.$$

Очевидно, разность между подсчитанными выше вытекшим и втекшим количествами жидкости равна

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} dx,$$

и, следовательно, за время dt через грани площадью $dydz$ вытечет в направлении оси x масса жидкости

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Аналогично разности между вытекшим и втекшим количествами жидкости в направлении осей y и z за время dt можно получить в виде

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Если эти выражения сложить, то получим суммарную разность между всей вытекшей и втекшей за время dt жидкостью:

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz\,dt.$$

Различие в количествах (массе) вытекшей и втекшей жидкости отразится на количестве жидкости внутри параллелепипеда. В самом деле, если в момент времени t плотность была ρ, то в момент $t+dt$ плотность будет равна

$$\rho(x,\ y,\ z,\ t+dt)=\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt,$$

и, следовательно, за время dt количество (масса) жидкости внутри параллелепипеда изменится от величины $\rho dxdydz$ до

$$\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt\right)dx\,dy\,dz,$$

т. е. на величину

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

(здесь берем знак минус, так как выше подсчитывалась разность между *вытекшим* и *втекшим* количествами).

В силу условия неразрывности разность между количествами вытекшей и втекшей жидкости должна быть равна изменению количества жидкости внутри параллелепипеда. Поэтому, приравнивая соответствующие выражения, получаем

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0. \qquad (3.12)$$

Это уравнение носит название *дифференциального уравнения неразрывности для сжимаемой жидкости.*

Если движение сжимаемой жидкости установившееся, то, очевидно $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$, и уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \qquad (3.13)$$

или в векторной форме

$$\operatorname{div}(\rho \bar{v})=0. \qquad (3.13')$$

Уравнения неразрывности (3. 12) или (3. 13) часто пишут в несколько иной форме. Для того чтобы ее получить, выполним дифференцирование в уравнении (3. 12); тогда получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho}{\partial x}v_x+\frac{\partial \rho}{\partial y}v_y+\frac{\partial \rho}{\partial z}v_z+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0.$$

Замечая, что первые четыре слагаемых представляют собой полную производную от ρ по времени t, получим уравнение неразрывности в иной форме:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0. \qquad (3.14)$$

Иногда это уравнение пишут несколько иначе, вводя коэффициент кубического расширения θ, характеризующий относительное изменение объема жидкости в единицу времени:

$$\theta=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Убедимся в этом. Из уравнения (3. 14) находим

$$\theta=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

Путь $m=\rho\tau$ есть масса небольшого движущегося элемента жидкости и τ — его объем. При движении жидкости плотность ρ и объем τ этого элемента могут меняться, однако масса элемента должна оставаться постоянной ($m=\text{const}$).

В таком случае будем иметь

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\tau+\rho\frac{d\tau}{dt}=0.$$

Отсюда

$$\theta=-\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt},$$

т. е. действительно величина θ характеризует скорость расширения единицы объема жидкости, в связи с чем и называется коэффициентом кубического расширения.

Используя величину θ, перепишем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\theta=0. \qquad (3.15)$$

В частном случае, когда жидкость несжимаемая, т. е. $\rho=\text{const}$, коэффициент кубического расширения $\theta=0$. Следовательно, уравнение неразрывности примет вид

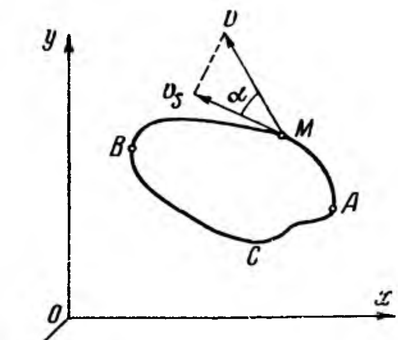
$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \qquad (3.16)$$

Это уравнение носит название *уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости.* В векторной форме оно имеет вид

$$\operatorname{div}\bar{v}=0. \qquad (3.17)$$

§ 6. ЦИРКУЛЯЦИЯ СКОРОСТИ

В аэродинамике как теоретической, так и прикладной исключительно большую роль играет понятие о циркуляции скорости, обозначаемой через Г. С величиной циркуляции связывается понятие интенсивности или напряжения вихрей. От закона ее распределения по размаху крыла самолета зависят величины сил и моментов, действующих на крыло.



Фиг. 3.5. К определению циркуляции скорости.

Выделим в движущейся жидкости произвольный фиксированный в пространстве замкнутый контур C (фиг. 3.5). Пусть в некоторой его точке M скорость изображается вектором $\bar{v}$. Составим произведение $v\cos(\bar{v},\ \overline{ds})ds=v\cos\alpha\, ds$, напоминающее выражение для элементарной работы в теоретической механике (там вместо вектора скорости $\bar{v}$ рассматривается вектор силы $\bar{F}$). Возьмем от этого выражения криволинейный интеграл по дуге AB. Тогда будем иметь

$$\Gamma=\int_{AB} v\cos(\bar{v},\ \overline{ds})\,ds. \qquad (3.18)$$

Это выражение называется *циркуляцией скорости* по дуге AB. Обыкновенно циркуляция Г исчисляется по всему замкнутому контуру C, т. е.

$$\Gamma=\int_{C} v\cos(\bar{v},\ \overline{ds})\,ds. \qquad (3.19)$$

Направление интегрирования будем считать положительным, если охватываемая контуром C область (которую можно мыслить как мыльную пленку, натянутую на контур C) остается при интегрировании слева.

Заменяя в выражении (3. 19) $v \cos(\bar{v}, \overline{ds})$ через v_s, где v_s — проекция скорости на направление касательной, будем иметь

$$\Gamma = \int_C v_s\, ds. \qquad (3.20)$$

Замечая, что подинтегральное выражение в формуле (3. 20) является скалярным произведением вектора $\bar{v}$ на вектор $\overline{ds}$, можем написать

$$\Gamma = \int_C (\bar{v}, \overline{ds}). \qquad (3.21)$$

Используя известную формулу скалярного произведения двух векторов $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$:

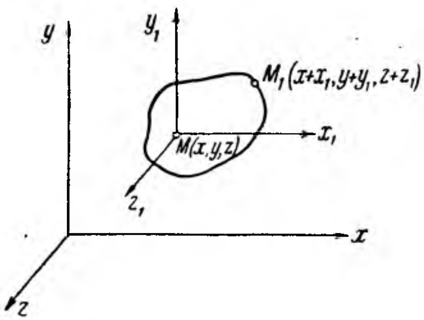
$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

циркуляцию Γ на основании выражения (3. 21) можно представить в следующем, весьма распространенном в приложениях виде:

$$\Gamma = \int_C v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz. \qquad (3.22)$$

§ 7. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ

В кинематике твердого тела доказывается, что в общем случае движение твердого тела в каждый момент времени складывается из поступательного перемещения и вращения вокруг некоторой оси, называемой мгновенной осью вращения. Движение жидкости гораздо сложнее, так как всякая жидкая частица при своем движении не только перемещается поступательно и вращательно, но и деформируется. Последнее приводит к необходимости изучения в кинематике жидкости так называемого деформационного движения.



Фиг. 3.6. К рассмотрению движения жидкой частицы.

Рассмотрим в какой-либо момент времени t движение бесконечно малой жидкой частицы. Пусть в некоторой точке $M(x, y, z)$ внутри частицы (фиг. 3. 6) проекции скорости суть $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$. Тогда проекции скорости в некоторой точке $M_1(x+x_1, y+y_1, z+z_1)$ на поверхности частицы могут быть написаны в виде

$$v_{x1} = v_x(x+x_1,\ y+y_1,\ z+z_1);$$
$$v_{y1} = v_y(x+x_1,\ y+y_1,\ z+z_1);$$
$$v_{z1} = v_z(x+x_1,\ y+y_1,\ z+z_1).$$

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора и удерживая в нем только величины первого порядка малости, т. е. члены, содержащие x_1, y_1, z_1 в степени не выше первой, получим следующее выражение для скоростей v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}:

$$\left.\begin{aligned} v_{x1} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1, \\ v_{y1} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_y}{\partial z} z_1, \\ v_{z1} &= v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_z}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1, \end{aligned}\right\} \qquad (3.23)$$

где для краткости написания положено $v_x = v_x(x, y, z)$, $v_y = v_y(x, y, z)$ и $v_z = v_z(x, y, z)$. Преобразуем эти выражения, для чего прибавим к правой части первого уравнения (3.23) величины $\pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} y_1$ и $\pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} z_1$ и перегруппируем члены. В результате будем иметь

$$v_{x1} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1 +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} z_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} z_1,$$

откуда

$$v_{x1} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) y_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) z_1 +$$
$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) z_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) y_1.$$

Аналогичными преобразованиями из второго и третьего уравнений (3.23) можно получить

$$v_{y1} = v_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) x_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) z_1 +$$
$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) x_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) z_1;$$

$$v_{z1} = v_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) y_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 +$$
$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial v} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) y_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) x_1.$$

Введем для краткости обозначения

$$
\left.
\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right); \quad & \varepsilon_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right); \quad & \theta_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x};\\
\omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right); \quad & \varepsilon_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right); \quad & \theta_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y};\\
\omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right); \quad & \varepsilon_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right); \quad & \theta_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}
\right\} \quad (3.24)
$$

Тогда полученные выше выражения для v_{x1}, v_{y1} и v_{z1} можно переписать в виде

$$
\left.
\begin{aligned}
v_{x1} &= v_x + \theta_x x_1 + \varepsilon_z y_1 + \varepsilon_y z_1 + \omega_y z_1 - \omega_z y_1;\\
v_{y1} &= v_y + \varepsilon_z x_1 + \theta_y y_1 + \varepsilon_x z_1 + \omega_z x_1 - \omega_x z_1;\\
v_{z1} &= v_z + \varepsilon_y x_1 + \varepsilon_x y_1 + \theta_z z_1 + \omega_x y_1 - \omega_y x_1.
\end{aligned}
\right\} \quad (3.25)
$$

Введем в рассмотрение следующую вспомогательную квадратичную функцию:

$$
\Phi = \frac{1}{2}\left(\theta_x x_1^2 + \theta_y y_1^2 + \theta_z z_1^2 + 2\varepsilon_x y_1 z_1 + 2\varepsilon_y z_1 x_1 + 2\varepsilon_z x_1 y_1\right), \quad (3.26)
$$

производные которой по координатам x_1, y_1, z_1 имеют вид

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \theta_x x_1 + \varepsilon_y z_1 + \varepsilon_z y_1,\\
\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= \theta_y y_1 + \varepsilon_x z_1 + \varepsilon_z x_1,\\
\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} &= \theta_z z_1 + \varepsilon_x y_1 + \varepsilon_y x_1.
\end{aligned}
\right\} \quad (3.27)
$$

С помощью функции Ф выражения для проекций скоростей могут быть написаны в следующем компактном виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
v_{x1} &= v_x + \omega_y z_1 - \omega_z y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1};\\
v_{y1} &= v_y + \omega_z x_1 - \omega_x z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1};\\
v_{z1} &= v_z + \omega_x y_1 - \omega_y x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}.
\end{aligned}
\right\} \quad (3.28)
$$

Выясним физический смысл уравнений (3.28).

Члены v_x, v_y и v_z представляют собой, очевидно, проекции скорости перемещения рассматриваемой частицы в пространстве как твердого тела.

Вспоминая решение задачи из теоретической механики о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, замечаем, что члены

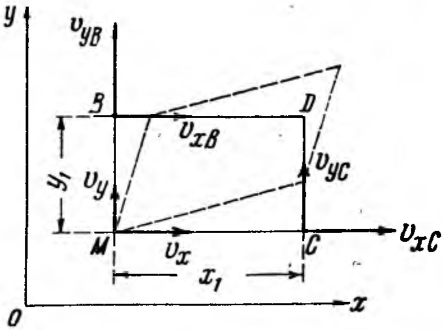
$\omega_y z_1-\omega_z y_1$; $\omega_z x_1-\omega_x z_1$; $\omega_x y_1-\omega_y x_1$ представляют собой проекции скорости вращения частицы жидкости (так же как твердого тела) вокруг мгновенной оси, проходящей через точку M. Такое вращательное движение частиц жидкости называется *вихревым движением*, а компоненты угловой скорости ω_x, ω_y, ω_z — *компонентами вихря*.

Как следует из равенств (3.24),

$$2\bar{\omega}=\operatorname{rot}\bar{v}. \qquad (3.24')$$

Выясним смысл слагаемых

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1};\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1};\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}.$$



Фиг. 3.7. Деформация жидкой частицы, имеющей форму параллелепипеда.

Прежде всего из физических соображений ясно, что жидкая частица вследствие различия скоростей в отдельных ее точках должна деформироваться. Отсюда непосредственно следует, что члены $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}$ представляют собой компоненты скорости деформации частицы. Покажем это на простом примере.

Пусть бесконечно малая жидкая частица имеет в момент времени t форму прямоугольного параллелепипеда. Для упрощения рассмотрим проекцию этой частицы на плоскость x, y, т. е. бесконечно малый прямоугольник $MBDC$ (фиг. 3.7). Если компоненты скорости точки $M(x, y)$ прямоугольника обозначить через v_x и v_y, то составляющие скорости в точках $C(x+x_1, y)$ и $B(x, y+y_1)$ можно написать в виде (с точностью до малых первого порядка)

$$\left.\begin{aligned} v_{xC}&=v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}x_1, & v_{yC}&=v_y+\frac{\partial v_y}{\partial x}x_1,\\ v_{xB}&=v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}y_1, & v_{yB}&=v_y+\frac{\partial v_y}{\partial y}y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (3.29)$$

Поскольку нас интересует относительное перемещение точек C и B (относительно точки M), перепишем равенства (3.29) в следующем виде:

$$v_{xC}-v_x=\frac{\partial v_x}{\partial x}x_1, \quad v_{yC}-v_y=\frac{\partial v_y}{\partial x}x_1,$$

$$v_{xB}-v_x=\frac{\partial v_x}{\partial y}y_1, \quad v_{yB}-v_y=\frac{\partial v_y}{\partial y}y_1.$$

Ясно, что скорости $\frac{\partial v_x}{\partial x}x_1=\theta_x x_1$ и $\frac{\partial v_y}{\partial y}y_1=\theta_y y_1$ является скоростями линейной деформации ребер прямоугольника $MBDC$, скорости же $\frac{\partial v_y}{\partial x} x_1$ и $\frac{\partial v_x}{\partial y} y_1$ указывают на поворот ребер MC и MB (см. фиг. 3.7), т. е. являются скоростями деформации скашивания прямоугольника $MBDC$ в некоторый косоугольник (пунктир на фиг. 3.7). Очевидно, что ребро MC поворачивается с угловой скоростью $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, а ребро MB — с угловой скоростью $\frac{\partial v_x}{\partial y}$. Так как скорость изменения прямого угла BMC складывается из угловых скоростей вращения ребер MC и MB, то, следовательно, она представляет собой сумму

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\varepsilon_z.$$

Проводя аналогичные рассуждения для других граней параллелепипеда (или их проекций на координатные плоскости), можно также просто показать, что величина $\frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 = \theta_z z_1$ является скоростью линейной деформации вдоль оси z и что величины угловых скоростей скашивания остальных прямых углов параллелепипеда выражаются соотношениями

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\varepsilon_x \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\varepsilon_y.$$

Из изложенного следует, что величины

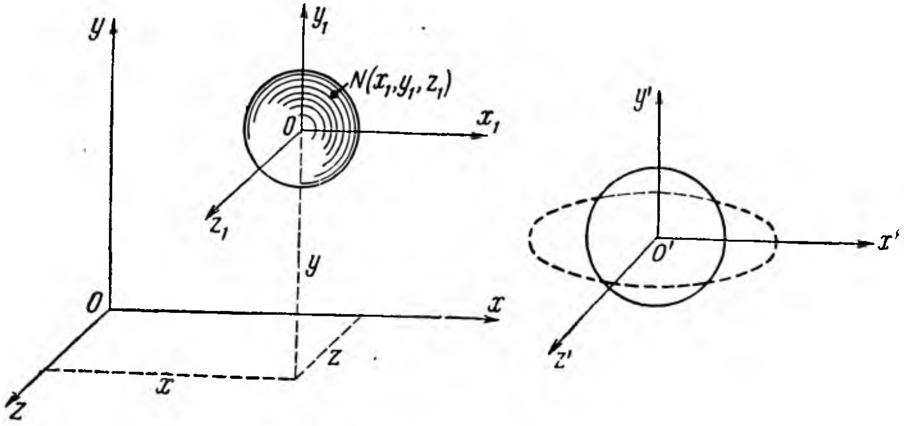
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}$$

действительно представляют собой компоненты скорости деформации жидкой частицы, причем величины ε_x, ε_y и ε_z характеризуют деформацию скашивания, а величины θ_x, θ_y и θ_z — линейную деформацию (растяжение или сжатие). Обращаясь вновь к формулам (3.28), физический смысл которых теперь полностью выяснен, приходим к следующему важному выводу.

Элементарное перемещение жидкой частицы состоит из поступательного перемещения со скоростью $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$ ее центра; вращения относительно некоторой оси, проходящей через этот центр с угловой скоростью $\bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$; деформационного движения, характеризуемого функцией Φ (x_1, y_1, z_1).

Для лучшего уяснения существа деформационного движения в заключение настоящего параграфа рассмотрим физическую интерпретацию деформационного движения, данную Н. Е. Жуковским в его курсе лекций «Основы воздухоплавания».

Пусть бесконечно малая жидкая частица имеет в некоторый момент времени t форму сферы, центр которой расположен в точке $O(x, y, z)$ и радиус равен a (фиг. 3.8). Расположим подвижные оси координат x_1, y_1, z_1 (параллельные неподвижным осям x, y, z) так, чтобы их начало было в центре сферы, и предположим, что при движении жидкости они будут перемещаться поступательно вместе с центром сферической жидкой частицы. Пусть компоненты скорости центра O частицы будут v_{x0}, v_{y0} и v_{z0}. Тогда компоненты скорости любой



Фиг. 3.8. Деформация жидкой частицы, имеющей форму шарика.

точки $N(x_1, y_1, z_1)$ на поверхности частицы на основании предыдущего могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1), \\ v_y &= v_{y0} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1), \\ v_z &= v_{z0} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1). \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

Нетрудно убедиться, что функция Φ, являясь однородным многочленом второй степени относительно координат x_1, y_1, z_1, представляет собой центральную поверхность второго порядка с центром в начале координат — эллипсоид, называемый *эллипсоидом деформации*. Известно, что если оси координат x_1, y_1, z_1 направить вдоль осей эллипсоида деформации, то члены, содержащие произведения разноименных координат, уничтожатся. Оси эллипсоида в этом случае называются *главными осями деформации*. При таком выборе осей будем иметь

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} x_1^2 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1^2 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1^2\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1, \tag{3.31}$$

т. е. вдоль главных осей деформации имеют место только линейные деформации.

Рассматриваемая нами жидкая частица имеет в начальный момент (до деформации) форму шара. Напишем уравнение этого шара в виде

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2.$$

Обозначим через x_2, y_2, z_2 координаты (относительно центра O), которые будет иметь точка N частицы через бесконечно малый промежуток времени dt. Тогда, ограничиваясь рассмотрением только движения деформации, на основании (3.31) можно написать

$$x_2 = x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dt = x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 \, dt,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dt = y_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 \, dt,$$

$$z_2 = z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} dt = z_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 \, dt,$$

ибо $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}$ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z_1}$ — скорости деформации.

Отсюда

$$x_1 = \frac{x_2}{1 + \dfrac{\partial v_x}{\partial x} dt},$$

$$y_1 = \frac{y_2}{1 + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} dt},$$

$$z_1 = \frac{z_2}{1 + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} dt}.$$

Подставляя значения x_1, y_1, z_1 в уравнение шара, находим

$$\frac{x_2^2}{a^2 \left(1 + \dfrac{\partial v_x}{\partial x} dt\right)^2} + \frac{y_2^2}{a^2 \left(1 + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} dt\right)^2} + \frac{z_2^2}{a^2 \left(1 + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} dt\right)^2} = 1.$$

Это уравнение является уравнением эллипсоида с полуосями:

$$a \left(1 + \frac{\partial v_x}{\partial x} dt\right),$$

$$a \left(1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt\right),$$

$$a \left(1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} dt\right).$$

Таким образом, *бесконечно малый шар, деформируясь, обращается в бесконечно малый эллипсоид, оси которого направлены по главным осям деформации* (см. фиг. 3.8).

Найдем изменение объема рассматриваемой бесконечно малой частицы. Для этого необходимо из объема эллипсоида вычесть объем шара:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi a^3\left(1+\frac{\partial v_x}{\partial x}dt\right)\left(1+\frac{\partial v_y}{\partial y}dt\right)\left(1+\frac{\partial v_z}{\partial z}dt\right)-\frac{4}{3}\pi a^3 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dt = \frac{4}{3}\pi a^3\theta\, dt,$$

где $\theta = \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$ — коэффициент кубического расширения.

Если жидкость несжимаема, то коэффициент кубического расширения $\theta = 0$, и мы получим известное уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

§ 8. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Для большого количества задач аэродинамики и газодинамики весьма важно изучение потенциального движения жидкости. *Потенциальным движением жидкости называется безвихревое движение, т. е. такое движение, в котором компоненты вихря ω_x, ω_y, ω_z равны нулю.*

Следует отметить, что в действительности в связи с неидеальностью жидкости в ней постоянно наблюдается образование вихревых движений. Причиной этого служит ряд факторов, в том числе главнейший — наличие внутреннего трения в жидкости. Несмотря на это, схема безвихревого потенциального движения дает близкую к действительности картину во многих случаях, важных для решения практических задач.

Итак, сделав допущение об отсутствии завихренности потока, рассмотрим основные свойства потенциального течения жидкости.

Исходя из определения потенциального движения жидкости будем иметь

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=0,$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=0,$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=0.$$

В векторной форме это условие напишется в виде

$$\bar{\omega}=0$$

или

$$\operatorname{rot}\bar{v}=0.$$

Из полученных выражений следует:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_z}{\partial y}&=\frac{\partial v_y}{\partial z},\\ \frac{\partial v_x}{\partial z}&=\frac{\partial v_z}{\partial x},\\ \frac{\partial v_y}{\partial x}&=\frac{\partial v_x}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Рассмотрим теперь дифференциальный трехчлен $v_x dx+v_y dy+$ $+v_z dz$. Как известно, равенства (3.32) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы этот дифференциальный трехчлен был полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x, y, z)$, т. е.

$$v_x dx+v_y dy+v_z dz=d\varphi(x, y, z).$$

Функция φ носит название *потенциала скорости* и играет большую роль в аэродинамике[1]. Раскроем ее полный дифференциал, тогда получим

$$v_x dx+v_y dy+v_z dz=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz.$$

Сравнивая коэффициенты при dx, dy, dz, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ v_y&=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ v_z&=\frac{\partial\varphi}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

т. е. *проекция скорости на координатную ось равна частной производной от потенциала скорости по соответствующей координате.*

Это важное свойство потенциала скорости сохраняется и для произвольного направления. В самом деле, рассмотрим какую-нибудь точку M в жидкости, находящуюся на произвольной кривой (фиг. 3.9). Пусть скорость в точке M равна $\bar{v}$. Проведем в точке M касательную к кривой. Так как мы рассматриваем потенциальный поток, то существует потенциал скорости φ и можно написать:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}=$$

$$=v\left[\cos(v, x)\frac{dx}{ds}+\cos(v, y)\frac{dy}{ds}+\cos(v, z)\frac{dz}{ds}\right].$$

[1] Будем предполагать, что функция φ непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Так как

$$\frac{dx}{ds} = \cos(s, x), \ \frac{dy}{ds} = \cos(s, y), \ \frac{dz}{ds} = \cos(s, z),$$

то окончательно будем иметь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = v\cos(v, s) = v_s. \qquad (3.34)$$

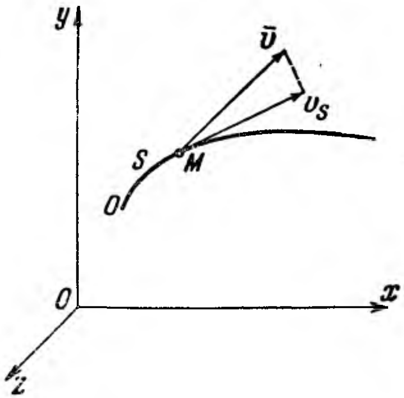
Аналогично для произвольного направления r

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = v\cos(v, r) = v_r, \qquad (3.35)$$

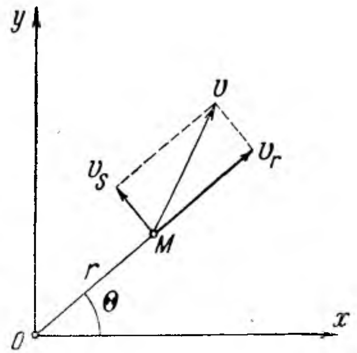
т. е. *проекция скорости на произвольное направление равна производной от потенциала скорости по этому направлению.* В частности, для полярных координат на плоскости будем иметь

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \\ v_s &= \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.36)$$

где v_r, v_s — проекции вектора скорости v точки M на направление полярного радиуса-вектора r и на направление, перпендикулярное полярному радиусу-вектору (фиг. 3.10).



Фиг. 3.9. К выводу основного свойства потенциала скорости.



Фиг. 3.10. Составляющие скорости в полярных координатах.

В заключение отметим, что рассмотренная в предыдущем параграфе квадратичная функция Φ является, очевидно, потенциалом скоростей деформаций, так как частные производные от нее по координатам равны соответствующим компонентам скоростей деформаций [см. формулы (3. 27)]. Следовательно, деформационное движение жидкости есть потенциальное движение в бесконечно малой области.

§ 9. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Выше было показано, что уравнение неразрывности в общем виде можно написать следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0.$$

Подставляя значения компонентов скорости по формулам (3. 33), будем иметь

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0. \tag{3.37}$$

В случае если жидкость несжимаемая, т. е. $\rho=\text{const}$, уравнение неразрывности примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{3.38}$$

Указанное уравнение носит название *уравнения Лапласа*, а функция φ, удовлетворяющая этому уравнению,— *гармонической функции*. Таким образом, для потенциального потока несжимаемой жидкости потенциал скорости будет являться гармонической функцией координат x, y, z.

Уравнение Лапласа (3. 38) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Методы решения этого уравнения в настоящее время достаточно хорошо изучены. Каждому конкретному потенциальному потоку соответствует свой потенциал скорости, т. е. решение уравнения (3. 38). Так как потоков существует бесконечное множество, то уравнение (3. 38) имеет бесчисленное множество решений. Возникает вопрос, как определить решение уравнения (3. 38), т. е. потенциал φ, из этого бесчисленного множества решений, соответствующий данному конкретному потоку. Для того чтобы найти то решение уравнения Лапласа, которое отвечает телу заданной формы с заданным условием на внешних границах потока, вводятся так называемые краевые, или граничные условия.

Предположим, что какое-нибудь твердое тело, поверхность которого задана уравнением $f(x, y, z)=0$, обтекается потоком, скорость которого на бесконечности ($r=\infty$) параллельна оси x и равна v_∞. В таком случае необходимо, чтобы при $r=\infty$ скорости $v_x=v_\infty$, $v_y=v_z=0$.

Предполагая, что поток обтекает тело безотрывно, т. е. в каждой точке тела жидкость скользит вдоль него, имеем второе граничное условие:

на поверхности тела $v_n=0$.

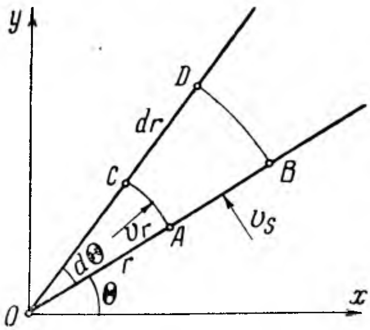
В случае плоского потенциального движения уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости (уравнение Лапласа) примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \qquad (3.38')$$

Отсюда можно заключить, что только гармонические функции могут определять потенциальное течение несжимаемой жидкости.

§ 10. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим плоский потенциальный поток несжимаемой жидкости. Выделим в потоке бесконечно малую площадку $ACDB$, ограниченную двумя бесконечно близкими полярными радиусами и двумя бесконечно близкими окружностями радиуса r и $r+dr$ (фиг. 3.11). Вычислим количества жидкости, втекающей через грани AB и AC и вытекающей через грани CD и DB. Через грань AC втекает в единицу времени масса жидкости, равная



Фиг. 3.11. К выводу уравнения неразрывности в полярных координатах.

$$\rho v_r r d\theta,$$

а через грань AB —

$$\rho v_s dr.$$

Через грань DB вытекает в единицу времени масса жидкости

$$\rho v_r r\,d\theta+\frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r\,d\theta)\,dr,$$

аналогично через грань CD вытекает масса

$$\rho v_s\,dr+\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_s\,dr)\,d\theta.$$

Для несжимаемой жидкости условие неразрывности требует, чтобы количества вытекающей и втекающей жидкости были одинаковы. Приравнивая вычисленное количество втекшей жидкости количеству вытекшей, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r\,d\theta)\,dr+\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_s\,dr)\,d\theta=0.$$

Заменяя v_r и v_s их выражениями по формулам (3.36), получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0.$$

Выполняя дифференцирование и деля почленно на r, окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} = 0. \qquad (3.39)$$

Уравнение (3. 39) представляет собой уравнение Лапласа в полярных координатах на плоскости.

§ 11. ЦИРКУЛЯЦИЯ СКОРОСТИ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОТОКЕ

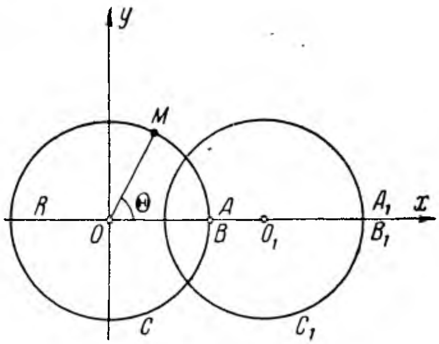
Выражение для циркуляции скорости в потенциальном потоке приобретает простую форму. В самом деле, если мы напишем выражение для циркуляции вдоль какой-нибудь произвольной дуги AB

$$\Gamma = \int_{AB} v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$$

и подставим вместо v_x, v_y, v_z их выражения по формулам (3. 33), то получим

$$\Gamma = \int_{AB} \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = \int_{AB} d\varphi = \varphi_B - \varphi_A. \qquad (3.40)$$

Это означает, что циркуляция вдоль дуги AB не зависит от формы дуги и равна разности значений потенциала скорости в конечных точках дуги. В случае когда точки A и B совпадают, т. е. контур замкнутый и функция φ является однозначной функцией координат, циркуляция становится равной нулю.



Фиг. 3. 12. К расчету циркуляции скорости в потенциальном потоке.

Следует отметить, что потенциал скорости может быть как однозначной, так и многозначной функцией координат.

Поясним это на следующем примере.

Пример. Потенциальный плоский поток задан потенциалом скорости

$$\varphi = \theta,$$

где θ — полярный угол. Требуется вычислить (фиг. 3. 12):

а) циркуляцию Γ по кругу C, уравнение которого

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

б) циркуляцию Γ по кругу C_1, уравнение которого

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2,$$

где $a > R$.

Решение. Циркуляцию по кругу C вычислим по формуле

$$\Gamma = \varphi_B - \varphi_A.$$

Так как в этом случае $\varphi_A = \theta_A = 0$, $\varphi_B = \theta_B = 2\pi$, ибо при полном обходе круга угол θ получает приращение 2π, то циркуляция $\Gamma = 2\pi$, т. е. не равна нулю и $\varphi_B = \varphi_A + 2\pi$.

Примем полученное значение φ_B за начальное, соответствующее точке A, и сделаем вновь полный обход по кругу C. Тогда новое значение потенциала скорости $(\varphi_B)_{нов}$ в точке B согласно предыдущему равенству напишется в следующем виде:

$$(\varphi_B)_{нов} = \varphi_B + 2\pi = \varphi_A + 4\pi.$$

Продолжая этот процесс далее, мы приходим к выводу, что потенциал скорости в одной и той же точке может иметь множество различных значений (потенциал не является однозначной функцией точек плоскости)

$$\varphi = \varphi_A + n \cdot 2\pi,$$

где n — любое целое число. При этом, как мы видели, циркуляция скорости по кругу C оказывается отличной от нуля. Иной результат мы будем иметь для круга C_1.

Для круга C_1 вычислим циркуляцию по той же формуле

$$\Gamma = \varphi_{B1} - \varphi_{A1}.$$

Так как в этом случае угол θ при полном обходе по контуру C_1 возвращается к своему первоначальному значению, то

$$\varphi_{B1} = 0;$$

$$\varphi_{A1} = 0$$

и, следовательно, циркуляция по кругу C_1 равна нулю.

Рассмотренный пример показывает, что если потенциал не является однозначной функцией точек плоскости, то имеются как замкнутые контуры, циркуляция скорости вдоль которых отлична от нуля, так и замкнутые контуры, циркуляция скорости вдоль которых равна нулю.

§ 12. ФУНКЦИЯ ТОКА

В аэродинамике большую роль в исследовании потоков играет так называемая функция тока ψ. Выясним ее смысл и значение для плоского потенциального, установившегося движения несжимаемой жидкости.

Как известно, дифференциальное уравнение линий тока для плоского движения жидкости имеет вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

или

$$v_x dy - v_y dx = 0. \qquad (а)$$

Подставляя в это уравнение значения v_x и v_y, выраженные в функции координат x и y, и интегрируя, можно получить уравнение, связывающее x, y и произвольную постоянную. Каждому значению произвольной постоянной будет соответствовать определенная линия тока. Дифференциальный двучлен, стоящий в левой части уравнения (а), интегрируется крайне просто, так как он оказывается равным полному дифференциалу некоторой функции $\psi(x, y)$.

В самом деле, уравнение неразрывности в рассматриваемом случае можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial y}. \qquad (б)$$

Из этого соотношения следует, что v_x и v_y можно выразить через некоторую функцию ψ следующим образом:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ и } v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (3.41)$$

Действительно, подставляя (3.41) в (б), получаем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y},$$

т. е. тождество.

Подставляя затем значения v_x и v_y из (3.41) в (а), будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = d\psi = 0,$$

откуда, интегрируя, найдем уравнение линий тока

$$\psi(x, y) = C, \qquad (3.42)$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнение (3.42) является уравнением семейства линий тока. Давая постоянному C различные значения, будем получать различные линии тока, принадлежащие данному семейству. Функция ψ называется *функцией тока.*

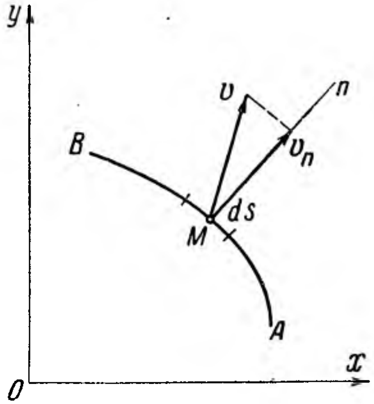
Сравнение формул (3.33) и (3.41) приводит к важному соотношению

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ v_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.43)$$

Если потенциал скорости φ, являющийся функцией координат x и y, приравнять постоянному

$$\varphi(x, y) = C, \tag{3.44}$$

то, очевидно, будем иметь семейство линий, обладающих тем свойством, что вдоль каждой такой линии потенциал скорости сохраняет постоянное значение. Такие линии носят название *эквипотенциальных линий*, т. е. линий равного потенциала.



Фиг. 3.13. К определению физического смысла функции тока.

Из формул (3.43) путем перемножения можно установить следующее соотношение между функциями φ и ψ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Как известно из математики, это соотношение является условием ортогональности кривых $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$. Таким образом, в плоском установившемся потенциальном потоке семейство линий тока и семейство эквипотенциальных линий взаимно ортогональны.

С помощью соотношения (3.43) можно показать также, что функция тока ψ для потенциального потока, как и потенциал скорости φ, удовлетворяют уравнению Лапласа. Действительно, используя условие потенциальности

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$$

и соотношение (3.43), получаем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. уравнение Лапласа.

Выясним физический смысл функции тока ψ. Рассмотрим в пространстве, заполненном плоским потенциальным потоком, произвольную дугу, соединяющую какие-либо две точки A и B (фиг. 3.13).

Возьмем на дуге некоторую точку M и пусть скорость в ней будет изображаться вектором v. Подсчитаем элементарный расход, т. е. расход через бесконечно малый элемент контура ds[1]. Очевидно,

$$dQ = v_n ds \cdot 1 = v_n ds,$$

[1] Под расходом жидкости через некоторую дугу при плоском потоке понимают расход через цилиндрическую поверхность, построенную на этой дуге как на образующей, высота которой равна единице.

где v_n — проекция скорости на нормаль в точке M. Известно, что проекция скорости на нормаль v_n может быть выражена через проекции скорости на координатные оси v_x и v_y следующим образом:

$$v_n = v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y),$$

откуда

$$dQ = [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y)]\, ds.$$

Используя известные выражения для косинусов углов, образуемых нормалью с осями координат:

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds},$$

а также формулы (3.43), получим

$$dQ = \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right] ds = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy,$$

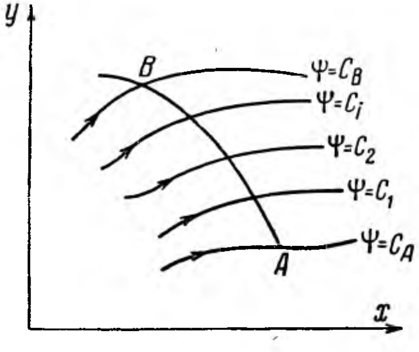
т. е.

$$dQ = d\psi. \tag{3.45}$$

Таким образом, дифференциал функции тока равен расходу жидкости через элемент дуги ds в единицу времени. Для определения расхода через всю кривую AB нужно проинтегрировать выражение (3.45):

$$Q = \int\limits_{AB} d\psi = \psi_B - \psi_A, \tag{3.46}$$

т. е. *расход жидкости через произвольный отрезок кривой AB равен разности значений функции тока в конечных ее точках и не зависит от формы кривой.* Отсюда следует, что если сама кривая AB является участком линии тока, то расход $Q=0$ (так как вдоль линии тока $\psi=\text{const}$). Из формулы (3.46) и фиг. 3.14 видно, что количество жидкости, протекающей между двумя линиями тока, например, $\psi=C_A$ и $\psi=C_B$, на всем их протяжении есть величина постоянная. Если контур замкнут т. е. если точки A и B совпадают, то при однозначности функции тока ψ расход $Q=0$, если же ψ неоднозначная функция, т. е. если при полном обходе замкнутого контура функция тока не возвратится к своему первоначальному значению, то расход Q через такой контур будет отличен от нуля. Это может иметь место, если внутри контура осуществляется либо подвод, либо отвод жидкости, т. е. если внутри контура расположены так называемые источники или стоки (подробнее см. ниже § 16).



Фиг. 3.14. Семейство линий тока.

§ 13. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

Большое практическое значение в исследовании потенциальных потоков имеет метод наложения потенциальных потоков, заключающийся в следующем. Пусть мы имеем два потенциальных потока, обладающих потенциалами φ_1 и φ_2, удовлетворяющими, как известно, уравнению Лапласа, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}=0, \\ \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.47}$$

В таком случае потенциал скорости, равный их сумме

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2, \tag{3.48}$$

также будет удовлетворять уравнению Лапласа, т. е. будет представлять некоторый новый поток несжимаемой жидкости. В самом деле, в силу (3.48) и (3.47) будем иметь

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right)=0.$$

Новый сложный поток с потенциалом $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ является результатом наложения двух исходных потоков, т. е. результатом геометрического суммирования в каждой точке пространства скоростей первого и второго потоков. В самом деле, для сложного потока

$$\left.\begin{aligned} v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=v_{x1}+v_{x2}, \\ v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=v_{y1}+v_{y2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

Аналогично можно показать, что для нового сложного потока функция тока

$$\psi=\psi_1+\psi_2, \tag{3.50}$$

т. е. равна алгебраической сумме функций тока исходных потоков.

Следовательно, *наложение двух и более потоков сводится к простому алгебраическому суммированию потенциалов и функций тока исходных потоков.*

Таким образом, если нам известен ряд частных решений уравнения Лапласа (3.38) или (3.38′), то в силу линейности этого уравнения любая линейная комбинация частных решений будет также являться решением этого уравнения.

Поэтому, располагая рядом простейших решений, соответствующих некоторым простейшим течениям жидкости, мы путем суммирования различных сочетаний этих решений можем получить более сложные решения, соответствующие более сложным потокам жидкости.

В последующих параграфах будут рассмотрены наиболее характерные примеры простейших плоских, установившихся потенциальных потоков, комбинацией (наложением) которых могут быть получены сложные практически важные потоки.

§ 14. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ РАВНОМЕРНЫЙ ПОТОК

Предположим, что плоскопараллельный поток задан потенциалом

$$\varphi = ax + by,$$

где a и b — некоторые действительные числа.

Для того чтобы исследовать характер течения, продифференцируем потенциал φ по координатам x и y; тогда получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = a, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = b.$$

Следовательно, составляющие скорости течения по координатным осям

$$v_x = a \text{ и } v_y = b,$$

т. е. поток движется с постоянной скоростью v, равной

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Найдем линии тока. Так как уравнение линий тока

$$d\psi = v_x dy - v_y dx,$$

то в данном случае

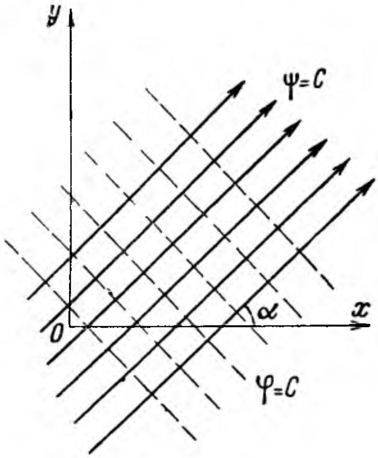
$$d\psi = a dy - b dx,$$

откуда

$$\psi = ay - bx.$$

Очевидно, линии тока представляют собой семейство параллельных прямых

$$\psi = ay - bx = \text{const},$$



Фиг. 3.15. Прямолинейный равномерный поток.

наклоненных к оси x под углом α, тангенс которого $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{b}{a}$ (фиг. 3.15). Если поток направлен параллельно оси x, функции φ и ψ представляются в виде

$$\varphi = ax, \quad \psi = ay; \tag{3.51}$$

при направлении потока параллельно оси y

$$\varphi = by, \quad \psi = -bx. \tag{3.52}$$

§ 15. ТЕЧЕНИЕ ВНУТРИ ПРЯМОГО УГЛА

Предположим, что плоскопараллельный поток задан следующим потенциалом скорости:

$$\varphi = a(x^2 - y^2), \tag{3.53}$$

где постоянная a действительна и, кроме того, $a>0$. Прежде чем перейти к исследованию этого течения, покажем, что в силу соотношений (3.43), зная φ, можно определить функцию тока ψ (и наоборот, если задана функция ψ, то можно найти φ). В самом деле, из первого уравнения (3.43)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

находим

$$\psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + C(x). \tag{а}$$

Постоянная C есть функция x, так как при интегрировании по y фиксируется только переменное x. Подставляя значение $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, из уравнения (3.53) находим

$$\psi = \int 2ax\, dy + C(x) = 2axy + C(x). \tag{б}$$

Для определения произвольной функции $C(x)$ продифференцируем уравнение (б) по x. Получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2ay + \frac{dC}{dx}. \tag{в}$$

Используя второе уравнение (3.43) $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, будем иметь

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2ay + \frac{dC}{dx}.$$

Так как в данном случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay,$$

то, следовательно,

$$2ay = 2ay + \frac{dC}{dx}$$

или

$$\frac{dC}{dx} = 0, \text{ т. е. } C(x) = \text{const}.$$

Подставляя найденное значение $C(x)$ в уравнение (б), получим

$$\psi = 2\,axy + \text{const}$$

или, отбрасывая произвольную постоянную, получим окончательное выражение для функции тока рассматриваемого течения

$$\psi = 2axy. \tag{3.54}$$

Для нахождения линий тока приравняем функцию тока ψ постоянной:

$$\psi = 2axy = \mathrm{const},$$

откуда

$$xy = C,$$

т. е. линии тока представляют собой семейство гипербол с асимптотами, являющимися осями координат (фиг. 3.16). При $C>0$ либо $x>0$, $y>0$, либо $x<0$, $y<0$, т. е. ветви гипербол располагаются в первой и третьей четвертях. При $C<0$ либо $x<0$, $y>0$, либо $x>0$, $y<0$, т. е. ветви гипербол расположены во второй и четвертой четвертях. Если $C=0$, то линиями тока являются оси координат $x=0$, $y=0$, т. е. оси координат являются «нулевыми» линиями тока («нулевыми» линиями тока будем называть линии тока, соответствующие значению $C=0$).

Нетрудно убедиться, что в начале координат $v_x = v_y = 0$. Точка потока, в которой скорость равна нулю, называется *критической точкой*. Для того чтобы найти направление течения, рассмотрим некоторую точку M на оси x с координатами $x>0$, $y=0$. Для точки M будем иметь

$$v_{x\,M} = 2ax > 0,$$
$$v_{y\,M} = 0,$$

т. е. скорость в точке M направлена в положительную сторону оси x и поток течет в направлении, показанном на фиг. 3.16 сплошными линиями.

Если потенциал скорости φ приравнять постоянному, то получим уравнение семейства эквипотенциальных линий. Очевидно, в данном случае семейство линий

$$\varphi = a(x^2 - y^2) = \mathrm{const}$$

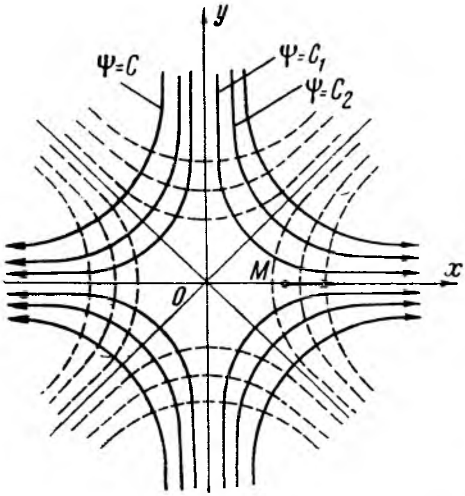
будет представлять собой семейство гипербол с асимптотами, являющимися биссектрисами координатных углов, ортогональное к семейству гипербол $xy=C$.

Если положительные части осей x и y, являющиеся нулевыми линиями тока, принять за твердые стенки (а в идеальной жидкости это всегда можно сделать, не нарушая характера течения, ибо в ней отсутствует вязкость), то исследуемое течение будет представлять течение внутри прямого угла (фиг. 3.17).

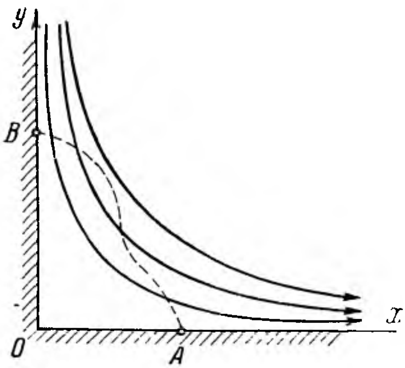
Вычислим расход жидкости через произвольную кривую AB, концы которой расположены в точках $A(x, 0)$ и $B(0, y)$. Очевидно, в этом случае

$$Q = \psi_B - \psi_A = (2axy)_B - (2axy)_A = 0,$$

что и должно быть, так как точки A и B лежат на одной и той же линии тока $\psi=0$, распавшейся на две прямых; следовательно, количество жидкости, втекающей за данный промежуток времени через кривую AB в



Фиг. 3.16. Линии тока и эквипотенциальные линии для потока, заданного потенциалом скорости $\varphi=a(x^2-y^2)$.



Фиг. 3.17. Обтекание прямого угла.

область AOB, равно количеству жидкости, вытекающей из этой области через ту же кривую.

§ 16. ИСТОЧНИК И СТОК

Пусть потенциал скорости задан в следующем виде:

$$\varphi=\ln\sqrt{x^2+y^2} \tag{3.55}$$

или в полярных координатах

$$\varphi=\ln r. \tag{3.56}$$

Найдем прежде всего функцию тока, используя уравнения (3.43). Из первого уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

имеем

$$\psi=\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy+C(\,). \tag{a}$$

Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

то

$$\psi=\int\frac{x}{x^2+y^2}dy+C(x)$$

или

$$\psi = \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + C(x).$$

Выполняя интегрирование, находим

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + C(x). \tag{б}$$

Для определения произвольной функции $C(x)$ продифференцируем (б) по x:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + C'(x)$$

или

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} + C'(x). \tag{в}$$

Так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

то, подставляя найденное значение $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ в соотношение (в), получаем

$$-\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} + C'(x),$$

откуда

$$C'(x) = 0 \text{ или } C(x) = \text{const}.$$

Таким образом, функция тока для данного течения представляется выражением (с точностью до произвольной постоянной)

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.57}$$

или в полярных координатах

$$\psi = \theta. \tag{3.58}$$

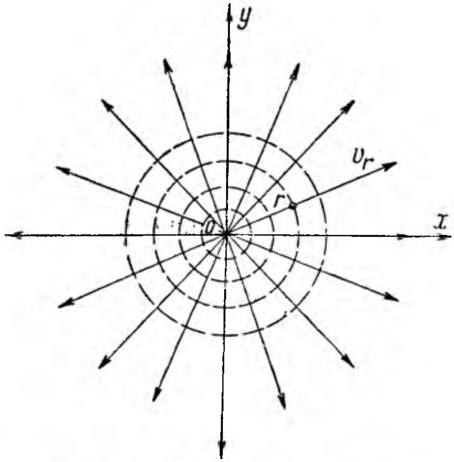
Исследуем теперь характер течения. Для этого найдем линии тока, приравняв функцию тока постоянному:

$$\psi = \theta = \text{const}.$$

Отсюда видно, что совокупность линий тока представляет собой семейство лучей, исходящих из начала координат (фиг. 3. 18). Чтобы определить направление течения, найдем v_r. Очевидно,

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} > 0,$$

т. е. направление скорости совпадает с положительным направлением полярного радиуса. Такое течение (см. фиг. 3. 18) называется течением от *источника*. Жидкость вытекает из начала координат (источника) по линиям тока, представляющим собой семейство прямолинейных лучей.



Фиг. 3. 18. Течение от источника.

Для получения семейства эквипотенциальных линий надо потенциал скорости приравнять постоянному:

$$\varphi = \ln r = \text{const}, \text{ т. е. } r = \text{const}.$$

Следовательно, эквипотенциальные линии представляют собой семейство концентрических окружностей (пунктирные линии на фиг. 3. 18), ортогональных к семейству линий тока, центры которых расположены в начале координат.

Допустим, что секундный расход вытекающей из источника жидкости равен Q. Будем называть Q мощностью источника. Установим связь между мощностью источника и функциями φ и ψ. Расход жидкости Q, протекающей через окружность радиуса r, равен

$$Q = 2\pi r v_r.$$

Так как

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dr}$$

(ибо φ зависит только от r), то

$$Q = \frac{d\varphi}{dr} 2\pi r,$$

откуда

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя, находим

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r. \qquad (3.59)$$

Легко показать, что функция ψ будет иметь вид

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta. \qquad (3.60)$$

Теперь очевидно, что выражения (3. 55)—(3. 58) представляют потенциал скорости и функцию тока для источника, мощность которого $Q = 2\pi$.

В случае когда жидкость течет в обратном направлении, т. е. втекает в начало координат по прямолинейным лучам, течение называется течением от *стока*. Очевидно, что функции φ и ψ для стока мощностью Q будут отличаться от аналогичных функций для источника только знаком, т. е. для стока

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\ln r, \tag{3.61}$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta. \tag{3.62}$$

§ 17. ДИПОЛЬ

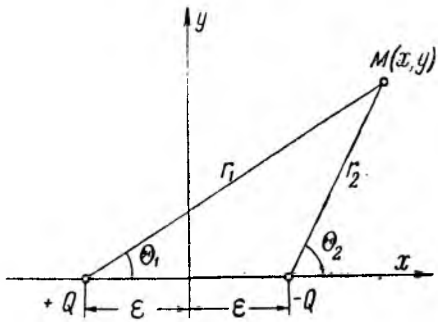
Диполем, или *дублетом* называется комбинация источника мощностью Q и стока мощностью $-Q$, помещенных на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Потенциал диполя, используя метод наложения, можно написать в виде (фиг. 3.19)

$$\varphi = \varphi_{\text{ист}} + \varphi_{\text{ст}} = \frac{Q}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2) = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

Обозначая через x, y координаты произвольной точки M, через r_1 и r_2 — расстояния точки M от источника и стока, из фиг. 3.19 находим

$$r_1 = \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}.$$



Фиг. 3.19. Диполь.

При этом выражение для потенциала скорости примет вид

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x+\varepsilon)^2+y^2}{(x-\varepsilon)^2+y^2}}$$

или

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi}\{\ln[(x+\varepsilon)^2+y^2] - \ln[(x-\varepsilon)^2+y^2]\}.$$

Если теперь сближать источник и сток, то величина ε будет стремиться к нулю. Обозначим

$$F(x, y) = \ln(x^2+y^2). \tag{a}$$

В таком случае предыдущее выражение можно переписать в следующем виде:

$$\varphi = \frac{Q\cdot 2\varepsilon}{4\pi}\,\frac{F(x+\varepsilon, y) - F(x-\varepsilon, y)}{2\varepsilon}. \tag{б}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, т. е. сближая источник и сток, будем предполагать, что мощности их неограниченно возрастают так, что в пределе произведение $2 \cdot Q\varepsilon$ стремится к некоторой конечной величине M. Величина M называется ***моментом диполя*** и обычно изображается в виде вектора, направление которого указывает на направление от стока к источнику. Ось x в этом случае называется *осью диполя*. Выражение (б) в пределе примет вид

$$\varphi = \frac{M}{4\pi}\frac{\partial F}{\partial x};$$

следовательно, дифференцируя (а)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2},$$

находим

$$\varphi = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}. \tag{3.63}$$

Обратимся теперь к функции тока для рассматриваемого течения. Нетрудно видеть, что функция тока будет иметь вид

$$\psi = \psi_{\text{ист}} + \psi_{\text{ст}} = \frac{Q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2).$$

Так как из выражения (3. 19) следует, что

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{y}{x+\varepsilon}, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{y}{x-\varepsilon},$$

то выражение для функции тока примет вид

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x-\varepsilon}\right].$$

Обозначим

$$F_1(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

В таком случае выражение для ψ можно написать в следующем виде:

$$\psi = \frac{Q2\varepsilon}{2\pi}\frac{F_1(x+\varepsilon, y) - F_1(x-\varepsilon, y)}{2\varepsilon}$$

или в пределе

$$\psi = \frac{M}{2\pi}\frac{\partial F_1}{\partial x}.$$

Так как

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

то

$$\psi = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{3.64}$$

Определив для диполя потенциал скорости φ (3. 63) и функцию тока ψ (3. 64), найдем для него линию тока и эквипотенциальные линии.

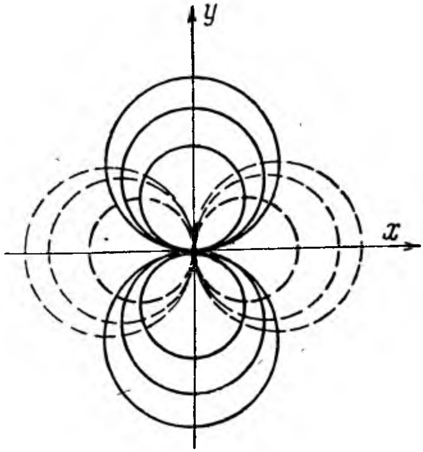
Для определения линий тока приравняем функцию тока ψ постоянному:

$$\frac{y}{x^2+y^2}=C,$$

откуда

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2C}\right)^2=\frac{1}{4C^2}.$$

Очевидно, совокупность линий тока будет представлять собой семейство окружностей с центрами на оси y, касающихся оси x в начале координат (фиг. 3. 20). Таким образом, жидкость по указанным окружностям вытекает из начала координат и вновь в него втекает. Очевидно, в этом случае расход жидкости через произвольный замкнутый контур, окружающий диполь, равен нулю.



Фиг. 3. 20. Линии тока и эквипотенциальные линии для течения от диполя.

Совокупность эквипотенциальных линий

$$y^2+\left(x-\frac{1}{2C}\right)^2=\frac{1}{4C^2}$$

будет представлять собой семейство окружностей, ортогональных линиям тока, с центрами на оси x, касающихся оси y в начале координат (см. фиг. 3. 20).

§ 18. ВИХРЬ

В § 16 были получены выражения потенциала скорости φ и функции тока ψ для плоского источника:

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\ln r, \quad \psi=\frac{Q}{2\pi}\theta,$$

где Q — мощность источника. Рассмотрим теперь такой плоский поток, в котором потенциал скорости φ и функция тока ψ поменяются местами:

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\theta,$$

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}\ln r,$$

где Q — некоторая постоянная, физический смысл которой для нового потока следует определить.

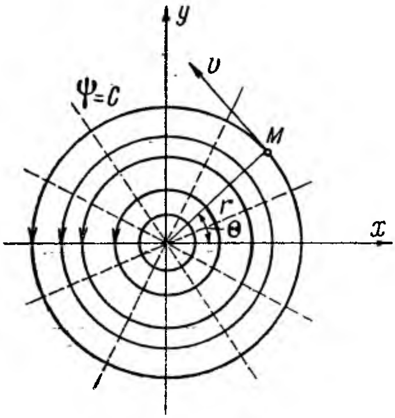
Для определения характера течения найдем линии тока, приравняв функцию тока постоянному:

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \text{const}$$

или

$$r = \text{const}.$$

Следовательно, в данном случае совокупность линий тока будет представлять собой семейство концентрических окружностей с центрами в начале координат. Найдем направление движения; для этого вычислим скорость в какой-либо точке M (фиг. 3.21) с полярными координатами r и θ. Используя полученные ранее формулы для проекций скорости на полярный радиус v_r и на направление к нему, перпендикулярное v_s, будем иметь



Фиг. 3.21. Течение от вихря.

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,$$

$$v_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} > 0.$$

Следовательно, скорость v в точке M направлена по касательной к окружности радиуса r, и точка M совершает движение по ней в сторону возрастания угла θ, т. е. против часовой стрелки. Таким образом, все точки жидкости двигаются по концентрическим окружностям с постоянной для данной окружности скоростью.

Такое движение жидкости называется *плоским вихревым движением*, а начало координат — *вихревой точкой или плоским вихрем*. Это означает, что вдоль оси z расположен бесконечно длинный прямолинейный вихрь, вызывающий в перпендикулярной к нему плоскости движение частиц жидкости по концентрическим окружностям (более подробно см. гл. V).

Выясним физический смысл постоянной Q. Для этого вычислим значение циркуляции в рассматриваемом потоке:

$$\Gamma = \oint v_s \, ds.$$

Подставляя найденное значение $v_s = \frac{Q}{2\pi r}$ и выполняя интегрирование по окружности радиуса r, найдем

$$\Gamma = \oint \frac{Q}{2\pi r} ds = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi r} r d\theta = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta,$$

или

$$Q = \Gamma,$$

т. е. произвольная постоянная Q равна циркуляции Γ (как будет показано в гл. V, циркуляция связана с так называемым напряжением или интенсивностью вихря, вследствие чего циркуляция рассматриваемого потока будет целиком зависеть от интенсивности вихря; с увеличением последней циркуляция будет возрастать, и наоборот).

Таким образом, выражения для потенциала скорости и функции тока плоского вихря принимают вид

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \tag{3.65}$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r. \tag{3.66}$$

Приравнивая потенциал скорости φ постоянному, найдем семейство эквипотенциальных линий:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta = \text{const}$$

или

$$\theta = \text{const},$$

т. е. совокупность эквипотенциальных линий представляет собой семейство прямых, исходящих из начала координат и ортогональных к линиям тока (см. фиг. 3.21).

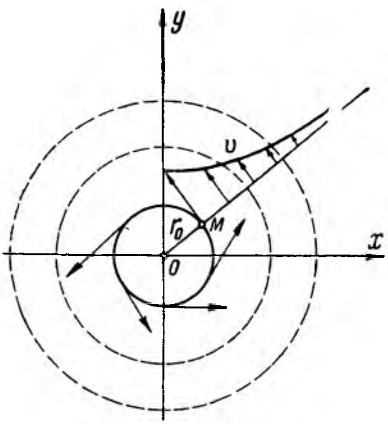
Примем одну из линий тока, например, окружность радиуса $r = r_0$, за твердую границу, что не нарушит характера потока, и будем рассматривать течение жидкости *вне* этой окружности. Тогда получим так называемое *чисто циркуляционное обтекание* бесконечно длинного (в направлении оси z) круглого цилиндра радиуса r_0, при котором все линии тока — окружности, концентричные цилиндру.

Скорость v в любой точке вне цилиндра будет выражаться в следующем виде:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{3.67}$$

Максимального значения скорость будет достигать на поверхности круглого цилиндра

$$v_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$



Фиг. 3.22. Чисто циркуляционное обтекание круглого цилиндра.

По мере удаления от цилиндра, т. е. с увеличением радиуса r, скорость будет убывать и на бесконечности

$$v_\infty = 0.$$

Как видно из формулы (3.67), скорость будет убывать по гиперболическому закону

$$vr = \frac{\Gamma}{2\pi} = \text{const},$$

что графически изображено на фиг. 3.22.

Таким образом, можно окончательно заключить, что потенциал

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

представляет собой потенциал чисто циркуляционного потока вокруг круглого цилиндра.

§ 19. БЕСЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

В настоящем параграфе рассматривается сложное плоское течение жидкости, получающееся в результате наложения друг на друга двух изученных ранее потоков.

1. Равномерного прямолинейного потока, движущегося в направлении оси x со скоростью, равной единице:

$$\varphi = x, \quad \psi = y.$$

2. Потока, получаемого от диполя с моментом $M = 2\pi$:

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Как было выше показано (§ 13), для нахождения потенциала скорости φ и функции тока ψ сложного течения нужно сложить потенциалы и функции тока исходных потоков. Следовательно, в рассматриваемом случае будем иметь следующие выражения для функций φ и ψ сложного потока:

$$\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \tag{3.68}$$

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{3.69}$$

Чтобы найти линии тока, приравняем функцию тока постоянной:

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = C,$$

откуда

$$y[(x^2+y^2)-1]=C(x^2+y^2).$$

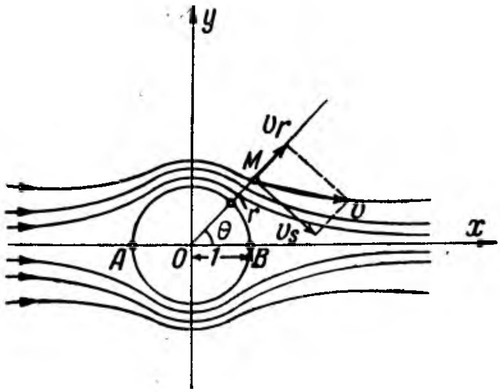
Как видим, линии тока представляют собой семейство кривых третьего порядка. Для выяснения картины течения найдем нулевую линию тока (соответствующую $C=0$). Для нулевой линии тока получаем два уравнения:

$$y=0$$

и

$$x^2+y^2-1=0.$$

Следовательно, нулевая линия тока представляет собой ось x и окружность радиуса единицы с центром в начале координат. Принимая указанную окружность за твердую границу и рассматривая течение жидкости вне этой окружности, можно трактовать полученный поток как поток, обтекающий бесконечно длинный цилиндр радиуса единицы. Линии тока будут иметь вид, изображенный на фиг. 3.23. Покажем, что действительно на достаточно большом расстоянии от цилиндра или, как принято говорить, на бесконечности, скорость направлена в положительную сторону оси x и равна $v_\infty=+1$ (v_∞ представляет собой скорость невозмущенного потока на достаточно большом расстоянии от цилиндра). Найдем проекции скорости v_x и v_y:



Фиг. 3.23. Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра.

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

или, переходя к полярным координатам,

$$v_x=1-\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r^2};$$

$$v_y=-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}.$$

Переходя к пределу при $r\to\infty$, получаем $(v_x)_{r=\infty}=+1$, $(v_y)_{r=\infty}=0$.

Точки пересечения A и B нулевых линий тока на цилиндре будут являться критическими точками. Для того чтобы это показать, представим потенциал скорости (3.68) в полярных координатах:

$$\varphi=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta. \tag{3.70}$$

Подсчитаем проекции скорости в точке M (фиг. 3.23) на полярный радиус r и на направление, к нему перпендикулярное, т. е. v_r и v_s:

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta,$$

$$v_s=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta.$$

Из выражения для v_s видно, что циркуляция скорости вокруг цилиндра равна нулю. Действительно, интегрируя по окружности, охватывающей цилиндр, получим

$$\Gamma=\oint v_s\,ds=\int_0^{2\pi}v_s r\,d\theta=\left[r\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta\right]_0^{2\pi}=0.$$

Проверим, удовлетворяются ли граничные условия задачи, заключающиеся в том, что обтекание цилиндра происходит без срыва потока, т. е. что в каждой его точке скорости частиц жидкости направлены по касательной.

На цилиндре, т. е. при $r=1$,

$$(v_r)_{r=1}=0,\quad (v_s)_{r=1}=-2\sin\theta.$$

Первый результат показывает, что обтекание цилиндра происходит безотрывно, т. е. что скорость везде направлена по касательной и поток от цилиндра не отрывается. Из второго, обозначая величину (модуль) скорости на цилиндре через v, находим

$$v=2\,|\sin\theta\,|.$$

Полученная формула дает распределение скорости по поверхности цилиндра. В точке A угол $\theta=\pi$, следовательно, $v=0$; в точке B угол $\theta=0$, следовательно, $v=0$. Таким образом, точки A и B действительно являются критическими точками.

Нетрудно убедиться, что в случае потока, двигающегося на бесконечности со скоростью v_∞ в отрицательном направлении оси x и обтекающего цилиндр радиуса $r=r_0$, для потенциала скорости φ будем иметь следующее выражение:

$$\varphi=-v_\infty\cos\theta\left(r+\frac{r_0^2}{r}\right). \tag{3.71}$$

Проекции скорости v_r и v_s в произвольной точке M в этом случае примут следующий вид (фиг. 3.24):

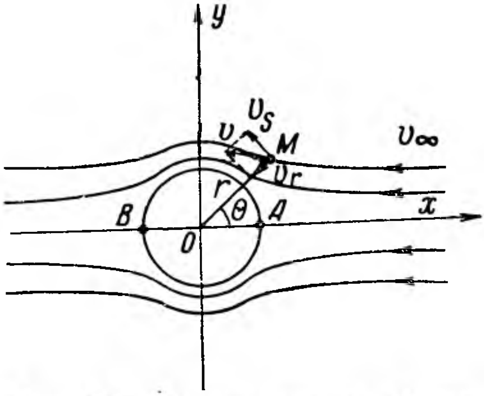
$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -v_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right),$$

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = v_\infty \sin\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right).$$

Для величины (модуля) скорости на цилиндре находим в этом случае следующее выражение:

$$v = 2v_\infty \,|\sin\theta\,|, \qquad (3.72)$$

т. е. скорость в каждой точке на цилиндре равна удвоенной скорости на бесконечности, умноженной на синус соответствующего полярного угла. Точки A и B будут по-прежнему критическими точками.



Фиг. 3.24. Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра.

Если $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, то $v = v_{max} = 2v_\infty$. Это означает, что в точках пересечения окружности с осью ординат скорость v принимает максимальное значение, не зависящее от радиуса цилиндра и равное удвоенной скорости на бесконечности.

§ 20. ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

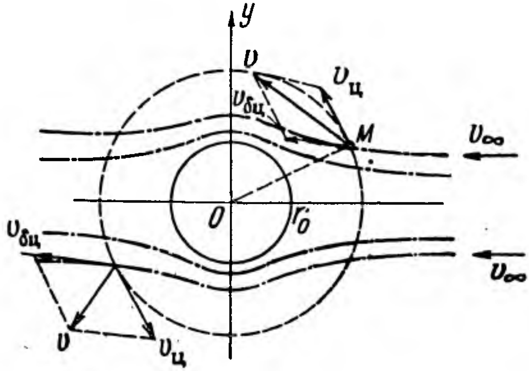
Чтобы получить так называемое циркуляционное обтекание круглого цилиндра, наложим на поток, рассмотренный в предыдущем параграфе, чисто циркуляционный поток от плоского вихря, расположенного в начале координат (см. § 18). Сложив потенциалы скоростей указанных потоков, получим

$$\varphi = -v_\infty \cos\theta\left(r + \frac{r_0^2}{r}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta. \qquad (3.73)$$

Таким образом, в каждой точке M пространства к скорости $v_{б.ц}$ бесциркуляционного потока, обтекающего цилиндр, прибавится скорость $v_ц$ от чисто циркуляционного потока, и результирующая скорость будет изображаться диагональю параллелограмма, построенного на скоростях $v_{б.ц}$ и $v_ц$ (фиг. 3.25).

Естественно, что наложение циркуляционного потока нарушит симметрию линий тока, так как наверху скорость от чисто циркуляционного потока будет направлена в ту же сторону, что и скорость бесциркуляционного потока, обтекающего цилиндр, а внизу скорость чисто циркуляционного потока будет направлена в обратную сторону. В результате спектр течения примет вид, изображенный на фиг. 3.26. Вследствие сложения скоростей над цилиндром образуется область повышенных скоростей, а под цилиндром — область пониженных скоростей, так как внизу скорости вычитаются.

Критические точки A и B в этом случае сойдут с оси x и будут расположены на цилиндре ниже оси x. Найдем угол $\theta_{\text{кр}}$, опре-



Фиг. 3.25. Наложение на поток, дающий бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра, чисто циркуляционного потока.

деляющий положение критических точек. Для этого найдем проекции скорости r_r и v_s в какой-нибудь точке M потока. Так как

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -v_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right),$$

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = v_\infty \sin\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

то для точек, расположенных на цилиндре, где $r = r_0$,

$$(v_r)_{r=r_0} = 0,$$

$$(v_s)_{r=r_0} = 2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

Первое выражение указывает, как и в предыдущем случае, на безотрывность обтекания, а второе дает выражение для скорости v на цилиндре:

$$v = 2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \tag{3 74}$$

Так как в критических точках скорость $v = 0$, то, приравнивая правую часть нулю, находим

$$2v_\infty \sin\theta_{\text{кр}} + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = 0,$$

откуда

$$\sin\theta_{\text{кр}} = -\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty r_0}. \tag{3.75}$$

Очевидно, этому значению синуса будут соответствовать два угла, расположенные (при $\Gamma>0$) в третьем и четвертом квадрантах (где синус отрицателен) и определяющие положение критических точек A и B. Как видно из формулы (3.75), с увеличением Γ критические точки будут смещаться вниз. В случае когда

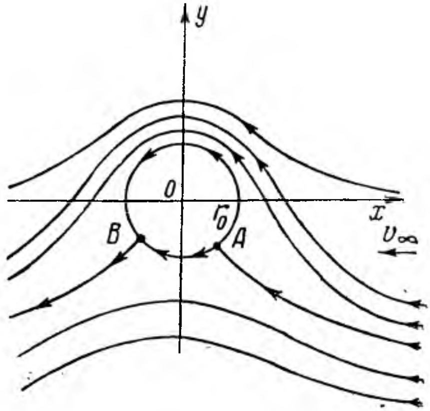
$$\Gamma = 4\pi v_\infty r_0,$$

получаем

$$\sin\theta_{\text{кр}} = -1.$$

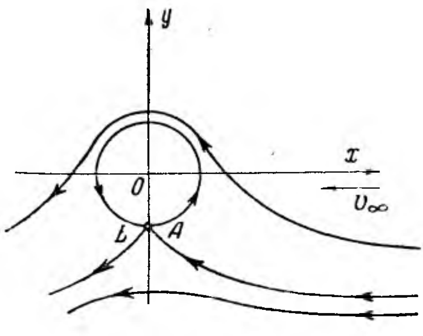
Это означает, что критические точки слились в одну точку, и картина потока будет иметь вид, изображенный на фиг. 3.27. При дальнейшем увеличении Γ, т. е. при

$$\Gamma > 4\pi v_\infty r_0$$

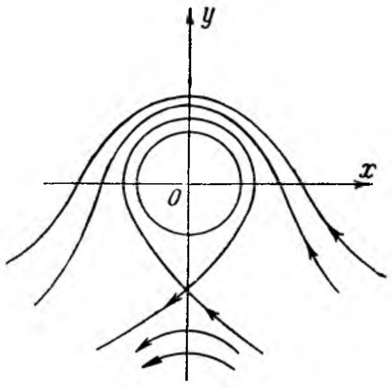


Фиг. 3.26. Циркуляционное обтекание круглого цилиндра ($\Gamma < 4\pi v_\infty r_0$).

так как синус не может быть больше единицы, критические точки сходят с цилиндра, и поток будет иметь вид, изображенный на



Фиг. 3.27. Циркуляционное обтекание круглого цилиндра ($\Gamma = 4\pi v_\infty r_0$)



Фиг. 3.28. Циркуляционное обтекание круглого цилиндра ($\Gamma > 4\pi v_\infty r_0$).

фиг. 3.28. В противоположность предыдущему случаю, когда вся омывающая цилиндр жидкость уходила в бесконечность, в этом случае часть жидкости циркулирует вокруг цилиндра, причем эта циркулирующая жидкость оказывается отделенной от остальной жидкости замкнутой линией тока.

В заключение убедимся в том, что в рассматриваемом случае циркуляция скорости вокруг цилиндра будет в точности равна циркуляции вихря Г. Действительно, интегрируя по окружности радиуса r, будем иметь

$$\oint v_s\,ds = \int_0^{2\pi}\left[v_\infty\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi r}\right]r\,d\theta=\Gamma.$$

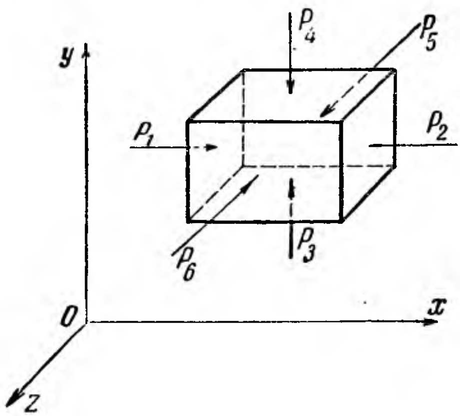
Глава IV

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ФОРМЕ ЭЙЛЕРА

Как было указано в § 1 главы I, динамика идеальной жидкости была разработана знаменитым математиком и механиком, членом Российской Академии Наук Л. Эйлером в 1755 г., впервые давшим основные дифференциальные уравнения ее движения.

Выведем эти дифференциальные уравнения для произвольной идеальной сжимаемой жидкости, двигающейся относительно прямоугольной системы осей координат $Oxyz$. Из всей совокупности двигающихся жидких частиц выделим в данный момент какую-нибудь частицу жидкости в форме элементарного прямоугольного параллелепипеда с измерениями dx, dy, dz (фиг. 4. 1). Очевидно, если линейные измерения параллелепипеда стремить к нулю, то в пределе рассматриваемый параллелепипед стянется в точку.



Фиг. 4.1. К выводу дифференциальных уравнений движения в форме Эйлера.

Задачу получения динамических уравнений для движущейся жидкости будем решать, используя принцип Даламбера.

Считая, что в данный момент времени бесконечно малая жидкая частица как бы отвердела, остановим ее и рассмотрим условия равновесия этой остановленной частицы. Как известно, условиями равновесия являются шесть уравнений равновесия — три уравнения для проекций сил на оси координат и три уравнения для проекций моментов. Чтобы составить эти уравнения, нужно разобраться, какие силы будут действовать на рассматриваемую частицу жидкости.

На грани частицы будут действовать поверхностные силы $P_1,...P_6$, являющиеся результатом воздействия на частицу окружающей жидкости (см. фиг. 4. 1). Величина каждой из них определится, очевидно, произведением среднего гидродинамического давления p, действующего по соответствующей площадке, на ее площадь ds.

Помимо поверхностных сил, на частицу будут действовать массовые силы, распределенные по всему ее объему, т. е. воздействующие на каждую точку внутри частицы (например, сила тяжести). Проекции массовых сил, отнесенных к единице массы частицы, обозначим через X, Y и Z. Тогда, чтобы получить проекции массовых сил, действующих на всю частицу, нужно величины X, Y, Z умножить на массу частицы, равную $\rho\, dx\, dy\, dz$. Таким образом, проекции массовой силы могут быть написаны в виде

$$\rho X\, dx\, dy\, dz, \quad \rho Y\, dx\, dy\, dz, \quad \rho Z\, dx\, dy\, dz.$$

Установив, какие силы действуют на частицу жидкости — поверхностные силы $P_1, P_2, .., P_6$ и массовые силы X, Y, Z,— для получения уравнений равновесия нужно применить принцип Даламбера. Согласно этому принципу действующие на частицу поверхностные и массовые силы в каждый момент времени уравновешиваются силами инерции. Найдем величины сил инерции. Обозначим через v_x, v_y и v_z проекции скорости бесконечно малой частицы по координатным осям. Тогда проекции ускорения частицы могут быть написаны в виде

$$\frac{dv_x}{dt}, \quad \frac{dv_y}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dv_z}{dt}.$$

Известно, что сила инерции численно равна произведению массы на ускорение, но направлена обратно ускорению. Следовательно, для проекций инерционной силы будем иметь следующие выражения:

$$-\rho \frac{dv_x}{dt} dx\, dy\, dz, \qquad -\rho \frac{dv_y}{dt} dx\, dy\, dz, \qquad -\rho \frac{dv_z}{dt} dx\, dy\, dz.$$

Для удобства последующих выкладок составим таблицу проекций на координатные оси всех полученных выше сил (табл. 4. 1).

Чтобы получить уравнения равновесия, нужно приравнять нулю сумму поверхностных, массовых и инерционных сил. Для этого просуммируем сначала первую строку таблицы и приравняем сумму нулю, затем то же сделаем со второй строкой и, наконец, с третьей. В результате будем иметь следующие три уравнения равновесия:

$$(p_1 - p_2)\, dy\, dz + \rho X\, dx\, dy\, dz - \rho \frac{dv_x}{dt} dx\, dy\, dz = 0;$$

$$(p_3 - p_4)\, dz\, dx + \rho Y\, dx\, dy\, dz - \rho \frac{dv_y}{dt} dx\, dy\, dz = 0;$$

$$(p_5 - p_6)\, dx\, dy + \rho Z\, dx\, dy\, dz - \rho \frac{dv_z}{dt} dx\, dy\, dz = 0.$$

Прежде чем преобразовывать эти выражения, заметим следующее. Когда составляются уравнения равновесия твердого тела, пишутся также три уравнения для моментов относительно координатных осей. Очевидно, что в данном случае писать эти три уравнения не надо, потому что в пределе частица будет стягиваться в точку и все силы будут сходящимися, т. е. уравнения моментов тождественно обратятся в нуль.

Таблица 4.1

Силы в проекции на	Поверхностные[1]	Массовые	Инерционные
Ось x	$p_1\,dy\,dz$ $-p_2\,dy\,dz$	$\rho X\,dx\,dy\,dz$	$-\rho\dfrac{dv_x}{dt}\,dx\,dy\,dz$
Ось y	$p_3\,dz\,dx$ $-p_4\,dz\,dx$	$\rho Y\,dx\,dy\,dz$	$-\rho\dfrac{dv_y}{dt}\,dx\,dy\,dz$
Ось z	$p_5\,dx\,dy$ $-p_6\,dx\,dy$	$\rho Z\,dx\,dy\,dz$	$-\rho\dfrac{dv_z}{dt}\,dx\,dy\,dz$

Для преобразования полученных трех уравнений вычислим прежде всего разность p_1-p_2.

Так как давление в идеальной жидкости не зависит от направления, то, следовательно, давление по трем взаимно ортогональным бесконечно малым площадкам, проходящим через одну и ту же точку, одинаково. Обозначим его через p. Тогда, очевидно, $p_1=p_3=$ $=p_5=p$ (см. фиг. 4.1). В общем случае давление в жидкости есть функция координат и времени, т. е. $p=p(x, y, z, t)$. Поэтому давление p_2 на правую грань параллелепипеда, отстоящую от левой грани на расстоянии dx, равно $p_2=p(x+dx, y, z, t)$.

Разлагая функцию p в ряд Тейлора и удерживая в разложении только члены первого порядка малости, получим

$$p_2=p(x, y, z, t)+\frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x}dx=p+\frac{\partial p}{\partial x}dx.$$

Следовательно, искомая разность

$$p_1-p_2=p-p-\frac{\partial p}{\partial x}dx=-\frac{\partial p}{\partial x}dx.$$

Подставим найденное выражение для p_1-p_2 в первое уравнение. Получим

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz+\rho X\,dx\,dy\,dz-\rho\frac{dv_x}{dt}dx\,dy\,dz=0.$$

[1] Здесь p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 — гидродинамические давления на соответствующих площадках (см. фиг. 4.1).

Сокращая на dx, dy, dz, будем иметь следующее уравнение:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X-\rho\frac{dv_x}{dt}=0.$$

Это уравнение можно переписать иначе:

$$\frac{dv_x}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Два другие уравнения получаются аналогично. В результате будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{dv_y}{dt}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{dv_z}{dt}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

Полученные уравнения являются основными *дифференциальными уравнениями движения идеальной жидкости в форме Эйлера.* Эти уравнения применимы как к несжимаемой жидкости, так и к сжимаемой, т. е. к газу. Различие будет только в характере изменения плотности ρ. Если жидкость несжимаемая, то ρ — величина постоянная; для газа ρ будет величиной переменной.

Таким образом, эти уравнения являются исходными уравнениями для построения не только гидроаэродинамики, но и газовой динамики.

Преобразуем уравнения Эйлера. Для этого выразим проекции ускорения через проекции скорости согласно формуле (3.4). Тогда получим следующие дифференциальные уравнения, являющиеся уравнениями Эйлера в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

В частном случае идеальной несжимаемой жидкости ($\rho=\mathrm{const}$) основная задача гидроаэродинамики заключается в определении в каждой точке двигающейся жидкости и в любой момент времени t трех проекций скорости v_x, v_y, v_z и давления p, т. е. в определении четырех функций:

$$\begin{aligned}v_x&=f_1(x,\ y,\ z,\ t),\\ v_y&=f_2(x,\ y,\ z,\ t),\\ v_z&=f_3(x,\ y,\ z,\ t),\\ p&=f_4(x,\ y,\ z,\ t).\end{aligned}$$

Чтобы найти эти четыре функции, нужно составить систему из четырех уравнений. Такими уравнениями будут три уравнения Эйлера (4. 2) и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ФОРМЕ ГРОМЕКО

Профессор Ипполит Степанович Громеко (1851—1889 гг.), руководитель кафедры механики Казанского университета, был одним из первых русских гидромехаников. Ему принадлежит ряд выдающихся работ в этой области. В частности, И. С. Громеко впервые в своей докторской диссертации в 1881 г. предложил новую весьма удобную форму дифференциальных уравнений движения (значительно позже указанных английским ученым Лэмбом).

Для вывода уравнений движения в форме Громеко обратимся к дифференциальным уравнениям движения в форме Эйлера:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z},$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z},$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Преобразуем первое уравнение Эйлера. Прибавим и вычтем в правой части первого уравнения следующие величины:

$$v_y\frac{\partial v_y}{\partial x},\quad v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Тогда получим

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+$$
$$+v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right).$$

Нетрудно усмотреть, что в первой скобке стоит частная производная по x от половины квадрата скорости. В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}\right)=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Поэтому

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)v_z-\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)v_y.$$

Выражения, стоящие в скобках справа, как известно, являются удвоенными угловыми скоростями вращения: $2\omega_y$ и $2\omega_z$ [см. формулы (3.24)]. В таком случае первое уравнение Эйлера и по аналогии два остальных напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)&=2(\omega_y v_z-\omega_z v_y),\\ Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)&=2(\omega_z v_x-\omega_x v_z),\\ Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)&=2(\omega_x v_y-\omega_y v_x). \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Эти уравнения носят название *дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости в форме Громеко.* Достоинством этих уравнений является выделение членов, учитывающих вихревую часть движения.

§ 3. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Интегрируя основные дифференциальные уравнения гидродинамики, получим решения, содержащие произвольные функции и произвольные постоянные. Для их определения необходимо ввести дополнительные условия, носящие название *начальных* и *граничных условий.* Рассмотрим прежде всего начальные условия. Начальные условия заключаются в задании поля скоростей в начальный момент времени $t=0$. Это означает, что найденные решения $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$ должны при $t=0$ обращаться в заданные наперед функции координат f_1, f_2, f_3, т. е.

$$\left.\begin{aligned} v_x(x, y, z, 0)&=f_1(x, y, z),\\ v_y(x, y, z, 0)&=f_2(x, y, z),\\ v_z(x, y, z, 0)&=f_3(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Как нетрудно усмотреть, начальные условия необходимы при решении задач для неустановившегося движения жидкости.

Граничные условия, играющие огромную роль в проблемах гидро- и аэродинамики, делятся на два вида условий — динамические, относящиеся к силам, и кинематические, относящиеся к скоростям.

Динамические граничные условия, выполняющиеся на свободной поверхности жидкости, сводятся к равенству давления П внешней среды на поверхности и давления p жидкости у самой поверхности, т. е. к равенству

$$p=-\Pi. \tag{4.5}$$

Обратимся к кинематическим граничным условиям. Рассмотрим, каковы будут граничные условия для неподвижной стенки, установленной в потоке жидкости. Пусть уравнение стенки имеет вид

$$f(x, y, z)=0. \tag{a}$$

Если скорость v частиц жидкости в какой-либо точке M стенки (фиг. 4.2) будет иметь составляющую v_n, направленную по нормали n к стенке, то это означает, что будет либо происходить отрыв жидкости от стенки, либо стенка будет проницаемой. Таким образом, условие безотрывного обтекания и непроницаемости стенки приводит к требованию

$$v_n=0 \text{ (вдоль стенки)}, \tag{4.6}$$

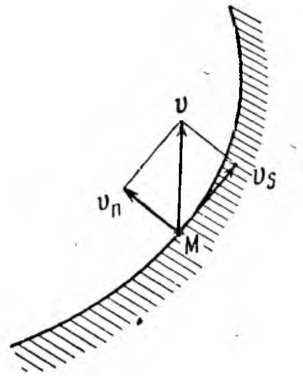
которое и является кинематическим граничным условием для случая неподвижной стенки.

Допустим теперь, что стенка подвижная и ее уравнение имеет вид

$$f(x, y, z, t)=0. \tag{б}$$

Обозначая через $v_{n\,\text{ст}}$ нормальную скорость точек самой стенки, получим граничное условие (условие безотрывности обтекания) в таком виде:

$$v_n=v_{n\,\text{ст}}. \tag{4.7}$$



Фиг. 4.2. Граничное условие на неподвижной стенке.

Представим это условие аналитически. Допустим, что за бесконечно малый промежуток времени dt стенка сместилась и точка $M(x, y, z)$ стенки переместилась в точку $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$. Так как точка M' находится на стенке, то ее координаты должны удовлетворять уравнению (б), т. е.

$$f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)=0.$$

Разлагая функцию f в ряд и удерживая только члены первого порядка малости, получим

$$f(x, y, z, t)+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0,$$

откуда, деля почленно на dt и учитывая уравнение (б),

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Так как

$$\frac{dx}{dt}=v_{x\,\text{ст}},\qquad \frac{dy}{dt}=v_{y\,\text{ст}},\qquad \frac{dz}{dt}=v_{z\,\text{ст}},$$

где $v_{x\,\text{ст}}$, $v_{y\,\text{ст}}$, $v_{z\,\text{ст}}$ — проекции скорости точек стенки, то предыдущее выражение примет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x}v_{x\,\text{ст}}+\frac{\partial f}{\partial y}v_{y\,\text{ст}}+\frac{\partial f}{\partial z}v_{z\,\text{ст}}=-\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{в}$$

Используя известные формулы для направляющих косинусов углов нормали

$$\cos(n,\ x)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{N},\quad \cos(n,\ y)=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N},\quad \cos(n,\ z)=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{N},$$

где

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

и формулы $v_x=v\cos(v,\ x)$, $v_y=v\cos(v,\ y)$, $v_z=v\cos(v,\ z)$, уравнение (в) можно представить в следующем виде:

$$Nv_{\text{ст}}[\cos(v_{\text{ст}},\ x)\cos(n,\ x)+\cos(v_{\text{ст}},\ y)\cos(n,\ y)+$$
$$+\cos(v_{\text{ст}},\ z)\cos(n,\ z)]=-\frac{\partial f}{\partial t}$$

или

$$Nv_{\text{ст}}\cos(v_{\text{ст}},\ n)=-\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Отсюда

$$v_{n\ \text{ст}}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{N}.$$

Следовательно, кинематическое граничное условие для случая подвижной стенки окончательно примет следующий вид:

$$v_n=v_{n\ \text{ст}}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \tag{4.8}$$

В частном случае, если стенка неподвижная, то $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, и кинематическое условие (4.8) сводится к ранее установленному (4.6):

$$v_n=0.$$

§ 4. ИНТЕГРАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Дифференциальные уравнения движения в форме Эйлера или Громеко не интегрируются в общем виде. Только в частных случаях, когда движение жидкости: 1) потенциальное и 2) движение жидкости установившееся, можно найти первые интегралы дифференциальных уравнений Эйлера.

Рассмотрим сначала случай *потенциального* неустановившегося движения. Если движение жидкости потенциальное, то, как известно,

$$\omega_x=\omega_y=\omega_z=0.$$

При этом уравнения (4.3) Громеко упрощаются и принимают следующий вид:

$$X=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial v_x}{\partial t},$$

$$Y=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial v_y}{\partial t},$$

$$Z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial v_z}{\partial t}.$$

Преобразуем эти уравнения следующим образом. Как известно, при потенциальном движении

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Используя эти соотношения, а также свойство независимости смешанной производной от порядка дифференцирования, можно частные производные $\frac{\partial v_x}{\partial t}$, $\frac{\partial v_y}{\partial t}$, $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ написать в следующем виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Тогда уравнения Громеко примут вид

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),\\Y&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),\\Z&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(4.9)$$

Представим первые члены правых частей в виде частных производных по координатам от некоторой функции $P(x, y, z)$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Умножая эти выражения соответственно на dx, dy, dz и складывая, находим

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz$$

или

$$dP = \frac{dp}{\rho},$$

откуда

$$P = \int \frac{dp}{\rho}. \tag{4.10}$$

Очевидно, функция $P(x, y, z)$ будет определена, если задана зависимость ρ от p, ибо в этом случае интеграл (4.10) может быть вычислен.

Движение, при котором плотность является однозначной функцией только давления, называется *баротропным*. Для баротропного движения интеграл (4.10) является функцией только давления.

В аэродинамике обычно рассматриваются такие процессы, когда плотность ρ выражается непосредственно через давление, т. е. когда функция $P(x, y, z)$ действительно существует. Вводя эту функцию в уравнения (4.9), находим

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y}\left(P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

Для интегрирования этих уравнений умножим их соответственно на dx, dy и dz и сложим:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)dx +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)dz.$$

Выражения, стоящие в скобках,— функции не только x, y, z, но и t.

Поэтому, интегрируя их, будем считать, что переменное t закреплено. Тогда правая часть будет полным дифференциалом и, следовательно,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\left(P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

Поскольку правая часть — полный дифференциал, левая часть также будет являться полным дифференциалом. Но полный дифференциал левой части, представляющей элементарную работу массовых сил, есть, очевидно, дифференциал силовой функции U, т. е.

$$dU = d\left(P + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

Такое уравнение проинтегрировать просто. Интегрируя, получаем

$$P+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=U+C(t),$$

где C — произвольная функция времени t.

Подставляя вместо P его значение по формуле (4. 10), окончательно находим

$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=U+C(t). \tag{4. 11}$$

Этот интеграл носит название *интеграла Лагранжа* для потенциального неустановившегося движения сжимаемой жидкости.

Если жидкость несжимаемая, т. е. $\rho=\mathrm{const}$, интеграл Лагранжа примет вид

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=U+C(t). \tag{4. 12}$$

При установившемся движении несжимаемой жидкости производная $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, и произвольная функция $C(t)$ превратится в константу. Интеграл (4. 12) будет иметь следующий вид:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=U+C. \tag{4. 13}$$

Этот интеграл носит название *интеграла Лагранжа — Бернулли*. Константа C будет иметь постоянное значение для всей массы жидкости [1].

Рассмотрим теперь, как можно проинтегрировать дифференциальные уравнения движения для произвольного (непотенциального) *установившегося* течения жидкости. Этот интеграл впервые получил Д. Бернулли и поэтому его называют интегралом или уравнением Бернулли.

Пусть жидкость движется по отношению к координатной системе $Oxyz$. Поскольку движение установившееся, траектории и линии тока совпадают, и частица жидкости M движется по траектории, являющейся одновременно линией тока, с некоторой скоростью v (фиг. 4. 3).

За промежуток времени dt частица жидкости проходит по траектории элемент пути ds. Этот элемент пути равен скорости, умноженной на время:

$$ds=v\,dt.$$

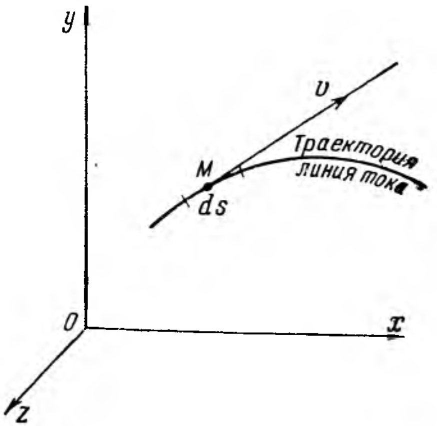
---

[1] Из изложенного следует, что предположение о потенциальности потока и баротропии приводит к необходимости существования потенциала массовых сил. Это означает, что потенциальное и баротропное движение жидкости может быть осуществлено только под действием консервативных сил.

Спроектируем элементарное перемещение жидкой частицы вдоль линии тока на координатные оси x, y, z; тогда получим

$$\left.\begin{aligned} dx &= v_x\,dt, \\ dy &= v_y\,dt, \\ dz &= v_z\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Предполагая движение баротропным, напишем теперь дифференциальные уравнения движения жидкости в форме (4. 1), вводя вновь функцию $P(x, y, z)$. Будем иметь



Фиг. 4.3. К выводу интеграла Бернули для произвольного установившегося течения жидкости.

$$\frac{dv_x}{dt} = X - \frac{\partial P}{\partial x},$$
$$\frac{dv_y}{dt} = Y - \frac{\partial P}{\partial y},$$
$$\frac{dv_z}{dt} = Z - \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Чтобы проинтегрировать эти уравнения, умножим каждое из них на соответствующее элементарное перемещение вдоль линии тока [см. формулы (a)] и сложим. В результате будем иметь

$$(v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z) = (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right).$$

Переходя к интегрированию полученного уравнения, заметим, что поскольку dx, dy, dz являются элементарными перемещениями вдоль линии тока, следовательно, и интегрирование уравнения будет происходить *вдоль линии тока.* А это означает, что получаемая в результате интегрирования константа будет иметь постоянное значение только вдоль данной линии тока, в то время как в предыдущем интеграле Лагранжа—Бернулли константа имела постоянное значение для всей массы жидкости.

Очевидно, левая часть полученного уравнения есть полный дифференциал от $\frac{v^2}{2}$. Выражения, стоящие справа, также являются полными дифференциалами, т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz = dP,$$

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU.$$

Следовательно, уравнение можно переписать в виде

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right)=dU-dP$$

и

$$d\left(-U+P+\frac{v^2}{2}\right)=0.$$

После интегрирования получаем

$$-U+P+\frac{v^2}{2}=C$$

или, используя равенство (4. 10),

$$-U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}=C. \qquad (4.14)$$

Этот интеграл носит название *интеграла Бернулли* для установившегося движения сжимаемой жидкости. Если $\rho=\text{const}$, то интеграл Бернулли принимает вид

$$-U+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=C. \qquad (4.15)$$

Как указывалось выше, константа C, входящая в формулы (4. 14) и (4. 15), имеет постоянное значение только вдоль данной линии тока. При переходе к соседним линиям тока эта постоянная будет принимать другие значения.

Если пренебречь массовыми силами и считать для воздуха силовую функцию U массовых сил равной нулю, то уравнение (4. 15) примет вид

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=C \qquad (4.16)$$

или

$$p=C-\frac{\rho v^2}{2}; \qquad (4.17)$$

для сжимаемой жидкости

$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{v^2}{2}=C. \qquad (4.18)$$

Пример. Предположим, что несжимаемая жидкость движется произвольно и на бесконечности имеет место давление $p_\infty=p_0$, а скорость $v_\infty=0$. Определяя из этого условия константу C в уравнении (4. 17) находим, что

$$p=p_0-\frac{\rho v^2}{2}. \qquad (a)$$

Вычислим величину скорости, при которой в жидкости наступают внутренние разрывы — полости, образующиеся около обтекаемых твердых границ или движущегося в жидкости тела.

Это явление называется *кавитацией*, а скорость, при которой оно наступает,— *скоростью кавитации*. Обратимся к уравнению (а). При увеличении v член $\frac{\rho v^2}{2}$, возрастая, достигает значения p_0, а давление p становится равным нулю.

Так как при дальнейшем увеличении v давление p становится отрицательным, чего быть не может, то в жидкости образуется разрыв, т. е. явление кавитации. Из выражения

$$0=p_0-\frac{\rho v_{\text{кав}}^2}{2}$$

находим

$$v_{\text{кав}}=\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}. \qquad (б)$$

Для воды в технических единицах $p_0=10\,333$ *кг/м²*, $\rho=102$ *кг см²/м⁴*, следовательно,

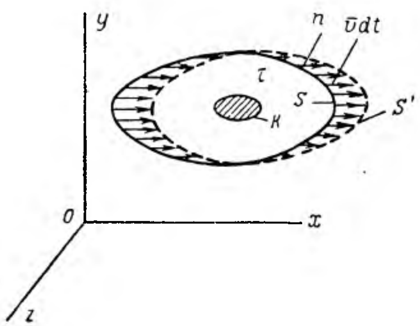
$$v_{\text{кав}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10333}{102}}=14{,}3 \text{ м/сек}=51 \text{ км/час},$$

т. е. в воде разрыв наступает уже при сравнительно небольшой скорости, порядка 50 *км/час*. Явление кавитации, наблюдаемое около лопастей гребных винтов, у лопастей быстроходных гидравлических турбин крайне вредно отражается на их работе, так как снижает их к. п. д. и приводит к коррозии металла.

Для воздуха разрыв наступает при гораздо более высоких скоростях — порядка $v=750$ *м/сек*$=2700$ *км/час* (см. гл. XIV, § 1).

§ 5. УРАВНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

При нахождении результирующих сил давления потока на обтекаемые тела часто гораздо удобнее пользоваться общими теоремами механики, в том числе теоремой об изменении количества движения или уравнением импульсов, применяя их к конечным объемам жидкости, чем эти зависимости получать путем интегрирования дифференциальных уравнений движения.



Фиг. 4.4. К выводу уравнения импульсов.

Выделим в потоке какую-нибудь замкнутую поверхность S, внутри которой находится обтекаемое тело K (фиг. 4.4). Применим к конечному объему жидкости, заключенной между поверхностью S, называемой контрольной поверхностью, и телом K, теорему об изменении количества движения. Обозначим количество движения этого объема жидкости через $\bar{M}$. Ограничивающая этот объем контрольная поверхность S перемещается вместе с находящимися на ней частицами и в силу этого деформируется. За время dt поверхность S переместится и займет положение S' (контур поверхности S' можно получить, отложив от каждой точки поверхности S вектор, равный $\bar{v}\,dt$; концы этих векторов образуют поверхность S'). Масса жидкости, ограниченная поверхностью S', будет обладать количеством движения $\bar{M}'$. Разность $d\bar{M}=\bar{M}'-\bar{M}$ представляет изменение количества движения за время dt.

При установившемся движении разность $d\bar{M}$ будет равна количеству движения жидкости, заключенной между поверхностями S и S'. В этом нетрудно убедиться, так как в остальной части объема жидкости, общей для обоих положений рассматриваемой массы жидкости, при установившемся движении количество движения одинаково и при вычитании сокращается. Таким образом, необходимо подсчитать лишь то изменение количества движения, которое произошло вследствие перемещения поверхности S в положение S'. Для этого возьмем на поверхности S площадку dS, которая за время dt перешла в положение dS'. Количество движения, соответствующее объему $d\tau$ между поверхностями S и S', очевидно, равно

$$\rho\, d\tau\, \bar{v}=\rho v_n\, dt\, dS\, \bar{v},$$

так как объем $d\tau$ можно рассматривать, как элементарный цилиндр с основаниями dS и высотой $v_n dt$, где v_n — нормальная составляющая скорости $\bar{v}$ на площадке dS. Полное изменение количества движения $d\bar{M}$ объема τ напишется в виде интеграла от последнего выражения, распространенного по всей поверхности S, т. е. в виде

$$d\bar{M}=\iint_S \rho v_n\, dt\, \bar{v}\, dS=dt\iint_S \rho v_n \bar{v}\, dS. \tag{a}$$

Предположим теперь, что контрольная поверхность S неподвижна, а жидкость через нее протекает. Тогда можно дать простое физическое истолкование поверхностному интегралу (а). Действительно, $\rho v_n dS$ есть масса жидкости, протекающая в единицу времени через площадку dS, а $\rho v_n dS \bar{v}$ — количество движения, которое за то же время вносится этой массой внутрь поверхности S или же уносится наружу (смотря по знаку v_n).

В таком случае выражение

$$\iint_S \rho v_n \bar{v}\, dS$$

представляет собой количество движения, переносимое в единицу времени через неподвижную поверхность S. Следовательно, изменение количества движения жидкого объема за какой-нибудь промежуток времени в случае установившегося движения равно количеству движения, переносимому жидкостью через поверхность S, ограничивающую этот объем за тот же промежуток времени, т. е. оно равно разности между количеством движения жидкости, втекающей внутрь S и вытекающей из нее.

Обозначим через $\overline{F}$ равнодействующую внешних сил, приложенных к рассматриваемой массе жидкости. В соответствии с теоремой об изменении количества движения можно написать

$$\overline{F}\,dt = d\overline{M}.$$

Подставляя значение $d\overline{M}$ и выражение (a), находим

$$\overline{F}\,dt = dt \iint_S \rho v_n \overline{v}\, dS,$$

или, сокращая на dt:

$$\overline{F} = \iint_S \rho v_n \overline{v}\, dS. \tag{4.19}$$

Это выражение и представляет собой уравнение импульсов для установившегося движения конечного объема идеальной жидкости.

Глава V

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВИХРЕЙ

Изучение вихревых движений в жидкости имеет большое практическое значение. Вихревые движения наблюдаются часто и могут быть легко обнаружены.

Наблюдая за течением реки и обтеканием быков моста, легко обнаружить вихреобразования; при ударе веслом о воду всегда образуются вихри и т. д.

Перемещающееся в воде тело (корабль, катер) всегда оставляет сзади себя вихревую область, на образование которой затрачивается энергия. Это является источником особого типа сопротивления, которое называется *вихревым сопротивлением* и которое надо уметь вычислять для различных тел.

Наблюдающиеся в атмосфере смерчи и циклоны также являются вихрями.

Мелкие вихри в воздухе или воде создают так называемую турбулентность потока, изучение которой представляет одну из сложнейших проблем современной аэро- и гидродинамики.

Вихревые движения играют большую роль в аэродинамике. На теории вихрей Н. Е. Жуковским, С. А. Чаплыгиным и Л. Прандтлем построена теория крыла как бесконечного, так и конечного размаха.

В настоящей главе кратко рассмотрены основы теории вихрей.

§ 1. ПОНЯТИЕ О ВИХРЕВОЙ ЛИНИИ

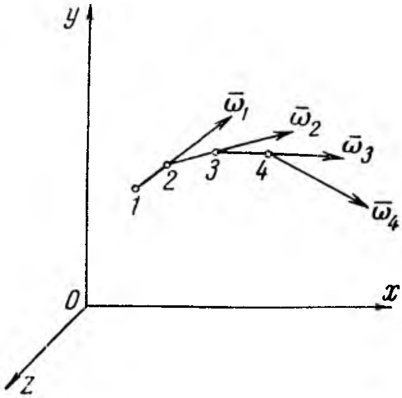
Как было показано в § 7 гл. III, вращательные движения жидких частиц характеризуются угловыми скоростями

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

Это означает, что в каждой точке пространства вращение жидких частиц может быть охарактеризовано вектором угловой скорости $\bar{\omega}$, модуль которого равен

$$\omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}. \tag{5.2}$$

Следовательно, подобно тому как мы рассматривали поле скоростей потока жидкости, мы можем также ввести в рассмотрение поле векторов угловых скоростей $\bar{\omega}$, называя его полем вихрей. Каждый такой вектор $\bar{\omega}$ будет характеризовать местное вращение жидкости. Допустим, что в данный момент времени в какой-нибудь точке *1* вектор угловой скорости местного вращения равен $\bar{\omega}_1$ (фиг. 5.1). Возьмем в этот же момент времени на этом векторе бесконечную близкую к точке *1* точку *2* и построим соответствующий ей вектор угловой скорости $\bar{\omega}_2$. Продолжая это построение, в данный момент времени получим ломаную линию *1, 2, 3, 4...*, которая в пределе, т. е. при стремлении длины каждого звена ломаной к нулю, превратится в так называемую вихревую линию. Отсюда определение вихревой линии: *вихревой линией называется такая линия в потоке жидкости, в каждой точке которой вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ касателен к ней.*



Фиг. 5.1. Построение вихревой линии.

По аналогии с линиями тока очевидно, что дифференциальное уравнение вихревых линий представится в следующем виде:

$$\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}. \tag{5.3}$$

§ 2. ВИХРЕВАЯ ТРУБКА

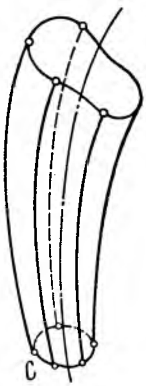
Вообразим себе пространство, непрерывно заполненное вихрями (вихревыми линиями). Если в этом пространстве взять произвольный малый замкнутый контур C, не являющийся вихревой линией, и через каждую точку контура C провести вихревые линии, то совокупность этих вихревых линий образует так называемую вихревую трубку, а объем жидкости, заключенный в ней, представит собой элемент вихря, называемый *вихревым шнуром* (фиг. 5.2). С вихревой трубкой связано одно важное понятие в аэродинамике, именно понятие о напряжении или интенсивности вихря. Под *напряжением вихря*, обозначаемым через $\varkappa$, понимают удвоенное произведение угловой скорости ω вихря на площадь σ_n нормального сечения трубки, т. е.

$$\varkappa = 2\omega\sigma_n. \tag{5.4}$$

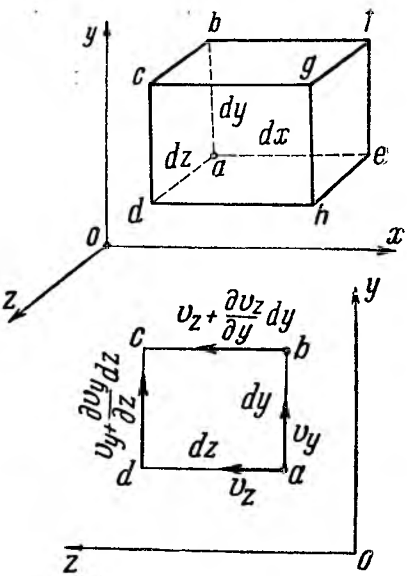
Величина напряжения или интенсивности вихря $\varkappa$ связана с возникающей вокруг вихря циркуляцией Г. Установлению этой связи посвящена теорема Стокса.

§ 3. ТЕОРЕМА СТОКСА

Рассмотрим в движущейся жидкости вихревое поле, т. е. предположим, что в жидкости непрерывно распределены вихри (векторы $\bar{\omega}$). Выделим в жидкости бесконечно малый объем в форме прямоугольного параллелепипеда с измерениями dx, dy, dz (фиг. 5.3). Вычислим циркуляцию по бесконечно малому замкнутому контуру ($abcda$) путем обхода вокруг оси, параллельной оси x. Для удобства рассмотрим в плоскости yz (см. фиг. 5.3) бесконечно малый прямоугольник $abcda$ с измерениями dy и dz, являющийся проекцией рассматриваемого параллелепипеда на плоскость yz. Подсчитаем циркуляцию Γ_x по элементарному контуру ($abcda$), приписывая индексу x смысл обхода вокруг оси, параллельной оси x.



Фиг. 5.2. Вихревая трубка.



Фиг. 5.3. Вычисление циркуляции по бесконечно малому прямоугольному контуру.

Пусть v_y и v_z — проекции на оси y и z скорости v точки a. Подсчитаем величины скоростей, направленных вдоль сторон bc и dc в точках b и d:

$$(v_z)_b = v_z(x, y+dy, z, t) = v_z + \frac{\partial v_z}{dy} dy,$$

$$(v_y)_d = v_y(x, y, z+dz, t) = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz.$$

Циркуляция $d\Gamma_x$ по контуру $abcda$ будет складываться, очевидно, из циркуляций вдоль бесконечно малых сторон, равных произведению скорости на длины соответствующих сторон прямоугольника. Таким образом, будем иметь

$$d\Gamma_x = v_y\,dy + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy\right)dz - \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz\right)dy - v_z\,dz.$$

Знак минус вдоль сторон cd и da берется потому, что направление обхода обратно направлению скорости. Раскрывая скобки и производя сокращение, будем иметь

$$d\Gamma_x = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dy\,dz,$$

или в силу формул (5. 1), а также обозначая $dy\,dz = d\sigma_x$,

$$d\Gamma_x = 2\,\omega_x\,d\,\sigma_x.$$

Аналогично для осей y и z получим

$$d\Gamma_y = 2\,\omega_y\,d\,\sigma_y,\quad d\Gamma_z = 2\,\omega_z\,d\,\sigma_z.$$

Распространяя полученный результат на произвольно расположенную в пространстве бесконечно малую прямоугольную площадку $d\sigma$, будем иметь

$$d\Gamma = 2\omega_n\,d\sigma = 2\omega\,d\sigma_n, \tag{5. 5}$$

где ω_n — проекция угловой скорости ω на нормаль к площадке. Следовательно, мы получили следующий результат: *циркуляция по бесконечно малому прямоугольному контуру равна напряжению вихря, пронизывающего этот контур.*

Полученный результат можно легко распространить на произвольный конечный плоский контур L (фиг. 5. 4). Для этого разобьем площадь, ограниченную контуром L, системой взаимно ортогональных прямых на бесконечно большое число элементарных прямоугольников. Рассматривая внешние стороны прямоугольников, расположенных на периферии, замечаем, что они составляют многоугольник, вписанный в данный контур. Рассмотрим циркуляцию вдоль сторон каждого бесконечно малого прямоугольника в отдельности. Согласно доказанному циркуляция будет равна напряжению пронизывающего его вихря. Суммируя циркуляции по всем бесконечно малым прямоугольникам, замечаем, что циркуляции по смежным сторонам прямоугольников будут взаимно уничтожаться как разные по знаку. Следовательно, в пределе при неограниченном увеличении числа бесконечно малых прямоугольников суммарная циркуляция даст циркуляцию вдоль контура L (так как в пределе вписанный многоугольник превратится в контур L) и поэтому

$$\Gamma = 2\iint_S \omega_n\,d\sigma. \tag{5. 6}$$

Предыдущий вывод можно обобщить на случай произвольной поверхности S, опирающейся на произвольный контур L (фиг. 5. 5). Действительно, разобьем, как и ранее, поверхность S на бесконечно большое число бесконечно малых площадок $d\sigma$. Тогда, считая площадки $d\sigma$ вследствие их малости плоскими, для любой из них можно написать

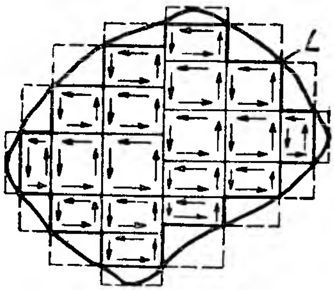
$$d\Gamma = 2\omega_n d\sigma. \tag{5.7}$$

Суммируя полученное равенство по всем площадкам и переходя к пределу, будем иметь

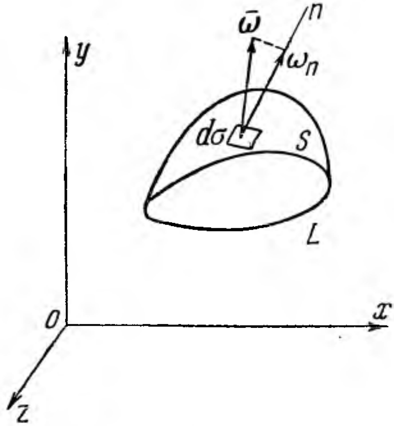
$$\Gamma = 2\iint_S \omega_n \, d\sigma. \tag{5.8}$$

Эта формула называется *интегральной формулой Стокса*. Она показывает, что *циркуляция по произвольному контуру L в пространстве равна сумме напряжений вихрей, пронизывающих поверхность S, натянутую на контур L.*

Если по аналогии с выражением $v_n d\sigma$, представляющим элементарный расход через площадку $d\sigma$, ввести выражение $\omega_n d\sigma$, называемое потоком вихря через площадку $d\sigma$, то интегральная формула Стокса может быть сформулирована следующим образом: *циркуляция скорости по замкнутому контуру равна удвоенному полному потоку вихря через поверхность, натянутую на этот контур.*



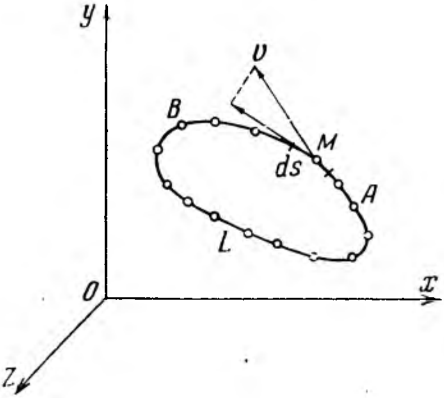
Фиг. 5. 4. Вычисление циркуляции по замкнутому плоскому контуру.



Фиг. 5. 5. Произвольная поверхность S в пространстве, пронизываемая потоком вихрей.

§ 4. ТЕОРЕМА ТОМСОНА О ПОСТОЯНСТВЕ ЦИРКУЛЯЦИИ

Рассмотрим в идеальной жидкости, движение которой будем считать баротропным, замкнутый контур L (фиг. 5. 6), составленный из одних и тех же частиц жидкости. Такой контур при движении жидкости не только перемещается вместе с ней, но и изменяет свою геометрическую форму. Будем называть его *жидким контуром.* Докажем следующую теорему.



Фиг. 5.6. К выводу теоремы о постоянстве циркуляции по замкнутому жидкому контуру.

Теорема Томсона. *Циркуляция по замкнутому жидкому контуру в идеальной жидкости при наличии массовых сил, обладающих однозначным потенциалом, и баротропии не меняется со временем.*

Для доказательства теоремы возьмем на контуре конечную дугу AB. Циркуляцию скорости по дуге AB можно представить в виде

$$\Gamma = \int_{AB} v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz. \qquad (5.9)$$

Для того чтобы показать независимость Γ от времени, нужно доказать, что $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ для жидкого замкнутого контура. Следовательно, необходимо в первую очередь вычислить $\frac{d\Gamma}{dt}$. Дифференцируя (5.9), находим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{AB} v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \int_{AB} \frac{d}{dt}(v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz).$$

Выполняя дифференцирование подинтегрального выражения и имея в виду, что контур жидкий, будем иметь

$$\frac{d}{dt}(v_x\,dx) = \frac{dv_x}{dt}dx + v_x\frac{d}{dt}(dx) = \frac{dv_x}{dt}dx + v_x\,dv_x,$$

$$\frac{d}{dt}(v_y\,dy) = \frac{dv_y}{dt}dy + v_y\frac{d}{dt}(dy) = \frac{dv_y}{dt}dy + v_y\,dv_y,$$

$$\frac{d}{dt}(v_z\,dz) = \frac{dv_z}{dt}dz + v_z\frac{d}{dt}(dz) = \frac{dv_z}{dt}dz + v_z\,dv_z.$$

Подставим найденные значения для производных под знак интеграла:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{AB}\left[\left(\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz\right) + (v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z)\right].$$

Выражение в последней скобке представляет собой $d\left(\frac{v^2}{2}\right)$.

Заменяя проекции полного ускорения на координатные оси, т. е.

$\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$, $\frac{dv_z}{dt}$, их значениями из дифференциальных уравнений движения

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x};$$

$$\frac{dv_y}{dt}=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y};$$

$$\frac{dv_z}{dt}=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial z},$$

будем иметь

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\int\limits_{AB}\left[dU-dP+d\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]$$

или

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\int\limits_{AB} d\left(U-P+\frac{v^2}{2}\right), \tag{5.10}$$

откуда

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\left(U-P+\frac{v^2}{2}\right)_B-\left(U-P+\frac{v^2}{2}\right)_A. \tag{5.11}$$

Так как величины, стоящие в скобке, т. е. U, P и v, являются однозначными функциями, то в случае замкнутости контура, т. е. совпадения точек A и B, выражение

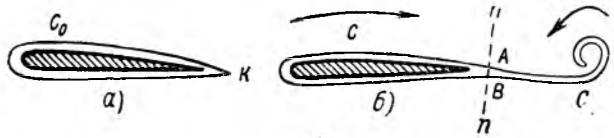
$$\frac{d\Gamma}{dt}=0 \quad \text{или} \quad \Gamma=\text{const}.$$

Таким образом, циркуляция действительно не будет зависеть от времени.

Из теоремы Томсона следует, что если движение идеальной жидкости возникает из состояния покоя и является непрерывным, то циркуляция скорости по произвольному замкнутому контуру в потоке будет равна нулю, так как в начальный момент она была равна нулю.

В таком случае в силу теоремы Стокса мы можем заключить, что такой поток обязательно будет потенциальным и вихри в нем будут отсутствовать. Следовательно, циркуляция может возникнуть в идеальной жидкости при условии потенциальности массовых сил и наличии баротропии лишь когда функция давления p либо скорость v потока испытывают разрыв на некоторых поверхностях, вследствие чего разность (5. 11) оказывается отличной от нуля. Рассмотрим в качестве примера произвольный профиль крыла (фиг. 5. 7,*а*) и проведем вокруг него какой-нибудь жидкий контур C_0. Будем считать, что в начальный момент жидкость была неподвижной. В таком случае циркуляция скорости Γ_0 по этому жидкому контуру C_0 будет равна нулю.

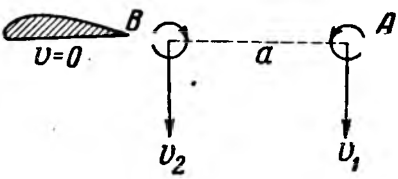
С нарастанием движения струи жидкости, огибая профиль, начинают сходить с его задней кромки. Предположим, что на задней кромке скорость схода струй отлична от нуля. В таком случае жидкий контур C_0 будет растягиваться и уноситься вправо (см. фиг. 5.7,*б*). Разрежем у задней кромки профиля (по $n—n$) вытянувшийся контур C_0 на две части: на контур C, охватывающий



Фиг. 5.7. К возникновению циркуляции вокруг профиля крыла.

а—жидкость неподвижна относительно профиля, *б*—жидкость движется относительно профиля.

профиль, и на контур C_1, сошедший с профиля. Так как струи, омывающие верхнюю и нижнюю части профиля, подходят к задней кромке с различными скоростями, то это приводит к наличию разрыва касательных составляющих скоростей в сечении $n—n$. В результате в силу теоремы Томсона циркуляция скорости по контурам C и C_1 оказывается отличной от нуля, а сумма этих циркуляций на основании той же теоремы равна нулю, т. е.



Фиг. 5.8. Возникновение циркуляции вокруг обтекаемого потоком тела.

$$\Gamma_C + \Gamma_{C_1} = \Gamma_0 = 0$$

или

$$\Gamma_C = -\Gamma_{C_1}.$$

Возникновение циркуляции Γ_{C_1} подтверждается опытом, показывающим, что при возникновении движения профиля с него сбегает так называемый разгонный вихрь (фиг. 5.8, вихрь A), а при остановке профиля с него сбегает второй вихрь B (см. фиг. 5.8), циркуляция которого равна циркуляции разгонного вихря A, но обратна по знаку. Образующаяся пара вихрей будет двигаться поступательно вниз со скоростью

$$v_1 = v_2 = \frac{\Gamma}{2\pi a},$$

где a — расстояние между вихрями A и B.

§ 5. ТЕОРЕМЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦА О ВИХРЯХ

В своей известной работе «О вихревом движении» (1858 г.) Гельмгольц сформулировал и доказал три теоремы о вихрях, лежащие наряду с теоремой Стокса в основе теории вихрей.

Первая теорема Гельмгольца гласит: *напряжение по длине вихревой трубки не меняется.*

Для доказательства рассмотрим часть вихревой трубки (фиг. 5. 9), заключенную между двумя произвольными сечениями *I* и *II*. Очевидно, теорема будет доказана, если мы сумеем доказать, что напряжение в сечениях *I* и *II* одинаково, т. е. что $\varkappa_{\mathrm{I}}=\varkappa_{\mathrm{II}}$.

Соединим точки a и b обоих сечений произвольной линией ab, лежащей на поверхности вихревой трубки, и рассмотрим циркуляцию по контуру $abcdebafgha$. Так как этот контур является простым замкнутым контуром и лежит на поверхности вихревой трубки, то

$$\Gamma(abcdebafgha)=0.$$

Но циркуляция по нему состоит из циркуляции по контурам *I, II* и линиям ab и ba. Следовательно,

$$\Gamma_{\mathrm{I}}+\Gamma_{ab}-\Gamma_{\mathrm{II}}+\Gamma_{ba}=0.$$

Так как очевидно, что

$$\Gamma_{ba}=-\Gamma_{ab},$$

то

$$\Gamma_{\mathrm{I}}=\Gamma_{\mathrm{II}},$$

и, следовательно, на основании теоремы Стокса и

$$\varkappa_{\mathrm{I}}=\varkappa_{\mathrm{II}},$$

т. е. теорема доказана.

Фиг. 5. 9. К доказательству неизменности напряжения по длине вихревой трубки.

Из этой теоремы можно вывести заключение о возможных формах существования вихрей. В самом деле, важным следствием этой теоремы является то, что вследствие постоянства напряжения вихревой трубки по ее длине, т. е.

$$\varkappa=2\omega\sigma=\mathrm{const},$$

вихрь не может закончиться в жидкости острием, так как в этом случае $\sigma=0$, а $\omega=\infty$, что невозможно. Таким образом, возможными формами существования в природе вихрей являются следующие:

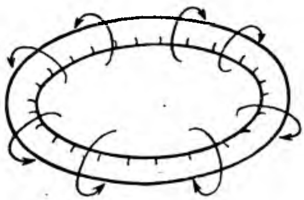
1. Концы вихря совпадают, т. е. вихревая трубка замыкается сама на себя и образует часто наблюдаемое вихревое кольцо (фиг. 5. 10).

Образование вихревых колец легко продемонстрировать на следующем опыте. Если взять ящик (фиг. 5. 11), у которого в одной стенке имеется отверстие, а противоположная затянута материей, и заполнить его дымом, то при легком ударе по материи из отверстия будут вылетать кольцеобразные вихри, причем каждый вылетающий вихрь нагоняет предыдущий и проходит через него.

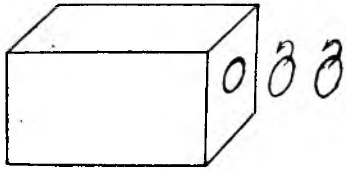
Н. Е. Жуковскому принадлежит весьма интересная работа «К вопросу о разрезании вихревых колец» (1894 г.), в которой он аналитически строго доказал известный из опыта факт, что при поднесении сбоку к вихревому кольцу острия ножа вихревое кольцо резко уклоняется от последнего, в результате чего разрезать вихрь ножом невозможно.

2. Концы вихря лежат либо на границах рассматриваемой жидкости, либо один конец опирается на границу жидкости, а другой — на твердую границу, например, на стенку. Этот случай представлен на фиг. 5.12. К этому типу вихрей принадлежит часто наблюдаемый в природе смерч как водяной, так и воздушный.

Водяной вихрь такого типа (искусственный смерч) легко создать на следующей установке, описанной Н. Е. Жуковским в его книге



Фиг. 5.10. Вихревое кольцо — одна из форм существования вихрей.



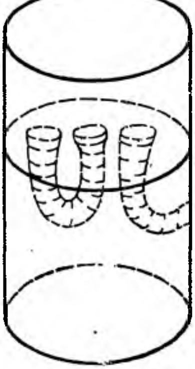
Фиг. 5.11. Прибор для демонстрации вихревых колец.

«Теоретические основы воздухоплавания». Если над чаном с водой установить на расстоянии около 3 *м* полый шкив диаметром в 1 *м* с несколькими перегородками, расположенными в радиальных плоскостях, и шкив привести в быстрое вращение, то последний начинает закручивать воздух (фиг. 5.13). Ввиду того что внутри образовавшегося воздушного вихря давление понижено, вода начинает подниматься и приходит во вращательное движение от трения о крутящийся воздух. Через некоторое время образуется водяной столб, снизу сплошной, а вверху образованный из капелек.

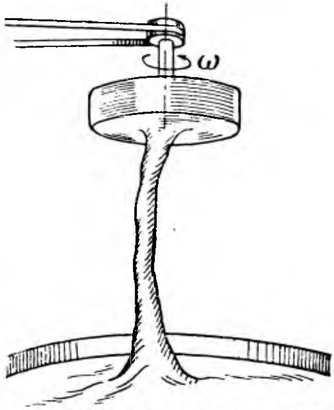
Вторая теорема Гельмгольца. *Если в идеальной жидкости действуют массовые силы, обладающие однозначным потенциалом и имеет место баротропия, то вихревая трубка не разрушается и всегда остается вихревой трубкой.*

Для доказательства возьмем на боковой поверхности рассматриваемой вихревой трубки замкнутый контур C (фиг. 5.14,*а*), проходящий через одни и те же частицы жидкости. Так как площадь, охватываемая контуром C, вихрями не пронизывается ($\omega_n=0$), то циркуляция по этому контуру по теореме Стокса равна нулю, т. е. $\Gamma_C=0$. Но так как по теореме Томсона циркуляция в этом случае со временем изменяться не будет, то, следовательно, она всегда будет равна нулю. Это означает, что через контур C никогда вихревые линии не пройдут, и контур C останется лежать на боковой поверхности вихревой трубки, т. е. вихревая трубка не разрушится.

Указанное свойство вихрей справедливо только для идеальной жидкости. В реальной жидкости происходит процесс затухания — диффузия вихря. Изучению этого сложного процесса диффузии



Фиг. 5.12. Возможные формы существования вихрей.

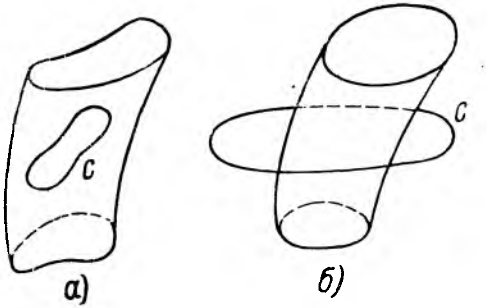


Фиг. 5.13. Установка, искусственно создающая вихрь (смерч).

вихря в вязкой жидкости посвящена работа акад. А. И. Некрасова «Диффузия вихря» [31].

Третья теорема Гельмгольца. *Если в идеальной жидкости действуют массовые силы, обладающие однозначным потенциалом и имеет место баротропия, то напряжение вихревой трубки со временем не меняется.*

Окружим вихревую трубку (фиг. 5.14,*б*) замкнутым жидким контуром C. Циркуляция по этому контуру по теореме Томсона остается неизменной. Но так как по теореме Стокса циркуляция Γ_C равна напряжению вихревой трубки, то, следовательно, и напряжение со временем меняться не будет.



Фиг. 5.14. К доказательству теорем о неразрушаемости вихревой трубки (*а*) и о неизменяемости напряжения вихревой трубки со временем (*б*).

Из второй и третьей теорем Гельмгольца следует, что в идеальной жидкости при наличии потенциала массовых сил и баротропии вихревое движение не может ни возникать, ни затухать.

§ 6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ВНЕ И ВНУТРИ ПЛОСКОГО ВИХРЯ

Чтобы определить распределение давления вне плоского вихря, будем рассматривать вихрь как совокупность жидких частиц, вращающихся по закону вращения твердого тела. Обозначим через r_0

радиус ядра вихря и скорость на границе ядра через v_0. Тогда давление в любой точке вне вихря можно определить с помощью уравнения Лагранжа—Бернулли (4. 15), которое, пренебрегая массовыми силами ($U=0$), напишем в следующем виде:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=C.$$

Так как вне вихря $v=\frac{\Gamma}{2\pi r}$, то на бесконечности $v_\infty=0$, а давление будет равно статическому давлению окружающей вихрь среды p_∞. Исходя из этого можно определить константу C:

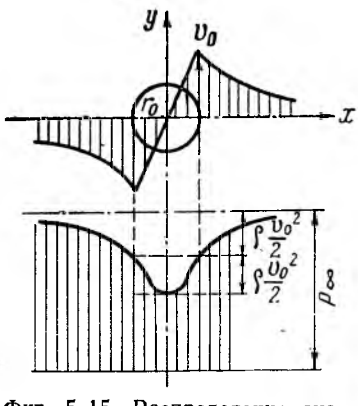
$$p_\infty=C,$$

т. е.

$$p=p_\infty-\frac{\rho v^2}{2}. \tag{5.12}$$

Очевидно, что по мере приближения к вихрю (фиг. 5. 15) скорость v будет возрастать по гиперболическому закону, а давление p падать. Минимальное значение давления будет на границе ядра, где скорость будет максимальной и равна v_0. Давление на границе ядра будет определяться следующим выражением:

$$p_0=p_\infty-\frac{\rho v_0^2}{2}. \tag{5.13}$$



Фиг. 5. 15. Распределение скорости и давления вне и внутри плоского вихря.

Рассмотрим теперь, как будет изменяться давление внутри самого вихря, т. е. в вихревой области потока.

В этом случае мы не можем применять интеграл Лагранжа—Бернулли, так как поток не потенциальный. Казалось бы нужно обратиться к интегралу Бернулли. Однако и его мы использовать не можем, так как на различных линиях тока внутри вихря константа уравнения Бернулли различна и нам неизвестна.

Обратимся поэтому к уравнениям Эйлера. Так как движение плоское, установившееся и массовыми силами мы пренебрегаем, уравнения Эйлера напишутся в виде

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Обозначая через ω угловую скорость вращения вихря, выражения для v_x и v_y можно написать в следующем виде:

$$v_x = -\omega_y, \quad v_y = \omega x.$$

В таком случае

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

и уравнения Эйлера примут вид

$$\omega^2 x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\omega^2 y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Умножая последние уравнения соответственно на dx и dy и интегрируя, находим

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + C$$

или

$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + C = \frac{\rho v^2}{2} + C. \tag{5.14}$$

Отнесем уравнение (5. 14) к границе вихря. Будем иметь

$$p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2} + C,$$

откуда

$$C = p_0 - \frac{\rho v_0^2}{2},$$

т. е.

$$p = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 - \frac{\rho v_0^2}{2}.$$

Подставим вместо p_0 его значение (5. 13). Получим

$$p = p_\infty + \frac{\rho v^2}{2} - \rho v_0^2. \tag{5.15}$$

По этой формуле можно подсчитать давление в каждой точке внутри вихря. В центре вихря $p = p_C$, $v = 0$ и, следовательно,

$$p_C = p_\infty - \rho v_0^2. \tag{5.16}$$

Это означает, что в центре вихря давление уменьшилось по сравнению с давлением в покоящейся жидкости на удвоенную величину скоростного напора на границе вихря, т. е. на ρv_0^2.

Сравнение давления в центре вихря и на его границе показывает, что

$$p_0 - p_C = \frac{\rho v_0^2}{2}. \tag{5.17}$$

Таким образом, перепад давления на границах потенциального потока (вне вихря) равен перепаду давления внутри вихря, и изменение давления внутри вихря подчиняется параболическому закону. Понижение давления в центре вихря объясняет образование воронок на поверхности воды. Этим же объясняется известное свойство подсасывания вихрей. Наблюдающиеся в природе смерчи всегда засасывают попадающиеся на их пути предметы. Разрушительная сила смерчей объясняется как большим перепадом давления внутри них, так и огромной живой силой кругового вращения жидкости вокруг вихря.

§ 7. ФОРМУЛА БИО—САВАРА О ВИХРЕВОМ ВЛИЯНИИ

Найдем скорость, вызываемую вихрем произвольной формы и напряжением Γ в какой-либо точке M жидкости (фиг. 5. 16). Для этого выделим на вихре элемент dL. Обозначим расстояние от точки M до элемента dL через r, через α — угол, образуемый радиусом r с осью вихревого элемента. Тогда скорость dw, индуцируемая элементом вихря dL в точке M, как можно строго доказать, будет определяться формулой

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin\alpha \, dL, \tag{5.18}$$

которая носит название формулы Био—Савара и имеет большое значение в аэродинамике.

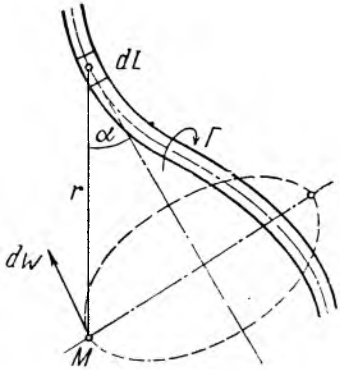
Следует отметить, что формула (5. 18) устанавливает интересную аналогию с электродинамикой. В самом деле, если вообразить, что вихревой криволинейный шнур заменен линейным проводником, по которому идет ток с напряжением Γ, то этот ток, действуя на единицу магнитной массы в точке M, вызовет силу, величина и направление которой определятся формулой (5. 18), выражающей известный закон Био—Савара.

Для определения полной скорости, индуцируемой всем вихрем в точке M, надо выражение (5. 12) проинтегрировать по длине вихря:

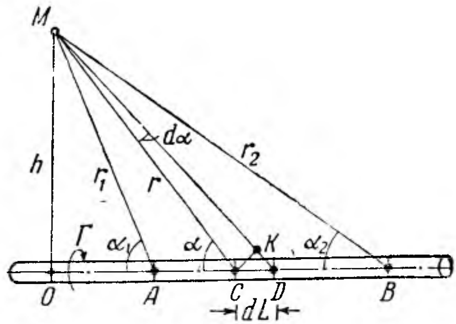
$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\sin\alpha \, dL}{r^2}. \tag{5.19}$$

Применим формулу (5. 18) к случаю бесконечно длинного прямолинейного вихря с напряжением $\varkappa = \Gamma$. Сначала найдем скорость w, индуцируемую в точке M конечным участком AB этого вихря (фиг. 5. 17).

Радиусы-векторы r_1 и r_2 и углы α_1 и α_2, соответствующие точкам A и B, а также длину перпендикуляра h, опущенного из точки M на ось вихря, считаем заданными (задана также и величина Γ).



Фиг. 5.16. К расчету скоростей, вызванных в жидкости вихрем произвольной формы.



Фиг. 5.17. К расчету скоростей, вызванных в жидкости прямолинейным бесконечно длинным вихрем.

Выделим на участке AB вихря бесконечно малый элемент $CD=dL$. Из бесконечно малых треугольников CKD и CMK находим

$$CD = dL = \frac{CK}{\sin\alpha}; \quad CK = r\,d\alpha;$$

отсюда

$$dL = \frac{r\,d\alpha}{\sin\alpha}.$$

С другой стороны, из треугольника OCM имеем

$$r = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Подставляя значения r и dL в формулу (5.18), находим

$$dw = \frac{\Gamma\sin^2\alpha}{4\pi h^2}\sin\alpha\frac{h\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

или

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi h}\sin\alpha\,d\alpha.$$

Для нахождения скорости, индуцируемой всем вихрем AB в точке M, надо это выражение проинтегрировать в пределах от α_2 до α_1 (в сторону возрастания угла α). Тогда

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1). \qquad (5.20)$$

Обозначая $OA = x_1$ и $OB = x_2$, формуле (5. 20) можно придать такой вид:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h}\left(\frac{x_2}{\sqrt{h^2+x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{h^2+x_1^2}}\right). \tag{5.20'}$$

Рассмотрим два частных случая.

Первый случай: бесконечно длинный вихревой «полушнур», простирающийся от точки O до бесконечности. При этом

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = 0,$$

и, следовательно,

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h}. \tag{5.21}$$

Этой формулой нам придется пользоваться при построении теории крыла конечного размаха.

Второй случай: бесконечно длинный вихревой шнур, простирающийся в обе стороны до бесконечности. При этом

$$\alpha_1 = \pi, \quad \alpha_2 = 0,$$

и формула (5. 20) принимает вид

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi h}. \tag{5.21'}$$

Как видим, вихревой полушнур вызывает скорости вдвое меньшие, чем бесконечно длинный вихревой шнур.

§ 8. ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВИХРЕВОГО ВЛИЯНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В § 7 рассматривалось влияние одиночного вихря на окружающую его жидкость. Рассмотрим теперь наиболее общую постановку задачи об определении вихревого влияния.

Допустим, что в некоторой области, ограниченной объемом V, в каждой точке заданы компоненты вихря ω_x, ω_y, ω_z в функции координат x, y, z. Требуется определить в каждой точке этого объема линейную скорость $\bar{v}$, вызванную (индуцированную) вихрями, т. е. величины v_x, v_y, v_z. Как известно, v_x, v_y, v_z связаны с ω_x, ω_y, ω_z следующими соотношениями [формулы (5. 1)]:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right),$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Кроме того, как нетрудно проверить, ω_x, ω_y, ω_z удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \tag{5.22}$$

Для нахождения v_x, v_y, v_z поступим следующим образом. Введем в рассмотрение вспомогательный вектор $\bar{a}$, который по отношению к вектору линейной скорости $\bar{v}$ будет играть ту же роль, что и $\bar{v}$ по отношению к $\bar{\omega}$, т. е. компоненты вектора $\bar{a}$ должны удовлетворять соотношениям, аналогичным (5.1):

$$v_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right),\quad v_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right),$$

$$v_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \tag{5.23}$$

Если теперь по известному полю векторов угловой скорости $\bar{\omega}$ найти соответствующее ему поле векторов $\bar{a}$, то тем самым будет найдено поле векторов линейной скорости $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$ с помощью формул (5.23).

Непосредственная проверка показывает, что проекции вектора $\bar{a}$, так же как и проекции векторов линейной скорости $\bar{v}$ и угловой скорости $\bar{\omega}$, удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=0, \tag{5.24}$$

показывающему, что поле векторов $\bar{a}$, так же как и поле векторов $\bar{v}$ и $\bar{\omega}$, является соленоидальным полем.

Подставим теперь в правые части формул (5.1) вместо v_x, v_y, v_z их значения по формулам (5.23). Будем иметь

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\right].$$

Принимая во внимание условие (5.24) и производя аналогичные операции для ω_y, ω_z, получим три следующих уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}&=-4\omega_x,\\ \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}&=-4\omega_y,\\ \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}&=-4\omega_z.\end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

Эти уравнения в частных производных второго порядка носят название *уравнений Пуассона*. В частном случае, когда $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$, уравнения Пуассона превращаются в известные нам уравнения Лапласа. Это означает, что внутри вихревой области величины a_x, a_y, a_z удовлетворяют уравнениям Пуассона, а вне вихревой области — уравнениям Лапласа.

Решения уравнений Пуассона имеют вид [10]

$$a_x=\frac{1}{\pi}\iiint\limits_V \omega_x\frac{dV}{r},\quad a_y=\frac{1}{\pi}\iiint\limits_V \omega_y\frac{dV}{r},\quad a_z=\frac{1}{\pi}\iiint\limits_V \omega_z\frac{dV}{r}, \tag{5.26}$$

где интегрирование распространяется на весь объем V, заполненный вихрями $\bar{\omega}$.

Применим формулы (5.26) к случаю, когда в покоящейся жидкости имеется вихревой шнур произвольной формы. Очевидно, что элемент объема вихревого шнура dV равен элементу длины dL, умноженному на площадь σ поперечного сечения шнура: $dV=\sigma\, dL$. Составляющие вектора $\bar{\omega}$ могут быть представлены в виде

$$\omega_x=\omega\cos(\omega, x)=\omega\frac{d\xi}{dL},\quad \omega_y=\omega\frac{d\eta}{dL},\quad \omega_z=\omega\frac{d\zeta}{dL},$$

где ξ, η и ζ — текущие координаты вихря в отличие от x, y, z — координат жидкости вне вихревого шнура.

Подинтегральные выражения формул (5.26) теперь можно представить в виде

$$\frac{\omega_x\, dV}{r}=\frac{\omega\sigma\, d\xi}{r},\quad \frac{\omega_y\, dV}{r}=\frac{\omega\sigma\, d\eta}{r},\quad \frac{\omega_z\, dV}{r}=\frac{\omega\sigma\, d\zeta}{r},$$

откуда, обозначая $\omega\sigma=\frac{1}{2}\Gamma$, получаем

$$a_x=\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_L\frac{d\xi}{r},\quad a_y=\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_L\frac{d\eta}{r},\quad a_z=\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_L\frac{d\zeta}{r}. \qquad (5.27)$$

Подставим выражения (5.27) в формулы (5.23). Будем иметь

$$v_x=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_L\frac{d\zeta}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_L\frac{d\eta}{r}\right)\right]=$$

$$=\frac{\Gamma}{4\pi}\int\limits_L\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)d\zeta-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\eta\right].$$

Вычислим частные производные от $\frac{1}{r}$, имея в виду, что

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\xi-x}{r^3};\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\eta-y}{r^3};\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\zeta-z}{r^3}.$$

В таком случае выражения для проекций линейной скорости примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
v_x&=\frac{\Gamma}{4\pi}\int\left[\frac{\eta-y}{r}\frac{d\zeta}{dL}-\frac{\zeta-z}{r}\frac{d\eta}{dL}\right]\frac{dL}{r^2},\\
v_y&=\frac{\Gamma}{4\pi}\int\left[\frac{\zeta-z}{r}\frac{d\xi}{dL}-\frac{\xi-x}{r}\frac{d\zeta}{dL}\right]\frac{dL}{r^2},\\
v_z&=\frac{\Gamma}{4\pi}\int\left[\frac{\xi-x}{r}\frac{d\eta}{dL}-\frac{\eta-y}{r}\frac{d\xi}{dL}\right]\frac{dL}{r^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.28)$$

Из этих формул можно легко получить известную формулу Био—Савара, которая была дана без вывода в предыдущем параграфе.

Возьмем на вихревой линии L (фиг. 5.18) произвольную точку $A(\xi, \eta, \zeta)$. Пусть расстояние точки $M(x, y, z)$ от точки A определяется радиусом-вектором r. Отложим в точке A единичный вектор $\bar{k}$ вдоль касательной. Его проекции будут

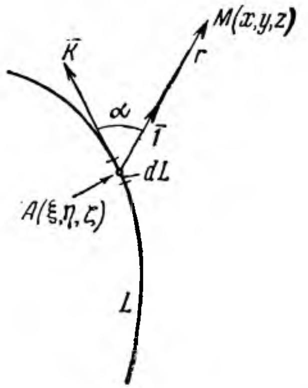
$$\frac{d\xi}{dL}, \quad \frac{d\eta}{dL}, \quad \frac{d\zeta}{dL}.$$

Отложим вдоль радиуса-вектора r единичный вектор $\bar{1}$. Его составляющие будут иметь вид

$$-\frac{\xi - x}{r}, \quad -\frac{\eta - y}{r}, \quad -\frac{\zeta - z}{r}.$$

Обозначим через $d\bar{w}$ скорость, возбуждаемую в точке M элементом вихря dL. Тогда очевидно, что составляющими dw являются подинтегральные выражения формул (5.28), а сама величина $d\bar{w}$ выражается в виде векторного произведения

$$d\bar{w} = \frac{\Gamma}{4\pi}\left[\bar{k}, \bar{1}\right]\frac{dL}{r^2}.$$



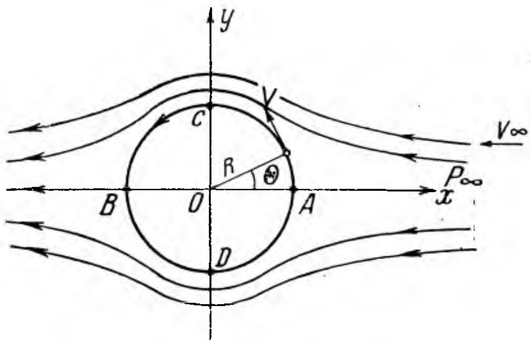
Фиг. 5.18. К расчету скоростей, вызванных в жидкости вихрем произвольной формы.

Беря модуль от обеих частей полученного выражения, получим формулу Био—Савара (5.18)

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi r^2}\sin\alpha\, dL.$$

§ 9. ПАРАДОКС ЭЙЛЕРА—ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим бесциркуляционное обтекание потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости цилиндра радиуса R (фиг. 5.19).



Фиг. 5.19. К объяснению парадокса Эйлера—Даламбера.

Как было выше установлено, скорость v на цилиндре будет выражаться следующим образом:

$$v = 2v_\infty \sin\theta.$$

Вычислим давление на цилиндре, используя уравнение Бернулли

$$p = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}.$$

Подставляя значение v, находим

$$p - p_\infty = \frac{\rho v_\infty^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta).$$

Введем безразмерный коэффициент давления $\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}}$. Будем иметь

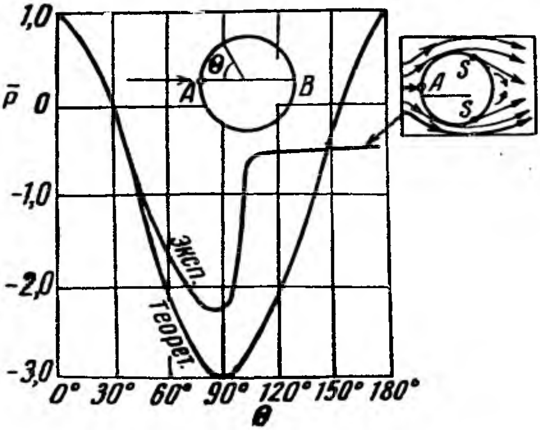
$$\bar{p} = 1 - 4\sin^2\theta.$$

Как видим, безразмерный коэффициент давления не зависит ни от радиуса цилиндра, ни от v_∞ и p_∞.

$$\text{При } \theta = 0 \text{ (точка } A) \ \bar{p} = 1.$$
$$\text{При } \theta = \pi \text{ (точка } B) \ \bar{p} = 1.$$

В точках C и D коэффициент давления $\bar{p} = \bar{p}_{\min} = -3$, т. е. в этих точках максимальное разрежение.

Из симметричного распределения давления по цилиндру (ибо $\bar{p}$ зависит от $\sin^2\theta$) следует, что результирующая сила давления потока на цилиндр равна нулю. Этот результат может быть распространен на случай произвольного тела, обтекаемого непрерывным потенциальным потоком без образования вихрей и срыва потока. Следовательно, если в равномерном установившемся потоке идеальной жидкости помещено какое-нибудь тело, и поток обтекает это тело без срыва и образования циркуляции, то результирующая сила давления потока на тело равна нулю, т. е. тело не испытывает сопротивления. В этом и заключается известный парадокс Эйлера—Даламбера.



Фиг. 5.20. Теоретическая и экспериментальная кривые зависимости безразмерного коэффициента давления $\bar{p}$ от угла θ.

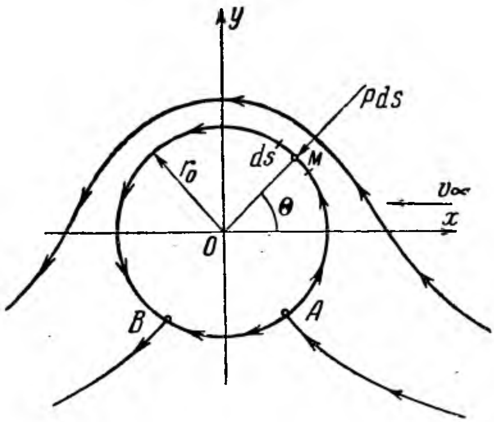
Теоретическая кривая $\bar{p}$ дана на фиг. 5.20. Как показал эксперимент, кривая распределения $\bar{p}$ будет иметь совершенно иной вид.

В частности, при $\theta=84°-120°$ поток перестает омывать цилиндр и срывается с него, образуя за ним вихревую область.

Это изменение картины обтекания происходит из-за наличия в реальной (вязкой) жидкости пограничного слоя. Как будет ниже показано (гл. XI), в результате отсасывания внутрь цилиндра пограничного слоя можно получить картину обтекания, почти соответствующую потенциальному потоку (см. фиг. 5.19).

§ 10. ТЕОРЕМА Н. Е. ЖУКОВСКОГО

В основе современной теории крыла лежит знаменитая теорема Н. Е. Жуковского о результирующей силе давления потока на обтекаемое им тело. Жуковский, используя модель *идеальной* жидкости, предложил искать источник силового воздействия потока на тело в образовании циркуляции.



Фиг. 5.21. К доказательству теоремы Жуковского.

Поясним это сначала на частном случае обтекания круглого цилиндра. Как было выше показано, при бесциркуляционном обтекании цилиндра скорости и давления распределяются симметрично, что приводит к отсутствию результирующей силы давления. Если же цилиндр обтекается с циркуляцией, то симметрия в распределении скоростей и давлений нарушается, в результате чего появляется результирующая сила давления. Образование циркуляции можно представить как результат воздействия на поток вихря, расположенного в центре омываемого цилиндра.

Рассмотрим эту схему обтекания с динамической точки зрения. Допустим (фиг. 5.21), что цилиндр радиуса r_0 обтекается поступательным потоком, текущим справа налево со скоростью на бесконечности v_∞. Как было установлено, потенциал скорости такого потока при наличии циркуляции выражается следующим образом:

$$\varphi=-v_\infty\cos\theta\left(r+\frac{r_0^2}{2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi}\theta,$$

а скорость потока на цилиндре

$$v=2v_\infty\sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

Для нахождения величины результирующей силы давления R потока на цилиндр рассмотрим сначала проекции на оси координат

нат элементарной силы давления $p\,ds$, действующей на участок цилиндра ds. Очевидно, проекции силы $p\,ds$ на оси координат можно написать в виде

$$-p\,ds\cos\theta\,,$$
$$-p\,ds\sin\theta\,.$$

В таком случае для составляющих силы R будем иметь следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\int p\,ds\cos\theta, \\ Y &= -\int p\,ds\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

где интегрирование проводится по дуге окружности радиуса r_0. Подставляя давление p по формуле

$$p = C - \frac{\rho v^2}{2}\,,$$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned} X &= -\int\left(C - \frac{\rho v^2}{2}\right)\cos\theta\,ds, \\ Y &= -\int\left(C - \frac{\rho v^2}{2}\right)\sin\theta\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Вычислим величину X. Для этого подставим в (5.30) выражение для скорости v на цилиндре и заменим $ds = r_0\,d\theta$. Тогда получим

$$X = -\int_0^{2\pi}\left\{C - \frac{\rho}{2}\left[4v_\infty^2\sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} + 2\frac{v_\infty\Gamma}{\pi r_0}\sin\theta\right]\right\} r_0\cos\theta\,d\theta,$$

откуда

$$X = -Cr_0\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta + 2\rho r_0 v_\infty^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta +$$
$$+\frac{\Gamma^2\rho}{8\pi^2 r_0}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta + \frac{\rho v_\infty\Gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta.$$

Так как интегралы

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0,$$

то $X = 0$. Иными словами, при безотрывном обтекании потоком идеальной жидкости цилиндра сила *лобового сопротивления* (т. е. сила, направленная по направлению скорости v_∞) оказывается равной нулю, даже если циркуляция Γ и отлична от нуля.

Вычислим теперь величину поддерживающей, или, как говорят, подъемной силы Y, направленной нормально к скорости v_∞. Будем иметь

$$Y = -\int_0^{2\pi}\left\{C - \frac{\rho}{2}\left[4v_\infty^2 \sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} + 2\frac{v_\infty \Gamma}{\pi r_0}\sin\theta\right]\right\} r_0 \sin\theta\, d\theta$$

или

$$Y = -Cr_0\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta + 2\rho r_0 v_\infty^2\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\, d\theta +$$

$$+\frac{\Gamma^2\rho}{8\pi^2 r_0}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta + \frac{\rho v_\infty \Gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta.$$

Так как интегралы

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0,\quad \int_0^{2\pi}\sin^3\theta\, d\theta = 0,\quad \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \pi,$$

то окончательно

$$Y = \rho\Gamma V_\infty\,. \tag{5.31}$$

Содержащийся в формуле (5.31) результат носит название *теоремы Жуковского, являющейся основной теоремой аэродинамики.*

Как видно из формулы (5.31), содержание теоремы Жуковского заключается в следующем: на цилиндр действует сила, нормальная к скорости на бесконечности v_∞ и равная произведению скорости v_∞ на циркуляцию Γ и плотность ρ потока.

Примечание. Рассмотрим размерность Y по формуле (5.31)

$$[Y] = [\rho]\,[\Gamma]\,[v_\infty] = \left[\frac{кг\ сек^2\ м^2\ м}{м^4\ сек\ сек}\right] = \left[\frac{кг}{м}\right],$$

т. е. Y имеет размерность силы, отнесенной к единице размаха цилиндра, что очевидно, если учесть, что в плоском потоке мы считаем толщину потока равной единице.

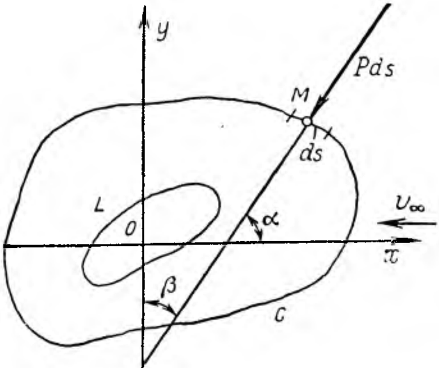
§ 11. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Н. Е. ЖУКОВСКОГО ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПЛОСКОГО КОНТУРА

Докажем теорему Жуковского для произвольного цилиндрического тела, обтекаемого плоским потоком идеальной, несжимаемой жидкости.

Допустим, что контур тела L, вообще говоря, произвольный, удовлетворяет условию безотрывности обтекания. Проведем вокруг рассматриваемого контура L тела произвольный замкнутый контур C (контрольный контур).

В какой-нибудь точке M контрольного контура C проведем нормаль n, которая образует с осями координат углы α и β (фиг. 5.22).

Для вывода теоремы Жуковского применим теорему о количестве движения к объему жидкости, заключенному между контурами L тела и контуром C.



Фиг. 5.22. К доказательству теоремы Жуковского для произвольного плоского контура.

Проекции количества движения, проходящей в единицу времени сквозь контур C массы жидкости, напишутся в следующем виде:

$$\int_C v_x \rho v_n \, ds, \quad \int_C v_y \rho v_n \, ds, \qquad \text{(а)}$$

а проекции поверхностных сил, действующих по контуру C, в виде:

$$-\int_C p \cos\alpha \, ds, \quad -\int_C p \cos\beta \, ds. \qquad \text{(б)}$$

На рассматриваемый объем жидкости, кроме того, будет действовать сила со стороны тела, ибо если поток будет на тело оказывать давление, выражаемое результирующей силой $\overline{F}$, проекции которой суть X, Y, то, по третьему закону Ньютона о равенстве действия и противодействия, тело будет действовать на рассматриваемую жидкость с силой $-X$, $-Y$. Эти силы дадут импульсы (в единицу времени)

$$-X, \ -Y. \qquad \text{(в)}$$

Приравнивая выражения (а) сумме выражений (б) и (в), получим математическую запись теоремы о количестве движения:

$$\left.\begin{aligned} \int_C \rho v_n v_x \, ds &= -X - \int_C p \cos\alpha \, ds; \\ \int_C \rho v_n v_y \, ds &= -Y - \int_C p \cos\beta \, ds. \end{aligned}\right\} \qquad (5.32)$$

Выразим давление p по формуле Лагранжа—Бернулли (4.13) и подставим в подинтегральное выражение формул (5.32). В результате получим:

$$X = -\int_C \rho v_n v_x ds - C\int_C \cos\alpha \, ds + \int_C \rho \frac{v^2}{2} \cos\alpha \, ds,$$

$$Y = -\int_C \rho v_n v_y \, ds - C\int_C \cos\beta \, ds + \int_C \rho \frac{v^2}{2} \cos\beta \, ds.$$

Так как направляющие косинусы углов нормали с осями координат выражаются формулами

$$\cos\alpha = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dx}{ds},$$

то вторые интегралы обратятся в нуль. В самом деле,

$$\int\limits_C \cos\alpha ds = -\int\limits_C \frac{dy}{ds} ds = -\int\limits_C dy = 0,$$

$$\int\limits_C \cos\beta\, ds = -\int\limits_C \frac{dx}{ds} ds = \int\limits_C dx = 0;$$

так как при обходе по замкнутому контуру C переменные x и y возвращаются к своему первоначальному значению. В таком случае выражения для X и Y примут вид:

$$\left.\begin{aligned} X &= \rho \int\limits_C \left(\frac{v^2}{2}\cos\alpha - v_n v_x\right) ds, \\ Y &= \rho \int\limits_C \left(\frac{v^2}{2}\cos\beta - v_n v_y\right) ds. \end{aligned}\right\} \quad (5.33)$$

До сих пор мы ничего не говорили о характере самого потока. Будем считать, что поток потенциальный и на бесконечности направлен параллельно оси x со скоростью v_∞ справа налево. Это означает, что

$$(v_x)_\infty = -v_\infty, \quad (v_y)_\infty = 0. \quad (5.34)$$

Возьмем следующее выражение для потенциала скорости $\varphi(x, y)$ потока:

$$\varphi = -v_\infty \cdot x + f(x, y), \quad (5.35)$$

где $f(x, y)$ — произвольная, однозначная, непрерывная и дифференцируемая функция координат (x, y), удовлетворяющая уравнению Лапласа.

Так как проекции скорости v в любой точке потока выражаются, как известно, формулами

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ v_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad (5.36)$$

то из условия, что на бесконечности имеют место соотношения (5.34), находим условия, которым должна удовлетворять функция $f(x, y)$ на бесконечности:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\infty = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_\infty = 0. \quad (5.37)$$

Выразим все члены, входящие в подинтегральное выражение (5.33), через потенциал скорости φ и его производные.

Вычислим прежде всего величину квадрата скорости:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_\infty^2 - 2v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Для упрощения этого выражения используем условие произвольности контура C. Будем считать, что контур C взят столь большим, что в силу условий (5.37) величинами

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \text{ и } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

можно пренебречь как малыми второго порядка. В таком случае находим

$$v^2 = v_\infty^2 - 2v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{5.38}$$

Вычислим выражение для v_n. Находим:

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn}$$

или в силу (5.36)

$$v_n = \left(-v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta. \tag{5.39}$$

Аналогично для v_s

$$v_s = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{dy}\frac{dy}{ds} = -\left(-v_\infty + \frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha$$

или

$$v_s = \left(v_\infty - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha. \tag{5.40}$$

На основании полученных выражений можно подсчитать произведения $v_n v_x$ и $v_n v_y$ (отбрасывая малые второго порядка)

$$v_n v_x = -v_n v_\infty - v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha \tag{5.41}$$

и

$$v_n v_y = -v_\infty \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha. \tag{5.42}$$

Выражения для $\frac{v^2}{2}\cos\alpha$ и $\frac{v^2}{2}\cos\beta$ можно написать следующим образом:

$$\frac{v^2}{2}\cos\alpha = \frac{v_\infty^2}{2}\cos\alpha - v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha, \tag{5.43}$$

$$\frac{v^2}{2}\cos\beta = \frac{v_\infty^2}{2}\cos\beta - v_\infty \frac{\partial f}{\partial x}\cos\beta = -\frac{v_\infty^2}{2}\cos\beta + v_\infty\left(v_\infty - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\beta. \tag{5.44}$$

Используя выражения (5.41)—(5.44) из формулы (5.33), находим:

$$X = -\rho v_\infty \int\limits_C v_n\, ds + \frac{\rho v_\infty^2}{2} \int\limits_C \cos\alpha\, ds.$$

Так как интеграл $\int v_n ds$ представит собой полный расход жидкости через замкнутый контур и внутри этого контура нет ни источников, ни стоков, то он равен нулю.

Таким образом,

$$\int\limits_C v_n\, ds = 0, \quad \int\limits_C \cos\alpha\, ds = 0.$$

Следовательно,

$$X = 0.$$

Это означает, что в условиях неразрывного потенциального течения идеальной жидкости сопротивление тела оказывается равным нулю.

Подсчитаем Y. Находим

$$Y = -\frac{\rho v_\infty^2}{2} \int\limits_C \cos\beta\, ds + \rho v_\infty \int\limits_C v_s\, ds.$$

Известно, что первый интеграл равен нулю, а второй представляет собою циркуляцию скорости Γ по контуру C:

$$\int\limits_C v_s\, ds = \Gamma.$$

Следовательно,

$$Y = \rho v_\infty \Gamma. \tag{5.45}$$

Таким образом, мы получили теорему Жуковского для тела произвольного контура, показывающую, что на тело будет действовать результирующая сила давления, направленная нормально к скорости на бесконечности и равная произведению плотности жидкости ρ, на скорость v_∞ и циркуляцию Γ. Теорема Жуковского справедлива и для сжимаемого газа при дозвуковых скоростях течения, что впервые было доказано М. В. Келдышем и Ф. И. Франклем [11].

Глава VI

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО К ИЗУЧЕНИЮ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Эффективным методом изучения свойств плоского течения является метод комплексного переменного, получивший в аэродинамике большое распространение. Возможность применения указанного метода возникает ввиду следующих причин. Как было показано в § 12 гл. III, основные функции, характеризующие свойства плоского потенциального течения,— функция тока $\psi\ (x, y)$ и потенциал скорости $\varphi\ (x, y)$,— связаны между собой следующими уравнениями:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{6.1}$$

В теории функций комплексного переменного эти уравнения, как известно, носят название уравнений Коши—Римана и выражают то условие, что комплексная комбинация из этих двух функций от двух действительных переменных, т. е. $\varphi\ (x, y)+i\psi\ (x, y)$, является аналитической функцией комплексного переменного $z=x+$ $+iy$. Обозначим эту функцию через w:

$$w(z)=\varphi+i\psi. \tag{6.2}$$

Функция $w(z)$, являющаяся аналитической функцией переменного z, играет в аэродинамике плоскопараллельного течения большую роль и носит название *комплексного потенциала* или *характеристической функции течения.* Ниже будет показано, что всякий плоский поток может быть задан комплексным потенциалом $w=\varphi+i\psi$.

Эта связь аэродинамики плоскопараллельного потока несжимаемой жидкости с прекрасно разработанной теорией функций комплексного переменного позволяет с успехом решать для плоскопараллельного потока задачи, представляющие значительные трудности в случае произвольного течения в пространстве. Особое значение этот метод приобрел в проблемах теории крыла.

§ 2. КОМПЛЕКСНАЯ СКОРОСТЬ

Возьмем производную от комплексного потенциала $w=\varphi+i\psi$ по комплексному переменному $z=x+iy$. Как известно из теории функций комплексного переменного, выражение для производной будет иметь вид

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Ранее было установлено, что

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

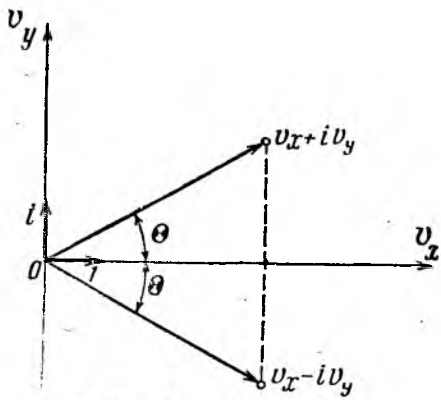
Заменяя производные в выражении для $\frac{dw}{dz}$ с помощью этих формул, находим

$$\frac{dw}{dz}=v_x-iv_y. \tag{6.3}$$

Это выражение называется *комплексной скоростью*.

Очевидно, модуль комплексной скорости будет давать величину самой скорости v. В самом деле,

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=v. \tag{6.4}$$



Фиг. 6.1. Комплексная скорость.

Комплексную скорость можно интерпретировать геометрически следующим образом (фиг. 6.1). Построим в координатах v_x, v_y вектор, определяющий скорость v_x+iv_y. Отображая зеркально относительно действительной оси x вектор v_x+iv_y, т. е. строя такой же вектор под углом $-\theta$ к оси x, мы, очевидно, получим вектор, определяющий величину комплексной скорости v_x-iv_y.

Выражению (6.3) для комплексной скорости можно придать еще другой вид. Так как из фигуры следует, что

$$v_x=v\cos\theta,$$
$$v_y=v\sin\theta,$$

то

$$\frac{dw}{dz}=v(\cos\theta-i\sin\theta)=ve^{-i\theta}. \tag{6.5}$$

§ 3. ПРИМЕРЫ ПРОСТЕЙШИХ ТЕЧЕНИЙ

Пример 1. Плоское течение задано комплексным потенциалом

$$w=az,$$

где a — комплексная величина, равная $a=a_1-ia_2$. Требуется определить характер течения.

Подставляя значения w, a и z, получим

$$\varphi+i\psi=(a_1-ia_2)(x+iy),$$

откуда, приравнивая действительные и мнимые части, находим

$$\varphi=a_1x+a_2y,$$
$$\psi=-a_2x+a_1y.$$

Приравнивая φ и ψ постоянным, получаем уравнения эквипотенциальных линий и линий тока

$$a_1x+a_2y=C,$$
$$-a_2x+a_1y=C,$$

т. е. уравнения семейств взаимно ортогональных прямых (фиг. 6. 2). Комплексная скорость в этом случае будет равна $\frac{dw}{dz}=a=a_1-ia_2$. Следовательно, жидкость будет течь по прямым, наклоненным к оси x под углом α, тангенс которого $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a_2}{a_1}$, со скоростью

$$v=\left|\frac{dw}{dz}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

Пример 2. Поток задан комплексным потенциалом

$$w=az^2,$$

где a — действительная величина.

В этом случае будем иметь

$$\varphi+i\psi=a(x+iy)^2$$

или

$$\varphi=a(x^2-y^2),$$
$$\psi=2axy.$$

Такой поток был разобран в § 15 гл. III. Линии $\varphi=C$, $\psi=C$ будут представлять два семейства взаимно ортогональных гипербол (фиг. 6. 3). Комплексная скорость в этом случае будет равна

$$\frac{dw}{dz}=2az.$$

Следовательно,

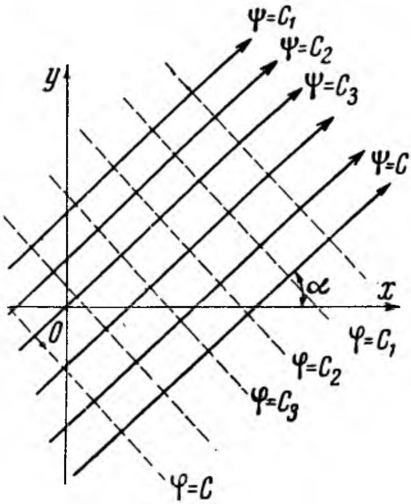
$$v_x-iv_y=2a(x+iy)$$

или

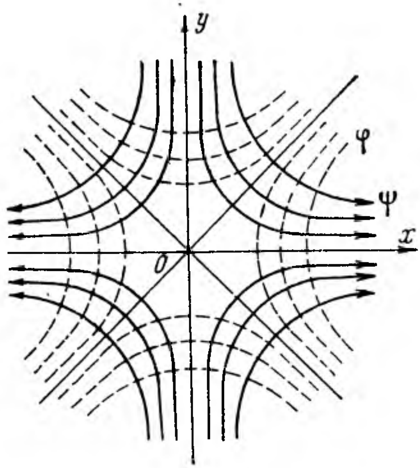
$$v_x = 2ax,$$
$$v_y = -2ay,$$

т. е. жидкость будет двигаться по гиперболическим линиям тока со скоростью

$$v = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \sqrt{(2ax)^2 + (-2ay)^2} = 2a\sqrt{x^2 + y^2} = 2ar.$$



Фиг. 6.2. Плоское течение с комплексным потенциалом $w = az$.



Фиг. 6.3. Плоское течение с комплексным потенциалом $w = az^2$.

Пример 3. Поток задан комплексным потенциалом

$$w = z^n,$$

где n — любое целое положительное число, большее нуля. В этом случае для исследования характера течения удобнее воспользоваться тригонометрическим изображением комплексного переменного

$$w = \varphi + i\psi = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

откуда

$$\varphi = r^n \cos n\theta \quad \text{и} \quad \psi = r^n \sin n\theta.$$

Линии тока будут представлять собою семейство кривых n-ного порядка

$$r^n \sin n\theta = C.$$

Найдем нулевые линии тока

$$r^n \sin n\theta = 0.$$

Отсюда

$$\sin n\theta = 0$$

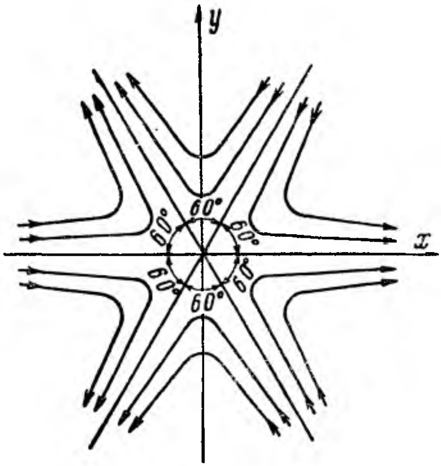
или

$$n\theta = k\pi,$$

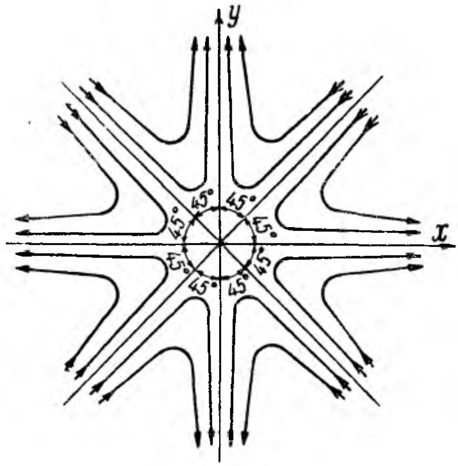
т. е.

$$\theta = \frac{k\pi}{n},$$

где k — любое целое положительное число от 0 до $2n-1$. Давая k значения $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,2n-1$, найдем, что плоскость потока будет разбита нулевыми линиями тока — лучами $\theta = \mathrm{const}$ — на $2n$ клино-



Фиг. 6.4. Плоское течение с комплексным потенциалом $w=z^3$.



Фиг. 6.5. Плоское течение с комплексным потенциалом $w=z^4$.

образных областей с углами $\frac{\pi}{n}$, между которыми будут расположены остальные линии тока. Например, при $n=3$ таких областей шесть и углы их будут равны 60° (фиг. 6.4). При $n=4$ клиновидных областей будет восемь, а углы их будут равны 45° (фиг. 6.5). Следовательно, вообще комплексный потенциал $w=z^n$ дает обтекание угла в $\frac{\pi}{n}$ градусов (см. фиг. 6.6, соответствующую $n=3$).

Вычислим теперь комплексную скорость

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = nz^{n-1} = nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta} = nr^{n-1} \times$$

$$\times [\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta].$$

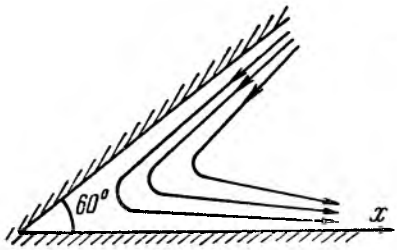
Отсюда

$$v_x = nr^{n-1}\cos(n-1)\theta \text{ и } v_y = nr^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

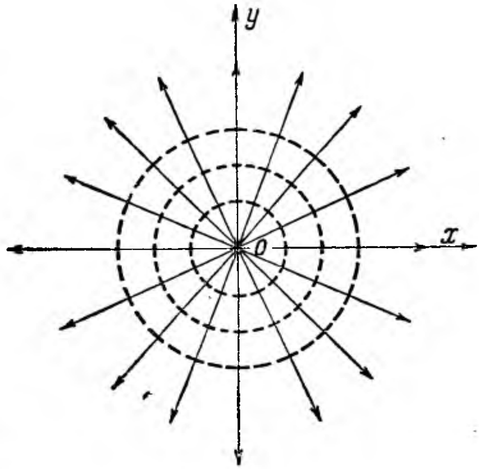
Для точек, лежащих на оси x, где $\theta = 0$, получаем

$$v_x = nr^{n-1} > 0 \text{ и } v_y = 0,$$

т. е. поток течет так, как показано на фиг. 6.4—6.6. Начало координат является, очевидно, критической точкой, если $n>1$. Действительно, при $r=0$ и $n>1$ получаем $v_x=v_y=0$. При $n=1$ начало координат вполне естественно не является критической точкой, так как комплексный потенциал $w=z$ соответствует поступательному потоку, рассмотренному в примере 1.



Фиг. 6.6. Обтекание угла в 60°.



Фиг. 6.7. Плоское течение с комплексным потенциалом $w=\ln z$ — источник.

Пример 4. Поток задан комплексным потенциалом

$$w=\ln z. \tag{6.6}$$

Поступая аналогично предыдущему, находим

$$\varphi+i\psi=\ln(re^{i\theta})=\ln r+i\theta,$$

откуда

$$\varphi=\ln r,$$

$$\psi=\theta.$$

Очевидно, линии тока будут представлять собой семейство лучей, исходящих из начала координат, т. е. начало координат будет являться источником. Это течение было разобрано в § 16 гл. III. Докажем, что направление течения соответствует показанному на фиг. 6.7. Найдем для этого проекцию скорости v_r на полярный радиус r:

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r},$$

т. е. v_r совпадает с положительным направлением полярного радиуса r. (Очевидно, комплексный потенциал $w=-\ln z$ будет представлять собой сток.) Для комплексной скорости будем иметь следующее выражение:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{z}. \tag{6.7}$$

Как видим, в этом случае комплексный потенциал w и комплексная скорость, являющиеся аналитическими функциями переменного z, в начале координат перестают быть аналитическими, так как и w и $\frac{dw}{dz}$ обращаются при $z=0$ в бесконечность. В этом случае начало координат является так называемой особой точкой: для функции w — изолированной логарифмической точкой, а для комплексной скорости $\frac{dw}{dz}$ — полюсом первого порядка.

Если мощность источника равна Q, то (см. § 16 гл. III)

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\ln r,$$

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}\theta.$$

Следовательно, в общем случае комплексный потенциал источника будет иметь вид

$$w=\frac{Q}{2\pi}\ln z. \tag{6.8}$$

Если же источник находится не в начале координат, а в точке $z=a$, то

$$w=\frac{Q}{2\pi}\ln(z-a). \tag{6.9}$$

Наконец, если на плоскости расположено n источников, находящихся соответственно в точках $z=a_1$, $z=a_2, \ldots, z=a_n$, то комплексный потенциал в этом случае примет вид

$$w=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k}{2\pi}\ln(z-a_k). \tag{6.10}$$

Пример 5. Поток задан комплексным потенциалом

$$w=\frac{1}{z}. \tag{6.11}$$

В этом случае, как нетрудно проверить,

$$\varphi=\frac{x}{x^2+y^2},$$

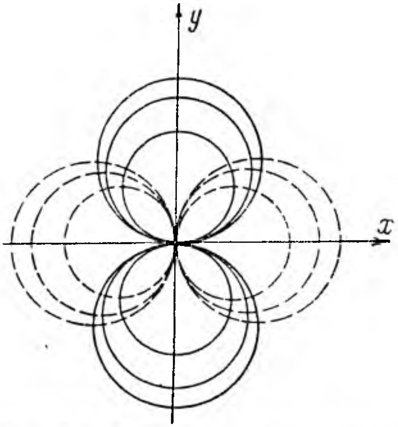
$$\psi=\frac{-y}{x^2+y^2},$$

т. е. получаем поток, также разобранный выше (§ 17 гл. III) и называемый течением от диполя (фиг. 6.8).

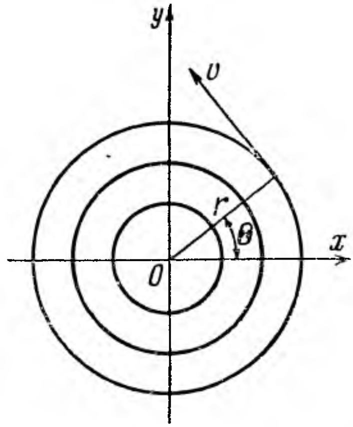
Комплексная скорость для диполя будет иметь вид

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{z^2}. \tag{6.12}$$

Как и в предыдущем примере, начало координат будет являться особой точкой: для функции w — полюсом первого порядка, а



Фиг. 6.8. Плоское течение с комплексным потенциалом $w=\frac{1}{z}$ — диполь.



Фиг. 6.9. Плоское течение с комплексным потенциалом $w=-\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z$ — вихрь.

для комплексной скорости — полюсом второго порядка. Если момент диполя равен M, то комплексный потенциал примет вид

$$w=\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}. \tag{6.13}$$

Если же диполь расположен в точке $z=a$, то комплексный потенциал будет иметь вид

$$w=\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z-a}. \tag{6.14}$$

Пример 6. Комплексный потенциал задан в виде

$$w=-\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z. \tag{6.15}$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае w представляет собой комплексный потенциал плоского вихря (фиг. 6.9). В самом деле, для φ и ψ имеем

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta,\\ \psi&=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r,\end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

где величина Г является циркуляцией. Выражения (6.16) были рассмотрены в § 18 гл. III. Линии тока будут представлять собой семейство концентрических окружностей

$$r = \text{const}.$$

Для установления направления потока найдем составляющие скорости v_r и v_s:

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0,$$

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

т. е. скорость в каждой точке потока

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{6.17}$$

и направлена по касательной к соответствующей окружности.

Из выражения для v_s следует, что движение жидкости совершается в сторону возрастания угла θ, т. е. против часовой стрелки.

Величина комплексной скорости

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\Gamma i}{2\pi}\frac{1}{z}. \tag{6.18}$$

Как и в случае источника, начало координат будет являться для комплексного потенциала вихря логарифмической особой точкой, а для комплексной скорости — полюсом первого порядка.

Если вихрь находится не в начале координат, а в точке $z=a$, то выражение для w примет вид

$$w = -\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln(z-a). \tag{6.19}$$

Если же на плоскости находится n вихрей, расположенных в точках $z=a_1$, $z=a_2, \ldots$, $z=a_n$, то комплексный потенциал будет иметь вид

$$w = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k i}{2\pi}\ln(z-a_k). \tag{6.20}$$

§ 4. ДВИЖЕНИЕ ПАРЫ ВИХРЕЙ

Пусть в точках $z=z_1$, $z=z_2$ плоскости комплексного переменного z расположены два вихря с циркуляциями Γ_1 и Γ_2 (фиг. 6.10). Изучим характер движения этих вихрей. Комплексный потенциал в этом случае, исходя из принципа наложения потоков, будет равен сумме комплексных потенциалов каждого вихря в отдельности, т. е.

$$w = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\ln(z-z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\ln(z-z_2).$$

Комплексная скорость

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{z-z_1} + \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{z-z_2}.$$

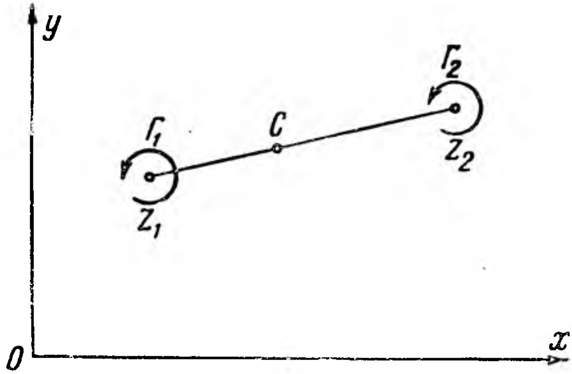
Дадим этому выражению другой вид. Учитывая, что $\bar{z}=x-iy$, находим, что

$$\frac{d\bar{z}}{dt}=\frac{dx}{dt}-i\frac{dy}{dt}=v_x-iv_y=\frac{dw}{dz}$$

или

$$\frac{d\bar{z}}{dt}=\frac{\Gamma_1}{2\pi i(z-z_1)}+\frac{\Gamma_2}{2\pi i(z-z_2)}. \tag{6.21}$$

Пользуясь выражением (6.21), можно составить дифференциальные уравнения движения каждого вихря в отдельности. Обратимся к первому вихрю



Фиг. 6.10. Пара вихрей.

$z=z_1$. Так как первый вихрь движется под влиянием лишь второго вихря ($z=z_2$), описывая окружность, и сам на себя не влияет, то необходимо для получения дифференциального уравнения его движения в выражении (6.21) отбросить первый член правой части, а в оставшейся положить $z=z_1$. Тогда получим

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt}=\frac{\Gamma_2}{2\pi i(z_1-z_2)}.$$

Аналогично для второго вихря

$$\frac{d\bar{z}_2}{dt}=\frac{\Gamma_1}{2\pi i(z_2-z_1)}.$$

Разделяя в полученных выражениях действительные и мнимые части, получим систему дифференциальных уравнений, определяющих движение пары вихрей:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=-\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_1-y_2}{r^2},\\ \frac{dy_1}{dt}&=\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_1-x_2}{r^2},\\ \frac{dx_2}{dt}&=\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y_1-y_2}{r^2},\\ \frac{dy_2}{dt}&=-\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x_1-x_2}{r^2},\end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

где r — расстояние между вихрями, равное

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Для интегрирования системы (6.22) умножим первое уравнение на Γ_1, третье — на Γ_2 и сложим. Тогда получим

$$\Gamma_1\frac{dx_1}{dt}+\Gamma_2\frac{dx_2}{dt}=0,$$

откуда

$$\Gamma_1 x_1+\Gamma_2 x_2=\text{const}. \tag{6.23}$$

Умножая второе уравнение на Γ_1, четвертое на Γ_2 и складывая их, получим

$$\Gamma_1 y_1+\Gamma_2 y_2=\text{const}. \tag{6.24}$$

Разделив выражения (6.23) и (6.24) на сумму $\Gamma_1+\Gamma_2$ и вводя обозначения x_c и y_c, будем иметь

$$x_c=\frac{\Gamma_1 x_1+\Gamma_2 x_2}{\Gamma_1+\Gamma_2},\quad y_c=\frac{\Gamma_1 y_1+\Gamma_2 y_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}. \tag{6.25}$$

Точка C с координатами (x_c, y_c) называется *центром инерции вихрей*. Из соотношений (6.23) и (6.24) следует, что центр инерции вихрей остается неподвижным во все время движения вихрей и лежит на прямой, соединяющей вихри.

Покажем, что расстояние между вихрями в процессе их движения остается постоянным. Для этого вычтем из первого уравнения (6.22) третье, а из второго — четвертое:

$$\frac{d(x_1-x_2)}{dt}=-\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2\pi}\,\frac{y_1-y_2}{r^2},$$

$$\frac{d(y_1-y_2)}{dt}=\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2\pi}\,\frac{x_1-x_2}{r^2}.$$

Умножим полученные выражения соответственно на (x_1-x_2) и (y_1-y_2) и сложим:

$$(x_1-x_2)\frac{d(x_1-x_2)}{dt}+(y_1-y_2)\frac{d(y_1-y_2)}{dt}=0,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=r^2=\text{const}.$$

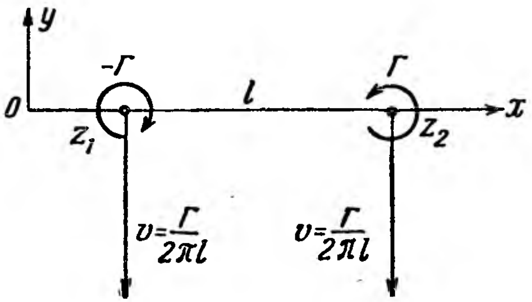
Из этого соотношения следует, что вихри вращаются друг относительно друга так, что расстояние r между ними остается постоянным. Но так как центр инерции неподвижен и лежит на прямой, соединяющей вихри, то приходим к выводу, что вихри будут вращаться вокруг центра инерции.

Иная картина будет, если вихри будут обладать циркуляцией, одинаковой по величине, но обратной по знаку (фиг. 6.11). В этом случае, так как $\Gamma_1+\Gamma_2=0$, точка $C(x_c, y_c)$ уходит в бесконечность. Покажем, что при этом вихри будут двигаться поступательно, перпендикулярно соединяющей их прямой, с одинаковой скоростью $v=\frac{\Gamma}{2\pi l}$, где l — расстояние между вихрями. В самом деле, из уравнений (6.21) будем иметь

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt}=\frac{d\bar{z}_2}{dt}=-\frac{\Gamma}{2\pi i(z_1-z_2)},$$

откуда заключаем, что $\frac{d\bar{z}_1}{dt}-\frac{d\bar{z}_2}{dt}=0$ и, следовательно,

$$\bar{z}_1-\bar{z}_2=\text{const}=l.$$



Фиг. 6.11. Пара вихрей с циркуляциями, одинаковыми по величине, но обратными по знаку.

Очевидно, что в этом случае и $z_1 - z_2 = l$, т. е.

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{d\bar{z}_2}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi i l} = \frac{\Gamma i}{2\pi l}.$$

Разделяя действительные и мнимые части, окончательно получаем

$$v_{x1} = v_{x2} = 0, \quad v_{y2} = v_{y1} = v = -\frac{\Gamma}{2\pi l},$$

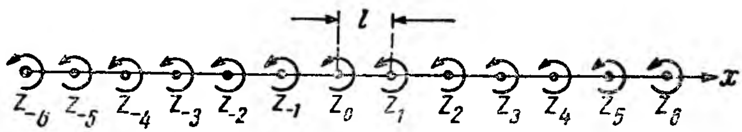
т. е. вихри перемещаются вниз с одинаковой скоростью параллельно оси y.

§ 5. ВИХРЕВАЯ ЦЕПОЧКА

Рассмотрим бесконечный ряд вихрей, расположенных на одной прямой на одинаковом расстоянии l друг от друга (фиг. 6.12). Пусть вихри расположены в точках

$$\ldots, z_{-k}, \ldots, z_{-4}, z_{-3}, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$$

и обладают одинаковой циркуляцией Г.



Фиг. 6.12. Вихревая цепочка.

Изучим скорости в жидкости, индуцированные этой вихревой цепочкой. Очевидно, комплексный потенциал w для любой точки жидкости (кроме точек, соответствующих самим вихрям) будет иметь вид

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\ln(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty}[\ln(z - z_k) + \ln(z - z_{-k})]\right\}.$$

Умножая $(z-z_0)$ на $\frac{\pi}{l}$ и деля соответственно $(z-z_k)$ и $(z-z_{-k})$ на $-lk$ и $+lk$, что отразится лишь на величине произвольной постоянной, получим

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\ln\frac{(z-z_0)\pi}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{z-z_k}{-lk}\right)+\ln\left(\frac{z-z_{-k}}{lk}\right)\right]\right\}. \quad (6.26)$$

Заменяя сумму логарифмов логарифмом произведения, будем иметь

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left[\frac{(z-z_0)\pi}{l}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z_k-z}{lk}\right)\left(\frac{z-z_{-k}}{lk}\right)\right]. \quad (6.27)$$

Так как $z_k=z_0+lk$, $z_{-k}=z_0-lk$, то выражение (6.27) для w можно представить в следующем виде:

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left\{\frac{(z-z_0)\pi}{l}\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z-z_0}{lk}\right)^2\right]\right\}.$$

С помощью известной формулы разложения $\sin\pi x$ в бесконечное произведение

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

выражение для комплексного потенциала w примет следующий вид:

$$w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{l}(z-z_0). \quad (6.28)$$

Отсюда комплексная скорость в любой точке z

$$\frac{dw}{dz}=v_x-iv_y=\frac{\Gamma}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_0). \quad (6.29)$$

Нетрудно убедиться, что сама вихревая цепочка остается неподвижной. В самом деле, любому вихрю, находящемуся в точке $z=z_k$, вихри, лежащие справа, сообщают скорость, направленную вниз, а вихри, расположенные слева,— скорость, направленную вверх, причем в силу симметрии скорости эти по величине равны. В результате каждый вихрь z_k, а следовательно, и вся цепочка в целом остаются неподвижными.

§ 6. ПОНЯТИЕ О ВИХРЕВОЙ ДОРОЖКЕ

Рассмотрим теперь две вихревые цепочки, т. е. два параллельных ряда вихрей (фиг. 6.13). Расстояние между каждой парой вихрей одинаковое и равно l, а расстояние между вихревыми цепочками равно h. Такие две цепочки вихрей будем называть вихревой дорожкой; вихри верхнего ряда обладают циркуляцией Γ_1, а нижнего — циркуляцией Γ_2. Возьмем вихрь, находящийся в точке $z=z_1$, и ближайший к нему из нижнего ряда в точке $z=z_2$. В таком случае комплексный потенциал вихревой дорожки будет иметь вид

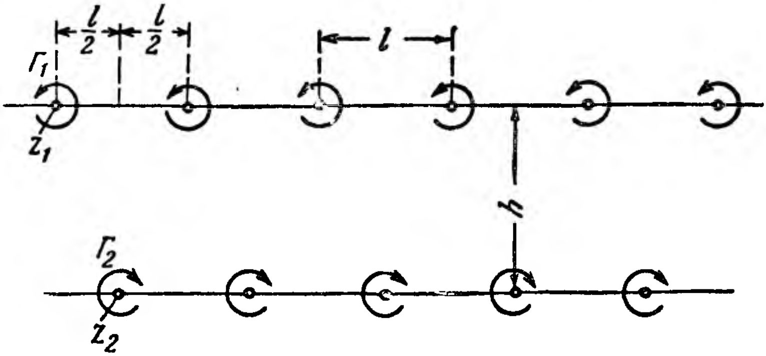
$$w=\frac{\Gamma_1}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{l}(z-z_1)+\frac{\Gamma_2}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi}{l}(z-z_2). \quad (6.30)$$

Комплексная скорость в любой точке z жидкости выразится следующим образом:

$$\frac{dw}{dz}=v_x-iv_y=\frac{\Gamma_1}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_1)+\frac{\Gamma_2}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_2). \tag{6.31}$$

Определим, с какою скоростью будут перемещаться эти две цепочки, если предположить, что они перемещаются как одно целое.

Найдем скорость вихрей, находящихся в точках $z=z_1$ и $z=z_2$. Вихрь z_1 верхнего ряда будет перемещаться только под влиянием вихрей второго ряда.



Фиг. 6.13. Вихревая дорожка.

Следовательно, скорость $v_{1x}-iv_{1y}$ вихря z_1 получим, отбросив в выражении (6.31) первый член и положив во втором $z=z_1$, т. е.

$$v_{1x}-iv_{1y}=\frac{\Gamma_2}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z_1-z_2). \tag{6.32}$$

Аналогично для скорости вихря z_2

$$v_{2x}-iv_{2y}=-\frac{\Gamma_1}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z_1-z_2). \tag{6.33}$$

Так как дорожка по условию движется как одно целое, то отсюда следует равенство скоростей

$$v_{1x}-iv_{1y}=v_{2x}-iv_{2y},$$

откуда находим, что

$$\Gamma_2=-\Gamma_1=-\Gamma, \tag{6.34}$$

т. е. напряжение вихрей верхнего и нижнего рядов должно быть одинаковым по величине, но обратным по знаку. Если предположить, что вихри перемещаются параллельно оси x (т. е. $v_{1y}=v_{2y}=0$), то можно показать, что при этом они должны быть расположены или симметрично, или в шахматном порядке (см. фиг. 6.13). Для шахматного расположения вихрей скорость перемещения дорожки будет выражаться следующим образом [2]:

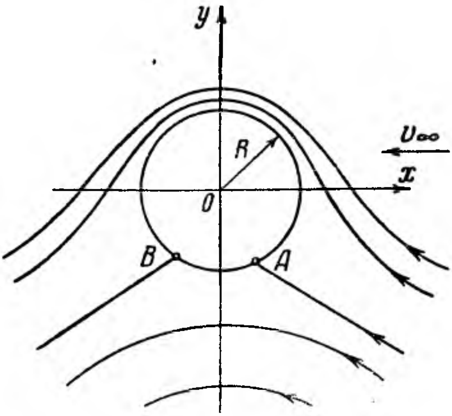
$$u=v_{1x}=v_{2x}=\frac{\Gamma}{2i}\operatorname{th}\frac{\pi h}{l}. \tag{6.35}$$

§ 7. ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

Как было показано в § 19 гл. III, если в начале координат поместить диполь и наложить на него прямолинейный равномерный поток, двигающийся параллельно оси x, то получим обтекание круглого цилиндра.

Нетрудно проверить, что комплексный потенциал для бесциркуляционного потока, обтекающего цилиндр радиуса R с направлением скорости на бесконечности v_∞ в сторону отрицательной оси x, будет иметь вид

$$w = -v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \qquad (6.36)$$



Фиг. 6.14. Циркуляционное обтекание круглого цилиндра плоским потоком.

В самом деле, найдем в этом случае комплексную скорость

$$\frac{dw}{dz} = -v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right). \qquad (6.37)$$

Отсюда $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=\infty} = -v_\infty$, т. е. действительно скорость на бесконечности будет равна заданной скорости. Критические точки в этом случае находятся на действительной оси. Проверим это. Приравняем комплексную скорость нулю:

$$\frac{dw}{dz} = -v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) = 0,$$

откуда

$$z = \pm R,$$

т. е. действительно критические точки находятся на действительной оси в точках $A(R,\ 0)$ и $B(-R,\ 0)$.

Для получения потока, обтекающего цилиндр радиуса R с циркуляцией, необходимо на рассмотренный поток наложить поток от вихря, поместив последний в начале координат. В таком случае комплексный потенциал будет иметь следующий вид:

$$w = -v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z. \qquad (6.38)$$

Найдем в этом случае критические точки (фиг. 6.14), для чего приравняем комплексную скорость нулю:

$$\frac{dw}{dz} = -v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi}\frac{1}{z} = 0.$$

Так как на цилиндре переменное $z=Re^{i\theta}$, то, подставляя это выражение для z в уравнение $\frac{dw}{dz}=0$, будем иметь

$$-v_\infty\left(1-e^{-2i\theta}\right)=\frac{\Gamma i}{2\pi R}e^{-i\theta}.$$

Умножая обе части равенства на $e^{i\theta}$ и деля на v_∞, находим

$$e^{i\theta}-e^{-i\theta}=-\frac{\Gamma i}{2\pi R v_\infty}.$$

Деля обе части равенства на $2i$, будем иметь

$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=-\frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}$$

или, учитывая, что $\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta$, окончательно получим

$$\sin\theta_{\text{кр}}=-\frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}, \tag{6.39}$$

т. е. выражение, полученное в § 20 гл. III.

§ 8. ВЫЧЕТ КОМПЛЕКСНОЙ СКОРОСТИ

В настоящем параграфе установим связь, существующую между так называемым вычетом комплексной скорости $\frac{dw}{dz}$, циркуляцией Γ и расходом Q. Это соотношение, устанавливающее связь между указанными величинами, будем называть *теоремой о вычете комплексной скорости.* Допустим, что в плоском потоке, определяемом комплексным потенциалом w, задано n особых точек функции $\frac{dw}{dz}$, представляющих источники, стоки и вихри, расположенные соответственно в точках $z=a_1$, $z=a_2,\ldots$, $z=a_n$. Обозначим соответствующие этим точкам вычеты через A_1, $A_2,\ldots$, A_n. Если указанные особые точки окружить произвольным замкнутым контуром L, то, как известно из теории функций комплексного переменного, криволинейный интеграл

$$\int\limits_L\left(\frac{dw}{dz}\right)dz$$

будет равен сумме вычетов, умноженных на $2\pi i$, т. е.

$$\int\limits_L\left(\frac{dw}{dz}\right)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}A_k.$$

Обозначая действительную и мнимую части каждого вычета через α и β, т. е. полагая

$$A_k = \alpha_k + i\beta_k,$$

будем иметь

$$\int\limits_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \beta_k. \tag{6.40}$$

Подсчитаем теперь левую часть написанного равенства (6.40). Подставляя значения

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y,$$

$$dz = dx + i\,dy,$$

находим

$$\int\limits_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = \int\limits_L (v_x - iv_y)(dx + i\,dy),$$

или, отделяя действительную часть от мнимой,

$$\int\limits_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = \int\limits_L (v_x\,dx + v_y\,dy) + i\int\limits_L v_x\,dy - v_y\,dx.$$

Как известно, это интегралы представляют собой соответственно выражения для циркуляции Γ и расхода Q, т. е.

$$\int\limits_L v_x\,dx + v_y\,dy = \Gamma,$$

$$\int\limits_L v_x\,dy - v_y\,dx = Q.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = \Gamma + iQ. \tag{6.41}$$

Подставляя найденное значение (6.41) в соотношение (6.40), получим для Γ и Q следующие выражения:

$$\Gamma = -2\pi \sum_{k=1}^{n} \beta_k, \tag{6.42}$$

$$Q = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{6.43}$$

П р и м е р. Поток задан следующим комплексным потенциалом:

$$w = 5\ln z + 10i\ln z + \frac{1}{z}.$$

Очевидно, в этом случае в начале координат находится источник, комплексный потенциал которого $w=5\ln z$, мощностью $Q=10\pi$; вихрь, комплексный потенциал которого $w=10\,i\ln z$, с циркуляцией $\Gamma=-20\pi$; диполь с моментом, равным 2π. Определим величины Q и Γ с помощью формулы (6.41). Для этого найдем $\frac{dw}{dz}$:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{5}{z}+\frac{10i}{z}-\frac{1}{z^2}.$$

Возьмем интеграл по какому-нибудь замкнутому контуру L, окружающему начало координат:

$$\int\limits_L\left(\frac{dw}{dz}\right)dz=\int\limits_L\left(\frac{5}{z}+\frac{10i}{z}-\frac{1}{z^2}\right)dz=2\pi i\,(5+10i).$$

Следовательно, на основании формулы (6.41), разделяя действительную и мнимую части, находим

$$Q=10\pi,$$
$$\Gamma=-20\pi.$$

Диполь, как известно, через замкнутый контур расхода не дает.

§ 9. ТЕОРЕМА ЖУКОВСКОГО—ЧАПЛЫГИНА О РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ СИЛЕ ДАВЛЕНИЯ

До настоящего времени, изучая свойства плоского потока, определяемого комплексным потенциалом w, мы рассматривали его лишь с кинематической точки зрения. Естественно возникает вопрос, как, зная комплексный потенциал w потока, обтекающего какое-нибудь тело, вычислить результирующую силу давления потока на тело. Впервые эта задача была решена в 1906 г. Н. Е. Жуковским в работе «О присоединенных вихрях», где была выведена формула для результирующей силы давления потока на тело в том случае, когда поток задан комплексным потенциалом w.

В 1910 г. акад. С. А. Чаплыгин в своей известной работе: «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела» дал общий прием определения результирующей силы и ее момента, создав основы теории крыла бесконечного размаха[1].

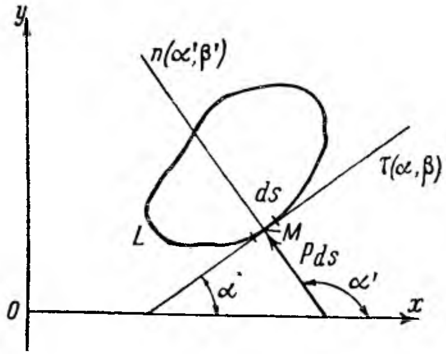
Сущность метода Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина сводится к следующему. Допустим, что задан плоский поток, обтекающий без срыва цилиндрическое тело произвольной формы, ограниченное в плоскости x, y контуром L.

Пусть комплексный потенциал потока $w=\varphi+i\psi$.

[1] Позже эти формулы были получены немецким профессором Блазиусом и в зарубежной литературе носят его имя.

Рассмотрим на контуре произвольную точку M (фиг. 6.15). Проведем в ней касательную τ и нормаль n к контуру. Обозначив углы, образуемые касательной с координатными осями, через α и β, и те же углы для нормали через α' и β', будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha' &= -\frac{dy}{ds} = -\sin\alpha, \\ \cos\beta' &= +\frac{dx}{ds} = +\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (6.44)$$



Фиг. 6.15. К доказательству теоремы Жуковского — Чаплыгина о результирующей силе давления и теоремы Чаплыгина о моменте результирующей силы давления.

Давление p в точке M контура определим из уравнения Лагранжа—Бернулли

$$p = C - \rho\frac{V^2}{2},$$

где V — скорость на контуре. Умножая элементарную силу давления pds в точке M на $\cos\alpha'$ и $\cos\beta'$, получим ее проекции на оси x и y. Проекции результирующей силы давления R на координатные оси, т. е. X и Y, очевидно, выразятся в виде

$$X = \int_L p\,ds\cos\alpha',$$

$$Y = \int_L p\,ds\cos\beta'$$

или в силу формул (6.44)

$$\left.\begin{aligned} X &= -\int_L p\sin\alpha\,ds, \\ Y &= +\int_L p\cos\alpha\,ds. \end{aligned}\right\} \quad (6.45)$$

Умножим обе части выражения для X на i и сложим со вторым. Получим

$$Y + iX = \int_L p(\cos\alpha - i\sin\alpha)\,ds.$$

Подставляя выражение для p из уравнения Лагранжа—Бернулли, будем иметь

$$Y + iX = \int_L \left(C - \frac{\rho V^2}{2}\right)(\cos\alpha - i\sin\alpha)\,dz.$$

Так как интегралы

$$\int_L C\cos\alpha\, ds = C\int_L \frac{dx}{ds}ds = C\int_L dx = 0,$$

$$\int_L C\sin\alpha\, ds = C\int_L \frac{dy}{ds}ds = C\int_L dy = 0,$$

ибо координаты x и y при полном обходе по контуру L принимают первоначальное значение, то выражение для $Y+iX$ примет следующий вид:

$$Y+iX = -\frac{\rho}{2}\int_L V^2(\cos\alpha - i\sin\alpha)\, ds. \qquad (6.46)$$

Преобразуем в полученной формуле (6. 46) подинтегральное выражение. Так как на контуре скорость направлена по касательной, то

$$\frac{d\varphi}{ds} = V$$

или

$$d\varphi = Vds.$$

С другой стороны, так как контур L является линией тока, на которой $\psi=\text{const}$, то, следовательно, на контуре L

$$dw = d(\varphi + i\psi) = d\varphi$$

и потому

$$Vds = dw. \qquad (а)$$

Кроме того, на контуре L для комплексной скорости $\frac{dw}{dz}$ будем иметь

$$\frac{dw}{dz} = V_x - iV_y = V\cos\alpha - iV\sin\alpha = V(\cos\alpha - i\sin\alpha). \qquad (б)$$

Подставляя выражения (а) и (б) в формулу (6. 46), получим

$$Y+iX = -\frac{\rho}{2}\int_L \frac{dw}{dz}dw.$$

Но так как $dw = \frac{dw}{dz}dz$, то окончательно

$$Y+iX = -\frac{\rho}{2}\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \qquad (6.47)$$

Эта формула, позволяющая для потока, заданного комплексным потенциалом w, найти X и Y, а следовательно, и выражение для полной силы давления $R=\sqrt{X^2+Y^2}$, носит название *формулы Жуковского—Чаплыгина.*

§ 10. ТЕОРЕМА ЧАПЛЫГИНА О МОМЕНТЕ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ

В аэродинамике важно знать не только величину результирующей силы R давления потока на тело, но и точку ее приложения, называемую *центром давления*. Последний будет известен, если мы сумеем подсчитать момент результирующей силы давления.

По теореме С. А. Чаплыгина можно вычислить момент результирующей силы давления, зная комплексный потенциал w потока.

Для нахождения момента M относительно начала координат (точнее, относительно оси z) результирующей силы R давления потока на тело поступим следующим образом.

Пусть

$$X_1 = p\cos\alpha',$$
$$Y_1 = p\cos\beta'$$

представляют собой проекции на координатные оси x и y силы давления в точке M, отнесенной к единице длины контура. В таком случае момент этой силы относительно начала координат представится в следующем виде:

$$xY_1 - yX_1 = xp\cos\beta' - yp\cos\alpha'.$$

Так как по формулам (6.44)

$$\cos\alpha' = -\frac{dy}{ds} = -\sin\alpha,$$

$$\cos\beta' = \frac{dx}{ds} = \cos\alpha,$$

то

$$xY_1 - yX_1 = p(x\cos\alpha + y\sin\alpha).$$

Результирующий момент сил давления, очевидно, получится, если мы от этого выражения возьмем интеграл по замкнутому контуру L тела:

$$M = \int\limits_L p\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds. \tag{6.48}$$

Подставим в этот интеграл выражение для p из уравнения Лагранжа—Бернулли:

$$p = C - \frac{\rho V^2}{2},$$

где V — скорость на контуре L. Тогда

$$M = \int\limits_L \left(C - \frac{\rho V^2}{2}\right)(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds$$

или

$$M = C\int\limits_L (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds - \frac{\rho}{2}\int\limits_L V^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds.$$

Покажем, что первый интеграл будет равен нулю. В самом деле, так как

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta = \sin\alpha,$$

то

$$\int\limits_L (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds = \int\limits_L \left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds}\right) ds = \int\limits_L x\,dx + y\,dy =$$

$$= \int\limits_L d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0,$$

ибо при полном обходе контура L координаты x и y примут первоначальные значения. Следовательно, выражение для момента M примет следующий вид:

$$M = -\frac{\rho}{2}\int\limits_L V^2 (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds. \qquad (6.49)$$

Для преобразования подинтегрального выражения вычислим произведение

$$z\left(\frac{dw}{dz}\right) = (x+iy)(V_x - iV_y) = (xV_x + yV_y) + i(yV_x - xV_y).$$

Вводя обозначения

$$xV_x + yV_y = m,$$
$$yV_x - xV_y = n,$$

получим

$$z\frac{dw}{dz} = m + in. \qquad (a)$$

Вычислим теперь произведение $\left(\frac{dw}{dz}\right) dz$:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) dz = (V_x - iV_y)(dx + i\,dy) = (V_x\,dx + V_y\,dy) + i(V_x\,dy - V_y\,dx)$$

Так как

$$V_x dx + V_y dy = d\varphi,$$
$$V_x dy - V_y dx = d\psi$$

и на контуре L, являющемся линией тока, $d\psi = 0$, $d\varphi = V ds$, то

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) dz = V\,ds. \qquad (б)$$

Перемножая выражения (а) и (б), получим

$$z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = V(m+in)\,ds. \qquad (в)$$

Так как выражения для m и n могут быть представлены в виде

$$m = xV_x + yV_y = V(x\cos\alpha + y\sin\alpha),$$
$$n = yV_x - xV_y = V(y\cos\alpha - x\sin\alpha),$$

то соотношение (в) перепишется следующим образом:

$$z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = V^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,ds + iV^2(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\,ds.$$

Сравнивая первый член правой части полученного равенства с подинтегральным выражением (6.49), а также замечая, что

$$V^2(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = \text{д. ч. } z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

окончательно находим

$$M = -\text{д. ч. } \frac{\rho}{2}\int_L z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \qquad (6.50)$$

Полученная формула носит название *формулы Чаплыгина* и позволяет для заданного комплексным потенциалом w потока вычислить результирующий момент M от давления потока на тело.

В качестве примера, иллюстрирующего применение выведенных формул (6.47) и (6.50), рассмотрим циркуляционное обтекание цилиндра.

Как было показано, комплексный потенциал w в этом случае будет иметь вид

$$w = -v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z.$$

Для нахождения результирующей силы давления на цилиндр применим формулу Жуковского—Чаплыгина

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2}\int_L \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

где интегрирование производится по контуру цилиндра. Вычислим комплексную скорость. Дифференцируя w по z, находим

$$\frac{dw}{dz} = -v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi}\,\frac{1}{z}$$

и, подставляя найденное значение $\frac{dw}{dz}$ в формулу Жуковского — Чаплыгина, получаем

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2}\int_L \left[v_\infty^2 + v_\infty^2\frac{R^4}{z^4} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{z^2} - 2v_\infty^2\frac{R^2}{z^2} + \right.$$
$$\left. + v_\infty\frac{\Gamma i}{\pi}\,\frac{1}{z} - v_\infty\frac{\Gamma i}{\pi}\,\frac{R^2}{z^3}\right] dz.$$

Как видим, вычет относительно полюса $z=0$ даст лишь подчеркнутый член, содержащий $\frac{1}{z}$. В таком случае будем иметь

$$Y+iX=-\frac{\rho}{2}2\pi i\left(v_\infty\frac{\Gamma i}{\pi}\right)$$

или

$$Y+iX=\rho\Gamma v_\infty,$$

откуда

$$X=0,$$
$$Y=\rho\Gamma v_\infty,$$

т. е. лобовое сопротивление X отсутствует, а формула для Y представляет известную уже нам теорему Жуковского.

Для нахождения момента M результирующей силы обратимся к формуле Чаплыгина:

$$M=-\text{д. ч. }\frac{\rho}{2}\int_L z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

Подставляя выражение $z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$ в формулу для M, находим

$$M=-\text{д. ч. }\frac{\rho}{2}\int_L\left[zv_\infty^2+v_\infty^2\frac{R^4}{z^3}-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{z}-2v_\infty^2\frac{R^2}{z}+\right.$$
$$\left.+v_\infty\frac{\Gamma i}{\pi}-\frac{v_\infty\Gamma i}{\pi}\frac{R^2}{z^2}\right]dz$$

или

$$M=\text{д. ч. }\left\{\frac{\rho}{2}2\pi i\left[\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}+2v_\infty^2R^2\right]\right\}.$$

Так как выражение в фигурных скобках представляет чисто мнимую величину, то

$$M=0.$$

Отсюда следует, что результирующая сила $Y=\rho\Gamma v_\infty$ проходит через начало координат, относительно которого вычисляется момент M.

Глава VII

ТЕОРИЯ КРЫЛА В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПОТОКЕ

§ 1. ПОНЯТИЕ О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

В предыдущей главе было установлено, что для изучения плоскопараллельного потока идеальной жидкости, обтекающего какой-нибудь контур, достаточно знать комплексный потенциал этого потока $w(z)$. Так как непосредственное определение этой функции даже для простейших контуров представляет значительные трудности, то во многих задачах комплексный потенциал находят косвенным путем с помощью метода так называемого *конформного отображения*, играющего большую роль как в задачах теории крыла, так и в других проблемах гидро- и аэродинамики плоскопараллельного потока идеальной жидкости.

В главе VI было рассмотрено обтекание тела простейшего профиля — круглого цилиндра. Метод конформных отображений позволяет перейти от этого частного случая к построению комплексных потенциалов потоков, обтекающих тела (профили) произвольной формы.

Сущность метода конформных отображений заключается в следующем. Допустим, что в некоторой области S плоскости комплексного переменного z задана некоторая аналитическая, т. е. дифференцируемая, функция

$$\zeta=f(z). \tag{7. 1}$$

Совокупность точек $\zeta=f(z)$, соответствующих точкам области S, образует в плоскости ζ новую область S_1, причем мы предполагаем функцию $\zeta=f(z)$ такой, что каждой точке области S соответствует единственная точка области S_1 и наоборот. Следовательно, рассматриваемая аналитическая функция $\zeta=f(z)$ осуществляет взаимно однозначное отображение области S плоскости $z=x+iy$ на область S_1 плоскости $\zeta=\xi+i\eta$. В частности, если в области S провести некоторую линию L, проходящую через произвольную точку z, то в области S_1 ей будет соответствовать некоторая линия L_1, проходящая через точку $\zeta=f(z)$ (фиг. 7. 1).

По условию функция $\zeta = f(z)$ имеет определенную производную в точках z внутри S, т. е. существует предел отношения

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

где Δz — приращение независимого переменного z.

Выясним геометрический смысл производной аналитической функции

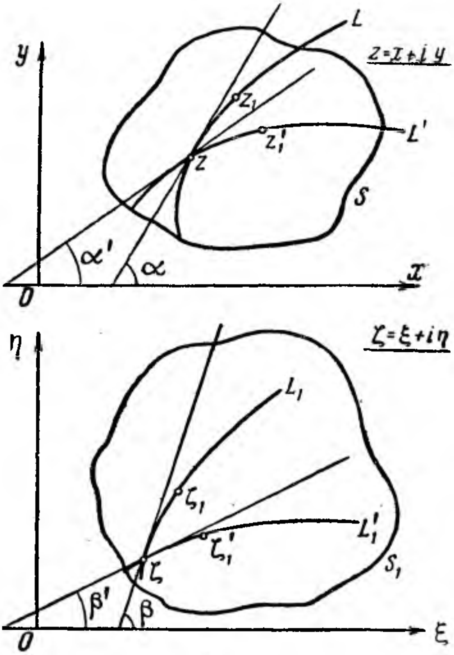
$$f'(z) = \frac{d\zeta}{dz},$$

предполагая ее отличной от нуля. Для этого представим комплексное число $f'(z)$ в виде $f'(z) = Re^{i\mu}$, где R — **модуль** производной, μ — ее аргумент (R и μ являются, очевидно, функциями z).

Рассмотрим в области S произвольную кривую L, проходящую через точку z. Возьмем на кривой L точку $z_1 = z + \Delta z$, бесконечно близкую к точке z.

Кривой L на плоскости z соответствует в плоскости ζ кривая L_1, проходящая через точку $\zeta = f(z)$. В силу непрерывности функции $\zeta = f(z)$ точке $z_1 = z + \Delta z$ в области S_1 соответствует точка ζ_1, бесконечно близкая к точке ζ, т. е.

$$\zeta_1 = \zeta + \Delta \zeta.$$



Фиг. 7.1. Конформное отображение.

Приращения Δz и $\Delta\zeta$, являющиеся комплексными числами, можно представить в следующей форме:

$$\Delta z = re^{i\varphi}, \quad \Delta\zeta = r_1 e^{i\varphi_1},$$

где φ и φ_1 — углы, образуемые отрезками прямых, проходящих через точки z и z_1 и ζ и ζ_1, с действительными осями, а r и r_1 — величины этих отрезков.

Из равенства

$$f'(z) = Re^{i\mu} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\zeta}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{r_1}{r} e^{i(\varphi_1 - \varphi)}$$

находим

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\Delta z \to 0} \frac{r_1}{r} = R \\ &\lim_{\Delta z \to 0} (\varphi_1 - \varphi) = \mu. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

и

В пределе направление вектора Δz совпадает с направлением касательной к линии L в точке z, а направление вектора $\Delta\zeta$ — с направлением касательной к линии L_1 в точке $\zeta=f(z)$.

Обозначая углы, которые образуют касательные к кривым L и L_1 в точках z и ζ с действительными осями соответственно через α и β (см. фиг. 7. 1), получим

$$\lim_{\Delta z\to 0}(\varphi_1-\varphi)=\beta-\alpha=\mu$$

или

$$\beta=\alpha+\mu. \qquad (а')$$

Из равенства (а′) следует, что аргумент производной μ — это угол, на который поворачивается касательная к линии L в точке z при отображении с помощью аналитической функции $\zeta=f(z)$, или, иначе, μ — угол между первоначальным и отображенным направлением.

Так как линия L является произвольной линией, проходящей через точку z, то при изменении направления линии L в точке z будут изменяться углы α и β, но угол μ останется тем же. Следовательно, проводя через точку z другую линию L' и обозначая соответствующую ей линию, проходящую через точку $\zeta=f(z)$, через L_1', а углы, которые образуют касательные к этим линиям в точках z и ζ с действительными осями через α' и β', получим

$$\beta'=\alpha'+\mu. \qquad (б)$$

Из формул (а′) и (б) находим

$$\beta'-\beta=\alpha'-\alpha, \qquad (в)$$

т. е. угол между касательными к кривым L и L' в точке z равен углу между касательными к кривым L_1 и L_1' в точке ζ. Следовательно, две произвольные линии, проходящие через точку z, отображаются с помощью аналитической функции на две линии, проходящие через точку $\zeta=f(z)$ так, что угол между касательными к исходным и отображенным линиям сохраняется. Таким образом, *отображение с помощью аналитической функции обладает свойством сохранения углов во всех точках, где производная не равна нулю.*

Выясним теперь геометрический смысл модуля производной

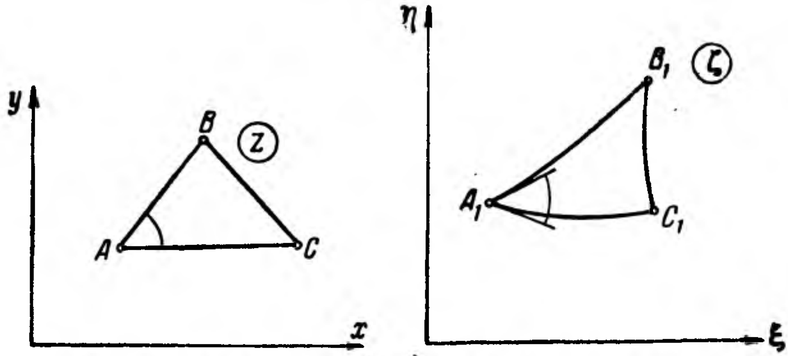
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{r_1}{r}=R, \qquad (г)$$

где r — расстояние между точками z и $z+\Delta z$, а r_1 — расстояние между точками ζ и $\zeta+\Delta\zeta$. Равенство (г) показывает, что модуль производной есть предел отношения расстояния между отображенными точками ζ и ζ_1 к расстоянию между исходными точками z и z_1. Поэтому модуль производной $|f'(z)|=R$ можно рассматривать как величину искажения масштаба в произвольной точке z при отображении с помощью аналитической функции. Равенство (г) показывает, что величина R не зависит от направления кривой L.

Следовательно, *отображение с помощью аналитической функции $\zeta=f(z)$ обладает в каждой точке z, где $f'(z)\neq 0$, свойством постоянства растяжений независимо от направления.*

Итак, отображение с помощью аналитической функции $\zeta=f(z)$ обладает в каждой точке z, где $f'(z)\neq 0$, свойством постоянства углов и растяжений.

Если в плоскости комплексного переменного z взять бесконечно малый треугольник, одна из вершин которого находится в точке z (фиг. 7.2), то ему в плоскости комплексного переменного ζ будет соответствовать бесконечно малый *криволинейный* треугольник с вершиной в точке $\zeta=f(z)$. Соответственные углы в этих треуголь-



Фиг. 7.2. Конформное отображение в бесконечно малом.

никах будут равны ввиду свойства сохранения углов при отображении с помощью аналитической функции; отношения же соответственных сторон будут равны одному и тому же постоянному числу $R\neq 0$, т. е. эти бесконечно малые треугольники будут в некотором смысле подобны. Следовательно, *отображение с помощью аналитической функции сохраняет подобие в бесконечно малом.*

Отображение, обладающее указанным выше свойством сохранения углов и постоянства растяжений, называется конформным отображением. Отсюда заключаем, что всякое отображение, устанавливаемое с помощью аналитической функции, будет конформным во всех точках, где производная аналитической функции отлична от нуля.

§ 2. ПРИМЕРЫ ПРОСТЕЙШИХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим несколько простейших конформных отображений, необходимых в дальнейшем для изучения более сложных преобразований.

Пример 1. Отображающая функция имеет вид

$$\zeta=z+b, \tag{7.2}$$

где b — комплексное число, равное $b=b_1+ib_2$.

Так как для плоскости ζ

$$\zeta=\xi+i\eta,$$

а для плоскости z

$$z=x+iy,$$

то, используя (7.2), имеем

$$\xi=x+b_1,$$

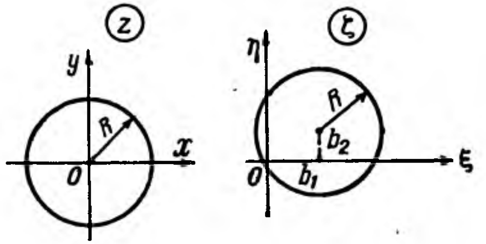
$$\eta=y+b_2.$$

Следовательно, преобразование (7.2) попросту сдвигает каждую точку в плоскости z в направлении вектора b на расстояние, равное его модулю. Поэтому преобразование (7.2) носит название *преобразования переноса.*

Поясним сказанное на примере.

Пусть в плоскости комплексного переменного z дана окружность радиуса R с центром в начале координат (фиг. 7.3):

$$x^2+y^2=R^2.$$



Фиг. 7.3. Преобразование переноса $\zeta=z+b$.

Полагая $\zeta=\xi+i\eta$ и используя для точек окружности очевидное соотношение

$$z=Re^{i\theta}=R(\cos\theta+i\sin\theta),$$

получим

$$\xi=R\cos\theta+b_1,$$

$$\eta=R\sin\theta+b_2.$$

Исключая θ, находим

$$(\xi-b_1)^2+(\eta-b_2)^2=R^2.$$

Полученное уравнение показывает, что преобразование (7.2) действительно является преобразованием переноса, так как оно переводит окружность в плоскости z радиуса R и с центром в начале координат в окружность того же радиуса R, но с центром в точке (b_1, b_2).

Пример 2. Отображающая функция имеет вид

$$\zeta=e^{i\mu}z, \tag{7.3}$$

где μ — действительное число.

Используя тригонометрическое представление комплексного числа, можем написать

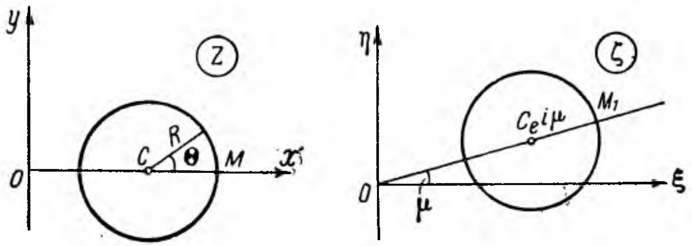
$$\zeta=\rho e^{i\alpha} \text{ и } z=Re^{i\theta}$$

и, подставляя в (7. 3), получим

$$\rho e^{i\alpha} = Re^{i(\mu+\theta)},$$

откуда $\rho=R$ и $\alpha=\mu+\theta$.

Следовательно, преобразование (7. 3) осуществляет простой поворот произвольного вектора z (без изменения масштаба) на



Фиг. 7. 4. Преобразование поворота $\zeta=e^{i\mu}z$.

угол μ. В частности, если в плоскости z задана окружность радиуса R с центром в точке $(C, 0)$, то для ее точек можно написать (фиг. 7. 4)

$$z=C+Re^{i\theta}.$$

Подставляя в (7. 3), получаем

$$\zeta=Ce^{i\mu}+Re^{i(\theta+\mu)}$$

или

$$\zeta-Ce^{i\mu}=Re^{i(\theta+\mu)}.$$

Как видим, в плоскости ζ получилась окружность того же радиуса R, но с центром в точке $Ce^{i\mu}$. Точкам окружности в плоскости z, характеризуемым центральным углом θ, на окружности в плоскости ζ соответствуют точки, сдвинутые на угол μ. Следовательно, преобразование (7. 3) повертывает окружность (как твердое тело) на угол μ.

Если $\mu=\frac{\pi}{2}$, центр окружности будет расположен в плоскости ζ на оси η; при $\mu=\pi$ центр будет расположен на отрицательной оси ξ на расстоянии C от начала координат.

Итак, функция $\zeta=e^{i\mu}z$, не изменяя масштаба, поворачивает фигуру на угол μ. Поэтому преобразование (7. 3) называется *преобразованием поворота*.

Пример 3. Отображающая функция имеет вид

$$\zeta=az, \tag{7.4}$$

где a — действительное положительное число.

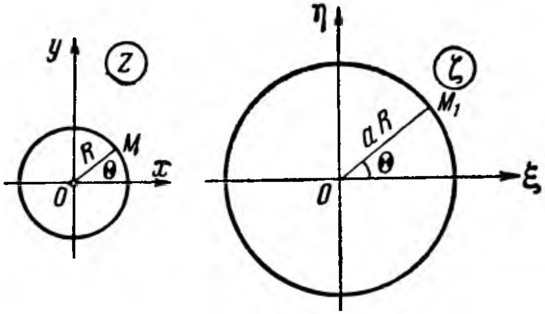
Используя тригонометрическое представление комплексных чисел, можем написать $\zeta=\rho e^{i\alpha}$ и $z=Re^{i\theta}$, откуда, подставляя в (7.4),

$$\rho e^{i\alpha}=aRe^{i\theta}$$

и, следовательно,

$$\rho=aR;\ \alpha=\theta\,.$$

Таким образом, преобразование (7.4) осуществляет растяжение или сжатие любого вектора z (растяжение, если $a>1$, и сжатие,



Фиг. 7.5. Преобразование изменения масштаба $\zeta=az$.

если $a<1$). Поэтому оно носит название *преобразования изменения масштаба.* В частном случае, если в плоскости z задана окружность радиуса R с центром в начале координат (фиг. 7.5)

$$z=Re^{i\theta},$$

то в плоскости ζ ей соответствует кривая

$$\zeta=aRe^{i\theta},$$

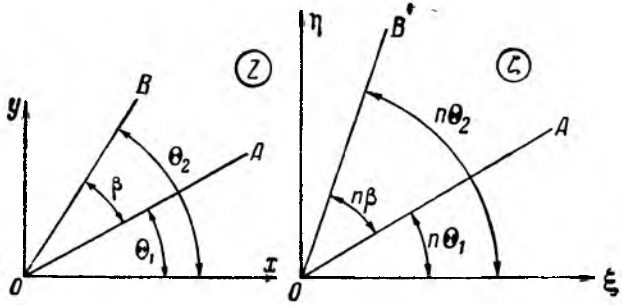
являющаяся, очевидно, тоже окружностью с центром в начале координат, но радиуса aR.

Пример 4. Выше были рассмотрены примеры, в которых отображающая функция $\zeta=f(z)$ удовлетворяла основному условию конформности — ее производная $f'(z)$ была конечной и не обращалась в нуль ни в одной точке отображаемой области. В настоящем примере рассмотрена функция, производная которой в некоторой точке отображаемой области обращается в нуль, и показано, что при этом конформность отображения в указанной точке нарушается.

Возьмем отображающую функцию в виде

$$\zeta=z^n,$$

где n — действительное число, причем $n \neq 1$. Очевидно, что производная этой функции $\zeta' = nz^{n-1}$ обращается в нуль (при $n > 1$) или в бесконечность (при $n < 1$) в точке $z = 0$.



Фиг. 7.6. Нарушение конформности преобразования $\zeta = z^n$.

Используя, как и выше, тригонометрическое представление комплексного числа

$$\zeta = \rho e^{i\alpha} \text{ и } z = Re^{i\theta},$$

будем иметь

$$\rho e^{i\alpha} = R^n e^{in\theta},$$

откуда

$$\rho = R^n \text{ и } \alpha = n\theta.$$

Отсюда следует, что если в плоскости z взять две прямые, проходящие через начало координат и образующие между собой угол β, то в плоскости ζ им будут соответствовать прямые, также проходящие через начало координат, но пересекающиеся под углом $n\beta$ (фиг. 7.6).

Как видим, равенство нулю или бесконечности производной отображающей функции в какой-либо точке действительно нарушает конформность отображения в этой точке — нарушает свойство сохранения углов. Такие точки называются *особыми точками конформного отображения.*

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНВЕРСИИ

Рассмотрим отображающую функцию следующего вида:

$$\zeta = \frac{l^2}{z}, \tag{7.5}$$

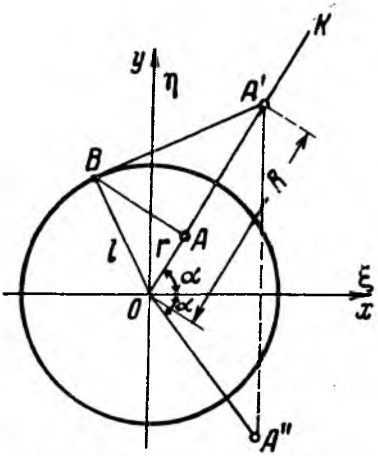
где l — действительная величина. Для изучения свойств этого преобразования, называемого *преобразованием инверсии,* положим

$$z = re^{i\alpha}, \quad \zeta = Re^{i\beta}.$$

Подставляя значения z и ζ в (7.5), получим

$$R=\frac{l^2}{r}, \quad \beta=-\alpha. \tag{7.6}$$

Отсюда следует, что преобразование (7.5) приводит и к изменению масштаба и к повороту любых кривых, расположенных в плоскости z. Совместим плоскости комплексного переменного z и ζ на одном чертеже и построим в плоскости z окружность радиуса l с центром в начале координат (фиг. 7.7). Эту окружность назовем *кругом инверсии*.



Фиг. 7.7. Круг инверсии.

Взяв какую-либо точку $A(z=re^{i\alpha})$ внутри окружности радиуса l, определим, в какую точку плоскости ζ перейдет эта точка в результате преобразования $R=\frac{l^2}{r}$, совершаемого над ее модулем r.

Для этого продолжим линию OA до некоторой точки K вне круга и из точки A проведем перпендикуляр AB до пересечения его с окружностью в точке B. В точке B проведем касательную к окружности до пересечения с линией OK в точке A'. Из подобия треугольников OBA' и OBA следует, что

$$\frac{OA'}{OB}=\frac{OB}{OA}.$$

Но так как $OB=l$, $OA=r$, то

$$OA'=\frac{l^2}{r}=R.$$

Таким образом, преобразование $\frac{l^2}{r}$ переводит точку A в точку A', называемую зеркальным отображением точки A относительно окружности радиуса l.

Теперь нетрудно построить отображение точки A, соответствующее отображающей функции (7.5). Выражение для аргумента в плоскости ζ

$$\beta=-\alpha$$

показывает, что точку A' надо зеркально отобразить относительно действительной оси. Тогда точка A'', расположенная в плоскости ζ, будет являться отображением точки A с помощью функции (7.5).

Так как при этом преобразовании точка $z=0$ переходит в точку $\zeta=\infty$, то, очевидно, все точки плоскости z, находящиеся внутри круга инверсии, переходят в точки плоскости ζ, расположенные вне круга инверсии, или, что то же самое, внешность круга плоскости ζ переходит во внутренность круга плоскости z.

Докажем следующую теорему. *Преобразование инверсии преобразует окружности и прямые в плоскости z в окружности или прямые в плоскости ζ.*

Записывая преобразование инверсии в виде

$$z=\frac{l^2}{\zeta}$$

и полагая $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$, получим

$$x+iy=\frac{l^2}{\xi+i\eta}.$$

Отсюда

$$x=\frac{l^2\xi}{\xi^2+\eta^2},$$

$$y=-\frac{l^2\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

Как известно, уравнение произвольной окружности (в том числе и прямой линии, являющейся окружностью бесконечно большого радиуса) в плоскости z можно написать в виде

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \tag{a}$$

(при $A=0$ получаем уравнение прямой).

Подставим в это уравнение значения x и y:

$$Al^4\left[\frac{\xi^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}+\frac{\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}\right]+\frac{Bl^2\xi}{\xi^2+\eta^2}-\frac{Cl^2\eta}{\xi^2+\eta^2}+D=0$$

или после упрощений

$$Al^4+Bl^2\xi-Cl^2\eta+D(\xi^2+\eta^2)=0. \tag{б}$$

Уравнение (б) представляет собой также уравнение окружности (или прямой линии при $D=0$) в плоскости ζ. Из уравнений (а) и (б) заключаем:

1. Всякая окружность плоскости z, не проходящая через начало координат ($A\neq 0$, $D\neq 0$), переходит в окружность плоскости ζ, не проходящую через начало координат.

2. Всякая окружность плоскости z, проходящая через начало координат ($A\neq 0$, $D=0$), переходит в плоскости ζ в прямую линию, не проходящую через начало координат.

3. Всякая прямая плоскости z, не проходящая через начало координат ($A=0$, $D\neq 0$), переходит в окружность плоскости ζ, проходящую через начало координат.

4. Всякая прямая плоскости z, проходящая через начало координат ($A=0$, $D=0$), переходит в прямую плоскости ζ, проходящую через начало координат.

Пример. На плоскости z дана прямая $y=x+1$. Требуется определить, во что перейдет эта прямая с помощью преобразования инверсии.

В данном случае

$$A=0,\ B=1,\ C=-1,\ D=1.$$

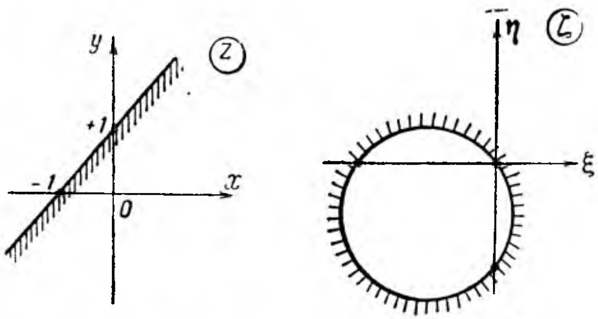
Подставляя эти значения коэффициентов в уравнение (б), получаем

$$l^2\xi+l^2\eta+(\xi^2+\eta^2)=0$$

или

$$\left(\xi+\frac{l^2}{2}\right)^2+\left(\eta+\frac{l^2}{2}\right)^2=\left(\frac{l^2}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Таким образом, в плоскости ζ прямой $y=x+1$ соответствует окружность радиуса $\frac{l^2}{\sqrt{2}}$, проходящая через начало координат (фиг. 7.8).



Фиг. 7.8. К преобразованию инверсии $\zeta=\frac{l^2}{z}$.

При этом преобразовании правой части плоскости z, заштрихованной на фиг. 7.8, будет соответствовать внешность окружности на плоскости ζ, так как точке $z=0$ соответствует точка $\zeta=\infty$.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Одной из задач теории крыла является определение геометрических и аэродинамических характеристик профилей, получаемых конформным отображением круга с помощью специально подбираемых для этой цели отображающих функций.

Подобная задача состоит, во-первых, в выборе отображающей функции и, во-вторых, в выражении аэродинамических характеристик профиля через некоторые параметры, входящие в выбранную функцию, при изменении которых будут получаться различные профили одного и того же семейства.

К числу простейшего семейства теоретических профилей принадлежит серия профилей Жуковского — Чаплыгина, получаемых из круга с помощью преобразования

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{l^2}{z}\right), \tag{7.7}$$

носящего название преобразования Н. Е. Жуковского.

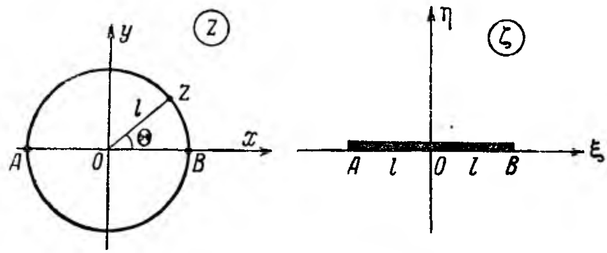
Прежде чем перейти к изучению получаемых с помощью функции (7.7) профилей, рассмотрим ряд геометрических свойств преобразования Н. Е. Жуковского.

Покажем, что с помощью этого преобразования окружность радиуса l с центром в начале координат (фиг. 7.9) отображается в отрезок прямой AB длиной $2l$ в плоскости ζ.

В самом деле, для точек окружности радиуса l будем иметь $z=le^{i\theta}$. Подставляя это значение z в формулу (7.7), найдем

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{l^2}{z}\right)=\frac{l}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=l\cos\theta.$$

Полученное выражение показывает, что для точек окружности, т. е. при изменении θ от 0 до 2π, ζ является действительной вели-



Фиг. 7.9. Преобразование окружности с помощью преобразования Жуковского $\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{l^2}{z}\right)$.

чиной и изменяется в пределах от $+l$ до $-l$ (при изменении θ от 0 до π) и от $-l$ до $+l$ (при изменении θ от π до 2π). Следовательно, преобразование (7.7) перевело окружность радиуса l в отрезок действительной оси длиной $2l$.

§ 5. ПРОФИЛИ ЖУКОВСКОГО—ЧАПЛЫГИНА

В настоящем параграфе рассматриваются профили, получаемые с помощью преобразования Н. Е. Жуковского (7.7)

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{l^2}{z}\right).$$

Поместим в плоскости z окружность K радиуса a так (фиг. 7.10), чтобы центр ее был расположен на мнимой оси на некотором расстоянии $OM=f$ от начала координат. Длину отрезка действительной оси OA обозначим через l.

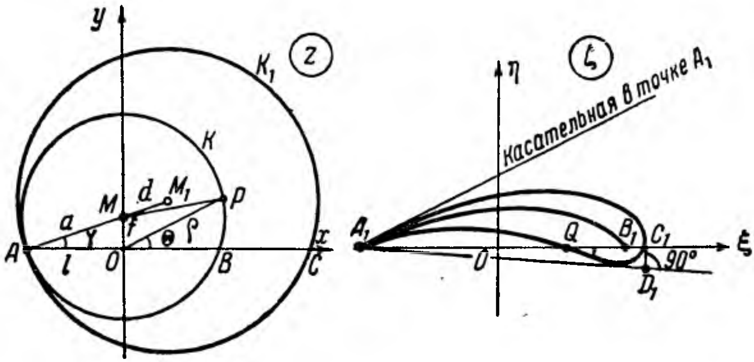
Для точек окружности K имеем $z=\rho e^{i\theta}$ где ρ — величина переменная, так как начало координат не совпадает с центром круга K. Следовательно,

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{l^2}{\rho}\right)\cos\theta,$$

$$\eta=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{l^2}{\rho}\right)\sin\theta.$$

Умножая первое выражение на $\sin\theta$, второе на $\cos\theta$, возводя в квадрат и вычитая, получим

$$\xi^2 \sin^2\theta - \eta^2 \cos^2\theta = l^2 \sin^2\theta \cos^2\theta. \qquad \text{(a)}$$



Фиг. 7.10. Метод округления Жуковского — Чаплыгина.

Если теперь взять на окружности K произвольную точку P, положение которой определяется величинами ρ и θ, то из треугольников OMP и OMA следует, что

$$a^2 = l^2 + f^2 = f^2 + \rho^2 - 2\rho f \sin\theta,$$

откуда

$$\rho - \frac{l^2}{\rho} = 2f \sin\theta,$$

и, следовательно,

$$\eta = f \sin^2\theta,$$

т. е.

$$\sin^2\theta = \frac{\eta}{f}. \qquad \text{(б)}$$

Подставляя выражение (б) в (а), после простых преобразований получим уравнение отображенной кривой

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\frac{l^2}{f} - f\right)\eta = l^2,$$

которое легко привести к виду

$$\xi^2 + \left[\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{f} - f\right)\right]^2 = l^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{l^2}{f} - f\right)^2.$$

Как видим, мы получили уравнение окружности, центр которой расположен на мнимой оси в точке $\xi = 0$, $\eta = -\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{f} - f\right)$ и радиус которой равен

$$\sqrt{l^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{l^2}{f} - f\right)^2}.$$

Выражение (б) показывает, что отображенная кривая будет не полной окружностью, а только ее дугой, расположенной над действительной осью.

Если в плоскости z взять окружность K_0 радиуса l с центром в начале координат, то, как уже известно, преобразование (7.7) переведет ее в отрезок действительной оси длиной $2l$. Следовательно, преобразование (7.7) переводит точки A и B окружности K в точки A_1 и B_1, расположенные на действительной оси ξ, расстояние между которыми равно $2l$. Таким образом, отрезок A_1B_1 будет являться хордой дуги A_1B_1 (см. фиг. 7.10), стрела прогиба которой, как это следует из выражения (б), равна f.

Проведем в плоскости z окружность K_1 с центром в точке M_1, так, чтобы она касалась окружности K в точке A; расстояние MM_1 обозначим через d. Очевидно, центр окружности K_1 будет лежать на продолжении прямой AM.

Выясним, во что отобразится окружность K_1, с помощью преобразования Жуковского. Так как это преобразование отобразило внешность круга K на внешность дуги A_1B_1, то, поскольку круг K_1 охватывает круг K, ему в плоскости ζ должна соответствовать некоторая замкнутая кривая, т. е. некоторый замкнутый профиль, охватывающий дугу A_1B_1.

Из общего свойства конформных преобразований (сохранение углов) следует, что в точке A_1 контур профиля должен иметь общую касательную с дугой A_1B_1 (так как окружности K и K_1 в точке A касаются друг друга). Кроме того, ясно, что точка C окружности K_1 должна перейти в некоторую точку C_1, лежащую на продолжении отрезка A_1B_1. Так как, кроме точки A_1, профиль, очевидно, не будет иметь других общих точек с дугой A_1B_1, то в окрестности точки C_1 он должен иметь плавное закругление. Указанное хорошо подтверждается расчетом.

Примерный вид получаемого таким способом профиля, называемого профилем Жуковского—Чаплыгина, показан на фиг. 7.10.

Из самого построения этого профиля ясно, что длина его хорды A_1D_1 определяется величиной l, его толщина — величиной d, его вогнутость — величиной f. Именно, чем больше l, d и f, тем длиннее хорда профиля, тем он толще и тем более он изогнут.

Для профилей Жуковского—Чаплыгина часто вводят понятие *теоретической хорды*, под которой понимают длину отрезка A_1C_1. Величину теоретической хорды можно точно вычислить аналитически.

Таким образом, определенный класс профилей может быть получен, как впервые показал Н. Е. Жуковский, с помощью преобразования (7.7) методом округления дуги круга. Независимо от Н. Е. Жуковского рассматриваемый класс профилей был получен С. А. Чаплыгиным в работе «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела».

В этой работе С. А. Чаплыгин показал, что этот профиль принадлежит целой серии профилей, которые могут быть получены из параболы путем применения к ее точкам преобразования инверсии, вследствие чего Чаплыгин назвал их профилями «инверсии параболы».

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ЖУКОВСКОГО—ЧАПЛЫГИНА

В предыдущем параграфе были рассмотрены только геометрические свойства профиля Жуковского—Чаплыгина. Покажем на примере этого простейшего профиля метод подсчета подъемной силы. В § 8 этот метод будет обобщен для профилей произвольной формы.

Очевидно, что если бы был известен комплексный потенциал $w(\zeta)$ обтекания этого профиля, то на основании теоремы Жуковского—Чаплыгина

$$Y+iX=-\frac{1}{2}\rho\oint\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 d\zeta \tag{7.8}$$

задача о вычислении подъемной силы сводилась бы к нахождению вычета квадрата комплексной скорости. Однако непосредственное построение комплексного потенциала для профиля Жуковского—Чаплыгина сопряжено со значительными трудностями. Поэтому задачу вычисления подъемной силы профиля Жуковского—Чаплыгина будем решать иным методом, основанным на конформном отображении этого профиля на круглый цилиндр.

Пусть в плоскости z имеет место циркуляционное обтекание цилиндра радиуса R потоком со скоростью на бесконечности, равной V_∞ и направленной параллельно действительной оси (фиг. 7. 11). Комплексный потенциал для этого случая, как известно, имеет вид

$$w(z)=-V_\infty\left(z+\frac{R^2}{z}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z, \tag{7.9}$$

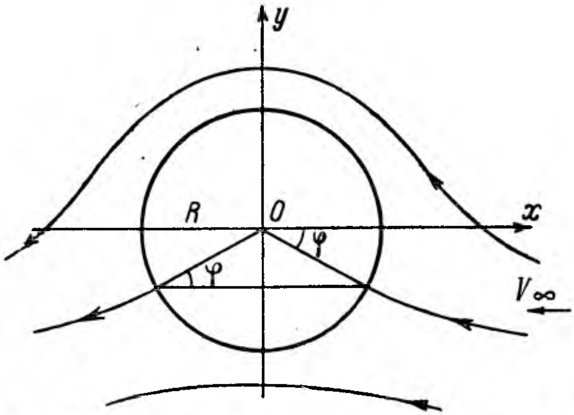
где R — радиус цилиндра, Γ — циркуляция скорости по контуру, охватывающему цилиндр. Выражение для циркуляции Γ, как известно, имеет вид [см. формулу (3. 75)]

$$\Gamma=-4\pi RV_\infty\sin\varphi,$$

где φ — угол, определяющий положение критических точек на цилиндре.

Из геометрических соображений ясно (см. фиг. 7. 11), что угол φ, определяющий положение критических точек (второй критической точке соответствует угол $\pi-\varphi$), равен углу между хордой, проходящей через две критические точки на цилиндре, и радиусом цилиндра. Величина этого угла характеризует величину циркуляции. Очевидно, величина угла φ не зависит от направления потока в бесконечности. В самом деле, представим себе, что поток, имеющий в бесконечности ту же скорость V_∞, направлен под углом β к действительной оси. Очевидно, что эта задача просто сводится к предыдущей, если осуществить поворот осей координат на угол β.

Покажем теперь, что *циркуляция скорости при конформном отображении не изменяется.* Если внутри контура, по которому вычи-



Фиг. 7.11. Обтекание круглого цилиндра радиуса R.

сляется циркуляция, нет ни источников, ни стоков, то циркуляцию в плоскости z можно вычислить по формуле

$$\Gamma = \oint \frac{dw}{dz} dz.$$

При переходе от плоскости z к плоскости ζ с помощью конформного преобразования $\zeta = f(z)$ будем иметь

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz},$$

а

$$dz = \frac{dz}{d\zeta} d\zeta.$$

Подставляя эти выражения в формулу для Γ, получим

$$\Gamma_z = \oint \frac{dw}{dz} dz = \oint \frac{dw}{d\zeta} d\zeta = \Gamma_\zeta,$$

т. е. циркуляция скорости действительно не изменяется при конформном отображении.

Поскольку циркуляция скорости по формуле Жуковского связана с величиной подъемной силы, задачу определения подъемной силы профиля Жуковского—Чаплыгина можно решить с помощью отображения внешней области окружности на внешнюю область профиля. Очевидно, что при конформном отображении линии тока переходят также в линии тока, а эквипотенциальные линии — в эквипотенциальные линии. Действительно, если в плоскости z комплексный потенциал обозначить через $w(z)$, то при конформном отображении $\zeta=f(z)$ или $z=F(\zeta)$, где f и F — взаимно обратные функции, комплексный потенциал в плоскости ζ будет $w[F(\zeta)]=W(\zeta)$. Но так как $w=\varphi+i\psi$, а $W=\Phi+i\Psi$, то в соответствующих точках, где $w=W$, будем иметь

$$\varphi=\Phi \text{ и } \psi=\Psi.$$

Отсюда следует, что тем линиям в плоскости z, на которых $\psi=\mathrm{const}$, в плоскости ζ будут соответствовать линии, на которых $\Psi=\mathrm{const}$. Но это и будет означать, что линии тока при конформном отображении переходят в линии тока. Аналогичный вывод, очевидно, справедлив и для эквипотенциальных линий. Следовательно, ортогональные семейства линий тока и эквипотенциальных линий плоскости z перейдут при конформном отображении в ортогональные семейства линий тока и эквипотенциальных линий области ζ профиля, т. е. конформное преобразование, отображающее контур цилиндра на контур профиля, преобразует поток, обтекающий цилиндр, в поток, обтекающий профиль. При этом преобразование должно быть выбрано так, чтобы скорости в области ζ не обращались в бесконечность, иначе задача потеряет физический смысл. Имея это в виду, определим зависимость между скоростями обтекания окружности и профиля крыла. Пусть $w(z)$ — комплексный потенциал потока, обтекающего цилиндр, а $\zeta(z)$ — функция, реализующая конформное отображение внешней области цилиндра на внешнюю область профиля. Тогда

$$\bar{v}=\frac{dw}{d\zeta}=\frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{d\zeta}=\frac{\dfrac{dw}{dz}}{\dfrac{d\zeta}{dz}}=\frac{\bar{V}}{\dfrac{d\zeta}{dz}}, \tag{7.10}$$

где $\bar{v}$ — комплексная скорость в плоскости ζ профиля;
$\bar{V}$ — комплексная скорость в плоскости z цилиндра.

Отсюда сразу следует, что скорость в плоскости ζ может стать бесконечно большой там, где $\dfrac{d\zeta}{dz}=0$. Функция, реализующая конформное отображение, в рассматриваемом случае имеет вид

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{l^2}{z}\right),$$

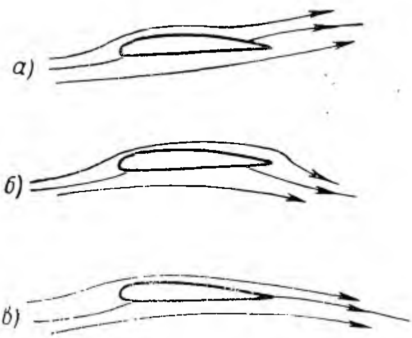
откуда

$$\bar{v}=\frac{2\bar{V}}{1-\dfrac{l^2}{z^2}}. \tag{7.11}$$

Как видим, скорость на профиле (см. фиг. 7.11) может обратиться в бесконечность в точке $z=-l$, соответствующей задней кромке профиля. Это можно устранить [см. формулу (7. 11)], если скорость в точке на окружности, соответствующей задней кромке профиля, будет равна нулю. Таким образом, мы приходим к известному постулату Жуковского—Чаплыгина о сходе потока с профиля, который в данном случае может быть сформулирован следующим образом: *плавное обтекание профиля осуществляется так, что критической точке на окружности соответствует задняя кромка крыла.*

Чтобы оценить важность этого постулата, следует иметь в виду, что решение задачи об обтекании произвольного крылового профиля содержит некоторый произвол, заключающийся в том, что при заданном значении скорости на бесконечности распределение скорости на профиле может быть различным в зависимости от величины циркуляции Г.

При обтекании цилиндра с заданной скоростью на бесконечности V_∞ мы также имели множество решений, так как, выбирая различным образом циркуляцию Г, можно было получить различные формы обтекания цилиндра с различным расположением на нем критических точек.



Фиг. 7. 12. К постулату Жуковского—Чаплыгина.

Это же имеет место и для профиля крыла с задней острой кромкой. Однако при обтекании профиля с заданной скоростью V_∞ из бесчисленного множества решений мы можем выделить три характерных случая (фиг. 7. 12).

Первые два случая (фиг. 7. 12,*а* и *б*) не дают плавного обтекания, так как при перетекании струй с одной поверхности профиля на другую на острой кромке образуется бесконечно большая скорость, чему в реальной жидкости соответствует срыв потока.

В 1909 г. С. А. Чаплыгин и независимо от него Н. Е. Жуковский установили, что *для каждого профиля крыла с задней острой кромкой существует достаточно широкий диапазон углов атаки, при котором профиль обтекается без отрыва струй, с конечной скоростью на задней острой кромке* (фиг. 7. 12,*в*).

Постулат Жуковского—Чаплыгина дает возможность *однозначно* определить величину циркуляции, наложение которой приводит к безотрывному обтеканию с конечной скоростью на задней острой кромке и имеет поэтому в аэродинамике исключительно большое значение.

Как правильно отмечает проф. Л. Г. Лойцянский [1], «Эти две глубокие идеи великих русских аэродинамиков Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина: *присоединенный вихрь* (возникновение циркуляции — *прим. авт.*) *и постулат конечности скорости на задней* *кромке крыла* — легли в основу всей современной теории крыла».

В силу доказанного свойства постоянства циркуляции при конформном отображении и пользуясь теоремой Н. Е. Жуковского для профиля, можно написать

$$Y = \rho v_{\infty} |\Gamma|$$

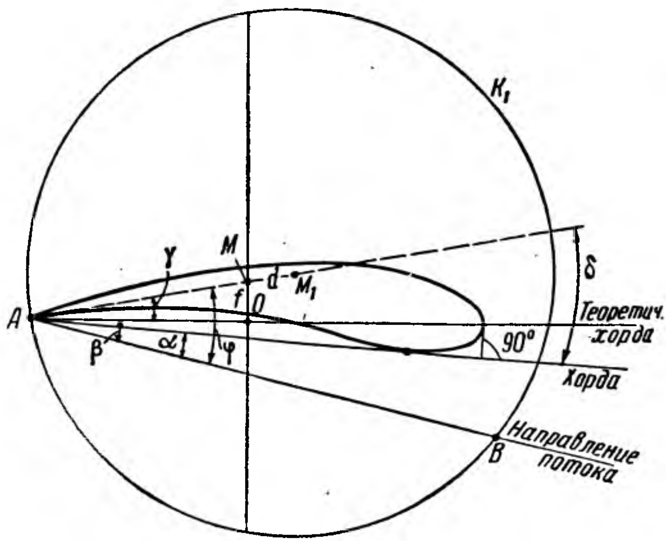
или

$$Y = \rho v_{\infty} 4\pi R V_{\infty} \sin\varphi,$$

где v_{∞} — скорость обтекания профиля крыла. Но в нашем случае, как это следует из соотношения (7.11), $2V_{\infty} = v_{\infty}$. Следовательно,

$$Y = 2\pi R \rho v_{\infty}^2 \sin\varphi. \tag{7.12}$$

Значение угла φ легко определить из построения самого профиля. В самом деле, пусть мы имеем окружность K_1 радиуса R,



Фиг. 7.13. К определению величины подъемной силы для профиля Жуковского — Чаплыгина.

обтекаемую потоком, скорость которого на бесконечности составляет угол β с действительной осью (см. фиг. 7.13, где плоскости z и ζ совмещены).

Пусть точки A и B будут критическими точками; пряма, соединяющая эти точки, будет направлена параллельно скорости на бесконечности. Как видно из фиг. 7.13,

$$\varphi = \alpha + \delta \tag{a}$$

или

$$\varphi_1 = \beta + \gamma. \tag{б}$$

Здесь α — угол атаки, отсчитываемый от хорды профиля, а β — угол атаки, отсчитываемый от теоретической хорды. Углы γ и δ являются углами построения и для различных профилей Жуковского—Чаплыгина имеют различное значение.

Таким образом, подъемная сила может быть представлена в виде

$$Y = 2\pi R\rho v_\infty^2 \sin(\delta + \alpha). \tag{7.13}$$

Из (7.13) следует, что при $\alpha = -\delta$ сила $Y=0$. Поэтому угол $\alpha = -\delta$ называют *углом атаки нулевой подъемной силы.*

Вводя безразмерный коэффициент подъемной силы c_y, можно написать

$$Y = c_y S\rho \frac{v_\infty^2}{2}, \tag{7.14}$$

где $S = b \cdot 1$ (b — длина хорды).

Сравнивая (7.13) и (7.14), находим

$$c_y = 4\pi \frac{R}{b} \sin(\delta + \alpha). \tag{7.15}$$

Аналогично можно получить

$$c_y = 4\pi \frac{R}{b} \sin(\gamma + \beta). \tag{7.16}$$

Для тонких профилей с малой вогнутостью можно приближенно считать, что $b \approx 2R$, следовательно,

$$c_y = 2\pi \sin(\delta + \alpha).$$

Это выражение справедливо и для ряда профилей, не принадлежащих к серии профилей Жуковского—Чаплыгина.

Принимая для малых углов атаки

$$\sin(\alpha + \delta) \approx \alpha + \delta,$$

найдем

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = 2\pi,$$

т. е. теоретический наклон кривой зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки $c_y(\alpha)$ равен 2π.

Из соотношения (7.16) следует, что при $\beta = 0$

$$c_y = 4\pi \frac{R}{b} \sin\gamma. \tag{7.17}$$

Подставим это значение c_y в выражение для подъемной силы (7.14):

$$Y = 2\pi\rho v_\infty^2 R \sin\gamma.$$

Из фиг. 7.13 определим R и $\sin\gamma$:

$$R=\sqrt{f^2+l^2}+d,$$

$$\sin\gamma=\frac{f}{\sqrt{f^2+l^2}}.$$

Тогда выражение для подъемной силы Y можно привести к виду

$$Y=2\pi\rho v_\infty^2 f\left(1+\frac{d}{\sqrt{f^2+l^2}}\right).$$

Положив в этой формуле $d=0$, получим

$$Y=2\pi\rho v_\infty^2 f, \tag{7.18}$$

т. е. величина подъемной силы дугового профиля при $\beta=0$ зависит только от его стрелы прогиба. Этот результат впервые получен Чаплыгиным в 1910 г. в работе «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела».

В указанной работе С. А. Чаплыгин с исчерпывающей полнотой исследовал теорию дугообразных профилей. Так, им была полностью решена задача об обтекании дугообразного профиля с цилиндрическим насадком на конце, решение которой приписывается немецкому ученому Зоненфельду, исследовавшему эту задачу много позже. В этой же работе С. А. Чаплыгин исследовал задачу об обтекании кругового профиля в присутствии «стоячего» вихря.

В § 8 нами будет подсчитан момент подъемной силы для профиля Жуковского—Чаплыгина.

§ 7. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРОФИЛИ

Теоретическими профилями, как мы установили, являются такие профили, которые могут быть получены путем конформного отображения. Таким образом, контур теоретических профилей не составляется искусственным подбором дуг на основе эмпирических зависимостей и экспериментальных исследований, как это делается для большинства практических профилей, а получается аналитически. Зная преобразующую функцию $\zeta=f(z)$ для каждого теоретического профиля, можно строго математически на основе ранее изложенной теории крыла подсчитать результирующую силу и момент.

Простейшим теоретическим профилем является подробно рассмотренный профиль Жуковского—Чаплыгина, принадлежащий, как известно, к серии профилей типа «инверсии параболы». Как в 1922 г. показал акад. С. А. Чаплыгин в работе «К общей теории крыла моноплана», с помощью метода инверсии можно построить другую серию теоретических профилей, являющихся обобщением предыдущих и называемых профилями типа «инверсии эллипса». Одна из особенностей этих профилей (пример профиля изображен на фиг. 7.14) состоит в наличии округленной задней кромки.

В этом случае гипотеза Жуковского—Чаплыгина о сходе потока с задней острой кромки заменяется гипотезой Чаплыгина о том, что сбегание потока происходит с точки задней кромки, обладающей максимальной кривизной.

Однако большого практического применения эти профили не получили, так же как и профили Жуковского—Чаплыгина. Последние обладали двумя существенными недостатками:

1. Равенство нулю угла τ на задней кромке профиля лишало его необходимой прочности.

2. При малой толщине профиля средняя линия профиля оказывалась весьма близкой к окружности. Это лишало профиль надлежащей устойчивости.

Н. Е. Жуковский в 1911 г.[1] разработал теорию профилей, составленных из двух пересекающихся дуг окружностей, названных им профилями типа Антуанет, а также теорию обобщенных профилей типа Антуанет с закругленным носком и острой задней кромкой с углом τ, отличным от нуля. Крылья с обобщенными профилями типа Антуанет, которые следует именовать «обобщенными профилями Н. Е. Жуковского», широко применялись на самолетах и сыграли большую роль в развитии авиации. В иностранной литературе эти профили носят название профилей «Кармана—Трефтца» по имени ученых [13], которые в 1918 г. разработали такие профили, изученные проф. Н. Е. Жуковским за семь лет до них.

Обобщенный профиль Н. Е. Жуковского строится на основании следующих соображений.

Преобразование Н. Е. Жуковского, с помощью которого получается профиль типа инверсии параболы, как нетрудно проверить, может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{\zeta-2l}{\zeta+2l}=\left(\frac{z-l}{z+l}\right)^2. \tag{7.19}$$

Наличие показателя степени $n=2$ в правой части равенства (7.19) приводит к удвоению угла в точке $z=-l$, где конформность нарушается, в силу чего критической точке на цилиндре с внешним углом π будет соответствовать на профиле задняя точка схода потока с внешним углом 2π, т. е. внутренний угол τ оказывается равным нулю.

Н. Е. Жуковский указал, что для получения профиля с конечным углом τ у задней кромки конформное отображение следует осуществлять с помощью следующей отображающей функции:

$$\frac{\zeta-nl}{\zeta+nl}=\left(\frac{z-l}{z+l}\right)^n, \tag{7.20}$$

где $n=2-\frac{\tau}{\pi}$.

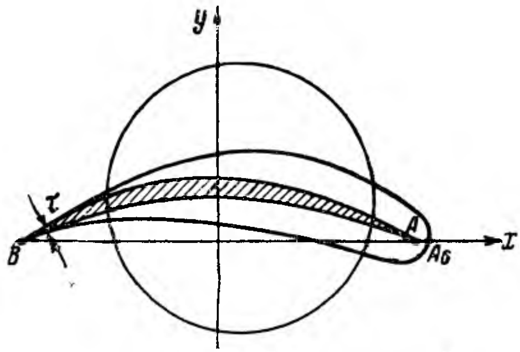
[1] Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, том XV, 1911.

В этом случае «скелет» нового профиля будет состоять из двух пересекающихся дуг окружностей с углами τ на концах, отличными от нуля (фиг. 7. 15). Этот профиль и есть первоначально разобранный Жуковским профиль Антуанет. На этом «скелете» можно наращивать профиль методом, аналогичным предыдущему. Обобщенный профиль Жуковского с округленным носком и острой задней кромкой с углом $\tau \neq 0$ изображен на фиг. 7. 15.

В этом случае, как нетрудно проверить, внешнему углу π на круге в критической точке будет соответствовать внешний угол $2\pi - \tau$ на задней острой кромке профиля, т. е. дуги профиля будут пересекаться у задней кромки под углом τ.

Таким образом, обобщенный профиль Н. Е. Жуковского зависит от трех параметров — параметров толщины, вогнутости и от угла τ.

Фиг. 7. 14. Профиль типа инверсии эллипса; задняя кромка закруглена.



Фиг. 7. 15. Обобщенный профиль Н. Е. Жуковского.

Аэродинамические характеристики этих профилей несколько отличаются от таковых для профилей типа Жуковского—Чаплыгина благодаря наличию угла $\tau \neq 0$.

Так, можно показать, что тангенс угла наклона кривой $c_y(\alpha)$ будет несколько больше 2π (у предыдущих профилей он был равен 2π) и будет выражаться следующим образом:

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = 2\pi\left(1 + \frac{\tau}{2\pi}\right). \tag{7.21}$$

Изложение теории этих профилей, подсчет результирующей силы и момента даны в монографии проф. В. В. Голубева «Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке» [14].

Иная серия профилей может быть получена путем конформного отображения следующего вида:

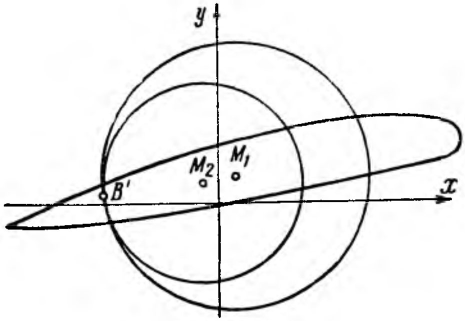
$$\zeta = z + \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z^2} + \ldots + \frac{k_n}{z^n}. \tag{7.22}$$

Профили, полученные с помощью преобразования (7. 22), были впервые предложены акад. А. И. Некрасовым (фиг. 7. 16) и подробно исследованы немецким профессором Мизесом. Не останавливаясь на теории этих профилей, укажем, что практическое их применение было ограничено недостаточной их устойчивостью.

С. А. Чаплыгин на протяжении ряда лет занимался глубоким исследованием теории профилей. Так, в работе С. А. Чаплыгина совместно с проф. Н. С. Аржаниковым [16] исследован профиль, у которого основной линией является ломаная, состоящая из двух отрезков прямых. В работе С. А. Чаплыгина, выполненной в 1912 г. и опубликованной в 1935 г. [17], исследован профиль, средняя линия которого состояла из двух дуг окружностей разного радиуса, касающихся в конечных точках.

Крупным вкладом в теорию профилей являются созданные С. А. Чаплыгиным в 1942 г. профили «САЧ», названные так по инициалам этого великого ученого.

Профили САЧ были получены Чаплыгиным с помощью конформного преобразования внешности профиля на внешность единичного круга. Преобразующая функция, указанная Чаплыгиным, содержала три произвольных параметра. Изменением последних достигались нужные значения вогнутости профиля, его толщины и угла на задней кромке.



Фиг. 7.16. Профиль Некрасова.

Подчеркивая важность метода теоретических профилей, Чаплыгин указывал, что «следует отметить то преимущество теоретических профилей перед обычным, что мы заранее можем знать распределение давления исследуемого крыла, а следовательно, и предугадать его основные характеристики. При этом расчет распределения давления методом конформных отображений дает надежные результаты».

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ И МОМЕНТА ДЛЯ ПРОФИЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В настоящем параграфе будет рассмотрен метод расчета силы и момента для профиля крыла произвольной формы.

Допустим, что в плоскости комплексного переменного ζ задан комплексный потенциал $w(\zeta)$ плоского потока, обтекающего произвольный профиль. В таком случае, как известно, результирующая сила и момент выражаются следующими формулами:

$$Y+iX=-\frac{\rho}{2}\int\limits_C\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 d\zeta,$$

$$M=-\text{д. ч. }\frac{\rho}{2}\int\limits_C\zeta\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 d\zeta,$$

где C — произвольный замкнутый контур, охватывающий профиль.

Разложим комплексную скорость $\frac{dw}{d\zeta}$ в ряд Лорана:

$$\frac{dw}{d\zeta} = A_0 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \frac{A_3}{\zeta^3} + \ldots, \tag{7.23}$$

где коэффициенты A_n — комплексные числа. Значения коэффициентов этого разложения зависят от характера обтекания профиля и его геометрической формы.

Очевидно, что

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = A_0,$$

откуда

$$A_0 = \bar{v}_\infty = |v_\infty| e^{-i\theta_\infty}, \tag{7.24}$$

т. е. коэффициент A_0 представляет значение комплексной скорости $|v_\infty| e^{-i\theta_\infty}$ на бесконечности.

Применим для определения коэффициента A_1 теорему о вычете комплексной скорости, которая в силу отсутствия в потоке источников и стоков может быть написана в виде

$$\Gamma = \int\limits_C \left(\frac{dw}{d\zeta}\right) d\zeta = \int\limits_C \left(A_0 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \ldots\right) d\zeta = A_1 2\pi i,$$

откуда

$$A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}. \tag{7.25}$$

Следовательно, коэффициент A_1 целиком определяется величиной циркуляции Γ. Покажем, что сила и момент при обтекании произвольного профиля зависят только от первых трех коэффициентов A_0, A_1 и A_2 разложения комплексной скорости в ряд. В самом деле, возводя $\frac{dw}{d\zeta}$ в квадрат, будем иметь

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 = \ldots + \frac{2A_0A_1}{\zeta} + \frac{A_1^2 + 2A_0A_2}{\zeta^2} + \ldots$$

и

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int\limits_C \left(\ldots + \frac{2A_0A_1}{\zeta} + \ldots\right) d\zeta = -\frac{\rho}{2} 2A_0A_1 2\pi i$$

или

$$Y + iX = -2\pi\rho i A_0 A_1. \tag{7.26}$$

Отсюда легко получить теорему Жуковского для подъемной силы. Действительно, воспользовавшись формулами (7.24) и (7.25), будем иметь

$$Y+iX=-2\pi\rho i\,|v_\infty|\,e^{-i\theta_\infty}\frac{\Gamma}{2\pi i}=-\rho\,|v_\infty|\,\Gamma e^{-i\theta_\infty}.$$

В частности, при $\theta_\infty=\pi$

$$X=0,\quad Y=\rho\,|v_\infty|\,\Gamma.$$

Таким образом, теорема Жуковского о подъемной силе вновь доказана нами для произвольного профиля в несжимаемой жидкости. Аналогично

$$M=-\text{д. ч. }\frac{\rho}{2}\int\limits_C \zeta\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 d\zeta=$$

$$=-\text{д. ч. }\frac{\rho}{2}\int\limits_C\left(\ .\ .\ .+\frac{A_1^2+2A_0A_2}{\zeta}+\ .\ .\ .\right)d\zeta=$$

$$=-\text{д. ч. }\frac{\rho}{2}(A_1^2+2A_0A_2)\,2\pi i$$

или

$$M=-\pi\rho\text{ д. ч. }[i\,(A_1^2+2A_0A_2)].$$

Используя выражения (7.24) и (7.25) для коэффициентов A_0 и A_1, окончательно получим

$$M=-2\pi\rho\text{ д. ч. }(i\bar{v}_\infty A_2). \tag{7.27}$$

Таким образом, для вычисления силы и момента не нужно знать полностью обтекания крыла, т. е. все коэффициенты разложения (7.23), а достаточно располагать только *первыми тремя* коэффициентами A_0, A_1 и A_2.

Первый коэффициент A_0, как видим, определяется заданием величины и направления скорости потока, обтекающего крыло, ибо

$$A_0=|v_\infty|\,e^{-i\theta_\infty}.$$

Два других коэффициента A_1 и A_2 можно определить с помощью конформного отображения внешности рассматриваемого профиля на внешность круглого цилиндра радиуса R.

Пусть функция

$$\zeta=f(z)$$

осуществляет указанное отображение и притом такое, что бесконечно удаленная точка плоскости ζ переходит в бесконечно удаленную точку плоскости цилиндра z, а направления скорости на бесконечности в плоскости ζ и в плоскости z сохраняются, т. е. $\theta_\infty=\alpha_\infty$. Указанным соответствием конформное отображение определяется однозначно.

Тогда коэффициент A_1, входящий в формулу (7.26) для подъемной силы, легко определяется, ибо величина циркуляции Γ при конформном отображении не изменяется, а для цилиндра величину Γ просто определить, соблюдая условие о безотрывном обтекании профиля.

Чтобы определить недостающий коэффициент A_2, рассмотрим подробнее функцию $\zeta = f(z)$. Так как комплексная скорость $\frac{dw}{d\zeta}$ должна быть аналитической функцией всюду в области течения и вместе с тем

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}}, \tag{7.28}$$

то разложение $\zeta(z)$ в ряд Лорана вне цилиндра должно иметь вид

$$\zeta(z) = a_\infty z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \tag{7.29}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\zeta}{dz} = a_\infty - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \ldots \tag{7.30}$$

При удалении в бесконечность формула (7.28) принимает вид

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = \frac{\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty}}{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=\infty}}.$$

Но

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = \bar{v}_\infty = |v_\infty| e^{-i\theta_\infty}; \quad \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty} = \bar{V}_\infty = |V_\infty| e^{-i\alpha_\infty};$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=\infty} = a_\infty.$$

Следовательно,

$$\bar{v}_\infty = \frac{\bar{V}_\infty}{a_\infty},$$

откуда

$$a_\infty = \frac{\bar{V}_\infty}{\bar{v}_\infty} = \frac{|V_\infty| e^{-i\alpha_\infty}}{|v_\infty| e^{-i\theta_\infty}},$$

и так как по условию

$$\theta_\infty = \alpha_\infty,$$

то

$$a_\infty = \frac{|V_\infty|}{|v_\infty|}.$$

Итак, коэффициент a_∞ есть действительное положительное число и, следовательно, из равенства

$$\overline{V}_\infty = a_\infty \overline{v}_\infty \tag{7.31}$$

получаем, что и

$$V_\infty = a_\infty v_\infty. \tag{7.32}$$

Напишем комплексный потенциал для круглого цилиндра[1], полагая, как и выше, $\overline{V}_\infty = |V_\infty| e^{-i\alpha_\infty}$:

$$w(z) = \overline{V}_\infty z + V_\infty \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Используя (7.31) и (7.32), будем иметь

$$w(z) = a_\infty \left(\overline{v}_\infty z + v_\infty \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

откуда

$$\frac{dw}{dz} = a_\infty \overline{v}_\infty - a_\infty v_\infty \frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}.$$

Подставляя выражения для $\frac{dw}{dz}$ и $\frac{d\zeta}{dz}$ в формулу (7.28), получим

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{a_\infty \overline{v}_\infty - a_\infty v_\infty \dfrac{R^2}{z^2} + \dfrac{\Gamma}{2\pi i} \dfrac{1}{z}}{a_\infty - \dfrac{a_1}{z^2} - \dfrac{2a_2}{z^3} - \dots}$$

или

$$\frac{dw}{d\zeta} = \overline{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i a_\infty} \frac{1}{z} + \left(\frac{a_1}{a_\infty} \overline{v}_\infty - v_\infty R^2 \right) \frac{1}{z^2} + \dots \tag{7.33}$$

Возвращаясь к формуле (7.30), заметим, что

$$A_2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{dw}{d\zeta} \zeta \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{dw}{d\zeta} \zeta \frac{d\zeta}{dz} dz.$$

Подставляя сюда $\frac{dw}{d\zeta}$, ζ и $\frac{d\zeta}{dz}$ соответственно по формулам (7.33), (7.29) и (7.30), собирая под интегралом коэффициенты при $\frac{1}{z}$ и используя теорему о вычете, получим

$$A_2 = \frac{a_0 \Gamma}{2\pi i} + a_1 a_\infty \overline{v}_\infty - a_\infty^2 R^2 v_\infty. \tag{7.34}$$

---

[1] Если поток будет направлен вдоль оси x, т. е. $\alpha_\infty = 0$, то $\overline{V}_\infty = V_\infty$ и мы будем иметь известное выражение для комплексного потенциала цилиндра (гл. VI, § 7).

Определив A_2, формулу (7.27) для момента можно привести к виду

$$M=-2\pi\rho \text{ д. ч. } \left(\frac{a_0\Gamma\bar{v}_\infty}{2\pi}+ia_1a_\infty\bar{v}_\infty^2-ia_\infty^2R^2v_\infty\bar{v}_\infty\right)$$

или, замечая, что a_∞, R и $v_\infty\bar{v}_\infty=|v_\infty|^2$ — действительные числа

$$M=-2\pi\rho \text{ д. ч. } \left(\frac{a_0\bar{v}_\infty\Gamma}{2\pi}+ia_1a_\infty\bar{v}_\infty^2\right). \tag{7.35}$$

Таким образом, момент M для произвольного профиля зависит только от трех первых коэффициентов a_∞, a_0 и a_1 разложения в ряд функции $\zeta=f(z)$, осуществляющей конформное отображение профиля на круг радиуса R. Подсчитаем момент M для профиля Жуковского—Чаплыгина.

В этом случае разложение (7.29) имеет вид

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{l^2}{z}\right)=\frac{1}{2}z+\frac{l^2}{2}\frac{1}{z}.$$

Следовательно,

$$a_\infty=\frac{1}{2},\quad a_0=0,\quad a_1=\frac{l^2}{2}$$

и потому

$$M=-2\pi\rho \text{ д. ч. } \left[i\frac{l^2}{2}\frac{1}{2}|v_\infty^2|\,e^{-2\theta_\infty}\right],$$

или, обозначая $\theta_\infty=\beta$,

$$M=-2\pi\rho \text{ д. ч. } \left[i\frac{l^2}{4}|v_\infty^2|\,(\cos 2\beta-i\sin 2\beta)\right].$$

Отсюда находим

$$M=-\frac{\pi}{2}\rho l^2|v_\infty^2|\sin 2\beta. \tag{7.36}$$

Из изложенного следует, что установление конформного соответствия между исследуемым профилем крыла и кругом радиуса R позволяет *полностью* решить задачу об обтекании профиля плоским потоком несжимаемой жидкости.

Действительно, если конформное соответствие между точками круга и точками профиля известно, т. е. известна либо функция $\zeta=f(z)$, либо ее разложение в ряд Лорана, то распределение скорости v по профилю крыла определяется по формуле (7.28), которую можно переписать в виде

$$|v|=\frac{|V|}{\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|}.$$

Подъемная сила находится по формуле Жуковского $Y = \rho v_{\infty} \Gamma$, в которой величина Γ является известной величиной, ибо Γ для профиля и круга одна и та же (ее величина для круга определяется из условия безотрывного обтекания профиля).

Наконец, момент M определяется по формуле (7.36).

С. А. Чаплыгину принадлежит замечательное открытие, заключающееся в том, что если провести линии действия подъемной силы для разных углов атаки, то огибающая семейства линий подъемных сил будет параболой, названной им параболой устойчивости или параболой метацентров. Фокус этой параболы устойчивости обладает тем свойством, что момент подъемной силы относительно фокуса есть величина постоянная, не зависящая от угла атаки [14].

§ 9. ТЕОРИЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

В предыдущих параграфах была рассмотрена задача об обтекании профиля потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Решение задачи было сведено к установлению конформного отображения области, внешней профилю, на область, внешнюю кругу.

Классические работы Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина по теоретическим профилям, основанные на введении отображающих функций, дали возможность построить точное решение для ограниченного класса профилей.

Задача об обтекании профиля произвольной формы решается до конца, *если известно* конформное преобразование внешности этого профиля на внешность круга. Однако отыскание такого конформного преобразования в явном виде для профиля произвольной формы представляет большие трудности. Поэтому в настоящее время существуют приближенные методы решения задачи обтекания крыловых профилей произвольной формы.

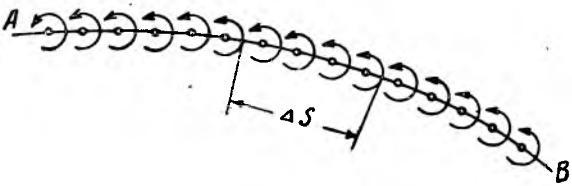
Обтекание профилей произвольной формы строится в основном или методом приближенного конформного отображения или методом, основанным на замене профиля крыла системой вихрей, непрерывно расположенных вдоль его средней линии.

Метод построения потенциального потока вокруг профиля крыла произвольной формы будет рассмотрен в следующем параграфе.

Метод, основанный на замене профиля системой вихрей, предполагает, что поперечные размеры профиля малы сравнительно с длиной хорды профиля, т. е. фактически рассматривается обтекание не собственно профиля, а его средней линии. Этот метод дает возможность определить при известных ограничениях суммарные аэродинамические характеристики тонкого профиля.

По теории тонкого профиля к настоящему времени опубликован ряд работ [18, 19]. Изложение и анализ этих работ выходит за рамки настоящей книги. Мы ограничимся в настоящем параграфе рассмотрением простейшей задачи теории тонкого профиля, основанной на замене профиля непрерывно распределенными по его средней линии вихрями и впервые рассмотренной английским профессором Глауэртом.

Прежде всего введем понятие о погонной циркуляции γ в данной точке произвольной кривой, вдоль которой непрерывно распределены вихри (фиг. 7.17). Выделим на этой кривой элемент Δs и обозначим через $\Delta\Gamma$ циркуляцию скорости от вихрей, расположенных на элементе Δs.

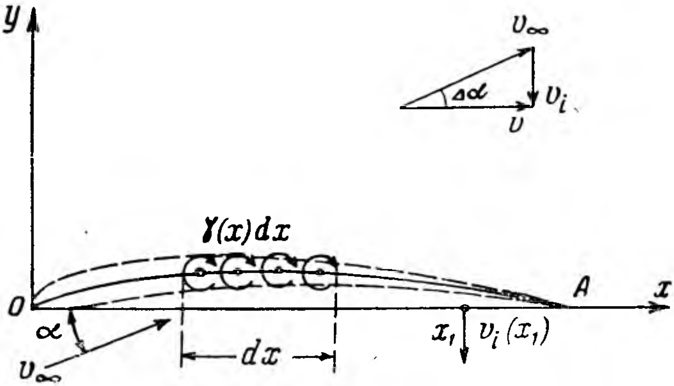


Фиг. 7.17. К определению погонной циркуляции.

Разделим величину $\Delta\Gamma$ на Δs. Отношение $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta s}$ представляет, очевидно, *среднюю* погонную циркуляцию на интервале Δs. Стягивая интервал Δs в точку и переходя к пределу, получим величину *погонной циркуляции в точке*

$$\gamma = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta s} = \frac{d\Gamma}{ds}.$$

Введя понятие погонной циркуляции $\gamma(x)$ в данной точке x, обратимся к рассмотрению теории тонкого профиля.



Фиг. 7.18. К теории тонкого профиля (вихревой метод).

Допустим, что плоский установившийся поток идеальной несжимаемой жидкости, движущийся на бесконечности с заданной скоростью v_∞, обтекает тонкий профиль (фиг. 7.18), длину хорды которого обозначим через $b\,(OA = b)$.

Поместим начало координат в передней кромке профиля, ось x направим вдоль хорды, ось y — перпендикулярно ей вверх.

Введем следующие упрощения:

1) Предполагая профиль достаточно *тонким*, будем считать, что он мало отличается от своей средней линии OA.

2) Предполагая профиль *слабоизогнутым*, будем считать, что его средняя линия OA незначительно отличается от прямой OA, являющейся хордой профиля.

3) Будем предполагать, что обтекание этого тонкого слабоизогнутого профиля происходит под *малым* углом атаки.

Заменим профиль непрерывно расположенными по его средней линии OA вихрями, напряжение которых на элементе dx обозначим через $\gamma(x)\,dx$.

Функцию $\gamma(x)$ следует подобрать из условия, чтобы поток обтекал профиль *без срыва*, т. е. чтобы его средняя линия являлась линией тока.

В такой постановке оказывается возможным установить связь между формой средней линии профиля и распределением скоростей на ней, а также определить величину циркуляции скорости $\Gamma = \int\limits_0^b \gamma(x)\,dx$, подъемной силы и момента. Имея в виду упрощение 2), будем считать, что вихри расположены вдоль хорды профиля, а не на его средней линии. Тогда скорость, индуцированная вихрями в некоторой точке x_1 хорды (см. фиг. 7. 18), определится следующим образом:

$$v_i(x_1) = \int\limits_0^b \frac{\gamma(x)\,dx}{2\pi(x-x_1)}. \tag{7.37}$$

Эту индуцированную скорость $v_i(x_1)$ на хорде профиля можно принять равной индуцированной скорости на поверхности профиля, имея в виду упрощения 1) и 2).

Наличие этой скорости изменит угол атаки α хорды профиля в точке x_1 на величину $\Delta\alpha = \frac{v_i}{v_\infty}$ (полагая v_i малым по сравнению с v_∞), и *местный* угол атаки будет равен (см. фиг. 7. 18)

$$\alpha + \frac{v_i}{v_\infty}.$$

Для того чтобы профиль обтекался безотрывно, необходимо, чтобы в каждой его точке местная скорость была направлена по касательной к поверхности профиля, т. е. должно иметь место равенство

$$\alpha + \frac{v_i}{v_\infty} = \frac{dy}{dx}, \tag{7.38}$$

где $y=y(x)$ — заданное уравнение средней линии профиля и, следовательно, $\frac{dy}{dx}$ — известная функция.

Используя выражение (7.37) для v_i, равенство (7.38) можно переписать в следующем виде:

$$\alpha+\frac{1}{2\pi v_\infty}\int\limits_0^b\frac{\gamma(x)\,dx}{x-x_1}=\frac{dy}{dx}. \tag{7.39}$$

Уравнение (7.39) представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\gamma(x)$.

Введем вместо x новую независимую переменную θ, определяемую равенством

$$x=\frac{b}{2}(1-\cos\theta).$$

Очевидно, когда x изменяется в пределах $0\leqslant x\leqslant b$, переменная θ изменяется в пределах $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

Будем искать $\gamma(\theta)$ в виде ряда Фурье:

$$\gamma(\theta)=2v_\infty\left\{A_0\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta\right\}, \tag{7.40}$$

коэффициенты которого A_0, A_1, A_2,... должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялось условие безотрывности обтекания (7.38) или (7.39).

Для этого прежде всего приведем эти формулы к переменному θ:

$$v_i(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^b\frac{\gamma(x)\,dx}{x-x_1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi\frac{\gamma(\theta)\sin\theta\,d\theta}{\cos\theta_1-\cos\theta}=v_i(\theta_1). \tag{7.37'}$$

Найдем теперь выражение $\gamma(\theta)\sin\theta$:

$$\gamma(\theta)\sin\theta=2v_\infty\left\{A_0\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta\right\}\sin\theta=$$

$$=2v_\infty\left\{A_0(1+\cos\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta\sin\theta\right\}=$$

$$=2v_\infty\left\{A_0(1+\cos\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta}{2}\right\}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (7. 37′), будем иметь

$$v_i(\theta_1)=\frac{v_\infty}{\pi}\int_0^\pi \frac{A_0\,d\theta}{\cos\theta_1-\cos\theta}+\frac{v_\infty}{\pi}\int_0^\pi \frac{A_0\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta_1-\cos\theta}+$$

$$+\frac{v_\infty}{2\pi}\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta}{\cos\theta_1-\cos\theta}\,d\theta. \qquad (7.41)$$

Так как (см. [3])

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos\theta_1-\cos\theta}=0,$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta_1-\cos\theta}=-\pi,$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta)}{\cos\theta_1-\cos\theta}\,d\theta=-\pi\frac{\sin n\theta_1}{\sin\theta_1},$$

то, подставляя значения этих интегралов в формулу (7. 41) и преобразовывая, получим

$$v_i(\theta_1)=v_\infty\left[-A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\theta_1\right]. \qquad (7.42)$$

Теперь условие безотрывности обтекания (7. 38) можно переписать в следующем виде:

$$\alpha-A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\theta=\frac{dy}{dx}. \qquad (7.43)$$

Коэффициенты A_n этого уравнения определяются методом, обычным для рядов Фурье. Умножая обе части уравнения (7. 43) поочередно на 1, $\cos\theta$, $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$,... и интегрируя в пределах от 0 до π, получаем

$$\left.\begin{aligned} A_0&=\alpha-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}\,d\theta,\\ A_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}\cos n\theta\,d\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (7.44)$$

где $y(x)$ выражено через θ с помощью подстановки $x=\frac{b}{2}(1-\cos\theta)$.

Подставляя полученные значения коэффициентов в выражение (7. 42) для v_i, получим значение индуцированной скорости в каждой точке средней линии профиля. Тем самым решена задача об отыскании течения около средней линии профиля, эквивалентной в данной постановке самому профилю.

Теперь легко найти подъемную силу и момент, действующие на профиль. По теореме Жуковского

$$dY = \rho\, \gamma(x)\, dx\, v_\infty = \rho v_\infty\, d\Gamma$$

и, следовательно,

$$Y = \rho v_\infty \int_0^b \gamma(x)\, dx = \rho\, v_\infty\, \Gamma.$$

Переходя к переменному θ, получаем

$$Y = \rho v_\infty^2 b \int_0^\pi \left[A_0 (1 + \cos\theta) + \sum_{n=1}^\infty A_n \sin n\theta \sin\theta \right] d\theta =$$

$$= \rho v_\infty^2 b\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right),$$

откуда для коэффициента подъемной силы c_y будем иметь следующее выражение:

$$c_y = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right). \qquad (7.45)$$

Аналогично вычисляется момент относительно передней кромки профиля:

$$M = -\rho v_\infty \int_0^b \gamma(x)\, x\, dx.$$

Переходя к переменной θ, будем иметь

$$\gamma(x)\, x\, dx = v_\infty \frac{b^2}{2} \left[A_0 (1 - \cos^2\theta) + (1 - \cos\theta) \sum_{n=1}^\infty A_n \sin n\theta \sin\theta \right] d\theta =$$

$$= \frac{v_\infty b^2}{2} \left[A_0 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \sum_{n=1}^\infty A_n \sin n\theta \left(\sin\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right] d\theta,$$

откуда

$$M = -\frac{\rho v_\infty^2 b^2}{2} \left[\int_0^\pi A_0 \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi \sum_1^\infty A_n \sin n\theta \left(\sin\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta \right] =$$

$$= -\rho \frac{v_\infty^2 b^2}{2} \left[A_0 \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} A_1 - \frac{\pi}{4} A_2 \right] = -\frac{\pi}{4} \rho v_\infty^2 b^2 \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right).$$

Отсюда получим выражение для коэффициента момента:

$$c_m = -\frac{\pi}{2}\left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2}\right). \tag{7.46}$$

Как видим, значение подъемной силы и момента определяются лишь первыми тремя коэффициентами разложения A_0, A_1 и A_2; остальные коэффициенты не влияют на суммарные аэродинамические характеристики (подъемную силу и момент), а влияют только на распределение местных скоростей по профилю.

Подставляя в выражения (7.45) и (7.46) коэффициенты A_n из уравнений (7.44), значения аэродинамических коэффициентов профиля можно написать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} c_y &= 2\pi(\alpha + \varepsilon_0), \\ c_m &= 2\left(\mu_0 - \frac{\pi}{4}\varepsilon_0\right) - \frac{1}{4}c_y, \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

где

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}(1 - \cos\theta)\,d\theta$$

и

$$\mu_0 = -\frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}(1 - \cos 2\theta)\,d\theta.$$

Угол $\alpha = -\varepsilon_0$ называется *углом атаки нулевой подъемной силы.*

Из формулы для c_y мы видим, что для всех тонких профилей коэффициент подъемной силы линейно зависит от угла атаки α, а производная

$$\frac{dc_y}{d\alpha} = 2\pi$$

не зависит от формы профиля.

Выражение для коэффициента момента может быть написано проще, а именно:

$$c_m = c_{m0} - \frac{1}{4}c_y, \tag{7.48}$$

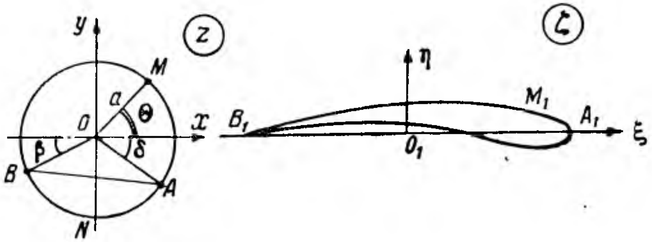
где c_{m0} — коэффициент момента при нулевой подъемной силе, т. е. $c_{m0} = 2\left(\mu_0 - \frac{\pi}{4}\varepsilon_0\right)$. Формулы (7.47) хорошо согласуются с опытными данными для профилей небольшой относительной кривизны и толщины.

Таким образом, определение аэродинамических коэффициентов для тонкого профиля сведено к вычислению двух простых интегралов: ε_0 и μ_0, что не представляет труда, так как форма профиля $y = y(x)$ известна.

В заключение настоящего параграфа следует отметить, что рассмотренная здесь теория тонкого профиля находит наибольшее применение лишь в задачах, требующих определения *суммарных* аэродинамических характеристик профиля, так как получаемое с ее помощью распределение местных скоростей (давлений) по профилю значительно отличается от действительного.

§ 10. ПОСТРОЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОТОКА ВОКРУГ ПРОФИЛЯ КРЫЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ (МЕТОД С. Г. НУЖИНА)

Наиболее распространенным методом построения потока вокруг профиля произвольной формы ранее являлся метод Теодорсена [20], заключавшийся в том, что подбиралось конформное преобразование, отображающее профиль в кривую, близкую к кругу, а кривая, близкая к кругу, преобразовывалась в круг.



Фиг. 7.19. К построению потенциального потока вокруг профиля крыла произвольной формы.

В появившейся в 1946 г. работе Я. М. Серебрийского [21] давался способ, который представлял собой усовершенствование метода Теодорсена. В 1947 г. были опубликованы работы С. Г. Нужина [22] и Л. А. Симонова [23], в которых были предложены оригинальные методы построения потока вокруг произвольного профиля путем прямого конформного отображения внешности круга на внешность профиля.

В настоящем параграфе рассмотрены основные черты метода проф. С. Г. Нужина.

Метод основан на отображении внешности круга радиуса a на внешность профиля с хордой $b=1$ при следующих условиях (фиг. 7.19):

$$\zeta(\infty)=\infty, \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{\infty}=1. \tag{a}$$

При этом преобразовании верхней поверхности профиля $B_1M_1A_1$ соответствует дуга BMA круга, а нижней поверхности — дуга BNA.

Передней и задней кромкам профиля будут соответствовать точки окружности $ae^{-i\delta}$ и $ae^{i(\pi+\beta)}$.

Преобразующую функцию $\zeta(z)$ С. Г. Нужин представляет в виде ряда

$$\zeta=c_0+z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n a^n}{z^n}, \tag{7.49}$$

где $c_n=\mu_n+i\nu_n$ — коэффициенты, подлежащие определению и зависящие от формы профиля. Ряд (7.49), очевидно, удовлетворяет условиям (а). На круге $z=ae^{i\theta}$ и ряд (7.49) принимает вид

$$\zeta=c_0+ae^{i\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-in\theta}. \tag{7.50}$$

Разделяя в (7.50) действительную и мнимую части, получим [1]

$$\left.\begin{aligned}\xi(\theta)&=\mu_0+a\cos\theta+\sum(\mu_n\cos n\theta+\nu_n\sin n\theta),\\ \eta(\theta)&=\nu_0+a\sin\theta+\sum(\nu_n\cos n\theta-\mu_n\sin n\theta).\end{aligned}\right\}\tag{7.51}$$

Уравнения (7.51) представляют уравнения профиля в параметрической форме, выраженные через параметр θ.

Разобьем координаты $\xi(\theta)$ и $\eta(\theta)$ на полусуммы и полуразности их значений на круге в точках θ и $2\pi-\theta$:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1(\theta)&=\frac{\xi(\theta)+\xi(2\pi-\theta)}{2}=\mu_0+2a\cos\theta-\sum B_n\cos n\theta,\\ \xi_2(\theta)&=\frac{\xi(\theta)-\xi(2\pi-\theta)}{2}=\sum A_n\sin n\theta,\\ \eta_1(\theta)&=\frac{\eta(\theta)+\eta(2\pi-\theta)}{2}=A_0+\sum A_n\cos n\theta,\\ \eta_2(\theta)&=\frac{\eta(\theta)-\eta(2\pi-\theta)}{2}=\sum B_n\sin n\theta,\end{aligned}\right\}\tag{7.52}$$

где положено

$$A_n=\nu_n,\quad B_n=-\mu_n,\quad B_1=a-\mu_1;\tag{7.53}$$

тогда

$$\left.\begin{aligned}\xi(\theta)&=\xi_1(\theta)+\xi_2(\theta)=\mu_0+2a\cos\theta-\sum B_n\cos n\theta+\sum A_n\sin n\theta,\\ \eta(\theta)&=\eta_1(\theta)+\eta_2(\theta)=A_0+\sum A_n\cos n\theta+\sum B_n\sin n\theta.\end{aligned}\right\}\tag{7.54}$$

Коэффициенты Фурье A_n и B_n определяются обычными формулами:

$$\left.\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \eta_1(\theta)\,d\theta,\quad A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \eta_1(\theta)\cos n\theta\,d\theta,\\ B_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \eta_2(\theta)\sin n\theta\,d\theta.\end{aligned}\right\}\tag{7.55}$$

С учетом выражений (7.53) преобразующая функция (7.49) примет вид

$$\zeta=\mu_0+iA_0+z+\frac{a^2}{z}+\sum\frac{(-B_n+iA_n)\,a^n}{z^n}.\tag{7.56}$$

Уравнения профиля при этом будут выражаться формулами (7.54).

Дальнейшее решение задачи по методу С. Г. Нужина производят следующим образом. Неизвестные коэффициенты A_n и B_n определяют методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимают систему чисел

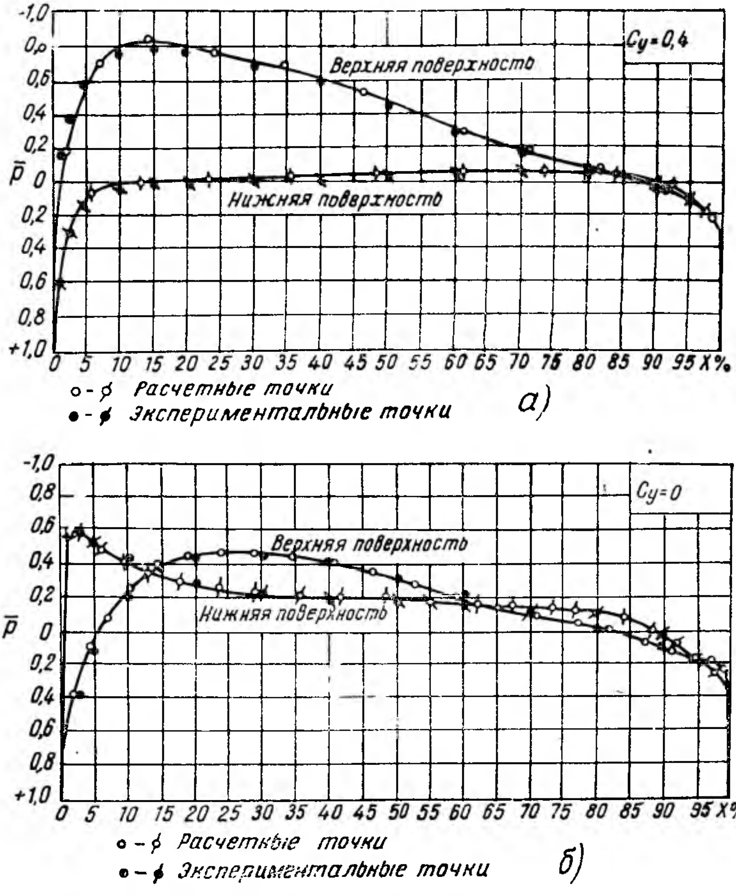
$$\xi^{(0)}=\frac{1}{2}\cos\theta,\quad \eta^{(0)}=0,\quad A_n^{(0)}=B_n^{(0)}=\mu_0^{(0)}=0,\quad a=\frac{1}{4},\tag{б}$$

что соответствует конформному отображению на круг плоской пластинки.

Далее, задаваясь последовательными значениями θ (от 0 до 2π) и определяя по (б) соответствующие значения $\xi^{(0)}$, находят по чертежу профиля крыла величины ординат $\eta^{(1)}(\theta)$, а также $\eta_1^{(1)}(\theta)$ и $\eta_2^{(1)}(\theta)$, проведенных через выбран-

[1] Суммирование всюду проводится по n от 1 до ∞.

ные абсциссы. Используя формулы (7.55), определяют в первом приближении новые значения коэффициентов $A_0^{(1)}$, $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$. Найденные значения коэффициентов позволяют найти по первым двум формулам (7.52) новые значения функций $\xi_1^{(1)}(\theta)$, $\xi_2^{(1)}(\theta)$, что приведет к уточнению значений ординат, а следовательно, и коэффициентов A_0, A_n, B_n и т. д. Сходимость этого процесса последовательных приближений строго доказана С. Г. Нужиным.



Фиг. 7.20. Сравнение результатов расчета по методу С. Г. Нужина с результатами эксперимента.

В последующей работе [24] С. Г. Нужин развивает свой метод и показывает, что путем специального выбора осей координат, связанных с кругом можно соответствие между точками окружности и точками профиля сделать более близким к закону $\xi = \frac{1}{2}\cos\theta$ и тем самым сократить число последовательных приближений при вычислении коэффициентов A_n, B_n.

Таким образом, метод Нужина позволяет путем последовательных приближений найти конформное соответствие между точками заданного профиля и точками окружности, т. е. найти функцию $\zeta=f(z)$ (в виде ряда). Если эта функция найдена, то дальнейший расчет распределения скоростей по профилю не представляет труда. Действительно, комплексная скорость

$$\frac{dw}{d\zeta}=\frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}},$$

и так как $\frac{dw}{dz}$ для круга известно, а $\frac{d\zeta}{dz}$ найдена, то отсюда легко получить формулы для скорости v на профиле [25]. Расчеты по методу Нужина дают хорошее совпадение с экспериментом. В качестве примера на фиг. 7.20 приведены эпюры распределения давления (коэффициента давления $\bar{p}$) по хорде профиля, полученные методом Нужина и экспериментально. Как видим, совпадение теории с экспериментом вполне удовлетворительное.

Глава VIII

ТЕОРИЯ СТРУЙНОГО И ВИХРЕВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

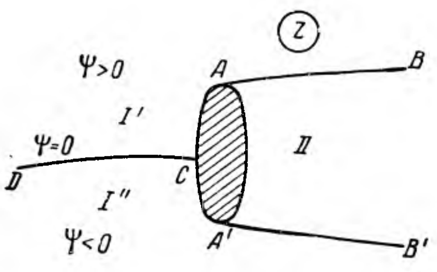
Как выше было установлено, в идеальной жидкости можно получить результирующую силу давления потока на тело (подъемную силу), если ввести циркуляцию скорости. Однако циркуляционная схема обтекания, при которой тело обтекалось плавно, без образования разрывов (являлось линией тока), не дает силы лобового сопротивления, столь характерной для реального обтекания потоком какого-либо тела.

Тем не менее, оставаясь в рамках идеальной жидкости, можно построить такую модель обтекания потоком тела, которая будет давать силу лобового сопротивления. При этом источником сопротивления будут являться разрывы, образующиеся в жидкости за обтекаемым телом, или образующаяся за ним система вихрей.

Рассмотрим основы теории обтекания тела с образованием разрывов — так называемую струйную модель обтекания.

§ 1. МОДЕЛЬ СТРУЙНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА. ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ С ОБРАЗОВАНИЕМ СТРУЙ

Модель струйного обтекания тела потоком идеальной жидкости основывается на предположении, что поток не непрерывно обтекает всю поверхность находящегося в нем тела, а срывается с некоторой его части так, что за телом образуется так называемая застойная область (фиг. 8. 1), где скорость относительно тела $v=0$ и, следовательно, давление постоянно и равно давлению на бесконечности p_∞. При этом область, занятая жидкостью, разделяется на две части: область течения I и застойную область II. Сорвавшийся с тела поток предполагается уходящим в бесконечность в виде струи, граница которой AB или $A'B'$ является границей застойной области.



Фиг. 8. 1. Схема струйного обтекания.

Так как в застойной области II давление постоянно, то оно должно быть постоянно и на границе струи, а отсюда следует, что и *величина* скорости на границе струи также постоянна и равна, очевидно, v_∞.

Как видим, при струйной модели обтекания поле скоростей (но не поле давлений) терпит разрыв на границе струи (на границе AB $v=v_\infty$, а в области II $v=0$). Наличие такого разрыва приводит к образованию силы лобового сопротивления. В самом деле, на лобовой поверхности тела давление в ряде точек больше давления p_∞ (например, в окрестности критической точки), а в кормовой части тела давление равно p_∞, в результате чего и образуется сила лобового сопротивления. Указанные соображения подтверждаются и результатами теоретических расчетов.

Рассмотрим некоторые особенности струйного обтекания, предполагая течение плоским.

В области течения I поле скоростей является непрерывным и потенциальным, поэтому его можно характеризовать, вообще говоря, комплексным потенциалом

$$w=\varphi+i\psi.$$

Так как комплексный потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной $a=a_1+ia_2$, то постоянные a_1 и a_2 можно считать выбранными так, что потенциал скорости φ обращается в нуль в точке разветвления C потока и что вдоль линии $DCAB$ или $DCA'B'$ $\psi=0$. Вдоль линии тока $\psi=0$ поток не имеет, кроме точки C, других критических точек, причем при следовании вдоль линии DC скорость v изменяется от $v=v_\infty$ до $v=0$, а при следовании вдоль линии CAB или $CA'B'$ изменяется от $v=0$ до $v=v_\infty$. Поэтому на линии тока $\psi=0$, где выполняется соотношение

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

(s — длина дуги линии $\psi=0$), потенциал φ должен изменяться монотонно и притом от $-\infty$ до 0 (вдоль DC) и от 0 до $+\infty$ (вдоль CAB или $CA'B'$)[1].

Рассмотрим изменение функции тока ψ при следовании вдоль линии $\varphi=\mathrm{const}$. Очевидно,

$$d\psi=-v_y\,dx+v_x\,dy=v\,(-\sin\theta\,dx+\cos\theta\,dy)=$$
$$=v\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)dx+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)dy\right]=v\,d\sigma,$$

где θ — угол, образуемый вектором скорости с осью x;

$d\sigma$ — элемент эквипотенциальной линии, причем за положительное направление $d\sigma$ принимается направление, получаемое при положительном повороте (против часовой стрелки) вектора v на угол $\frac{\pi}{2}$.

[1] Это следует из того, что идя вдоль линии тока $\psi=0$ в положительном направлении (слева направо), имеем $v>0$ и $ds>0$ и, следовательно, $d\varphi=v\,ds>0$, т. е. потенциал φ монотонно возрастает.

Отсюда следует, что при движении, например, вдоль линии $\varphi=0$ (проходящей через точку C) в положительном направлении (снизу вверх) функция тока должна изменяться монотонно от $-\infty$ до $+\infty$, проходя через 0 в точке C, т. е. линия тока $\psi=0$ разделяет область течения I на две области: I', внутри которой $\psi>0$, и I'', где $\psi<0$.

Указанный характер изменения функций φ и ψ приводит к следующему важному выводу. При струйном обтекании комплексный потенциал w является вполне определенной функцией координат точек плоскости течения, т. е. каждой точке плоскости течения $z=x+iy$ соответствует определенная точка плоскости $w=\varphi+i\psi$. Ниже будет показано, что если плоскость комплексного потенциала w разрезать вдоль действительной оси, то связь между областями z и w будет взаимно однозначной.

Для того чтобы установить аналитическую связь между плоскостями z и w, введем переменное ζ:

$$\zeta=\xi+i\eta=v_\infty\frac{dz}{dw}. \tag{8.1}$$

Так как

$$\frac{dw}{dz}=ve^{-i\theta},$$

то

$$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{v}e^{+i\theta}$$

и

$$\zeta=\xi+i\eta=\frac{v_\infty}{v}e^{i\theta}, \tag{8.2}$$

где θ — угол, образуемый вектором скорости с осью x;
v — величина скорости.

В ряде случаев легко установить связь между плоскостями ζ и w, т. е. найти функцию

$$\zeta=f(w). \tag{8.3}$$

Если эта связь найдена, т. е. функция $\zeta=f(w)$ определена, то задача определения обтекания в плоскости z сводится к квадратурам. В самом деле, если

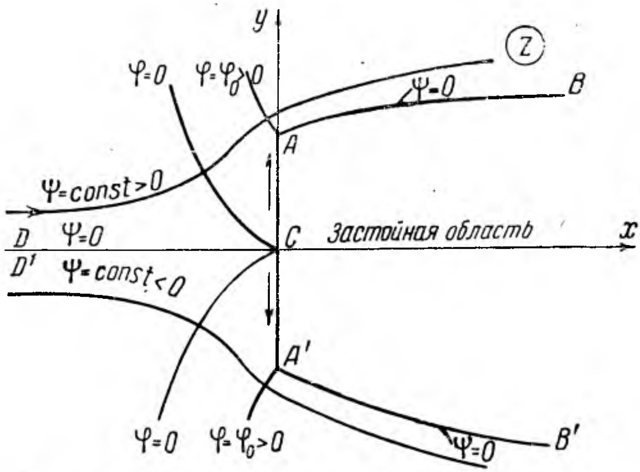
$$v_\infty\frac{dz}{dw}=f(w)$$

— известная функция, то

$$z=\frac{1}{v_\infty}\int f(w)\,dw.$$

Таким образом, основная задача заключается в установлении зависимости (8.3), т. е. в построении областей w и ζ и определении связи между ними. Такой метод решения струйных задач был предложен Кирхгофом в 1896 г.

В частном случае, когда контур обтекаемого в плоскости z тела составлен из прямолинейных отрезков, границами жидкости будут твердые прямолинейные стенки, свободные границы жидкости и поверхности разрыва, вдоль которых скорость по величине постоянна. Исходя из этого, легко построить область ζ. Ее границами, очевидно, будут дуги окружностей, соответствующие свободным границам и поверхностям разрыва, где $v=\text{const}$, а также прямолинейные отрезки, соответствующие твердым (прямолинейным) стенкам, где $\theta=\text{const}$ [см. формулу (8. 2)].



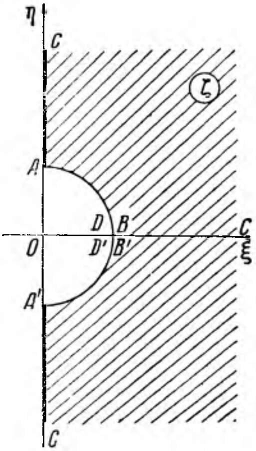
Фиг. 8. 2. Схема струйного обтекания плоской пластинки.

В качестве простейшего примера использования указанного метода рассмотрим задачу об обтекании плоским неограниченным потоком несжимаемой жидкости пластинки AA' шириной h (фиг. 8. 2), установленной нормально к потоку. При струйной модели обтекания линия тока $\psi=0$ разветвляется в критической точке C, идет вдоль сторон пластинки CA и CA' и в точках A и A' срывается с пластинки, образуя так называемые поверхности разрыва или струи AB и $A'B'$. Остальные линии тока располагаются, как показано на фиг. 8. 2. Эквипотенциальные линии расположатся, очевидно, нормально к линиям тока. Ту эквипотенциальную линию, которая проходит через точку C, будем считать нулевой, т. е. считать, что на ней $\varphi=0$, а на линиях $\varphi=\text{const}$, проходящих через точки A и A', положим $\varphi=\varphi_0$, где $\varphi_0>0$.

Установив характер течения в области z, перейдем к построению области $\zeta=\xi+i\eta=\dfrac{v_\infty}{v}e^{i\theta}$. Так как в плоскости z скорость нигде не обращается в бесконечность, то, следовательно, $\zeta\neq 0$. Это значит, что область ζ не содержит начала координат. В точках $D\,(D')$, B и B' (см. фиг. 8. 2) $v=v_\infty$, $\theta=0$ и, следовательно, $|\zeta|=1$, $\arg\zeta=0$ (фиг. 8. 3). В точке A (граница струи) $v=v_\infty$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому для этой точки $|\zeta|=1$, $\arg\zeta=\dfrac{\pi}{2}$. В точке A' скорость $v=v_\infty$, угол $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$, в результате чего $|\zeta|=1$, $\arg\zeta=-\dfrac{\pi}{2}$.

В точке C скорость $v=0$, вследствие чего изображение точки C в области ζ уходит в бесконечность. Таким образом, области потока в плоскости ζ будет соответствовать правая полуплоскость за вычетом полукруга (см. фиг. 8.3)[1].

Не устанавливая пока еще области w, отобразим полученную область ζ на верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного t. Для этого используем два последовательных преобразования



Фиг. 8.3. Область ζ и ее границы.

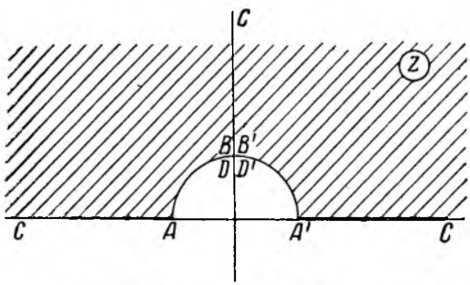
$$Z=i\zeta \quad \text{и} \quad t=\frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right).$$

Первое из них просто повернет область ζ на 90° в положительном направлении (фиг. 8.4), а второе отобразит область Z на верхнюю полуплоскость t (фиг. 8.5). Соответствие точек между плоскостями Z и t легко установить, так как на единичном круге ABA' $Z=e^{i\vartheta}$ и, следовательно, $t=\cos\vartheta$. При этом бесконечно удаленные точки плоскостей Z и t, очевидно, переходят одна в другую. Итак, преобразование

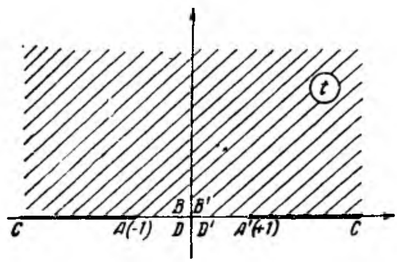
$$t=\frac{1}{2}\left(i\zeta+\frac{1}{i\zeta}\right)=\frac{i}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right) \tag{8.4}$$

отображает область ζ на верхнюю полуплоскость t при соответствии точек, указанном на фиг. 8.3 и 8.5.

Построим область w. В точке C области z (см. фиг. 8.2) $\varphi=\psi=0$, следовательно, точка C в плоскости w будет находиться в начале координат (фиг. 8.6). Точки A и A', для которых $\varphi=\varphi_0>0$ и $\psi=0$, перейдут в точки на оси φ с одинаковой абсциссой $\varphi=\varphi_0>0$. Полагая плоскость w разрезанной вдоль положительной части оси φ, заключаем, что точка A лежит на верхней стороне разреза, а точка A' — на нижней, так как, совершая обход вдоль пластинки от точки A' через точку C к точке A, имеем область течения слева. Точки $B(B')$ перейдут, очевидно, в бесконечно удаленную точку оси φ. Следовательно, область w будет



Фиг. 8.4. Область Z и ее границы.



Фиг. 8.5. Область t и ее границы.

представлять собой плоскость с разрезом вдоль положительной части оси φ, и, как уже указывалось выше, соответствие между областями z и w будет *взаимно однозначным*.

Отобразим область w на полуплоскость. Для этого используем преобразование

$$\tau=\sqrt{w},$$

[1] На фиг. 8.3 и в дальнейшем область течения соответствует заштрихованной части; жирными линиями обозначены твердые границы, тонкими — свободные поверхности.

которое развернет, очевидно, разрез в области w в прямую линию. Действительно, так как точка A лежит на верхней стороне разреза, то аргумент ее равен нулю и она перейдет в плоскости τ в точку $+\sqrt{\varphi_0}$. Аргумент точки A' равен 2π, поэтому в плоскости τ ей будет соответствовать точка $-\sqrt{\varphi_0}$. Следовательно, преобразование $\tau=\sqrt{w}$ отображает область w на верхнюю полуплоскость τ с соответствием точек, указанным на фиг. 8.7.

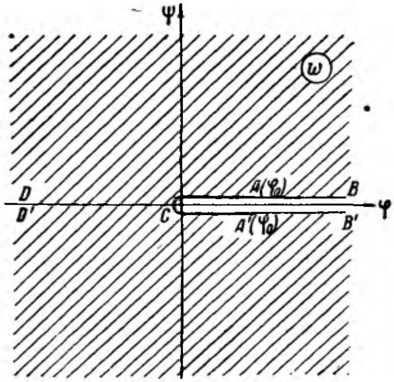
Для установления связи между переменными t и τ нужно отобразить полуплоскость t на полуплоскость τ так, чтобы соответствующие точки перешли друг в друга. Нетрудно убедиться, что преобразование

$$\tau=-\frac{\sqrt{\varphi_0}}{t} \tag{8.5}$$

осуществляет необходимое отображение. Действительно, при $t=\pm 1$ имеем $\tau=\mp\sqrt{\varphi_0}$, т. е. точки A' переходят друг в друга, так же как и точки A. Бесконечно удаленной точке плоскости t соответствует в плоскости τ нулевая точка, и, наоборот, нулевой точке в плоскости t соответствует в плоскости τ бесконечно удаленная точка.

Итак, преобразование, позволяющее перейти от области w к верхней полуплоскости t, имеет вид

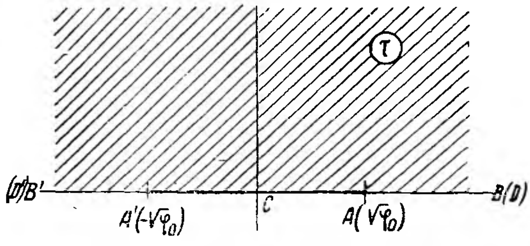
$$w=\frac{\varphi_0}{t^2}. \tag{8.6}$$



Фиг. 8.6. Область w и ее границы.

Исключая из формул (8.4) и (8.6) вспомогательное переменное t, получим искомую связь между w и ζ

$$-\frac{w}{4}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)^2=\varphi_0. \tag{8.7}$$



Фиг. 8.7. Область τ и ее границы.

Остается определить значение потенциала скорости φ_0 в точках A и A', выразив его через ширину пластинки h.

Вдоль CA

$$\zeta=i\frac{v_\infty}{v}, \quad w=\varphi, \quad z=iy.$$

Следовательно, вдоль CA

$$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{v_\infty}\zeta=\frac{i}{v}$$

и

$$\frac{dz}{dw}=\frac{i\,dy}{d\varphi},$$

откуда получаем

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{1}{v}.$$

Из (8.6) находим, что вдоль CA, где $w=\varphi$,

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{2\varphi_0}{t^3}.$$

Выразим скорость v на пластинке через переменное t:

$$t=\frac{i}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{v_\infty}{v}+\frac{v}{v_\infty}\right),$$

откуда

$$v^2+2tvv_\infty+v_\infty^2=0$$

и

$$v=-tv_\infty\pm\sqrt{t^2v_\infty^2-v_\infty^2}.$$

Перед корнем надо брать знак минус, если хотим, чтобы при $t=-\infty$ скорость v обращалась в нуль. Итак,

$$v=-v_\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right),$$

откуда

$$\frac{1}{v}=-\frac{1}{v_\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)}.$$

Искомая зависимость между φ_0 и h определится следующим интегралом:

$$h=2\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dy}{dt}\,dt=2\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\,dt=-2\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{1}{v}\frac{2\varphi_0}{t^3}\,dt=$$

$$=\frac{4\varphi_0}{v_\infty}\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dt}{t^3\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)}=\frac{4\varphi_0}{v_\infty}\left(1+\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом,

$$h=\frac{\varphi_0}{v_\infty}(4+\pi)$$

или

$$\varphi_0=\frac{hv_\infty}{4+\pi}. \tag{8.8}$$

Остается определить результирующую силу воздействия потока на пластинку (силу лобового сопротивления пластинки). Воспользовавшись известной формулой

$$p-p_0=\frac{\rho}{2}\left(v_\infty^2-v^2\right),$$

где $p_0 = p_\infty$ — давление в застойной области *II*, находим

$$X = 2 \int_0^{+\frac{h}{2}} (p - p_0)\, dy = 2 \int_{-\infty}^{-1} (p - p_0) \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}\, dt$$

или

$$X = 2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2} \rho (v_\infty^2 - v^2) \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}\, dt = -\int_{-\infty}^{-1} \rho (v_\infty^2 - v^2) \frac{1}{v} \frac{2\varphi_0}{t^3}\, dt.$$

Так как

$$\frac{1}{v} = \frac{-1}{v_\infty (t + \sqrt{t^2 - 1})},$$

то

$$\frac{v_\infty^2}{v} - v = 2v_\infty \sqrt{t^2 - 1}$$

и

$$X = -4\rho\varphi_0 v_\infty \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^3}\, dt = \pi\rho\varphi_0 v_\infty.$$

Подставляя значение φ_0, находим искомую результирующую силу давления

$$X = \frac{\pi}{\pi + 4} \rho h v_\infty^2. \tag{8.9}$$

Если пластинка обтекается потоком под углом α, то, как нетрудно показать, формула для результирующей силы давления примет вид

$$X = \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \rho h v_\infty^2. \tag{8.10}$$

Из формулы (8.9) следует, что коэффициент лобового сопротивления плоской пластинки

$$c_x = \frac{2\pi}{4 + \pi} = 0{,}88.$$

Величина этого теоретического коэффициента сопротивления плоской пластинки приблизительно в два раза меньше его экспериментального значения. Это объясняется тем, что рассмотренная струйная модель обтекания не учитывает вихревых явлений за пластинкой (в застойной области), уменьшающих давление на заднюю часть пластинки и, следовательно, приводящих к увеличению ее лобового сопротивления.

Н. Е. Жуковскому принадлежит иной метод решения струйных задач, предложенный им в 1890 г. [26] и сыгравший большую роль как в развитии методов решения струйных задач, так и в решении проблем газовой динамики.

Основная идея метода Жуковского состоит в следующем. Рассматривается функция

$$\zeta = \ln \left(\frac{\bar{v}_\infty}{\frac{d\bar{w}}{dz}} \right) = \ln \frac{\bar{v}_\infty}{\bar{v}} \tag{8.11}$$

и устанавливается конформное отображение разрезанной плоскости комплексного потенциала w на ту часть плоскости ζ, которая соответствует области течения в плоскости z, т. е. устанавливается аналитическая связь $\zeta=f(w)$. Если эта связь найдена, то, так же как и в методе Кирхгофа, задача приводится к квадратурам.

В случае когда обтекаемый в плоскости $z=x+iy$ контур составлен из прямолинейных отрезков, области течения I в плоскости z будет соответствовать в плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ область, ограниченная прямыми $\xi=\text{const}$ и $\eta=\text{const}$. Действительно, так как

$$\bar{v}=ve^{-i\theta} \text{ и } \bar{v}_\infty=v_\infty e^{-i\theta_\infty},$$

то

$$\zeta=\xi+i\eta=\ln\frac{v_\infty e^{-i\theta_\infty}}{ve^{-i\theta}}=\ln\frac{v_\infty}{v}+i(\theta-\theta_\infty). \tag{8.12}$$

Отсюда видно, что твердой прямолинейной границе обтекаемого тела $\theta=\text{const}$ соответствует в плоскости ζ прямая $\xi=\ln\frac{v_\infty}{v}$, $\eta=\text{const}$, а границе свободной струи, где $v=v_\infty$,— прямая $\xi=\ln 1=0$, $\eta=\theta-\theta_\infty$.

При этом конформное отображение разрезанной области w на плоскость ζ может быть осуществлено при помощи известной формулы Кристоффеля—Шварца [14].

Не входя в детали метода Жуковского, укажем, что с его помощью удалось решить большое число задач: удар потока о клин, соударение двух струй, удар потока о ломаную пластинку, истечение жидкости из сосуда конечной ширины и много других.

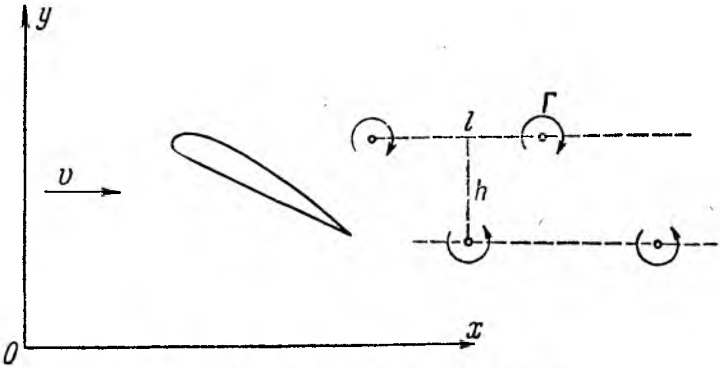
Исследованию обтекания криволинейных тел посвящены работы зарубежных ученых Леви-Чивита и Вилля [2]. Однако их метод ввиду исключительной сложности оказался мало применимым к решению практических задач.

Большим шагом вперед в развитии струйной теории явилась работа акад. А. И. Некрасова «О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга» (1922 г.) [27]. В этой работе А. И. Некрасов дал новый метод решения задачи об обтекании криволинейных контуров путем применения теории нелинейных интегральных уравнений. Идеи А. И. Некрасова были в дальнейшем развиты учеными советской аэродинамической школы как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости [28].

В 1910 г. С. А. Чаплыгин написал работу «О силах, действующих на цилиндр, обтекаемый потоком с образованием поверхностей разрыва», напечатанную в 1935 г. в трудах ЦАГИ. В этой работе автор, исследуя поток, обтекающий цилиндр со срывом струй, показывает, что очертания струй на достаточно большом расстоянии от тела уподобляются параболе и лобовое сопротивление пропорционально параметру этой параболы. Если параметр параболы равен нулю, т. е. если струя на бесконечности имеет конечную ширину, то и сопротивление равно нулю. В этой работе С. А. Чаплыгин решил также задачу об обтекании круглого цилиндра с отрывом струй. Эта задача 22 года спустя (в 1932 г.) была решена немецким аэродинамиком Шмиденом.

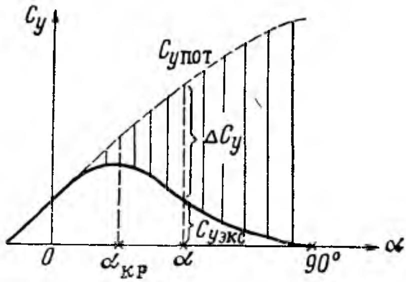
§ 2. ПОНЯТИЕ О ВИХРЕВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

Схема струйного обтекания, рассмотренная выше, во многих случаях является приближенной моделью истинной картины течения. Как показывает опыт, поток, срывающийся с тела, не образует за ним сплошной струи, а ввиду неустойчивости последней свертывается в вихри. При этом отрыв потока и образование вихрей носит периодический характер — вихри срываются попеременно то с верхней, то с нижней части поверхности обтекаемого тела (фиг. 8.8), образуя за ним вихревую дорожку с шахматным расположением вихрей. Образование вихрей порождает новый вид сопротивления, носящий название *вихревого сопротивления.* Таким образом, опыт подводит нас к другой схеме обтекания, учитывающей образование вихрей за телом.



Фиг. 8.8. Вихревая схема обтекания.

Как показали исследования, плохо обтекаемые тела, например, круглый и эллиптический цилиндры, нормально расположенная к потоку пластинка и др., порождают интенсивные вихревые дорожки и, следовательно, значительную величину вихревого лобового сопротивления. Удобообтекаемые тела, к числу которых принадлежат авиационные профили, при малых углах атаки обладают незначительным вихревым сопротивлением, которым можно пренебречь,— в этом случае их лобовое сопротивление порождается в основном силами трения. Однако при увеличении угла атаки, когда плавное обтекание профиля крыла сменяется обтеканием с отрывом струй и интенсивным вихреобразованием, силу лобового сопротивления следует рассчитывать с учетом вихревого сопротивления.



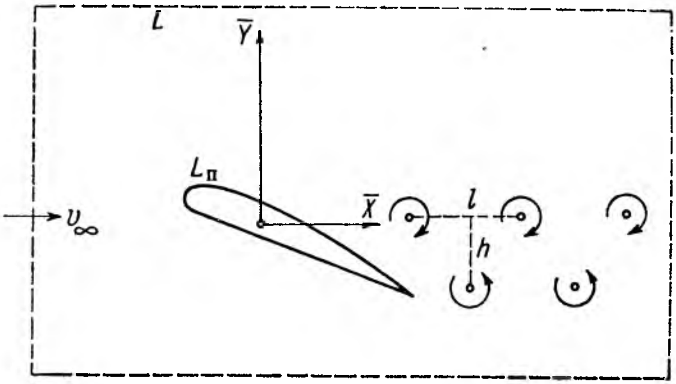
Фиг. 8.9. Сравнение зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки для потенциального потока ($c_{y\ пот}$) и непотенциального, реального потока ($c_{y\ экс}$).

Угол атаки, при котором совершается переход от плавного обтекания профиля к обтеканию отрывному, называется *критическим* углом атаки и обозначается $\alpha_{кр}$. Для большинства практически применяемых авиационных профилей $\alpha_{кр}=10—15°$.

Аналитическое исследование течения жидкости осложняется, когда профиль находится в области углов атаки, превышающих $\alpha_{кр}$, т. е. в закритической области. В закритической области поток, обтекающий профиль, уже нельзя считать потенциальным, так как пространство за профилем заполняется интенсивными вихрями [1].

Опыт показывает большие расхождения между экспериментальными значениями коэффициента подъемной силы профиля и значениями, полученными теоретически, в предположении, что и в закритической области поток вокруг профиля потенциальный (фиг. 8.9).

Как видим, при переходе в закритическую область следует воспользоваться вихревой моделью обтекания не только для получения



Фиг. 8.10. К расчету подъемной силы $\bar{Y}$ и силы лобового сопротивления $\bar{X}$ при вихревой схеме обтекания.

силы лобового сопротивления, но и для определения подъемной силы. Следовательно, вихревая модель обтекания в данном случае будет вообще более правильно отображать действительность.

Рассмотрим кратко основные положения теории профиля крыла в закритической области, разработанные проф. Г. В. Каменковым [29]. Сделаем следующие предположения:

1. Жидкость всюду идеальная, за исключением очень тонкого пограничного слоя, прилегающего к поверхности профиля.

2. С поверхности профиля периодически срываются вихри, центры которых располагаются в два параллельных ряда в шахматном порядке.

3. Течение всюду обладает потенциалом скорости, за исключением центров сходящих вихрей.

4. Циркуляция скорости по профилю отлична от нуля.

Течение жидкости около профиля, соответствующее этим предположениям, представлено на фиг. 8.10.

Пренебрегая размерами пограничного слоя, поставленную задачу решаем методами, принятыми в теории идеальной жидкости.

Вследствие периодического схода вихрей с поверхности профиля течение жидкости является неустановившимся, т. е. все основные элементы течения явно зависят от времени t.

---

[1] Строго говоря, при малых углах атаки (докритическая область) течение жидкости за профилем тоже не является потенциальным, но этим обычно пренебрегают.

Учитывая это, введем следующие осредненные значения для подъемной силы Y, лобового сопротивления X и циркуляции Γ:

$$\overline{Y}=\frac{1}{T}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} Y(t)\,dt,$$

$$\overline{X}=\frac{1}{T}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X(t)\,dt,$$

$$\overline{\Gamma}=\frac{1}{T}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \Gamma(t)\,dt,$$

где T — период времени, за который образуется одна пара вихрей.

Применяя к рассматриваемому течению теорему о количестве движения, для определения подъемной силы и силы лобового сопротивления можно написать следующие два уравнения:

$$X-\int\limits_L p\,dy=\frac{d}{dt}\iint \rho v_x\,ds,$$

$$Y+\int\limits_L p\,dx=\frac{d}{dt}\iint \rho v_y\,ds.$$

В левых частях этих уравнений интегралы следует вычислять по контуру L, точки которого достаточно удалены от поверхности профиля; в правых частях — по площади, ограниченной контуром L и профилем $L_п$ (см. фиг. 8.10).

С помощью этих двух основных уравнений можно получить формулы, определяющие подъемную силу и силу лобового сопротивления в следующем виде [29]:

$$\overline{Y}=\rho v_\infty\,|\overline{\Gamma}|\,;$$

$$\overline{X}=\rho\,|\Delta\Gamma|\,\frac{h}{l}\,(2u-v_\infty)-\rho\,\frac{(\Delta\Gamma)^2}{2\pi l}\,, \qquad (8.13)$$

где u — скорость перемещения вихревой дорожки [см. формулу (6.34)];

$\Delta\Gamma$ — циркуляция скорости по контуру, охватывающему один вихрь.

Как видим, расчет силы воздействия потока на профиль крыла в закритической области сводится к определению величин $\overline{\Gamma}$, $\Delta\Gamma$, h и l.

Г. В. Каменков предложил в основу определения параметров вихревой дорожки $\Delta\Gamma$, h и l положить принцип наименьшего сопротивления для установившегося движения твердого тела в жидкости. Установив связь этого принципа с вопросом об устойчивости дорожки и исходя из теоремы о количестве движения, Г. В. Каменков получил уравнение для определения параметров дорожки, дающей наименьшее сопротивление. Характеризующие дорожку величины $\Delta\Gamma$, h и l оказались связанными двумя равенствами: одно из них определяет отношение $\frac{h}{l}$:

$$Th\pi\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma}, \tag{8.14}$$

где $\sigma = \frac{h}{l} = 0,245$,[1] а другое — величину циркуляции

$$\Delta\Gamma = cvl, \tag{8.15}$$

где $c = \frac{4\pi\sigma}{1+4\pi^2\sigma^2} = 0,91$.

В результате формулы для подъемной силы $\overline{Y}$ и силы лобового сопротивления $\overline{X}_k$ (будем ее теперь обозначать через $\overline{X}_k$ в отличие от других составляющих) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \overline{Y} &= \rho v_\infty |\overline{\Gamma}|; \\ \overline{X}_k &= \sigma\rho v_\infty |\Delta\Gamma|. \end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

Первая из этих формул обобщает теорему Жуковского для *закритической области*.

Вторая формула показывает, что сила лобового сопротивления $\overline{X}_k$ *пропорциональна плотности, скорости на бесконечности и циркуляции скорости по контуру, охватывающему одиночный вихрь цепочки.* При этом коэффициент пропорциональности σ является универсальным и равным 0,245. Таким образом, определение величин $\overline{Y}$ и $\overline{X}_k$ сводится только к подсчету циркуляции $\overline{\Gamma}$ и величины $\Delta\Gamma$.

Введем следующее предположение, названное Г. В. Каменковым «гипотезой потерянной циркуляции»: *циркуляция скорости, потерянная крылом за период времени T, равна циркуляции одиночного вихря цепочки*[2], т. е.

$$\Delta\Gamma = \Gamma - \overline{\Gamma},$$

где Γ — циркуляция скорости, подсчитанная в предположении о безотрывном потенциальном обтекании.

Используя уравнение (8.16) и вводя коэффициент c_y для подъемной силы $\overline{Y}$ и коэффициент c_k для силы лобового сопротивления $\overline{X}_k$, получим

$$c_k = \sigma\Delta c_y. \tag{8.17}$$

Это соотношение хорошо подтверждается экспериментом.

На основании изложенного можно написать два следующих уравнения (фиг. 8.11):

$$\left.\begin{aligned} \Delta c_y &= c_{y\,\text{пот}} - c_y; \\ c_k &= c_x - c_{x\,\text{тр}}; \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

при этом коэффициент трения $c_{x\,\text{тр}}$ предполагается постоянным на всем диапазоне углов атаки и равным минимальному значению c_x, т. е. $c_{x\,\text{тр}} = c_{x\min}$.

---

[1] Следует заметить, что согласно теории Т. Кармана отношение $\frac{h}{l}$ принималось равным 0,2806. Г. В. Каменков в 1933 г. [30] показал ошибочность теории устойчивости вихревой дорожки Т. Кармана и предложил новый критерий устойчивости вихрей, исходя из принципа экстремального сопротивления.

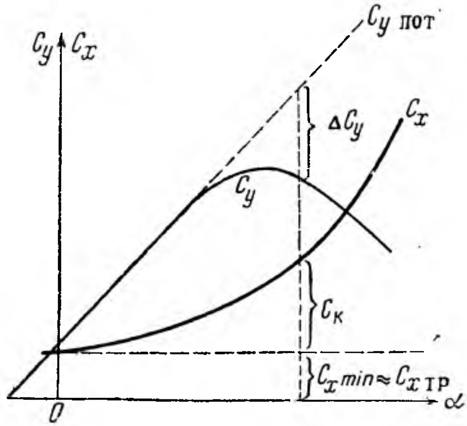
[2] Указанное соотношение не является следствием уравнений движения, а подтверждается экспериментальной проверкой.

Уравнения (8.17) и (8.18) можно использовать для построения кривой $c_y(\alpha)$, если известно изменение c_x по α. Действительно, из этих уравнений получаем

$$c_y = c_{y\,\text{пот}} - \frac{c_k}{\sigma}, \tag{8.19}$$

где коэффициент c_k следует брать как разность $c_x - c_{x\,\min}$.

Кривая, построенная по уравнению (8.19), хорошо согласуется с экспериментальными кривыми зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки в закритической области и, таким образом, подтверждает правильность сделанных выше предположений, лежащих в основе этой теории.



Фиг. 8.11. К расчету обтекания профиля крыла в закритической области по методу Каменкова.

В заключение покажем, что на основании формул, предложенных проф. Г. В. Каменковым, можно весьма просто подсчитать силу лобового сопротивления плоской пластинки.

Решение этой задачи, предложенное Кирхгофом, на основе струйной теории, как было показано, приводит к значению силы лобового сопротивления, почти в два раза меньшему экспериментального. Согласно этому решению коэффициент лобового сопротивления равен

$$c_x = \frac{2\pi}{4+\pi} = 0,88.$$

Обратимся к выражению $\Delta\Gamma$

$$\Delta\Gamma = \Gamma - \overline{\Gamma} = 4\pi R v_\infty \sin(\alpha+\gamma) - \overline{\Gamma}.$$

Для пластинки ($\gamma = 0$; $R = l$), находящейся под углом атаки $\alpha = 90°$ к направлению невозмущенного потока, среднее значение подъемной силы равно нулю, следовательно, $\overline{\Gamma} = 0$ и $\Delta\Gamma = 4\pi l v_\infty$.

Подставляя это значение $\Delta\Gamma$ в выражение для X_k, найдем численное значение силы лобового сопротивления:

$$X_k = 4\pi v_\infty^2 l \rho \sigma.$$

Коэффициент лобового сопротивления пластинки определится формулой

$$c_k = 2\pi\sigma = 1,54,$$

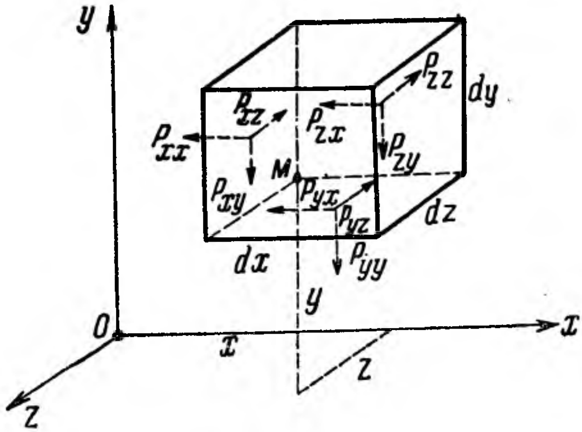
т. е. результат — более близкий к полученному экспериментальным путем.

Глава IX

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Изучение движения вязкой жидкости показывает, что влияние вязкости сказывается не только в появлении касательных напряжений, но и в изменении величин нормальных напряжений по сравнению с их значениями для идеальной жидкости. Это значительно



Фиг. 9.1. К выводу дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости.

усложняет вид дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости по сравнению с уравнениями Эйлера и, естественно, создает крайние трудности при их интегрировании.

Обратимся, так же как и в методе Эйлера, к рассмотрению элементарной жидкой частицы в форме бесконечно малого параллелепипеда (фиг. 9.1).

Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости могут быть получены подобно уравнениям Эйлера. Различие будет лишь в том, что в случае вязкой жидкости на грани параллелепипеда будут действовать не только нормальные напряжения p_x, p_y, p_z, но и касательные, так как поверхностные силы в вязкой жидкости не ортогональны к рассматриваемой поверхности. Это означает, что направление поверхностной силы, действующей на каждую грань параллелепипеда, не совпадает с нормалью к грани, и, следовательно, каждая такая сила (напряжение) будет иметь три проекции на координатные оси (см. фиг. 9.1).

Введем следующие обозначения. Каждой проекции вектора напряжения p, действующего на рассматриваемую грань, припишем два значка (индекса): первый будет характеризовать координатную ось, перпендикулярную к рассматриваемой грани, а второй — указывать, на какую ось проектируется поверхностная сила (напряжение), действующая на эту грань. В этих обозначениях составляющие поверхностного напряжения, действующего на левую грань, перпендикулярную к оси x, напишутся в виде p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}; составляющие, действующие на грань, перпендикулярную к оси y, в виде p_{yx}, p_{yy}, p_{yz} и, наконец, действующие на грань, перпендикулярную к оси z, в виде p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}. Очевидно, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} будут нормальными напряжениями поверхностных сил, действующих на грани рассматриваемого элементарного параллелепипеда, а p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy} — касательными напряжениями. Для того чтобы яснее их различать, будем обозначать касательные напряжения через τ, т. е. положим

$$
\begin{gathered}
p_{xy}=\tau_{xy}, \quad p_{xz}=\tau_{xz}; \\
p_{yx}=\tau_{yx}, \quad p_{yz}=\tau_{yz}; \\
p_{zx}=\tau_{zx}, \quad p_{zy}=\tau_{zy}.
\end{gathered}
$$

При расположении нормальных и касательных составляющих по граням параллелепипеда условимся все нормальные составляющие направлять по внешним нормалям к граням. На трех гранях, проходящих через точку $M(x, y, z)$, направим касательные составляющие обратно положительным направлениям осей координат, а на остальных трех гранях — в сторону положительного направления координатных осей. Такое расположение нормальных и касательных составляющих является условным, но наиболее удобно для вывода дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости.

За проекциями массовых сил, отнесенных к единице массы, сохраним их прежние обозначения X, Y, Z.

Приступая к составлению уравнения движения в проекции на ось x, заметим, что в это уравнение войдут лишь напряжения, обладающие вторым значком x.

Начнем с нормальных составляющих. Очевидно, на левую грань будет действовать нормальная сила $(-p_{xx}\,dy\,dz)$, а на правую грань сила $\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\,dx\right)dy\,dz$. Равнодействующая этих сил будет равна $\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$.

Из касательных напряжений надо учесть в данном случае лишь τ_{yx} и τ_{zx}.

Проекция на ось x касательной силы, действующей на заднюю грань, будет равна $(-\tau_{zx}\,dx\,dy)$, на переднюю грань $\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dx\,dy$, и, следовательно, равнодействующая этих сил выразится следующим образом:

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dx\,dy\,dz.$$

Очевидно, что для проекций касательных сил, действующих на нижнюю и верхнюю грани, получим равнодействующую

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dx\,dy\,dz.$$

Используя принцип Даламбера, будем иметь

$$\rho X\,dx\,dy\,dz-\rho\frac{dv_x}{dt}dx\,dy\,dz+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dx\,dy\,dz+$$
$$+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dx\,dy\,dz+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\,dy\,dz=0,$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{dv_x}{dt}=\rho X+\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right).\\
&\text{Аналогично можно получить еще два уравнения:}\\
&\rho\frac{dv_y}{dt}=\rho Y+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right),\\
&\rho\frac{dv_z}{dt}=\rho Z+\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(9.1)$$

Обратимся к уравнению моментов. Вычислим момент действующих на параллелепипед сил относительно оси, параллельной оси z и проходящей через центр C параллелепипеда (фиг. 9.2), ограничиваясь величинами третьего порядка малости. Заметим, что так как массовые силы сами являются величинами третьего порядка малости (они пропорциональны объему частицы $dx\,dy\,dz$), то момент от них (в результате умножения на бесконечно малое плечо) будет величиной четвертого порядка малости, вследствие чего им можно пренебречь. В таком случае, учитывая направление моментов, будем иметь

$$-\tau_{yx}dx\,dz\frac{dy}{2}-(\tau_{yx}+d\tau_{yx})\,dx\,dz\frac{dy}{2}+$$
$$+\tau_{xy}\,dy\,dz\frac{dx}{2}+(\tau_{xy}+d\tau_{xy})dy\,dz\frac{dx}{2}=0$$

или, отбрасывая величины четвертого порядка малости,

$$(-\tau_{yx}-\tau_{yx}+\tau_{xy}+\tau_{xy})\,\frac{dx\,dy\,dz}{2}=0,$$

откуда

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}. \tag{9.2}$$

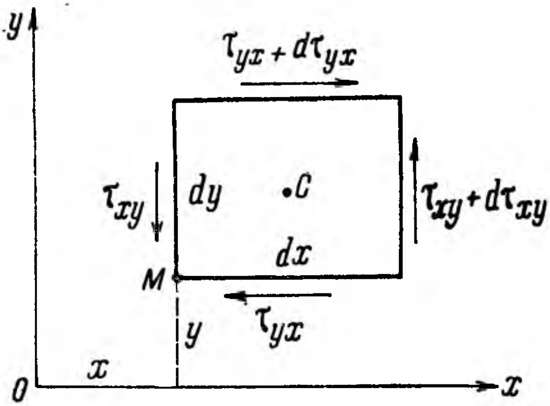
Аналогично можно убедиться, что

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}, \quad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

и, следовательно,

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}, \quad \tau_{yz}=\tau_{zy}, \quad \tau_{zx}=\tau_{xz}. \tag{9.3}$$

Равенства (9.3) показывают, что из девяти напряжений, входящих в уравнения (9.1), *независимыми* являются лишь шесть.



Фиг. 9.2. К выводу дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости.

Отсюда можно заключить, что напряженное состояние жидкости в любой ее точке характеризуется тремя нормальными и тремя касательными напряжениями по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку.

Обратимся к рассмотрению нормальных напряжений. Если жидкость идеальная, то, очевидно,

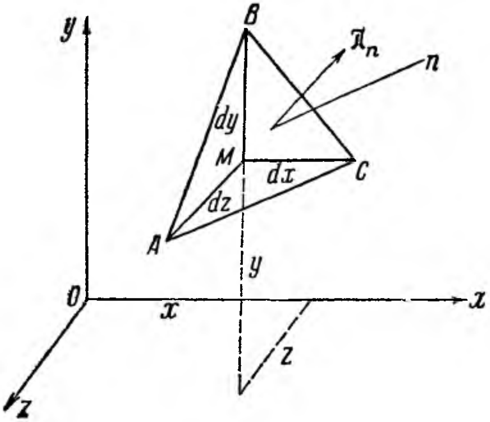
$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-p.$$

В случае вязкой жидкости возникают касательные напряжения, а нормальные напряжения изменяют (по сравнению с идеальной жидкостью) свою величину. Следовательно, для вязкой жидкости

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=-p+\pi_{xx},\\ p_{yy}&=-p+\pi_{yy},\\ p_{zz}&=-p+\pi_{zz}, \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

где π_{xx}, π_{yy}, π_{zz} — добавочные нормальные напряжения, возникшие под влиянием вязкости.

Примем гипотезу, что касательные напряжения и изменения нормальных напряжений не зависят от величины давления p. Тогда значения напряжений π_{xx}, π_{yy}, π_{zz} не будут зависеть от давления p.



Фиг. 9.3. К выводу дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости.

Рассмотрим частицу жидкости в форме элементарного тетраэдра $ABCM$, построенного на элементарных отрезках dx, dy, dz (фиг. 9.3).

Обозначим направление нормали к площадке ABC через n и через Π_n — напряжение силы вязкости, действующей на площадку ABC. Очевидно, вектор Π_n будет наклонен к этой площадке и будет иметь нормальные и касательные составляющие.

Составим уравнение равновесия всех действующих на данный тетраэдр сил. При этом силы инерционные и массовые учитывать не будем, как пропорциональные объему тетраэдра, а ограничимся поверхностными силами вязкости, пропорциональными элементарным площадям. В результате для составляющих, параллельных оси x, получим

$$-p_{xx}\,dS_x - \tau_{yx}\,dS_y - \tau_{zx}\,dS_z + \Pi_{nx}\,dS = 0,$$

где dS_x, dS_y, dS_z, dS — соответствующие площади граней тетраэдра.

В силу формул

$$dS_x = dS\cos(n, x),$$

$$dS_y = dS\cos(n, y),$$

$$dS_z = dS\cos(n, z)$$

находим

$$\Pi_{nx} = p_{xx}\cos(n, x) + \tau_{yx}\cos(n, y) + \tau_{zx}\cos(n, z).$$

Аналогичные равенства можно получить для напряжений Π_{ny} и Π_{nz}, и, следовательно, будем иметь

$$\Pi_{nx} = p_{xx}\cos(n, x) + \tau_{yx}\cos(n, y) + \tau_{zx}\cos(n, z),$$

$$\Pi_{ny} = \tau_{xy}\cos(n, x) + p_{yy}\cos(n, y) + \tau_{zy}\cos(n, z),$$

$$\Pi_{nz} = \tau_{xz}\cos(n, x) + \tau_{yz}\cos(n, y) + p_{zz}\cos(n, z).$$

Проектируя вектор Π_n на нормаль к площадке ABC, получим значение нормального напряжения Π_{nn}, равное

$$\Pi_{nn} = \Pi_{nx}\cos(n, x) + \Pi_{ny}\cos(n, y) + \Pi_{nz}\cos(n, z).$$

Подставляя в это выражение значения Π_{nx}, Π_{ny}, Π_{nz} и используя формулы (9.4), а также очевидное соотношение

$$\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1,$$

получим

$$\Pi_{nn} = -p + \pi_{xx}\cos^2(n, x) + \pi_{yy}\cos^2(n, y) + \pi_{zz}\cos^2(n, z) + \\ + 2\tau_{xy}\cos(n, x)\cos(n, y) + 2\tau_{yz}\cos(n, y)\cos(n, z) + \\ + 2\tau_{xz}\cos(n, x)\cos(n, z) = -p + \pi_{nn}. \tag{9.5}$$

Предположим, что нормальное напряжение π_{nn}, обусловленное исключительно наличием вязкости, для всех направлений n, исходящих из данной точки, пропорционально скорости линейной деформации $\frac{\partial v_n}{\partial n}$, причем коэффициент пропорциональности для всех направлений одинаков и равен 2μ:

$$\pi_{nn} = 2\mu\frac{\partial v_n}{\partial n}. \tag{9.6}$$

Скорость линейной деформации $\frac{\partial v_n}{\partial n}$ в произвольном направлении n может быть выражена через скорости линейных деформаций вдоль осей координат и скорости деформаций скашивания в соответствующих координатных плоскостях следующим образом. Так как

$$v_n = v_x\cos(n, x) + v_y\cos(n, y) + v_z\cos(n, z),$$

то для выбранного (фиксированного) направления n

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = \frac{\partial v_x}{\partial n}\cos(n, x) + \frac{\partial v_y}{\partial n}\cos(n, y) + \frac{\partial v_z}{\partial n}\cos(n, z). \tag{a}$$

В свою очередь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial n} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial v_x}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial v_x}{\partial z}\cos(n, z), \\ \frac{\partial v_y}{\partial n} &= \frac{\partial v_y}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial v_y}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial v_y}{\partial z}\cos(n, z), \\ \frac{\partial v_z}{\partial n} &= \frac{\partial v_z}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial v_z}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\cos(n, z). \end{aligned}\right\} \tag{б}$$

Подставляя выражения (б) в уравнение (а), группируя члены и вводя известные уже из предыдущего обозначения, получаем

$$\frac{\partial v_n}{\partial n}=\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos^2(n, x)+\frac{\partial v_y}{\partial y}\cos^2(n, y)+\frac{\partial v_z}{\partial z}\cos^2(n, z)+$$

$$+2\varepsilon_x\cos(n,y)\cos(n,z)+2\varepsilon_y\cos(n,x)\cos(n,z)+$$

$$+2\varepsilon_z\cos(n,x)\cos(n,y).$$

Так как величины π_{nn} и $\frac{\partial v_n}{\partial n}$ связаны равенством (9.6) для любых направлений n, то это означает, что коэффициенты при соответствующих косинусах должны быть равны.

Имея это в виду, получаем

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}&=2\mu\varepsilon_z=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),\\ \tau_{yz}&=2\mu\varepsilon_x=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right),\\ \tau_{zx}&=2\mu\varepsilon_y=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\tag{9.7}$$

и, принимая во внимание равенства (9.4),

$$\left.\begin{aligned}p_{xx}&=-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x},\\ p_{yy}&=-p+2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y},\\ p_{zz}&=-p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{9.8}$$

Уравнения (9.7) и (9.8) показывают, что введенная выше гипотеза (9.6) означает по существу пропорциональность компонентов напряжения компонентам скоростей деформации. В частности, из уравнений (9.7) можно получить известный закон Ньютона для одномерного течения жидкости. Действительно, полагая, что жидкость движется вдоль оси x, из первого уравнения (9.7) получаем

$$\tau=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

В силу уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$ из уравнений (9.8) находим

$$p=-\frac{p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}}{3}, \tag{9.9}$$

т. е. гидродинамическое давление в вязкой жидкости можно рассматривать как взятое с обратным знаком среднее арифметическое от нормальных напряжений по трем произвольным, проходящим через данную точку, взаимно перпендикулярным площадкам.

Подставим теперь выражения (9.7) и (9.8) в уравнения (9.1). Будем иметь

$$\rho\frac{dv_x}{dt}=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\,\partial y}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial z}$$

или

$$\rho\frac{dv_x}{dt}=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+$$
$$+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Так как последнее слагаемое равно нулю (в силу уравнения неразрывности), то

$$\rho\frac{dv_x}{dt}=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right).$$

Таким образом, дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{dv_x}{dt}&=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right),\\
\rho\frac{dv_y}{dt}&=\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right),\\
\rho\frac{dv_z}{dt}&=\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

Вводя кинематический коэффициент вязкости $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ и раскрывая выражение для полного ускорения, дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости можно написать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=\\
&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right);\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=\\
&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right);\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=\\
&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(9.11)$$

Уравнения (9.10) или (9.11) являются *основными дифференциальными уравнениями движения вязкой несжимаемой жидкости, именуемыми, обычно, уравнениями Навье—Стокса.* Присоединяя к этим уравнениям уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,\qquad(9.12)$$

будем иметь основную систему дифференциальных уравнений для решения задач о движении вязкой, несжимаемой жидкости.

Если при изучении движения вязкой жидкости одновременно учитывать и сжимаемость, то уравнения движения будут более сложными [2]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dv_x}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x},\\
&\frac{dv_y}{dt}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial y},\\
&\frac{dv_z}{dt}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial z},
\end{aligned}\right\}\qquad(9.13)$$

где

$$\theta=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}.\qquad(9.14)$$

Одновременный учет сжимаемости и вязкости вносит исключительные трудности в интегрирование дифференциальных уравнений движения. В связи с этим в большинстве проблем газодинамики газ рассматривается как невязкая, идеальная, но сжимаемая жидкость.

Для плоской задачи система дифференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),\\ \frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right),\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}&=0.\end{aligned}\right\} \quad (9.15)$$

§ 2. ПОНЯТИЕ О ПОДОБИИ ПОТОКОВ

В аэродинамике особо важную роль играет теория подобия потоков, так как она устанавливает возможность перенесения экспериментальных данных, полученных при испытании модели, на натурный объект.

Рассмотрим два потока, обтекающие натурный объект, и его модель. Назовем сходственными точками этих потоков такие, которые геометрически подобно расположены относительно рассматриваемых тел, предполагаемых также геометрически подобными.

Подобными потоками назовем такие потоки, у которых все характеризующие их однородные физические величины находятся для любых сходственных точек в одинаковом отношении. Эти отношения характеризуются так называемыми масштабами. Основными масштабами являются масштабы длины, силы и времени.

Если взять произвольный линейный размер модели l_1 и разделить его на соответствующий линейный размер натурного объекта, то получим величину линейного масштаба, обозначаемую через $k_l=\frac{l_1}{l}$. Деля силу R_1, действующую на всю модель или ее часть, на силу R, действующую на натурный объект или его часть, получим силовой масштаб $k_R=\frac{R_1}{R}$. Считая, что какое-нибудь событие совершается у модели в течение отрезка времени t_1, а у натурного объекта в течение времени t, найдем масштаб времени $k_t=\frac{t_1}{t}$.

В случае подобия эти масштабы в сходственных точках должны быть постоянными. Все остальные масштабы других физических величин для подобных явлений также являются постоянными и могут быть выражены через эти основные масштабы. Рассмотрим некоторые из них. Пусть S_1 и S — сходственные площади двух потоков, а l_1 и l — линейные размеры этих сходственных площадей

Очевидно,

$$k_S=\frac{S_1}{S}=\left(\frac{l_1}{l}\right)^2=k_l^2.$$

Для масштаба скоростей, понимая под сходственными отрезками времени t_1 и t такие отрезки, за которые частицы потоков проходят расстояния между двумя сходственными точками, можно написать

$$k_v = \frac{v_1}{v} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t_1 \to 0}} \frac{\dfrac{\Delta l_1}{\Delta t_1}}{\dfrac{\Delta l}{\Delta t}} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t_1 \to 0}} \frac{\Delta l_1}{\Delta l} \frac{\Delta t}{\Delta t_1} = \frac{k_l}{k_t}.$$

Аналогично можно показать, что масштаб весовой плотности выражается следующим образом:

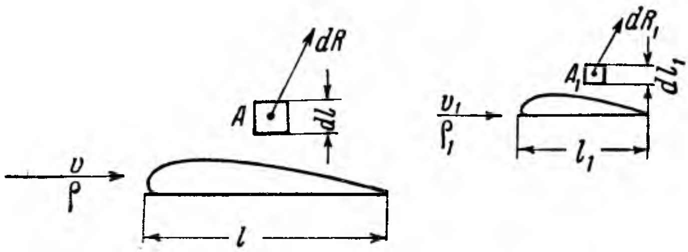
$$k_\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \Delta V_1 \to 0}} \frac{\dfrac{\Delta R_1}{\Delta V_1}}{\dfrac{\Delta R}{\Delta V}} = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \Delta V_1 \to 0}} \frac{\Delta R_1}{\Delta R} \frac{\Delta V}{\Delta V_1} = \frac{k_R}{k_l^3};$$

масштаб массовой плотности

$$k_\rho = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{k_R k_t^2}{k_l^4}$$

и т. д.

Таким образом, считая, что при соблюдении подобия в пространствах, где происходят сравниваемые явления, масштабы однородных величин должны сохраняться постоянными, можно сформу-



Фиг. 9.4. Подобные потоки около подобных тел.

лировать определение подобия в несколько ином виде: *два потока называются подобными, если в любых сходственных точках и в любые сходственные моменты времени масштабы однородных величин,* характеризующих эти потоки, являются постоянными. Такое подобие называется *полным.* Если же этому условию удовлетворяют не все масштабы, а только часть из них, то подобие называется *частичным.*

Рассмотрим два подобных потока: один — обтекающий натурный объект, например, профиль крыла, а другой — обтекающий его модель (фиг. 9.4).

Выделим в текущей жидкости два сходственных бесконечно малых элемента. Пусть на эти элементы будут действовать силы dR и

dR_1, создающие ускорения w и w_1. Очевидно, можно написать следующие равенства:

$$dR = w\, dm$$

и

$$dR_1 = w_1\, dm_1,$$

где dm и dm_1 — массы этих элементов. Выразим массы dm и dm_1 через плотность и линейные размеры:

$$dm = \rho\, dl^3$$

$$dm_1 = \rho_1\, dl_1^3.$$

Подставляя в выражения для сил, получим

$$dR = \rho w\, dl^3$$

и

$$dR_1 = \rho_1 w_1\, dl_1^3.$$

Деля почленно, будем иметь

$$k_R = \frac{dR_1}{dR} = \frac{\rho_1 w_1\, dl_1^3}{\rho w\, dl^3} = k_\rho k_w k_l^3.$$

Так как масштаб ускорения

$$k_w = \frac{k_l}{k_t^2},$$

то выражение для k_R можно переписать в виде

$$k_R = k_\rho k_l^4 k_t^{-2}.$$

Замечая, что

$$k_l^2 k_t^{-2} = k_v^2,$$

находим

$$k_R = k_\rho k_l^2 k_v^2. \qquad (9.16)$$

Найденное соотношение справедливо, очевидно, не только для бесконечно малых объемов жидкости, но и для любых конечных объемов, так как всякий конечный объем можно разбить на бесконечно большое число бесконечно малых объемов. Таким образом, заключаем, что постоянство отношений $k_R = \frac{dR_1}{dR}$, установленное для бесконечно малых объемов, должно в подобных потоках иметь место и для конечных объемов, на которые действуют конечные силы. В дальнейшем под R и R_1 будем подразумевать полные аэродинамические силы, действующие на натурный объект и модель, отношение которых при условии подобия потоков должно оставаться постоянным на любом режиме обтекания[1]:

$$k_R = \frac{R_1}{R} = \text{const}.$$

Переходя от масштабов к основным величинам, можем написать

$$\frac{R_1}{R} = \frac{\rho_1 l_1^2 v_1^2}{\rho l^2 v^2} = \text{const}$$

или

$$\frac{R_1}{\rho_1 l_1^2 v_1^2} = \frac{R}{\rho l^2 v^2} = \text{const}.$$

Перепишем эти отношения следующим образом:

$$\frac{R_1}{\rho_1 l_1^2 v_1^2}\,\frac{2S_1}{2S_1} = \frac{R}{\rho l^2 v^2}\,\frac{2S}{2S}.$$

Тогда, принимая во внимание, что в силу подобия

$$\frac{S_1}{2l_1^2} = \frac{S}{2l^2},$$

получим

$$\frac{R_1}{S_1 \frac{\rho_1 v_1^2}{2}} = \frac{R}{S \frac{\rho v^2}{2}} = c_R$$

или

$$R = c_R \rho \frac{v^2}{2} S, \tag{9.17}$$

где c_R — безразмерный коэффициент полной аэродинамической силы, S — характерная площадь, а $\frac{\rho v^2}{2} = q$ — скоростной напор.

В аэродинамике наряду с аэродинамической силой рассматривается и ее момент M. Очевидно, для масштаба момента можно написать

$$k_M = k_R\, k_l = k_\rho\, k_l^3 k_v^2$$

или, переходя к основным величинам,

$$\frac{M_1}{M} = \frac{\rho_1 l_1^3 v_1^2}{\rho l^3 v^2},$$

откуда

$$\frac{M_1}{\rho_1 l_1^3 v_1^2} = \frac{M}{\rho l^3 v^2} = \text{const}.$$

[1] Переход от сил, приложенных к жидкости, к силам, приложенным к обтекаемому телу, осуществляется на основании третьего закона Ньютона о равенстве действия и противодействия.

Полученное выражение дает возможность ввести следующее простое выражение для момента аэродинамической силы:

$$M = mSL\frac{\rho v^2}{2} = mSLq, \tag{9.18}$$

где m — безразмерный коэффициент момента аэродинамической силы. Не входя в детали теории аэродинамических коэффициентов, так как она с исчерпывающей полнотой изложена в курсах экспериментальной аэродинамики [9], перейдем к рассмотрению основных критериев, определяющих подобие потоков в аэродинамике.

§ 3. ОСНОВНЫЕ КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Установим в настоящем параграфе основные критерии динамического подобия потоков, рассматривая попрежнему два потока: один — обтекающий натурный объект, а другой — его модель.

Основные критерии подобия можно установить различными путями. Ниже критерии подобия будут получены исходя из структуры основных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости.

Обратимся к дифференциальным уравнениям движения вязкой жидкости.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \\
&\qquad + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial \theta}{\partial x};\\
&\qquad \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = \\
&= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial \theta}{\partial y};\\
&\qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial y} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \\
&\qquad + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial \theta}{\partial z},\\
&\text{где}\\
&\qquad \theta = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Структура этих дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости не должна, очевидно, зависеть от изменения масштабов входящих в эти уравнения величин. Изменение масштабов может лишь привести к появлению численных коэффициентов при всех величинах, чьи масштабы в сравниваемых потоках различны.

Действительно, предположим, что при переходе от обтекания модели к обтеканию натурного объекта (самолет, ракета и т. д.) все линейные размеры изменяются в L раз, время — в T раз, скорости — в V раз, ускорения массовых сил — в G раз, давления — в P раз, плотности — в R раз, динамический коэффициент вязкости — в M раз, кинематический коэффициент вязкости — в N раз.

Тогда, полагая, что уравнения (а) написаны для натурного объекта, можем переписать их в виде

$$\frac{V}{T}\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{V^2}{L}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=GX-\frac{P}{RL}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{NV}{L^2}\left[\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] \qquad (б)$$

и т. д.,

где все размерные величины относятся уже к модели. Но для модели можно, очевидно, прямо написать уравнения движения в виде (а), и тогда сравнение этих уравнений с уравнениями (б) приводит к следующим условиям подобия:

$$\frac{V}{T}=\frac{V^2}{L}=G=\frac{P}{RL}=\frac{NV}{L^2}. \qquad (9.19)$$

Анализ полученного соотношения дает возможность получить основные критерии подобия.

Получим прежде всего критерий подобия, учитывающий влияние вязкости в движущейся жидкости. Для этого сравним второй член равенств (9.19), наличие которого обусловлено инерционными членами в уравнениях движения, с последним членом, учитывающим влияние вязкости:

$$\frac{V^2}{L}=\frac{NV}{L^2}.$$

Отсюда сразу получаем такой критерий подобия:

$$\frac{VL}{N}=1$$

или, имея в виду, что

$$V=\frac{v_1}{v_2}, \quad L=\frac{l_1}{l_2} \text{ и } N=\frac{\nu_1}{\nu_2},$$

где индексы «1» и «2» относятся к двум сравниваемым подобным потокам:

$$\frac{v_1 l_1}{\nu_1}=\frac{v_2 l_2}{\nu_2}.$$

Безразмерная величина

$$\frac{vl}{\nu}=\mathrm{R} \tag{9.20}$$

является *критерием частичного подобия с учетом вязкости* и носит название *числа Рейнольдса.*

Если модель и натурный объект обтекаются одной и той же жидкостью с одним и тем же коэффициентом кинематической вязкости $\nu=\nu_1=\nu_2$ $(N=1)$, то в этом случае условие подобия (9. 20) напишется в виде

$$v_1 l_1=v_2 l_2. \tag{9.21}$$

Из соотношения (9. 21) следует, что скорость потока, обтекающего модель, должна быть больше скорости потока, обтекающего натуру, во столько раз, во сколько линейные размеры модели меньше размеров натуры.

Таким образом, полученный выше результат означает, что *для соблюдения частичного подобия потоков с учетом влияния вязкости необходимо не только геометрическое подобие, но и равенство чисел* R *этих потоков.*

Число R играет большую роль в задачах аэродинамики[1]. От числа R зависит, в частности, коэффициент сопротивления различных тел, обтекаемых потоком вязкой жидкости.

Получим другой критерий подобия, учитывающий влияние *силы тяжести.* Сравнивая второй (инерционный) и третий члены равенства (9. 19), находим

$$\frac{V^2}{L}=G.$$

Так как в уравнения движения входят массовые силы, отнесенные к единице массы, то для силы тяжести имеем

$$X=0,\ Y=-g,\ Z=0,$$

откуда следует, что

$$G=1.$$

Таким образом, для соблюдения подобия двух потоков, учитывая только инерционные силы и силы тяжести, необходимо выполнение равенства

$$\frac{V^2}{L}=1, \tag{9.22}$$

которое может быть переписано в виде

$$\frac{v_1^2}{l_1}=\frac{v_2^2}{l_2}. \tag{9.22'}$$

[1] Число R служит мерой влияния вязкости на движение жидкости: чем меньше число R, тем больше это влияние.

Если последнее соотношение поделить на g, то получим *безразмерный* критерий подобия

$$\frac{v^2}{gl} = \mathrm{F}, \tag{9.23}$$

учитывающий влияние силы тяжести и называемый *числом Фруда.* Следовательно, условие частичного подобия с учетом весомости жидкости можно сформулировать так: *для соблюдения частичного подобия двух потоков с учетом влияния силы тяжести необходимо не только геометрическое подобие, но и равенство чисел* F.

Как видим, выдерживая подобие с учетом влияния сил тяжести, нужно удовлетворить условию (9.22′), противоречащему условию (9.21). Действительно, по условию (9.21) при уменьшении линейных размеров модели в L раз надо во столько же раз *увеличить* скорость ее обтекания, а по условию (9.22′) при уменьшении размеров модели надо *уменьшить* скорость ее обтекания в $\sqrt{L}$ раз. Следовательно, одновременное соблюдение подобия (при $L \neq 1$) с учетом сил вязкости и сил тяжести невозможно.

В большинстве задач аэродинамики приходится учитывать влияние сил вязкости, т. е. соблюдать подобие по числу R (при больших скоростях движения следует учитывать также сжимаемость жидкости, о чем будет сказано ниже). Подобие по числу F необходимо соблюдать в тех случаях, когда рассматривается, например, движение в тяжелой жидкости частично погруженного в нее тела. С такого рода движением встречаются при испытаниях моделей гидросамолетов, глиссеров, катеров и пр. в гидроканале. При протаскивании модели на поверхности воды образуются волны, порождающие так называемое волновое сопротивление. В задачах этого рода действием силы тяжести на образование волн пренебречь нельзя и приходится учитывать подобие по числу F.

В проблемах, где приходится иметь дело с неустановившимися режимами течения, вводится особый критерий подобия, называемый *критерием подобия по периодичности.* Сравним первые два члена равенства (9.19), из которых первый характеризует нестационарность течения, а второй попрежнему характеризует инерционные силы:

$$\frac{V}{T} = \frac{V^2}{L}.$$

Отсюда

$$\frac{VT}{L} = 1 \tag{9.24}$$

или

$$\frac{v_1 t_1}{l_1} = \frac{v_2 t_2}{l_2}.$$

Полученный критерий применим тогда, когда рассматриваются какие-либо неустановившиеся, но периодически повторяющиеся процессы, например, отрыв вихрей, волновые колебания жидкости и т. п. Безразмерное число

$$\frac{vt}{l} = S \tag{9.25}$$

характеризует частичное подобие по периодичности и носит название *числа Струхаля.*

Таким образом, *для соблюдения частичного подобия потоков с учетом периодичности явлений необходимо не только геометрическое подобие, но и равенство чисел* S.

Число S играет большую роль в проблемах нестационарной аэродинамики [32].

Обратимся к последнему критерию подобия, играющему в настоящее время, в связи с большими скоростями полета, огромную роль — к критерию подобия с учетом сжимаемости жидкости.

Сопоставим второй и четвертый члены уравнения (9. 19), учитывающие соответственно влияние инерционных сил и сил давления. Получим

$$\frac{V^2}{L} = \frac{P}{RL}$$

или

$$\frac{P}{RV^2} = 1. \tag{а}$$

У сжимаемой жидкости изменение плотности зависит от изменения давления. Характер этой зависимости связан со скоростью звука при помощи соотношения

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho},$$

где a — скорость звука.

Изменяя масштабы в этом уравнении (например, увеличивая скорость звука в A раз, давление — в P раз, плотность — в R раз), получим

$$A^2 = \frac{P}{R}. \tag{б}$$

Из соотношений (а) и (б) находим

$$\frac{P}{R} = V^2 = A^2,$$

т. е.

$$\frac{V}{A} = 1$$

или

$$\frac{v_1}{a_1} = \frac{v_2}{a_2}. \tag{9.26}$$

Будем обозначать отношение

$$\frac{v}{a} = \mathrm{M}. \tag{9.27}$$

Тогда условие частичного подобия с учетом сжимаемости жидкости может быть сформулировано в следующем виде: *для соблюдения частичного подобия двух потоков с учетом сжимаемости необходимо не только геометрическое подобие, но и равенство чисел* M.

Из изложенного следует, что силовое воздействие потока на помещенное в нем тело, характеризуемое коэффициентом аэродинамического сопротивления c_R, зависит в общем случае от формы тела, ориентировки его относительно потока и критериев подобия R, F, S и M. Следовательно, для данного тела, определенным образом ориентированного относительно потока,

$$c_R = f(\mathrm{R}, \mathrm{F}, \mathrm{S}, \mathrm{M}).$$

Во многих задачах аэродинамики решающее значение имеют критерии R и M, т. е. с достаточной для практических целей точностью

$$c_R = f(\mathrm{R}, \mathrm{M}).$$

§ 4. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Полученные в этой главе общие дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (9.11) интегрируются только в некоторых частных случаях, к числу которых, в частности, принадлежит так называемое ламинарное течение вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе.

Прежде чем приступить к решению этой задачи, сделаем несколько предварительных замечаний о возможных режимах течения вязкой жидкости (в том числе в круглой цилиндрической трубе). Наблюдения показали, что могут существовать два различных типа течения вязкой жидкости:

1) течение плавное, когда частицы жидкости не смешиваются между собой и жидкость движется отдельными слоями. Эти течения получили название *ламинарных* (слоистых);

2) течение, в котором существует беспорядочное движение частиц жидкости, приводящее к ее перемешиванию. Эти течения получили название *турбулентных*.

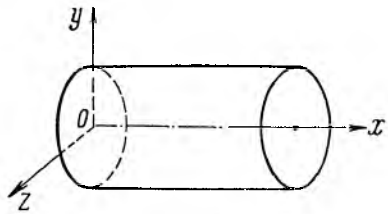
Опытами было установлено также, что наличие того или иного режима связано с различными значениями критерия подобия R.

При малых числах R ($\mathrm{R} < 2300$) устойчивым режимом является ламинарное течение жидкости.

При больших числах R (обычно при $\mathrm{R} > 4000$) устойчивым режимом является турбулентное течение. То значение числа R, начиная с которого возникает турбулентное течение, обозначается через $\mathrm{R}_{кр}$ и называется *критическим* (обычно $\mathrm{R}_{кр} = 2300—4000$).

Перейдем теперь к решению задачи о ламинарном, установившемся течении жидкости в круглой трубе, используя для этой цели основные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (9. 11).

Рассмотрим бесконечно длинную круглую цилиндрическую трубу, внутри которой имеется ламинарное течение жидкости. Ось x (фиг. 9. 5) направим вдоль оси трубы.



Фиг. 9.5. К решению задачи о ламинарном течении жидкости по круглой трубе.

Так как течение одномерное и ламинарное, то из трех компонентов скорости только одна $v_x \neq 0$, а остальные две $v_y = v_z = 0$. При этом уравнения движения (9. 11) и уравнение неразрывности упрощаются и принимают вид (силами тяжести пренебрегаем)

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right); \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.28}$$

Из последнего уравнения системы (9. 28) следует, что скорость v_x есть функция только координат y и z, а из второго и третьего — что давление p является функцией только координаты x. Поэтому уравнение (9. 28) можно переписать в виде

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) = \frac{dp}{dx}. \tag{9.29}$$

Поскольку левая часть равенства (9. 29) является функцией только y и z, а правая часть — функцией только x, то отсюда вытекает, что равенство (9. 29) может иметь место только в случае, когда и левая и правая его части — постоянные числа.

Введем следующее обозначение:

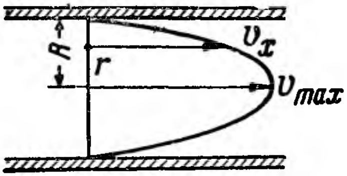
$$\frac{dp}{dx} = \mathrm{const} = -\frac{\Delta p}{l}, \tag{9.30}$$

где $\Delta p = p_1 - p_2$ — перепад давления на участке трубы длиной l (знак минус поставлен потому, что давление вдоль трубы падает, т. е. $\frac{dp}{dx} < 0$, а $\Delta p > 0$). Таким образом, уравнение (9.29) сводится к линейному уравнению в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}. \tag{9.31}$$

Уравнение (9.31) будем решать при граничном условии, основывающемся на том, что в точках, где вязкая жидкость примыкает к твердой неподвижной стенке, скорость жидкости обращается в нуль. Математически это условие напишется в виде

$$v_x = 0 \text{ при } r = R, \tag{9.32}$$



Фиг. 9.6. Распределение скорости по сечению круглой трубы при ламинарном течении жидкости.

где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ — текущий радиус;

R — радиус трубы.

Как нетрудно проверить, уравнению (9.31) и граничному условию (9.32) можно удовлетворить, представив v_x в следующем виде:

$$v_x = C\left(1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2}\right) = C\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{9.33}$$

где C — некоторая постоянная, определяемая из условия удовлетворения уравнению (9.31):

$$-2C\frac{2}{R^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l},$$

т. е.

$$C = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}. \tag{9.34}$$

Следовательно, выражение для v_x приобретает вид

$$v_x = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

или

$$v_x = \frac{\Delta p}{4\mu l}(R^2 - r^2). \tag{9.35}$$

Полученное выражение для искомой скорости v_x показывает, что скорость по сечению круглой цилиндрической трубы распределяется по *параболическому* закону (фиг. 9.6).

Из уравнения (9.35) следует также, что максимальное значение скорости достигается на оси трубы при $r = 0$ и равно

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{l}\,\frac{R^2}{4\mu}. \tag{9.36}$$

Поэтому формулу для v_x можно переписать в виде

$$v_x = v_{\max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \tag{9.37}$$

Определим секундный объемный расход жидкости Q через поперечное сечение трубы. Очевидно, элементарный расход через площадь кольца, ограниченного радиусами r и $r+dr$, будет равен

$$dQ = v_x 2\pi r\, dr. \tag{9.38}$$

В таком случае полный расход Q представится в следующем виде:

$$Q=\int_0^R v_x 2\pi r\, dr = \frac{\Delta p}{l}\,\frac{\pi}{2\mu}\int_0^R (R^2-r^2)\, r\, dr,$$

откуда, интегрируя,

$$Q=\frac{\Delta p}{l}\,\frac{\pi}{8\mu}R^4. \tag{9.39}$$

Зная расход, можно найти среднюю по сечению скорость. Для этого разделим величину расхода Q на площадь сечения трубы. Тогда

$$v_{\text{ср}}=\frac{Q}{\pi R^2}=\frac{\Delta p}{l}\,\frac{R^2}{8\mu}. \tag{9.40}$$

Сравнивая (9.36) и (9.40), находим, что

$$v_{\text{ср}}=\frac{v_{\max}}{2}, \tag{9.41}$$

т. е. средняя скорость по сечению при ламинарном течении жидкости в круглой цилиндрической трубе равна половине максимальной скорости.

Определим сопротивление трубы ламинарному потоку жидкости. Для этого перепишем формулу (9.40) в виде

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{8 l \mu v_{\text{ср}}}{R^2} \tag{9.42}$$

или

$$\Delta p = \frac{32\mu v_{\text{ср}}}{d^2}\, l, \tag{9.43}$$

где $d=2R$ — диаметр трубы.

Преобразуем полученное выражение, приводя его к известному из гидравлики виду. Для этого умножим числитель и знаменатель последней формулы на $2\rho v_{\text{ср}}$. В результате получим

$$\Delta p = \frac{64\nu}{v_{\text{ср}} d}\,\frac{l}{d}\,\frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2}. \tag{9.44}$$

Вводя число Рейнольдса

$$\mathrm{R}=\frac{v_{\text{ср}}d}{\nu}, \tag{9.45}$$

окончательно получаем

$$\Delta p=\frac{64}{\mathrm{R}}\frac{l}{d}\frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2}. \tag{9.46}$$

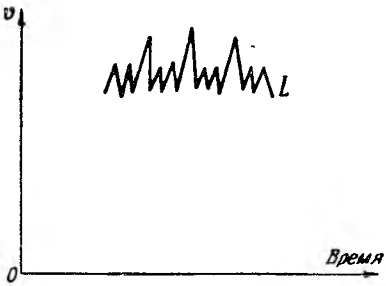
Безразмерный коэффициент $\frac{64}{R}$ в правой части последней формулы носит название *коэффициента сопротивления* при ламинарном течении жидкости в круглой трубе и обозначается через λ, т. е.

$$\lambda=\frac{64}{\mathrm{R}}. \tag{9.47}$$

Значения коэффициента сопротивления, получаемые по формуле (9. 47), хорошо подтверждаются экспериментом для малых чисел R, соответствующих ламинарному режиму течения в круглой трубе.

§ 5. ПОНЯТИЕ О ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ

При исследовании движения жидкостей в трубах было установлено, что при значении чисел $\mathrm{R}>\mathrm{R}_{\text{кр}}=2300$ ламинарный режим течения становится неустойчивым и переходит в турбулентный, характеризующийся неупорядоченным, хаотическим движением частиц.



Фиг. 9.7. Пульсации скорости при турбулентном течении.

В турбулентном течении частицы жидкости, участвуя в общем движении жидкости, обладают дополнительными перемещениями как поперечными, так и возвратными, с хаотически переплетенными и быстро изменяющимися по времени линиями тока.

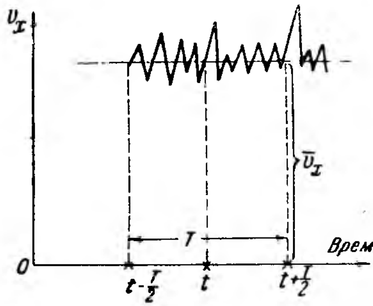
Механизм турбулентного потока очень сложен и в настоящее время еще полностью не изучен. Рассмотрим основные свойства турбулентного течения.

Обозначим через v скорость частицы жидкости в момент ее прохождения через некоторую фиксированную точку пространства. Опыты показывают, что величина и направление этой скорости в каждой точке турбулентных потоков изменяются по времени (см. фиг. 9. 7, где изображена запись изменения скорости частиц, проходящих через некоторую фиксированную точку пространства).

Как видим, турбулентное течение жидкости по своей внутренней структуре является существенно неустановившимся, в то время как ламинарное течение жидкости может быть и установившимся и неустановившимся.

Турбулентное течение, как бы ни было оно сложно по своей внутренней структуре, однако подчиняется общим законам динамики жидкости, в частности, уравнениям движения вязкой жидкости (9. 11). В то же время точная постановка вопроса о разыскании решений этих уравнений при строго поставленных начальных и граничных условиях не имеет смысла, так как при турбулентном течении строго задать начальные и граничные условия невозможно.

Для исследования турбулентного течения приходится поэтому применять особые приемы, связанные с заменой истинных (мгновенных) величин некоторыми осредненными их значениями. Для этого обратимся к фиг. 9. 8, где по оси абсцисс отложено время t, а по оси ординат — истинная скорость v_x. Зависимость v_x — истинной скорости течения в данной точке от времени изображается зигзагообразной кривой. Принимая некоторый промежуток времени T за период осреднения, введем осредненную скорость $\bar{v}_x$ следующим образом (см. фиг. 9. 8):



Фиг. 9. 8. Осреднение скорости турбулентного течения.

$$\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_x\,dt = \bar{v}_x T.$$

Таким образом, *осредненная скорость* $\bar{v}_x$ за время T будет определяться равенством

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_x\,dt.$$

Аналогично

$$\bar{v}_y = \frac{1}{T}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_y\,dt,$$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{T}\int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_z\,dt.$$

Проекции истинной (мгновенной) скорости потока в данной точке могут быть выражены, очевидно, как алгебраические суммы:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \bar{v}_x + \Delta v_x, \\ v_y &= \bar{v}_y + \Delta v_y, \\ v_z &= \bar{v}_z + \Delta v_z, \end{aligned}\right\} \qquad (9.48)$$

где величины Δv_x, Δv_y, Δv_z получили название *пульсационных скоростей*, или, короче, *пульсаций.*

Наблюдениями установлено, что хотя изменение истинных (мгновенных) скоростей с течением времени происходит быстро и не подчиняется какому-либо закону, осредненные значения скоростей изменяются вполне закономерно. В частном случае осредненные значения могут оставаться постоянными по времени.

Такое осредненное турбулентное течение называется *установившимся,* а само турбулентное течение — *квазиустановившимся.*

Совершенно естественно, что операция осреднения скоростей может быть распространена и на другие величины, характеризующие движение жидкости при турбулентном режиме. Так, например, осредненное значение давления в данной точке турбулентного потока определяется как интеграл:

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p\, dt,$$

мгновенное давление

$$p = \bar{p} + \Delta p,$$

где Δp — пульсационное давление.

Обобщая изложенное выше, можно написать осредненное значение для некоторой функции $f(x, y, z, t)$ в следующем виде:

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{T} \int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x, y, z, t)\, dt. \qquad (9.49)$$

Если в результате осреднения, проведенного в данной точке в различные моменты времени t, будут получаться одни и те же значения $\bar{f}$, то такое осредненное движение жидкости называется *установившимся.* Другими словами, в этом случае

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}(x, y, z), \qquad (9.50)$$

т. е. как функция $\bar{f}$, так и результат ее осреднения будут зависеть только от координат точек пространства, в котором течет турбулентный поток жидкости, но не от времени. Как следствие, из (9.50) получаем очевидное равенство

$$\Delta \bar{f} = \bar{f} - \bar{\bar{f}} = 0, \tag{9.51}$$

т. е. равенство нулю осредненных значений самих пульсаций.

Рассмотрим в квазиустановившемся турбулентном потоке еще одну пульсирующую функцию $f_1(x, y, z, t)$. Учитывая равенство (9.50), будем иметь

$$\overline{\bar{f} f_1} = \bar{f} \bar{f}_1, \tag{9.52}$$

где черта сверху попрежнему обозначает осреднение по времени.

Так как операции дифференцирования по координате и интегрирования по времени независимы, то на основании равенства (9.49) получаем

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}; \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}; \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \tag{9.53}$$

т. е. среднее значение производной от некоторой функции по координате равно производной от среднего значения функции по той же координате.

Можно убедиться в том, что аналогичным свойством обладает и производная по времени, т. е.

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}. \tag{9.54}$$

В самом деле,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x, y, z, t)\, dt = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(x, y, z, t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[f\left(x, y, z, t + \frac{T}{2}\right) - f\left(x, y, z, t - \frac{T}{2}\right)\right] = \frac{1}{T} \int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial f}{\partial t}\, dt,$$

т. е. получаем выражение (9.54).

Будем считать, что турбулентный поток состоит из двух потоков, наложенных друг на друга: «осредненного» и «пульсационного», из которых последний характерен тем, что его параметры (скорость, давление и пр.) все время меняются с течением времени.

Учитывая это условное деление турбулентного течения на два потока, можно считать, что кинетическая энергия осредненного и кинетическая энергия пульсационного потоков будут в сумме составлять кинетическую энергию исходного турбулентного течения.

Разлагая скорость пульсационного потока по осям координат, получим кинетические энергии каждого из составляющих пульсационных потоков, которые будут пропорциональны величинам

$$\overline{\Delta v_x^2},\quad \overline{\Delta v_y^2},\quad \overline{\Delta v_z^2},$$

представляющим собой средние квадратичные пульсационных скоростей.

Турбулентность получила название *изотропной*, если в рассматриваемой точке соблюдаются равенства

$$\overline{\Delta v_x^2} = \overline{\Delta v_y^2} = \overline{\Delta v_z^2},$$

т. е. если кинетическая энергия пульсаций одинакова во всех направлениях.

Турбулентность называется *однородной* и *изотропной*, если это условие соблюдается во всех точках турбулентного потока.

Рассмотрев основные свойства и определения турбулентного течения, перейдем к выводу дифференциальных уравнений движения турбулентного потока.

Напишем основные дифференциальные уравнения движения вязкой *несжимаемой жидкости*[1]:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 v_x,\\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v_y,\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 v_z
\end{aligned}\right\} \tag{9.55}$$

(массовыми силами пренебрегаем).

Эти уравнения движения содержат, как известно, истинные (мгновенные) значения скоростей и давления.

Подставим в уравнения движения (9.55) вместо истинных значений скоростей и давлений их выражения через соответствующие осредненные и пульсационные величины, а затем проведем над каждым слагаемым этих уравнений операцию осреднения.

---

[1] Где $\nabla^2(\ .\ .\ .\ ) = \frac{\partial^2(\ .\ .\ .\ )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ .\ .\ .\ )}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ .\ .\ .\ )}{\partial z^2}$.

Пользуясь уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости, первое уравнение системы (9. 55) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial (v_x v_x)}{\partial x}+\frac{\partial (v_x v_y)}{\partial y}+\frac{\partial (v_x v_z)}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 v_x. \quad (9.56)$$

Проведя операцию осреднения всех членов уравнения (9. 56) и учитывая соотношения (9. 53) и (9. 54), будем иметь

$$\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial t}+\frac{\partial (\overline{v_x v_x})}{\partial x}+\frac{\partial (\overline{v_x v_y})}{\partial y}+\frac{\partial (\overline{v_x v_z})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\nu\nabla^2 \overline{v}_x. \quad (9.57)$$

Полагая течение *квазиустановившимся* и используя соотношения (9. 50) и (9. 52), средние значения от произведений проекций скорости можно написать в следующем виде:

$$\overline{v_x v_x}=\overline{(\overline{v}_x+\Delta v_x)(\overline{v}_x+\Delta v_x)}=\overline{\overline{v}_x\overline{v}_x+2\overline{v}_x\Delta v_x+\Delta v_x^2}=$$

$$=\overline{v}_x\overline{v}_x+2\overline{v}_x\overline{\Delta v}_x+\overline{\Delta v_x^2}$$

или, учитывая уравнение (9. 51),

$$\overline{v_x v_x}=\overline{v}_x\overline{v}_x+\overline{\Delta v_x^2}.$$

Следовательно, уравнение (9. 57) можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial (\overline{v}_x\overline{v}_x)}{\partial x}+\frac{\partial (\overline{v}_x\overline{v}_y)}{\partial y}+\frac{\partial (\overline{v}_x\overline{v}_z)}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\nu\nabla^2\overline{v}_x-$$

$$-\frac{\partial (\overline{\Delta v_x\Delta v_x})}{\partial x}-\frac{\partial (\overline{\Delta v_x\Delta v_y})}{\partial y}-\frac{\partial (\overline{\Delta v_x\Delta v_z})}{\partial z}.$$

Используя осредненное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}_y}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v}_z}{\partial z}=0,$$

будем иметь

$$\overline{v}_x\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x}+\overline{v}_y\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y}+\overline{v}_z\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\nu\nabla^2\overline{v}_x-$$

$$-\frac{\partial (\overline{\Delta v_x\Delta v_x})}{\partial x}-\frac{\partial (\overline{\Delta v_x\Delta v_y})}{\partial y}-\frac{\partial (\overline{\Delta v_x\Delta v_z})}{\partial z}.$$

Проделав аналогичные преобразования с двумя другими уравнениями системы (9. 55), получим следующую систему осредненных дифференциальных уравнений для турбулентного движения жидкости, называемых уравнениями Рейнольдса:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\rho\left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\nabla^2\bar{v}_x + \\
&+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{\Delta v_x \Delta v_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{\Delta v_x \Delta v_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{\Delta v_x \Delta v_z}), \\
&\rho\left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu\nabla^2\bar{v}_y + \\
&+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{\Delta v_x \Delta v_y}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{\Delta v_y \Delta v_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{\Delta v_y \Delta v_z}), \\
&\rho\left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu\nabla^2\bar{v}_z + \\
&+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{\Delta v_x \Delta v_z}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{\Delta v_y \Delta v_z}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{\Delta v_z \Delta v_z}).
\end{aligned}
\right\}
\quad (9.58)
$$

Сравнение полученных уравнений (9. 58) для турбулентного потока жидкости с общими уравнениями (9. 11) показывает, что в турбулентном потоке образуются некоторые дополнительные напряжения[1] от пульсационных скоростей (обозначения аналогичны тем, которые были введены для напряжений в § 1 настоящей главы, но со значком т)

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overline{p^{\text{т}}_{xx}} = -\rho\overline{\Delta v_x \Delta v_x}; \quad \overline{p^{\text{т}}_{yy}} = -\rho\overline{\Delta v_y \Delta v_y}; \quad \overline{p^{\text{т}}_{zz}} = -\rho\overline{\Delta v_z \Delta v_z}, \\
&\overline{\tau^{\text{т}}_{xy}} = \overline{\tau^{\text{т}}_{yx}} = -\rho\overline{\Delta v_x \Delta v_y}; \quad \overline{\tau^{\text{т}}_{yz}} = \overline{\tau^{\text{т}}_{zy}} = \\
&= -\rho\overline{\Delta v_y \Delta v_z}; \quad \overline{\tau^{\text{т}}_{xz}} = \overline{\tau^{\text{т}}_{zx}} = -\rho\overline{\Delta v_z \Delta v_x}.
\end{aligned}
\right\}
\quad (9.59)
$$

Величины *полных* осредненных напряжений в турбулентном потоке запишутся в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{p}_{xx} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - \rho(\overline{\Delta v_x \Delta v_x}), \\
\bar{p}_{yy} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} - \rho(\overline{\Delta v_y \Delta v_y}), \\
\bar{p}_{zz} &= -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - \rho(\overline{\Delta v_z \Delta v_z}),
\end{aligned}
\right\}
\quad (9.60)
$$

---

[1] Термин «дополнительные напряжения» следует здесь понимать как дополнение к тем напряжениям, которые были бы в ламинарном потоке, где распределение скоростей совпадает с распределением осредненных скоростей в турбулентном потоке.

$$\left.\begin{aligned}\overline{\tau}_{xy}=\overline{\tau}_{yx}=\mu\left(\frac{\partial\overline{v}_x}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}_y}{\partial x}\right)-\rho\,(\overline{\Delta v_x\Delta v_y}),\\ \overline{\tau}_{yz}=\overline{\tau}_{zy}=\mu\left(\frac{\partial\overline{v}_z}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}_y}{\partial z}\right)-\rho\,(\overline{\Delta v_y\Delta v_z}),\\ \overline{\tau}_{xz}=\overline{\tau}_{zx}=\mu\left(\frac{\partial\overline{v}_x}{\partial z}+\frac{\partial\overline{v}_z}{\partial x}\right)-\rho\,(\overline{\Delta v_x\Delta v_z}).\end{aligned}\right\}\quad(9.60)$$

Из уравнений (9. 59) видно, что для нахождения дополнительных напряжений, появляющихся от пульсаций скорости, надо знать осредненные значения соответствующих произведений пульсационных скоростей. Последнее требует привлечения дополнительных соотношений.

В связи с таким осложнением появляется необходимость введения различных дополнительных гипотез о механизме турбулентного потока.

Не входя в дальнейший анализ теории турбулентного течения, укажем, что большой вклад в изучение турбулентных потоков внесли наши отечественные ученые. Профессорам А. А. Фридману и Л. В. Келлеру принадлежит честь создания так называемой статистической теории турбулентности, которая была развита А. Н. Колмогоровым, Л. Г. Лойцянским, М. Д. Миллионщиковым, Л. И. Седовым, А. М. Обуховым [33].

§ 6. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛОСКОЙ И КРУГЛОЙ ТРУБАХ

Задача о квазиустановившемся турбулентном течении жидкости в плоской и круглой трубах достаточно удовлетворительно решается методом полуэмпирической теории.

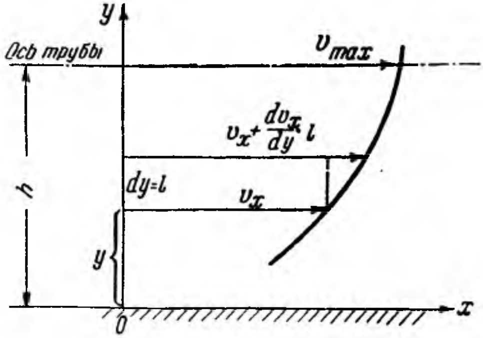
Исследования турбулентного течения жидкости в трубах были проведены Л. Г. Лойцянским, А. М. Обуховым, К. К. Федяевским, А. П. Мельниковым, Г. А. Гуржиенко и др. [33]. Последнему, в частности, принадлежит наиболее полное экспериментальное исследование турбулентного потока в цилиндрической трубе.

Из работ зарубежных ученых следует отметить работы, проведенные в этой области Л. Прандтлем, Т. Карманом, Н. Никурадзе [1].

Ниже (гл. X) будет показано, что полуэмпирическая теория турбулентности находит применение и в задачах о так называемом пограничном слое.

Рассмотрим вначале турбулентное течение жидкости вдоль бесконечно длинной плоской трубы, стенку которой примем за ось x В этом случае во всех точках потока осредненные скорости вдоль осей y и z будут равны нулю. Принимая движение квазиустановившимся, будем считать составляющую осредненной скорости v_x (черточку сверху здесь и в дальнейшем опускаем) функцией только поперечной координаты y, т. е. $v_x=v_x(y)$.

В предыдущем параграфе уже отмечалось, что в турбулентном потоке, кроме «осредненного» поступательного потока жидкости, существует еще и «пульсационный» поток. В результате пульсационного поперечного движения частицы жидкости, двигающиеся с некоторой осредненной скоростью v_x в осевом направлении x, за время dt перемещаются и в поперечном направлении на некоторое малое расстояние l (фиг. 9.9). Частица, имевшая осевую скорость v_x, попадает в зону, где осевая скорость ввиду наличия градиента скорости уже имеет другое значение, отличающееся на величину $dv_x = \frac{dv_x}{dy} l$.



Фиг. 9.9. Турбулентное плоское течение жидкости.

Вследствие этого в направлении главного движения происходит *изменение количества движения* частиц жидкости, вызывающее появление дополнительных сопротивлений движению жидкости.

Если обозначить пульсационную скорость поперечного движения частиц жидкости через v_y, то через некоторую направленную вдоль основного потока площадку dS (перпендикулярную к v_y) за время dt пройдет масса жидкости

$$dm = \rho dS v_y dt.$$

Изменение количества движения (параллельно оси x), этой массы жидкости, перемещающейся по вертикали на длину l, равно

$$dm\, dv_x = \rho\, dS v_y\, dt \frac{dv_x}{dy} l. \tag{9.61}$$

Согласно теореме импульсов изменение количества движения за время dt равно импульсу сил за тот же промежуток времени, т. е.

$$dm\, dv_x = F\, dt,$$

где через F обозначено усилие, параллельное основному потоку.

Разделив левую и правую части последнего уравнения на $dS\, dt$ и учитывая уравнение (9.61), будем иметь

$$\tau_{турб} = \frac{F}{dS} = \rho v_y \frac{dv_x}{dy} l = \rho v_y\, dv_x.$$

Если допустить, что v_y и dv_x — величины одного и того же порядка малости, т. е. считать $v_y \sim dv_x$, то приближенно

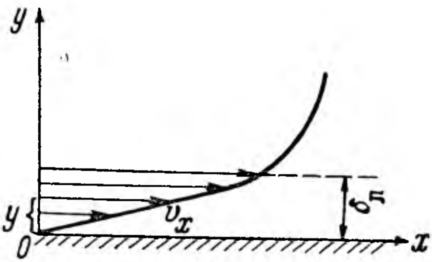
$$\tau_{турб} = \rho\, (dv_x)^2 = \rho l^2 \left(\frac{dv_x}{dv}\right)^2. \tag{9.62}$$

Последняя зависимость характеризует дополнительное напряжение трения, возникающее в турбулентном квазиустановившемся потоке жидкости из-за наличия поперечных движений отдельных частиц, т. е. пульсаций скорости.

Л. Прандтль, исходя из представления о сходстве между явлением переноса количества движения при турбулентном перемешивании и при столкновении молекул в ламинарном движении, предложил трактовать величину l как турбулентный аналог «пути свободного пробега молекулы» и называть ее *путем перемешивания.*

На основании изложенного можно сделать заключение о том, что *полное* напряжение сил трения в турбулентном потоке будет определяться суммой, состоящей из основного вязкостного напряжения и дополнительного напряжения от пульсаций, т. е.

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2. \quad (9.63)$$



Фиг. 9.10. Ламинарный подслой.

Опытами установлено, что при турбулентном течении жидкости в непосредственной близости к стенкам в очень тонком слое течение сохраняется ламинарным (фиг. 9.10), и трение в этом слое подчиняется закону

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy}.$$

Отсюда следует, что относительное значение каждого из членов, входящих в выражение (9.63), существенно зависит от местоположения участка потока, к которому это выражение применяется. Так, вблизи стенок потока, т. е. в зоне ламинарного слоя, где доминирует влияние только основных сил вязкости, первое слагаемое уравнения (9.63) имеет решающее значение. Наоборот, в центральной зоне, где явления турбулентного перемешивания наиболее развиты, основную роль играет второе слагаемое.

Установим порядок толщины ламинарного подслоя. Будем предполагать, что между толщиной подслоя $\delta_л$, физическими константами жидкости μ и ρ и напряжением трения τ_0 существует зависимость

$$\delta_л = \alpha \mu^a \rho^b \tau_0^c, \quad (9.64)$$

где α — некоторая безразмерная константа.

Используя теорию размерностей, можем написать

$$|L| = \left|\frac{M}{TL}\right|^a \left|\frac{M}{L^3}\right|^b \left|\frac{M}{LT^2}\right|^c,$$

откуда получаем

$$a=1,\quad b=-\frac{1}{2},\quad c=-\frac{1}{2},$$

т. е.

$$\delta_л=\alpha\mu\rho^{-\frac{1}{2}}\tau_0^{-\frac{1}{2}}. \tag{9.65}$$

Введем обозначение

$$v_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \tag{9.66}$$

Величина v_* имеет размерность скорости и ее иногда условно называют скоростью касательного напряжения или в силу своего чисто динамического определения через величины τ_0 и ρ — динамической скоростью (следует иметь в виду, что v_* не является скоростью движения частиц жидкости). Таким образом,

$$\delta_л=\alpha\frac{\nu}{v_*}. \tag{9.67}$$

Постоянная α является одной из наиболее характерных констант, определяющих турбулентные течения в трубах. Ее значение определить теоретическим путем не удается. На основании опытов найдено значение $\alpha=11{,}5$.

Последнее выражение для $\delta_л$ можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\delta_л}{r_0}=\alpha\frac{\nu}{v_{\max}r_0}\frac{v_{\max}}{v_*}=\frac{\alpha}{\mathrm{R}_m}\sqrt{\frac{\rho v_{\max}^2}{\tau_0}},$$

т. е.

$$\frac{\delta_л}{r_0}=\frac{\mathrm{const}}{\mathrm{R}_m}, \tag{9.68}$$

где

$$\mathrm{R}_m=\frac{v_{\max}r_0}{\nu}.$$

На основании формулы (9.68) можно сделать заключение, что *при больших значениях* R_m *толщина ламинарного подслоя составляет ничтожную часть диаметра круглой трубы*[1].

По современным воззрениям за ламинарным подслоем следует промежуточная область или переходный слой (зона) от ламинарного к турбулентному движению, тоже весьма тонкий. За переходным слоем в центральной части потока располагается так называемое ядро течения (фиг. 9.11). В ядре течения движение жидкости является уже чисто турбулентным.

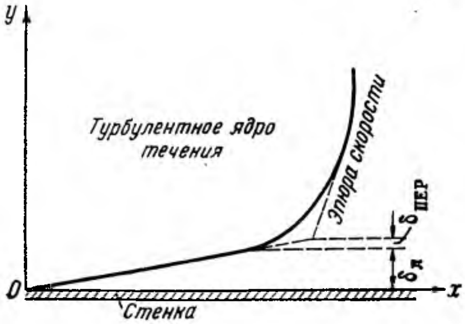
---

[1] Это дает возможность считать, что практически профиль скоростей в ламинарном подслое — прямолинейный.

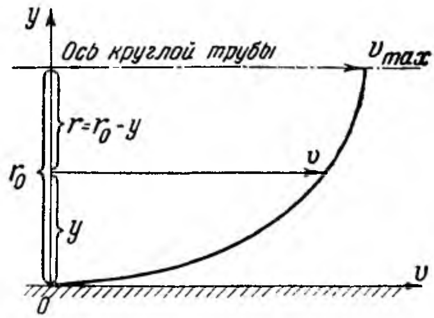
Пренебрегая толщиной ламинарного подслоя и считая течение в трубе полностью турбулентным, найдем закон распределения скорости v_x по сечению трубы и величину напряжения трения τ_0.

Эмпирический закон сопротивления для турбулентных течений в гладких трубах может быть представлен следующей зависимостью [1]:

$$\Delta p = \frac{C_1}{\sqrt[4]{\mathrm{R}}} \frac{l}{r_0} \rho \frac{v_{\text{ср}}^2}{2}, \tag{9.69}$$



Фиг. 9.11. Структура потока при турбулентном течении жидкости по трубе.



Фиг. 9.12 Степенной закон распределения скорости по сечению круглой трубы при турбулентном потоке.

где Δp — перепад давлений на рассматриваемом участке l гладкой цилиндрической трубы; r_0 — радиус трубы; $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость течения; C_1 — некоторая постоянная; $\mathrm{R} = \frac{v_{\text{ср}} r_0}{\nu}$.

Воспользуемся известным уравнением

$$\Delta p = 2 \frac{l}{r_0} \tau_0, \tag{9.70}$$

устанавливающим связь величины падения давления вдоль трубы на длине l с напряжением трения на стенках трубы τ_0.

Используя формулы (9.69) и (9.70), будем иметь

$$\tau_0 = C_2 \rho \nu^{\frac{1}{4}} v_{\text{ср}}^{\frac{7}{4}} r_0^{-\frac{1}{4}}. \tag{9.71}$$

Сделаем два предположения. Во-первых, предположим, что распределение скоростей по сечению трубы не зависит от расхода и скорости движения жидкости в трубе и подчиняется *степенному закону* (фиг. 9.12):

$$v = v_{\max} \left(\frac{y}{r_0} \right)^n.$$

Считая, что максимальная скорость течения пропорциональна средней скорости

$$v_{\max} = C_3 v_{\text{ср}},$$

получим

$$\tau_0 = \text{const}\, \rho \nu^{\frac{1}{4}} v^{\frac{7}{4}} \frac{r_0^{\frac{7}{4}n - \frac{1}{4}}}{y^{\frac{7}{4}n}}. \tag{9.72}$$

Определим величину показателя степени n. Для этого сделаем второе предположение, что размеры трубы не влияют на величину напряжения трения. Тогда, полагая показатель степени при r_0 в последней формуле равным нулю, сразу получаем

$$n = \frac{1}{7}.$$

Следовательно, закон распределения скоростей принимает вид

$$v = v_{\max} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{\frac{1}{7}} \tag{9.73}$$

или, учитывая, что $y = r_0 - r$,

$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{7}}, \tag{9.74}$$

т. е. в случае турбулентного течения скорость в поперечном сечении трубы возрастает по направлению от стенки к оси трубы пропорционально корню седьмой степени из расстояния от стенки.

Этот закон получил название *закона корня одной седьмой* или просто *закона одной седьмой*[1] и часто употребляется на практике.

Заметим, что для распределения скорости по сечению трубы существует более точная формула, имеющая вид

$$\frac{v}{v_*} = 5{,}75 \lg \frac{y v_*}{\nu} + 5{,}5, \tag{9.74'}$$

где

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}.$$

Эта формула для распределения скорости получила название *логарифмического закона.*

---

[1] Существуют более строгие выводы степенного закона (см. [1]). Следует отметить, что закон одной седьмой хорошо согласуется с опытами только до чисел $R < 50\,000$. При $R = 200\,000$ более подходящим оказывается закон корня восьмой степени, а при числах R порядка $500\,000$ — закон корня десятой степени.

Используя закон одной седьмой, нетрудно получить выражение для напряжения трения на стенке.

По данным опытов соотношение между максимальной и средней скоростями имеет вид

$$v_{\max}=1{,}235v_{\text{ср}}.$$

Поэтому, принимая $C_3=1{,}235$, получим следующее выражение для искомого напряжения трения на стенке:

$$\tau_0=0{,}0225\rho\nu^{\frac{1}{4}}v^{\frac{7}{4}}y^{-\frac{1}{4}} \tag{9.75}$$

или

$$\tau_0=0{,}0225\rho v^2\left(\frac{\nu}{vy}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{9.76}$$

При вычислении τ_0 по формулам (9.75) или (9.76) можно задаваться любым значением $y\neq 0$ и $y\neq r_0$ и находить соответствующее ему значение v по формуле (9.73).

На основании изложенного можно сделать заключение, что при турбулентном потоке распределение скорости по сечению трубы сильно отличается от распределения скорости для ламинарного потока. При турбулентном течении скорость резко изменяется только вблизи стенки и весьма мало в пределах основного ядра течения (см. фиг. 9.11), в связи с чем градиенты скорости при турбулентном движении в основной части потока гораздо меньше, чем при ламинарном, а у стенки, наоборот, больше.

Глава X

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

§ 1. ПОНЯТИЕ О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Точное решение задачи об обтекании потоком вязкой жидкости какого-либо тела, например, крыла или фюзеляжа, сводится к интегрированию сложных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости при заданных граничных и начальных условиях.

В настоящее время существуют методы упрощения уравнений движения вязкой жидкости. Один из них заключается в том, что инерционные члены в этих уравнениях полностью отбрасываются, а слагаемые, определяемые вязкостью, сохраняются без изменения.

Таким методом в 1851 г. Стоксом была полностью решена задача об обтекании потоком вязкой жидкости шара радиуса r_0 (инерционные члены отбрасывались). Полученная формула для силы сопротивления (формула Стокса) имеет вид

$$X=6\pi\mu v_\infty r_0,$$

т. е. сила сопротивления оказывается пропорциональной первой степени скорости.

Однако формула Стокса применима лишь при очень малых значениях чисел R (при $R<1$), ибо полностью пренебрегать силами инерции по сравнению с силами вязкости можно только в том случае, если число R достаточно мало по величине. Она применима, например, к изучению падения капелек тумана в воздухе, но уже для случая падения в воздухе дождевых капель она становится непригодной.

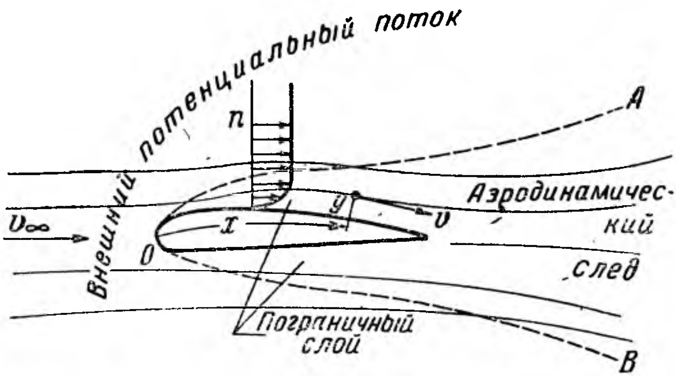
Несколько иной способ упрощения задачи, уточняющий метод Стокса, принадлежит Озину [2] и заключается в том, что в уравнениях движения оставляются только важнейшие из инерционных членов, которые к тому же линеаризуются путем замены неизвестной скорости, стоящей множителем перед производной, ее характерным значением. При этом нелинейная система дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости сводится к линейным уравнениям с частными производными первого и второго порядков.

Метод Озина приводит к весьма сложным выкладкам и практически применим только при малых числах R.

Известен также метод упрощения уравнений Навье—Стокса, принадлежащий О. Рейнольдсу и состоящий в том, что в уравнениях движения вязкой жидкости инерционные члены отбрасываются полностью, а из вязких членов сохраняются главнейшие. Этот метод довольно широко используется при решении задач гидродинамической теории смазки и применим также при небольших значениях чисел Рейнольдса.

Таким образом, практическое применение результатов, полученных на основе указанных выше методов, крайне ограничено и для аэродинамики интереса не представляет.

Другой метод упрощения уравнений движения вязкой жидкости, принципиально отличный от предыдущих, применим, наоборот, к изучению обтекания тел при больших числах R, вследствие чего он имеет огромное значение для авиации.



Фиг. 10.1. Схема пограничного слоя.

Этот метод основан на понятии о пограничном слое. Как будет показано ниже, он позволяет построить приближенную теорию обтекания тела вязкой жидкостью и определить силу лобового сопротивления тела в потоке вязкой жидкости.

Обратимся к рассмотрению физической картины обтекания. Допустим, что неподвижное тело, например, профиль крыла, обтекается потоком воздуха (фиг. 10.1). Непосредственные наблюдения показывают, что в тонком слое вблизи поверхности тела происходит резкое нарастание скорости от значения $v=0$ на поверхности тела до величины порядка скорости набегающего потока. Такой слой воздуха, прилегающий к поверхности обтекаемого тела и представляющий собой область больших значений градиентов скорости по нормали к телу, носит название *пограничного слоя.*

Частицы пограничного слоя, пройдя вдоль поверхности обтекаемого тела, уносятся потоком в область, находящуюся за телом, сохраняя на себе следы пребывания в пограничном слое. Это выражается, в частности, в том, что скорости этих частиц, как правило, меньше скорости в окружающей среде. Заторможенные частицы образуют за телом область, называемую *аэродинамическим следом.*

Как показывают экспериментальные и теоретические исследования, эта область может быть заполнена и отдельными вихрями, образующимися при обтекании тела. В этом случае область за телом представляет собой так называемый вихревой след.

Формула Ньютона для силы внутреннего трения

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n} = \rho\nu \frac{\partial v}{\partial n}$$

показывает, что внутри пограничного слоя и следа, где градиенты скорости значительны, величиной τ — силой внутреннего трения — пренебрегать нельзя, и жидкость, движущуюся внутри пограничного слоя, следует считать вязкой даже при малом значении коэффициента ν.

Вне пограничного слоя и следа за телом, где градиенты скорости малы, силой внутреннего трения можно пренебречь, т. е. считать жидкость идеальной, а поток жидкости безвихревым (потенциальным).

Таким образом, жидкость вне пограничного слоя и следа можно рассматривать как идеальную и ее движение изучать с помощью уравнений Эйлера. Внутри же пограничного слоя жидкость следует рассматривать как вязкую и изучать ее движение с помощью дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. В следующем параграфе будет показано, что благодаря малой толщине пограничного слоя дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости значительно упрощаются.

Понятие о пограничном слое было впервые отчетливо сформулировано Н. Е. Жуковским в 1890 г. в работе «О форме судов» [34]. В известном курсе «Теоретические основы воздухоплавания» [35] Н. Е. Жуковский излагает важнейшие свойства пограничного слоя и указывает на роль пограничного слоя в образовании силы сопротивления при движении тела в жидкости.

В этом курсе Жуковский указывает: «Я предлагаю считать (это не очень точно подтверждено опытами, но все же довольно близко к действительности), что при стенках скорость жидкости равна нулю, но что затем она очень быстро возрастает и становится равной той теоретической, которая получается в предположении существования потенциала скоростей». Далее Н. Е. Жуковский отмечает: «Слой жидкости около стенок, не имеющий потенциала скоростей, а следовательно, завихренный, весьма тонок. Его толщина h зависит от скорости потока: если скорость мала, то толщина довольно велика; а если скорость велика, то толщина мала».

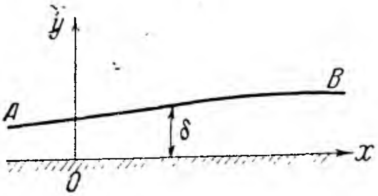
Таким образом, создание схемы обтекания с образованием пограничного слоя принадлежит нашему великому соотечественнику Н. Е. Жуковскому.

Основные дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в пограничном слое были даны в 1904 г. Л. Прандтлем. Дальнейшее развитие теория пограничного слоя получила в работах зарубежных ученых Блазиуса, Хименца, Польгаузена, Кармана, Милликэна, Хоуэрза и др. (см. Лойцянский, Аэродинамика пограничного слоя, Гостехиздат, 1941).

Ряд важнейших исследований по теории пограничного слоя был проведен советскими аэродинамиками и в первую очередь научной школой ЦАГИ. Работы профессоров Л. Г. Лойцянского, А. А. Дородницина, И. В. Остославского, К. К. Федяевского и др. значительно опередили зарубежные исследования в этой области. Советские аэродинамики провели и экспериментальные исследования пограничного слоя, разработали рациональные формы крыльев и фюзеляжей, имеющих наименьшее сопротивление, явились создателями теории пограничного слоя при больших скоростях движения.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Допустим, что плоский поток жидкости движется вдоль твердой границы (контур поверхности тела), которую для простоты будем считать прямолинейной и направленной вдоль оси x (фиг. 10.2). Вдоль этой границы образуется пограничный слой AB, толщину которого обозначим через δ[1].



Фиг. 10.2. К выводу дифференциальных уравнений пограничного слоя.

Так как жидкость внутри пограничного слоя является вязкой, то для изучения ее движения используем дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости, которые для плоского потока будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right).$$

Пренебрегая массовыми силами X и Y и присоединяя к уравнениям движения уравнение неразрывности, получим следующую систему дифференциальных уравнений для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right);\\&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right);\\&\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(10.1)$$

[1]) Следует отметить, что понятие толщины пограничного слоя есть понятие условное. Обычно под толщиной пограничного слоя δ подразумевают такое расстояние от контура тела, на котором скорость будет отличаться от скорости потенциального потока на 1%.

Величина входящей в эти уравнения координаты y ограничена в пограничном слое неравенством

$$0 \leqslant y \leqslant \delta.$$

Это означает, что величину y можно считать малой величиной порядка δ:

$$y \sim \delta.$$

Заметим, что малость δ следует понимать в том смысле, что мало отношение $\frac{\delta}{l}$, где l — характерный размер обтекаемого тела (например, его длина).

Имея это в виду, оценим порядок членов, входящих в уравнения (10. 1).

Так как на стенке обтекаемого тела $v_x = 0$, а на внешней границе слоя v_x имеет порядок V, где V — характерная скорость рассматриваемого течения (например, скорость на бесконечности перед телом), то отсюда следует, что при изменении y от 0 до δ приращение Δv_x имеет порядок V, т. е. $\Delta v_x \sim V$, приращение Δy имеет порядок δ, т. е. $\Delta y \sim \delta$, а потому

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{V}{\delta}.$$

Аналогично можно показать, что внутри пограничного слоя

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{V}{\delta^2}.$$

Чтобы оценить порядок $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, заметим, что при перемещении вдоль обтекаемого контура на отрезок порядка характерной длины l скорость v_x может измениться на величину порядка V (например, от 0 до V), т. е. и в этом случае $\Delta v_x \sim V$. Так как при этом $\Delta x \sim l$, то

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{V}{l}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{V}{l^2}.$$

Используя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

приходим к выводу, что $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ имеет тот же порядок, что и $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, т. е.

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{V}{l}.$$

Поскольку

$$v_y = \int_0^y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy,$$

то отсюда следует, что

$$v_y \sim \int_0^y \frac{V}{l} dy \sim \frac{V\delta}{l}.$$

Имея в виду, что на поверхности обтекаемого тела $v_y=0$ и зная порядок v_y в точках внутри слоя, легко определить порядок производных

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{V\delta}{l^2}; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \frac{V\delta}{l^3}; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{V}{l\delta}.$$

Определив порядок скоростей и их производных, входящих в уравнения (10. 1), перепишем первое из уравнений (10. 1), подписав под каждым членом его порядок:

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + & v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + & v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = & -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + & \nu\Bigg(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + & \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Bigg). \\ & \dfrac{V^2}{l} & \dfrac{V^2}{l} & & \dfrac{V}{l^2} & \dfrac{V}{\delta^2} \end{array}$$

Ясно, что в этом уравнении можно отбросить член $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$, как малый по сравнению с членом $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, ибо отношение $\frac{V}{l^2} \cdot \frac{V}{\delta^2} = \left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ есть квадрат малой величины.

Тогда первое уравнение системы (10. 1) примет вид

$$\begin{array}{cccccc} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + & v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + & v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = & -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + & \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \\ & \dfrac{V^2}{l} & \dfrac{V^2}{l} & & \dfrac{\nu V}{\delta^2}. \end{array}$$

Предположим, что внутри пограничного слоя силы вязкости и силы инерции имеют одинаковый порядок. Тогда отношение

$$\frac{V^2}{l} : \nu \frac{V}{\delta^2} = \frac{V\delta^2}{\nu l} = \frac{Vl}{\nu}\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \mathrm{R},$$

где

$$\mathrm{R} = \frac{Vl}{\nu},$$

должно иметь порядок, равный единице, т. е.

$$\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \mathrm{R} \sim 1.$$

Отсюда следует, что отношение

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}},$$

т. е. *порядок толщины пограничного слоя, образующегося при течениях с большими числами* R, *равен* $\frac{l}{\sqrt{\mathrm{R}}}$ *или* $\sqrt{\frac{l\nu}{V}}$.

В первое уравнение (10.1) входят еще величины $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ и $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$.

Будем предполагать, что изменение течения со временем происходит настолько плавно, что порядок $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ не превосходит порядка $\frac{V^2}{l}$, т. е. не превосходит порядка основных инерционных членов. Тогда и член $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ должен будет иметь тот же порядок $\frac{V^2}{l}$.

Перейдем теперь ко второму уравнению (10.1):

$$\underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + \underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\underset{\frac{V\delta}{l^3}}{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}} + \underset{\frac{V}{l\delta}}{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}}\right).$$

Пренебрегая членом $\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$, так как он мал по сравнению с $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$, перепишем это уравнение в виде

$$\underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + \underset{\frac{V^2\delta}{l^2}}{v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \underset{\frac{\nu V}{l\delta}}{\nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}};$$

Полагая аналогично предыдущему, что $\frac{\partial v_y}{\partial t}$ имеет порядок основных инерционных членов, приходим к выводу, что инерционные члены второго уравнения движения имеют порядок $\frac{V^2\delta}{l^2}$ и, следовательно, их отношение к инерционным членам первого уравнения равно $\frac{\delta}{l}$. Отсюда следует, что инерционными членами второго уравнения можно пренебречь. Точно так же отношение вязких членов второго уравнения движения к вязким членам первого уравнения равно $\frac{\delta}{l}$ и ими также можно пренебречь.

Поэтому с достаточной степенью точности можно заменить второе уравнение системы (10. 1) уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0. \tag{10.2}$$

Таким образом, *давление внутри пограничного слоя не меняется вдоль нормали к контуру тела и равняется давлению на внешней границе слоя в рассматриваемом месте.*

Этот результат имеет большое практическое значение и подтверждается хорошим совпадением величины давления, подсчитанной по теории потенциального потока, с величиной давления, определенной из эксперимента. Подсчитывая распределение давления теоретически на основе потенциального течения, получаем его значения лишь на верхней границе пограничного слоя, ибо внутри слоя течение не потенциальное. Определяя давление экспериментальным путем (путем дренирования), находим распределение давления на самой поверхности тела. Совпадение закона распределения давления, определенного этими двумя способами, и подтверждает, что давление в пограничном слое по нормали к телу не изменяется.

Это облегчает определение распределения давления внутри пограничного слоя. Действительно, из уравнения (10. 2) следует, что распределение давления вдоль слоя совпадает с распределением давления на его границе. Последнее же можно найти, решая задачу о потенциальном обтекании данного тела. Можно также определить распределение давления вдоль пограничного слоя экспериментально (с помощью дренажа).

Таким образом, из трех уравнений системы (10. 1) остаются два уравнения с двумя неизвестными v_x и v_y, так как давление $p(x, t)$ может быть заранее определено. Эта система дифференциальных уравнений пограничного слоя для плоского неустановившегося движения имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2};\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Система (10. 3) носит в литературе название *уравнений пограничного слоя Прандтля.*

Для плоского установившегося движения, отбрасывая в первом уравнении член $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ и заменяя частную производную $\frac{\partial p}{\partial x}$ на полную $\frac{dp}{dx}$, так как в этом случае давление p будет функцией только координаты x, получим следующую систему дифференциальных уравнений пограничного слоя:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

Система уравнений (10.4) интегрируется при следующих граничных условиях:

$$\text{при } y=0 \quad v_x=v_y=0;$$
$$\text{при } y=\delta \quad v_x=u(x),$$

где $u(x)$ — распределение скорости на верхней границе пограничного слоя.

Кроме того, в случае неустановившегося движения нужно учитывать начальные условия: при $t=0$ v_x и v_y должны обращаться в заданные функции от x и y.

Дифференциальные уравнения (10.3) и (10.4) пограничного слоя получены в предположении, что граница твердого тела плоская. Оказывается, что эти уравнения с достаточной точностью справедливы и для криволинейной границы. В этом случае следует считать ось абсцисс искривленной по контуру тела и отсчитывать абсциссу x по дуге контура тела от какой-нибудь точки, принятой за начало координат, а ординату y — по нормали к поверхности тела.

Следует отметить, что дифференциальные уравнения пограничного слоя в форме (10.3) и (10.4) пригодны лишь для изучения ламинарного движения в пограничном слое. Для изучения турбулентного движения в пограничном слое они неприменимы по тем же причинам, по каким уравнения движения вязкой жидкости неприменимы для изучения турбулентного движения.

Дифференциальные уравнения пограничного слоя для *осредненного* турбулентного движения могут быть получены, например, из уравнений (10.3) путем их осреднения.

Решение дифференциальных уравнений движения ламинарного пограничного слоя (10.3) и (10.4), несмотря на то, что они проще общих уравнений движения вязкой жидкости, все же достаточно сложно даже для простейших контуров.

В связи с этим приобретает значение приближенный метод решения задач пограничного слоя, основанный на рассмотрении так называемого интегрального соотношения пограничного слоя, являющегося математическим выражением теоремы о количестве движения.

§ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Выделим в пограничном слое бесконечно малую площадку $ABDC$ (фиг. 10.3), ограниченную элементом BD твердой границы, которую примем за ось x, элементом AC верхней границы пограничного слоя и прямыми AB и CD, отстоящими друг от друга на расстоянии dx. Применим к объему $ABDC$ теорему о количестве движения. Вычислим изменение количества движения в направлении оси x за промежуток времени dt. Очевидно, через участок AB будет втекать количество жидкости

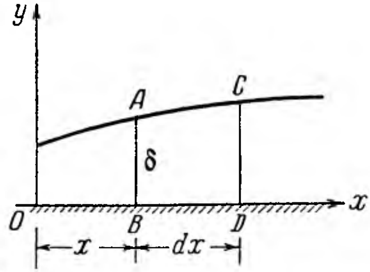
$$dt\int_0^\delta \rho v_x\,dy,$$

а через участок CD вытекать

$$dt\int_0^\delta\left(\rho v_x+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dx\right)dy.$$

Таким образом, через участки AB и CD будет вытекать количество жидкости

$$dt\,dx\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x\,dy.$$



Фиг. 10.3. К выводу интегрального соотношения для пограничного слоя.

В силу условия неразрывности для несжимаемой жидкости через верхнюю границу AC должно втекать такое же количество жидкости. Это количество жидкости внесет следующее количество движения (на границе пограничного слоя скорость $v_x=u$, где u — составляющая скорости потенциального потока):

$$u\,dt\,dx\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x\,dy.$$

Подсчитаем количества движения жидкости, вносимые и уносимые через участки AB и CD. Через участок AB вносится следующее количество движения:

$$dt\int_0^\delta v_x\rho v_x\,dy=dt\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy=F(x,\ t).$$

Количество движения вытекающей через участок CD жидкости будет равно

$$F(x+dx,\ t)=F(x,\ t)+F'\ (x,\ t)\,dx.$$

Следовательно, через участки AB и CD в направлении оси x уносится следующее количество движения:

$$F(x+dx,\ t)-F(x,\ t)=F'\,(x,\ t)\,dx=dt\,dx\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy.$$

Если течение неустановившееся, то изменение за время dt количества движения жидкости, находящейся в объеме $ABDC$, можно представить в виде

$$dt\,dx\int_0^\delta \rho\frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy.$$

Считая в соответствии с обычными правилами вытекающее количество движения положительным, а втекающее отрицательным, получим следующую величину общего изменения количества движения жидкости в объеме $ABDC$ за время dt:

$$dt\,dx\left[\int_0^\delta \rho\frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy-u\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x\,dy\right]. \qquad (а)$$

Вычислим импульсы внешних сил за тот же промежуток времени dt в направлении оси x. Очевидно, на элемент $ABCD$ в направлении оси x будут действовать силы давления, приложенные к левой, верхней и правой граням элемента, и сила трения, приложенная к нижней его грани BD (силы трения, приложенные к левой и правой граням, дают проекцию на ось x, равную нулю, а на верхней грани AC они отсутствуют по самому определению внешней границы пограничного слоя).

Проекции на ось x сил давления, действующих на грани AB, AC и DC, будут соответственно равны

$$p\delta;\quad p\,ds\frac{d\delta}{ds}=p\,d\delta;\quad -\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\left(\delta+\frac{d\delta}{dx}dx\right)=$$
$$=-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(\delta+d\delta),$$

где $ds=AC$ и $\frac{d\delta}{ds}$ — синус угла, который AC составляет с осью x.

Сумма этих проекций равна

$$p\delta+p\,d\delta-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(\delta+d\delta)=p\delta+p\,d\delta-p\delta-p\,d\delta-$$
$$-\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx-d\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx\approx-\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx,$$

а их импульс за время dt составит

$$-\delta\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dt. \qquad (б)$$

На границе элемента BD действует сила трения, направленная влево, величину которой, отнесенную к единице площади, обозначим через — τ_0. Умножая эту силу на величину площади $1.dx$ и на промежуток времени dt, получим выражение для импульса силы трения

$$-\tau_0\, dx\, dt. \tag{в}$$

Приравнивая выражение (а) для изменения количества движения сумме величин (б) и (в) для импульсов действующих сил и сокращая на $dx\,dt$, получим искомое *интегральное соотношение пограничного слоя* (для случая плоского неустановившегося движения)

$$\int_0^\delta \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x^2\, dy - u\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x\, dy = -\delta\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0. \tag{10. 5}$$

Отбрасывая в этом выражении первый член в левой части и заменяя частные производные полными, получим интегральное соотношение пограничного слоя для установившегося движения

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2\, dy - u\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\, dy = -\delta\frac{dp}{dx} - \tau_0. \tag{10. 6}$$

Следует отметить, что соотношения (10. 5) и (10. 6) являются более общими, чем системы (10. 3) и (10. 4) дифференциальных уравнений, и пригодны для изучения не только ламинарного, но и турбулентного (осредненного) движения жидкости внутри пограничного слоя, так как при их выводе не делалось никаких предположений о природе касательного напряжения τ_0.

Входящие в интегральное соотношение пограничного слоя величины u, $\frac{\partial p}{\partial x}$ и плотность ρ можно рассматривать как известные величины, и тогда неизвестными будут только v_x, δ и τ_0.

Действительно, скорость u потенциального потока вне пограничного слоя можно найти путем решения задачи о потенциальном обтекании или с помощью эксперимента, а по известному u легко определить и значение $\frac{\partial p}{\partial x}$. Покажем это на примере установившегося движения.

Так как движение вне пограничного слоя потенциальное, то для верхней границы пограничного слоя можно написать уравнение Лагранжа—Бернулли

$$p + \rho\frac{u^2}{2} = \text{const}.$$

Дифференцируя по x, находим

$$\frac{dp}{dx} + \rho u\frac{du}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u \frac{du}{dx},$$

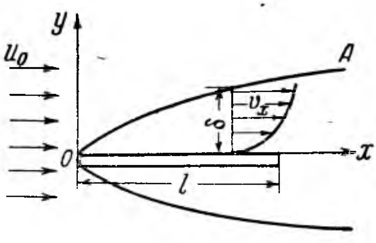
т. е. получаем выражение $\frac{dp}{dx}$ через известную функцию $u(x)$.

Таким образом, величины u, $\frac{dp}{dx}$ и плотность ρ действительно можно считать известными. Так как в уравнение (10. 6) входят три неизвестные величины v_x, δ и τ_0, то для их определения необходимо иметь еще два дополнительных соотношения, связывающих эти неизвестные величины. В качестве таких соотношений обычно принимаются закон распределения скоростей по высоте пограничного слоя и зависимость касательного напряжения от толщины слоя.

Если характер распределения скорости $v_x = f(y)$ внутри пограничного слоя задан правильно, то получится хорошее приближение как для зависимости $\delta = \delta(x)$, так и для коэффициента сопротивления трения.

§ 4. РАСЧЕТ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ

В качестве примера применения интегрального соотношения пограничного слоя к решению практических задач рассмотрим задачу об обтекании пластинки плоским установившимся потоком несжимаемой жидкости[1].



Фиг. 10. 4. Ламинарный пограничный слой на плоской пластинке.

Решение задачи об обтекании плоской пластинки играет в теории сопротивления трения большую роль. Пластинка, поставленная вдоль потока, является простейшим удобообтекаемым телом, сопротивление которого зависит исключительно от касательных напряжений. Найденные для пластинки зависимость $\delta = \delta(x)$ и величина коэффициента сопротивления трения могут быть использованы при приближенных расчетах обтекания других удобообтекаемых тел, например, тонких профилей.

Допустим, что плоский поток, текущий со скоростью $u_0 = \text{const}$, обтекает пластинку длиной l (фиг. 10. 4). Сверху и снизу пластинки будет образовываться пограничный слой, толщина которого δ будет функцией координаты x, отсчитываемой от передней кромки 0 пластинки.

---

[1] В дальнейшем будут рассматриваться только случаи установившегося движения.

Задача сводится к следующему. Зная кинематический коэффициент вязкости ν жидкости, скорость u_0 набегающего потока и длину пластинки l, определить:

1) закон изменения толщины пограничного слоя, т. е. функцию

$$\delta=\delta(x);$$

2) силу сопротивления трения $X_{\text{тр}}$.

Для решения задачи обратимся к интегральному соотношению пограничного слоя (10. 6) для установившегося течения

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy-u\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy=-\delta\frac{dp}{dx}-\tau_0.$$

Покажем, что в рассматриваемом случае внутри пограничного слоя $\frac{dp}{dx}=0$. Выше было установлено, что на верхней границе пограничного слоя

$$\frac{dp}{dx}=-\rho u\frac{du}{dx}.$$

Так как в рассматриваемом случае $u=u_0=\text{const}$, то $\frac{du}{dx}=0$, $\frac{dp}{dx}=0$ и $p=\text{const}$ на верхней границе слоя. Но давление p внутри пограничного слоя по нормали к поверхности тела не изменяется, и, следовательно, $p=\text{const}$ и $\frac{dp}{dx}=0$ и внутри пограничного слоя. Таким образом, интегральное соотношение (10. 6) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy-u_0\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy=-\tau_0. \tag{10.7}$$

Для того чтобы вычислить толщину пограничного слоя и силу сопротивления, приложенную к пластинке, требуются еще два дополнительных соотношения, в качестве которых можно взять:

1) закон распределения скорости v_x по толщине слоя и

2) уравнение, связывающее касательное напряжение на поверхности тела τ_0 с толщиной слоя δ.

Приступая к составлению первого дополнительного уравнения — закона изменения скорости v_x по высоте слоя y, поступим следующим образом. Вместо того чтобы искать истинный закон распределения скорости $v_x=v_x(y)$, зададим вид функции $v_x=v_x(y)$. Именно положим, что v_x выражается через y следующим многочленом третьей степени:

$$v_x=a+by+cy^2+dy^3, \tag{a}$$

где a, b, c и d — неизвестные пока коэффициенты.

Этот метод впервые был предложен немецким ученым Польгаузеном.

Для их определения обратимся к граничным условиям. Граничные условия будут двух родов: кинематические, налагаемые на скорости на границах пограничного слоя, и динамические, налагаемые на силы внутреннего трения. Составим эти граничные условия.

1. Так как на нижней границе пограничного слоя скорость равна нулю, то

$$(v_x)_{y=0}=0. \tag{I}$$

2. На верхней границе слоя скорость v_x становится равной скорости u_0 потенциального потока. Следовательно,

$$(v_x)_{y=\delta}=u_0. \tag{II}$$

3. На верхней границе пограничного слоя сила внутреннего трения $\tau=\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}$ обращается в нуль. Поэтому

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta}=0. \tag{III}$$

4. Для определения четвертого граничного условия обратимся к дифференциальным уравнениям пограничного слоя.

Из первого уравнения системы (10. 4) следует, что на нижней границе пограничного слоя

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

(так как при $y=0$ скорости $v_x=v_y=0$).

Но так как в данном случае $\frac{dp}{dx}=0$, то, следовательно, и

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0. \tag{IV}$$

Указанные четыре граничных условия позволяют определить величины четырех коэффициентов a, b, c, d:

$$a=0,\quad b=\frac{3}{2}\frac{u_0}{\delta},\quad c=0,\quad d=-\frac{u_0}{2\delta^3}.$$

Следовательно, закон распределения скорости $v_x=v_x(y)$ принимает следующий вид:

$$v_x=\frac{u_0}{2\delta}\left(3y-\frac{y^3}{\delta^2}\right). \tag{б}$$

Итак, первое необходимое дополнительное соотношение найдено. Второе дополнительное соотношение найдем, используя закон Ньютона для внутреннего трения (при ламинарном течении):

$$\tau_0=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Так как в данном случае по формуле (б)

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{u_0}{2\delta}\left(3-\frac{3y^2}{\delta^2}\right),$$

то

$$\tau_0=\frac{3}{2}\mu\frac{u_0}{\delta}. \tag{в}$$

После подстановки в интегральное соотношение (10.7) найденных выражений для скорости v_x и касательного напряжения τ_0 получим дифференциальное уравнение, содержащее одну неизвестную величину δ, решая которое найдем $\delta=\delta(x)$.

Действительно, с помощью выражения (б) для скорости v_x легко вычислить интегралы, входящие в интегральное соотношение (10.7):

$$\int\limits_0^\delta \rho v_x\,dy=\int\limits_0^\delta \rho\frac{u_0}{2\delta}\left(3y-\frac{y^3}{\delta^2}\right)dy=\frac{3}{2}\rho\frac{u_0}{\delta}\int\limits_0^\delta y\,dy-\rho\frac{u_0}{2\delta^3}\int\limits_0^\delta y^3\,dy=$$

$$=\frac{3}{2}\rho\frac{u_0}{\delta}\frac{\delta^2}{2}-\rho\frac{u_0}{2\delta^3}\frac{\delta^4}{4}=\frac{5}{8}\rho u_0\delta;$$

$$\int\limits_0^\delta \rho v_x^2\,dy=\rho\frac{u_0^2}{4\delta^2}\int\limits_0^\delta\left(9y^2-6\frac{y^4}{\delta^2}+\frac{y^6}{\delta^4}\right)dy=$$

$$=\rho\frac{u_0^2}{4\delta^2}\left(3\delta^3-\frac{6}{5}\delta^3+\frac{1}{7}\delta^3\right)=\frac{17}{35}\rho u_0^2\delta.$$

Подставляя эти значения интегралов в соотношение (10.7), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{17}{35}\rho u_0^2\frac{d\delta}{dx}-\frac{5}{8}\rho u_0^2\frac{d\delta}{dx}=-\frac{3}{2}\mu\frac{u_0}{\delta},$$

которое после упрощений примет следующий простой вид:

$$\frac{13}{140}\rho u_0\delta\,d\delta=\mu\,dx.$$

Интегрируя, находим

$$\frac{13}{280}\rho u_0\delta^2=\mu x+C.$$

Так как при $x=0$ толщина $\delta=0$, то, очевидно, $C=0$. Следовательно,

$$\delta=\sqrt{\frac{280}{13}\frac{\mu x}{\rho u_0}}$$

или

$$\delta=4{,}64\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}. \tag{10.8}$$

Из формулы (10. 8) следует, что внешняя граница пограничного слоя представляет собой параболу второй степени; толщина δ пограничного слоя растет с увеличением x и убывает с ростом скорости u_0 набегающего потока.

Более точные методы дают следующую зависимость для закона изменения δ:

$$\delta = 5{,}8\sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}. \qquad (10.8')$$

Как видим, задание закона изменения скорости в виде параболы третьей степени приводит к сравнительно небольшой ошибке.

Определим силу сопротивления трения $X_{тр}$, действующую на одну сторону пластинки шириной b.

На единицу поверхности пластинки действует сила

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2}\mu\frac{u_0}{\delta}.$$

Следовательно, при ламинарном течении в пограничном слое касательные напряжения пропорциональны $u_0^{1,5}$, в чем легко убедиться, подставив в формулу для τ_0 значение δ по формуле (10. 8).

На элементарную площадку $dS = b\,dx$ будет действовать сила

$$\tau_0\,dS = \tau_0 b\,dx,$$

откуда полная сила трения, действующая на одну сторону пластинки,

$$X_{тр} = \int_0^l \tau_0 b\,dx$$

или

$$X_{тр} = \int_0^l \mu\frac{3}{2}\frac{u_0}{\delta}b\,dx.$$

Подставляя значение δ по формуле (10. 8), находим

$$X_{тр} = \frac{3b}{4{,}64\cdot 2}\sqrt{\mu\rho u_0^3}\int_0^l\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

или

$$X_{тр} = \frac{1{,}3b}{2}\sqrt{\mu\rho u_0^3 l}. \qquad (10.9)$$

Умножая числитель и знаменатель на $\rho l u_0^2$, будем иметь

$$X_{тр} = 1{,}3\sqrt{\frac{\nu}{u_0 l}}\,\frac{\rho u_0^2 b l}{2}$$

или

$$X_{\text{тр}} = \frac{1,3}{\sqrt{R}} \frac{\rho u_0^2}{2} S, \tag{10.9'}$$

где число $R = \frac{u_0 l}{\nu}$; площадь $S = bl$.

Коэффициент сопротивления плоской пластинки

$$\bar{c}_{x\,\text{тр}} = \frac{X_{\text{тр}}}{\frac{\rho u_0^2}{2} S},$$

и, следовательно, для случая ламинарного пограничного слоя

$$c_{x\,\text{тр}} = \frac{1,3}{\sqrt{R}}. \tag{10.10}$$

Таким образом, коэффициент сопротивления пластинки зависит от числа R и изменяется обратно пропорционально корню квадратному из этого числа.

В настоящем параграфе показано практическое использование интегрального соотношения (10.6) для случая *ламинарного* пограничного слоя. Перейдем к рассмотрению турбулентного пограничного слоя.

§ 5. РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ

В случае турбулентного течения в пограничном слое изложенный в предыдущем параграфе способ нахождения двух дополнительных уравнений к основному интегральному соотношению непригоден, так как он основан на использовании уравнений (10.4), которые, как уже отмечалось, неприменимы к турбулентному пограничному слою. Поэтому в случае турбулентного течения в пограничном слое два дополнительных уравнения необходимо находить иным способом.

Так как законы турбулентного движения наиболее полно исследованы для движения жидкости по трубам, то в качестве необходимых двух дополнительных уравнений к интегральному соотношению можно использовать результаты теории течения жидкости по трубам.

Вводя гипотезу о тождественности законов распределения скорости по толщине пограничного слоя плоской пластинки и по радиусу круглой цилиндрической трубы, можно принять, что изменение скорости внутри пограничного слоя пластинки определяется зависимостью

$$v_x = u_0 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}, \tag{10.11}$$

именуемой законом одной седьмой [см. формулу (9.73)].

Это будет первым дополнительным уравнением к интегральному соотношению.

Вторым дополнительным уравнением будет зависимость между величиной касательного напряжения τ_0, толщиной пограничного слоя δ и скоростью u_0 набегающего потока. Эту зависимость, продолжая аналогию между турбулентным течением жидкости по трубе и вдоль плоской пластинки, можно принять в виде [см. формулу (9.76)]

$$\tau_0 = 0{,}0225\rho u_0^2 \left(\frac{\nu}{u_0\delta}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{10.12}$$

Установив два дополнительных необходимых уравнения, обратимся к интегральному соотношению (10.7)

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy - u_0\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy = -\tau_0.$$

Вычислим входящие в это соотношение интегралы

$$\int_0^\delta \rho v_x\,dy = \int_0^\delta \rho u_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} dy = \rho\frac{u_0}{\delta^{\frac{1}{7}}}\int_0^\delta y^{\frac{1}{7}}\,dy = \frac{7}{8}\rho u_0\delta;$$

$$\int_0^\delta \rho v_x^2\,dy = \int_0^\delta \rho u_0^2\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}} dy = \rho\frac{u_0^2}{\delta^{\frac{2}{7}}}\int_0^\delta y^{\frac{2}{7}}\,dy = \frac{7}{9}\rho u_0^2\delta.$$

Подставляя найденные значения интегралов в соотношение (10.7), будем иметь

$$\frac{7}{72}\rho u_0^2\frac{d\delta}{dx} = \tau_0. \tag{10.13}$$

Подставляя значение τ_0 по (10.12), получим

$$\frac{7}{72}\rho u_0^2\frac{d\delta}{dx} = 0{,}0225\rho u_0^2\left(\frac{\nu}{u_0\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

или

$$\frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{u_0\delta}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Разделяя переменные, приведем уравнение к виду

$$\delta^{\frac{1}{4}}\,d\delta = 0{,}0225\,\frac{72}{7}\left(\frac{\nu}{u_0}\right)^{\frac{1}{4}} dx.$$

Интегрируя и определяя произвольную постоянную C из условия: при $x=0$ толщина $\delta=0$, после простых преобразований получим

$$\delta=0{,}37\left(\frac{\nu}{u_0 x}\right)^{\frac{1}{5}} x. \tag{10.14}$$

Из полученного выражения следует, что толщина турбулентного пограничного слоя нарастает более интенсивно, чем ламинарного, ибо в этом случае величина δ пропорциональна $x^{\frac{4}{5}}$ $\left(\text{в ламинарном слое } \delta \text{ была пропорциональна } x^{\frac{1}{2}}\right)$.

Этот вывод физически легко объясним, так как перемешивание частиц, имеющее место в турбулентном слое, способствует более интенсивному его росту.

Определим силу сопротивления трения $X_{\text{тр}}$. Используя выражение (10. 13), будем иметь

$$X_{\text{тр}}=\int_0^l \tau_0 b\,dx=\int_0^l b\,\frac{7}{72}\,\rho u_0^2\,\frac{d\delta}{dx}\,dx=\frac{7}{72}\,\rho u_0^2 b\int_0^{\delta(l)} d\delta=\frac{7}{72}\,\rho u_0^2 b\,\delta(l).$$

Так как из выражения (10. 14) следует, что

$$\delta(l)=0{,}37\left(\frac{\nu}{u_0 l}\right)^{\frac{1}{5}} l,$$

то для коэффициента $c_{x\,\text{тр}}$, равного

$$c_{x\,\text{тр}}=\frac{X_{\text{тр}}}{\frac{\rho u_0^2}{2}S},$$

где

$$S=bl,$$

будем иметь

$$c_{x\,\text{тр}}=0{,}072\left(\frac{\nu}{u_0 l}\right)^{\frac{1}{5}}$$

или

$$c_{x\,\text{тр}}=\frac{0{,}072}{\mathrm{R}^{0,2}}. \tag{10.15}$$

Зависимость коэффициентов сопротивления от числа R удобно изображать в так называемых логарифмических координатах, в качестве которых принимают $\lg \mathrm{R}$ и $\lg c_{x\,\text{тр}}$ (фиг. 10. 5). При этом зависимость $c_{x\,\text{тр}}$ для ламинарного пограничного слоя изобразится прямой *1*:

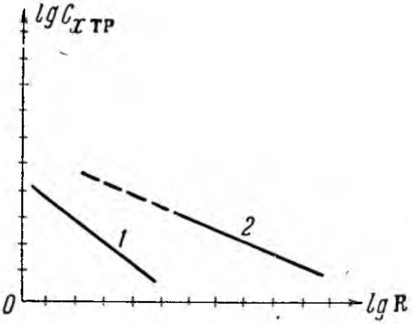
$$\lg c_{x\,\text{тр}}=\lg 1{,}3-\frac{1}{2}\lg \mathrm{R}$$

с угловым коэффициентом $-\frac{1}{2}$, а зависимость $c_{x\,\text{тр}}$ для турбулентного пограничного слоя прямой 2:

$$\lg c_{x\,\text{тр}} = \lg 0{,}072 - \frac{1}{5} \lg \mathrm{R}$$

с угловым коэффициентом $-\frac{1}{5}$.

Как видим, в обоих случаях с увеличением числа R коэффициент сопротивления убывает, но при турбулентном слое значительно медленнее, чем при ламинарном.



Фиг. 10.5. Зависимость $c_{x\,\text{тр}}$ плоской пластинки от числа R.

1—ламинарный пограничный слой, *2*—турбулентный пограничный слой.

Как показывают опыты, более точно коэффициент сопротивления пластинки в случае турбулентного пограничного слоя выражается формулой

$$c_{x\,\text{тр}} = \frac{0{,}074}{\mathrm{R}^{0{,}2}}. \qquad (10.16)$$

В пределах $10^6 < \mathrm{R} < 10^9$ часто пользуются следующей формулой:

$$c_{x\,\text{тр}} = \frac{0{,}455}{(\lg \mathrm{R})^{2{,}58}}. \qquad (10.17)$$

Как видим, теория достаточно хорошо подтверждается экспериментом, и тем самым оправдывается введенная выше аналогия между турбулентными течениями по трубам и в пограничном слое плоской пластинки.

В большинстве случаев для расчета пограничного слоя используют интегральное соотношение (10.6), а не уравнения (10.4), так как последние, являясь дифференциальными уравнениями в частных производных, более сложны, чем интегральное соотношение, которое, как было показано, легко приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Однако следует отметить, что при использовании интегрального соотношения всегда приходится задаваться законом распределения скоростей в пограничном слое в том или ином виде.

§ 6. РАСЧЕТ СМЕШАННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ

Характер пограничного слоя, образующегося при обтекании потоком жидкости плоской пластинки, существенно зависит от режима обтекания, определяемого числом R. При сравнительно небольших числах R вдоль всей пластинки образуется ламинарный пограничный слой, расчет которого приведен в § 4.

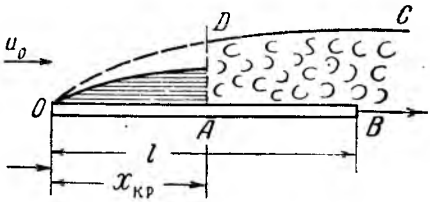
При очень больших значениях числа R практически вдоль всей пластинки образуется турбулентный пограничный слой. Этот случай рассмотрен в § 5. В диапазоне же значений чисел R от $R=10^5$ до $R=5 \cdot 10^6$ в начале пластинки образуется ламинарный пограничный слой, который, начиная с некоторого места, разрушается и переходит затем в чисто турбулентный слой.

В настоящем параграфе и будет изучен случай смешанного пограничного слоя, когда на передней части пластинки OA образуется ламинарный пограничный слой, а за ним на участке AB — турбулентный (фиг. 10. 6), впервые рассмотренный проф. Прандтлем.

Сделаем два упрощающих предположения:

а) переход от ламинарного пограничного слоя к турбулентному происходит мгновенно в точке A; расстояние OA обозначим через $x_{кр}$;

б) изменение толщины турбулентного слоя, распределение скоростей и касательных напряжений в нем, аналогично тому, которое было бы, если бы турбулентный слой начинался не от точки A, а от передней кромки O (см. фиг. 10. 6).



Фиг. 10. 6. Расчетная схема смешанного пограничного слоя на плоской пластинке.

Исходя из этих предположений, расчет силы сопротивления трения можно произвести следующим образом. Обозначим через $X''_{тр}$ силу трения всей пластины длиной l, в предположении, что пограничный слой на всем ее протяжении турбулентный. Тогда, чтобы получить силу трения $X_{тр}$ для смешанного слоя, нужно из $X''_{тр}$ вычесть силу трения переднего участка слоя OA, считая его турбулентным, и прибавить к полученной разности силу трения этого же участка OA, считая его ламинарным, т. е.

$$X_{тр} = X''_{тр} - X''_{тр\,OA} + X'_{тр\,OA},$$

где $X'_{тр\,OA}$ — сила трения ламинарного участка OA.

Силу трения переднего участка пластины шириной b при ламинарном пограничном слое можно написать в виде

$$c'_{x\,тр}\rho\frac{u_0^2}{2}x_{кр}b,$$

а при турбулентном слое в виде

$$c''_{x\,тр}\rho\frac{u_0^2}{2}x_{кр}b.$$

Разность

$$\Delta X_{тр} = -X''_{тр\,OA} + X'_{тр\,OA} = -c''_{x\,тр}\rho\frac{u_0^2}{2}x_{кр}b + c'_{x\,тр}\rho\frac{u_0^2}{2}x_{кр}b =$$

$$= -\frac{\rho u_0^2}{2}\left(c''_{x\,тр} - c'_{x\,тр}\right)x_{кр}b.$$

Разделим обе части этого равенства на $\frac{\rho u_0^2}{2} lb$. Тогда для изменения $c_{x\,тр}$ пластинки от наличия ламинарного участка будем иметь

$$\Delta c_{x\,тр} = -\frac{(c''_{x\,тр} - c'_{x\,тр})}{l} x_{кр} = -\frac{(c''_{x\,тр} - c'_{x\,тр}) \frac{x_{кр} u_0}{\nu}}{\frac{u_0 l}{\nu}} = -\frac{A}{\mathrm{R}},$$

где через A обозначена следующая величина:

$$A = (c''_{x\,тр} - c'_{x\,тр}) \frac{x_{кр} u_0}{\nu} = (c''_{x\,тр} - c'_{x\,тр}) \mathrm{R}_{кр}$$

и число $\mathrm{R}_{кр} = \frac{x_{кр} u_0}{\nu}$ принято называть *критическим*.

Опытным путем установлено, что для гладких пластин величина $A = 1700$. При увеличении шероховатости пластинки или степени турбулентности набегающего потока уменьшается критическое число R и величина A. Для шероховатых пластин $A = 300$. Следовательно,

$$300 \leqslant A \leqslant 1700.$$

Таким образом, для величины коэффициента трения плоской пластинки в случае смешанного пограничного слоя получаем следующее выражение:

$$c_{x\,тр} = \frac{0{,}074}{\mathrm{R}^{0,2}} - \frac{A}{\mathrm{R}} \qquad (10.18)$$

или

$$c_{x\,тр} = \frac{0{,}455}{(\lg \mathrm{R})^{2,58}} - \frac{A}{\mathrm{R}}. \qquad (10.19)$$

Из изложенного следует, что сопротивление трения пластинки будет тем меньше, чем больше длина ламинарного участка пограничного слоя, т. е. чем дальше точка A перехода ламинарного слоя в турбулентный отстоит от передней кромки пластинки.

Рассматривая обтекание плоской пластинки как первое приближение к обтеканию крылового профиля, приходим к выводу, что с целью уменьшения сопротивления трения профиля выгодно иметь на нем возможно бо́льший участок ламинарного пограничного слоя. Иными словами, выгодно точку A перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный максимально отодвинуть назад по потоку.

По этому принципу сконструированы специальные крыловые профили, которые, обладая увеличенной зоной ламинарного пограничного слоя, дают значительный выигрыш в сопротивлении (так называемые ламинаризированные профили).

§ 7. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В предыдущих параграфах рассматривался пограничный слой около прямолинейной поверхности. В этом случае скорость потока вне пограничного слоя вдоль всей оси x была постоянной.

При обтекании криволинейной поверхности скорость u на внешней границе пограничного слоя будет величиной переменной, зависящей от координаты x. Давление в пограничном слое криволинейной поверхности также будет функцией x, что следует из уравнения Лагранжа—Бернулли, примененного к внешней границе слоя.

Ранее было установлено, что в пограничном слое распределение давления вдоль тела мало отличается от распределения давления в потенциальном потоке идеальной жидкости, ввиду того что производную $\frac{\partial p}{\partial y}$ в пограничном слое можно считать равной нулю.

Фиг. 10.7. Пограничный слой на профиле крыла.

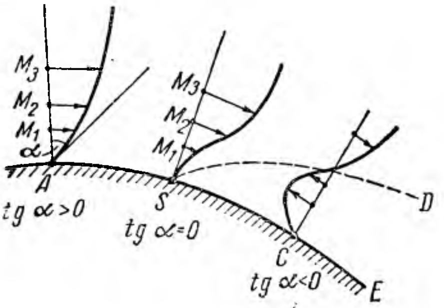
Рассмотрим поток, обтекающий криволинейную поверхность, например, профиль крыла (фиг. 10.7).

Обозначим через v_∞ и p_∞ соответственно скорость и давление, которыми обладает поток на бесконечности. Выясним, как будет меняться в этом случае давление на внешней границе пограничного слоя. Так как на верхней поверхности профиля скорость вначале возрастает (до некоторой точки M), а затем убывает, то давление на основании уравнения Лагранжа—Бернулли будет вначале уменьшаться, а затем расти. В точке M скорость будет максимальна, а давление минимально. Следовательно, частицы жидкости в пограничном слое около рассматриваемой криволинейной поверхности будут двигаться при наличии градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x}$ как отрицательного, так и положительного по знаку.

Этот факт существенно отличает пограничный слой около криволинейной поверхности от пограничного слоя вдоль плоской пластинки, где $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Учитывая эту особенность пограничного слоя около криволинейной поверхности, можно выяснить причины отрыва потока от обтекаемого тела и образования вихрей, срывающихся с обтекаемой поверхности.

При течении вязкой жидкости касательная и нормальная составляющие скорости должны в точках поверхности обращаться в нуль. Кроме того, на некотором небольшом отдалении от поверхности обтекаемого тела течение жидкости мало отличается от течения идеальной жидкости, при котором нормальная составляющая скорости на поверхности тела обращается в нуль, а касательная отлична от нуля. Имея это в виду, приходим к заключению, что изменение касательной составляющей вдоль нормали к поверхности тела должно иметь вид, указанный на фиг. 10.8, кривой, относящейся к точке A. Эта кривая показывает, что касательная скорость, равная нулю в точке A, для точек, расположенных на нормали к криволинейной поверхности, постепенно увеличивается и на некотором расстоянии от поверхности мало отличается от значения, соответствующего потенциальному течению идеальной жидкости.



Фиг. 10.8. Эпюры распределения касательных скоростей около криволинейной поверхности.

Далее известно, что при обтекании вязкой жидкостью какой-либо поверхности частицы жидкости притормаживаются в пограничном слое силами вязкости и притом тем в большей степени, чем ближе траектория частицы проходит к поверхности тела. Кроме того, как это было установлено выше, градиент давления $\frac{\partial p}{\partial x}$ для случая криволинейной поверхности отличен от нуля и, что важно, в кормовой части тела перепад давления направлен в сторону, противоположную основному движению жидкости $\left(\frac{\partial p}{\partial x}>0\right)$, так как в этой части давление возрастает по потоку. Поэтому, попадая в область задней части тела, где давление возрастает, частицы начинают получать ускорение в направлении, противоположном основному их движению. Это дополнительное притормаживание, очевидно, особенно сильно скажется на частицах, движущихся в непосредственной близости от тела, так как их кинетическая энергия и без того уменьшена сравнительно с другими частицами силами вязкости.

В результате касательная скорость ряда частиц обратится в нуль на некоторой линии SD (см. фиг. 10.8), а в области DSE касательная скорость изменит знак, т. е. возникнет возвратное движение жидкости в пограничном слое. Возникновение этого возвратного движения приведет к отрыву частиц жидкости от поверхности тела и к образованию вихрей: два столкнувшихся слоя жидкости, сорвавшись с поверхности тела, свертываются и образуют вихри.

Точка поверхности тела, начиная от которой поток срывается с обтекаемого им тела, называется *точкой отрыва пограничного слоя.* Условно принимают, что слева от точки отрыва S (см.

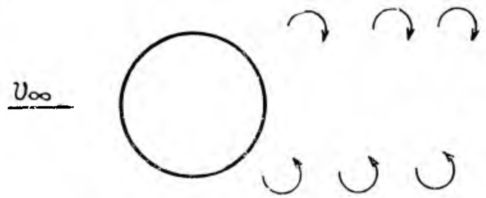
фиг. 10.8) $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\operatorname{tg}\alpha>0$, справа от точки S величина $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}=$ $=\operatorname{tg}\alpha<0$, а в самой точке S производная $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\operatorname{tg}\alpha=0$. Следовательно, точка S отрыва пограничного слоя характеризуется равенством нулю производной $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}=0$.

Иными словами, в точке отрыва S эпюра изменения касательной скорости касается нормали в этой точке ($\alpha=0$). Отсюда, между прочим, следует, что и напряжение трения

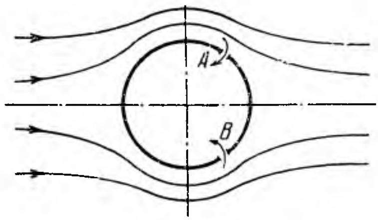
$$\tau_0=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}$$

равно нулю в точке отрыва.

Установленный выше вывод, что именно наличие пограничного слоя обусловливает образование вихрей, хорошо подтверждается следующим опытом. Если в поток жидкости поместить, например, круглый цилиндр, то непосредственное наблюдение показывает, что с цилиндра периодически будут срываться вихри, образующие за ним так называемую вихревую дорожку (фиг. 10.9).



Фиг. 10.9. Схема обтекания круглого цилиндра, сопровождающегося вихреобразованиями.

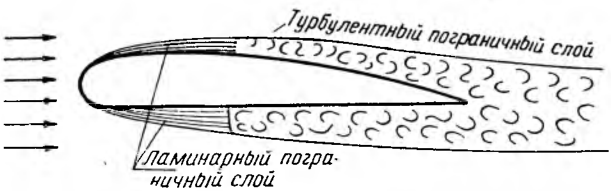


Фиг. 10.10. Безотрывное обтекание круглого цилиндра, полученное в результате отсоса пограничного слоя через щели A и B.

Если же слой жидкости, непосредственно прилегающий к цилиндру, т. е. пограничный слой, отсасывать внутрь цилиндра через какие-либо щели (фиг. 10.10), то можно значительно улучшить обтекание цилиндра. Пограничный слой при этом будет «прилипать» к поверхности цилиндра, обтекание станет более плавным, и отрыв может быть полностью ликвидирован. В результате вихри образовываться не будут, и картина обтекания цилиндра примет вид, показанный на фиг. 10. 10, т. е. будет приближаться к картине потенциального обтекания. Таким образом, теория пограничного слоя, в частности, важна и тем, что она позволила вникнуть в существо обтекания тела потоком вязкой жидкости и выяснить механизм образования вихрей при обтекании.

В аэродинамике большое значение теории пограничного слоя заключается еще и в том, что знание законов движения жидкости внутри пограничного слоя позволило существенно улучшить аэродинамику крыла самолета путем воздействия на движение жидкости в пограничном слое. В частности, аэродинамику крыла самолета можно улучшить с помощью так называемой механизации крыла, которая позволяет воздействовать на пограничный слой в нужном направлении [9].

Для тел, имеющих малую кривизну поверхности и обтекаемых под малыми углами атаки, практически можно считать, что отрыв вихрей отсутствует. В этом случае действие сил вязкости сказывается только в пограничном слое у самого тела и в некоторой узкой области, располагающейся в виде следа позади тела, а во всей остальной области течение жидкости можно считать потенциальным.



Фиг. 10.11. Схема смешанного пограничного слоя на поверхности крыла.

Внутри пограничного слоя течение может быть ламинарным, турбулентным или смешанным (фиг. 10.11). Это зависит от числа R и от условий обтекания тела (например, от степени гладкости обтекаемого тела и т. д.).

В заключение настоящего параграфа приведем интегральное соотношение (10.6) к форме, более удобной для практического применения при решении задач, связанных с расчетом пограничного слоя около криволинейной поверхности.

Интегральное соотношение (10.6) имеет вид

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x^2\, dy - \rho u \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x\, dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_0.$$

Так как

$$\rho u \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x\, dy = \rho \frac{d}{dx}\int_0^\delta u v_x\, dy - \rho \int_0^\delta v_x \frac{du}{dx}\, dy,$$

а из уравнения Лагранжа—Бернулли следует, что

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u \frac{du}{dx} = -\rho u u',$$

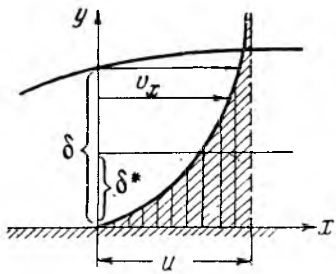
то интегральное соотношение можно представить в следующем виде:

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x^2\,dy - \rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta uv_x\,dy + \rho u'\int_0^\delta v_x\,dy - \rho uu'\delta = -\tau_0$$

или

$$\rho u'\int_0^\delta (u - v_x)\,dy + \rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x(u - v_x)\,dy = \tau_0. \qquad (10.20)$$

Обратим внимание на физический смысл интегралов в этом уравнении. Первый интеграл выражает уменьшение секундного расхода через сечение в пограничном слое высотой δ, обусловленное влиянием вязкости. В самом деле, этот интеграл выражает разность между секундным расходом через сечение высотой δ для потока, двигающегося со скоростью u (т. е. для потока идеальной жидкости), и секундным расходом для потока, двигающегося с действительной скоростью v_x, т. е. при наличии вязкости.



Фиг. 10.12. Толщина вытеснения.

$$\delta^* = \frac{1}{u}\int_0^\delta (u - v_x)\,dy.$$

Учитывая, что в интегралах, входящих в уравнение (10.20), верхний предел δ — величина условная (см. примечание к стр. 241) и имея в виду, что значения этих интегралов мало меняются при неограниченном увеличении верхнего предела, можно интегралы в уравнении (10.20) брать от 0 до ∞. При этом рассматриваемый интеграл изобразится в виде некоторой площади (фиг. 10.12, заштрихованная часть).

Этой площади можно поставить в соответствие площадь равновеликого прямоугольника (фиг. 10.12) $\delta^* u$.

Тогда

$$\delta^* = \frac{1}{u}\int_0^\infty (u - v_x)\,dy = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{u}\right)dy. \qquad (10.21)$$

Величина δ^* представляет, очевидно, условную толщину некоторого слоя, сквозь сечение которого в единицу времени, при постоянной во всех точках сечения скорости u, протекает количество жидкости, равное указанному выше уменьшению расхода.

Величина δ^* получила название *толщины вытеснения.*

Рассмотрим второй интеграл, входящий в уравнение (10.20). Этот интеграл определяет, очевидно, уменьшение количества движения жидкости, происходящее под влиянием вязкости. Если бы вязкость отсутствовала, то количество движения жидкости, протекающей через некоторое сечение слоя высотой δ^{**}, можно было бы написать в виде

$$\rho\delta^{**}u^2.$$

Выберем толщину δ^{**} такой, чтобы выполнялось равенство

$$\rho\delta^{**}u^2=\int_0^\infty \rho v_x(u-v_x)\,dy.$$

Тогда

$$\delta^{**}=\frac{1}{\rho u^2}\int_0^\infty \rho v_x(u-v_x)\,dy=\int_0^\infty \frac{v_x}{u}\left(1-\frac{v_x}{u}\right)dy. \tag{10.22}$$

Величина δ^{**} носит название *толщины потери импульса* и представляет собой условную толщину некоторого слоя, сквозь сечение которого в единицу времени и с постоянной скоростью u переносится количество движения, равное указанному выше уменьшению количества движения.

Подставляя величины δ^* и δ^{**} в уравнение (10.20), приведем его к следующему виду:

$$\rho\frac{d}{dx}(\delta^{**}u^2)+\rho u'\delta^*u=\tau_0.$$

Проводя дифференцирование, находим

$$\rho u^2\frac{d\delta^{**}}{dx}+\rho\delta^{**}2uu'+\rho uu'\delta^*=\tau_0.$$

С целью приведения уравнения к безразмерной форме разделим его почленно на ρu^2. Тогда получим

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{u'}{u}(2\delta^{**}+\delta^*)=\frac{\tau_0}{\rho u^2} \tag{10.23}$$

или

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{u'\delta^{**}}{u}(2+H)=\frac{\tau_0}{\rho u^2}, \tag{10.23'}$$

где

$$H=\frac{\delta^*}{\delta^{**}}.$$

Эта форма интегрального соотношения более удобна для расчета пограничного слоя около криволинейных контуров.

§ 8. РАСЧЕТ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ (МЕТОД Л. Г. ЛОЙЦЯНСКОГО)

Ранее существовавшие методы расчета ламинарного пограничного слоя около криволинейной поверхности были сложны для практического применения; наиболее простым из них был метод Кармана—Польгаузена [37]. Однако этот метод оказался недостаточно точным, особенно в области замедленного движения в кормовой части тела, где результаты расчета по этому методу иногда совершенно не соответствовали действительной картине течения жидкости.

Советскими аэродинамиками разработаны значительно более простые и вместе с тем удобные для практики методы расчета.

Ниже излагается метод проф. Л. Г. Лойцянского, получивший в последние годы наибольшее применение [1]. Метод Лойцянского базируется на использовании преобразованного интегрального соотношения пограничного слоя (10. 23).

Предположим, что профили скоростей в пограничном слое могут быть представлены *однопараметрическим* семейством скоростей в форме

$$\frac{v_x}{u} = \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}},\ f\right), \tag{10.24}$$

где f — некоторый пока неопределенный параметр, называемый *формпараметром,* так как он характеризует влияние формы тела на распределение скоростей в пограничном слое (см. ниже).

При выполнении условия (10. 24) отношение условных толщин слоя $\frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ будет являться функцией только одного параметра f.

В самом деле, так как

$$\delta^* = \int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy = \delta^{**} \int\limits_0^\infty \left[1 - \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}},\ f\right)\right] d\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right),$$

то

$$\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \int\limits_0^\infty \left[1 - \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}},\ f\right)\right] d\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right) = H(f). \tag{10.25}$$

Напряжение трения τ_0 также будет функцией параметра f. Действительно,

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu \frac{u}{\delta^{**}} \left[\frac{\partial\left(\frac{v_x}{u}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right)}\right]_{y=0},$$

т. е.

$$\tau_0 = \mu \frac{u}{\delta^{**}} \zeta(f), \tag{10.26}$$

так как квадратная скобка является функцией f. Следовательно, для коэффициента трения будем иметь

$$\frac{\tau_0}{\rho u^2} = \frac{\nu}{u\delta^{**}} \zeta(f). \tag{10.27}$$

Полученные выражения (10.25) и (10.27), содержащие функции $H(f)$ и $\zeta(f)$, подставим в основное уравнение для пограничного слоя (10.23'). В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{u'}{u}\delta^{**}[2 + H(f)] = \frac{\nu}{u\delta^{**}}\zeta(f) \tag{10.28}$$

или, умножая обе части уравнения на $2\frac{u\delta^{**}}{\nu}$,

$$u\frac{d}{dx}\left(\frac{u'\delta^{**2}}{\nu}\frac{1}{u'}\right) = 2\zeta(f) - 2\frac{u'\delta^{**2}}{\nu}[2 + H(f)]. \tag{10.29}$$

Если за параметр f для ламинарного слоя принять[1]

$$f = \frac{u'\delta^{**2}}{\nu}, \tag{10.30}$$

то уравнению (10.29) можно придать вид обыкновенного дифференциального уравнения, позволяющего достаточно просто найти величину f:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{u'}\right) = \frac{1}{u}F(f), \tag{10.31}$$

где

$$F(f) = 2\{\zeta(f) - f[2 + H(f)]\}, \tag{10.31'}$$

или окончательно

$$\frac{df}{dx} = \frac{u'}{u}F(f) + \frac{u''}{u'}f. \tag{10.32}$$

В общем виде это уравнение не поддается интегрированию. Оно может быть численно проинтегрировано для каждого конкретного случая распределения скоростей в потенциальном потоке, окружающем пограничный слой, т. е. для каждого вида функции $u = u(x)$.

Таким образом, расчет пограничного слоя сводится к нахождению функций $F(f)$, $\zeta(f)$ и $H(f)$, так как, зная эти функции, можно достаточно просто вычислить $f(x)$ из уравнения (10.32), а следо-

[1] Полученное уравнение, как это видно из всего хода его вывода, справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоев.

вательно, $\delta^{**}(x)$ из уравнения (10.30) и искомое напряжение трения τ_0 из уравнения (10.26) или (10.27).

Из условия $\tau_0=0$, что соответствует значению функции $\zeta(f)=0$, можно найти точку *отрыва* пограничного слоя.

Приступим к определению функций $F(f)$, $\zeta(f)$ и $H(f)$. Для этой цели зададимся семейством профилей скорости, апроксимирующим распределение скоростей в сечениях пограничного слоя, в виде следующего многочлена:

$$v_x = u\,(a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \ldots + a_N\eta^N), \tag{10.33}$$

где

$$\eta = 1 - \frac{y}{\delta}.$$

Коэффициенты этого многочлена являются, очевидно, функциями x.

Для того чтобы определить коэффициенты a_n, используем граничные условия и дифференциальные уравнения пограничного слоя (10.4). Такой метод определения коэффициентов в функциональной зависимости скорости v_x от y уже применялся выше при решении задачи об обтекании плоской пластинки (см. § 4). Здесь этот метод определения коэффициентов используется в более общем виде.

На поверхности обтекаемого тела, т. е. при $y=0$,

$$v_x=0,\quad v_y=0. \tag{10.34}$$

На верхней границе пограничного слоя, т. е. при $y=\delta$,

$$v_x=u,\quad v_y\approx 0. \tag{10.35}$$

Кроме того, так как на верхней границе пограничного слоя $\tau=0$, то при $y=\delta$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=0. \tag{10.36}$$

Таким образом, получены три граничных условия (10.34), (10.35), (10.36). Между тем число коэффициентов, подлежащих определению, равно $N+1$. Следовательно, необходимо найти дополнительные условия для определения коэффициентов a_n. Эти дополнительные условия можно получить из первого уравнения пограничного слоя (10.4)

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Полагая в этом уравнении $y=0$ и соответственно $v_x=v_y=0$, найдем первое дополнительное условие для $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$:

при $y=0$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho\nu}\frac{dp}{dx}.$$

Имея в виду, что на внешней границе слоя, где поток потенциальный, в силу уравнения Лагранжа—Бернулли

$$u\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

и учитывая, что распределение давления от y не зависит, полученное дополнительное условие можно переписать в таком виде:

при $y=0$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=-\frac{uu'}{\nu}. \tag{10.37}$$

Чтобы найти второе дополнительное условие для $\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}$, продифференцируем уравнение (10.4) по y. Тогда, имея в виду, что давление p в пограничном слое от y не зависит, получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial v}\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_y\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}$$

или

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y}+v_y\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}.$$

Так как в силу уравнения неразрывности $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$, то

$$v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y}+v_y\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}.$$

Отсюда, полагая $y=0$, $v_x=v_y=0$, находим второе дополнительное условие для $\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}$:

при $y=0$

$$\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}=0. \tag{10.38}$$

Однако следует заметить, что использование условий (10.34), (10.37) и (10.38) приведет нас к возможности апроксимации закона распределения скорости для малых значений y, т. е. вблизи поверхности тела, а на *верхней* границе пограничного слоя найденный закон может сильно отличаться от действительного. В связи с этим необходимо учитывать и граничные условия на верхней границе пограничного слоя, т. е. при $y=\delta$.

Обратимся вновь к уравнению пограничного слоя (10.4). Так как по уравнению Лагранжа—Бернулли, написанному для верхней границы пограничного слоя,

$$u\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}, \tag{10.39}$$

то из первого уравнения (10.4), используя (10.35) и (10.36), получим следующее граничное условие:

при $y=\delta$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0. \tag{10.40}$$

Полученные граничные условия позволяют определить значения коэффициентов a_n в формуле (10.33). Из условия (10.35) следует, что $a_0=1$. Используя условия (10.36) и (10.40), приходим к выводу, что

$$a_1=0 \text{ и } a_2=0.$$

Нетрудно убедиться в том, что в случае непрерывности производных от v_x по y до $(n-1)$ порядка включительно будем иметь при $y=\delta$

$$\frac{\partial^i v_x}{\partial y^i}=0 \quad (i=1, \ldots n). \tag{10.40'}$$

Геометрически это означает, что кривая $v_x=f(y)$ касается на верхней границе пограничного слоя прямой $v_x=u$, а число n определяет порядок соприкосновения.

Таким образом, выражение для v_x можно написать следующим образом:

$$v_x=u\left(1+a_n\eta^n+a_{n+1}\eta^{n+1}+a_{n+2}\eta^{n+2}\right). \tag{10.41}$$

В выражении (10.41) коэффициенты a_n следует определять исходя из граничных условий *только на поверхности тела*, т. е. при $y=0$, так как условия (10.40′) на внешней границе слоя учтены тем, что коэффициенты от a_1 до a_{n-1} положены равными нулю.

Определим коэффициенты a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, используя граничные условия на поверхности тела:

при $y=0\ (\eta=1)$

$$v_x=0; \qquad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=-\frac{uu'}{\nu} \text{ и } \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}=0.$$

С учетом выражения (10.41) эти условия могут быть представлены в виде следующих равенств [1]:

$$1 + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 0,$$

$$n(n-1)\,a_n + (n+1)\,n a_{n+1} + (n+2)(n+1)\,a_{n+2} = -\frac{u'\delta^2}{\nu},$$

$$n(n-1)(n-2)\,a_n + (n+1)\,n(n-1)\,a_{n+1} + (n+2)(n+1)\,n a_{n+2} = 0.$$

Таким образом, мы получили систему трех уравнений для определения трех коэффициентов a_n, a_{n+1}, a_{n+2}. Обозначив безразмерную величину

$$\frac{u'\delta^2}{\nu} = \lambda \tag{10.42}$$

и решая систему этих уравнений, находим

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{6}(n+1)(n+2), \\ a_{n+1} &= -\frac{n}{n+1}\lambda + \frac{1}{3}(n-1)(n+2), \\ a_{n+2} &= \frac{n-1}{2(n+1)}\lambda - \frac{1}{6}(n-1)\,n. \end{aligned}\right\} \tag{10.43}$$

Теперь, когда коэффициенты a_n, a_{n+1}, a_{n+2} найдены, можно выразить v_x через λ (и значение n) и, следовательно,

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{\delta}\int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy = -\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{a_{n+2}}{n+3} = H^*(\lambda), \tag{10.44}$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{1}{\delta}\int_0^\infty \frac{v_x}{u}\left(1 - \frac{v_x}{u}\right) dy =$$

$$= H^* - \frac{a_n^2}{2n+1} - \frac{a_{n+1}^2}{2n+3} - \frac{a_{n+2}^2}{2n+5} - \frac{a_n a_{n+1}}{n+1} - \frac{2a_n a_{n+2}}{2n+3} -$$

$$- \frac{a_{n+1}a_{n+2}}{n+2} = H^{**}(\lambda) \tag{10.45}$$

---

[1] При получении этих равенств использовались очевидные соотношения

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial v_x}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{\delta^3}\frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^3}.$$

Величина ζ также может быть выражена через λ

$$\zeta=\left[\frac{\partial\left(\frac{v_x}{u}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right)}\right]_{y=0}=\frac{\delta^{**}}{\delta}\left[\frac{\partial\left(\frac{v_x}{u}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right]_{y=0}=H^{**}(\lambda)\,b(\lambda), \tag{10.46}$$

где

$$b(\lambda)=\frac{1}{n+1}\lambda+\frac{1}{3}(n+2). \tag{10.46'}$$

Напряжение трения

$$\tau_0=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\sqrt{\mu\rho u' u^2}\,\frac{b(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}. \tag{10.47}$$

Заметим, что величина f также может быть легко выражена через параметр λ:

$$f=\frac{u'\delta^{**2}}{\nu}=\frac{u'\delta^2}{\nu}\left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^2=\lambda H^{**2}. \tag{10.48}$$

До сих пор, строго говоря, все написанные величины были функциями не одного параметра λ, а двух: λ и n.

Имея в виду, что семейство (10.41) должно быть *однопараметрическим,* так как мы располагаем для определения параметра f или связанного с ним параметра λ лишь одним уравнением (10.32), выразим показатель степени n также через параметр λ.

Проф. Л. Г. Лойцянский, полагая, что $n=n(\lambda)$ и используя точные решения дифференциальных уравнений пограничного слоя для частных случаев, когда функция $u(x)$ выражена в форме степенной зависимости: $u(x)=\text{const}\,x^m$, предложил принять следующий линейный закон связи между n и λ:

$$n=0{,}15\lambda+4. \tag{10.49}$$

В этом случае, используя все полученные выше соотношения, можно получить искомые зависимости в функции только одного параметра f, т. е. найти $H(f)$, $\zeta(f)$, $F(f)$, числовые значения которых для удобства пользования сведены в табл. 10. 1.

Весьма важно отметить, что при законе однопараметрической зависимости вид функций $F(f)$, $\zeta(f)$ и $H(f)$ не зависит от характера протекания $u(x)$, т. е. от формы крылового профиля и его угла атаки. Поэтому эти функции $H(f)$, $\zeta(f)$ и $F(f)$ получили название *универсальных.*

Проинтегрируем уравнение (10. 32). Из табл. (10. 1) следует, что F и f связаны между собой зависимостью, весьма близкой к *линейной*

$$F(f)=a-bf+\varepsilon(f),$$

где $a=0{,}44$ и $b=5{,}75$, а $\varepsilon(f)$ — некоторая малая поправка к линейному закону.

Таблица 10.1

f	$F(f)$	$\zeta(f)$	$H(f)$	f	$F(f)$	$\zeta(f)$	$H(f)$
—0,089	1,04	0,000	3,85	0,01	0,38	0,236	2,55
—0,085	1,00	0,019	3,66	0,02	0,33	0,253	2,50
—0,08	0,96	0,039	3,50	0,03	0,275	0,270	2,46
—0,07	0,88	0,071	3,28	0,04	0,22	0,286	2,41
—0,06	0,81	0,097	3,12	0,05	0,17	0,302	2,36
—0,05	0,74	0,120	3,00	0,06	0,12	0,318	2,32
—0,04	0,68	0,142	2,90	0,07	0,07	0,335	2,28
—0,03	0,615	0,162	2,82	0,08	0,02	0,350	2,24
—0,02	0,55	0,181	2,74	0,084	0,003	0,357	2,22
—0,01	0,495	0,200	2,67	0,085	—0,002	0,357	2,22
0,00	0,44	0,219	2,61				

Если подставить последнее выражение для $F(f)$ в уравнение (10.32), то получим

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{u''}{u'}-b\frac{u'}{u}\right)f+\frac{u'}{u}\left[a+\varepsilon(f)\right].$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение и определяя произвольную постоянную из условия конечности f при $x=0$, получим

$$f(x)=a\frac{u'(x)}{[u(x)]^b}\int\limits_0^x[u(\xi)]^{b-1}d\xi+\frac{u'(x)}{[u(x)]^b}\int\limits_0^x[u(\xi)]^{b-1}\varepsilon(f)\,d\xi,$$

где ξ — переменная интегрирования [1].

Пренебрегая в первом приближении вторым слагаемым в правой части уравнения, т. е. заменяя функцию $F(f)$ линейной, и подставляя значения коэффициентов a и b, получим следующую приближенную формулу для определения параметра $f(x)$:

$$f(x)=0{,}44\frac{u'(x)}{[u(x)]^{5,75}}\int\limits_0^x[u(\xi)]^{4,75}d\xi.$$

[1] Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка с коэффициентами, зависящими от x, и может быть проинтегрировано по общему правилу.

Значение $x=0$ соответствует критической точке.

Последнюю формулу можно переписать в более удобной для расчета форме с целыми показателями:

$$f(x)=0{,}46\,\frac{u'(x)}{[u(x)]^6}\int_0^x [u(\xi)]^5\,d\xi. \qquad (10.50)$$

Ошибка в этом случае в величине δ^{**} не превышает 3%.

Полученная формула (10.50) применяется для расчета характеристик ламинарного пограничного слоя на поверхности крыла.

Таким образом, расчет пограничного слоя по изложенному методу Л. Г. Лойцянского можно проводить по следующей схеме.

Имея заданным распределение скорости u (а следовательно, и u'), определяем по формуле (10.50) значение параметра $f(x)$.

Используя (10.30), подсчитываем толщину потери импульса по формуле

$$\delta^{**}(x)=\sqrt{\frac{f(x)\,\nu}{u'(x)}}.$$

С помощью приведенной выше таблицы по значению $f(x)$ находим соответствующее ему значение $\zeta(x)$.

Остальные интересующие нас величины (δ^*, τ_0) теперь легко найти.

В частности, напряжение трения $\tau_0(x)$ на поверхности крыла может быть подсчитано по формуле [см. уравнение (10.26)]

$$\tau_0(x)=\mu\,\frac{u(x)}{\delta^{**}(x)}\,\zeta\,[f(x)].$$

Зная $\tau_0(x)$, можно подсчитать сопротивление трения крылового профиля.

С целью упрощения практических расчетов часто вводят безразмерные величины

$$\bar{u}=\frac{u}{u_\infty}, \qquad \bar{x}=\frac{x}{b},$$

где u_∞ — скорость набегающего потока,
b — хорда профиля крыла.

В этом случае выражение для $f(x)$ принимает вид

$$f(\bar{x})=0{,}46\,\frac{\bar{u}'(\bar{x})}{[\bar{u}(\bar{x})]^6}\int_0^{\bar{x}} [\bar{u}(\xi)]^5\,d\bar{\xi}. \qquad (10.50')$$

Таким образом, метод Л. Г. Лойцянского позволяет полностью решить сложную задачу расчета ламинарного пограничного слоя около криволинейной поверхности, причем все сводится по существу к нахождению функции $f(x)$.

В заключение этого параграфа отметим, что, используя формулы (10.30) и (10.50), можно получить уравнение

$$\frac{\delta^{**2}}{\nu}=\frac{0,46}{u^6}\int_0^x u^5(\xi)\,d\xi. \tag{10.51}$$

Полученные выше результаты позволяют найти точку отрыва ламинарного пограничного слоя с криволинейной поверхности.

Действительно, в точке отрыва $\tau_0=0$, т. е. $\zeta=0$, что соответствует значению $f=-0,089$ (см. табл. 10.1). Следовательно, для точки отрыва можно написать, используя уравнение (10.30),

$$\frac{u'\,\delta^{**2}}{\nu}=-0,089. \tag{10.52}$$

Л. Г. Лойцянский распространил изложенный выше метод расчета ламинарного пограничного слоя на случай, когда слой полностью турбулентный. Кроме того, метод Лойцянского оказалось возможным применять не только для случая плоского обтекания крыла, но и для расчета обтекания тел вращения (фюзеляжа и т. п.) осесимметричным потоком [1].

Глава XI

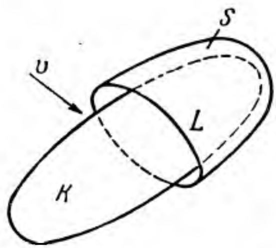
ТЕОРИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

§ 1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

В гл. VII рассмотрена теория крыла бесконечного размаха в плоскопараллельном потоке; эта теория основывалась на представлении, что крыло обтекается плавно, т. е. что в области течения нет ни образования вихрей, ни образования поверхностей разрыва скорости.

Переходя к рассмотрению крыла конечного размаха, можно доказать, что при наличии циркуляции по контуру L, охватывающему крыло, от крыла должны отходить вихри.

В самом деле, пусть крыло конечного размаха K обтекается идеальной жидкостью и создает некоторую подъемную силу (фиг. 11. 1). Проведем контур L, охватывающий крыло. Так как на крыло действует подъемная сила, то, следовательно, по теореме Жуковского циркуляция Γ по контуру L отлична от нуля.



Фиг. 11. 1. Схема, поясняющая существование отходящих от крыла вихрей.

Построим на контуре L некоторую поверхность S, не пересекающую крыло (см. фиг. 11. 1). Применяя теорему Стокса к контуру L и поверхности S, можем написать (см. стр. 101).

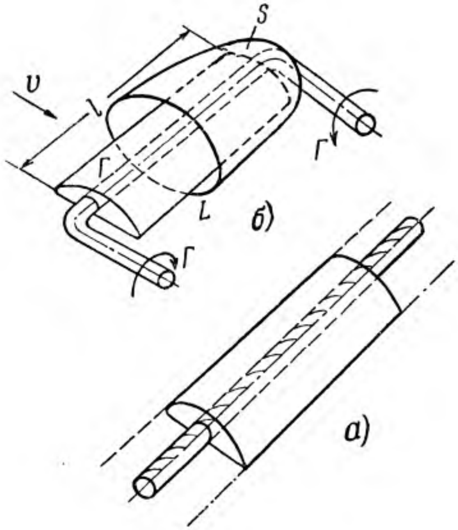
$$\Gamma = \int\limits_L v_L dL = 2 \iint\limits_S \omega_n dS.$$

Отсюда следует, что так как циркуляция Γ по контуру L отлична от нуля, то на любой поверхности S, построенной указанным выше образом, должны существовать точки, в которых $\omega_n \neq 0$. Иными словами, если циркуляция вокруг крыла отлична от нуля, то *вне* крыла должны существовать вихри, пронизывающие поверхность S.

Действительная картина обтекания крыла конечного размаха очень сложна, но только что доказанное положение относительно наличия вне крыла вихрей позволяет построить некоторые *схемы* (модели) обтекания, приближенно отражающие действительную картину обтекания крыла.

В теории крыла бесконечного размаха в первом приближении крыло можно заменить бесконечно длинной вихревой нитью, которая кратко называется *присоединенным вихрем крыла* (фиг. 11. 2,*а*). Для случая крыла конечного размаха вводить только присоединенный (конечный) вихрь нельзя, так как это будет противоречить первой теореме Гельмгольца о вихрях, в силу которой вихрь не может обрываться в жидкости (в данном случае в торцевых точках крыла конечного размаха l). Вместе с тем выше установлено, что если циркуляция по контуру L, охватывающему крыло, не равна нулю, то поверхность S, построенная на этом контуре, пронизывается вихрями. Учитывая все это, приходим к выводу, что у крыла конечного размаха присоединенный вихрь должен выйти за пределы крыла и, подхваченный потоком воздуха, должен простираться до бесконечности в направлении основного течения, образуя так называемые вихревые усы (фиг. 11.2,*б*). В отличие от присоединенного вихря его продолжение (вихревые усы, сбегающие с торцев крыла) называют обычно *свободными вихрями.*

Таким образом, в первом приближении крыло конечного размаха можно заменить одной бесконечной вихревой нитью П-образной формы в плане. В силу первой теоремы Гельмгольца о вихрях циркуляция скорости Г вдоль такого П-образного вихря будет постоянной (Г=const).



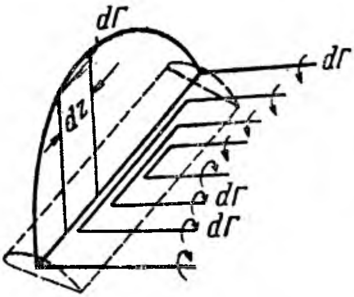
Фиг. 11.2. Присоединенный и свободный вихри.

В существовании свободных вихрей легко убедиться, поместив крыло в аэродинамическую трубу. Внося в поток палочку, к концу которой привязан на нитке шарик из ваты, поднесем ее к месту предполагаемого образования свободного вихря. Как только шарик попадет в зону вихря, он начнет вращаться, описывая вместе с ниткой некоторый конус; перемещая шарик вдоль аэродинамической трубы, можно таким образом «прощупать» весь вихрь по его длине. Если шарик внести в зону второго вихря, сбегающего с противоположной торцевой поверхности крыла, он также начнет вращаться, но в обратную сторону. Вне зоны этих вихрей нитка с шариком установится по потоку, и шарик будет несколько вибрировать, но вращаться не будет.

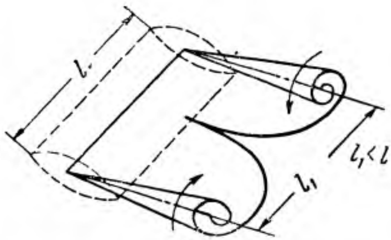
Разработка теории крыла конечного размаха в России началась почти одновременно с созданием теории крыла бесконечного размаха. В России теорию крыла конечного размаха создал акад. Сергей Алексеевич Чаплыгин. В Англии вихревой схемой крыла много занимался проф. Ланчестер, однако законченной теории крыла конечного размаха им дано не было.

27 октября 1910 г. на заседании научно-технического комитета Московского общества воздухоплавания С. А. Чаплыгин сделал сообщение — «Результаты теоретических исследований о движении аэропланов», посвященное вопросу воздействия воздуха на крыло, в котором указал на наличие вихрей, отходящих от крыла конечного размаха.

Три года спустя (22 октября 1913 г.) С. А. Чаплыгин доложил Московскому математическому обществу теорию крыла конечного размаха. В этой работе он получил впервые в мире общие выражения для подъемной силы и силы сопротивления крыла конечного размаха.



Фиг. 11.3. Вихревая пелена.



Фиг. 11.4. Свертывающаяся вихревая пелена.

К разработке теории крыла конечного размаха за рубежом приступили позже, и только в 1918 г. Л. Прандтль опубликовал основные ее результаты.

В рассмотренной простейшей вихревой схеме крыла конечного размаха циркуляция вдоль крыла предполагалась постоянной. В действительности же, как показывает опыт, циркуляция меняется вдоль размаха крыла. Вихревую схему обтекания крыла, учитывающую переменность циркуляции вдоль его размаха, можно получить, если заменить крыло не одним П-образным вихрем, а системой П-образных вихрей. Вдоль каждого такого вихря циркуляция будет постоянной, но при переходе от одного вихря к другому будет меняться (скачкообразно).

В этой схеме можно положить число вихрей равным бесконечности, и тогда циркуляция вдоль крыла будет изменяться *непрерывно,* уменьшаясь от его центра к торцам. При этом за крылом свободные вихри сольются в единое целое и образуют так называемую *вихревую пелену* (фиг. 11.3), состоящую из бесконечно большого числа сходящих с крыла вихревых шнуров.

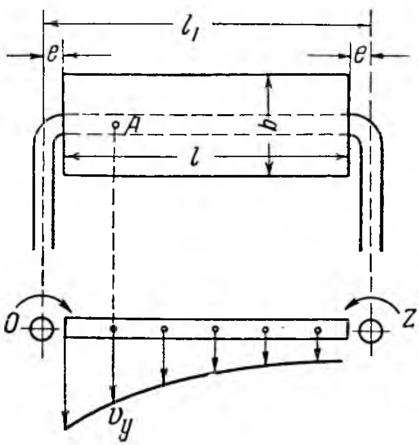
Подобная вихревая схема крыла с непрерывным распределением циркуляции и с вихревой пеленой за ним положена в основу теории крыла конечного размаха и была впервые введена в 1913 г. Н. Е. Жуковским в его работе по теории воздушных винтов [41].

В дальнейшем эта схема Н. Е. Жуковского использовалась многими учеными, в том числе и Л. Прандтлем, и являлась в том или ином виде базой для дальнейших работ по теории крыла и винта.

Исследования вихревой пелены за крылом показали, что она неустойчива и вскоре после сбегания с крыла свертывается в два вихревых шнура (фиг. 11.4). Поэтому было бы правильнее рассматривать в теории крыла последнюю вихревую схему; однако ее использование с математической точки зрения крайне затруднительно. В связи с этим применяют обычно более упрощенные схемы, заменяя крыло либо одним П-образным вихрем (см. фиг. 11.2), либо сплошной плоской вихревой пеленой (см. фиг. 11.3).

§ 2. ПОНЯТИЕ О СКОСЕ ПОТОКА И СИЛЕ ИНДУКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Рассмотрим крыло конечного размаха в двух проекциях (фиг. 11.5), считая его прямоугольным. Обозначим размах этого крыла через l, а величину $\frac{l}{b}=\lambda$, где b — хорда, будем называть относительным размахом или *удлинением крыла*. Вдоль размаха поместим присоединенный вихрь, который переходит затем в два свободных вихря; расстояние между вихрями обозначим через l_1, а расстояние между осью свободного вихря и торцем крыла — через e. Начало координат поместим в центре левого свободного вихря и направим ось z вправо.



Фиг. 11.5. Упрощенная вихревая схема прямоугольного крыла.

Возьмем какую-либо точку A с координатой z и определим скорость v_y, индуцированную в этой точке левым свободным вихрем. Так как левый свободный вихрь представляет собой бесконечный полушнур, то, используя формулу (5.21), будем иметь

$$v_y = -\frac{\Gamma}{4\pi z}.$$

Знак минус поставлен потому, что скорость v_y направлена вниз, а ось y — вверх.

Из указанной формулы следует, что индуцированная скорость от свободного вихря распределяется по размаху крыла по гиперболическому закону.

Чтобы оценить влияние обоих вихрей, введем среднюю по размаху индуцированную скорость w.

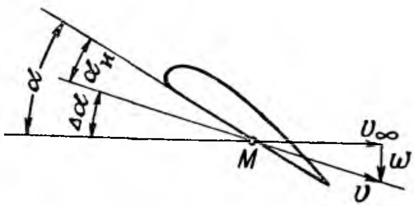
Средняя по размаху скорость от левого свободного вихря, очевидно, равна

$$\frac{1}{l}\int\limits_{e}^{l+e} v_y\,dz.$$

В силу симметрии величина средней скорости от правого вихря будет такой же, а потому средняя индуцированная скорость

$$w=\frac{2}{l}\int\limits_{e}^{l+e} v_y\,dz. \qquad (11.1)$$

Выясним, какие изменения в физическую картину обтекания крыла вносит скорость w, индуцированная отходящими от крыла свободными вихрями. Для этого рассмотрим крыло (фиг. 11.6), обтекаемое под некоторым углом атаки α потоком, скорость которого обозначим через v_∞. Очевидно, что в произвольной точке M потока около крыла скорость частиц жидкости будет состоять из двух составляющих: скорости v_∞ набегающего потока и скорости w, индуцированной вихрями.



Фиг. 11.6. Скос потока у крыла конечного размаха.

В результате в точке M крыло будет обтекаться с некоторой скоростью v, направление которой составит с хордой крыла угол $\alpha_и=\alpha-\Delta\alpha$, называемый *истинным углом атаки.*

Таким образом, вблизи крыла происходит изменение угла атаки, или, как говорят, скос потока. Величина скоса потока определяется углом $\Delta\alpha$, называемым *углом скоса.* Величина этого угла невелика и составляет несколько градусов. Из фиг. 11.6 следует, что

$$\operatorname{tg}\Delta\alpha=-\frac{w}{v_\infty}.$$

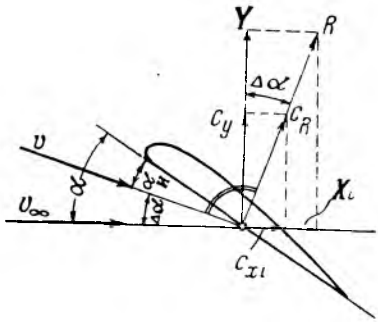
Знак минус берется потому, что принято считать угол скоса положительным, когда индуцированная скорость направлена вниз, т. е. когда w отрицательно. Так как угол $\Delta\alpha$ мал, то

$$\Delta\alpha\approx\operatorname{tg}\Delta\alpha=-\frac{w}{v_\infty}. \qquad (11.2)$$

При отсутствии скоса вектор результирующей силы воздействия потока на крыло согласно теореме Жуковского нормален к направлению *невозмущенного* потока, т. е. к вектору скорости v_∞. При наличии скоса вектор результирующей силы должен быть нормальным к направлению *истинной* скорости v. Следовательно, скос потока приводит к отклонению результирующей силы от направления, перпендикулярного скорости набегающего потока, на угол $\Delta\alpha$

(фиг. 11.7). В результате у результирующей силы появится составляющая X_i по направлению невозмущенного потока. Эта дополнительная сила X_i, появившаяся в результате скоса потока, носит название *силы индуктивного сопротивления*. Если эту силу разделить на величину $\frac{\rho v_\infty^2}{2} S$, то получим величину коэффициента силы индуктивного сопротивления

$$c_{xi} = \frac{X_i}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} S}. \tag{11.3}$$



Фиг. 11.7. Сила индуктивного сопротивления.

Таким образом, сопротивление крыла конечного размаха будет состоять из профильного сопротивления, определяемого сопротивлением трения и разностью давлений на передней и задней частях крыла, и индуктивного сопротивления, обусловленного скосом потока, т. е. для крыла конечного размаха

$$c_x = c_{xp} + c_{xi}. \tag{11.4}$$

У крыла бесконечного размаха, где скос потока отсутствует, индуктивное сопротивление равно нулю, и его сопротивление будет определяться только профильным сопротивлением.

§ 3. ИНДУЦИРОВАННАЯ СКОРОСТЬ И СКОС ПОТОКА [$\Gamma = \Gamma(z)$]

Если рассматривать крыло произвольной формы в плане, то циркуляция Γ по размаху крыла будет, вообще говоря, изменяться, т. е. $\Gamma = \Gamma(z)$, причем максимальное значение циркуляции, как показывает опыт, будет достигаться в центре крыла.

Как было показано выше, в этом случае с крыла будет сбегать так называемая вихревая пелена (см. фиг. 11.3).

Исходя из этой наиболее общей схемы крыла конечного размаха получим основные соотношения, определяющие скос потока у крыла, индуктивную скорость v_y, подъемную силу Y и индуктивное сопротивление X_i.

Рассмотрим проекцию крыла на плоскость yz (фиг. 11.8). Вдоль размаха крыла циркуляция Γ будет меняться по некоторому закону $\Gamma = \Gamma(z)$, который графически можно изобразить кривой DCB (если вдоль оси y откладывать значения Γ). Рассмотрим действие системы вихрей (вихревой пелены), сбегающей с крыла, на произвольную точку A (см. фиг. 11.8). Очевидно, с каждого элемента крыла dz будет сбегать элементарный вихрь с циркуляцией $d\Gamma$, направленный нормально к плоскости чертежа. Если положение точки A характеризуется координатой z, а положение элементарного вихря, сбегающего с участка крыла $MN = dz_1$ — координатой z_1, то скорость, индуцированная этим вихрем в точке A, очевидно, может быть написана в виде

$$dv_y = \frac{d\Gamma}{4\pi(z_1 - z)}.$$

Скорость в точке A, индуцированная всей вихревой пеленой, будет равна

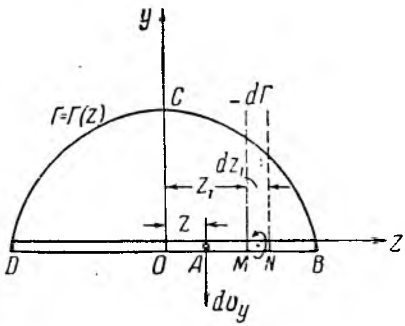
$$v_y = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z}, \tag{11.5}$$

где Γ является функцией z_1, $\Gamma=\Gamma(z_1)$, а координата z для данной точки A есть величина постоянная. В результате скорость v_y также будет меняться по размаху крыла, т. е. $v_y = v_y(z)$.

Интеграл, входящий в формулу (11.5), является несобственным интегралом. Чтобы его вычислить, необходимо из интервала интегрирования исключить особую точку $z_1 = z$. Это можно сделать, разбив интервал интегрирования $\left(-\frac{l}{2},\ +\frac{l}{2}\right)$ на следующие два интервала:

$$\left(-\frac{l}{2},\ z-\varepsilon\right) \text{ и } \left(z+\varepsilon,\ +\frac{l}{2}\right),$$

где ε — малая величина [42].



Фиг. 11.8. К расчету индуцированной скорости для крыла произвольной формы в плане.

Тогда значение интеграла (11.5) можно определить как предел следующего выражения:

$$\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{z-\varepsilon} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z} + \int\limits_{z+\varepsilon}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z} \right],$$

носящего название главного значения интеграла (11.5).

Физически это означает, что мы исключили из рассмотрения элементарный вихрь, проходящий через точку A, скорость v_y в которой требуется определить.

Для нахождения угла скоса $\Delta\alpha$, который в общем случае будет также меняться вдоль размаха крыла, следует воспользоваться формулой

$$\Delta\alpha = -\frac{v_y}{v_\infty}. \tag{11.6}$$

Истинный угол атаки $\alpha_и$ какого-либо сечения крыла будет определяться формулой

$$\alpha_и = \alpha - \Delta\alpha, \tag{11.7}$$

где α — угол атаки, определяемый по направлению скорости на бесконечности. Угол атаки α в общем случае также может меняться вдоль размаха крыла, если крыло закручено. Поэтому для любого сечения крыла *местный* угол атаки α можно определять как сумму

$$\alpha = \alpha_ц + \alpha_з,$$

где $\alpha_ц$ — угол атаки центроплана; $\alpha_з$ — угол закрутки крыла в рассматриваемом сечении.

§ 4. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА КРЫЛО. ИНДУКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ [$\Gamma = \Gamma(z)$]

Для нахождения подъемной силы крыла выделим элементарный участок крыла dz и будем считать, что поток в пределах этого участка является плоскопараллельным. В таком случае к этому участку можно применить теорему Жуковского, выведенную для плоскопараллельного течения:

$$dY = \rho\Gamma(z)\, v_\infty\, dz,$$

и, следовательно, для всего крыла

$$Y = \rho v_\infty \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z)\, dz. \tag{11.8}$$

Численное значение интеграла (11.8), очевидно, равно площади Ω, ограниченной линией DB и кривой DCB (см. фиг. 11.8). Следовательно,

$$Y = \rho v_\infty \Omega. \tag{11.9}$$

Найдем величину силы индуктивного сопротивления. Для этого выделим на крыле элементарный участок dz, на который действует подъемная сила dY. Так как поток в рассматриваемом месте будет скошен на величину $\Delta\alpha$, то вектор dR окажется наклоненным к направлению скорости на бесконечности, в результате чего появится слагающая в направлении оси x, называемая силой индуктивного сопротивления и обозначаемая через dX_i. Очевидно, что (см. фиг. 11.7)

$$dX_i \approx dY \Delta\alpha.$$

Подставляя в это выражение $dY = \rho\Gamma(z)\,v_\infty dz$ и $\Delta\alpha = -\frac{v_y}{v_\infty}$, будем иметь

$$dX_i = -\rho\Gamma(z)\,v_y dz.$$

Полная сила индуктивного сопротивления X_i определится формулой

$$X_i = -\rho \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z)\,v_y\,dz. \tag{11.10}$$

Подставляя в это выражение величину v_y по формуле (11.5), получим

$$X_i = -\frac{\rho}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z)\,dz \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1}\,\frac{dz_1}{z_1 - z}. \tag{11.11}$$

Как видим, аэродинамические характеристики крыла ($\Delta\alpha$, v_y, Y, X_i) можно определить, если известен закон изменения циркуляции, т. е. функция $\Gamma = \Gamma(z)$, так как все они зависят от этой функции.

Найдем величину профильного сопротивления крыла X_p. Обозначим через c'_{xp} местный коэффициент профильного сопротивления, соответствующий истинному местному углу атаки.

Тогда

$$dX_p = c'_{xp}\,\frac{\rho}{2}\,b\,dz\,v_\infty^2,$$

где b — хорда крыла, в общем случае меняющаяся вдоль размаха, т. е. $b = b(z)$. В таком случае полная сила профильного сопротивления будет выражаться следующим образом:

$$X_p = \frac{\rho v_\infty^2}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} c'_{xp}\,b\,dz = q \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} c'_{xp}\,b\,dz, \tag{11.12}$$

где $q = \frac{\rho v_\infty^2}{2}$ — величина скоростного напора.

§ 5. ОСНОВНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Выведем уравнение, позволяющее найти функцию $\Gamma(z)$. Обратимся для этого к так называемому уравнению связи.

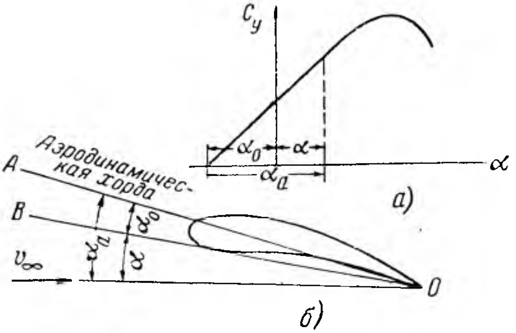
При наличии вихревой пелены для элемента крыла dz можно написать два следующих равенства:

$$dY = \rho \Gamma(z) v_\infty dz,$$
$$dY = c_y(z) \frac{\rho}{2} b(z) dz\, v_\infty^2.$$

Приравнивая их, находим уравнение связи

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} c_y(z) b(z) v_\infty. \tag{11.13}$$

Допустим, что угол атаки в данном сечении отсчитывается от так называемой *аэродинамической хорды*, т. е. от такого направления, для которого местный $c_y=0$.



Фиг. 11.9. Аэродинамическая хорда.

Обозначая угол атаки, отсчитываемый от аэродинамической хорды, через α_a, угол атаки, при котором $c_y=0$, через α_0, можем написать следующее очевидное равенство (фиг. 11.9,*а*):

$$\alpha_a = \alpha - \alpha_0.$$

Отсюда видно, что аэродинамическая хорда повернута по отношению к геометрической хорде на угол α_0 вверх (так как обычно $\alpha_0<0$; см. фиг. 11.9,*б*).

На прямолинейном участке кривой c_y по α справедливо соотношение

$$c_y = a_0 \alpha_a, \tag{11.14}$$

где a_0 — тангенс угла наклона к оси α прямолинейного участка кривой c_y по α для рассматриваемого *профиля* (сечения), т. е. для крыла бесконечного размаха, профиль которого соответствует данному.

В данном случае крыла конечного размаха произвольное сечение крыла обтекается под истинным углом атаки $\alpha_и$ или под истинным углом атаки, отсчитываемым от аэродинамической хорды $\alpha_{и.а}$. Используя равенство (11.14), можем написать

$$c_y = a_0 \alpha_{и.а} = a_0(\alpha_a - \Delta\alpha) = a_0\left(\alpha_a + \frac{v_y}{v_\infty}\right).$$

Следовательно,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} a_0 b(z) v_\infty \left[\alpha_a(z) + \frac{v_y}{v_\infty}\right].$$

Подставляя сюда значение v_y по формуле (11.5) и опуская индекс «а», можно полученное уравнение написать в окончательном виде

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} a_0 b(z) v_\infty \left[\alpha(z) + \frac{1}{4\pi v_\infty} \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dz_1} dz_1}{z_1 - z} \right]. \quad (11.15)$$

Это уравнение носит название *основного интегро-дифференциального уравнения крыла* (интегро-дифференциальным оно называется потому, что неизвестная функция $\Gamma(z)$ входит в него и под знаком производной и под знаком интеграла).

Уравнение (11.15) позволяет определить циркуляцию крыла $\Gamma(z)$ по известным функциям $b(z)$ и $\alpha(z)$, заданным конструкцией крыла.

Установление закона распределения циркуляции по размаху крыла позволяет определить все аэродинамические характеристики крыла.

§ 6. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦИРКУЛЯЦИИ ПО РАЗМАХУ КРЫЛА

Как выше установлено, определение аэродинамических характеристик крыла сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (11.15).

Общих методов для решения подобного интегро-дифференциального уравнения не имеется. В связи с этим приходится применять приближенные методы решения.

В настоящее время имеется ряд приближенных методов решения основного уравнения крыла, например, методы Глауэрта—Трефтца, Б. Н. Юрьева, В. В. Голубева [3], Г. Ф. Бураго, А. Б. Рисберга [43], С. Г. Нужина, Мультгоппа.

В этом параграфе рассмотрен один из впервые применявшихся методов — метод Глауэрта—Трефтца. Этот метод основан на использовании тригонометрических рядов.

Переходя к рассмотрению метода Глауэрта—Трефтца, осуществим замену независимого переменного z, положив

$$z = -\frac{l}{2}\cos\theta.$$

Представим циркуляцию Γ в виде бесконечного тригонометрического ряда

$$\Gamma = 2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta, \quad (11.16)$$

где A_1, A_2,...— постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Выражение для циркуляции (11. 16) нужно подставить в основное интегро-дифференциальное уравнение (11. 15). Предварительно вычислим значение интеграла, входящего в уравнение (11. 15).

Учитывая, что

$$\Gamma(z_1) = 2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta_1,$$

$$z_1 = -\frac{l}{2}\cos\theta_1; \quad dz_1 = \frac{l}{2}\sin\theta_1\, d\theta_1;$$

$$\frac{d\theta_1}{dz_1} = \frac{2}{l\sin\theta_1},$$

получаем

$$z_1 - z = -\frac{l}{2}\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta = -\frac{l}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta).$$

Замечая, что

$$\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} = \frac{d\Gamma(z_1)}{d\theta_1}\,\frac{d\theta_1}{dz_1},$$

где

$$\frac{d\Gamma(z_1)}{d\theta_1} = \frac{2lv_\infty d\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta_1\right)}{d\theta_1} = 2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos n\theta_1,$$

будем иметь

$$\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} = 2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos n\theta_1 \frac{2}{l\sin\theta_1}.$$

Следовательно, искомый интеграл примет вид

$$\frac{1}{4\pi v_\infty}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1}dz_1}{z_1 - z} =$$

$$= \frac{1}{4\pi v_\infty}\int_0^{\pi} \frac{2lv_\infty \sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n \cos n\theta_1 \frac{2}{l\sin\theta_1}\,\frac{l}{2}\sin\theta_1}{-\frac{l}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta)}\, d\theta_1 =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n \cos n\theta_1}{\cos\theta_1 - \cos\theta}\, d\theta_1 = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta_1}{\cos\theta_1 - \cos\theta}\, d\theta_1.$$

Главное значение интеграла, стоящего под знаком суммы, вычисляется просто (см. стр. 181)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta_1 \, d\theta_1}{\cos\theta_1 - \cos\theta} = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin\theta},$$

так что окончательно получаем

$$\frac{v_y}{v_\infty} = \frac{1}{4\pi v_\infty} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} dz_1}{z_1 - z} = -\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta}{\sin\theta}. \qquad (11.17)$$

Подставляя в основное уравнение (11. 15) значение интеграла (11. 17) и циркуляцию Г по формуле (11. 16), получим

$$2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = \frac{1}{2} a_0 \left[\alpha(\theta) - \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta}{\sin\theta} \right] b(\theta) v_\infty$$

или

$$a_0 b(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta + 4l \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = a_0 \alpha(\theta) b(\theta) \sin\theta.$$

Введя обозначение

$$\frac{a_0 b(\theta)}{4l} = \mu,$$

будем иметь

$$\mu \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta + \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = \mu\alpha \sin\theta$$

или окончательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mu + \sin\theta) A_n \sin n\theta = \mu\alpha \sin\theta. \qquad (11.18)$$

Последнее уравнение, удовлетворяющееся во всех сечениях крыла, позволяет определить коэффициенты A_n.

Для приближенного его решения поступаем следующим образом. Выбираем столько сечений крыла, сколько членов тригонометрического ряда (11. 16) желательно сохранить, и для каждого сечения составляем уравнение (11. 18) (параметр μ, пропорциональный хорде b, и угол атаки α в общем случае являются функциями θ). В результате получим систему алгебраических уравнений первой степени для определения коэффициентов A_n.

Легко убедиться в том, что для симметричного крыла и при симметричном его обтекании коэффициенты ряда (11. 16) A_n с четными n должны обратиться в нуль.

Действительно, напишем соотношение (11. 16) для двух точек крыла, равно удаленных от его середины

$$\Gamma(\theta)=2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

и

$$\Gamma(\pi-\theta)=2\,lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n(\pi-\theta).$$

Очевидно, что при четных n

$$\sin n(\pi-\theta)=-\sin n\theta,$$

а при нечетных n

$$\sin n(\pi-\theta)=+\sin n\theta.$$

Так как по условию симметрии должно выполняться равенство

$$\Gamma(\theta)=\Gamma(\pi-\theta),$$

то отсюда следует, что коэффициенты A_n с четными номерами должны обратиться в нуль.

Следовательно, коэффициенты A_n с *четными* n будут отличны от нуля лишь для несимметричных крыльев (например, крылья с отклоненными элеронами) или при несимметричном обтекании крыла.

Во многих случаях при расчете крыльев приходится пользоваться коэффициентами A_n лишь с нечетными n.

Итак, если имеется симметрия относительно среднего сечения крыла ($\theta=90°$), то значения θ будут лежать в интервале между 0 и 90°, а в разложении (11. 16) сохранятся лишь члены с нечетными коэффициентами A_1, A_3, A_5, A_7,...

Расчетные сечения крыла следует выбирать в наиболее характерных точках крыла: в местах резкого изменения профиля, в местах заметного изменения хорды (например, в месте перехода прямоугольного центроплана в трапецевидную консоль) и т. д. Практика расчетов показала, что достаточно удержать первые четыре члена ряда в разложении циркуляции, чтобы получить хорошее приближение для аэродинамических характеристик крыла.

Обычно (за исключением особых случаев) за расчетные могут быть приняты точки (фиг. 11. 10), соответствующие значениям

$$\theta=22{,}5°;\ 45°;\ 67{,}5°;\ 90°.$$

В этом случае система уравнений будет состоять из четырех уравнений вида (11. 18) соответственно четырем выбранным точкам полуразмаха. Каждому значению θ будет соответствовать свое уравнение.

Определив численные значения синусов и внося их в уравнения (11.18), получим следующую линейную алгебраическую систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных коэффициентов A_1, A_3, A_5, A_7 тригонометрического ряда (11.16)

$$0{,}383(\mu_1+0{,}383)A_1+0{,}924(3\mu_1+0{,}383)A_3+0{,}924(5\mu_1+0{,}383)A_5+$$
$$+0{,}383(7\mu_1+0{,}383)A_7=0{,}383\mu_1\alpha_1;$$
$$(\mu_2+0{,}707)A_1+(3\mu_2+0{,}707)A_3-(5\mu_2+0{,}707)A_5-$$
$$-(7\mu_2+0{,}707)A_7=\mu_2\alpha_2;$$
$$0{,}924(\mu_3+0{,}924)A_1-0{,}383(3\mu_3+0{,}924)A_3-0{,}383(5\mu_3+0{,}924)A_5+$$
$$+0{,}924(7\mu_3+0{,}924)A_7=0{,}924\mu_3\alpha_3;$$
$$(\mu_4+1)A_1-(3\mu_4+1)A_3+(5\mu_4+1)A_5-(7\mu_4+1)A_7=\mu_4\alpha_4,$$

где μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, α_1, α_2, α_3, α_4— известные величины.

Решая эту систему, находим искомые коэффициенты.

Следует подчеркнуть, что углы атаки α в соответствующих сечениях отсчитываются от *аэродинамической* хорды. В общем случае угол атаки в произвольном сечении может быть представлен в виде суммы:

угла атаки некоторого определенного, характерного сечения крыла; обычно за такое сечение принимают сечение, проходящее в плоскости симметрии крыла, т. е. $\alpha=\alpha\,(90°)$;

взятого с обратным знаком угла атаки, при котором подъемная сила равна нулю в плоскости выбранного характерного сечения; обычно его обозначают через $\alpha_0(90°)$:

угла закрученности (крутки) данного сечения крыла $\varphi_з(\theta)$. Следовательно,

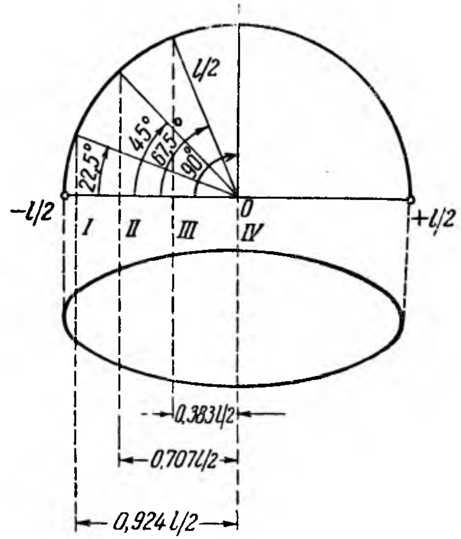
$$\alpha(\theta)=\alpha\,(90°)+\alpha_0(90°)+\varphi_з(\theta)$$

или

$$\alpha(\theta)=\alpha_1(90°)+\varphi_з(\theta),$$

где

$$\alpha_1(90°)=\alpha(90°)+\alpha_0(90°).$$



Фиг. 11.10. Расчетные сечения крыла.

Закрутка $\varphi_з(\theta)$ может быть осуществлена непосредственно поворотом сечений по отношению к хорде корневого сечения ($\theta=90°$) — *геометрическая крутка.* Если же ряд профилей лежит в одной плоскости, но углы $\alpha_0(\theta)$ у них различные, то в этом случае имеет место *аэродинамическая крутка*. Наконец, крыло может иметь оба вида закрученности одновременно — *смешанная крутка* (под положительной круткой понимают увеличение углов атаки от корневого к концевому сечению крыла).

Закрученное крыло характеризуется тем, что в различных его сечениях c_y различный. В частности, при $c_{y\,\text{кр}}=0$ c_y для различных сечений не равны нулю. Если же все сечения обладают одним и тем же c_y, то такое крыло называется незакрученным, или *плоским;* аэродинамические хорды плоского крыла лежат в одной плоскости.

Итак, метод Глауэрта—Трефтца дает возможность найти распределение циркуляции Г вдоль крыльев различной формы в плане. Однако необходимо отметить, что этот метод эффективен только для крыльев простейшей формы в плане. В более сложных случаях (наличие на крыле вырезов, выступов и т. п.) метод Глауэрта—Трефтца приводит к большим и трудоемким вычислениям.

§ 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ И СИЛЫ ИНДУКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КРЫЛА. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРЕСЧЕТА НЕЗАКРУЧЕННЫХ КРЫЛЬЕВ С ОДНОГО УДЛИНЕНИЯ НА ДРУГОЕ

Положим, что коэффициенты A_n ряда (11. 16) определены. Тогда легко определить аэродинамические характеристики крыла.

Найдем, например, подъемную силу крыла и силу индуктивного сопротивления. Выражение для подъемной силы крыла будет иметь вид

$$Y=\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\rho v_\infty \Gamma(z)\,dz=\rho v_\infty^2 l^2\int_0^\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\theta\right)\sin\theta\,d\theta.$$

Так как

$$\int_0^\pi A_1\sin\theta\sin\theta\,d\theta=A_1\int_0^\pi\sin^2\theta\,d\theta=A_1\frac{\pi}{2},$$

и при $n>1$

$$\int_0^\pi A_n\sin n\theta\sin\theta\,d\theta=A_n\left[\frac{-\sin(n+1)\theta}{2(n+1)}+\frac{\sin(n-1)\theta}{2(n-1)}\right]_0^\pi=0,$$

то

$$Y=\pi l^2\rho\frac{v_\infty^2}{2}A_1. \qquad (11.\ 19)$$

Таким образом, *подъемная сила крыла конечного размаха выражается только через первый коэффициент разложения циркуляции в тригонометрический ряд*. Остальные коэффициенты, не изменяя общей величины подъемной силы, влияют лишь на характер распределения циркуляции по крылу, следовательно, на распределение аэродинамической нагрузки по размаху крыла.

Легко найти коэффициент подъемной силы крыла

$$c_y = \frac{Y}{\frac{\rho S v_\infty^2}{2}} = \frac{\pi l^2}{S} A_1,$$

т. е.

$$c_y = \pi \lambda A_1. \tag{11.20}$$

Найдем теперь формулы для пересчета крыла с одного удлинения на другое.

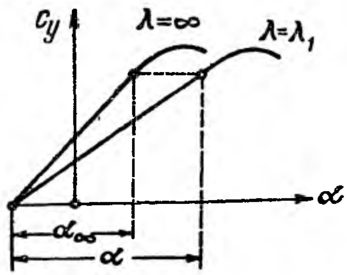
Будем считать, что крыло не имеет закрутки. Отсчитывая углы атаки от аэродинамической хорды, для крыла в целом можно написать (фиг. 11.11)

$$c_y = a\alpha = \pi\lambda A_1.$$

Отсюда для крыла определенной формы в плане имеем следующее равенство:

$$a = \frac{\pi\lambda A_1}{\alpha}, \tag{11.21}$$

где a — тангенс угла наклона прямой c_y к оси α.



Фиг. 11.11. Пересчет зависимости c_y от α с конечного удлинения $\lambda=\lambda_1$ на бесконечное $\lambda=\infty$.

Для данного крыла и для крыла бесконечного размаха, но с тем же значением c_y можно написать два следующих уравнения:

$$c_y = a\alpha,$$

$$c_y = a_0\alpha_\infty,$$

где α_∞ — угол атаки крыла бесконечного размаха, при котором достигается тот же c_y (фиг. 11.11).

Отсюда получаем

$$\alpha - \alpha_\infty = c_y\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0}\right) = \frac{c_y}{\pi\lambda}\pi\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0}\right). \tag{11.22}$$

Вводя обозначение

$$\pi\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0}\right) = 1 + \tau, \tag{11.23}$$

окончательно получаем

$$\alpha - \alpha_\infty = \frac{c_y}{\pi\lambda}(1 + \tau). \tag{11.24}$$

Эта формула позволяет пересчитать зависимость c_y по α, известную, например, из опыта, для крыла конечного размаха на крыло бесконечного размаха (см. фиг. 11.11).

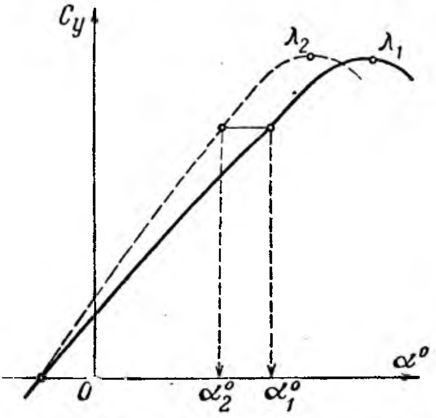
Если мы имеем два крыла, составленные из одних и тех же профилей, но с различными удлинениями λ_1 и λ_2, то для каждого из них можно написать равенства:

$$\alpha_1 - \alpha_\infty = \frac{c_y}{\pi\lambda_1}(1+\tau_1),$$

$$\alpha_2 - \alpha_\infty = \frac{c_y}{\pi\lambda_2}(1+\tau_2),$$

причем, как и выше, рассматриваются режимы с одинаковыми c_y. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ = 57{,}3\,\frac{c_y}{\pi}\left[\frac{1+\tau_1}{\lambda_1} - \frac{1+\tau_2}{\lambda_2}\right]. \qquad (11.25)$$



Фиг. 11.12. Пересчет зависимости c_y от α с одного удлинения λ_1 на другое λ_2.

Формула (11.25) дает возможность пересчитать кривую c_y по α, полученную для крыла с удлинением λ_1 на крыло с удлинением λ_2 (фиг. 11.12). Действительно, из нее следует, что у второго крыла те же c_y будут достигаться в точках α_2°, определяемых формулой

$$\alpha_2^\circ = \alpha_1^\circ - 57{,}3\,\frac{c_y}{\lambda}\left[\frac{1+\tau_1}{\lambda_1} - \frac{1+\tau_2}{\lambda_2}\right].$$

Значения τ для различных крыльев приводятся в следующем параграфе.

Найдем силу индуктивного сопротивления, имея в виду, что $\Delta\alpha = -\frac{v_y}{v_\infty}$

$$X_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho v_\infty \Gamma(z)\,\Delta\alpha(z)\,dz = \int_0^\pi \rho v_\infty 2l v_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,\frac{l}{2}\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \rho v_\infty^2 l^2 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} mA_m \sin m\theta\right) d\theta.$$

Так как при $m=n$

$$\int\limits_0^\pi A_n^2 n \sin^2 n\theta\, d\theta = A_n^2 \int\limits_0^\pi \sin^2 n\theta\, d(n\theta) = nA_n^2 \frac{\pi}{2},$$

а при $n \neq m$

$$\int\limits_0^\pi mA_n \sin n\theta A_m \sin m\theta\, d\theta = mA_nA_m \int\limits_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta\, d\theta = 0,$$

то

$$X_i = \pi l^2 \frac{\rho v_\infty^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2. \tag{11.26}$$

Таким образом, оказывается, что *сила индуктивного сопротивления крыла конечного размаха прямо пропорциональна сумме, составленной из квадратов коэффициентов разложения циркуляции в тригонометрический ряд, умноженных на их порядковые номера.* Эта сумма всегда положительна, и, следовательно, ни при каком распределении циркуляции по крылу и $c_y \neq 0$ индуктивное сопротивление не может исчезнуть.

Выражение для коэффициента индуктивного сопротивления всего крыла будет иметь такой вид (здесь $\lambda = l^2/S$):

$$c_{xi} = \frac{X_i}{\frac{\rho S v_\infty^2}{2}} = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2. \tag{11.27}$$

Умножив и разделив правую часть в последнем выражении на A_1^2 и замечая, что $A_1 = \frac{c_y}{\pi\lambda}$, получим

$$c_{xi} = \pi\lambda \left(\frac{c_y}{\pi\lambda}\right)^2 \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n^2}{A_1^2} = \frac{c_y^2}{\pi\lambda} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n^2}{A_1^2}$$

или окончательно

$$c_{xi} = \frac{c_y^2}{\pi\lambda}(1+\delta), \tag{11.28}$$

где

$$1+\delta = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n^2}{A_1^2}. \tag{11.29}$$

Как видим, для нахождения величины δ нужно знать величины коэффициентов A_n для крыла данной формы в плане. Значения δ для различных крыльев приведены в следующем параграфе.

Из соотношения (11.28) следует, что при переходе от крыла с удлинением λ_1 к крылу с удлинением λ_2 при одном и том же c_y выполняется следующее равенство:

$$c_{xi_1} - c_{xi_2} = \frac{c_y^2}{\pi}\left(\frac{1+\delta_1}{\lambda_1} - \frac{1+\delta_2}{\lambda_2}\right). \tag{11.30}$$

Эта формула позволяет пересчитать индуктивное сопротивление крыла с удлинением λ_1 на крыло с удлинением λ_2.

§ 8. ФОРМА В ПЛАНЕ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА С НАИМЕНЬШИМ ИНДУКТИВНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

При заданном значении c_y крыла c_{xi} будет минимальным, очевидно, в том случае, когда $\delta=0$, т. е. когда $A_3=A_5=A_7=\ldots=0$. В этом случае циркуляция $\Gamma(z)$ будет выражаться только через первый член ряда

$$\Gamma = 2lv_\infty A_1 \sin\theta.$$

Отсюда при $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$\Gamma_0 = 2lv_\infty A_1,$$

т. е.

$$A_1 = \frac{\Gamma_0}{2lv_\infty},$$

где Γ_0 — циркуляция в среднем сечении крыла.

Так как

$$z = -\frac{l}{2}\cos\theta,$$

то

$$\Gamma = 2lv_\infty A_1 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}}.$$

Учитывая, что A_1 в данном случае равно $\frac{\Gamma_0}{2lv_\infty}$, получим

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}}. \tag{11.31}$$

Как видим, циркуляция $\Gamma(z)$ меняется по размаху, следуя эллиптическому закону, т. е. *крыло имеет наименьшее индуктивное сопротивление при эллиптическом распределении циркуляции по размаху.*

Индуцированная скорость в этом случае [формула (11. 17)]

$$v_y = -A_1 v_\infty = -\frac{\Gamma_0}{2l}, \tag{11.32}$$

т. е. *постоянна* по размаху крыла, так же как и угол скоса

$$\Delta\alpha = -\frac{v_y}{v_\infty} = A_1 = \frac{\Gamma_0}{2lv_\infty} = \frac{c_{y\,кр}}{\pi\lambda}. \tag{11.33}$$

Коэффициент индуктивного сопротивления

$$c_{xi} = \frac{c_{y\,кр}^2}{\pi\lambda}. \tag{11.34}$$

Имея в виду, что для любого сечения крыла

$$\Gamma = \frac{1}{2} c_y b v_\infty,$$

уравнение (11.31) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} c_y b v_\infty = 2 l v_\infty A_1 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}},$$

откуда

$$b = \frac{4A_1 l}{c_y} \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}} = b_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}}, \tag{11.35}$$

где

$$b_0 = \frac{4A_1 l}{c_y}.$$

Последняя формула показывает, что при эллиптическом распределении циркуляции по размаху хорда крыла также меняется по эллиптическому закону. Иными словами, *крылом с наименьшим индуктивным сопротивлением является крыло, имеющее эллиптическую форму в плане.*

Вычислим подъемную силу эллиптического крыла. Эта сила выражается через площадь $\Omega_э$, ограниченную кривой $\Gamma(z)$ (фиг. 11. 13):

$$Y = \rho v_\infty \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z)\, dz = \rho v_\infty \Omega_э.$$

Площадь полуэллипса $\Omega_э$ в данном случае будет равна

$$\Omega_э = \frac{1}{2} \pi \Gamma_0 \frac{l}{2} = \frac{\pi}{4} l \Gamma_0.$$

Следовательно,

$$Y = \frac{\pi}{4}\rho v_\infty l \Gamma_0. \qquad (11.36)$$

Индуктивное сопротивление выразится формулой

$$X_i = Y\Delta\alpha,$$

где $\Delta\alpha = \frac{\Gamma_0}{2lv_\infty}$.

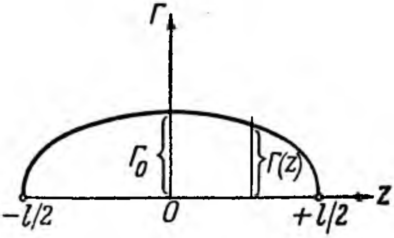
Следовательно,

$$X_i = \frac{\pi}{8}\rho\Gamma_0^2. \qquad (11.37)$$

Подставляя в последнюю формулу величину Γ_0 из формулы (11.36), получим

$$X_i = \frac{2}{\pi\rho v_\infty^2}\frac{Y^2}{l^2}.$$

Отметим, что X_i не зависит ни от λ, ни от l. На первый взгляд это противоречит последней формуле. На самом деле при изменении размаха в этом случае соответственно возрастает подъемная сила Y [см. (11.36)].



Фиг. 11.13. Распределение циркуляции вдоль эллиптического крыла.

Следует иметь в виду, что эллиптический закон изменения циркуляции по размаху можно получить при некотором α для крыла *любой* формы в плане, например, для прямоугольного крыла. Для этого нужно лишь увеличить углы атаки в средней части крыла по уравнению связи $\Gamma = \frac{1}{2}c_y b v_\infty$ и несколько уменьшить углы атаки у концов крыла, следуя этому же уравнению. Изменение углов атаки приведет к изменению c_y, и если добиться того, чтобы произведение $\frac{1}{2}c_y b v_\infty$ следовало закону эллипса, то такое крыло по вихревой его схеме ничем не будет отличаться от эллиптического для *данного* α.

Естественно задаться вопросом: насколько другие крылья отличаются от эллиптического крыла по распределению циркуляции?

Расчет эллиптического крыла и крыльев другой формы в плане (при одной и той же подъемной силе) дает результаты, приведенные на фиг. 11.14. Рассматривая полученные законы распределения циркуляции по размаху, можно сделать два основных заключения.

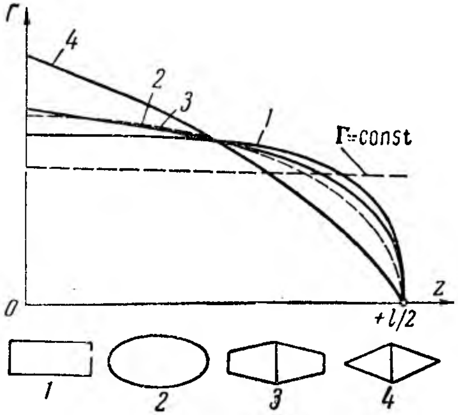
1. Замена крыла одним П-образным вихрем с $\Gamma = \mathrm{const}$ вдоль размаха может служить только в качестве первого приближения в теории крыла конечного размаха.

2. Некоторым «средним» законом распределения циркуляции по размаху для различных крыльев является эллиптический закон, соответствующий аэродинамически наивыгоднейшему крылу.

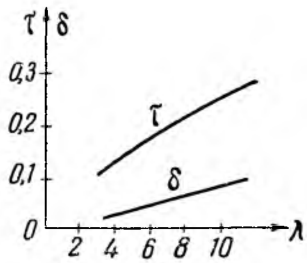
Величины τ и δ, именуемые обычно поправками, для крыльев неэллиптической формы в плане зависят главным образом от формы крыла в плане и от удлинения λ.

На фиг. 11.15 в качестве примера приведена зависимость поправок τ и δ от λ для прямоугольного крыла.

Следует заметить, что поправка τ для угла скоса оказывается довольно значительной, и, следовательно, при точных расчетах ее нужно обязательно учитывать. Поправка же δ для c_{xi} весьма мала и ее в большинстве случаев на практике не учитывают.



Фиг. 11.14. Распределение циркуляции вдоль крыльев различной формы в плане.



Фиг. 11.15. Пример зависимости поправок τ и δ от удлинения λ.

В табл. 11.1 даны некоторые средние значения поправок τ и δ для крыльев различной формы в плане [9].

Таблица 11.1

Форма крыла в плане	$\frac{1}{\pi}(1+\tau)$	$\frac{1}{\pi}(1+\delta)$	Примечание
Эллипс	0,318	0,318	$\tau=\delta=0$
Трапеция	0,318	0,318	Сужение $\eta=2-3$
Прямоугольник	0,375	0,335	$\lambda=5-8$
Концы крыла скошены назад	0,338	0,318	$\lambda=5-8$
Концы крыла закруглены	0,365	0,318	$\lambda=5-8$
Ромб	0,363	0,363	

Ввиду незначительных отклонений аэродинамических характеристик крыльев различной формы в плане от эллиптических крыльев на практике чаще всего применяют более простые формы крыльев, но все же близкие к эллиптическим, например, трапецевидные.

§ 9. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КРЫЛА МЕТОДОМ С. Г. НУЖИНА

В конце § 6 отмечалось, что для крыльев сложной конфигурации в плане (наличие вырезов, выступов), а также для крыльев с работающими элеронами, закрылками и т. п. метод Глауэрта—Трефтца для определения циркуляции по размаху крыла не находит практического применения.

Помимо этого метода, существует ряд других методов расчета распределения циркуляции. Наибольшее распространение из них в последние годы получили методы Рисберга [43] и Мультгоппа.

Излагаемый в настоящем параграфе метод проф. С. Г. Нужина содержит основные положительные качества последних методов и, кроме того, обладает преимуществами как в отношении простоты самой теории, так и в отношении практического применения.

Закон распределения циркуляции по размаху крыла напишем в прежней форме:

$$\Gamma=2lv_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

или

$$\bar{\Gamma}=\frac{\Gamma}{2lv_\infty}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta,$$

где угол θ связан с координатой z соотношением

$$z=-\frac{l}{2}\cos\theta.$$

Основное уравнение (11.18), решение которого ищется, напишем в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta\left(1+\frac{n\mu}{\sin\theta}\right)=\mu\left[\alpha_0(90^\circ)+\alpha(90^\circ)+\varphi_з(\theta)\right], \tag{11.38}$$

где попрежнему

$$\mu=\frac{a_0 t}{8\left(\frac{l}{2}\right)}=\frac{a_0\bar{t}}{8} \tag{11.39}$$

(в этом параграфе через t будем обозначать хорду крыла); $\varphi_з(\theta)$ — угол закрутки, который в общем случае может состоять из аэродинамической и геометрической закруток, т. е.

$$\varphi_з(\theta)=\varphi_{а.з}+\varphi_{г.з}.$$

Представляя коэффициенты A_n в виде

$$A_n=A'_n\alpha_1(90^\circ)+A''_n, \tag{11.40}$$

где

$$\alpha_1(90^\circ)=\alpha_0(90^\circ)+\alpha(90^\circ),$$

подберем A_n' и A_n'' так, чтобы выполнялись следующие основные равенства, вытекающие из основного уравнения (11.38):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n' \sin n\theta \left(1+\frac{n\mu}{\sin\theta}\right)=\mu; \tag{11.41}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n'' \sin n\theta \left(1+\frac{n\mu}{\sin\theta}\right)=\mu\varphi_3. \tag{11.42}$$

Таким образом, определение циркуляции около крыла заданной формы сводится к решению следующих двух отдельных задач: 1) к определению *основной* циркуляции вокруг *плоского* крыла заданной формы в плане (определение коэффициентов A_n') и 2) к определению *дополнительной* циркуляции от *закрутки* (определение коэффициентов A_n'').

Ввиду того что определение коэффициентов A_n' и A_n'' соответственно из уравнений (11.41) и (11.42) принципиально ничем не отличается, рассмотрим наиболее подробно уравнение (11.41) для коэффициентов A_n'.

Для их определения, следуя методу Нужина, представим функцию $\mu(\theta)$ в виде ряда Фурье:

$$\mu(\theta)=\sum_n b_n' \sin n\theta, \tag{11.43}$$

где в силу равенства $\mu(\theta)=\mu(\pi-\theta)$ числа n будут иметь только *нечетные* значения.

Из формулы (11.43) находим

$$\frac{\mu(\theta)}{\sin\theta}=\sum_n b_n' \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}. \tag{11.44}$$

Преобразуем это выражение следующим образом. Используя очевидное соотношение

$\sin n\theta=\sin n\theta-\sin(n-2)\theta+\sin(n-2)\theta=2\sin\theta\cos(n-1)\theta+\sin(n-2)\theta$,

будем иметь

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(n-2)\theta}{\sin\theta}+2\cos(n-1)\theta. \tag{11.45}$$

Следовательно, при конечном n

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=2\cos(n-1)\theta+2\cos(n-3)\theta+2\cos(n-5)\theta+\ldots+2\cos 2\theta+1.$$

Таким образом, выражение (11.44) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\mu(\theta)}{\sin\theta}=\sum_n b_n' \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=\sum_n b_n' \left[2\cos(n-1)\theta+2\cos(n-3)\theta+\ldots+1\right]$$

или

$$\frac{\mu(\theta)}{\sin\theta}=b_1'+b_3'(1+2\cos 2\theta)+b_5'(1+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta)+\ldots=$$

$$=b_1'+b_3'+b_5'+\ldots+2\sum_n b_{2n-1+2k}' \cos 2k\theta=\sum_n b_{2n-1}'+2\sum_n b_{2n-1+2k}' \cos 2k\theta,$$

где k — параметр, причем $k=1,\ 2,\ 3,\ldots$ Итак,

$$\frac{\mu(\theta)}{\sin\theta}=m_0+2\sum_k m_{2k}\cos 2k\theta, \tag{11.46}$$

где

$$m_0=\sum_n b'_{2n-1}, \tag{11.47}$$

$$m_{2k}=\sum_n b'_{2n-1+2k}. \tag{11.48}$$

Уравнение (11.41) при использовании соотношений (11.46) и (11.43) приобретает вид

$$\sum_n A'_n \sin n\theta\left[1+n\left(m_0+2\sum_k m_{2k}\cos 2k\theta\right)\right]=\sum_n b'_n \sin n\theta$$

или

$$\sum_n (1+m_0 n)A'_n \sin n\theta+\sum_{k,\,n} n m_{2k}A'_n\left[\sin(n+2k)\theta+\sin(n-2k)\theta\right]=$$

$$=\sum_n b'_n \sin n\theta. \tag{11.49}$$

Сравнивая коэффициенты при синусах дуг одинаковой кратности в левой и правой частях последнего уравнения, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&A'_1(1+m_0-m_2)+3A'_3(m_2-m_4)+5A'_5(m_4-m_6)+\ \ldots\ =b'_1,\\
&A'_1(m_2-m_4)+A'_3\left[(1+3(m_0-m_6)\right]+5A'_5(m_2-m_8)+\ \ldots\ =b'_3,\\
&A'_1(m_4-m_6)+3A'_3(m_2-m_8)+A'_5\left[(1+5(m_0-m_{10})\right]+\ \ldots\ =b'_5.
\end{aligned}\right\} \tag{11.50}$$

Прежде чем приступить к решению системы (11.50), укажем метод определения коэффициентов b'_n (коэффициенты m_{2k} легко определяются по уравнениям (11.47) и (11.48), если известны коэффициенты b'_n).

Пользуясь формулами из теории рядов Фурье для определения коэффициентов b'_n и исходя из уравнения (11.43), будем иметь

$$b'_n=\frac{2}{\pi}\int_0 \mu(\theta)\sin n\theta\,d\theta=\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\bar{t}(\theta)\sin n\theta\,d\theta \tag{11.51}$$

или иначе

$$b'_n=\frac{a_0}{2\pi}\int_0^1 \bar{t}I_n d\bar{z}, \tag{11.52}$$

где

$$I_n=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta},\qquad \bar{z}=\frac{2z}{l}.$$

С помощью формул (11.52) и (11.45) найдем выражение для коэффициентов b'_n в общем виде для крыльев любой формы в плане:

$$\left.\begin{aligned} b'_1 &= \frac{a_0}{2\pi}\int_0^1 \bar{t}\,d\bar{z} = \frac{a_0 S}{\pi l^2} = \frac{a_0}{\pi\lambda}\,; \\ b'_3 &= -b'_1 + \frac{2a_0}{\pi}\int_0^1 \bar{t}\,\bar{z}^2 d\bar{z}; \\ b'_5 &= -2b'_1 - 3b'_5 + \frac{8a_0}{\pi}\int_0^1 \bar{t}\,\bar{z}^4 d\bar{z} \end{aligned}\right\} \qquad (11.53)$$

и т. д.

Найдя коэффициенты b'_n, без труда можно определить и значения коэффициентов m_0 и m_{2k}, входящих в систему уравнений (11.50), используя для этого формулы (11.47) и (11.48).

Возвращаясь к системе уравнений (11.50), в которой коэффициенты m_0, m_{2k} и b'_n будем считать известными, укажем один из возможных методов определения коэффициентов A'_n — метод последовательных приближений (метод итераций).

Этот метод заключается в том, что систему линейных уравнений решают относительно каждого неизвестного A'_n отдельно, отсекая в уравнениях малые члены. Таким образом, путем получения ряда приближений находят окончательные значения неизвестных коэффициентов A'_n.

Следует заметить, что коэффициенты ряда (11.43) весьма быстро уменьшаются. Так, например, в случае эллиптического закона изменения хорды по размаху крыла все коэффициенты, начиная с b'_3, равны нулю. Что касается коэффициентов m_{2k}, то они также все равны нулю, за исключением коэффициента $m_0 = b'_1$. Следовательно, в случае эллиптического изменения хорды по размаху

$$A'_1 = \frac{b'_1}{1 + b'_1}, \qquad A'_n = 0 \text{ при } n \geqslant 3.$$

В заключение отметим, что приведенный в этом параграфе метод расчета дает вполне удовлетворительное совпадение с экспериментом.

Глава XII

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В предыдущих разделах книги предполагалось, что скорости движения потоков, а следовательно, и разности давления в различных точках потоков сравнительно невелики. Это позволяло считать плотность воздуха ρ постоянной величиной. Другими словами, эффект сжимаемости воздуха не учитывался.

При течении воздуха с большими скоростями, соизмеримыми со скоростью звука, изменение плотности воздуха необходимо учитывать; в противном случае получаемые результаты могут не только сильно отличаться от действительной картины течения, но и вовсе ей не соответствовать.

Учитывая, что движение воздуха (газа) с большими скоростями сопровождается большими изменениями давления, что в свою очередь вызывает значительное изменение плотности ρ и температуры T, обратимся вначале к основным положениям учения о теплоте и напомним основные определения и законы термодинамики.

§ 1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАЗА

Между основными параметрами, характеризующими состояние газа: объемом V [*м*^{3}], весом G [*кг*], заключенным в этом объеме, давлением p [*кг/м*^{2}], абсолютной температурой T [град.] — существует определенная зависимость. В случае совершенного газа эта зависимость представляется известной формулой

$$pV=GRT, \tag{12. 1}$$

где R — газовая постоянная R [*кгм/кг град*], и носит название *уравнения состояния.*

Многочисленные эксперименты подтверждают справедливость этой зависимости для широкого диапазона изменения давлений и температур. Опыты показывают, что воздух достаточно точно следует этому закону при давлении до 100 *ат* и не слишком низких температурах. Даже при давлении в 200 *ат* и температуре от $-20°$ до $+50°$ C отклонения от уравнения (12. 1) для воздуха не превышают 4%.

Если поделить обе части уравнения (12. 1) на G, то получим уравнение состояния для 1 *кг* газа

$$pv=RT \tag{12. 2}$$

или

$$\frac{p}{\gamma}=RT,$$

или [1]

$$p=\rho gRT, \tag{12.3}$$

где

$$v=\frac{V}{G}, \quad \gamma=\frac{G}{V}=\frac{1}{v}=\rho g.$$

Уравнение (12.3) дает возможность по любым двум параметрам, характеризующим состояние газа, определить величину третьего.

§ 2. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

Пусть некоторое количество газа G *кг* находится в равновесном состоянии. Обозначим через dQ количество подведенного к газу *извне* тепла. В результате подвода тепла газ перейдет из первоначального равновесного состояния в другое. Подвод тепла dQ может привести к изменению внутренней энергии газа dU, и, кроме того, при переходе из одного равновесного состояния в другое газ может совершать внешнюю механическую работу dL.

Далее, при переходе из одного равновесного состояния в другое газу в реальных условиях приходится затрачивать механическую работу dL_r на преодоление потерь, например, на трение. В замкнутой системе эта затраченная газом энергия возвращается в газ в виде тепла dQ_r, эквивалентного работе dL_r, т. е. $dQ_r=AdL_r$, где A — тепловой эквивалент работы, равный 1/427 *кал/кгм*.

Таким образом, *общее* количество подведенного к газу тепла dQ' слагается из тепла, подведенного к газу извне dQ, и из тепла потерь dQ_r, т. е.

$$dQ'=dQ+dQ_r.$$

На основании закона сохранения энергии можно написать следующее равенство:

$$dQ'=dU+A\,dL+A\,dL_r$$

или, обозначая

$$A\,dL+A\,dL_r=A\,dL',$$

$$dQ'=dU+A\,dL', \tag{12.4}$$

где dL' — вся работа, совершенная газом, слагающаяся из внешней работы dL и работы потерь dL_r.

---

[1] Для воздуха газовая постоянная равна 29,27 *кгм/кг град*. Иногда за газовую постоянную принимают величину gR, т. е. 287,14 *кгм²/кг сек²град*.

Внутреннюю работу dL' газа при его расширении в процессе подвода тепла легко выразить через изменение его объема:

$$dL' = dL + dL_r = p\,dV.$$

Тогда предыдущее уравнение можно написать в виде

$$dQ' = dU + Ap\,dV \tag{12.5}$$

или, относя все величины к 1 *кг* газа,

$$dq' = du + Ap\,dv. \tag{12.6}$$

Полученные уравнения (12.4)—(12.6) являются наиболее общим математическим выражением первого закона термодинамики. Очевидно, *первый закон термодинамики является частным случаем общего закона сохранения энергии и выражает эквивалентность тепловой и механической энергий.*

Если предположить, что переход газа из одного равновесного состояния в другое совершается без потерь (так называемый обратимый процесс), то для этого частного случая первый закон термодинамики примет вид

$$\left.\begin{aligned} &dQ = dU + A\,dL \\ &\text{или} \\ &dQ = dU + Ap\,dV, \\ &\text{или} \\ &dq = du + Ap\,dv, \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

так как

$$A\,dL_r = dQ_r = 0,\ dL' = dL \text{ и } dQ' = dQ.$$

Прежде чем перейти к рассмотрению второго закона термодинамики, напомним несколько важных термодинамических понятий и формул, которые можно получить, пользуясь уравнением состояния и первым законом термодинамики.

§ 3. ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Рассмотрим некоторый произвольный термодинамический процесс, в котором участвует 1 *кг* газа (фиг. 12.1). Обозначим температуру газа в точке A процесса через T, его температуру в смежной точке a через $T+\Delta T$, а количество тепла, подведенного извне к газу на участке Aa, через Δq.

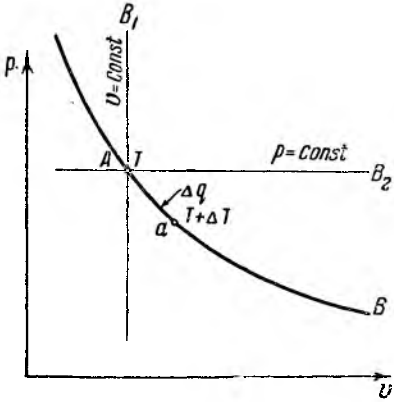
Отношение $\frac{\Delta q}{\Delta T}$ называется *средней удельной теплоемкостью* данного процесса, а предел, к которому стремится средняя удельная теплоемкость при стремлении длины участка Aa к нулю, называется *истинной удельной теплоемкостью,* или просто удельной теплоемкостью, и обозначается через

$$c = \frac{\partial q}{\partial T}. \tag{12.8}$$

Как видим, *удельной теплоемкостью называется количество тепла, необходимое для подогрева 1 кг газа на один градус.*

Удельная теплоемкость c существенно зависит от характера процесса (для процессов AB, AB_1 и AB_2 на фиг. 12.1 теплоемкости c имеют различные значения в одной и той же точке). Рассмотрим теплоемкости, соответствующие процессам $v=\text{const}$ и $p=\text{const}$ (прямые AB_1 и AB_2 на фиг. 12.1). Эти теплоемкости обозначаются через c_v и c_p.

Удельные теплоемкости c_v и c_p— величины переменные, зависящие от температуры T. Многочисленными опытами установлено, что теплоемкости c_v и c_p с возрастанием температуры также возрастают и наоборот.



Фиг. 12.1. К определению теплоемкости c, c_p и c_v.

Для процесса $v=\text{const}$ дифференциал $dv=0$, и, следовательно, на основании формулы (12.7) $dq=du$, т. е. все тепло, подводимое извне к газу в таком процессе, целиком тратится на увеличение его внутренней энергии. Поэтому для процесса $v=\text{const}$ можно написать

$$c_v=\frac{du}{dT}$$

(частная производная заменена полной, так как внутренняя энергия газа есть функция только абсолютной температуры). Таким образом,

$$du=c_v\,dT \tag{12.9}$$

или, пренебрегая зависимостью c_v от температуры и имея в виду, что при $T=0$ величина $u=0$,

$$u=c_vT. \tag{12.9'}$$

Используя формулу (12.9), уравнение (12.6) можно записать в следующем виде:

$$dq'=c_v\,dT+Ap\,dv.$$

Для процесса $p=\text{const}$

$$c_p=\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{p=\text{const}} \tag{12.10}$$

или, используя уравнение (12.7):

$$c_p=\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{p=\text{const}}+Ap\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{v=\text{const}}.$$

Так как внутренняя энергия зависит только от температуры, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{p=\text{const}}=\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{v=\text{const}}=\frac{du}{dT}=c_v.$$

Из формулы (12. 2) находим, что

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=\text{const}}=\frac{R}{p}.$$

Следовательно,

$$c_p=c_v+AR$$

или

$$c_p-c_v=AR. \qquad (12.11)$$

Формула (12. 11) показывает, что $c_p>c_v$ — факт, хорошо известный из физики. Обозначая

$$\frac{c_p}{c_v}=k, \qquad (12.12)$$

получим

$$c_v=\frac{AR}{k-1}. \qquad (12.13)$$

Исследования показали, что величина k зависит от молекулярной структуры газа. Так, для одноатомных газов $k=1{,}66$, для двухатомных газов, в том числе и для воздуха, $k=1{,}4$, для многоатомных газов $k=1{,}33$.

Ввиду того что теплоемкости c_v и c_p зависят от температуры в различной степени, величина k также изменяется с температурой — с увеличением температуры k уменьшается, так как с ростом T теплоемкость c_p растет медленнее, чем c_v. В табл. 12. 1 показана зависимость величины k от температуры для воздуха.

Таблица 12.1

t °C	0°	14°	100°	2000°
k	1,406	1,405	1,396	1,283

Из таблицы видно, что величина k заметно изменяется только при значительных изменениях температуры. Поэтому в дальнейшем будем считать значение k постоянным и для воздуха равным 1,4.

§ 4. ТЕПЛОСОДЕРЖАНИЕ

В газовой динамике часто используется особая функция состояния газа i, определяемая соотношением

$$di=c_p\,dT \qquad (12.14)$$

или

$$i=c_p\,T. \qquad (12.14')$$

Эта функция называется *теплосодержанием*.

Из определения теплосодержания (12. 14) следует, что приращение теплосодержания di представляет собой приращение тепла dq в процессе $p=\text{const}$. Имея это в виду, из уравнения (12. 7), интегрируя его в предположении $p=\text{const}$, получаем

$$i=u+Apv, \tag{12. 15}$$

откуда

$$i=\frac{A}{g}\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}. \tag{12. 15'}$$

Из (12. 15′) можно получить выражение для теплосодержания не в тепловых единицах, а в механических и не для 1 *кг* газа, а для газа, масса которого равна единице (вес ее, следовательно, будет g *кг*):

$$i=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}$$

или, учитывая уравнение состояния (12. 2):

$$i=\frac{k}{k-1}gRT.$$

§ 5. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ. ЭНТРОПИЯ

При изучении движения газового потока приходится часто пользоваться особой функцией s состояния, играющей большую роль в термодинамике и называемой *энтропией*. Эта функция определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$ds=\frac{dq'}{T}. \tag{12. 16}$$

Найдем выражение для энтропии в конечной форме. Предварительно установим связь между теплосодержанием и энтропией.

Так как

$$Tds=dq'$$

и

$$dq'=du+Ap\,dv=du+Ad(pv)-Av\,dp=d(u+Apv)-$$
$$-Av\,dp=di-Av\,dp,$$

то

$$T\,ds=di-Av\,dp. \tag{12. 17}$$

Попутно отметим, что если выражение (12. 17) записать не в тепловых единицах, а в механических и не для 1 *кг* газа, а для газа, масса которого равна единице, то оно будет выглядеть так:

$$T\,ds=J\,di-\frac{dp}{\rho}, \tag{12. 17'}$$

где

$$J=\frac{1}{A}=427\ кгм/кал.$$

Деля уравнение (12. 17) на T, заменяя di через $di=c_p\,dT$ и учитывая, что на основании уравнения состояния (12. 2) $v\,dp=R\,dT-p\,dv$, получим

$$ds=c_p\frac{dT}{T}-\frac{A}{T}(R\,dT-p\,dv),$$

откуда после простых преобразований, используя уравнения (12. 11), (12. 13) и (12. 2), будем иметь

$$ds=(c_p-AR)\frac{dT}{T}+A\left(\frac{p}{T}\right)dv=\frac{AR}{k-1}\frac{dT}{T}+A\frac{R}{v}\,dv$$

или иначе

$$ds=AR\left(\frac{1}{k-1}\frac{dT}{T}+\frac{dv}{v}\right). \tag{12. 18}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (12. 18), находим выражение для энтропии s

$$s=AR\ln\left(T^{\frac{1}{k-1}}v\right)+\text{const}. \tag{12. 19}$$

Из формулы (12. 19) следует, что энтропия s является функцией состояния газа, зависящей от двух независимых параметров состояния (в данном случае T и v). Пользуясь уравнением состояния (12. 2), нетрудно выразить значение энтропии через другие параметры, например, через p и ρ.

В самом деле, уравнение (12. 18), используя соотношение (12. 13), можно написать в следующем виде:

$$ds=c_v\left[\frac{dT}{T}+(k-1)\frac{dv}{v}\right],$$

откуда

$$s=c_v\ln(Tv^{k-1})+\text{const},$$

или, используя уравнение состояния (12. 2):

$$s=c_v\ln\left(\frac{p}{\rho^k}\right)+\text{const}. \tag{12. 20}$$

Из определения энтропии (12. 16) следует, что энтропия системы будет оставаться постоянной, если отсутствует подвод тепла $dq=0$ и термодинамический процесс протекает без потерь $dq_r=0$, т. е. если $dq'=0$ (ибо тогда $ds=0$ и $s=\text{const}$).

Из выражения же для энтропии в конечной форме (12. 19) или (12. 20) следует, что если энтропия $s=\mathrm{const}$, то для рассматриваемой системы

$$T^{\frac{1}{k-1}}v=\mathrm{const} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\rho^k}=\mathrm{const}. \tag{12. 21}$$

Процессы, протекающие без теплообмена и при отсутствии потерь, т. е. с постоянной энтропией, будем называть в дальнейшем *изэнтропическими.* Как видим, параметры состояния газа для изэнтропических процессов связаны определенными соотношениями (12. 21). Эти соотношения можно переписать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1}&=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k, \\ \frac{\rho_2}{\rho_1}&=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \frac{p_2}{p_1}&=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \end{aligned}\right\} \tag{12.22}$$

где индексы «1» и «2» относятся к каким-либо двум состояниям газа, участвующим в изэнтропическом процессе; величину k принято называть *показателем изэнтропы.*

Процессы, протекающие без подвода или отвода тепла извне, называются *адиабатическими.* При адиабатических процессах необратимые потери могут иметь место.

Следует отметить, что во всех реально наблюдаемых процессах имеют место трение $dq_r \neq 0$ и теплообмен $dq \neq 0$, т. е. все они сопровождаются необратимыми потерями и теплообменом. Однако во многих случаях теплообмен и необратимые потери невелики, ими можно пренебречь и, следовательно, считать процесс изэнтропическим, что сильно облегчает исследование газовых потоков.

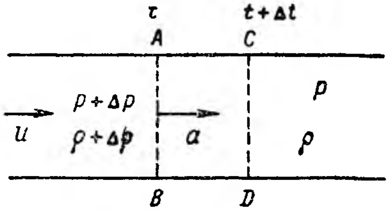
Следует также иметь в виду, что трение является только одним из видов необратимого превращения механической энергии в тепло. Существуют и другие виды необратимых превращений механической энергии в тепло — так называемые скачки уплотнения (см. гл. XV).

Как известно, второй закон термодинамики состоит в том, что *в изолированной системе, где теплообмен отсутствует* ($dq=0$), *при любом процессе энтропия системы не уменьшается.*

Так как выше было показано, что при изэнтропических процессах ($dq'=0$) энтропия изолированной системы остается постоянной, то, следовательно, при всех остальных, неизэнтропических процессах энтропия изолированной системы будет возрастать, что и определяет направление всех реальных процессов в газе.

§ 6. СКОРОСТЬ ЗВУКА

В несжимаемой жидкости всякое изменение давления в данной точке передается мгновенно, т. е. теоретически со скоростью $v=\infty$. Иначе обстоит дело в сжимаемой жидкости. Если в некоторой точке пространства, заполненного покоящейся сжимаемой жидкостью, местное давление p изменится на величину Δp, то при малых значениях Δp вызванные изменением давления возмущения будут распространяться во все стороны со скоростью звука.



Фиг. 12.2. Распространение малого возмущения в сжимаемой жидкости.

Как известно, скорость распространения звука в упругой среде выражается через модуль упругости E следующим образом:

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

В сжимаемой жидкости мы можем считать, что возмущение Δp аналогично напряжению сжатия σ. Относительное сжатие равно относительному увеличению плотности, т. е. $e=\frac{\Delta\rho}{\rho}$. Следовательно, модуль упругости E примет вид:

$$E=\frac{\sigma}{e}=\frac{\rho\Delta p}{\Delta\rho}.$$

В таком случае выражение для скорости звука примет вид:

$$a=\sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}}$$

или

$$a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{12.23}$$

Это означает, что под скоростью звука в сжимаемой жидкости мы можем подразумевать скорость распространения малых возмущений.

Покажем это на примере. Рассмотрим цилиндрическую трубу, (фиг. 12.2), заполненную сжимаемой жидкостью. Предположим, что движением поршня мы вызвали малое повышение давления Δp.

В таком случае это повышение давления Δp будет распространяться вправо со скоростью a в невозмущенную область, где давление p и плотность ρ. В возмущенной области, где давление $p+\Delta p$ и плотность $\rho+\Delta\rho$, сжимаемая жидкость вследствие возмущения плотности $\Delta\rho$ будет двигаться с малой скоростью u. Пусть в момент t граница возмущения будет AB, а в момент $t+\Delta t$—CD. За время Δt возмущение распространится на длину $AC=a\cdot\Delta t$ и захватит объем $Fa\Delta t$. Следовательно, приращение массы за время Δt будет равно $Fa\Delta t\Delta\rho$. Это приращение массы будет равно массе, входящей слева со скоростью u и равной $u(\rho+\Delta\rho)\Delta tF$. Приравнивая эти два выражения для приращения массы, находим

$$a\Delta\rho=u(\rho+\Delta\rho). \tag{а}$$

По теореме о количестве движения мы можем утверждать, что приращение количества движения равно количеству движения, возникшему в объеме $Fa\Delta t$, захваченном возмущением, т. е. равно

$$Fa\Delta t(\rho+\Delta\rho)u.$$

Это приращение количества движения должно равняться сумме импульсов сил давления $\Delta pF\Delta t$. Таким образом, находим

$$Fa\Delta t(\rho+\Delta\rho)u=\Delta pF\Delta t$$

или

$$\Delta p=au(\rho+\Delta\rho). \tag{б}$$

Из (а) и (б) получаем

$$\frac{a\Delta\rho}{\Delta p}=\frac{u(\rho+\Delta\rho)}{au(\rho+\Delta\rho)}$$

или

$$a^2=\frac{\Delta p}{\Delta\rho},$$

откуда

$$a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

т. е. действительно малое возмущение Δp распространяется со скоростью звука a.

Если предположить, что в сжимаемой жидкости происходит изэнтропический процесс, для которого

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k,$$

где $k=\frac{c_p}{c_v}$, а p_0 и ρ_0 суть давление и плотность в некоторой фиксированной точке, то выражение (12.23) для скорости звука примет несколько иной вид. В самом деле,

$$\frac{dp}{d\rho}=p_0\frac{1}{\rho_0^k}k\rho^{k-1}=k\frac{1}{\rho}p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k=k\frac{p}{\rho}.$$

Следовательно,

$$a=\sqrt{k\frac{p}{\rho}}. \tag{12.24}$$

Так как по уравнению состояния $p=\rho gRT$, то выражение для скорости звука a можно написать в виде

$$a=\sqrt{kgRT}. \tag{12.25}$$

Таким образом, в сжимаемой жидкости (газах) малые упругие возмущения распространяются с конечной скоростью a, зависящей от отношения давления и плотности в данной точке (12.24), или от абсолютной температуры в данной точке (12.25). Величина a, являющаяся скоростью распространения звука, играет при изучении газовых потоков исключительно большую роль, так как соотношение между скоростью течения и скоростью распространения малых возмущений позволяет судить о влиянии сжимаемости газа. Многие свойства потока, в том числе и характер изменения его параметров при различных условиях взаимодействия с окружающей средой, существенно зависят от того, в каких пределах лежит это соотношение, обозначаемое буквой M:

$$\mathrm{M}=\frac{v}{a}.$$

Ниже будет показано, что законы движения сжимаемой жидкости будут в корне отличны друг от друга в зависимости от того, будет ли скорость потока больше ($M>1$) или меньше ($M<1$) скорости a распространения звука.

Глава XIII

СИСТЕМА ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассмотрим произвольное установившееся течение газа, который будем считать идеальной, т. е. невязкой, но сжимаемой жидкостью. При заданных массовых силах движение газа можно считать известным, если для любой точки пространства известны значения трех проекций скорости v_x, v_y, v_z, давления p, плотности ρ и температуры T. Определение этих шести функций координат пространства

$$\left.\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z), \\ v_y &= f_2(x, y, z), \\ v_z &= f_3(x, y, z), \\ p &= f_4(x, y, z), \\ \rho &= f_5(x, y, z), \\ T &= f_6(x, y, z), \end{aligned}\right\} \qquad (13.1)$$

и составляет основную задачу газодинамики. Для их определения необходимо составить систему из шести уравнений. Обратимся к составлению этой системы.

Первыми тремя уравнениями для определения указанных выше неизвестных являются дифференциальные уравнения движения, которые для случая установившегося движения газа можно написать в известной форме Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.2)$$

Пренебрегая массовыми силами, т. е. полагая $X=Y=Z=0$, что для газовых потоков вполне допустимо, так как эти силы в большинстве случаев не оказывают существенного влияния на движение газа, перепишем уравнения Эйлера в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{13.2'}$$

Нетрудно убедиться, что если уравнения (13.2′) умножить на соответствующую проекцию элементарного перемещения *вдоль линии тока,* т. е. первое уравнение умножить на $dx=v_x dt$, второе — на $dy=v_y dt$ и третье — на $dz=v_z dt$, то, складывая эти уравнения, получим

$$v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)$$

или

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}dp,$$

интегрируя

$$\int\frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C. \tag{13.3}$$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли для газа, устанавливающим связь между давлением p и скоростью v газа.

Четвертым основным уравнением газовой динамики является уравнение неразрывности, которое можно написать в виде

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{13.4}$$

или в другой форме:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0. \tag{13.4'}$$

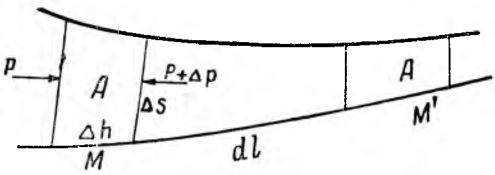
Пятым основным уравнением служит уравнение состояния газа, которое для совершенных газов имеет вид

$$p = \rho g R T. \tag{13.5}$$

Таким образом, для определения шести неизвестных функций (13.1) составлено пять уравнений.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Перейдем теперь к выводу шестого уравнения газовой динамики, называемому уравнением энергии. Для того чтобы его получить, рассмотрим в установившемся потоке газа элементарную трубку тока (фиг. 13. 1). Выделим в момент времени t в каком-либо месте трубки M элементарную частицу A жидкости, которая займет в момент времени $t+dt$ новое положение M'. В предположении отсутствия теплообмена, т. е. для *адиабатических* процессов, закон сохранения энергии гласит, что изменение кинетической и внутренней энергии частиц газа должно быть равно работе действующих на частицы внешних сил.



Фиг. 13. 1. Движение элемента газа.

Подсчитаем работу сил давления, затрачиваемую на перемещение dl частицы A из положения M в положение M'. Эта работа $dL_п$, очевидно, равна (см. фиг. 13. 1)

$$dL_п = -\Delta p \Delta s\, dl = -\frac{\Delta p}{\Delta h} \Delta s \Delta h\, dl,$$

где Δs — площадь сечения трубки тока, и так как

$$\Delta s \Delta h = V,$$

где V — объем частицы A, то

$$dL_п = -\frac{\Delta p}{\Delta h} V\, dl.$$

Дробь $\frac{\Delta p}{\Delta h}$ представляет перепад давления, приходящийся на единицу длины Δh, и, следовательно,

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = \frac{dp}{dl};$$

тогда

$$dL_п = -\frac{dp}{dl} V\, dl = -V\, dp.$$

Работа сил давления, затрачиваемая на расширение частицы, очевидно, равна

$$dL_р = -p\, dV.$$

Обозначая изменение внутренней энергии частицы в процессе ее перемещения из положения M в положение M' через dU, а изменение кинетической энергии через dK, приравнивая работу внешних сил изменению кинетической и внутренней энергий газа, будем иметь

$$-AV\,dp - Ap\,dV = dU + A\,dK \tag{a}$$

или

$$dU + A\,dK + Ad(pV) = 0.$$

Так как

$$dU = Gc_v\,dT$$

и

$$d(pV) = GR\,dT,$$

то

$$Gc_v\,dT + AGR\,dT + A\,dK = 0,$$

откуда

$$Gc_p\,dT + A\,dK = 0$$

или

$$Gdi + A\,dK = 0.$$

Изменение кинетической энергии рассматриваемой частицы можно представить в виде

$$dK = Gd\,\frac{v^2}{2g},$$

где v — скорость движения частицы газа, и, следовательно,

$$d\left(i + A\frac{v^2}{2g}\right) = 0,$$

откуда

$$i + A\frac{v^2}{2g} = \text{const}. \tag{13.6}$$

Уравнение (13.6) выражает *закон сохранения энергии для движущегося газа.* Из него следует, *что вдоль линии тока сумма теплосодержания и кинетической энергии фиксированного количества газа (например, 1 кг) есть величина постоянная.*

Поэтому уравнение (13.6) называется *уравнением энергии.*

В общем случае при движении газа касательные силы (силы трения) также произведут работу dL_r, в результате чего выделится тепло dQ_r. Поэтому при составлении баланса энергии в левую часть уравнения (a) следовало бы добавить члены $-AdL_r + dQ_r$. Но, как известно, выделяющееся тепло трения эквивалентно работе трения, т. е. $dQ_r = AdL_r$, в силу чего эти члены взаимно уничтожатся. Как видим, уравнение энергии справедливо и при учете потерь, наличие которых приводит только к перераспределению энергии внутри частиц газа — механическая энергия переходит в тепловую (напомним, что уравнение энергии получено в предположении отсутствия теплообмена).

Очевидно, уравнение энергии можно написать и в такой форме:

$$i_1 + \frac{Av_1^2}{2g} = i_2 + \frac{Av_2^2}{2g}. \tag{13.7}$$

Подчеркнем еще раз, что это уравнение справедливо для двух сечений одной и той же струйки газа или, точнее, для одной и той же линии тока. При переходе от одной линии тока к другой полная энергия, определяемая суммой (13.7), может изменяться.

Если в частном случае скорость $v=0$, то $i=i_0$, где i_0 — теплосодержание 1 *кг* газа в состоянии покоя. Очевидно, что для данной линии тока

$$i_0 = i + \frac{Av^2}{2g}. \tag{13.8}$$

Отметим, что уравнения (13.6) — (13.8) написаны в тепловых единицах (в *кал*).

Легко видеть, что в механических единицах, т. е. в *кгм*, уравнение (13.6) для 1 *кг* газа примет вид

$$i + \frac{v^2}{2g} = \text{const}, \tag{13.9}$$

где теплосодержание i 1 *кг* газа будет выражаться теперь тоже в механических единицах, т. е.

$$i = Jc_pT,$$

где $J = \frac{1}{A} = 427$ *кгм/кал*.

Уравнение энергии (13.6)

$$i + A\frac{v^2}{2g} = \text{const}$$

часто используют и в другой форме, которую можно получить, выразив теплосодержание i через температуру T и показатель изэнтропы k. Действительно, так как

$$i = c_pT \text{ и } c_p = \frac{k}{k-1}AR,$$

то

$$i = \frac{k}{k-1}ART.$$

Подставляя это выражение для i в уравнение (13.6), будем иметь

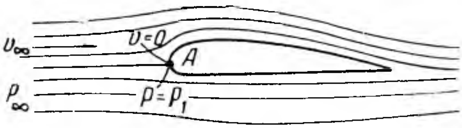
$$\frac{k}{k-1}RT + \frac{v^2}{2g} = \text{const}. \tag{13.10}$$

Из последнего уравнения, используя уравнение состояния $p = g\rho RT$, можно получить и такую форму уравнения энергии:

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}. \tag{13.11}$$

§ 3. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ К ВОЗДУХУ

Выясним, какова будет ошибка в определении давления воздуха при использовании уравнения Бернулли в форме (4. 17), выведенного в предположении, что воздух является несжимаемой жидкостью. Для этого сравним значения давлений, получаемые по формулам (4. 17) и (13. 3).



Фиг. 13. 2. Произвольное тело в потоке воздуха.

Допустим, что поток воздуха обтекает какое-нибудь тело (фиг. 13. 2).

Пусть на достаточно большом удалении от тела поток воздуха обладает скоростью v_∞ и давлением p_∞. В критической точке A скорость v равна нулю, а давление будет максимальным, равным p_1. Используем уравнение Бернулли в форме (4. 17):

$$p=C-\frac{\rho v^2}{2}.$$

Константу C определим из условий на бесконечности:

$$p_\infty=C-\frac{\rho v_\infty^2}{2},$$

откуда

$$C=p_\infty+\frac{\rho v_\infty^2}{2}.$$

Подставляя найденное значение C в формулу (4. 17), находим

$$p=p_\infty+\frac{\rho v_\infty^2}{2}-\frac{\rho v^2}{2}.$$

Для нахождения давления p_1 в критической точке положим $p=p_1$ и $v=0$. Будем иметь

$$p_1=p_\infty+\frac{\rho v_\infty^2}{2}.$$

Обозначая скоростной напор через q_∞:

$$q_\infty=\frac{\rho v_\infty^2}{2},$$

получим

$$p_1=p_\infty+q_\infty. \qquad \text{(a)}$$

Определим теперь давление в критической точке A с помощью уравнения Бернулли, выведенного в предположении, что воздух сжимаем.

Возьмем уравнение Бернулли в форме (13. 3)

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C.$$

Допустим, что течение воздуха происходит в условиях изэнтропического процесса, для которого имеет место следующее соотношение между давлением p и плотностью ρ:

$$\frac{p}{\rho^k} = C, \text{ т. е. } \rho = \rho_\infty \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{k}},$$

где $k = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}4$.

Вычислим интеграл $\int \frac{dp}{\rho}$. Подставляя значение ρ и интегрируя, находим

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Уравнение (13. 3) примет теперь вид

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{v^2}{2} = C.$$

Определим константу C из условий на бесконечности:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{v_\infty^2}{2} = C.$$

Подставляя найденное значение C в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{v_\infty^2}{2}.$$

Положив в этом уравнении $p = p_1$ и $v = 0$, что соответствует критической точке, будем иметь

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left(\frac{p_1}{p_\infty}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \frac{v_\infty^2}{2}$$

или после несложных преобразований

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \left(1 + \frac{k-1}{k} \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2p_\infty}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad (13.\,12)$$

Будем считать, что

$$\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{kp_\infty}<1.$$

Скорость звука выражается следующей формулой:

$$a^2=k\,\frac{p}{\rho}.$$

В таком случае условие $\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{kp_\infty}<1$ можно переписать в виде

$$\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2}<1.$$

Отношение скорости потока к скорости звука, как уже известно, обозначается через M, т. е. $\frac{v}{a}=\text{M}$. Следовательно, мы рассматриваем такие скорости течения воздуха, для которых число $\text{M}_\infty<1$, т. е. дозвуковые течения.

При этом условии разложим правую часть формулы (13. 12) в ряд по формуле бинома, удерживая лишь члены первой и второй степени относительно $\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{kp_\infty}$:

$$\frac{p_1}{p_\infty}=1+\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2p_\infty}+\frac{\frac{k}{k-1}\left(\frac{k}{k-1}-1\right)}{2!}\left(\frac{k-1}{k}\right)^2\left(\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2p_\infty}\right)^2+\ldots$$

Преобразуя и вводя число M_∞, получим

$$\frac{p_1}{p_\infty}=1+\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2p_\infty}+\frac{1}{2!}\,\frac{\text{M}_\infty^2}{2}\,\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2p_\infty}+\ldots$$

или, ограничиваясь в первом приближении первыми тремя членами:

$$\frac{p_1}{p_\infty}=1+\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2p_\infty}\left(1+\frac{\text{M}_\infty^2}{4}\right), \tag{13.13}$$

$$p_1=p_\infty+\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2}\left(1+\frac{M_\infty^2}{4}\right). \tag{13.14}$$

Вводя для скоростного напора обозначения q_∞, будем иметь

$$p_1=p_\infty+q_\infty\left(1+\frac{\text{M}_\infty^2}{4}\right)=p_\infty+q_\infty+q_\infty\frac{\text{M}_\infty^2}{4}. \tag{13.15}$$

Сравнивая это выражение для давления p_1 с формулой (а) на стр. 320, заключаем, что величина

$$q_\infty \frac{M_\infty^2}{4} = \Delta p$$

представляет собой погрешность в определении давления, получаемую при использовании формулы $p_1 = p_\infty + q_\infty$. Если Δp отнести к скоростному напору $\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2}$, то получим так называемую относительную погрешность

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta p}{\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2}}.$$

Из (13. 15) следует, что

$$\varepsilon_p = \frac{M_\infty^2}{4}. \tag{13. 16}$$

Пример. Скорость потока $v_\infty = 34$ *м/сек*. При нормальных атмосферных условиях число M в этом случае $M_\infty = 0{,}1$. Относительная погрешность $\varepsilon_p = \frac{(0{,}1)^2}{4} = \frac{0{,}01}{4}$, или в процентах $\varepsilon_p = 0{,}25\%$.

В табл. 13. 1 показано возрастание погрешности ε_p при увеличении скорости движения воздуха.

Таблица 13. 1

Зависимость поправки на сжимаемость воздуха от числа M_∞

v_∞ *м/сек*	34	68	102	136	170	203	238	272	306	340
M_∞	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ε_p %	0,25	1,0	2,25	4,0	6,2	9,0	12,8	17,3	21,9	27,5

Из таблицы видно, что при скоростях движения самолета до $v_\infty = 102$ *м/сек* погрешность при использовании уравнения Бернулли в форме (4. 17) мала и ею можно пренебречь. Следовательно, при скоростях самолета, не превышающих 360—400 *км/час*, в аэродинамических расчетах самолета можно не учитывать сжимаемость воздуха. В условиях современной авиации, когда скорость самолета околозвуковая, воздух нельзя рассматривать несжимаемым.

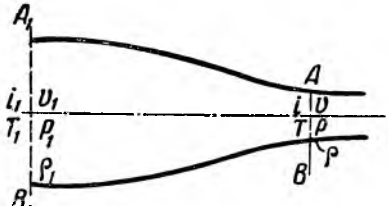
Глава XIV

ОДНОМЕРНЫЕ ИЗЭНТРОПИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

В этой главе рассмотрены *одномерные* установившиеся течения газа, т. е. такие течения, где все параметры газа являются функциями одной переменной, например, x. В частности, течения в трубах практически в большинстве случаев можно рассматривать как одномерные течения.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ИЗЭНТРОПИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрим изэнтропическое течение газа в трубе переменного сечения. Установим связь между основными параметрами, характеризующими движущийся газ: скоростью, давлением, плотностью, температурой и скоростью распространения в газе звуковых волн.



Фиг. 14.1. Одномерное течение газа.

Обозначим параметры газового потока в сечении A_1B_1 через $v_1, i_1, T_1, p_1, \rho_1$. Эти же параметры в сечении AB обозначим через v, i, T, p и ρ.

На основании уравнения энергии для сечений A_1B_1 и AB можно написать (в механических единицах):

$$i_1+\frac{v_1^2}{2g}=i+\frac{v^2}{2g}.$$

Если предположить, что $v_1=0$, и обозначить теплосодержание покоящегося газа через i_0, то

$$i_0=i+\frac{v^2}{2g} \tag{14.1}$$

или

$$\frac{k}{k-1}RT_0=\frac{k}{k-1}RT+\frac{v^2}{2g}. \tag{14.1'}$$

Из этих выражений видно, что при $i_0=\text{const}$ с изменением скорости течения газа v будет меняться и значение теплосодержания i, т. е. температура газа T.

В этом заключается одно из характерных отличий течения газа от течения несжимаемой жидкости. В несжимаемой жидкости температура меняется только при подводе к жидкости тепла извне или при отводе его наружу; условия ее движения, например, сужение или расширение струи, не могут вызвать изменения ее температуры (если пренебречь трением). В газе же температура меняется в зависимости от условий его движения. Уравнение (14. 1′) показывает, что с уменьшением скорости течения температура газа будет возрастать. Наибольшая температура достигается при $v=0$ и будет равна температуре T_0.

С другой стороны, из уравнения (14. 1) видно, что скорость газа, обладающего в состоянии покоя данным теплосодержанием i_0, не может превосходить некоторого максимального значения v_{max}, при приближении к которому величины i, T, a и p стремятся к нулю.

В самом деле, при максимальной скорости течения, равной v_{max}, температура $T=0$ и, как следует из уравнения состояния $p=g\rho RT$, давление $p=0$. Как видим, при скорости течения газа $v=v_{max}$ молекулярные движения в газе прекращаются.

Итак, скорость v будет достигать максимального значения $v=v_{max}$ при $i=0$, т. е. когда все теплосодержание i перейдет в кинетическую энергию газа. В этом случае

$$i_0=\frac{v_{max}^2}{2g},$$

откуда

$$v_{max}=\sqrt{2gi_0}. \tag{14. 2}$$

Из выражения (14. 2) можно сделать заключение, что максимальная скорость v_{max} является функцией только теплосодержания покоя i_0. Используя выражение $i_0=\frac{k}{k-1}RT_0$, а также уравнение состояния $p_0=\rho_0 gRT_0$, выражение (14. 2) для v_{max} можно переписать в следующем виде:

$$v_{max}=\sqrt{2gi_0}=\sqrt{\frac{2k}{k-1}gRT_0}=\sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}}. \tag{14. 3}$$

Параметры газа, соответствующие его состоянию покоя ($v=0$), называются параметрами *торможения*. В частности, температура и давление, соответствующие этому состоянию, называются *температурой торможения* и *давлением торможения* и обозначаются соответственно через T_0 и p_0.

Как видим, формула (14. 3) связывает максимальную скорость газового потока со значениями его параметров торможения. Если принять температуру торможения равной $T_0=288°$ абс., что соответствует температуре $t_0=15°$ С, и принять для воздуха $k=1{,}4$ и $R=29{,}27$ *кгм/кг град*, то получим $v_{max}=\sqrt{\frac{2k}{k-1}gRT_0}=756$ *м/сек* (такой получится, например, максимальная скорость истечения воздуха в пустоту из котла при температуре газа в котле 15° С). Интересно отметить, что давление p_0 не влияет на величину v_{max}.

Давление будет сказываться лишь на величине расхода при истечении газа.

Нетрудно выяснить, в какой мере повышается температура газа при его торможении от некоторой скорости v до нуля. В самом деле, из уравнения (14. 1′) получаем

$$\Delta T = T_0 - T = \frac{k-1}{2k} \frac{v^2}{gR}.$$

При $k=1{,}4$, $R=29{,}27$ *кгм/кг град*, $g=9{,}81$ *м/сек*^{2} будем иметь

$$\Delta T \approx \frac{v^2}{2000}.$$

Найдем теперь связь между скоростью v движения газа и скоростью звука a. Для этого предварительно перепишем уравнение (14. 1) в следующем виде:

$$\frac{i}{i_0} = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{v^2}{2gi_0}. \tag{14.4}$$

Считая течение газа изэнтропическим, будем иметь

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

или, используя (14. 4),

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{v^2}{2gi_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{14.5}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{v^2}{2gi_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{14.6}$$

Заменяя в формулах (14. 5) и (14. 6) значение i_0 через v_{max} по формуле (14. 2), получим

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{14.7}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{14.8}$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}. \tag{14.9}$$

Так как скорость звука в газе связана с его температурой соотношением

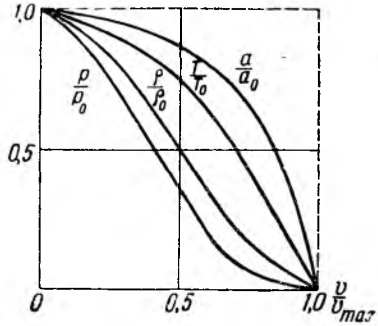
$$a^2 = kgRT,$$

то

$$\frac{T}{T_0} = \frac{a^2}{a_0^2} = 1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}, \tag{14.10}$$

где a — скорость звука, соответствующая скорости течения v и температуре T; a_0 — скорость звука в заторможенном газе. Скорость звука в фиксированном месте газового потока в дальнейшем будем называть *местной* скоростью звука по аналогии с местной скоростью потока.

Зависимость давления, плотности, температуры и местной скорости звука от скорости течения газа (в безразмерных величинах) представлена на фиг. 14. 2, построенной по уравнениям (14. 7)—(14. 10).



Фиг. 14. 2. Зависимость давления, плотности, температуры и скорости звука в газовой струе от скорости движения газа.

Полученным результатам нетрудно дать простое физическое истолкование.

При изэнтропическом течении газа возрастание его кинетической энергии может происходить только при условии понижения теплосодержания газа. Поэтому увеличение скорости потока при изэнтропическом течении газа связано с падением его температуры. Но так как при этом давление падает интенсивнее, чем температура, то плотность газа с ростом скорости течения уменьшается (плотность газа, как известно, прямо пропорциональна давлению и обратно пропорциональна температуре). Указанное справедливо и для адиабатических течений газа.

Таким образом, при изэнтропическом или адиабатическом течении газа *с ростом скорости происходит расширение газа.*

Возвращаясь к уравнению (14. 10) и используя уравнения

$$a_0^2 = kgRT_0 \quad \text{и} \quad v_{\max}^2 = 2gi_0 = \frac{2k}{k-1}\, gRT_0,$$

получим

$$a^2 = \frac{k-1}{2}\left(v_{\max}^2 - v^2\right). \tag{14.11}$$

Из формулы (14. 11) следует, что с увеличением скорости движения газа v скорость звука a уменьшается и при некоторой скорости потока становится равной последней.

Эта местная скорость потока, равная местной скорости звука, называется *критической скоростью* и обозначается через $a_{кр}$, т. е.

$$v = a = a_{кр}.$$

Сечение струи газа, в котором местная скорость равна местной скорости звука, называется *критическим*.

Все остальные параметры газового потока: давление, плотность, температура в том месте, где $v=a=a_{кр}$, тоже называются *критическими* и обозначаются соответственно через $p_{кр}$, $\rho_{кр}$ и $T_{кр}$.

Если в формуле (14. 11) скорости v и a положить равными $a_{кр}$, то получим

$$a_{кр}^2=\frac{k-1}{2}(v_{max}^2-a_{кр}^2),$$

откуда

$$a_{кр}^2=\frac{k-1}{k+1}v_{max}^2 \tag{14. 12}$$

(для воздуха критическая скорость $a_{кр}$ приблизительно составляет 0,44 v_{max}).

Используя полученное равенство и уравнение (14. 11), легко получить необходимую для дальнейшего зависимость

$$a^2=\frac{k+1}{2}a_{кр}^2-\frac{k-1}{2}v^2. \tag{14. 12$'$}$$

Из выражения (14. 12) следует, что критическая скорость $a_{кр}$ зависит только от температуры торможения T_0.

Действительно, подставляя в формулу (14. 12) значение v_{max} по формуле (14. 3), получим

$$a_{кр}^2=\frac{k-1}{k+1}2gi_0=\frac{2k}{k+1}gRT_0=\frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0}. \tag{14. 13}$$

Учитывая, что $kgRT_0=a_0^2$, находим

$$a_{кр}^2=\frac{2}{k+1}a_0^2. \tag{14. 14}$$

В частности, для воздуха ($k=1,4$, $R=29,27$ *кгм/кг град*), используя формулу (14. 13), будем иметь (при $g=9,81$ *м/сек*^{2})

$$a_{кр}\approx 18,3\sqrt{T_0}. \tag{14. 15}$$

Если скорость $a_{кр}$ выразить не через температуру торможения T_0, а через температуру газа в том сечении, где местная скорость течения газа и местная скорость звука равны, т. е. через критическую температуру $T_{кр}$, то на основании формулы

$$a_{кр}=\sqrt{kgRT_{кр}}$$

получим

$$a_{кр}\approx 20\sqrt{T_{кр}}.$$

Для температуры газа $T_{кр}$, соответствующей критической скорости, имеем соотношение [см. формулу (14. 9)]

$$\frac{T_{кр}}{T_0}=1-\frac{a_{кр}^2}{v_{max}^2},$$

откуда, используя соотношение (14. 12), получаем

$$T_{\text{кр}} = \frac{2}{k+1} T_0. \tag{14. 16}$$

Так как для изэнтропического процесса

$$\frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_0} = \left(\frac{T_{\text{кр}}}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p_{\text{кр}}}{p_0} = \left(\frac{T_{\text{кр}}}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

то, используя (14. 16), будем иметь

$$\rho_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \rho_0, \tag{14. 17}$$

$$p_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} p_0. \tag{14. 18}$$

Таким образом, все параметры газа в сечении, где скорость потока достигает скорости звука, являются функциями только параметров торможения T_0, ρ_0, p_0.

Формулы (14. 16), (14. 17), (14. 18) при $k=1{,}4$ принимают вид

$$T_{\text{кр}}=0{,}831T_0, \quad \rho_{\text{кр}}=0{,}636\rho_0, \quad p_{\text{кр}}=0{,}528p_0. \tag{14. 19}$$

Как известно, отношение скорости потока v в некоторой точке к скорости звука в той же точке, т. е. $\frac{v}{a}$, обозначается через М.

Введем безразмерную величину

$$\lambda = \frac{v}{a_{\text{кр}}}, \tag{14. 20}$$

которую будем называть *коэффициентом скорости*. Величина λ показывает степень приближения скорости течения газа в данном месте потока к критической скорости. Очевидно, что при $\mathrm{M}<1$ и $\lambda<1$ течение газа будет дозвуковым, при $\mathrm{M}>1$ и $\lambda>1$ — сверхзвуковым, а при $\mathrm{M}=1$ и $\lambda=1$ — звуковым.

В дальнейшем в ряде случаев будет удобно пользоваться формулами для параметров газа, выраженными не через скорость потока, как в уравнениях (14. 7)—(14. 9), а через величины М и λ. Получим эти формулы.

В силу равенств (14. 10), (14. 12) и (14. 14)

$$\frac{v^2}{v_{\max}^2} = \frac{a^2}{a_0^2}\,\frac{a_0^2}{v_{\max}^2}\,\frac{v^2}{a^2} = \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)\frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2,$$

откуда

$$1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} = \frac{1}{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2}.$$

С другой стороны, учитывая равенства (14.12) и (14.20),

$$\frac{v^2}{v_{max}^2}=\frac{a_{кр}^2}{v_{max}^2}\frac{v^2}{a_{кр}^2}=\frac{k-1}{k+1}\lambda^2.$$

Следовательно,

$$1-\frac{v^2}{v_{max}^2}=\frac{1}{1+\frac{k-1}{2}M^2}=1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2, \tag{14.21}$$

откуда можно получить

$$\lambda=\sqrt{\frac{k+1}{2}}\frac{M}{\sqrt{1+\frac{k-1}{2}M^2}}. \tag{14.21'}$$

Используя равенства (14.21), формулы (14.7), (14.8) и (14.10) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_0}{p}&=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}},\\ \frac{\rho_0}{\rho}&=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}},\\ \frac{T_0}{T}&=\frac{a_0^2}{a^2}=1+\frac{k-1}{2}M^2\end{aligned}\right\} \tag{14.22}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{p_0}&=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}},\\ \frac{\rho}{\rho_0}&=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}},\\ \frac{T}{T_0}&=\frac{a^2}{a_0^2}=1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2.\end{aligned}\right\} \tag{14.23}$$

Из формул (14.22) и (14.23) видно, что с ростом чисел M и λ температура, скорость звука, давление и плотность газа уменьшаются.

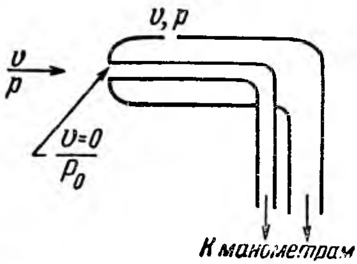
Формула

$$\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{14.24}$$

имеет большое практическое значение.

Ею, в частности, можно воспользоваться для замера числа M в дозвуковых потоках. Для этого в поток вводят измерительный насадок, имеющий два приемных канала — центральный и периферийный (фиг. 14. 3).

Манометр, присоединенный к внутреннему (центральному) каналу измерительного насадка, замеряет давление торможения p_0, а манометр, подключенный к внешнему (периферийному) каналу насадка, замеряет давление p в потоке, называемое статическим давлением.



Фиг. 14.3. Измерительный насадок для определения числа M в газовом потоке.

§ 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ СКОРОСТЬЮ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И ФОРМОЙ ЕГО СТРУИ

Настоящий параграф посвящен установлению связи между изменением основных параметров газового потока и изменением формы его струи, т. е. изменением площадей ее проходных сечений. Выяснение этого вопроса даст возможность определить, в каком направлении следует изменять площади сечений газовой струи, для того чтобы основные параметры газового потока, в частности, его скорость, изменялись в нужном направлении.

Для анализа явлений, происходящих в газовой струе переменного сечения, воспользуемся двумя уравнениями.

В качестве первого уравнения возьмем дифференциальное уравнение движения в форме Эйлера, которое для рассматриваемого одномерного движения газа будет иметь вид

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{14. 25}$$

В качестве второго уравнения возьмем уравнение сохранения массы для одномерных течений

$$\rho v F = \text{const}. \tag{14. 26}$$

Принимая ось струи (трубы) переменного сечения за ось x, продифференцируем уравнение (14. 26) по x:

$$\frac{d\rho}{dx}vF + \rho\frac{dv}{dx}F + \rho v\frac{dF}{dx} = 0.$$

Умножив все члены полученного уравнения на $\frac{v}{\rho F}$, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}v^2 + v\frac{dv}{dx} + \frac{v^2}{F}\frac{dF}{dx} = 0$$

или

$$v\frac{dv}{dx} = -\left(\frac{v^2}{\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{v^2}{F}\frac{dF}{dx}\right). \tag{14. 27}$$

Заменяя в уравнении (14.27) значение $\frac{d\rho}{dx}$ через

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a^2}\frac{dp}{dx}$$

и используя уравнение (14.25), будем иметь

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{v^2}{a^2}\frac{dp}{dx} + \frac{v^2}{F}\frac{dF}{dx}$$

или окончательно

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{dp}{dx} = \rho\frac{v^2}{F}\frac{dF}{dx}. \qquad (14.28)$$

Уравнение (14.25) устанавливает зависимость между производными $\frac{dv}{dx}$ и $\frac{dp}{dx}$, а уравнение (14.28) устанавливает зависимость между производными $\frac{dp}{dx}$ и $\frac{dF}{dx}$. Следовательно, уравнения (14.25) и (14.28) связывают между собой три величины: F, v и p.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1) Скорость течения газа v меньше скорости звука a, т. е. $v < a$. При этом

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) > 0,$$

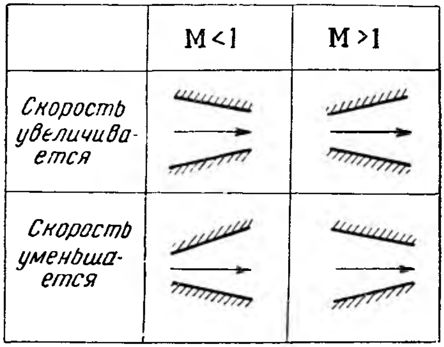
откуда в силу уравнения (14.28) следует, что знак производной $\frac{dp}{dx}$ будет совпадать со знаком производной $\frac{dF}{dx}$. Это означает, что если сечение струи F сужается $\left(\frac{dF}{dx} < 0\right)$, то давление будет падать $\left(\frac{dp}{dx} < 0\right)$. При этом скорость v будет увеличиваться, что очевидно из уравнения (14.25), так как в этом случае $\frac{dv}{dx} > 0$. Аналогично можно показать, что при увеличении F давление p возрастает, а скорость v уменьшается.

2) Скорость течения газа v больше скорости звука a, т. е. $v > a$. В этом случае

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) < 0,$$

и, следовательно, знаки $\frac{dp}{dx}$ и $\frac{dF}{dx}$ не будут совпадать. Это означает, что если, например, сечение струи сужается, то давление будет возрастать. Из уравнения (14.25) видно, что при этом скорость будет уменьшаться. Следовательно, если скорость газа v больше скорости звука, то характер течения прямо противоположен характеру течения с дозвуковыми скоростями.

Подчеркнем, что в обоих рассмотренных случаях характер связи между скоростью и давлением не меняется — например, если скорость v растет, то давление p падает и наоборот [формула (14.25)]. Но характер связи между скоростью v (или давлением p) и сечением струи F существенно зависит от отношения скорости потока к скорости звука [формула (14.28)], т. е. от числа $M=\frac{v}{a}$. В частности, при $M>1$, т. е. при $v>a$, увеличение площади сечения F струи газа сопровождается не уменьшением скорости v, как это имеет место при $M<1$, а, наоборот, ее увеличением (фиг. 14.4).



Фиг. 14.4. Зависимость скорости течения газа от формы газовой струи.

3) Скорость течения газа v равна скорости звука, т. е. $v=a$. В этом случае

$$1-\frac{v^2}{a^2}=0$$

и из уравнения (14.28) следует, что

$$\frac{dF}{dx}=0.$$

Поскольку при ускорении дозвукового газового потока площади сечений струи уменьшаются, а при ускорении сверхзвукового газового потока эти же площади увеличиваются, то отсюда следует, что при непрерывном переходе скорости потока от дозвуковых значений к сверхзвуковым сечения струи будут вначале уменьшаться, а затем увеличиваться. При этом, как показывает последнее равенство

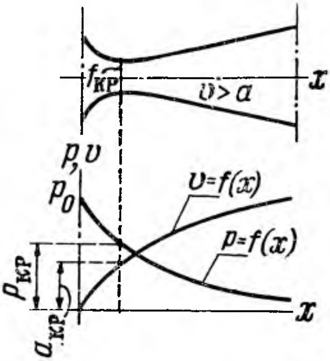
$$\frac{dF}{dx}=0 \quad \text{при} \quad \frac{v}{a}=1,$$

в наименьшем сечении струи скорость потока достигнет скорости звука, т. е. $v=a=a_{кр}$.

Как видим, *критическое* сечение газовой струи является ее *минимальным* сечением.

Из изложенного следует вывод, что одним сужением дозвуковой струи газа нельзя получить сверхзвуковых скоростей течения. Для этого необходимо *вначале сузить* струю до получения в наиболее узком ее сечении скорости, равной скорости звука ($v=a_{кр}$), а *затем расширить* ее для получения сверхзвуковых скоростей. Так именно и устроены сопла, предназначенные для получения сверхзвуковых скоростей (сопла Лаваля). На фиг. 14.5 показан характер изменения скорости и давления по длине такого сопла.

Для того чтобы выяснить причины, обусловливающие установленный выше характер связи между скоростью газовой струи и площадью ее сечений, рассмотрим зависимость удельного расхода газа, т. е. величины ρv, от скорости газа v.



Фиг 14.5. Сверхзвуковое сопло (сопло Лаваля).

Удельный расход ρv можно записать в следующем виде:

$$\rho v = \rho_0 v \frac{\rho}{\rho_0},$$

где ρ_0 — значение плотности при скорости газа, равной нулю. Используя формулу (14.8), будем иметь

$$\rho v = \rho_0 v \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{14.29}$$

Отсюда видно, что удельный расход ρv равен нулю в двух случаях: во-первых, при $v=0$ и, во-вторых, при $v=v_{max}$, так как в последнем случае плотность газа ρ обращается в нуль. Следовательно, при каком-то промежуточном значении скорости $0<v<v_{max}$ удельный расход ρv должен достигать максимального значения $(\rho v)_{max}$. Найдем это значение v, для чего приравняем производную от ρv по v нулю:

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = 0.$$

Продифференцировав выражение (14.29) для удельного расхода по v и приравняв его нулю, будем иметь

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho_0 \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} - \frac{\rho_0 v}{k-1} \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1} - 1} \frac{2v}{v_{max}^2} = 0.$$

Так как искомое значение $v \neq v_{max}$, то, сокращая на $\left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$, получаем

$$1 = \frac{2}{k-1} \frac{v^2}{v_{max}^2} \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{-1}$$

или

$$1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} = \frac{2}{k-1} \frac{v^2}{v_{max}^2}.$$

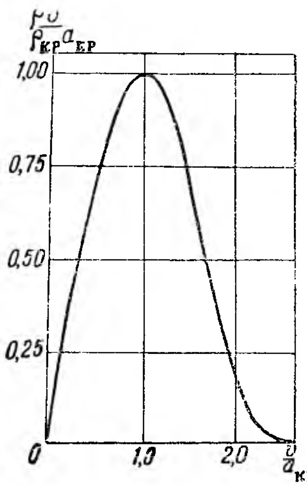
Решая последнее уравнение относительно v и учитывая уравнение (14.12), находим искомое значение скорости, при котором $\rho v = (\rho v)_{\max}$:

$$v^2 = \frac{k-1}{k+1} v^2_{\max} = a^2_{\text{кр}}. \tag{14.30}$$

Таким образом, удельный расход достигает максимума при

$$v = a_{\text{кр}}. \tag{14.31}$$

Зависимость удельного расхода ρv от скорости v, рассчитанная по уравнению (14.29), представлена на фиг. 14.6. Как видим, с увеличением скорости v удельный расход ρv вначале растет (при $v < a_{\text{кр}}$), достигает максимума при $v = a_{\text{кр}}$ и затем (при $v > a_{\text{кр}}$) уменьшается.



Фиг. 14.6. Зависимость удельного расхода газа от скорости его движения.

Учтем теперь уравнение расхода, выражающее условие сохранения секундной массы газа, проходящей через различные сечения F струи:

$$\rho v F = \text{const}. \tag{14.32}$$

Из этого уравнения следует, что в области дозвуковых скоростей, где удельный расход ρv растет, площади F сечений струи уменьшаются, достигают минимума при $\rho v = (\rho v)_{\max}$ и затем (в области сверхзвуковых скоростей) начинают расти в соответствии с уменьшением ρv. Минимальное сечение струи, где $\rho v = (\rho v)_{\max}$, является, очевидно, *критическим* сечением, так как в нем $v = a_{\text{кр}}$. Следовательно, мы пришли к тем же выводам, что и ранее, относительно связи между скоростью газовой струи и площадью ее сечений.

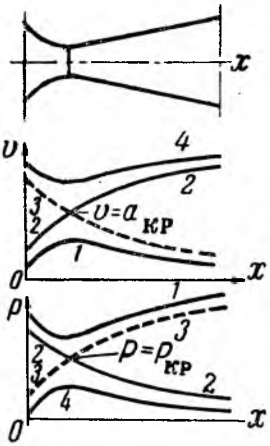
Кроме того, установленный характер изменения удельного расхода ρv позволяет выяснить причины, вследствие которых при ускорении газа в дозвуковой области течения струя его сужается, а в сверхзвуковой области — расширяется. Как видим, это происходит потому, что удельный расход в дозвуковой области растет, а в сверхзвуковой — уменьшается.

Формула (14.8) показывает, что плотность газа ρ при непрерывном увеличении его скорости монотонно уменьшается (см. также фиг. 14.2). Отсюда вывод, что в дозвуковой области, где удельный расход растет, плотность уменьшается медленнее, чем растет скорость, а в сверхзвуковой области, где удельный расход падает,— плотность уменьшается быстрее, чем растет скорость.

Таким образом, изменение площади струи газа по скорости его движения определяется характером изменения его плотности.

В дозвуковых потоках, где плотность изменяется медленнее, чем скорость движения газа, при увеличении последней удельный расход растет и площади сечений струи уменьшаются. В сверхзвуковых потоках, где плотность изменяется быстрее, чем скорость движения газа, с ростом последней удельный расход падает и площади сечений струи увеличиваются.

Рассмотрим возможные случаи течения газа по соплу Лаваля (фиг. 14.7), предполагая для простоты, что газ втекает в сопло из котла, где скорость его равна нулю. Изменение скорости и давления вдоль такого сопла может происходить двумя различными путями.



Фиг. 14.7. Различные случаи течения газа по соплу Лаваля.

Прежде всего очевидно, что при любом наружном давлении $p_н$ в среде, куда вытекает газ, меньшем давления p_0 в котле, течение газа по сужающейся части сопла Лаваля будет ускоренным, т. е. скорость газа будет монотонно увеличиваться, а давление — соответственно падать.

Характер же течения газа вдоль расширяющейся части сопла Лаваля будет существенно зависеть от того, достигнет ли скорость в минимальном сечении сопла критического значения $a_{кр}$ или нет.

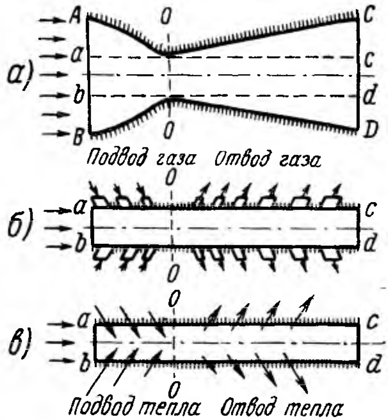
Если наружное давление $p_н$ больше критического давления $p_{кр}$ и мало отличается от давления в котле p_0, то скорость газа в минимальном сечении сопла не достигнет критического значения $(v<a_{кр})$, поток останется дозвуковым и скорость газа в расширяющейся части сопла будет монотонно убывать, а давление — возрастать до величины $p_н$ на срезе сопла (кривые *1* на фиг. 14.7). В этом случае расширяющаяся часть сопла Лаваля будет работать как обычный диффузор и течение всюду в сопле будет дозвуковым. Если же наружное давление $p_н$ меньше критического $(p_н<p_{кр})$, то скорость газа в минимальном сечении сопла достигнет величины местной скорости звука $(v=a_{кр})$ и в расширяющейся части сопла поток будет продолжать ускоряться, т. е. течение в этой части сопла будет сверхзвуковым (кривые *2* на фиг. 14.7).

Таким образом, на выходе из сопла Лаваля можно получить сверхзвуковой поток только в том случае, если наружное давление $p_н$ будет меньшим критического давления $p_{кр}$, величина которого определяется давлением в котле p_0.

Если обратить движение, т. е. предположить, что на входе в сопло Лаваля скорость потока больше скорости звука, то теоретически возможен и такой случай: сверхзвуковая скорость потока в сужающейся части сопла убывает, достигает в минимальном сечении критического значения и в расширяющейся части сопла продолжает монотонно убывать (давление при этом должно монотонно возрастать). В этом случае, представленном на фиг. 14.7 пунктирными кривыми *3*, сопло работало бы как сверхзвуковой диффузор.

Однако, как показывает опыт, непрерывный плавный переход от сверхзвуковой скорости к дозвуковой в трубах переменного сечения, как и во всех других случаях, не реализуется на практике. В действительности переход от сверхзвуковой скорости к дозвуковой сопровождается резким (скачкообразным) уменьшением скорости от сверхзвуковых значений до дозвуковых и соответствующим скачкообразным ростом давления (см. гл. XV).

Наконец, возможен также и такой случай, когда скорость сверхзвукового потока на входе в сопло, уменьшаясь в сужающейся части, не доходит все же до критического значения. В результате в расширяющейся части сопла скорость потока будет возрастать, т. е. поток по всему соплу останется сверхзвуковым. Этому случаю соответствуют кривые 4 на фиг. 14.7.



Фиг. 14.8. Геометрическое, расходное и тепловое сопла для получения сверхзвуковых скоростей течения газа.

Опытные исследования сопел Лаваля подтверждают сделанные выше заключения о возможных случаях распределения скорости и давления по длине сопла (кривые 1, 2 и 4).

Следует отметить, что сверхзвуковые потоки газа можно получить не только при помощи сопла Лаваля.

В сопле Лаваля при определенном перепаде давления газ непрерывно ускоряется, благодаря тому что сечения сопла вначале уменьшаются, а затем увеличиваются. В результате в наиболее узком сечении сопла достигается скорость звука, а в расширяющейся части сопла и на выходе из него — сверхзвуковые скорости.

Советским ученым Л. А. Вулисом [51] были предложены принципиально иные способы получения сверхзвуковых скоростей. Для уяснения существа метода Вулиса рассмотрим некоторые особенности течения газа по геометрическому соплу — соплу Лаваля (фиг. 14.8,*а*).

Прежде всего нетрудно заметить, что при установившемся движении газа по соплу в силу уравнения сохранения массы через сечение *AB* должно проходить в единицу времени то же количество газа, что и через самое узкое сечение *OO*.

Далее, считая процесс течения газа адиабатическим (т. е. считая, что тепло извне не подводится и не отводится), замечаем, что полная энергия, проносимая в единицу времени газом через сечение *AB*, также должна быть равна энергии, проносимой через сечение *OO* (по закону сохранения энергии).

Выделим мысленно внутри сопла Лаваля цилиндрический участок *abdc*, площадь поперечного сечения которого равна площади самого узкого сечения сопла *OO*.

Рассматривая выделенный участок, ограниченный до сечения OO контуром $abOO$, нетрудно заметить, что секундная масса газа, проходящая через сечение OO, будет больше секундной массы газа, проходящей через сечение ab, так как сечение ab является лишь частью всего сечения AB. Точно так же полная энергия, проносимая газом в единицу времени через сечение OO, будет больше, чем полная энергия, проносимая газом через сечение ab.

Таким образом, в выделенной части потока происходит увеличение секундной массы и энергии газа в направлении от сечения ab к сечению OO.

Отсюда следует, что для того, чтобы обеспечить в цилиндрической трубе изменение параметров газа, аналогичное их изменению в сопле Лаваля (в частности, для того, чтобы попрежнему в сечении OO получить скорость, равную скорости звука), необходимо на участке aO обеспечить соответствующее возрастание секундного расхода и энергии газа.

Аналогично рассматривая течение газа на цилиндрическом участке $cdOO$ и в сопле Лаваля $OOCD$ правее сечения OO, можно заключить, что для получения на выходе из цилиндрической трубы той же сверхзвуковой скорости, что и в выходном сечении сопла, необходимо на участке трубы между сечениями OO и cd обеспечить непрерывное уменьшение секундного расхода газа и его энергии.

Итак, чтобы получить в цилиндрической трубе сверхзвуковые скорости потока, необходимо вначале подводить к ней определенные количества газа и энергии (например, тепла), а затем отводить их.

Подвод (отвод) массы или энергии в цилиндрической трубе, как показал Л. А. Вулис, воздействует на величину скорости газа в одном и том же направлении и аналогично влиянию сужения (расширения) сечения струи. Поэтому в цилиндрической трубе можно получить сверхзвуковую скорость, осуществляя последовательный подвод и отвод одной только массы или одной только энергии (см. фиг. 14. 8,*б* и *в*). Цилиндрическое сопло, работающее на принципе подвода и отвода массы газа, Вулис назвал *расходным*, а сопло, работающее на принципе подвода и отвода тепла,— *тепловым*.

Кроме расходного и теплового сопел, Вулис предложил также механическое сопло, основанное на том принципе, что совершение газом работы расширения (например, на лопатках турбины) эквивалентно в смысле воздействия на его скорость отводу тепла, а подвод к газу механической энергии (например, в нагнетателе) — подводу тепла.

Таким образом, геометрическое сопло не является единственно возможным способом получения сверхзвуковых потоков. Как видим, сверхзвуковые скорости можно получить также с помощью расходного, теплового и механического сопел.

Глава XV

ТЕОРИЯ ПРЯМОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ

Как показывают опыты, обтекание тел сверхзвуковыми потоками, так же как и течение сверхзвукового потока газа в различных соплах и насадках, обладает специфическими особенностями по сравнению с аналогичными течениями дозвуковых потоков газа.

Одна из этих особенностей заключается, в частности, в том, что в ряде случаев основные параметры, характеризующие движение и состояние газа: давление, плотность, температура и скорость,— не являются непрерывными функциями точек пространства, заполненного текущим газом. Так, опыты показывают, что при более или менее значительном торможении сверхзвукового потока в последнем возникают поверхности, при прохождении газа через которые величины указанных выше параметров *скачкообразно* изменяются.

Места резкого, скачкообразного изменения основных параметров газового потока, сопровождающегося возрастанием его давления, плотности, температуры и уменьшением скорости, носят название *скачков уплотнения.*

На фиг. 15.1 показаны скачки уплотнения, возникающие при обтекании сверхзвуковым потоком остроносого тела. Как видим, в этом случае скачки начинаются на острой кромке тела и имеют примерно прямолинейную форму.

Во многих случаях скачок уплотнения образуется на некотором расстоянии от носовой части обтекаемого тела и имеет криволинейную форму (см. фиг. 15.2,*а*).

Опыты показывают, что поверхности образующихся скачков уплотнения могут быть как перпендикулярны к направлению скорости набегающего потока (фиг. 15.2,*б*), так и неперпендикулярны к ней (фиг. 15.2,*в*). В первом случае поток, пройдя скачок уплотнения, не меняет своего направления и скачок называется *прямым,* а во втором — меняет направление и скачок называется *косым.*

Очевидно, что криволинейная поверхность скачка уплотнения, показанная на фиг. 15.2,*а,* состоит из прямого скачка (в центральной части) и системы косых скачков уплотнения.

Фиг. 15.1. Фотография обтекания остроносого тела (пули) сверхзвуковым потоком.

Следует подчеркнуть (это будет доказано ниже), что появление скачков уплотнения около тела приводит к увеличению его лобового сопротивления.

Фиг. 15.2. Криволинейный скачок уплотнения и схемы прямого и косого скачков.

Перейдем к изложению основных свойств скачков уплотнения. В этой главе рассматривается теория прямого скачка.

Допустим, что в некотором сечении AB сверхзвукового потока газа образовался прямой скачок уплотнения. Обозначим параметры состояния газа до скачка через p_1, ρ_1, T_1 и v_1, а после скачка — через p_2, ρ_2, T_2 и v_2.

На фиг. 15.3 показан характер изменения скорости и давления в прямом скачке. Поставим задачу, зная значение параметров газа до скачка, найти их значения после скачка. Для нахождения зависимости между параметрами газа за скачком и перед ним используем уравнение количества движения, уравнение неразрывности, уравнение энергии и уравнение состояния.

Уравнение неразрывности, выражающее равенство секундных масс газа до и после скачка, напишем в виде

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2. \qquad (15.1)$$

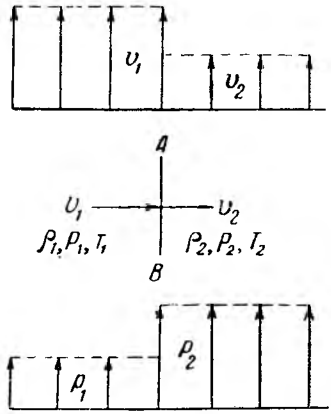
Так как изменение количества движения газа при прохождении через плоскость скачка происходит в результате разности давления $p_2 - p_1$, то

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_1 (v_1 - v_2). \qquad (15.2)$$

Равенство полной энергии, которой обладает газ перед скачком и за ним, запишется в механических единицах для 1 *кг* газа в следующем виде:

$$\frac{v_1^2}{2g} + i_1 = \frac{v_2^2}{2g} + i_2, \qquad (15.3)$$

где теплосодержание $i = Jc_pT$.



Фиг. 15.3. Характер изменения скорости и давления газа при прямом скачке.

Возможность применения этого уравнения к сечениям струйки, расположенным по разные стороны от плоскости скачка, обусловливается тем, что процесс сжатия газа в скачке уплотнения можно считать адиабатическим (т. е. теплоизолированным).

При прохождении газа через скачок его полная энергия не изменяется; происходит только перераспределение различных видов энергии — теплосодержание увеличивается в результате соответственного уменьшения кинетической энергии.

Используя применительно к скачку уравнение состояния газа

$$p = \rho g R T,$$

будем иметь

$$p_2 - p_1 = gR(\rho_2 T_2 - \rho_1 T_1). \qquad (15.4)$$

Система четырех уравнений (15.1)—(15.4) позволяет определить значения параметров газа за скачком по их значениям перед ним.

Обозначим разность скоростей до и после скачка через Δv, т. е. положим

$$v_1 - v_2 = \Delta v.$$

Тогда уравнения (15. 1) и (15. 2) можно переписать в следующем виде:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 (v_1 - \Delta v), \tag{15. 1'}$$

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_1 \Delta v. \tag{15. 2'}$$

Преобразуем уравнение (15. 3). Так как $i = Jc_p T$, то уравнению (15. 3) можно придать вид

$$\frac{1}{2g}(v_1^2 - v_2^2) = Jc_p (T_2 - T_1).$$

Вводя разность $\Delta v = v_1 - v_2$, будем иметь

$$\frac{\Delta v}{2g}(v_1 + v_2) = Jc_p (T_2 - T_1)$$

или

$$\frac{\Delta v}{2g}(2v_1 - \Delta v) = Jc_p (T_2 - T_1),$$

откуда получаем

$$T_2 - T_1 = \frac{\Delta v}{Jgc_p}\left(v_1 - \frac{\Delta v}{2}\right). \tag{15. 3'}$$

Таким образом, задача о нахождении четырех параметров газа после скачка: v_2, p_2, ρ_2, T_2, сводится к решению следующей системы четырех уравнений для разностей этих параметров:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_1 v_1 \Delta v, \tag{15.5}$$

$$\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 = \rho_1 \left(\frac{v_1}{v_1 - \Delta v} - 1\right), \tag{15.6}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\Delta v}{Jgc_p}\left(v_1 - \frac{\Delta v}{2}\right), \tag{15.7}$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = gR(\rho_2 T_2 - \rho_1 T_1), \tag{15. 8}$$

причем в (15. 8) величина T_2 определяется выражением (15. 7).

Определим прежде всего Δv. Для этого подставим в уравнение (15. 8) значение $p_2 - p_1$ из уравнения (15. 5) и значение ρ_2 из уравнения (15. 6). Будем иметь

$$\rho_1 v_1 \Delta v = gR\left[\rho_1 \frac{v_1}{v_1 - \Delta v} T_2 - \rho_1 T_1\right],$$

откуда

$$v_1 \Delta v (v_1 - \Delta v) = gR[v_1 (T_2 - T_1) + \Delta v T_1].$$

Подставляя в полученное уравнение значение разности $T_2 - T_1$ из уравнения (15.7), находим

$$v_1 \Delta v (v_1 - \Delta v) = gR\left[v_1 \frac{\Delta v}{Jgc_p}\left(v_1 - \frac{\Delta v}{2}\right) + \Delta v T_1\right]$$

или, сокращая на Δv,

$$v_1 (v_1 - \Delta v) = gR\left[\frac{v_1}{Jgc_p}\left(v_1 - \frac{\Delta v}{2}\right) + T_1\right].$$

Следует заметить, что при сокращении на Δv нами потеряно решение $\Delta v = 0$. Так как это решение соответствует случаю $v_1 = v_2$, т. е. отсутствию скачка, то оно нас не интересует.

Замечая, что $Jc_p = \frac{k}{k-1} R$, полученное уравнение можно переписать в виде

$$kv_1^2 - kv_1 \Delta v = (k-1) v_1^2 - (k-1) v_1 \frac{\Delta v}{2} + kgRT_1.$$

Обозначая через a_1 скорость звука в потоке перед скачком и замечая, что $a_1^2 = kgRT_1$, после простых преобразований получим следующее выражение:

$$\Delta v = \frac{2v_1}{k+1}\left(1 - \frac{a_1^2}{v_1^2}\right) \tag{15.9}$$

или

$$\Delta v = \frac{2v_1}{k+1}\left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right), \tag{15.10}$$

где

$$M_1 = \frac{v_1}{a_1}.$$

Подставляя найденное значение Δv из формулы (15.10) в выражения (15.5), (15.6) и (15.7), находим [1]

$$\Delta p = \frac{2\rho_1 v_1^2}{k+1}\left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right), \tag{15.11}$$

$$\Delta \rho = \rho_1 \frac{1 - \frac{1}{M_1^2}}{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{M_1^2}}, \tag{15.12}$$

$$\Delta T = \frac{2k}{Jgc_p (k+1)^2} v_1^2 \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{kM_1^2}\right). \tag{15.13}$$

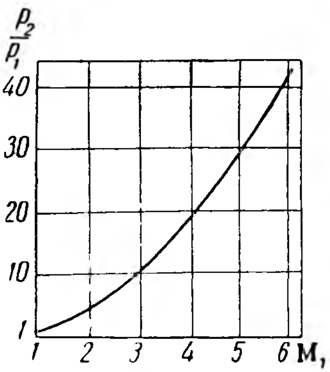
[1] Формулы для Δp, $\Delta \rho$ и ΔT можно получить в более простом виде, если их выразить через критическую скорость (см. стр. 347).

Исключая из уравнения (15.11) ρ_1 с помощью известного соотношения $a^2 = k\frac{p}{\rho}$, будем иметь

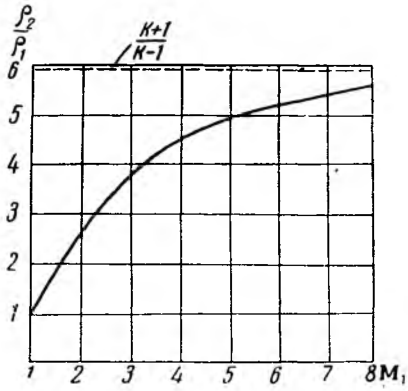
$$p_2 - p_1 = \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1)p_1 \tag{15.14}$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}. \tag{15.15}$$



Фиг. 15.4. Зависимость $\frac{p_2}{p_1}$ от числа M_1 при прямом скачке.



Фиг. 15.5. Зависимость $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ от числа M_1 при прямом скачке.

Зависимость отношения $\frac{p_2}{p_1}$ от числа M_1 приведена на фиг. 15.4.

Преобразуем формулу (15.12) следующим образом:

$$\rho_2 - \rho_1 = \frac{M_1^2 - 1}{\frac{k-1}{2}M_1^2 + 1}\rho_1, \tag{15.16}$$

откуда

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1}M_1^2}{\frac{2}{k-1} + M_1^2}. \tag{15.17}$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Зависимость отношения $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ от числа M_1 дана на фиг. 15.5.

Преобразуем теперь формулу (15.13). Замечая, что

$$Jc_p = \frac{k}{k-1} R \text{ и } a_1^2 = kgRT_1,$$

формулу (15.13) можно написать так:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{g} \frac{k-1}{kR} \frac{2k}{(k+1)^2} \frac{v_1^2}{a_1^2} kgRT_1 \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{kM_1^2}\right)$$

или

$$T_2 - T_1 = \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} kM_1^2 \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{kM_1^2}\right) T_1,$$

откуда

$$T_2 - T_1 = \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} \left[kM_1^2 - \frac{1}{M_1^2} - k + 1\right] T_1. \tag{15.18}$$

Деля обе части равенства на T_1, будем иметь

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2k(k-1)}{(k+1)^2} M_1^2 - \frac{2(k-1)}{(k+1)^2 M_1^2} + \frac{4k - (k-1)^2}{(k+1)^2}. \tag{15.19}$$

Зависимость отношения $\frac{T_2}{T_1}$ от числа M_1 дана на фиг. 15.6.

Установим теперь связь между M_1 и M_2. Так как

$$\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{2}{k+1}\left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right) v_1,$$

то

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{(k+1) M_1^2}. \tag{15.20}$$

Пользуясь соотношениями $a_1^2 = kgRT_1$ и $a_2^2 = kgRT_2$ и используя формулу (15.19) для $\frac{T_2}{T_1}$, после несложных преобразований из формулы (15.20) находим

$$M_2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{kM_1^2 - \frac{k-1}{2}},$$

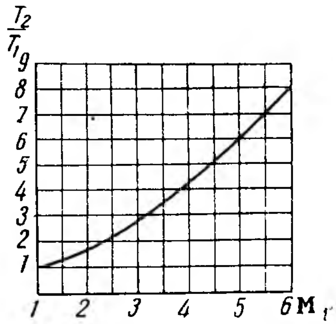
откуда

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{M_1^{-2} + \frac{k-1}{2}}{kM_1^2 + \frac{k-1}{2}}. \tag{15.21}$$

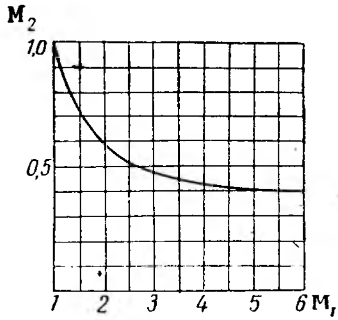
Зависимость числа M_2 от числа M_1 приведена на фиг. 15.7.

Выведенные формулы показывают, что скачки параметров газа являются функциями только начальных параметров: p_1, ρ_1, T_1 и $v_1(M_1)$.

Интересно также отметить, что скачки уплотнения, при которых $p_2 - p_1 > 0$, $\rho_2 - \rho_1 > 0$ и $T_2 - T_1 > 0$, могут быть только при сверхзвуковых скоростях, т. е. при $M_1 > 1$ [см. формулы (15.11), (15.12) и (15.13)].



Фиг. 15.6. Зависимость $\frac{T_2}{T_1}$ от числа M_1 при прямом скачке.



Фиг. 15.7. Зависимость числа M_2 от числа M_1 при прямом скачке.

В заключение настоящего параграфа найдем соотношение между скоростями перед и за прямым скачком и критической скоростью.

Для этого используем уравнения (15.1), (15.2), (15.3) и уравнение состояния газа в виде

$$ig = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = Jgc_pT.$$

Разделим почленно уравнение количества движения на ρ_1:

$$\frac{p_2}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_1} = v_1(v_1 - v_2).$$

Заменив в первом слагаемом ρ_1 через $\rho_1 = \frac{\rho_2 v_2}{v_1}$ (из уравнения сохранения массы), получим

$$\frac{p_2}{\rho_2}v_1 - \frac{p_1}{\rho_1}v_2 = v_1 v_2 (v_1 - v_2).$$

Пользуясь уравнением состояния, последнее уравнение можно переписать в следующем виде:

$$g\frac{k-1}{k}(i_2 v_1 - i_1 v_2) = v_1 v_2 (v_1 - v_2).$$

Из уравнения энергии (15. 3) находим выражение для i_1 и i_2:

$$i_1 = \frac{1}{2g}(v_{max}^2 - v_1^2),$$

$$i_2 = \frac{1}{2g}(v_{max}^2 - v_2^2).$$

Подставляя выражения для i_1 и i_2 в полученное выше уравнение, будем иметь

$$\frac{k-1}{2k}[(v_{max}^2 - v_2^2)v_1 - (v_{max}^2 - v_1^2)v_2] = v_1 v_2 (v_1 - v_2)$$

или

$$\frac{k-1}{2k}(v_1 - v_2)(v_{max}^2 + v_1 v_2) = v_1 v_2 (v_1 - v_2),$$

откуда

$$\frac{k-1}{2k}(v_{max}^2 + v_1 v_2) = v_1 v_2,$$

т. е.

$$v_1 v_2 = \frac{k-1}{k+1} v_{max}^2, \qquad (15.22)$$

и, следовательно, на основании формулы (14. 12)

$$v_1 v_2 = a_{кр}^2. \qquad (15.23)$$

Соотношение (15. 23) устанавливает зависимость между скоростями газового потока до и после прямого скачка и критической скоростью. Это соотношение показывает, что при прямом скачке критическая скорость газа $a_{кр}$ является средним геометрическим между скоростями v_1 и v_2 до и после скачка.

Из соотношения (15. 23) следует также, что прямой скачок может существовать только в том случае, когда одна из скоростей v_1 или v_2 больше критической скорости, а другая меньше ее. Следовательно, уравнение (15. 23) показывает, что прямые скачки не могут иметь место в чисто дозвуковых потоках или в чисто сверхзвуковых, а могут образоваться только при переходе скорости потока от сверхзвуковых значений к дозвуковым (обратный скачкообразный переход от дозвуковых значений скорости к сверхзвуковым ее значениям невозможен в изолированных системах, что будет показано ниже).

Из (15. 1)—(15. 3), пользуясь соотношением (15. 23), можно получить формулы для параметров газа за прямым скачком, выраженные через его начальные параметры и критическую скорость:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 (v_1^2 - a_{кр}^2). \qquad (15.24)$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{v_1^2}{a_{кр}^2}, \qquad (15.25)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{v_1^2}{2Jgc_p}\left(1 - \frac{a_{кр}^4}{v_1^4}\right). \qquad (15.26)$$

§ 2. СРАВНЕНИЕ СЖАТИЯ ПРИ ПРЯМОМ СКАЧКЕ С ИЗЭНТРОПИЧЕСКИМ СЖАТИЕМ

Анализируя кривые изменения $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, $\frac{p_2}{p_1}$ и $\frac{T_2}{T_1}$ в зависимости от числа M_1, замечаем, что кривая $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ имеет предел при $M_1 \to \infty$, равный

$$\lim_{M_1 \to \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1} = 6 \text{ (при } k = 1{,}4)^1.$$

В то же время величина $\frac{p_2}{p_1}$ стремится к бесконечности при бесконечном увеличении M_1. Следовательно, сжатие воздуха при прямом скачке существенно отличается от сжатия при изэнтропическом процессе. Действительно, при изэнтропическом процессе изменение параметров состояния газа связано простым соотношением

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k, \qquad (15.27)$$

из которого следует, что бесконечному увеличению давления при изэнтропическом сжатии соответствует бесконечное увеличение плотности газа.

Отсюда видно, что скачкообразное изменение параметров газа в прямом скачке уплотнения не является изэнтропическим процессом и может рассматриваться лишь как адиабатический процесс, если пренебречь рассеиванием тепла, выделяющегося при скачке.

Для прямого скачка также можно получить соотношение, аналогичное (15. 27), связывающее непосредственно давление и плотность газа. Для этого воспользуемся уравнениями (15. 17) и (15. 15). Из уравнения (15. 17) следует, что

$$M_1^2 = \frac{2\rho_2}{(k+1)\rho_1 - (k-1)\rho_2}. \qquad (15.28)$$

---

[1] Если $k = 1{,}4$, то при $p_2 \to \infty$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6,$$

т. е. при возрастании давления плотность не может возрасти более чем в 6 раз. Этот результат справедлив лишь для сравнительно невысоких давлений (когда $\frac{p_2}{p_1}$ не превосходит сотен атмосфер).

При больших давлениях температура газа будет сильно повышаться. Предположим, что и при больших давлениях справедливо уравнение состояния $pv = RT$. В таком случае при $p \to \infty$ плотность ρ конечна, следовательно, $T \to \infty$. Но при больших t° величина k уменьшается. Установлено, что при весьма больших давлениях закон шестикратного увеличения плотности уже несправедлив.

Подставляя значение M_1 из уравнения (15.28) в уравнение (15.15), получим

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{(k+1)\rho_2-(k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1-(k-1)\rho_2} \tag{15.29}$$

или

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\frac{k+1}{k-1}\frac{\rho_2}{\rho_1}-1}{\frac{k+1}{k-1}-\frac{\rho_2}{\rho_1}}. \tag{15.29'}$$

Соотношение (15.29) выражает закон *ударной адиабаты Гюгонио.* На фиг. 15.8 изображены два закона: изэнтропический и закон ударной адиабаты в координатах $\frac{p_2}{p_1}$ и $\frac{\rho_2}{\rho_1}$.

Пользуясь уравнением состояния газа до скачка $p_1=g\rho_1RT_1$ и за скачком $p_2=g\rho_2RT_2$, можно вывести для прямого скачка зависимость между отношениями давлений $\frac{p_2}{p_1}$ и отношением температур $\frac{T_2}{T_1}$.

Для этого в уравнении (15.29′) выразим значения плотности через соответствующие температуры и давления:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\frac{k+1}{k-1}\frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2}-1}{\frac{k+1}{k-1}-\frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2}}.$$

Решая это уравнение относительно $\frac{T_2}{T_1}$, получим

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\frac{k+1}{k-1}\frac{p_2}{p_1}+\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2}{\frac{k+1}{k-1}\frac{p_2}{p_1}+1}. \tag{15.30}$$

На фиг. 15.9, как и на фиг. 15.8, изображены два закона: изэнтропический и закон ударной адиабаты, но только в координатах $\frac{p_2}{p_1}$ и $\frac{T_2}{T_1}$.

Из фиг. 15.9 видно, что при одинаковых отношениях давлений $\frac{p_2}{p_1}$ температура при скачкообразном (ударном) сжатии больше, чем при изэнтропическом. Этот сильный разогрев газа при скачке и является причиной того, что плотность газа за скачком даже при бесконечном возрастании давления p_2 остается конечной величиной.

Итак, простое сравнение изэнтропического сжатия со сжатием ударным показывает, что последнее не является изэнтропическим.

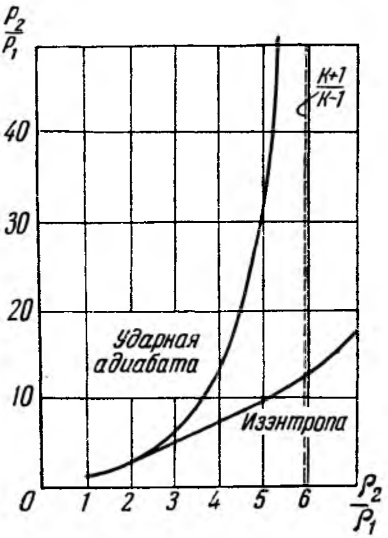
Поскольку ударное сжатие можно рассматривать как процесс адиабатический, то отсюда следует, что энтропия при ударном сжатии должна возрастать. Докажем это.

Предположим, что в процессе изэнтропического течения газ из состояния p_1, ρ_1 перешел в состояние $p_{2из}$, ρ_2. Предположим также, что газ из того же состояния p_1, ρ_1 перешел скачкообразно в состояние, характеризуемое той же величиной плотности ρ_2 и соответствующим ему на ударной адиабате давлением p_2. Тогда из изложенного выше следует (см. фиг. 15.8), что

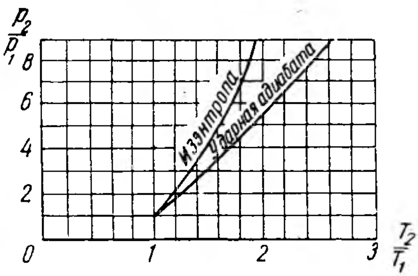
$$p_2 > p_{2\,из}.$$

Обратимся теперь к выражению для энтропии

$$s = c_v \ln\left(\frac{p}{\rho^k}\right).$$



Фиг. 15.8. Изэнтропа и ударная адиабата.



Фиг. 15.9. Изэнтропа и ударная адиабата.

Для изэнтропического процесса изменения параметров газа

$$s_{2из} = s_1 = c_v \ln\left(\frac{p_1}{\rho_1^k}\right) = c_v \ln\left(\frac{p_{2из}}{\rho_2^k}\right).$$

Для скачкообразного изменения параметров газа

$$s_2 = c_v \ln\left(\frac{p_2}{\rho_2^k}\right).$$

Следовательно,

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\left(\frac{p_2}{\rho_2^k}\right) - c_v \ln\left(\frac{p_{2из}}{\rho_2^k}\right) = c_v \ln\left(\frac{p_2}{p_{2из}}\right).$$

Так как

$$p_2 > p_{2\,из},$$

то

$$s_2 > s_1,$$

т. е. при ударном сжатии энтропия действительно возрастает.

Предположим теперь, что газ из состояния p_1, ρ_1 перешел скачкообразно в состояние p_2, ρ_2 путем скачка разрежения, т. е. $p_2<p_1$ и $\rho_2<\rho_1$. Нетрудно убедиться, что для скачков разрежения ударная адиабата пойдет ниже изэнтропы и, следовательно, при одной и той же плотности ρ_2 давление $p_2<p_{2\,\text{из}}$. Но тогда, проводя выкладки аналогично предыдущему, получим $s_2<s_1$, т. е. энтропия изолированной системы при скачках разрежения должна уменьшаться. Так как подобное уменьшение энтропии противоречит второму закону термодинамики, то отсюда следует вывод *о невозможности существования в адиабатических процессах скачков разрежения*[1].

Так как при ударном сжатии энтропия возрастает, то отсюда следует, что ударное сжатие является необратимым процессом. Последнее означает, что при процессах, происходящих по закону ударной адиабаты, часть механической энергии переходит в тепло, которое уже не может быть полностью преобразовано в кинетическую энергию без дополнительных затрат механической работы. Это положение будет проиллюстрировано в конце § 4 настоящей главы.

Сравним параметры газа после ударного сжатия с его параметрами, соответствующими изэнтропическому сжатию. Предположим, что газ из начального состояния v_1, p_1, ρ_1, T_1 переходит в другое состояние двумя различными путями: изэнтропически и по закону ударной адиабаты.

Конечные параметры газа в первом случае обозначим через v_2, p_2, ρ_2, T_2; соответственно конечные параметры газа во втором случае — через $v_{2\,\text{ск}}$, $p_{2\,\text{ск}}$, $\rho_{2\,\text{ск}}$, $T_{2\,\text{ск}}$. Пусть изэнтропический процесс протекает так, что конечное давление и давление после скачка остаются равными друг другу, т. е. $p_2=p_{2\,\text{ск}}$. Тогда из фиг. 15. 9 следует, что $T_2<T_{2\,\text{ск}}$.

Используем уравнение энергии. Так как начальные условия в обоих случаях одинаковы, то, очевидно,

$$\frac{v_2^2}{2g}+\frac{k}{k-1}RT_2=\frac{v_{2\text{ск}}^2}{2g}+\frac{k}{k-1}RT_{2\text{ск}}.$$

Отсюда, имея в виду предыдущее неравенство $T_2<T_{2\,\text{ск}}$, заключаем, что

$$v_{2\,\text{ск}}<v_2.$$

Следовательно, при одинаковых конечных давлениях скорость газа за скачком (необратимый процесс) будет меньше скорости в процессе изэнтропического сжатия, т. е. часть кинетической энергии газа при скачке необратимо перешла в тепло (температура газа повысилась).

---

[1] Следует иметь в виду, что условие адиабатичности, на котором основывается приведенный выше вывод о невозможности скачка разрежения, весьма существенно. При неадиабатических процессах скачки разрежения возможны и наблюдаются на практике (так называемые скачки конденсации).

Сравним те же процессы, но при одинаковых конечных скоростях, т. е. при $v_2 = v_{2\,ск}$. В этом случае из уравнения энергии находим, что $T_2 = T_{2\,ск}$, откуда (см. фиг. 15. 9)

$$p_{2\,ск} < p_2.$$

Следовательно, при одинаковых конечных скоростях давление за скачком (необратимый процесс) будет меньше, чем давление в обратимом изэнтропическом процессе.

Таким образом, при скачкообразных (необратимых) процессах уменьшается скорость или давление по сравнению с процессами, протекающими изэнтропически.

Как увидим далее, необратимое превращение механической энергии в тепловую при скачке является источником так называемого волнового сопротивления при обтекании тел потоком газа.

§ 3. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ. ЗВУКОВАЯ ВОЛНА

Обратим теперь картину течения газа, т. е. предположим, что плоскость скачка не стоит неподвижно, а движется со скоростью v_1. В этом случае v_1 будет скоростью распространения волны давления p_2 в среде неподвижного газа, где давление p_1. Найдем скорость v_1 распространения волны давления и покажем, что при уменьшении разности давлений $p_2 - p_1$ эта скорость приближается к скорости звука.

В самом деле, из формул (15.5) и (15.6), а также выражения $\frac{v_1}{v_1 - \Delta v} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ находим

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} v_1^2,$$

откуда скорость v_1 распространения волны давления p_2 в газе с давлением p_1 будет иметь вид

$$v_1 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}}. \qquad (15.31)$$

Ясно, что в пределе при $p_2 \to p_1$ и $\rho_2 \to \rho_1$ выражение для v_1 принимает вид

$$v_1 = \lim_{\Delta p \to 0} \sqrt{\frac{\rho_1 + \Delta\rho}{\rho_1} \frac{\Delta p}{\Delta\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \qquad (15.32)$$

Так как в правой части равенства стоит известное выражение для скорости распространения звука, то, следовательно,

$$v_1 = a_1.$$

Таким образом, *звуковая волна является скачком уплотнения бесконечно малой интенсивности.*

§ 4. ДАВЛЕНИЕ В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ЗА ПРЯМЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

Обозначим через p_1 и v_1 соответственно давление и скорость сверхзвукового потока перед прямым скачком уплотнения (фиг. 15. 10), через p_2 и v_2 — давление и скорость непосредственно за скачком уплотнения, через p_{20} — давление в критической точке (в которой скорость течения газа $v_{20}=0$). Будем считать, что поток до скачка и после скачка изэнтропический.

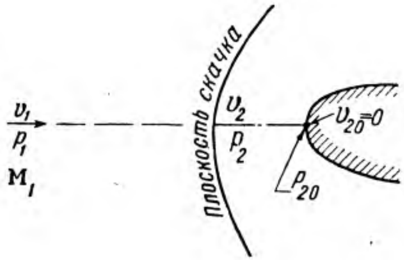
Найдем давление p_{20} в критической точке. Отношение давлений $\frac{p_{20}}{p_1}$ можно записать в виде следующего произведения:

$$\frac{p_{20}}{p_1}=\frac{p_2}{p_1}\frac{p_{20}}{p_2}. \tag{15.33}$$

Отношение $\frac{p_2}{p_1}$ найдем, используя формулу (15. 15):

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2k}{k+1}M_1^2-\frac{k-1}{k+1}=$$

$$=\frac{k-1}{k+1}M_1^2\left[\frac{2k}{k-1}-\frac{1}{M_1^2}\right]. \tag{15.34}$$



Фиг. 15. 10. К определению давления в критической точке при наличии прямого скачка уплотнения перед телом.

Используя формулы (14. 7) для изэнтропического процесса, будем иметь

$$\frac{p_2}{p_{20}}=\left(1-\frac{v_2^2}{v_{max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

или, используя формулу (15. 22),

$$\frac{p_2}{p_{20}}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Если в этом уравнении заменить отношение скоростей $\frac{v_2}{v_1}$ по формуле (15. 20), то окончательно получим

$$\frac{p_2}{p_{20}}=\left[\frac{2(k-1)}{(k+1)^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}\left[\frac{2k}{k-1}-\frac{1}{M_1^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}. \tag{15.35}$$

Подставляя в уравнение (15. 33) значения $\frac{p_2}{p_1}$ и $\frac{p_{20}}{p_2}$, определяемые уравнениями (15. 34) и (15. 35), получим искомую формулу для давления в критической точке за прямым скачком уплотнения [1]

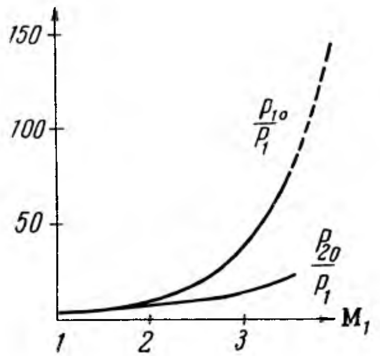
$$\frac{p_{20}}{p_1}=\frac{k-1}{k+1}\left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)}\right]^{\frac{k}{k-1}}\frac{M_1^2}{\left[\frac{2k}{k-1}-\frac{1}{M_1^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}}, \qquad (15.36)$$

которая при $k=1{,}4$ приобретает вид

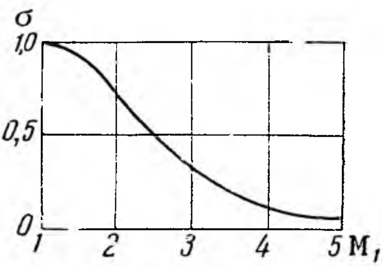
$$\frac{p_{20}}{p_1}=\frac{166{,}7M_1^2}{\left(7-\frac{1}{M_1^2}\right)^{2,5}}. \qquad (15.37)$$

Зависимость $\frac{p_{20}}{p_1}$ от M_1, определяемая этой формулой, приведена на фиг. 15.11. Для сравнения на этом же графике приведена кривая, определяющая давление в критической точке p_{10} при отсутствии скачка уплотнения, вычисленная по формуле (14.22), которая при $k=1{,}4$ принимает вид

$$\frac{p_{10}}{p_1}=(1+0{,}2M_1^2)^{3,5}. \qquad (15.38)$$



Фиг. 15.11. Зависимость давления в критической точке потока при прямом скачке от числа M_1.



Фиг. 15.12. Зависимость коэффициента потерь σ полного напора при прямом скачке от числа M_1.

Исключая из формул (15.37) и (15.38) давление p_1 и вводя обозначение $\frac{p_{20}}{p_{10}}=\sigma$, получим следующее соотношение:

$$\frac{p_{20}}{p_{10}}=\sigma=\frac{166{,}7M_1^2}{\left(7-\frac{1}{M_1^2}\right)^{2,5}(1+0{,}2M_1^2)^{3,5}}. \qquad (15.39)$$

Величина σ называется коэффициентом потерь полного напора. Зависимость σ от числа M_1, определяемая формулой (15.39), при-

[1] Формула (15.36) или (15.37) носит в литературе название формулы Релея.

ведена на фиг. 15. 12. Как видим, при $M_1 > 1$ коэффициент $\sigma < 1$ и с ростом числа M_1 убывает.

Зависимость (15. 37) имеет практическое значение, так как позволяет определить число M_1 потока (при $M_1 > 1$) по замеренным значениям давления $p_{2\,0}$ и p_1.

Фиг. 15. 11 и 15. 12 показывают, что полный напор $p_{2\,0}$ за прямым скачком уплотнения меньше, чем полный напор $p_{1\,0}$ перед ним. Вообще, как показывают расчеты и опыты, полный напор за *любым* скачком уплотнения (косым, криволинейным) уменьшается сравнительно с полным напором перед ним. Это обстоятельство хорошо иллюстрирует вывод, сделанный выше, о том, что при ударном сжатии тепло, полученное в результате преобразования части механической энергии, уже не может быть полностью преобразовано в кинетическую энергию без дополнительных затрат механической работы.

Глава XVI

ПЛОСКИЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

В этой главе рассматриваются только плоские сверхзвуковые изэнтропические течения газа (в частности, не будут рассматриваться течения, сопровождающиеся трением и образованием ударных волн).

§ 1. КРИТЕРИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОГО ИЗЭНТРОПИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

В настоящем параграфе показано, что плоское изэнтропическое течение газа в общем случае не обязательно будет потенциальным, т. е. таким, в котором отсутствуют вихри.

В изэнтропическом потоке газа вдоль каждой струйки величина полной энергии $i_0 = i + \frac{v^2}{2g}$ и величина энтропии остается постоянной. Допустим, что на бесконечности при переходе от струйки к струйке величина полной энергии и энтропии также не меняется. Однако в потоке могут быть такие места, где поток перестает быть изэнтропическим. Тогда за этими местами поток, увеличив свою энтропию и становясь в дальнейшем вновь изэнтропическим, уже не будет обладать свойством постоянства энтропии и полной энергии при переходе от струйки к струйке.

Примером может служить поток в аэродинамической трубе. До вентилятора поток можно считать изэнтропическим. Проходя через плоскость вентилятора, струйки воздуха будут попадать на различные части вентилятора, вследствие чего будут иметь место различные потери и, кроме того, к различным струйкам будет подводиться различное количество энергии. В результате за плоскостью вентилятора поток хотя и останется изэнтропическим, однако в различных струйках энтропия и полная энергия будут различными.

Выясним, при каком условии в изэнтропическом потоке будут отсутствовать вихри.

Рассмотрим (фиг. 16.1) какую-нибудь линию тока aA. Проведем в точке a линии тока касательную, направленную вдоль вектора скорости v, и внутреннюю нормаль n. Напишем уравнение движения газа в проекции на нормаль n:

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dn}, \tag{16.1}$$

где $Oa = r$ — радиус кривизны; $\frac{v^2}{r}$ — центростремительное ускорение частиц газа.

Допустим, что при переходе от одной линии тока к другой полная энергия и энтропия будут изменяться. В таком случае будем иметь

$$di_0 = di + v\,dv \neq 0, \qquad (16.2)$$

$$ds = \frac{1}{T}\left(di - \frac{dp}{\rho}\right) \neq 0, \qquad (16.3)$$

где i_0 — полная энергия, s — энтропия (очевидно, что вдоль линии тока ввиду изэнтропичности течения $di_0 = 0$ и $ds = 0$).

Исключая из уравнений (16.2) и (16.3) величину di, находим

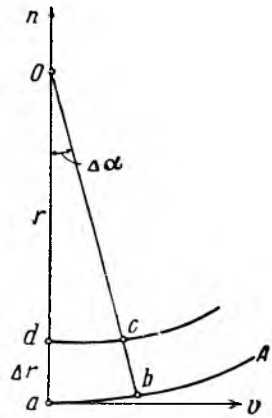
$$\frac{dp}{\rho} = di_0 - v\,dv - T\,ds.$$

Подставляя значение $\frac{dp}{\rho}$ в уравнение движения (16.1), находим

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{di_0}{dn} + v\frac{dv}{dn} + T\frac{ds}{dn}$$

или иначе

$$v\left(\frac{dv}{dn} - \frac{v}{r}\right) = \frac{di_0}{dn} - T\frac{ds}{dn}. \qquad (16.4)$$



Фиг. 16.1. К выводу условия потенциальности для изэнтропических плоских газовых потоков.

Рассмотрим выражение, стоящее в скобках, для чего обратимся к фиг. 16.1.

Возьмем бесконечно близкую линию тока dc и рассмотрим элементарную площадку $abcda$, ограниченную двумя линиями тока и бесконечно близкими полярными радиусами Oa и Ob. Применим к этой площадке теорему Стокса. Будем иметь

$$\Gamma_{abcda} = 2\omega_z \Delta\sigma_z = 2\omega_z r \Delta r \Delta\alpha, \qquad (a)$$

но

$$\Gamma_{abcda} = vr\Delta\alpha - \left(v + \frac{dv}{dn}\Delta r\right)(r - \Delta r)\,\Delta\alpha$$

или, раскрывая скобки,

$$\Gamma_{abcda} = vr\Delta\alpha - vr\Delta\alpha - \frac{dv}{dn} r\Delta r\Delta\alpha + v\Delta r\Delta\alpha + \frac{dv}{dn}\Delta r^2\Delta\alpha.$$

Отбрасывая бесконечно малые третьего порядка и подставляя в (а), находим

$$\left(v - \frac{dv}{dn} r\right)\Delta r\,\Delta\alpha = 2\omega_z r\Delta r\Delta\alpha$$

или

$$2\omega_z = \left(\frac{v}{r} - \frac{dv}{dn}\right). \tag{16.5}$$

Обращаясь теперь к выражению (16.4), заключаем, что для того, чтобы вихрь отсутствовал, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{di_0}{dn} - T\frac{ds}{dn} = 0,$$

которое будет выполнено, если

$$\frac{di_0}{dn} = 0 \text{ и } \frac{ds}{dn} = 0.$$

Полученный результат окончательно можно сформулировать так: *если полная энергия и энтропия при переходе от одной струйки газа к другой не изменяются, то изэнтропический газовый поток является потенциальным.*

Отсюда следует, что если в сверхзвуковом газовом потоке образуются скачки уплотнения, сопровождающиеся в разных местах различными потерями, то энтропия при переходе от одной струйки к другой будет изменяться и, следовательно, в потоке за поверхностью скачка появятся вихри.

§ 2. ОСНОВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОТОКА ГАЗА

Рассмотрим плоский потенциальный газовый поток.

Как известно, уравнение для потенциала скорости плоского потенциального потока несжимаемой жидкости имеет вид уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Покажем, что для плоского потенциального установившегося потока газа это уравнение приобретает более сложную форму.

Обратимся для этого к уравнению неразрывности, которое для плоского установившегося течения газа имеет вид

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0.$$

Выполняя дифференцирование, находим

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}v_x + \frac{\partial\rho}{\partial y}v_y + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0. \tag{16.6}$$

Выразим значение производных $\frac{\partial\rho}{\partial x}, \frac{\partial\rho}{\partial y}$ через компоненты скорости v_x, v_y. С этой целью представим эти производные в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial x}&=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x};\\ \frac{\partial\rho}{\partial y}&=\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\qquad(\text{а})$$

Заменим с помощью уравнений Эйлера в выражениях (а) производные от давления p через значения производных от компонентов скорости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=-\rho\frac{dv_x}{dt}=-\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=-\rho\frac{dv_y}{dt}=-\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(\text{б})$$

Используя уравнения (а) и (б), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial x}&=-\frac{\rho}{a^2}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial\rho}{\partial y}&=-\frac{\rho}{a^2}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(\text{в})$$

Подставляя выражения (в) в уравнение (16.6) и принимая во внимание, что

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

получим следующее уравнение для потенциала скорости $\varphi(x, y)$:

$$(a^2-v_x^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2v_xv_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+(a^2-v_y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.\qquad(16.7)$$

Это уравнение является *основным дифференциальным уравнением газовой динамики* для плоского потенциального установившегося газового потока и является *нелинейным* дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных относительно неизвестной функции φ.

Покажем, что в частном случае для небольших скоростей движения газа уравнение (16.7) превращается в уравнение Лапласа.

Действительно, деля почленно уравнение (16.7) на величину a^2 и полагая скорости движения газа настолько малыми, что величинами $\frac{v_x^2}{a^2}$, $\frac{v_y^2}{a^2}$ и $\frac{v_xv_y}{a^2}$ можно пренебречь, приведем уравнение (16.7) к виду

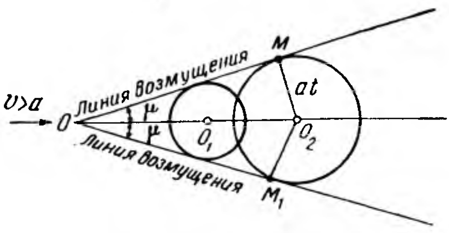
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

т. е. к виду уравнения Лапласа, справедливого для случая $\rho=\text{const}$.

Уравнение (16.7) носит название *квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка.* Квазилинейным это уравнение называется потому, что сами частные производные второго порядка входят в него линейно.

§ 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ В ПЛОСКОСТИ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

Предположим, что газовый поток движется слева направо со сверхзвуковой скоростью $v>a$. Пусть в некоторой точке O потока помещен какой-либо источник возмущений, который возбуждает малые возмущения, распространяющиеся в покоящемся газе во все стороны со скоростью звука a (фиг. 16.2). Если бы газ был неподвижен, то возмущения, исходящие из точки O, имели бы вид концентрических окружностей (в пространстве — сфер) с центром в точке O. При движении газа звуковая волна, исходящая из точки O, распространяется со скоростью a, а ее центр движется со скоростью потока $v>a$. Таким образом, за время t звуковая волна распространится на расстояние (отсчитываемое от ее движущегося центра) $O_2M=at$, а ее центр пробежит отрезок $OO_2=vt$.



Фиг. 16.2. Распространение малых возмущений в сверхзвуковом газовом потоке.

Огибающая этих звуковых волн состоит из двух полупрямых OM и OM_1, называющихся *линиями возмущений* (или линиями Маха). В пространстве эти линии образуют так называемый *конус возмущений* (конус Маха) с углом μ. Очевидно, линии возмущений ограничивают область возмущенного (внутри конуса) потока от невозмущенного. Из фиг. 16.2 видно, что для угла конуса возмущений (угол Маха) имеет место следующее соотношение:

$$\sin\mu = \pm\frac{at}{vt} = \pm\frac{a}{v} = \pm\frac{1}{M}. \qquad (16.8)$$

Итак, в каждой точке плоскости x, y, где газ движется со сверхзвуковыми скоростями, можно провести два направления линий возмущения. При переходе от одной точки плоскости x, y к другой направление линий возмущения может изменяться, так как значения v и a в различных точках плоскости x, y, вообще говоря, различны. Имея это в виду, найдем в плоскости x, y (фиг. 16.3) такую линию $y=y(x)$, в каждой точке которой направление касательной совпадало бы с направлением одной из линий возмущения для данной точки. Эту линию будем называть *характеристикой*[1].

[1] Как будет показано ниже, характеристики имеют большое значение для исследования потоков газа, движущегося со сверхзвуковыми скоростями. Они, в частности, позволяют решать уравнение (16.7) при любых граничных условиях.

Из простых геометрических соображений (см. фиг. 16.3) следует, что

$$\operatorname{tg}\mu=\operatorname{tg}(\gamma-\theta)$$

или

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\theta}.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}},\qquad \operatorname{tg}\gamma=\frac{dy}{dx},\qquad \operatorname{tg}\theta=\frac{v_y}{v_x},$$

будем иметь

$$\sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{v_y}{v_x}\right)=1+\frac{v_y}{v_x}\frac{dy}{dx}.$$

Возводя в квадрат и приводя подобные члены, получим

$$\left[\frac{v^2}{a^2}-1-\frac{v_y^2}{v_x^2}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{v^2}{a^2}\frac{v_y}{v_x}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{v^2}{a^2}\frac{v_y^2}{v_x^2}-\frac{v_y^2}{v_x^2}-1=0.$$

Умножая на $a^2v_x^2$, а затем сокращая на $v^2=v_x^2+v_y^2$, приходим к следующему уравнению:

$$(v_x^2-a^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2v_xv_y\frac{dy}{dx}+v_y^2-a^2=0. \tag{16.9}$$

Полученное квадратное уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$ является искомым дифференциальным уравнением характеристики, проходящей через точку x, y. Легко видеть, что коэффициенты этого уравнения аналогичны коэффициентам уравнения (16.7).

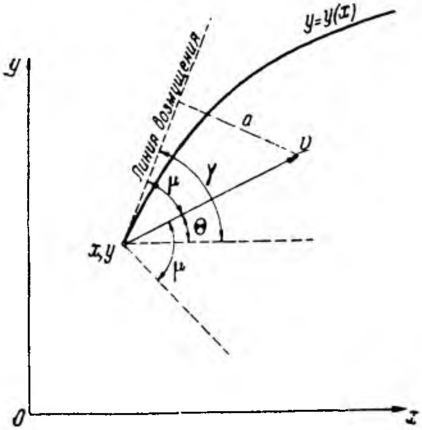
Решая уравнение (16.9), находим выражение для тангенса угла наклона характеристики к оси x:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_xv_y\pm a\sqrt{v_x^2+v_y^2-a^2}}{v_x^2-a^2}. \tag{16.10}$$

Из уравнения (16.10) вытекают следующие выводы.

1. Если $v>a$, то уравнение (16.10) имеет два различных вещественных корня. В соответствии с этим через каждую точку плоскости x, y, где $v>a$, можно провести *два* элемента характеристик, а вся плоскость может быть покрыта *двумя* семействами характеристик.

В дальнейшем для определенности будем называть интегральные кривые $y_1(x)$, соответствующие уравнению (16.10) с положительным знаком перед радикалом, характеристиками первого семейства, а интегральные кривые $y_2(x)$, соответствующие отрицательному знаку перед радикалом,— характеристиками второго семейства.



Фиг. 16.3. К определению дифференциального уравнения характеристик в плоскости x, y течения газа.

Итак, в сверхзвуковом потоке газа существует два семейства характеристик (фиг. 16.4). Уравнение (16.7) в этом случае носит название уравнения *гиперболического* типа.

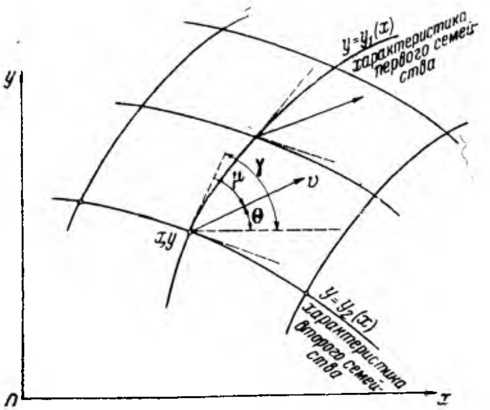
2. Если $v=a$, то уравнение (16.10) имеет два равных вещественных корня, т. е. часть плоскости x, y, где $v=a$, может быть покрыта только *одним* семейством характеристик.

Уравнение (16.7) в этом случае носит название уравнения *параболического* типа.

3. Если $v<a$, т. е. поток газа дозвуковой, то уравнение (16.10) не имеет вещественных корней. Характеристик нет. Уравнение (16.7) в этом случае носит название уравнения *эллиптического* типа.

В дальнейшем в этой главе будут рассматриваться только сверхзвуковые течения газа, т. е. только такие случаи, когда вся плоскость x, y движения газа может быть покрыта двумя семействами характеристик: $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$.

В заключение отметим, что определить характеристики в плоскости течения газа x, y, не зная поля скоростей v_x, v_y, невозможно, так как коэффициенты в уравнении (16.9) зависят от составляющих скорости v_x, v_y.



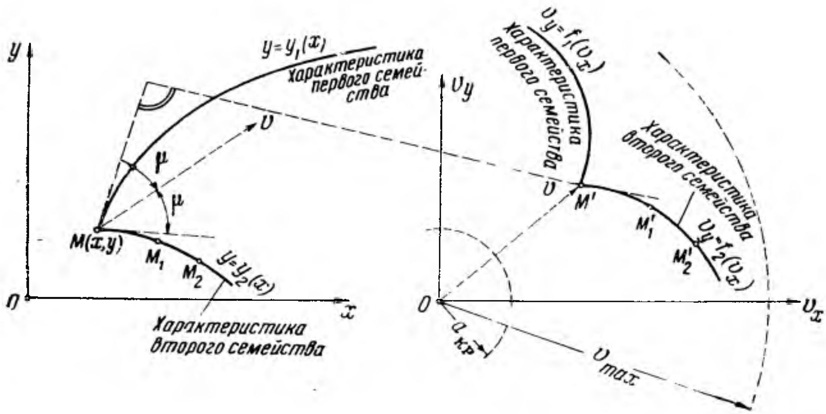
Фиг. 16.4. Семейства характеристик в плоскости x, y течения газа.

Иначе будет обстоять дело, если от плоскости x, y течения газа перейти к плоскости годографа скорости v_x, v_y. Как показано ниже, в этой плоскости характеристики легко определяются, и это дает возможность решать, вообще говоря, любые краевые задачи для сверхзвуковых течений газа.

§ 4. ХАРАКТЕРИСТИКИ В ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

Выясним, какие линии будут соответствовать в плоскости v_x, v_y годографа скорости характеристикам в плоскости x, y.

Допустим, что в каждой точке характеристики плоскости x, y известны величина и направление скорости v. Откладывая этот вектор в плоскости v_x, v_y от начала координат, получим кривую, описываемую концом вектора v, точки которой будут находиться во взаимно однозначном соответствии с точками характеристики в плоскости x, y (фиг. 16. 5). Так как через каждую точку плоскости



Фиг. 16. 5. К выводу уравнений характеристик в плоскости v_x, v_y годографа скорости.

x, y проходят две характеристики, то на плоскости v_x, v_y также получим две кривые. Эти кривые будем называть характеристиками в плоскости годографа скорости.

Таким образом, физический смысл характеристик в плоскости v_x, v_y заключается в том, что они являются годографом скорости для точек, лежащих на характеристиках в плоскости x, y.

Ясно, что так как мы рассматриваем сверхзвуковые течения газа, то характеристики в плоскости v_x, v_y будут лежать внутри области, ограниченной двумя окружностями, описанными из начала координат, причем радиус наименьшей окружности будет равен $a_{кр}$, а радиус наибольшей

$$v_{max}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,a_{кр}.$$

Для того чтобы найти уравнение характеристик в плоскости годографа скорости, необходимо воспользоваться основным уравнением газовой динамики (16. 7), которому должны удовлетворять составляющие скорости v_x и v_y сверхзвукового газового потока. Это уравнение с помощью соотношений

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

можно написать в виде

$$(a^2-v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}-v_xv_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+(a^2-v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \quad (16.11)$$

Кроме того, вследствие потенциальности движения составляющие скорости связаны соотношением

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0. \quad (16.12)$$

Уравнение (16. 11) можно переписать в виде

$$(a^2-v_x^2)\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]-v_xv_y\left[\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{a^2-v_y^2}{v_xv_y}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right]=0. \quad (16.13)$$

Рассматривая изменение скорости *вдоль характеристик* $y=y(x)$, можно написать два очевидных соотношения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dv_x}{dx}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+m\frac{\partial v_x}{\partial y}\\ &\text{и}\\ &\frac{dv_y}{dx}=\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial v_y}{\partial x}+m\frac{\partial v_y}{\partial y},\end{aligned}\right\} \quad (16.14)$$

где $m=\frac{dy}{dx}$ — определяет наклон характеристик в плоскости x, y.

Выражая частные производные $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ из соотношения (16. 14), подставляя их в основное уравнение (16. 13) и используя условие потенциальности (16. 12), приведем уравнение (16. 13) к виду

$$(a^2-v_x^2)\frac{dv_x}{dx}-v_xv_y\frac{dv_y}{dx}=(a^2-v_x^2)\left(m+\frac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{v_xv_y\left(m+\dfrac{a^2-v_y^2}{v_xv_y}\right)}{(a^2-v_x^2)\left(m+\dfrac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}\right)}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right]=0. \quad (16.15)$$

Уравнение (16. 15) выполняется *вдоль характеристик* плоскости x, y, и потому входящие в него составляющие скорости v_x и v_y — составляющие скорости вдоль этих характеристик. Отсюда следует, что уравнение (16. 15) является дифференциальным уравнением характеристик в плоскости годографа скорости. Его можно значительно упростить и даже проинтегрировать в конечном виде. Покажем это.

Рассмотрим дробь, стоящую в квадратной скобке формулы (16. 15):

$$A=\frac{v_xv_y\left(m+\dfrac{a^2-v_y^2}{v_xv_y}\right)}{(a^2-v_x^2)\left(m+\dfrac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}\right)}=\frac{m\dfrac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}+\dfrac{a^2-v_y^2}{a^2-v_x^2}}{m+\dfrac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}}. \qquad (16.16)$$

Используя известное свойство квадратного уравнения (16. 9), которому удовлетворяет величина $m=\frac{dy}{dx}$, можем написать

$$m_1+m_2=\frac{2v_xv_y}{v_x^2-a^2} \quad \text{и} \quad m_1m_2=\frac{v_y^2-a^2}{v_x^2-a^2}, \qquad (16.17)$$

где m_1 и m_2 — тангенсы углов наклона соответственно первого и второго семейств характеристик в плоскости x, y.

Тогда выражение (16. 16) можно преобразовать к виду

$$A=\frac{-m\dfrac{m_1+m_2}{2}+m_1m_2}{m-\dfrac{m_1+m_2}{2}}=-\frac{m(m_1+m_2)-2m_1m_2}{2m-m_1-m_2}.$$

Вдоль первого семейства характеристик, для которого $m=m_1$, величина $A=-m_1$; вдоль второго семейства характеристик, для которого $m=m_2$, величина $A=-m_2$. Следовательно, вообще

$$A=-m=-\frac{dy}{dx}.$$

В таком случае выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (16. 15), будет являться полной производной $\frac{dv_y}{dx}$ вдоль характеристики в плоскости x, y, и уравнение (16. 15) можно переписать в виде

$$(a^2-v_x^2)\frac{dv_x}{dx}-\left[v_xv_y+(a^2-v_x^2)\left(m+\frac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}\right)\right]\frac{dv_y}{dx}=0, \qquad (16.18)$$

откуда

$$\frac{dv_y}{dv_x}=\frac{a^2-v_x^2}{v_xv_y+(a^2-v_x^2)\left(m+\dfrac{v_xv_y}{a^2-v_x^2}\right)}$$

или

$$\frac{dv_y}{dv_x}=\frac{1}{\dfrac{2v_xv_y}{a^2-v_x^2}+m},$$

или, используя (16. 17),

$$\frac{dv_y}{dv_x}=\frac{1}{m-m_1-m_2}. \tag{16.19}$$

Отсюда следует, что для первого семейства характеристик, где $m=m_1$,

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_1=-\frac{1}{m_2}=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_2}, \tag{16.20}$$

а для второго семейства характеристик, где $m=m_2$,

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}, \tag{16.21}$$

и, следовательно, $\frac{dv_y}{dv_x}$ можно написать в виде

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_{1,2}=-\frac{1}{m_{2,1}}=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{2,1}} \tag{16.22}$$

или в виде

$$\frac{dv_y}{dv_x}=-\frac{m}{m_1m_2}. \tag{16.23}$$

Используя формулу (16. 10) для $m=\frac{dy}{dx}$ и формулу (16. 17) для m_1m_2, приведем уравнение характеристик в плоскости годографа (16. 23) к окончательному виду

$$\frac{dv_y}{dv_x}=-\frac{v_xv_y\pm a\sqrt{v_x^2+v_y^2-a^2}}{v_y^2-a^2}. \tag{16.24}$$

Прежде чем перейти к интегрированию уравнения (16. 24), сделаем следующие замечания.

Из дифференциальных соотношений (16. 20) — (16. 22) вытекает, что семейства характеристик в плоскостях x, y и v_x, v_y взаимно перпендикулярны в соответствующих точках. Действительно, на основании уравнений (16. 20) — (16. 22) можно написать следующие равенства:

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_2=-1$$

и

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_2\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=-1,$$

показывающие, что при выборе осей x и y параллельными осям v_x и v_y характеристики *первого* семейства в произвольной точке плоскости x, y перпендикулярны характеристикам *второго* семейства в соответствующей точке плоскости v_x, v_y и, наоборот, характеристики второго семейства в плоскости x, y перпендикулярны характеристикам первого семейства в плоскости v_x, v_y (см. фиг. 16.5).

Это свойство характеристик значительно облегчает нахождение решения основного уравнения (16.7) и широко используется при графическом его интегрировании.

Далее из уравнения (16.24) следует, что вдоль характеристик плоскости x, y интегралы дифференциального уравнения (16.7) v_x и v_y удовлетворяют *обыкновенному* дифференциальному уравнению. Действительно, так как величина a^2 выражается только через $v_x^2+v_y^2=v^2$, то правая часть уравнения (16.24) зависит только от v_x, v_y и не зависит явно от x, y, а потому уравнение (16.24) является обыкновенным дифференциальным уравнением в переменных v_x, v_y.

Отсюда вытекает следующий важный вывод: *для любых безвихревых задач характеристики в плоскости годографа скорости имеют всегда один и тот же вид,* определяемый уравнением (16.24), и их можно рассчитать раз и навсегда. При этом следует заметить, что в физической плоскости течения x, y характеристики, определяемые уравнением (16.10), для различных задач газовой динамики будут иметь различный вид.

Перейдем теперь к интегрированию уравнения характеристик (16.24) в плоскости v_x, v_y. С этой целью перейдем от переменных v_x, v_y к переменным v и θ, где $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ — величина скорости, а θ — угол наклона скорости к оси x.

Правую часть уравнения (16.24) легко привести к переменным v и θ, исходя из следующих соображений. В соответствии с формулой (16.22) и фиг. 16.4

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_1=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_2}=-\operatorname{ctg}(\theta-\mu),$$

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_2=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}=-\operatorname{ctg}(\theta+\mu),$$

т. е. уравнение характеристик в плоскости годографа скорости можно написать в виде

$$\frac{dv_y}{dv_x}=-\operatorname{ctg}(\theta\mp\mu). \tag{16.25}$$

Переходя в левой части этого уравнения к новым переменным v и θ,

$$v_x=v\cos\theta,\quad v_y=v\sin\theta$$

$$dv_x=\cos\theta\, dv-v\sin\theta\, d\theta;\quad dv_y=\sin\theta\, dv+v\cos\theta\, d\theta,$$

избавляясь от знаменателя и собирая коэффициенты при dv и $d\theta$, получим

$$[\sin\theta + \operatorname{ctg}(\theta \mp \mu)\cos\theta]\,dv + [\cos\theta - \sin\theta\operatorname{ctg}(\theta \mp \mu)]\,v\,d\theta = 0,$$

откуда

$$d\theta = \frac{\sin\theta + \operatorname{ctg}(\theta \mp \mu)\cos\theta}{\sin\theta\operatorname{ctg}(\theta \mp \mu) - \cos\theta}\,\frac{dv}{v}.$$

Деля числитель и знаменатель правой части полученного уравнения на $\cos\theta$ и заменяя $\operatorname{ctg}(\theta \mp \mu)$ через $\operatorname{tg}(\theta \mp \mu)$, будем иметь

$$d\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}(\theta \mp \mu) + 1}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}(\theta \mp \mu)}\,\frac{dv}{v},$$

откуда

$$d\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta - \theta \pm \mu)}\,\frac{dv}{v},$$

т. е.

$$d\theta = \pm\frac{1}{\operatorname{tg}\mu}\,\frac{dv}{v}.$$

Но

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}},$$

а потому

$$d\theta = \pm\sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}\,\frac{dv}{v}. \tag{16.26}$$

Воспользовавшись зависимостью между скоростью звука a и скоростью потока v

$$a^2 = \frac{1}{2}\left[(k+1)\,a_{\text{кр}}^2 - (k-1)\,v^2\right],$$

приведем уравнение (16.26) к виду

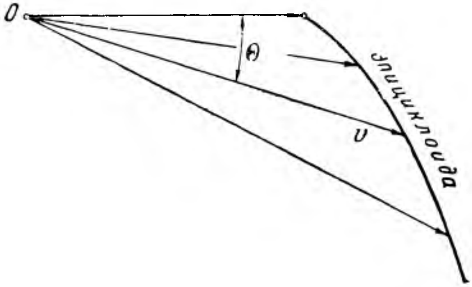
$$\theta = \pm\int\sqrt{\frac{(k+1)(v^2 - a_{\text{кр}}^2)}{(k+1)\,a_{\text{кр}}^2 - (k-1)\,v^2}}\,\frac{dv}{v} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Выполнив интегрирование и выразив его результат через число $\mathrm{M} = \frac{v}{a}$, получим уравнение характеристик в плоскости годографа скорости в конечном виде

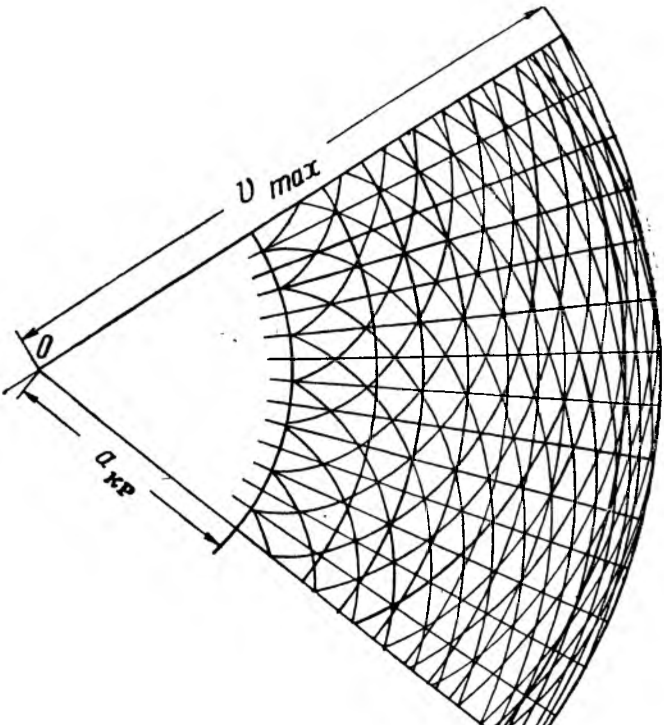
$$\theta = \pm\left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}\right] + C. \tag{16.27}$$

Кривые, определяемые уравнением (16. 27), носят название *эпициклоид* (фиг. 16. 6). Через каждую точку плоскости v, θ (в кольце $a_{кр} \leqslant v \leqslant v_{max}$) проходит одна эпициклоида первого семейства и одна второго семейства. Задавая различные значения постоянной C, можно вычертить раз и навсегда сетку характеристик в плоскости годографа скорости (фиг. 16. 7, где принято для воздуха $k = 1{,}405$).



Фиг. 16. 6. Характеристика (эпициклоида) в плоскости годографа скорости.

Из изложенного следует, что с помощью характеристик можно решать любые краевые задачи для сверхзвуковых потенциальных



Фиг. 16. 7. Сетка характеристик (эпициклоид) в плоскости годографа скорости.

течений газа, если только найдены характеристики в плоскости x, y течения газа и установлено их соответствие с характеристиками в плоскости годографа v_x, v_y. Таким образом, существо решения газодинамических задач методом характеристик состоит в разыскании характеристик в плоскости течения газа.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК В ПЛОСКОСТИ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И В ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ ПО ЗАДАННОМУ ВЕКТОРУ СКОРОСТИ С ПОМОЩЬЮ ИЗЭНТРОПНОГО ЭЛЛИПСА

Поставим задачу — по заданной скорости v в данной точке O сверхзвукового газового потока найти направление характеристик в этой точке. Допустим, что касательные, определяющие направление характеристик в плоскости газового потока в точке O, направлены вдоль прямых OB и OA (см. фиг. 16. 8, где плоскости течения x, y и годографа скорости v_x, v_y совмещены). Возьмем точку O за начало координат и направим ось x вдоль линии OB. Известно, что синус угла возмущений определяется равенством $\sin\mu=\frac{a}{v}$. Следовательно, расстояние конца вектора v до линии OB (линии возмущения) равно a, т. е. в этом случае $v_y=a$.

В гл. XIV установлено, что

$$a^2=\frac{k+1}{2}a_{\text{кр}}^2-\frac{k-1}{2}v^2.$$

Подставляя сюда значение $v^2=v_x^2+v_y^2$, получим

$$a^2=\frac{k+1}{2}a_{\text{кр}}^2-\frac{k-1}{2}(v_x^2+v_y^2).$$

Так как в рассматриваемом случае $v_y=a$, то

$$v_y^2=\frac{k+1}{2}a_{\text{кр}}^2-\frac{k-1}{2}(v_x^2+v_y^2).$$

Раскрывая скобки, получим

$$v_y^2=\frac{k+1}{2}a_{\text{кр}}^2-\frac{k-1}{2}v_x^2-\frac{k-1}{2}v_y^2$$

или

$$v_y^2\left(1+\frac{k-1}{2}\right)=\frac{k+1}{2}a_{\text{кр}}^2-\frac{k-1}{2}v_x^2.$$

Отсюда находим

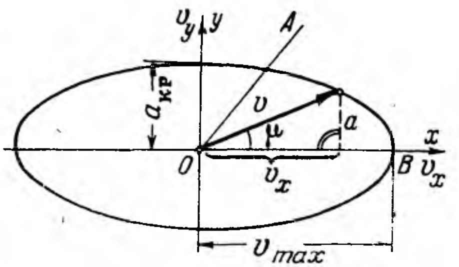
$$\frac{v_x^2}{\frac{k+1}{k-1}a_{\text{кр}}^2}+\frac{v_y^2}{a_{\text{кр}}^2}=1$$

или

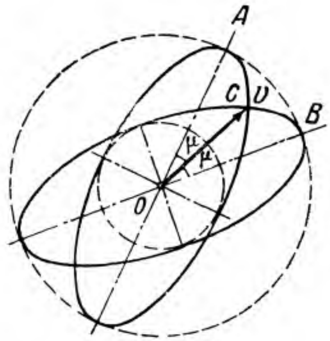
$$\frac{v_x^2}{v_{\max}^2}+\frac{v_y^2}{a_{\text{кр}}^2}=1. \qquad (16.28)$$

Полученному уравнению в плоскости v_x, v_y соответствует эллипс, большая полуось которого равна $v_{\max}$ и направлена вдоль линии возмущения, а малая полуось равна критической скорости $a_{\text{кр}}$. На этом эллипсе, называемом *изэнтропным* эллипсом, лежит, очевидно, конец вектора скорости $\bar{v}(v_x, v_y)$.

С помощью изэнтропного эллипса можно по заданному вектору скорости в данной точке газового потока найти направление в этой точке линий возмущения. В самом деле, пусть v — скорость в некоторой точке потока газа (фиг. 16.9). Совместим в плоскости v_x, v_y центр изэнтропного эллипса с началом координат O и будем вращать его до тех пор, пока конец вектора v не попадет на эллипс. Тогда направление большой полуоси эллипса будет определять направление одной из линий возмущения OA или OB. (Очевидно, возможны два положения эллипса, при которых точка C лежит на нем, см. фиг. 16.9).



Фиг. 16.8. К определению направления характеристик с помощью изэнтропного эллипса.



Фиг. 16.9. К определению направления характеристик с помощью изэнтропного эллипса.

Как уже известно, направления характеристик в плоскости v_x, v_y нормальны направлениям характеристик в плоскости x, y.

Так как направления линий возмущения в плоскости x, y параллельны *большой* оси рассматриваемого эллипса, то, следовательно, направления характеристик в плоскости v_x, v_y будут параллельны *малой* оси эллипса.

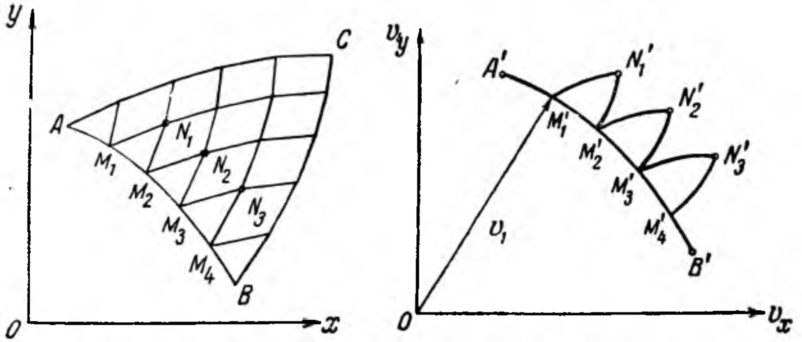
§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ПЛОСКОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим несколько наиболее важных задач по определению поля скоростей в сверхзвуковом газовом потоке, используя метод характеристик. Умение решать эти задачи позволит рассчитать любой случай плоского потенциального движения газа со сверхзвуковой скоростью (при отсутствии поверхностей разрыва).

Задача I

В плоскости газового потока дана дуга AB (не являющаяся характеристикой), в каждой точке которой скорость задана. Требуется определить скорость в каждой точке области, ограниченной дугой AB и двумя характеристиками AC и BC, исходящими из точек A и B и являющимися характеристиками двух различных семейств.

Наряду с плоскостью потока x, y рассмотрим плоскость v_x, v_y — плоскость годографа скорости (фиг. 16. 10). Возьмем на дуге AB ряд точек M_1, M_2, M_3, M_4, скорости v_1, v_2, v_3, v_4 в которых известны. Рассмотрим точку M_1, в которой скорость равна v_1. Так как значение скорости $v_1(v_{1x}, v_{1y})$ известно, то в плоскости годографа можно



Фиг. 16.10. К решению задачи I методом характеристик.

построить точку M'_1 с координатами (v_{1x}, v_{1y}), соответствующую точке M_1. Таким образом, совокупности точек M_1, M_2, M_3, M_4, расположенных на кривой AB, в плоскости годографа будет соответствовать совокупность точек M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, расположенных на кривой $A'B'$. Это означает, что при передвижении вдоль дуги AB конец вектора v в плоскости годографа будет описывать кривую $A'B'$.

Выше было доказано, что если в какой-нибудь точке газового потока известна скорость v, то в этой точке с помощью изэнтропного эллипса можно найти направление линий возмущения. Это означает, что в каждой точке M_1, M_2, M_3, M_4 можно провести элементы характеристик двух семейств. Пусть характеристика AC есть характеристика второго семейства, а линия BC — характеристика первого семейства.

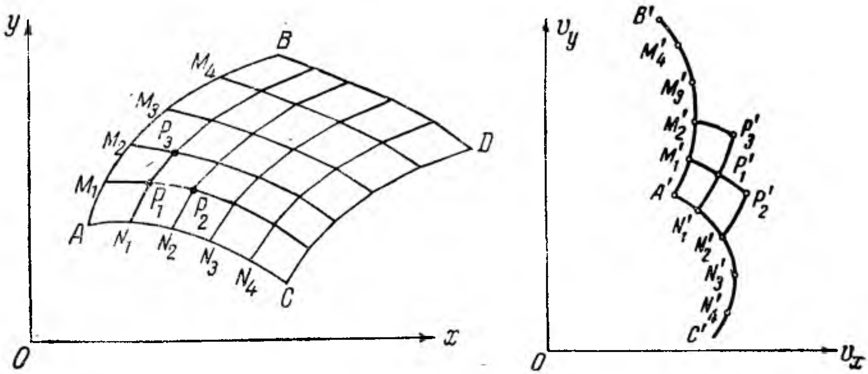
Заметив это, проведем из точки M_1 элемент характеристики второго семейства, а из точки M_2 — элемент характеристики первого семейства. Эти линии дают в пересечении точку N_1. Найдем скорость в точке N_1, для чего обратимся к плоскости годографа. Очевидно, что перемещению вдоль характеристики второго семейства из точки M_1 в точку N_1 в плоскости годографа будет соответствовать перемещение от точки M_1' по эпициклоиде второго семейства. Перемещению вдоль характеристики M_2N_1 первого семейства в плоскости годографа будет соответствовать перемещение вдоль эпициклоиды первого семейства. Точкой их пересечения будет точка N_1'. Координаты точки N_1' определят проекции скорости ($v_1'{}_x$, $v_1'{}_y$), а расстояние ее до начала координат — вектор v_1', т. е. скорость в точке N_1.

Таким образом можно найти скорость в ряде точек N_1, N_2, N_3, N_4. Принимая точки N_1, N_2, N_3, N_4 за начальные и проводя для них то же построение, что и для точек M_1, M_2, M_3, M_4, можно определить скорость в последующих точках плоскости x, y. Продолжая это построение, определим поле скоростей во всем криволинейном треугольнике, ограниченном дугой AB и двумя характеристиками AC и BC.

Если использовать более частые сетки, т. е. увеличить число точек на начальной кривой AB, то мы будем все более приближаться к точному решению основного уравнения (16. 7).

Задача II

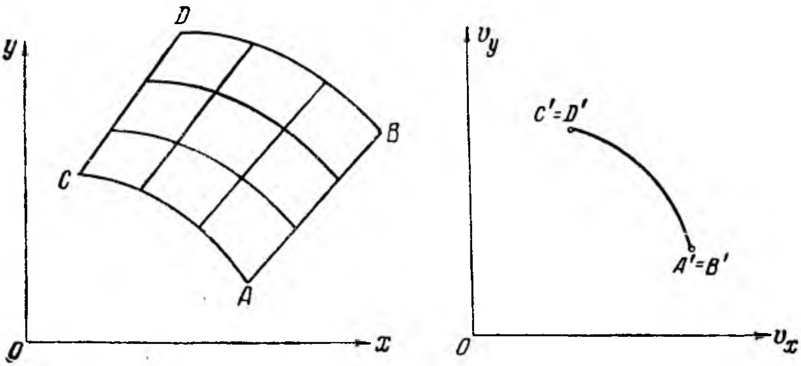
Скорости заданы на двух пересекающихся характеристиках AB и AC, принадлежащих различным семействам. Требуется определить поле скоростей в криволинейном четырехугольнике, ограниченном данными характеристиками и двумя характеристиками BD и CD, исходящими из точек B и C (фиг. 16. 11).



Фиг. 16. 11. К решению задачи II методом характеристик.

Для нахождения поля скоростей поступим следующим образом. Возьмем ряд точек M_1, M_2, M_3, M_4 на характеристике первого семейства AB, а на характеристике второго семейства AC возьмем точки N_1, N_2, N_3, N_4. Проведем из каждой точки N_1, N_2, N_3, N_4 характеристики первого семейства, а из каждой точки M_1, M_2, M_3, M_4 — характеристики второго семейства. Характеристики, исходящие из точек N_1 и M_1, в пересечении дадут точку P_1. Определим скорость в точке P_1. Перемещение из точки N_1 в точку P_1 по характеристике первого семейства означает, что в плоскости годографа мы будем перемещаться вдоль эпициклоиды первого семейства, исходящей из точки N'_1 (координаты точки N_1' суть компоненты скорости в точке N_1). Перемещение из точки M_1 в точку P_1 вдоль характеристики второго семейства означает, что в плоскости годографа мы будем перемещаться вдоль эпициклоиды второго семейства, исходящей из точки M_1'. Точка их пересечения будет P_1'. Координаты точки P_1'— компоненты скорости в точке P_1. Вектор, исходящий из начала координат в точку P_1', даст величину этой скорости v_{P1}.

Проведем из точки P_1 характеристику второго семейства до пересечения с характеристикой первого семейства, исходящей из точки N_2. В пересечении получим точку P_2. Для нахождения ско-



Фиг. 16. 12. К решению частного случая задачи II методом характеристик.

рости в точке P_2 обратимся к плоскости годографа. Перемещению вдоль элемента характеристики P_1, P_2 второго семейства соответствует перемещение вдоль эпициклоиды второго семейства, исходящей из точки P_1'; перемещению вдоль характеристики первого семейства, исходящей из точки N_2, соответствует перемещение вдоль эпициклоиды первого семейства, исходящей из точки N_1'. Пересечение этих эпициклоид определит точку P_2', а следовательно, скорость в точке P_2. Аналогично найдем скорость в точке P_3 и т. д., т. е. поле скоростей внутри криволинейного четырехугольника. Чем более частой будет сетка характеристик, т. е. чем больше взято точек M_1, M_2, M_3... N_1, N_2, N_3..., тем точнее будет определено поле скоростей.

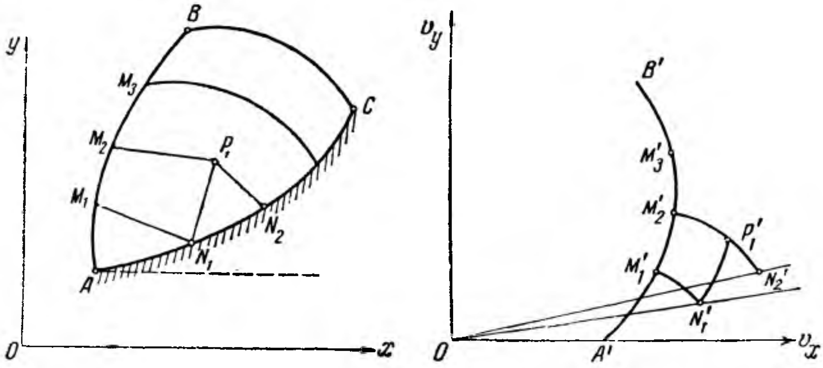
Частный случай. Даны две пересекающиеся характеристики первого и второго семейства AC и AB. На характеристике второго семейства AB скорость постоянна по величине и направлению (фиг. 16. 12). Требуется доказать, что все характеристики, входящие в состав второго семейства, в этом случае являются прямыми.

Так как на характеристике AB скорость постоянна по величине и направлению, то эта линия AB является прямой. Для того чтобы показать, что все остальные характеристики того же семейства, в которое входит линия AB, являются также прямыми, обратимся к плоскости годографа v_x, v_y. Очевидно, что точкам прямой AB в плоскости годографа будет соответствовать одна точка $A'=B'$.

Таким образом, характеристикам первого семейства, в том числе дугам AC и BD, будет соответствовать одна и та же дуга эпициклоиды. Точкам же линии CD (а также всякой другой характеристике второго семейства) соответствует в плоскости годографа *одна* точка — точка пересечения эпициклоиды, соответствующей характеристике первого семейства, с эпициклоидой, соответствующей CD. Отсюда заключаем, что все характеристики второго семейства — прямые линии.

Задача III

Скорости заданы на дуге AB характеристики. Известно, что точка A лежит на твердой стенке AC. Требуется определить поле



Фиг. 16.13. К решению задачи III методом характеристик.

скоростей в области, ограниченной дугой AB, твердой стенкой AC и дугой BC характеристики другого семейства (фиг. 16.13).

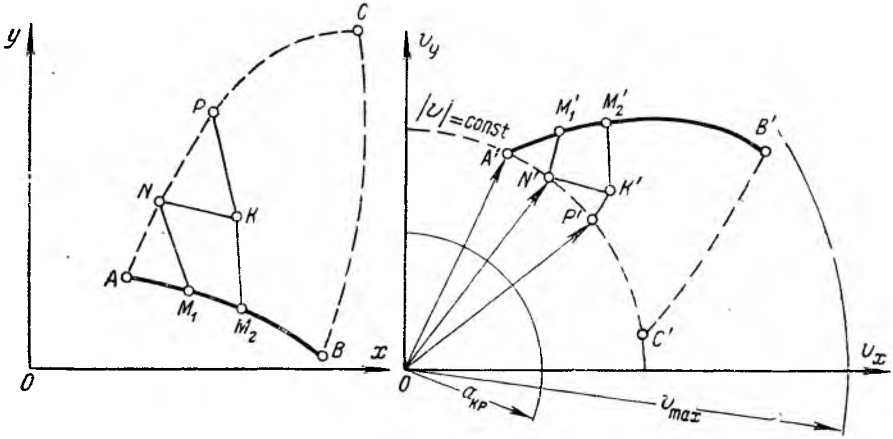
Будем считать, что в точке A, лежащей на твердой границе, скорость параллельна оси x. В таком случае на плоскости годографа точка A' будет лежать на оси v_x.

Возьмем на характеристике AB ряд точек M_1, M_2, M_3, скорость в которых известна. В плоскости годографа им будут соответствовать точки M_1', M_2', M_3'..., расположенные на эпициклоиде $A'B'$. Проведем через точку M_1 характеристику второго семейства до пересечения со стенкой в точке N_1. Очевидно, элементу M_1N_1 будет соответствовать элемент эпициклоиды $M_1'N_1'$, причем положение точки N_1' пока неизвестно. Для ее нахождения проведем из точки O в плоскости годографа прямую, образующую с осью v_x такой же угол, какой образует с осью x вектор скорости в точке N_1 стенки. Тогда точка пересечения этой прямой с дугой эпициклоиды определит точку N_1'. Координаты этой точки суть компоненты скорости в точке N_1 стенки. Проведем из точки M_2 характеристику второго семейства, а из точки N_1 — характеристику первого семейства. Получим в пересечении точку P_1. Скорость в точке P_1 будет определена проведением дуг эпициклоид из точек M_2' и N_1', т. е. нахождением точки P_1' — точки их пересечения. Проведем далее характеристику из точки P_1 до пересечения со стенкой в точке N_2. Соответственно в плоскости годографа продолжим эпициклоиду $M_2'P_1'$. Где-то на ней должна находиться точка N_2'. Для ее нахождения проведем прямую из начала координат, параллельную вектору скорости в точке N_2 твердой стенки до пересечения с эпициклоидой. Таким образом, найдем точку N_2', т. е. определим величину скорости в точке N_2 и т. д.

Продолжая аналогичные построения, можно определить поле скоростей внутри криволинейного треугольника ABC.

Задача IV

Заданы скорости вдоль характеристики AB (например, второго семейства) и известно, что точка A лежит на свободной границе потока. Требуется найти форму свободной границы AC и распределение скорости в области, лежащей между заданной характеристикой AB, свободной границей AC и характеристикой первого семейства BC, проходящей через точку B.



Фиг. 16.14. К решению задачи IV методом характеристик.

Для решения поставленной задачи возьмем на характеристике AB ряд точек M_1, M_2 и т. д. Далее воспользуемся тем обстоятельством, что на искомой свободной границе AC величина давления p везде одинакова. Отсюда следует, что и величина скорости v для всех точек свободной границы по закону Бернулли также будет одинакова.

Проведем через точку A элемент прямой, направленной вдоль известной в точке A скорости; этот элемент примем за элемент искомой свободной границы, проходящей через точку A.

Из точки M_1 проведем характеристику первого семейства до пересечения с этим элементом свободной границы в точке N. Для того чтобы получить в плоскости годографа скорости соответствующую точку N', которая будет определять направление скорости в точке N, проведем из точки M_1', лежащей на эпициклоиде $A'B'$, характеристику до пересечения с окружностью $|v| = \text{const} = v_A$.

Точка пересечения характеристики, выходящей из точки M_1', с этой окружностью, т. е. точка N', и будет определять направление скорости в точке N, лежащей на свободной границе потока.

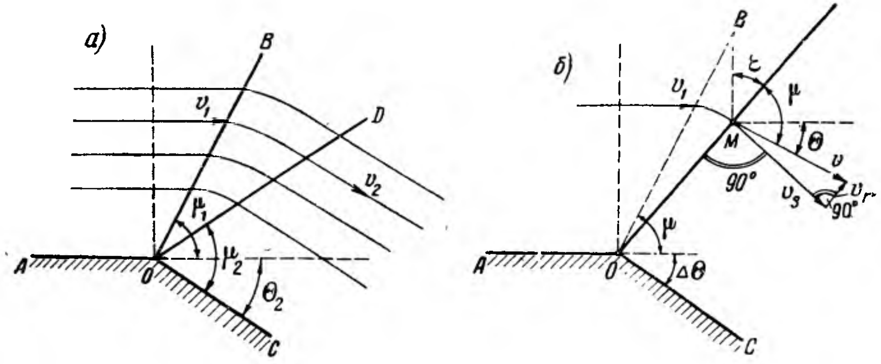
Определив скорость в точке N, продолжаем свободную границу в виде отрезка прямой, направленного вдоль скорости в точке N. т. е. параллельно ON'.

Далее находим направление скорости для точки P, найдя предварительно скорость в точке K, являющейся пересечением двух характеристик NK и M_2K (см. задачу II).

Продолжая это построение, найдем форму искомой свободной границы $ANP...C$ и поле скоростей в области $AN...CBA$.

§ 7. ОБТЕКАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЫПУКЛОГО ТУПОГО УГЛА (ТЕЧЕНИЕ ПРАНДТЛЯ—МАЙЕРА)

Предположим, что равномерный сверхзвуковой поток газа течет со скоростью v_1 вдоль прямолинейной стенки AO (фиг. 16. 15,*а*). В точке O стенка изменяет направление и образует с первоначальным направлением угол θ_2.



Фиг. 16. 15. Обтекание выпуклого тупого угла сверхзвуковым потоком газа.

За точкой O происходит поворот потока, который начинает двигаться параллельно стенке OC со скоростью v_2. Так как, обтекая выпуклый угол, сверхзвуковой поток расширяется, то скорость v_2 оказывается больше скорости v_1.

Вершина угла, т. е. точка O, является источником возникновения в газовом потоке малых возмущений, распространяющихся со скоростью звука. Проведем из этой точки линию возмущения OB, соответствующую скорости v_1 набегающего равномерного потока, т. е. под углом

$$\sin \mu_1 = \frac{1}{M_1}.$$

Из этой же точки проведем мысленно характеристику, касающуюся в точке O линии OB. Так как эта характеристика отделяет область невозмущенного потока от области возмущений, то на ней скорости постоянны по величине и направлению и равны v_1. Отсюда следует, что в плоскости годографа скорости этой характеристике соответствует одна точка эпициклоиды, а значит, в плоскости течения эта характеристика является прямой линией. Но так как эта прямая по условию касается линии возмущения OB в точке O, то отсюда следует, что прямая OB и является характеристикой. Вспоминая следствие задачи II (стр. 374), заключаем, что все характеристики, исходящие из точки O и принадлежащие к тому же семейству, суть прямые линии.

Очевидно, что прямолинейная характеристика OD, наклоненная к направлению скорости v_2 под углом

$$\sin\mu_2 = \frac{1}{M_2},$$

ограничивает область возмущений от равномерного потока, текущего вдоль стенки OC со скоростью v_2.

Внутри области возмущений, образованной двумя крайними характеристиками OB и OD, поток газа не будет равномерным. В этой области будет происходить поворот потока и искривление линий тока.

Покажем, что для рассматриваемого случая легко найти все параметры сверхзвукового газового потока внутри области BOD.

Введем для этого полярные координаты r, ε, взяв начало полярных координат в точке O. Угол ε будем отсчитывать от вертикали вправо. Соответственно введем составляющие скорости по направлению полярного радиуса v_r и по направлению, перпендикулярному к полярному радиусу v_s.

Очевидно, что обе эти составляющие скорости будут зависеть только от полярного угла ε, т. е.

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = v_r(\varepsilon), \\ v_s &= \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = v_s(\varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{16.29}$$

где φ — потенциал скорости.

Для нахождения составляющих скорости v_r и v_s используем уравнение энергии в виде

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2+v_s^2}{2} = \frac{v_{max}^2}{2}. \tag{16.30}$$

Выражение для v_s в рассматриваемом случае может быть записано в следующем виде:

$$v_s = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = a = \sqrt{k\frac{p}{\rho}}, \tag{16.31}$$

так как составляющая скорости в направлении, перпендикулярном к линии возмущения, всегда равна скорости звука. Отсюда следует, что

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{k} v_s^2. \tag{16.32}$$

Так как

$$\frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\right),$$

то, используя уравнение (16.29),

$$\frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial r}(r v_s) = v_s + r\frac{\partial v_s}{\partial r}$$

и учитывая, что компонента скорости v_s не зависит от радиуса r, можно написать следующее равенство:

$$v_s = \frac{dv_r}{d\varepsilon}. \tag{16.33}$$

Таким образом, учитывая уравнения (16.32) и (16.33), отношение давления к плотности, входящее в уравнение (16.30), можно представить в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{k}\left(\frac{dv_r}{d\varepsilon}\right)^2. \tag{16.34}$$

Подставляя выражения для $\frac{p}{\rho}$ и для v_s соответственно из уравнений (16.34) и (16.33), приведем уравнение (16.30) к виду

$$\frac{k+1}{k-1}\left(\frac{dv_r}{d\varepsilon}\right)^2 + v_r^2 = v_{\max}^2$$

или

$$\frac{dv_r}{\sqrt{v_{\max}^2 - v_r^2}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, d\varepsilon.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$v_r = v_{\max} \sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,(\varepsilon + \varepsilon_0)\right], \tag{16.35}$$

где ε_0 — постоянная интегрирования. Вводя обозначение

$$\varepsilon + \varepsilon_0 = \varepsilon_*, \tag{16.36}$$

уравнение (16.35) можно написать так:

$$v_r = v_{\max} \sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,\varepsilon_*\right]. \tag{16.37}$$

Учитывая уравнение (16. 33), легко найти вторую компоненту скорости:

$$v_s = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, v_{\max} \cos\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, \varepsilon_*\right]. \tag{16.38}$$

Определив составляющие v_r и v_s, можно найти и потенциал скорости φ для рассматриваемого течения:

$$\varphi = \int_0^r v_r\, dr = v_{\max} r \sin\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, \varepsilon_*\right]. \tag{16.39}$$

Найдем теперь выражение для давления.

Из уравнений (16. 31) и (16. 38) следует, что

$$p = \frac{\rho}{k} v_s^2 = \frac{\rho}{k} \frac{k-1}{k+1} v_{\max}^2 \cos^2\left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, \varepsilon_*\right]. \tag{16.40}$$

Учитывая, что при изэнтропических течениях

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{и} \quad v_{\max}^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0},$$

где p_0 и ρ_0 — значения давления и плотности газа при скорости $v=0$, уравнение (16. 40) можно переписать в следующем окончательном виде:

$$p = p_0 \left[\frac{2}{k+1} \cos^2\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\, \varepsilon_*\right)\right]^{\frac{k}{k-1}}. \tag{16.41}$$

Полученное выражение для давления в рассматриваемом сверхзвуковом течении газа показывает, что для численного определения давления p достаточно знать давление, соответствующее полному торможению потока, и значение угла ε_*.

Определим теперь уравнение линий тока на том участке, где поток газа меняет свое направление.

Уравнение для линий тока можно получить исходя из положения, что секундный массовый расход газа m между любой линией тока и стенкой будет постоянной величиной (фиг. 16. 15,*а*). В самом деле, для любой линии тока можно написать

$$m = \rho v_s r = \text{const}$$

или

$$r = \frac{m}{\rho v_s},$$

где r — полярный радиус точек этой линии тока. Учитывая, что течение изэнтропическое, будем иметь

$$r = \frac{m}{v_s}\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Заменяя в этом уравнении значение скорости v_s по формуле (16.38), значение давления p по формуле (16.41), получим искомое уравнение для линий тока в следующем виде:

$$r = \frac{C}{\left[\cos\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon_*\right]^{\frac{k+1}{k-1}}}, \tag{16.42}$$

где C — постоянная, различная для различных линий тока.

Установим зависимость между углами θ и ε (фиг. 16.15,*б*), где θ — угол между направлением невозмущенного потока и направлением потока на выбранной линии тока в точке M; ε — угол между вертикалью и линией возмущений OM. Через μ обозначим текущий угол между направлением линии возмущений OM и направлением потока в точке M.

Легко видеть, что в данном случае справедливо равенство

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{v_s}{v_r}. \tag{16.43}$$

Из фиг. 16.15,*б* следует, что

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon$$

или, учитывая уравнение (16.36),

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \theta_* - \varepsilon_*, \tag{16.44}$$

где

$$\theta_* = \theta + \varepsilon_0. \tag{16.45}$$

Возвращаясь к равенству (16.43) и подставляя в него вместо μ его значение по уравнению (16.44), вместо скорости v_s ее значение по уравнению (16.38) и вместо скорости v_r ее значение по уравнению (16.37), получим следующее равенство:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta_* - \varepsilon_*\right) = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\varepsilon_*\right), \tag{16.46}$$

которое устанавливает зависимость между углами θ_* и ε_*.

Полагая в формулах (16.37) и (16.38) угол $\varepsilon_* = 0$, получим

$$v_r = 0 \text{ и } v_s = v_{\max}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} = v_{\text{кр}},$$

откуда следует, что в случае, когда вдоль стенки AO тупого угла невозмущенный поток течет со скоростью, в точности равной скорости звука, т. е. при $M_1=1$, угол $\varepsilon_*=0$.

Из зависимости (16. 46) следует, что при $\varepsilon_*=0$ и $\theta_*=0$. Отсюда вывод, что все полученные выше формулы, содержащие величину ε_* или θ_*, соответствуют случаю, когда невозмущенный поток течет вдоль стенки AO выпуклого тупого угла со *звуковой* скоростью.

В табл. 16. 1 приведены зависимость между углами θ_* и ε_*, а также значения углов μ [определяемые формулой (16. 44)], числа M, отношения давлений $\frac{p}{p_0}$ [определяемые формулой (16. 41)] и отношения температур $\frac{T}{T_0}$ (определяемые по обычным зависимостям для изэнтропических течений).

Таблица 16. 1

θ_*°	ε_*°	μ°	M	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{T}{T_0}$
0	0	90	1	0,527	0,832
1	23,72	67,28	1,084	0,477	0,808
5	42,34	52,66	1,258	0,381	0,757
10	55,84	44,16	1,435	0,298	0,706
15	66,53	38,47	1,608	0,233	0,657
20	75,74	34,26	1,779	0,179	0,609
25	84,20	30,80	1,954	0,137	0,564
30	92,12	27,88	2,135	0,104	0,520
35	99,67	25,33	2,339	0,075	0,474
40	106,88	23,12	2,550	0,054	0,432
45	113,89	21,11	2,778	0,038	0,390
50	120,71	19,29	3,021	0,027	0,351
54	126,03	17,97	3,250	0,019	0,319
129,32	219,32	0,00	∞	0,000	0,000

Как уже указывалось и как это видно из табл. 16. 1, начальным параметрам $\theta_*=0$ и $\varepsilon_*=0$ соответствует чисто звуковой поток ($M_1=1$). Однако с помощью этой таблицы можно рассчитать обтекание внешнего тупого угла и сверхзвуковым потоком газа, когда $M_1>1$.

Для этого надо поступить следующим образом:

1. Зная число M_1 для потока газа, текущего вдоль стенки AO, по табл. 16. 1 отыскиваем *фиктивный* угол поворота $\theta_{*\text{ф}}$, на который должен повернуться *звуковой* поток, чтобы достичь заданного значения M_1.

2. Добавляя к найденному значению $\theta_{*\phi}$ угол θ_2 поворота потока (см. фиг. 16. 15,*а*), находим угол

$$\theta_* = \theta_{*\phi} + \theta_2,$$

соответствующий суммарному повороту звукового потока.

3. По найденному значению θ_* из той же таблицы определяем искомые параметры газа, текущего вдоль стенки *OC* тупого угла:

$$\mathrm{M}_2, \quad \frac{p_2}{p_0}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_0}, \quad \frac{T_2}{T_0}.$$

При желании можно определить линии тока по формуле (16. 42), задавшись величиной *C* и рядом значений $0 \leqslant \theta < \theta_2$.

Глава XVII

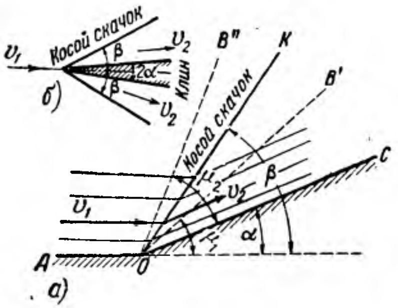
ТЕОРИЯ КОСОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ

§ 1. ПОНЯТИЕ О КОСОМ СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ

В главе XV отмечалось, что во всех случаях, когда происходит более или менее значительное торможение сверхзвукового газового потока, в последнем возникают поверхности, при прохождении через которые параметры газа скачкообразно изменяются.

Поверхность разрыва, образующая с направлением потока прямой угол, называется *прямым* скачком. Если же плоскость скачка наклонена к набегающему потоку под углом, отличным от прямого, то такой скачок называется *косым*.

В этой главе рассматривается теория плоского косого скачка.



Фиг. 17.1. Обтекание сверхзвуковым потоком вогнутого тупого угла.

Для ознакомления с последним рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком тупого угла AOC (фиг. 17.1,*а*), меньшего 180°.

Допустим, что стенка AO, около которой течет газ со сверхзвуковой скоростью v_1, составляет со стенкой OC некоторый угол α. Очевидно, поток газа, текущий вдоль стенки AO, должен отклониться на угол α, в результате чего новое направление потока v_2 будет параллельно стенке OC.

Покажем, что такое изменение направления сверхзвукового потока всегда сопровождается нарушением непрерывности течения, т. е. возникновением косого скачка.

В самом деле, желая определить направление линии возмущения в точке O, замечаем, что через точку O можно провести две такие линии: линию OB' под углом μ_1 к первоначальному направлению потока v_1 и линию OB'' под углом μ_2 к направлению потока v_2, причем $\mu_2 > \mu_1$. Но в таком случае изменение параметров газа должно закончиться на линии возмущения OB'', лежащей в области, где изменение параметров газа фактически еще не начиналось. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае непрерывное изменение параметров газа невозможно и должен иметь место скачок уплотнения. Опыт показывает, что при небольших значениях угла поворота потока α фронт скачка располагается на некоторой прямой OK, лежащей между указанными выше линиями возмущений OB' и OB''.

Направление косого скачка OK будем определять при помощи угла β, отсчитываемого от первоначального направления потока, текущего со скоростью v_1.

При обтекании сверхзвуковым потоком остроконечных тел (клиньев) также образуются косые скачки уплотнения, т. е. такие скачки, поверхность которых составляет с направлением набегающего потока острый угол β (фиг. 17. 1,*б*).

Ниже будет показано, что наибольшие уменьшение скорости и увеличение давления будут при прямом скачке ($\beta=90°$). В этом случае, как известно, скорость потока за скачком всегда дозвуковая. При косом же скачке скорость за ним может быть как дозвуковой, так и сверхзвуковой, в зависимости от величины угла β.

Перейдем к определению параметров газового потока за косым скачком уплотнения.

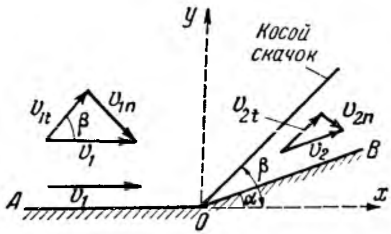
§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГАЗА ЗА КОСЫМ СКАЧКОМ

Определим вначале скорость за косым скачком уплотнения.

Разложим вектор скорости v_1 до скачка на две составляющие (фиг. 17. 2): v_{1n} — по направлению нормали к плоскости скачка и v_{1t} — по направлению, параллельному плоскости скачка. Аналогично разложим скорость v_2 за скачком на составляющие v_{2n}, v_{2t}. Для нахождения скорости после скачка используем уравнения неразрывности (расхода), количества движения, энергии и состояния.

Уравнение расхода запишется в этом случае в следующем виде:

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}. \qquad (17.1)$$



Фиг. 17. 2. К расчету косого скачка уплотнения.

Используем теорему о количестве движения, применяя ее к направлению, перпендикулярному плоскости скачка. Это уравнение можно записать так же, как и для случая прямого скачка, с той лишь разницей, что вместо скоростей v_1 и v_2 в уравнении будут фигурировать их нормальные составляющие, т. е.

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_{1n}(v_{1n} - v_{2n}). \qquad (17.2)$$

Применим эту теорему к направлению, параллельному плоскости скачка. Так как вдоль плоскости скачка давление не изменяется, то

$$\rho_1 v_{1n}(v_{1t} - v_{2t}) = 0,$$

откуда

$$v_{1t} = v_{2t} = v_t, \qquad (17.3)$$

т. е. касательная составляющая скорости при переходе газа через плоскость косого скачка не изменяется. Таким образом, при переходе через плоскость косого скачка терпит разрыв только нормальная составляющая скорости потока. *Это позволяет считать косой скачок прямым скачком для нормальной составляющей скорости* (фиг. 17.2).

Учитывая, что косой скачок можно рассматривать как прямой для скоростей v_{1n} и v_{2n}, напишем выражение для полной энергии газа в направлении, перпендикулярном плоскости скачка:

$$\frac{k}{k-1} RT'_0 = \frac{k}{k-1} RT_0 - \frac{v_t^2}{2g} = \frac{1}{2g}(v_{\max}^2 - v_t^2).$$

Тогда критическая скорость для того же направления

$$a'^2_{\text{кр}} = \frac{2kgR}{k+1} T'_0 = \frac{2kgR}{k+1}\left(T_0 - \frac{k-1}{2kgR} v_t^2\right) =$$

$$= a^2_{\text{кр}} - \frac{k-1}{k+1} v_t^2 = \frac{k-1}{k+1}(v_{\max}^2 - v_t^2).$$

Применяя формулу (15.23) для прямого скачка к скорости v_{1n} и v_{2n}, получим

$$v_{1n} v_{2n} = a'^2_{\text{кр}} = a^2_{\text{кр}} - \frac{k-1}{k+1} v_t^2 \qquad (17.4)$$

или

$$v_{1n} v_{2n} = \frac{k-1}{k+1}(v_{\max}^2 - v_t^2). \qquad (17.5)$$

Формулы (17.4) и (17.5) дают возможность определить скорость за косым скачком уплотнения.

Определив скорость за косым скачком, найдем все остальные параметры газа: p_2, ρ_2, T_2 за ним. Для этого в формулах (15.15) и (15.17) для прямого скачка, полученных в гл. XV, нужно заменить только число $M_1 = \frac{v_1}{a_1}$ числом

$$M'_1 = M_1 \sin\beta = \frac{v_1}{a_1} \sin\beta = \frac{v_{1n}}{a_1}.$$

В результате получим

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2\beta - \frac{k-1}{k+1}; \qquad (17.6)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} M_1^2 \sin^2\beta}{\frac{2}{k-1} + M_1^2 \sin^2\beta}; \qquad (17.7)$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\,\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{2k(k-1)}{(k+1)^2}\,\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta-\frac{2(k-1)}{(k+1)^2\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta}+$$
$$+\frac{4k-(k-1)^2}{(k+1)^2}. \qquad (17.8)$$

Уравнение ударной адиабаты для косого скачка останется, очевидно, тем же, что и для прямого, так как в него не входят ни скорости, ни величина полной энергии газа:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{(k+1)\rho_2-(k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1-(k-1)\rho_2}. \qquad (17.9)$$

§ 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ УГЛОМ ПОВОРОТА СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА И ПОЛОЖЕНИЕМ ФРОНТА КОСОГО СКАЧКА

Формулы предыдущего параграфа показывают, что все параметры газа за косым скачком уплотнения зависят от угла β наклона фронта скачка к направлению набегающего потока. В настоящем параграфе установлена зависимость угла β наклона фронта скачка от угла α поворота сверхзвукового потока.

Из фиг. 17.2 находим

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{v_{2n}}{v_t}$$

или, используя соотношение (17.4),

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{a_{\text{кр}}^2-\frac{k-1}{k+1}v_t^2}{v_{1n}v_t}.$$

Так как (см. фиг. 17.2)

$$v_{1n}=v_1\sin\beta,$$
$$v_t=v_1\cos\beta,$$

то

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{a_{\text{кр}}^2-\frac{k-1}{k+1}v_1^2\cos^2\beta}{v_1^2\sin\beta\cos\beta}. \qquad (17.10)$$

Разделим числитель и знаменатель формулы (17.10) на квадрат скорости звука a_1^2 и введем число $M_1=\frac{v_1}{a_1}$. Тогда получим

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\frac{a_{\text{кр}}^2}{a_1^2}-\frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}_1^2\cos^2\beta}{\mathrm{M}_1^2\sin\beta\cos\beta}. \qquad (17.11)$$

Так как

$$\frac{a_{\text{кр}}^2}{a_1^2}=\frac{T_{\text{кр}}}{T_1}=\frac{T_{\text{кр}}}{T_0}\,\frac{T_0}{T_1}=\frac{2}{k+1}\,\frac{T_0}{T_1}$$

и

$$\frac{T_0}{T_1}=1+\frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2,$$

то

$$\frac{a_{\text{кр}}^2}{a_1^2}=\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2\right).$$

Подставляя выражение для $\frac{a_{\text{кр}}^2}{a_1^2}$ в формулу (17. 11), будем иметь

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}_1^2\right)-\frac{k-1}{k+1}\,\mathrm{M}_1^2\cos^2\beta}{\mathrm{M}_1^2\sin\beta\cos\beta}$$

или, преобразовывая,

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{2+(k-1)\,\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta}{(k+1)\,\mathrm{M}_1^2\sin\beta\cos\beta}. \tag{17. 12}$$

Используя соотношение

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

получаем

$$\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{2+(k-1)\,\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta}{(k+1)\,\mathrm{M}_1^2\sin\beta\cos\beta},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta\,\frac{\mathrm{M}_1^2\sin^2\beta-1}{1+\mathrm{M}_1^2\left(\frac{k+1}{2}-\sin^2\beta\right)}. \tag{17. 13}$$

На фиг. 17. 3 приведена кривая зависимости угла наклона скачка β от угла поворота потока α, построенная по формуле (17. 13).

Из уравнения (17. 13) следует, что угол поворота потока α равен нулю в двух случаях:

а) когда $M_1^2\sin^2\beta-1=0$, т. е. когда

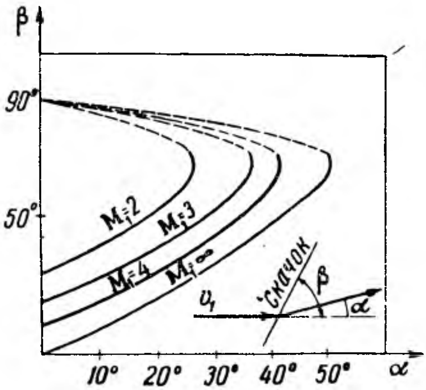
$$\sin\beta=\frac{a_1}{v_1}=\frac{1}{\mathrm{M}_1}=\sin\mu.$$

В этом случае, как известно, интенсивность скачка бесконечно мала, т. е. скачок вырождается в волну слабых возмущений (слабый разрыв);

б) когда $\operatorname{ctg}\beta=0$ или $\beta=\frac{\pi}{2}$,

т. е. при прямом скачке.

Из фиг. 17.3 следует также, что для каждого числа M_1 существует максимальное значение угла поворота потока α, на который сверхзвуковой поток может повернуться, пройдя через фронт плоского косого скачка.



Фиг. 17.3. Зависимость между углами β наклона скачка и углами α поворота потока при различных числах M_1.

Наконец, из фиг. 17.3 следует, что при данном числе M_1 и при одном и том же угле α поворота потока возможны два положения фронта скачка, характеризуемое углом β. Однако, как показывают опыты, бóльшие значения углов β не реализуются на практике.

§ 4. УДАРНАЯ ПОЛЯРА

Найдем геометрическое место концов векторов скорости v_2 за косым скачком, т. е. найдем уравнение годографа скорости v_2 для заданной скорости v_1. Обозначив проекции скорости v_2 на оси координат через v_{2x}, v_{2y}, будем иметь (см. фиг. 17.2)

$$v_{2x}=v_t\cos\beta+v_{2n}\sin\beta, \tag{17.14}$$

$$v_{2y}=v_t\sin\beta-v_{2n}\cos\beta. \tag{17.15}$$

Кроме того,

$$\left.\begin{aligned} v_t&=v_1\cos\beta,\\ v_{1n}&=v_1\sin\beta.\end{aligned}\right\} \tag{17.16}$$

Используя соотношения (17.16) и определяя v_{2n} из формулы (17.4), выражение для v_{2x} можно преобразовать к виду

$$v_{2x}=v_1\cos^2\beta+\frac{a_{\text{кр}}^2-\frac{k-1}{k+1}v_1^2\cos^2\beta}{v_1}=\frac{2}{k+1}v_1\cos^2\beta+\frac{a_{\text{кр}}^2}{v_1}, \tag{17.17}$$

откуда

$$\cos^2\beta=\frac{k+1}{2}\left(\frac{v_{2x}}{v_1}-\frac{a_{\text{кр}}^2}{v_1^2}\right) \tag{17.18}$$

или

$$\sin^2\beta=1-\frac{k+1}{2}\left(\frac{v_{2x}}{v_1}-\frac{a_{\text{кр}}^2}{v_1^2}\right). \tag{17.18'}$$

Преобразовывая аналогично выражение (17. 15), получим

$$v_{2y} = v_1 \cos\beta \sin\beta - \frac{a_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2\beta}{v_1 \sin\beta} \cos\beta. \qquad (17.19)$$

Из соотношения (17. 17) находим

$$v_1 (v_{2x} - v_1 \cos^2\beta) = a_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2\beta.$$

Учитывая это соотношение, уравнение (17. 19) можно записать так:

$$v_{2y} = v_1 \cos\beta \sin\beta - \frac{v_{2x} - v_1 \cos^2\beta}{\sin\beta} \cos\beta$$

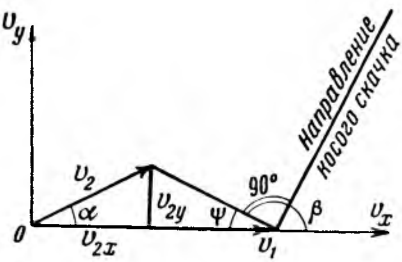
или

$$v_{2y} \sin\beta = \cos\beta (v_1 - v_{2x}),$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y}}. \qquad (17.20)$$

Обратимся к плоскости годографа скорости v_x, v_y (фиг. 17. 4). Отложив вдоль оси v_x вектор скорости v_1 и проведя вектор скорости v_2, соединим концы этих векторов прямой. Тогда, обозначая через ψ угол, образуемый этой прямой с осью v_x, получим



Фиг. 17. 4. Определение направления косого скачка.

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y}},$$

т. е.

$$\operatorname{ctg}\psi = \operatorname{tg}\beta.$$

Это соотношение означает, что углы ψ и β являются дополнительными углами до $\frac{\pi}{2}$. Отсюда вывод: направление плоскости косого скачка уплотнения всегда перпендикулярно к прямой, соединяющей концы векторов v_1 и v_2. Зная геометрическое место концов вектора v_2, легко определить направление плоскости косого скачка уплотнения как прямой, перпендикулярной к линии, соединяющей точки $(v_1, 0)$ и (v_{2x}, v_{2y}).

Определим уравнение годографа скорости v_2. Из формул (17. 18) и (17. 18′) находим

$$\operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\frac{k+1}{2}\left(\frac{v_{2x}}{v_1} - \frac{a_{\text{кр}}^2}{v_1^2}\right)}{1 - \frac{k+1}{2}\left(\frac{v_{2x}}{v_1} - \frac{a_{\text{кр}}^2}{v_1^2}\right)}. \qquad (17.21)$$

С другой стороны, из формулы (17.20) следует, что

$$\operatorname{ctg}^2\beta = \frac{v_{2y}^2}{(v_1 - v_{2x})^2}. \tag{17.22}$$

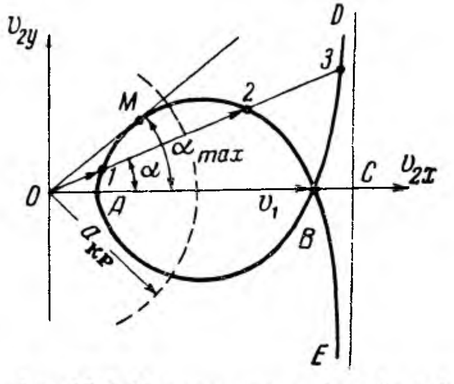
Сравнивая (17.21) и (17.22), получим

$$\frac{v_{2y}^2}{(v_1 - v_{2x})^2} = \frac{\left(\dfrac{v_{2x}}{v_1} - \dfrac{a_{\text{кр}}^2}{v_1^2}\right)}{\dfrac{2}{k+1} - \dfrac{v_{2x}}{v_1} + \dfrac{a_{\text{кр}}^2}{v_1^2}}$$

или

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_{2x} - \dfrac{a_{\text{кр}}^2}{v_1}}{\dfrac{2}{k+1} v_1 - v_{2x} + \dfrac{a_{\text{кр}}^2}{v_1}}. \tag{17.23}$$

Кривая, представляемая уравнением (17.23), называется строфоидой или гипоциссоидой (фиг. 17.5) и имеет две ветви BD и BE, уходящие в бесконечность. Петлю этой кривой обычно называют *ударной полярой*. Отрезок OB изображает скорость v_1 потока до скачка.



Фиг. 17.5. Ударная поляра (строфоида).

Если задаться углом α поворота потока на скачке, то скорость v_2 за ним найдется как отрезок прямой, проведенной из начала координат под углом α к вектору v_1 до пересечения со строфоидой. Очевидно, что каждому углу α поворота потока на скачке соответствуют три точки пересечения этой прямой со строфоидой, т. е. три математически возможных значения скорости v_2 (точки *1*, *2* и *3* на фиг. 17.5).

Нетрудно убедиться в том, что точка *3*, расположенная на бесконечной ветви строфоиды, соответствует случаю скачка разрежения (так как $v_2 > v_1$), и, следовательно, эти две ветви строфоиды, как физически невозможные, должны быть отброшены.

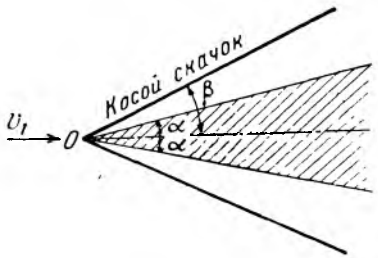
Таким образом, для данного угла α поворота потока возможны лишь два значения скорости v_2 за косым скачком.

Для того чтобы установить, какая из этих скоростей реализуется, обратимся к опытным данным по обтеканию клина при различных углах его раствора α.

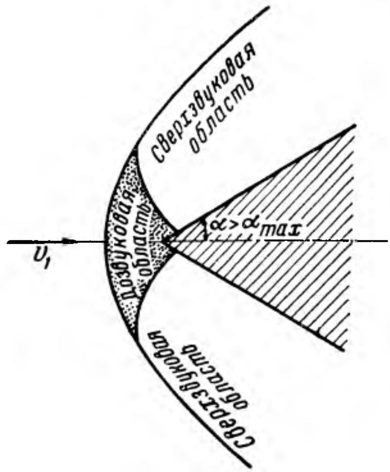
Когда угол α достаточно мал, скачок «садится» на тело и исходит из его острой кромки (фиг. 17.6). При этом скорость после скачка остается вначале сверхзвуковой, а затем (см. фиг. 17.5) при росте угла α становится дозвуковой (с увеличением угла α конец вектора v_2 скользит по ударной поляре от точки *2* к точке *M*).

При этом из двух возможных значений скорости v_2 за скачком всегда реализуется только *бóльшая* скорость (точка *2*) и, следовательно, соответствующий ей *меньший* угол β наклона плоскости скачка (см. фиг. 17.3).

Если же угол клина становится больше некоторого предельного угла α_{max}, скачок уплотнения отходит от клина и располагается впереди него (фиг. 17.7), образуя криволинейную ударную волну.



Фиг. 17.6. Обтекание клина при $\alpha < \alpha_{max}$.



Фиг. 17.7. Обтекание клина при $\alpha > \alpha_{max}$.

Центральная часть поверхности волны перпендикулярна вектору скорости v_1, т. е. здесь скачок является прямым.

По мере удаления от клина вдоль скачка углы наклона скачка уменьшаются и приближаются к углу линии слабых (звуковых) возмущений.

На различных участках такого скачка степень уменьшения скорости потока (и соответствующее изменение всех остальных параметров газа) различна.

Выясним теперь, в каких случаях составляющая v_{2y} равна нулю.

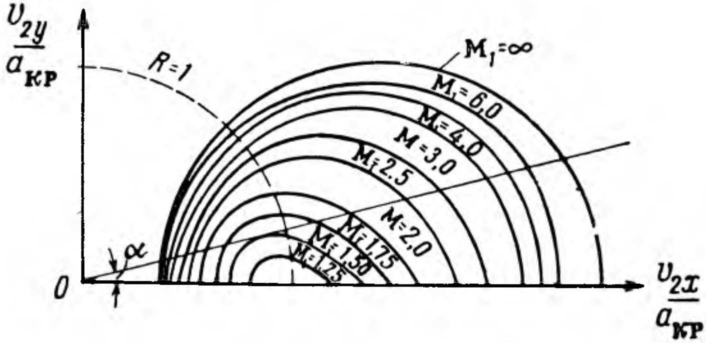
Из уравнения (17.23) следует, что v_{2y} равна нулю при двух значениях v_{2x}:

1) При $v_1 - v_{2x} = 0$, т. е. при $v_{2x} = v_2 = v_1$. При этом, очевидно, скачок уплотнения вырождается в звуковую волну ($\beta = \mu$), т. е. скачок по существу отсутствует (точка *B* на фиг. 17.5).

2) При $v_{2x} - \frac{a_{кр}^2}{v_1} = 0$, т. е. при $v_{2x} = v_2 = \frac{a_{кр}^2}{v_1}$.

Это минимальное значение v_2 соответствует прямому скачку (точка *A* на фиг. 17.5).

На фиг. 17.8 изображено семейство ударных поляр, построенных для различных чисел M_1. Для удобства все отложенные на диаграмме скорости отнесены к критической скорости $a_{кр}$. Очевидно, что окружность с центром в начале координат и радиусом $R=1$ ($v=a_{кр}$) отделяет область дозвуковых скоростей за скачком внутри окружности от области сверхзвуковых скоростей вне окружности.



Фиг. 17.8. Ударные поляры.

Пользуясь этой диаграммой, можно определить скорость v_2 потока после скачка для различных значений скорости v_1 до скачка и различных значений угла поворота потока α на скачке[1].

[1] Иногда на график ударных поляр наносят дополнительно сетку кривых равной энтропии, с помощью которой можно определить потери давления $p_{2\,0}/p_{1\,0}$ при повороте сверхзвукового потока на некоторый угол.

Глава XVIII

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОФИЛЯ И КРЫЛА В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

§ 1. ПОНЯТИЕ О КРИТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ М

Как известно, на крыло, движущееся в потоке воздуха, действует аэродинамическая сила, составляющие которой соответственно равны: подъемная сила

$$Y = c_y \frac{\rho v^2}{2} S$$

и лобовое сопротивление

$$X = c_x \frac{\rho v^2}{2} S.$$

Подъемная сила определяется по теореме Жуковского:
для профиля крыла

$$Y = \rho \Gamma v,$$

для крыла конечного размаха

$$Y = \rho v \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(z)\, dz.$$

Как показали исследования, аэродинамические коэффициенты c_y и c_x с увеличением числа М, т. е. с ростом скорости, изменяются. Так, например, если в потоке несжимаемой жидкости коэффициент лобового сопротивления c_x складывается из так называемого профильного сопротивления c_{xp} и индуктивного сопротивления c_{xi}, то с ростом скорости потока на крыле возникают скачки уплотнения, которые порождают новое дополнительное сопротивление, называемое *волновым сопротивлением*. Таким образом, коэффициент лобового сопротивления становится равным

$$c_x = c_{xp} + c_{xi} + c_{x\,в},$$

где $c_{x\,в}$ — коэффициент волнового сопротивления;
c_{xi} — коэффициент индуктивного сопротивления.

Число М невозмущенного потока, при котором где-либо на крыле возникает местная звуковая скорость, называется критическим *числом М и обозначается через* $M_{кр}$. При увеличении скорости полета, т. е. при увеличении числа $M (M > M_{кр})$, на крыле образуется зона местных сверхзвуковых скоростей, замыкающаяся скачками уплотнения, в результате чего появляется волновое сопротивление. Таким образом, критическое число $M_{кр}$ резко разграничивает обтекание крыла (в области $M < 1$) на два случая.

Случай I. В потоке, обтекающем крыло, скорость везде меньше скорости звука, и, следовательно, на крыле местные звуковые скорости не образуются. В этом случае

$$M < M_{кр}.$$

Случай II. Невозмущенный поток движется с дозвуковой скоростью $(M < 1)$. Однако на крыле возникают местные сверхзвуковые скорости. Это означает, что

$$M_{кр} \leqslant M < 1.$$

В § 2 настоящей главы излагается приближенная теория профиля крыла для случая $M < M_{кр}$, известная в литературе под названием теории Прандтля-Глауэрта. Однако эта теория оказывается справедливой только для очень тонких профилей, обтекаемых под малыми углами атаки. В 1940 г. акад. С. А. Христианович в работе «Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях» [53] создал новую теорию учета влияния сжимаемости на распределение давления, а следовательно, на аэродинамические характеристики крыла. В основу своей работы С. А. Христианович положил метод изучения газовых потоков, предложенный акад. С. А. Чаплыгиным в 1896 г. и опубликованный в 1902 г. в его докторской диссертации «О газовых струях», являющейся ныне фундаментом многих исследований по газовой динамике.

Работа С. А. Христиановича имеет не только большое теоретическое значение, но и важное практическое применение, так как дает возможность определить c_y и c_m для профиля любой формы, обтекаемого при любом угле атаки, на прямолинейном участке зависимости $c_y = f(\alpha)$. Акад. С. А. Христианович дал метод определения критического числа М. Им установлена теоретическая зависимость между минимальным коэффициентом давления $\bar{p}_{min}$ и критическим числом $M_{кр}$. Как известно, коэффициент давления $\bar{p}$ есть частное от деления избыточного давления на скоростной напор, т. е.

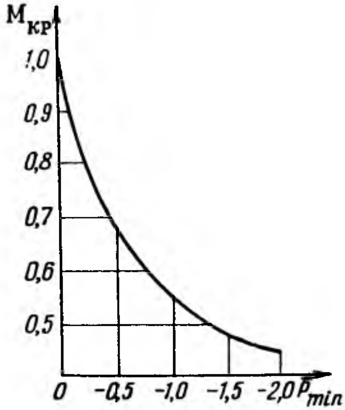
$$\bar{p} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho v^2}{2}}.$$

При испытании крыла в открытой рабочей части аэродинамической трубы или в условиях полета

$$\bar{p} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho v^2}{2}} = \frac{p_{мест} - p_{атм}}{\frac{\rho v^2}{2}}.$$

Установлено, что местная скорость звука на крыле возникает в точке $\bar{p}_{\min}$.

С. А. Христианович показал, что, зная минимальный коэффициент давления $\bar{p}_{\min}$ для профиля (по результатам его испытаний



Фиг. 18.1. Кривая Христиановича. Зависимость $M_{кр}$ от $\bar{p}_{\min}$.

на малых скоростях в аэродинамической трубе), можно определить критическое число M. Эта зависимость между числом $M_{кр}$ и минимальным коэффициентом давления $\bar{p}_{\min}$ приведена на фиг. 18. 1.

§ 2. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА В ДОКРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ (МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ)

В настоящем параграфе изложен приближенный метод учета сжимаемости воздуха (метод Прандтля—Глауэрта) для чисел $M<M_{кр}$, основанный на линеаризации точного уравнения газовой динамики

$$(a^2-v_x^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2v_xv_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+(a^2-v_y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Как видно из дальнейшего, линеаризация позволяет значительно упростить это уравнение.

Предположим, что плоский газовый поток, текущий параллельно оси x со скоростью на бесконечности, равной $\bar{u}$, обтекает некоторый тонкий профиль под малым углом атаки. В таком случае поток около профиля можно считать мало отличающимся от невозмущенного плоскопараллельного потока на бесконечности и составляющие скорости v вблизи профиля представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \bar{u}+v_x', \\ v_y &= v_y', \end{aligned}\right\} \qquad (18.1)$$

где v_x', v_y' — малые величины, являющиеся функциями x, y и стремящиеся к нулю при удалении от профиля. В дальнейших рассуждениях будем исходить из предположения, что вторыми и более высокими степенями малых величин v_x', v_y' можно пренебрегать. Тогда выражения для основных величин, характеризующих газовый поток, значительно упростятся. Покажем это.

Рассмотрим прежде всего квадрат скорости:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (\bar{u} + v_x')^2 + v_y'^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}v_x' + v_x'^2 + v_y'^2.$$

Отбрасывая $v_x'^2$, $v_y'^2$, будем иметь

$$v^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}v_x' \quad \text{или} \quad v = \bar{u} + v_x'. \tag{18.1'}$$

Рассмотрим скорость звука. Как известно,

$$a^2 = \frac{k-1}{2} v_{\max}^2 - \frac{k-1}{2} v^2.$$

Это же выражение для невозмущенного потока на бесконечности можно написать в виде

$$\bar{a}^2 = \frac{k-1}{2} v_{\max}^2 - \frac{k-1}{2} \bar{u}^2. \tag{18.2}$$

Отсюда

$$a^2 = \bar{a}^2 - \frac{k-1}{2} (v^2 - \bar{u}^2)$$

или, используя (18.1'),

$$a^2 = \bar{a}^2 - (k-1)\bar{u}v_x', \tag{18.3}$$

т. е.

$$a = \bar{a}\left[1 - \frac{k-1}{\bar{a}^2} \bar{u}v_x'\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Разлагая в ряд по биноминальной формуле и отбрасывая малые высших порядков, получим

$$a = \bar{a} - \frac{k-1}{2} \frac{\bar{u}}{\bar{a}} v_x'. \tag{18.4}$$

Из выражений (18.1') и (18.4) легко найти связь между числами $M = \frac{v}{a}$ и $\bar{M} = \frac{\bar{u}}{\bar{a}}$.

Действительно,

$$M = va^{-1} = (\bar{u} + v_x')\left(\bar{a} - \frac{k-1}{2} \frac{\bar{u}}{\bar{a}} v_x'\right)^{-1}$$

или

$$M = \frac{\bar{u}}{\bar{a}}\left(1 + \frac{v_x'}{\bar{u}}\right)\left(1 - \frac{k-1}{2} \frac{\bar{u}}{\bar{a}^2} v_x'\right)^{-1}.$$

Используя вновь биноминальное разложение, будем иметь

$$\mathrm{M}=\overline{\mathrm{M}}\left(1+\frac{v_x'}{\overline{u}}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}\frac{\overline{u}}{\overline{a}^2}v_x'\right),$$

откуда с принятой точностью

$$\mathrm{M}=\overline{\mathrm{M}}\left[1+\frac{v_x'}{\overline{u}}\left(1+\frac{k-1}{2}\overline{\mathrm{M}}^2\right)\right]. \tag{18.5}$$

Найдем теперь давление p в возмущенном потоке. Из формулы Бернулли (13.3)

$$dp=-\rho v dv$$

получаем

$$\Delta p=p-\overline{p}=-\int_{\overline{u}}^{v}\rho v\,dv,$$

где $\overline{p}$ — давление в невозмущенном потоке, текущем со скоростью $\overline{u}$.

Применяя теорему о среднем, будем иметь

$$p-\overline{p}=-(\rho v)_{\text{ср}}(v-\overline{u}),$$

где $(\rho v)_{\text{ср}}$ — среднее значение удельного расхода на рассматриваемом интервале.

Так как

$$(\rho v)_{\text{ср}}=\frac{\overline{\rho}\overline{u}+(\overline{\rho}\overline{u}+\rho' v')}{2},$$

то, пренебрегая произведением малых величин $\rho' v'$, найдем, что

$$(\rho v)_{\text{ср}}=\overline{\rho}\overline{u}.$$

Таким образом,

$$p-\overline{p}=-\overline{\rho}\overline{u}(v-\overline{u})=-\overline{\rho}\overline{u}(\overline{u}+v_x'-\overline{u}),$$

т. е.

$$p-\overline{p}=-\overline{\rho}\overline{u}v_x'. \tag{18.6}$$

Выражение (18.6) носит название *линеаризованного уравнения Бернулли.*

Для того чтобы провести линеаризацию основного уравнения газовой динамики (16.7), являющегося нелинейным дифференциальным уравнением, заменим в этом уравнении величины a^2, v^2_x, v^2_y и v_xv_y по формулам (18.3) и (18.1). Тогда с принятой точностью получим

$$[\overline{a}^2-\overline{u}^2-(k+1)\overline{u}v_x']\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\overline{u}v_y'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+$$

$$+[\overline{a}^2-(k-1)\overline{u}v_x']\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{18.7}$$

Заметим теперь, что вторые производные по координатам от потенциала φ сами являются величинами первого порядка малости. Например,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(v_x)=\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}+v_x)=\frac{\partial v_x'}{\partial x}.$$

Поэтому, отбрасывая в уравнении (18.7) члены второго порядка малости и деля на $\bar{a}^2$, окончательно будем иметь

$$(1-\overline{\mathrm{M}}^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{18.8}$$

Уравнение (18.8) является в противоположность уравнению (16.7) *линейным* дифференциальным уравнением. Рассмотренный метод носит название *метода линеаризации,* а сам поток — *линеаризованным потоком.* (При $\overline{\mathrm{M}}<1$ уравнение (18.8) является уравнением эллиптического типа, при $\overline{\mathrm{M}}>1$ — гиперболического типа.)

Преобразуем уравнение (18.8), приведя его к уравнению Лапласа. Для этого, производя следующую замену переменных

$$x_1=x,\ y_1=y\sqrt{1-\overline{\mathrm{M}}^2}, \tag{18.9}$$

вычислим производные от потенциала φ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1};\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dy}=\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\sqrt{1-\overline{\mathrm{M}}^2};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy_1}{dy}=\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\sqrt{1-\overline{\mathrm{M}}^2}\right)\sqrt{1-\overline{\mathrm{M}}^2}$$

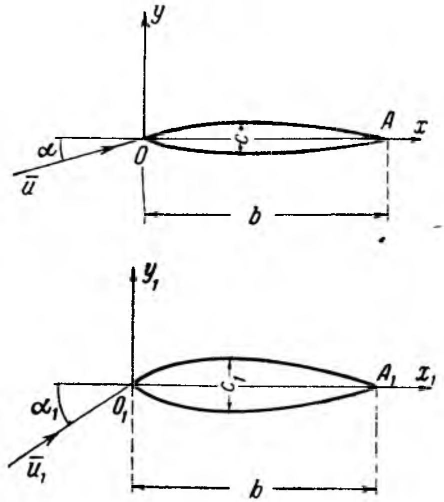
или

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}(1-\overline{\mathrm{M}}^2).$$

Подставляя значения производных в уравнение (18.8), приведем его к виду уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}=0. \tag{18.10}$$

Известно, что уравнению Лапласа удовлетворяет потенциал скорости потока несжимаемой жидкости. Переход от уравнения (18.8) к уравнению (18.10) с помощью замены переменных (18.9) позволяет, пользуясь уравнением Лапласа (18.10), найти потенциал скорости потока несжимаемой жидкости $\varphi(x_1, y_1)$, обтекающей некоторый новый контур. Если в найденном по уравнению Лапласа потенциале скорости заменить x_1 через x, а y_1 через $y\sqrt{1-\overline{\mathrm{M}}^2}$, то получим потенциал скорости для потока сжимаемой жидкости, обтекающей заданный тонкий профиль. При переходе от переменных x, y к переменным x_1, y_1 форма профиля будет меняться. Рассмотрим характер изменения формы профиля при таком переходе (фиг. 18. 2). Допустим, что в плоскости xy расположен тонкий профиль с хордой b, направленной вдоль оси x, и поток сжимаемой жидкости обтекает этот профиль под малым углом атаки α со скоростью $\bar{u}$. В таком случае в плоскости x_1, y_1 будем иметь какой-то другой профиль с той же хордой b, обтекаемый потоком несжимаемой жидкости со скоростью $\bar{u}_1$ под новым углом атаки α_1. Покажем, что профиль, находящийся в потоке несжимаемой жидкости, будет утолщен в направлении оси y в отношении $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$. Для этого обратимся к рассмотрению изменения скоростей в направлении координатных осей.



Фиг. 18. 2. Деформация профиля по теории Прандтля—Глауэрта.

Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\sqrt{1-M^2},$$

то

$$v_{x1}=v_x,\ v_{y1}=\frac{v_y}{\sqrt{1-M^2}} \qquad (18.11)$$

Из формул (18. 11) заключаем, что составляющие скорости по оси x при таком переходе не меняются и в соответствующих точках профиля оказываются равными, а составляющие скорости по оси y увеличиваются в отношении $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$. Это означает, что тангенсы углов наклона касательной к линии тока с осью x, равные $\frac{v_y}{v_x}$, также увеличиваются в том же отношении и, следовательно, в таком же отношении увеличится угол атаки α_1, т. е.

$$\alpha_1=\frac{\alpha}{\sqrt{1-M^2}}.$$

Изменение углов наклона касательных показывает, что контур профиля O_1A_1, являющийся линией тока, будет во всех своих точках иметь наклон касательных, увеличенный по сравнению с наклоном касательных к контуру OA в сжимаемой жидкости в $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ раз.

Отсюда заключаем, что и максимальная толщина c_1 профиля O_1A_1 будет связана с максимальной толщиной профиля OA соотношением

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{1-\overline{M}^2}},$$

т. е. *тонкому профилю в сжимаемой жидкости соответствует утолщенный профиль в несжимаемой жидкости, обтекаемый под бо́льшим углом атаки.*

Таким образом, для определения обтекания тонкого профиля крыла потоком сжимаемой жидкости необходимо рассмотреть обтекание несжимаемой жидкостью профиля, утолщенного в направлении оси y в $(1-\overline{M}^2)^{-\frac{1}{2}}$ раз, под углом атаки, увеличенным во столько же раз. Определив для этого фиктивного профиля с помощью уравнения Лапласа (18. 10) потенциал $\varphi(x_1, y_1)$, надо вновь перейти, пользуясь преобразованием (18. 9), к потоку сжимаемого газа. Тогда в соответственных точках этих потоков, определяемых уравнением (18. 9), значения потенциалов скорости и горизонтальных составляющих скоростей [формула (18. 11)] будут совпадать. В силу линеаризованной формулы Бернулли (18. 6) в этих точках будут совпадать и давления. Это приводит к выводу, что подъемная сила для профиля в сжимаемом газе и подъемная сила для утолщенного фиктивного профиля в несжимаемой жидкости одинаковы. Известно, что если в потоке несжимаемой жидкости профиль, хорда которого расположена вдоль оси x, растягивается в направлении оси y в n раз и одновременно в n раз увеличивается угол атаки α, то коэффициент подъемной силы также увеличивается в n раз. Но, с другой стороны, рассматриваемый профиль в сжимаемом газе ведет себя так, как утолщенный в $(1-\overline{M}^2)^{-\frac{1}{2}}$ раз фиктивный профиль в потоке несжимаемой жидкости. Следовательно, профиль в сжимаемом газе имеет подъемную силу, в $(1-\overline{M}^2)^{-\frac{1}{2}}$ раз бо́льшую, нежели в несжимаемой жидкости. Отсюда вывод — влияние сжимаемости при $M<M_{кр}$ приводит к увеличению коэффициента подъемной силы. Для нахождения коэффициента подъемной силы профиля в сжимаемом газе надо взять значение c_y для данного угла атаки на малых скоростях обтекания [из диаграммы $c_y=f(\alpha)$] и этот коэффициент умножить на $(1-\overline{M}^2)^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, будем иметь

$$c_{y\,сж} = \frac{c_{y\,нс}}{\sqrt{1-\overline{M}^2}}. \tag{18.12}$$

Аналогично будет выражаться и коэффициент момента профиля:

$$c_{m\,сж} = \frac{c_{m\,нс}}{\sqrt{1-\overline{M}^2}}. \tag{18.13}$$

§ 3. УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ С БОЛЬШИМИ ДОЗВУКОВЫМИ СКОРОСТЯМИ

В работе «О газовых струях» (1902 г.) акад. С. А. Чаплыгин создал метод изучения газовых потенциальных потоков, который почти полвека спустя получил исключительно большое применение в решении газодинамических задач, в том числе и в современной теории крыла. Идея метода С. А. Чаплыгина заключается в том, что с помощью введения новых независимых переменных нелинейные уравнения газовой динамики для функций φ и ψ точно преобразуются в линейные уравнения, которые затем приближенно интегрируются путем апроксимации изэнтропы линейной зависимостью (см. § 4).

Обратимся к плоскому потенциальному потоку газа. В этом случае в силу потенциальности потока

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{18.14}$$

а из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \tag{18.15}$$

можно сделать заключение о существовании функции тока ψ такой, что удовлетворяются условия

$$\frac{\rho}{\rho_0} v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{18.16}$$

где ρ_0 — плотность в некоторой характерной точке, соответствующей скорости v_0.

Из уравнений (18.14) и (18.16) находим

$$\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{18.17}$$

Введем в качестве независимых переменных вместо x и y величину скорости v и угол θ, образуемый вектором скорости с осью x.

Тогда, так как

$$v_x = v\cos\theta, \quad v_y = v\sin\theta, \tag{18.18}$$

то, используя (18.14) и (18.16), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = v(\cos\theta\,dx + \sin\theta\,dy), \\ d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = \frac{\rho}{\rho_0}v(-\sin\theta\,dx + \cos\theta\,dy). \end{aligned}\right\} \tag{18.19}$$

Из уравнений (18.19) находим

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{1}{v}\cos\theta\, d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho v}\sin\theta\, d\psi, \\ dy &= \frac{1}{v}\sin\theta\, d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho v}\cos\theta\, d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{18.20}$$

Так как из уравнений (18.20) следует, что

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{\cos\theta}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial\psi} = -\frac{\rho_0}{\rho v}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{\sin\theta}{v}, \quad \frac{\partial y}{\partial\psi} = +\frac{\rho_0}{\rho v}\cos\theta,$$

то

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{\cos\theta}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\rho_0}{\rho v}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial v}. \tag{18.21}$$

Аналогично можно получить

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\theta} &= \frac{1}{v}\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\rho_0}{\rho v}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1}{v}\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\rho_0}{\rho v}\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial v}, \\ \frac{\partial y}{\partial\theta} &= \frac{1}{v}\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\rho_0}{\rho v}\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{18.22}$$

Для исключения старых переменных x и y найдем производные

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right).$$

Учитывая известное свойство независимости смешанных производных от порядка дифференцирования, получим

$$-\frac{\sin\theta}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\rho_0}{\rho v}\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial v} = -\frac{\cos\theta}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho v}\right),$$

$$\frac{\cos\theta}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\rho_0}{\rho v}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial v} = -\frac{\sin\theta}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho v}\right).$$

Умножая первое из этих уравнений на $(-\sin\theta)$, а второе на $\cos\theta$ и складывая, будем иметь

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{18.23}$$

Умножая первое уравнение на $\cos\theta$, а второе на $\sin\theta$ и складывая, находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = v\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}. \tag{18.24}$$

Для преобразования уравнения (18. 23) заметим, что

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho v}\right)=\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{1}{v}-\frac{1}{v^2}\frac{\rho_0}{\rho}. \tag{18.25}$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)=-\frac{\rho_0}{\rho^2}\frac{d\rho}{dv}=-\frac{\rho_0}{\rho^2}\frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dv}=-\frac{\rho_0}{\rho^2}\frac{1}{a^2}\frac{dp}{dv} \tag{18.26}$$

или, используя формулу (13. 3),

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{v}{a^2}. \tag{18.27}$$

Подставляя (18. 27) в (18. 25), получим

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho v}\right)=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{a^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{v^2}(M^2-1). \tag{18.28}$$

В таком случае система уравнений (18. 23) и (18. 24) примет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial v}&=-\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{v}(1-M^2)\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=v\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \tag{18.29}$$

Полученные уравнения являются уравнениями движения в плоскости годографа скорости (в полярных координатах v и θ). Эти уравнения линейны, так как коэффициенты при производных являются функциями только независимых переменных. Таким образом, исключительная важность метода С. А. Чаплыгина заключается в том, что преобразование уравнений движения к плоскости годографа скорости *точно* линеаризует нелинейные уравнения движения газа в физической плоскости течения.

Преобразуем эти уравнения, введя переменные Чаплыгина τ и θ, где

$$\tau=\frac{v^2}{\frac{k+1}{k-1}a_{\text{кр}}^2}. \tag{18.30}$$

Из уравнения (14. 12′) и формулы (18. 30) находим

$$M^2=\frac{v^2}{a^2}=\frac{2}{k-1}\frac{\tau}{1-\tau} \tag{18.31}$$

или

$$1-M^2=\frac{1-\frac{k+1}{k-1}\tau}{1-\tau}. \tag{18.32}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial v}=2\,\frac{k-1}{k+1}\,\frac{v}{a_{\text{кр}}^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}, \tag{18.33}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}=2\,\frac{k-1}{k+1}\,\frac{v}{a_{\text{кр}}^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \tag{18.34}$$

и используя формулу (14.22), которую можно написать в виде

$$\rho=\rho_0\,(1-\tau)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{18.35}$$

окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}&=-\frac{1}{2\tau}\,\frac{1-\frac{k+1}{k-1}\tau}{(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\frac{1}{k-1}}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\tau}.\end{aligned}\right\} \tag{18.36}$$

Система (18.36) носит название *системы уравнений Чаплыгина.*

В своей работе «О газовых струях» С. А. Чаплыгин применил полученные уравнения к расчету различных струйных течений газа. Эта работа С. А. Чаплыгина положила начало развитию аэродинамики больших скоростей и явилась основой ряда выдающихся работ советских ученых, посвященных разработке проблем газовых течений и современной теории крыла.

В 1936 г. проф. Н. А. Слезкин [54] применил уравнения Чаплыгина к изучению задачи о бесциркуляционном обтекании тел дозвуковым потоком газа. Развитие метода Чаплыгина, как было выше указано, позволило акад. С. А. Христиановичу разработать теорию обтекания тел газовым потоком при больших скоростях.

В заключение этого параграфа следует указать работу акад. А. И. Некрасова «О плоско-параллельном движении газа при дозвуковых скоростях» [56], в которой он решает задачу о движении газа, приводя дифференциальное уравнение для потенциала скорости φ с помощью преобразования Лежандра к линейному виду.

§ 4. МЕТОД С. А. ХРИСТИАНОВИЧА

Приближенная теория Прандтля—Глауэрта, основанная на методе линеаризации уравнений газовой динамики, справедлива лишь для весьма тонких профилей, обтекаемых под малыми углами атаки. Для исследования обтекания дозвуковым потоком крыловых профилей следует обратиться к точным уравнениям движения идеального газа.

С. А. Христианович видоизменил точные уравнения С. А. Чаплыгина движения газа и построил теорию, позволяющую учитывать влияние сжимаемости на распределение давления и аэродинамические характеристики любых профилей при докритических скоростях. Изложим идею метода С. А. Христиановича [1].

Введем в уравнения Чаплыгина

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\frac{1}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}&=-\frac{1}{2\tau}\frac{1-\frac{k+1}{k-1}\tau}{(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\end{aligned}\right\}\tag{18.37}$$

вместо независимой переменной τ новую переменную

$$\lambda=\frac{v}{a_{\text{кр}}}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\sqrt{\tau}.\tag{18.38}$$

В таком случае, учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\frac{\partial}{\partial\lambda}=\frac{k+1}{k-1}\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda},\tag{18.39}$$

можно уравнения Чаплыгина представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=\frac{\lambda}{\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}&=-\frac{1-\lambda^2}{\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.\end{aligned}\right\}\tag{18.40}$$

Для получения уравнений Чаплыгина в симметричной форме введем вместо λ независимую переменную s, связанную с λ следующим соотношением:

$$ds=\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\frac{d\lambda}{\lambda},\qquad s=\int\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\frac{d\lambda}{\lambda}.\tag{18.41}$$

В таком случае система уравнений (18.40) примет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=\sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial s},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial s}&=-\sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\end{aligned}\right\}\tag{18.42}$$

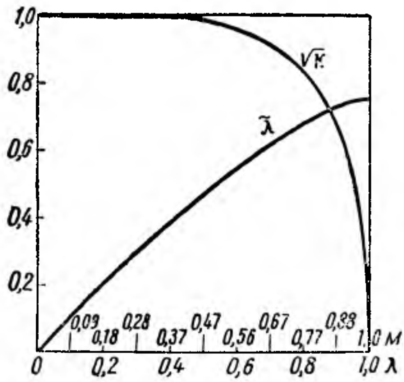
где величина K является следующей функцией λ:

$$K = \frac{1-\lambda^2}{\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}. \tag{18.43}$$

С. А. Христианович исследовал общий случай циркуляционного обтекания крылового профиля и предложил метод интегрирования системы уравнений (18.42) путем последовательных приближений. С. А. Христианович показал, что интегрирование полученных им уравнений сжимаемого газа для случая обтекания профиля крыла может быть сведено к решению задачи обтекания деформированного профиля (близкого к заданному) в несжимаемой жидкости.

Покажем это, для чего выразим величину K через число М, использовав формулу (14.21′):

$$K = (1-M^2)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{2}{k-1}}.$$



Фиг. 18.3. Зависимость функции K от числа М и коэффициента скорости λ.

Зависимость функции K от чисел λ и М изображена на фиг. 18.3.

Как видим, для чисел $M<0,6$ величина K мало отличается от единицы. Учитывая это, обратимся к уравнениям (18.42). Эти уравнения для сжимаемого газа отличаются от уравнений Коши—Римана для несжимаемой жидкости наличием множителя $\sqrt{K}$.

Положим величину $\sqrt{K}$ постоянной и включим ее в состав функции ψ. В частности, можно положить $K=1$ (что точно соответствует несжимаемой жидкости и было использовано Чаплыгиным) или согласно первому приближению Христиановича $K=K_\infty$, где K_∞ — значение функции K, соответствующее параметрам невозмущенного потока газа ($M=M_\infty$). В таком случае вместо точной системы уравнений (18.42) получим приближенную систему в плоскости s, θ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\partial\psi}{\partial s},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{18.44}$$

ничем не отличающуюся от уравнений Коши—Римана для несжимаемой жидкости. Приближенные уравнения (18.44) сравним с уравнениями

$$\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\tilde\theta}=\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde s},\quad \frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\tilde s}=-\frac{\partial\tilde\psi}{\partial\tilde\theta}, \tag{18.44′}$$

являющимися уравнениями Коши—Римана в плоскости псевдогодографа скорости несжимаемой жидкости $(\tilde{s}, \tilde{\theta})$.

Волнистый значок над буквой означает, что рассматриваемые величины относятся к потоку несжимаемой жидкости. Очевидно, что $\tilde{\theta}$ будет являться углом наклона скорости в потоке несжимаемой жидкости к оси x, а $\tilde{s}$ — величиной, определяемой равенством

$$d\tilde{s} = \frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} = \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}}, \quad \left(\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{v}}{a_{\text{кр}}}\right), \tag{18.45}$$

получающимся из (18.41) при $\lambda=0$.

Допустим, что в плоскости переменного $\tilde{z}=\tilde{x}+i\tilde{y}$, являющейся физической плоскостью течения несжимаемой жидкости, определено обтекание профиля крыла с циркуляцией, удовлетворяющей гипотезе Жуковского—Чаплыгина относительно задней кромки профиля. Тогда, используя существующие методы расчета несжимаемого потенциального потока (например, метод Нужина), можно вычислить величины $\tilde{v}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{s}$, $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ в функции $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и, следовательно, найти граничные условия в плоскости $\tilde{s}$, $\tilde{\theta}$.

Для того чтобы перейти к приближенному решению задачи обтекания профиля крыла сжимаемым потоком газа, потребуем, чтобы

$$\theta = \tilde{\theta}, \qquad s = \tilde{s}. \tag{18.46}$$

Последнее условие означает, очевидно, тождественность течений в плоскости псевдогодографа скорости s, θ газа и в плоскости псевдогодографа скорости $\tilde{s}$, $\tilde{\theta}$ несжимаемой жидкости. Из этого условия, используя (18.41) и (18.45), получается соотношение между скоростями течения несжимаемой жидкости и газа:

$$\int \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}} + C. \tag{18.46'}$$

Константу C можно определить из условия, чтобы отношение $\dfrac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \to 1$, когда $\lambda \to 0$.

В табл. 18.1 и на фиг. 18.3 дана связь между λ, M и $\tilde{\lambda}$. Как видим, в плоскостях годографа скорости величины скоростей не совпадают, совпадают только углы θ и $\tilde{\theta}$.

Таблица 18.1

$\lambda=\frac{v}{a_{кр}}$	M	$\tilde{\lambda}=\frac{\tilde{v}}{a_{кр}}$	$\lambda=\frac{v}{a_{кр}}$	M	$\tilde{\lambda}=\frac{\tilde{v}}{a_{кр}}$	$\lambda=\frac{v}{a_{кр}}$	M	$\tilde{\lambda}=\frac{\tilde{v}}{a_{кр}}$
0	0	0	0,35	0,3228	0,3410	0,70	0,6668	0,6251
0,05	0,0457	0,0500	0,40	0,3701	0,3862	0,75	0,7192	0,6568
0,10	0,0913	0,0998	0,45	0,4179	0,4307	0,80	0,7727	0,6857
0,15	0,1372	0,1493	0,50	0,4663	0,4734	0,85	0,8274	0,7110
0,20	0,1832	0,1983	0,55	0,5152	0,5144	0,90	0,8834	0,7324
0,25	0,2294	0,2467	0,60	0,5649	0,5535	0,95	0,9409	0,7483
0,30	0,2759	0,2943	0,65	0,6154	0,5904	1,00	1,0000	0,7577

При выполнении равенств (18.46) система уравнений (18.44) определяет в плоскости s, θ поток сжимаемого газа, отвечающий тем же граничным условиям, что и поток несжимаемой жидкости в плоскости $\tilde{s}$, $\tilde{\theta}$. Однако в физической плоскости газового потока x, y контур профиля L не будет совпадать с контуром профиля $\tilde{L}$ в плоскости $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ несжимаемой жидкости. Действительно, в соответствующих точках профилей, т. е. в точках, где совпадают значения s и $\tilde{s}$, θ и $\tilde{\theta}$, а следовательно, совпадают φ и $\tilde{\varphi}$, элементы дуг профилей L и $\tilde{L}$ удовлетворяют соотношениям (см. стр. 54).

$$\Delta L = \frac{\Delta\varphi}{v} \quad \text{и} \quad \Delta\tilde{L} = \frac{\Delta\varphi}{\tilde{v}}.$$

Но, имея в виду, что скорости в соответствующих точках, вообще говоря, различны (см. табл. 18.1), приходим к выводу, что элементы дуг профилей, а следовательно, и сами профили L и $\tilde{L}$ не совпадают.

В первом приближении будем пренебрегать указанной разницей в форме профилей для газа и несжимаемой жидкости в плоскостях z и $\tilde{z}$. (Следует отметить, что С. А. Христиановичем подробно исследованы вопросы о различии этих профилей и дана теория перехода от плоскости z к плоскости $\tilde{z}$). На основе этого простейшего приближения установим связь между распределением давления по профилю в несжимаемой жидкости и распределением давления в сжимаемом газе. С этой целью напишем выражения для $\bar{p}_{нс}$ и $\bar{p}_{сж}$:

$$\bar{p}_{нс} = \frac{p_{нс} - p_{нс\infty}}{\frac{\rho_{нс\infty} v^2_{нс\infty}}{2}} = 1 - \left(\frac{v_{нс}}{v_{нс\infty}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}_\infty}\right)^2; \qquad (18.47)$$

$$\bar{p}_{сж} = \frac{p_{сж} - p_{сж\infty}}{\frac{\rho_{сж\infty} v^2_{сж\infty}}{2}} = \frac{2p}{\rho v^2}\frac{\rho}{\rho_\infty}\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 - \frac{2p_\infty}{\rho_\infty v^2_\infty} =$$

$$= \frac{2}{k\mathrm{M}^2}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2_\infty}{1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)^2 - \frac{2}{k\mathrm{M}^2_\infty}.$$

Используя соотношение $\mathrm{M}^2 = \frac{2\lambda^2}{k+1-(k-1)\lambda^2}$, можно для $\bar{p}_{сж}$ получить следующее выражение:

$$\bar{p}_{сж} = \frac{k+1}{k}\,\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2_\infty}{\lambda^2_\infty}\left[\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2_\infty}\right)^{\frac{k}{k-1}} - 1\right]. \qquad (18.48)$$

Таким образом, задаваясь скоростью на бесконечности в сжимаемом газе, т. е. λ_∞, по табл. 18.1 найдем соответствующее $\tilde{\lambda}_\infty$. Затем, давая λ различные значения и определяя по той же таблице $\tilde{\lambda}$, можно с помощью формул (18.47) и (18.48) установить искомую связь между $\bar{p}_{сж}$ и $\bar{p}_{нс}$.

Не входя в детали метода Христиановича ввиду его математической сложности и ограниченности настоящего курса, отсылаем читателя к соответствующей литературе [2, 9].

Покажем, что между $\bar{p}_{нс}$ и $\bar{p}_{сж}$ можно установить прямую зависимость, если воспользоваться предложенной Чаплыгиным заменой действительной изэнтропы «прямолинейной изэнтропой», в качестве которой выбирается касательная к изэнтропе в точке p_0, ρ_0 (фиг. 18.4). В таком случае уравнение «прямолинейной изэнтропы», т. е. уравнение касательной к изэнтропе $p\rho_0^k = p_0\left(\frac{1}{\rho}\right)^{-k}$ в точке (p_0, ρ_0) примет вид

$$p - p_0 = \rho_0^2 a_0^2\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right). \qquad (a)$$

Вводя вместо λ новую переменную μ

$$\mu = \frac{v}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}\,\lambda \qquad (б)$$

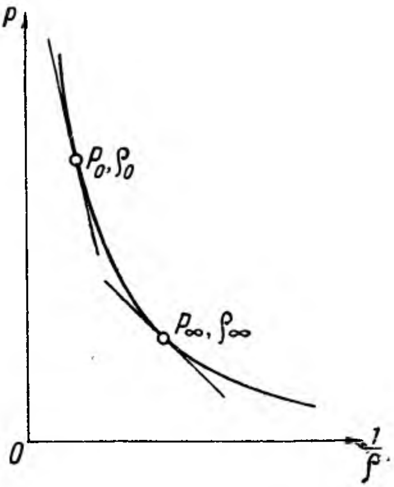
и используя приближенную изэнтропу (а), уравнения движения в плоскости годографа (18.29) приведем к виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \mu\sqrt{1+\mu^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = -\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.$$

Нетрудно убедиться, что, вводя еще раз новое переменное s с помощью соотношения

$$\frac{d\mu}{\mu\sqrt{1+\mu^2}} = ds,$$



Фиг. 18.4. Апроксимация изэнтропы прямой.

получим систему уравнений (18.44). Это означает, что соотношение (18.46′) заменится следующим более простым равенством:

$$\int \frac{d\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}} = \int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{1+\mu^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \ln\tilde{\mu} = \ln\frac{\mu}{1+\sqrt{1+\mu^2}} + \ln C.$$

Считая, что при $\mu \to 0$ отношение $\frac{\tilde{\mu}}{\mu} \to 1$, находим, что $C = 2$.

В таком случае получаем *приближенную зависимость между скоростями сжимаемого и несжимаемого газа*

$$\tilde{\mu} = \frac{2\mu}{1+\sqrt{1+\mu^2}} \quad \text{или} \quad \mu = \frac{4\tilde{\mu}}{4-\tilde{\mu}^2}. \qquad (18.49)$$

(Заметим, что полученные приближенные соотношения могут быть получены из точных путем замены в них, где это нужно, $k = -1$ и λ на μ). Выразим $\bar{p}_{нс}$ и $\bar{p}_{сж}$ в новых переменных. Используя (18.47) и (б), находим

$$\bar{p}_{нс} = 1 - \left(\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_\infty}\right)^2. \qquad (в)$$

Используя формулу (б) и подставляя $k = -1$ в выражение (18.48), получим

$$\bar{p}_{сж} = -2\,\frac{\sqrt{1+\mu_\infty^2}}{\mu_\infty^2}\left[\sqrt{1+\mu^2} - \sqrt{1+\mu_\infty^2}\right]. \qquad (г)$$

Преобразуя (г) с помощью (18.49), будем иметь

$$\bar{p}_{сж} = -2\frac{\sqrt{1+\mu_\infty^2}}{\mu_\infty^2}\frac{8\left(\tilde{\mu}^2 - \tilde{\mu}_\infty^2\right)}{\left(4-\tilde{\mu}^2\right)\left(4-\tilde{\mu}_\infty^2\right)}.$$

Так как при $k=-1$

$$\mu_\infty^2 = \left(\frac{v_\infty}{a_0}\right)^2 = \frac{v_\infty^2}{a_\infty^2\left(1+\frac{k-1}{2}M_\infty^2\right)} = \frac{M_\infty^2}{1-M_\infty^2}$$

и замечая, что $\tilde{\mu}^2 = \tilde{\mu}_\infty^2\,(1-\bar{p}_{нс})$, получим для $\bar{p}_{сж}$ следующее выражение:

$$\bar{p}_{сж} = \frac{16}{M_\infty^2}\sqrt{1-M_\infty^2}\,\frac{\tilde{\mu}_\infty^2\bar{p}_{нс}}{\left[4-(1-\bar{p}_{нс})\tilde{\mu}_\infty^2\right]\left(4-\tilde{\mu}_\infty^2\right)}.$$

Заменяя с помощью (18.49)

$$\tilde{\mu}_\infty = \frac{2\mu_\infty}{1+\sqrt{1+\mu_\infty^2}} = \frac{2M_\infty}{1+\sqrt{1-M_\infty^2}},$$

окончательно находим искомую зависимость между $\bar{p}_{сж}$ и $\bar{p}_{нс}$ (формула Кармана—Цзяна)

$$\bar{p}_{сж} = \frac{\bar{p}_{нс}}{\sqrt{1-M_\infty^2}+\frac{1}{2}\frac{M_\infty^2}{1+\sqrt{1-M_\infty^2}}\bar{p}_{нс}}. \qquad (18.50)$$

Отметим, что в качестве точки касания к изэнтропе (фиг. 18.4) можно взять точку (p_∞, ρ_∞), соответствующую параметрам невозмущенного потока $(M=M_\infty)$, и этим расширить область применимости рассмотренного приближенного метода.

В заключение следует отметить, что С. А. Христианович в качестве первого приближения вместо апроксимации изэнтропы прямой линией положил в уравнениях (18.42)

$$\sqrt{K} = \sqrt{K_\infty} = \frac{\rho_0}{\rho_\infty}\sqrt{1-M_\infty^2}.$$

Этот случай был им полностью исследован в 1940 г. В зарубежной литературе этой апроксимации приписывается имя Кармана, исследовавшего это приближение позже.

§ 5. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ Г. Ф. БУРАГО ОБТЕКАНИЯ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ

В настоящее время имеются методы для приближенного учета влияния сжимаемости на обтекание тел дозвуковым потоком газа, отличные от метода С. А. Христиановича и основанные на гипотезе неизменяемости формы линий тока с изменением скорости невозмущенного потока. Впервые этот метод был предложен проф. С. Г. Нужиным в 1946 г. в работе «К теории обтекания тел газом при больших дозвуковых скоростях» [58]. В этой работе С. Г. Нужин предложил приближенный метод, позволяющий привести задачу о построении потенциального потока сжимаемой жидкости около тел удобообтекаемой формы при дозвуковых скоростях течения к задаче о построении потока несжимаемой жидкости около тел той же формы. В 1949 г. С. Г. Нужиным было предложено некоторое видоизменение уравнений С. А. Христиановича и приближенный метод построения деформированного профиля [59].

Усовершенствование предложенного С. Г. Нужиным в 1946 г. метода дано им в 1951 г. в работе «Аэродинамика тонких тел при докритических скоростях» [60].

Указанный метод в ряде случаев вполне удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. Однако в связи с некоторой произвольностью выбора дополнительных условий этот метод не всегда приводит к достаточно качественным результатам.

В 1949 г. проф. Г. Ф. Бураго предложил простой приближенный метод учета влияния сжимаемости, основанный на гипотезе стабилизации линий тока, более рациональном выборе дополнительных условий и дающий почти такие же точные результаты, как и первое приближение по теории С. А. Христиановича.

В этом параграфе рассмотрен метод Г. Ф. Бураго.

Напишем уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости и условие потенциальности течения (см. стр. 43 и 52).

$$\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\bar{v}\right)=0, \tag{18.51}$$

$$\operatorname{rot}(\bar{v})=0, \tag{18.52}$$

где $\bar{v}$ — скорость и ρ — плотность в произвольной точке потока;

ρ_∞ — плотность невозмущенного потока.

Вводя в эти уравнения вспомогательную функцию u, будем иметь

$$\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\bar{v}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty u}u\bar{v}\right)=\frac{\rho}{\rho_\infty u}\operatorname{div}(u\bar{v})+u\bar{v}\operatorname{grad}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty u}\right)=0,$$

$$\operatorname{rot}(\bar{v})=\operatorname{rot}\left(\frac{1}{u}u\bar{v}\right)=\frac{1}{u}\operatorname{rot}(u\bar{v})-u\bar{v}\times\operatorname{grad}\left(\frac{1}{u}\right)=0.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{uv}\operatorname{div}(u\bar{v}) = i \operatorname{grad} \ln\left(\frac{\rho_\infty}{\rho} u\right); \tag{18.53}$$

$$\frac{1}{uv}\operatorname{rot}(u\bar{v}) = -i \times \operatorname{grad} \ln(u), \tag{18.54}$$

где i — единичный вектор скорости $\bar{v}$ [1]).

Предположим теперь, что функция u выбрана таким образом, что правые части уравнений (18.53) и (18.54) малы и их приближенно можно принять равными нулю.

Тогда вместо точных уравнений (18.51) и (18.52) мы получим приближенные уравнения

$$\operatorname{div}(u\bar{v}) = 0, \tag{18.55}$$

$$\operatorname{rot}(u\bar{v}) = 0. \tag{18.56}$$

Эти уравнения подстановкой

$$u\bar{v} = u_\infty \bar{v}^\circ \tag{18.57}$$

легко приводятся к известным уравнениям, характеризующим потенциальный поток идеальной несжимаемой жидкости, текущей с местной скоростью $\bar{v}^\circ$ (u_∞ — значение u для точек невозмущенного потока; $u_\infty = \text{const}$).

Формула (18.57) дает связь между скоростями $\bar{v}$ и $\bar{v}^\circ$ в одних и тех же точках сжимаемого и несжимаемого потоков при одинаковых граничных условиях, так как на бесконечности $\bar{v} = \bar{v}^\circ$ и, кроме того, наклоны векторов $\bar{v}$ и $\bar{v}^\circ$ одинаковы, следовательно, форма линий тока в обоих потоках также одинакова (гипотеза стабилизации линий тока), включая и внутреннюю граничную поверхность обтекаемого тела.

Обратим теперь внимание на выбор вспомогательной функции u. Критерий, которым при этом следует руководствоваться,— это получение возможно малых значений правых частей уравнений (18.53) и (18.54), которыми мы пренебрегаем. Приближенное решение будет точным, если подходящим выбором u удастся обратить в нули правые части уравнений (18.53) и (18.54).

Произведем выбор u.

Пусть u_1 есть значение u, не равное нулю, но обращающее в нуль правую часть уравнения (18.53).

Тогда, как это следует из (18.53), $\operatorname{grad} \ln\left(\frac{\rho_\infty}{\rho} u_1\right)$ должен быть перпендикулярен направлению скорости $\bar{v}$, т. е. направлен по ка-

[1]) Формулы (18.53) и (18.54) получены на основании известного формального свойства градиента сложной функции:

$$\operatorname{grad} F(f) = \frac{\partial F}{\partial f} \operatorname{grad} f.$$

сательной к поверхности $\varphi = \text{const}$. Так как поверхности уровня всегда перпендикулярны градиенту, то, следовательно, поверхностями уровня в рассматриваемом случае будут поверхности, составленные из линий тока, и их уравнение будет иметь вид

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} u_1 = c_\psi,$$

где c_ψ — постоянная вдоль каждой линии тока величина (но не постоянная для всего пространства, заполненного текущей жидкостью). Отсюда

$$u_1 = c_\psi \frac{\rho}{\rho_\infty}. \tag{18.58}$$

Пусть далее u_2 — значение u, обращающее в нуль правую часть уравнения (18.54), тогда, замечая, что $\operatorname{grad}(\ln u_2)$ должен быть параллелен вектору $\bar{v}$, т. е. направлен вдоль линий тока, приходим к выводу, что соответствующие ему поверхности уровня должны совпадать с поверхностями $\varphi = \text{const}$ и, следовательно,

$$u_2 = c_\varphi, \tag{18.59}$$

где c_φ — постоянная величина в направлениях, нормальных к линиям тока, т. е. вдоль поверхностей $\varphi = \text{const}$ (φ — потенциал скоростей).

Всякое значение u, не равное u_1 или u_2, будет приводить к погрешности как в уравнении (18.53), так и в уравнении (18.54).

Суммарная квадратичная погрешность в уравнениях (18.53) и (18.54) в первом приближении выразится суммой

$$(u - u_1)^2 + (u - u_2)^2.$$

Минимуму суммарной квадратичной погрешности (если считать величины u_1 и u_2 независимыми от u) в равнозначных уравнениях (18.53) и (18.54), как легко видеть, будет соответствовать значение

$$u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2}\left(c_\psi \frac{\rho}{\rho_\infty} + c_\varphi\right). \tag{18.60}$$

Это значение u и принимается в рассматриваемой приближенной теории. Постоянные c_ψ и c_φ в каждом частном случае должны выбираться исходя из граничных условий задачи, а когда этих условий недостаточно,— исходя из условия наибольшего сближения между собой значений u_1 и u_2, определяемых формулами (18.58) и (18.59).

Рассмотрим теперь безграничный поток газа около профиля.

На бесконечности в невозмущенной части потока считаем скорости течения в сжимаемом и несжимаемом потоках одинаковыми, т. е. $\bar{v}_\infty = \bar{v}^{\circ}_\infty$. Одинаковыми считаем также плотности и давления, т. е. $\rho_\infty = \rho^{\circ}_\infty$, $p_\infty = p^{\circ}_\infty$. Тогда из равенства (18.57) при условии (18.60) на бесконечно удаленной линии тока $\psi=\text{const}$ и на бесконечно удаленной поверхности $\varphi=\text{const}$ будем иметь:

$$c_{\psi_\infty}+c_\varphi=2u_\infty,$$
$$c_\psi+c_{\varphi_\infty}=2u_\infty,$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} c_\varphi&=2u_\infty-c_{\psi\infty}=c_0,\\ c_\psi&=2u_\infty-c_{\varphi\infty}=c_1,\end{aligned}\right\} \qquad (18.61)$$

где c_0 и c_1 — пока произвольные константы.

Можно установить связь между ними, потребовав, чтобы в среднем для потока имело место равенство:

$$u_{1\text{ср}}=u_{2\text{ср}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\tau}\iiint c_\psi\frac{\rho}{\rho_\infty}\,d\tau=\frac{1}{\tau}\iiint c_\varphi\,d\tau,$$

откуда, используя (18.61), получаем

$$c_0=c_1\frac{1}{\tau}\iiint\limits_{\tau}\frac{\rho}{\rho_\infty}\,d\tau. \qquad (18.62)$$

Но для безграничного потока, когда плотность ρ существенно отличается от ρ_∞ лишь вблизи обтекаемого тела, имеем:

$$\frac{1}{\tau}\iiint\frac{\rho}{\rho_\infty}\,d\tau\approx 1,$$

следовательно [см. (18.62) и (18.61)],

$$c_0=c_1=c_\varphi=c_\psi=u_\infty. \qquad (18.63)$$

Связь между скоростями в сжимаемом и несжимаемом потоках, как следует из (18.57), (18.60) и (18.63), получим в таком виде:

$$\bar v=\frac{2\bar v^\circ}{1+\dfrac{\rho}{\rho_\infty}}. \qquad (18.64)$$

Если учесть, что

$$1+\frac{\rho}{\rho_\infty}=2+\frac{\rho-\rho_\infty}{\rho_\infty},$$

$$2\sqrt{\frac{\rho}{\rho_\infty}}=2\left(1+\frac{\rho-\rho_\infty}{\rho_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}=2+\frac{\rho-\rho_\infty}{\rho_\infty}-\frac{1}{4}\left(\frac{\rho-\rho_\infty}{\rho_\infty}\right)^2=\ldots,$$

то без заметной погрешности для дозвукового потока можно принять

$$\bar v=\sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho}}\,\bar v^\circ. \qquad (18.65)$$

Обратимся к установлению приближенной зависимости между давлением в сжимаемом и несжимаемом потоках.

Коэффициент давления в несжимаемом потоке равен

$$\bar{p}^{\circ}=2\,\frac{p^{\circ}-p_{\infty}}{\rho_{\infty}v_{\infty}^{2}}=1-\frac{v^{\circ 2}}{v_{\infty}^{2}}. \tag{18.66}$$

Переходя от скорости течения v° несжимаемого потока к скорости v газового потока по формуле (18.65), получим

$$\bar{p}^{\circ}=1-\frac{\rho v^{2}}{\rho_{\infty}v_{\infty}^{2}}. \tag{18.67}$$

По формуле (18.67) коэффициент давления $\bar{p}^{\circ}$ в некоторой точке несжимаемого потока выражается через величины ρ и v газового потока в той же точке.

Коэффициент давления в газовом потоке

$$\bar{p}=2\,\frac{p-p_{\infty}}{\rho_{\infty}v_{\infty}^{2}}=2\,\frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}v_{\infty}^{2}}\left(\frac{p}{p_{\infty}}-1\right).$$

Но

$$\frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}=\frac{1}{k}\,a_{\infty}^{2},$$

где a_{∞} — скорость звука в невозмущенном газовом потоке и k — отношение теплоемкостей, следовательно,

$$\bar{p}=\frac{2}{kM_{\infty}^{2}}\left(\frac{p}{p_{\infty}}-1\right), \tag{18.68}$$

где M_{∞} — число M невозмущенного газового потока.

Если воспользоваться соотношениями газовой динамики для изэнтропического потока

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v^{2}}{v_{\infty}^{2}}&=\frac{M^{2}}{M_{\infty}}\,\frac{1+\frac{k-1}{2}M_{\infty}^{2}}{1+\frac{k-1}{2}M^{2}},\\
\frac{\rho}{\rho_{\infty}}&=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_{\infty}^{2}}{1+\frac{k-1}{2}M^{2}}\right)^{\frac{1}{k-1}},\\
\frac{p}{p_{\infty}}&=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_{\infty}^{2}}{1+\frac{k-1}{2}M^{2}}\right)^{\frac{k}{k-1}}
\end{aligned}\right\} \tag{18.69}$$

и воспользоваться формулами (14.22), то формулы (18.67) и (18.68) соответственно преобразовываются к следующему окончательному виду:

$$\bar{p}^{\circ} = 1 - \frac{\Phi(\mathrm{M})}{\Phi(\mathrm{M}_\infty)}, \tag{18.70}$$

$$\bar{p} = \frac{2}{k\mathrm{M}_\infty^2}\left[\frac{F(\mathrm{M}_\infty)}{F(\mathrm{M})} - 1\right], \tag{18.71}$$

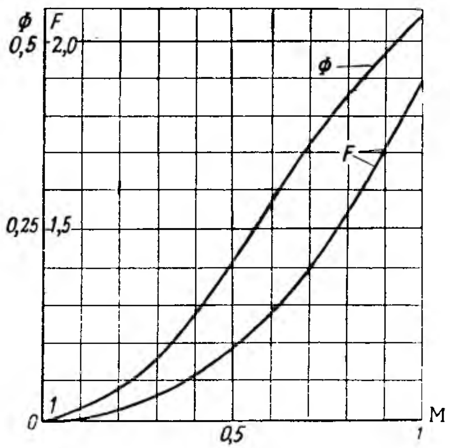
где

$$\Phi(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M}^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}, \tag{18.72}$$

$$F(\mathrm{M}) = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \tag{18.73}$$

Значения функций $\Phi(M)$ и $F(M)$ для воздуха даны на фиг. 18.5.

Формулы (18.70) — (18.73) позволяют по заданным значениям M_∞ и $\bar{p}^{\circ}$ в некоторой точке около профиля найти им соответствующие значения $\bar{p}$ (и местных чисел M).



Фиг. 18.5. Зависимость функций Φ и *F* от числа *M*.

Так как в явном виде получить эту зависимость практически невозможно, то для расчета коэффициента давления $\bar{p}$ (и числом M) по заданным значениям $\bar{p}^{\circ}$ и M_∞ Г. Ф. Бураго рекомендует поступать следующим образом.

По значению M_∞ находим с помощью графика (см. фиг. 18.5) значения функций $\Phi(M_\infty)$ и $F(M_\infty)$. Затем, имея заданным $\bar{p}^{\circ}$, по формуле (18.70) находим $\Phi(M)$, а с помощью фиг. 18.5 находим значение M и функцию $F(M)$.

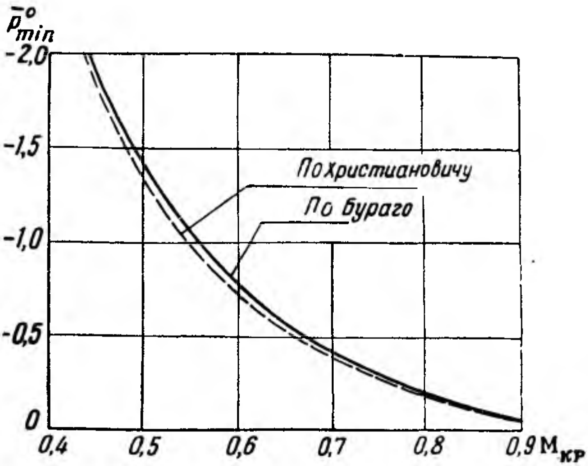
После этого, уже имея $F(M)$, $F(M_\infty)$ и M_∞, по формуле (18.71) вычисляем коэффициент $\bar{p}$.

Рассматриваемый метод дает возможность найти и зависимость $\bar{p}^{\circ}_{\min} = f(M_{\text{кр}})$.

Критическим числом $M_{\text{кр}}$, как известно, называется число M_∞ невозмущенного потока, при котором на обтекаемом теле в точке, где $\overline{p}^{\circ} = \overline{p}^{\circ}_{\min}$, достигается местное число $M = 1$. Полагая поэтому в формуле (18.70) $\overline{p}^{\circ} = \overline{p}^{\circ}_{\min}$, $M_\infty = M_{кр}$ и $M = 1$, получим следующую связь $\overline{p}^{\circ}_{\min}$ с $M_{кр}$:

$$\overline{p}^{\circ}_{\min} = 1 - \frac{1}{M_{кр}^2}\left(\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M_{кр}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \tag{18.74}$$

довольно близко совпадающую с кривой С. А. Христиановича (фиг. 18.6).



Фиг. 18.6. Сравнение методов Христиановича и Бураго.

Скорость в данной точке газового потока около профиля может быть найдена по формуле (18.65); значение $\frac{\rho}{\rho_\infty}$ вычисляется по формуле (18.69) по заданному значению M_∞ и найденному числу M.

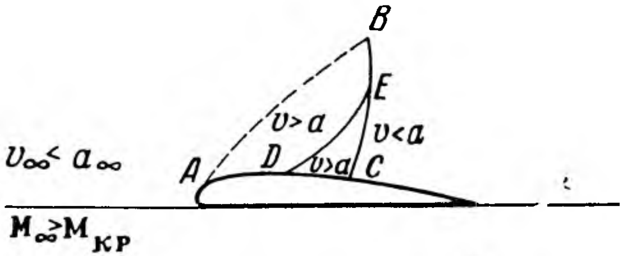
§ 6. ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ КРЫЛА В ЗАКРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ. РАСЧЕТ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПО МЕТОДУ Г. Ф. БУРАГО

Как указывалось выше, в случае когда $1 > M_\infty > M_{кр}$, поток движется с дозвуковой скоростью, но на поверхности крыла возникают зоны сверхзвуковых скоростей, замыкающиеся скачками уплотнения.

Скачки уплотнения, возникающие в сверхзвуковой зоне, могут иметь различный вид. Однако большинство опытов показывает, что при достаточно развившейся сверхзвуковой зоне от поверхности крыла в глубь потока идет мощный скачок уплотнения *CB*, близкий к прямому (фиг. 18.7). Иногда перед ним садится на крыло косой скачок *DE*, вследствие чего скачок такого типа называется λ-образным. Наличие косого скачка несколько уменьшает интенсивность прямого, так как поток, пройдя косой скачок, подходит к прямому с уменьшенной скоростью. Но одновременно наличие косого скачка может ухудшить условия обтекания крыла, ибо изменение направления скорости после косого скачка может привести к отрыву потока.

Следует отметить, что местные сверхзвуковые зоны и скачки уплотнения могут образовываться как на верхней, так и на нижней поверхностях крыла.

Скачок уплотнения, образовавшийся на поверхности крыла, порождает так называемое волновое сопротивление $X_в$. То сопротивление, которое порождается ухудшением условий обтекания из-за наличия скачков, будем, следуя С. А. Христиановичу и Я. М. Сереб-



Фиг. 18.7. Обтекание крыла при $1 > M_\infty > M_{кр}$.

рийскому, называть *добавочным сопротивлением.* Как показали опыты, величина «добавочного» сопротивления для хорошо обтекаемых тел мала, что следует из вполне удовлетворительного совпадения для этих тел вычисленных теоретических значений волнового сопротивления со значениями, полученными опытным путем.

Впервые метод расчета волнового сопротивления был предложен в 1944 г. С. А. Христиановичем и Я. М. Серебрийским.

В настоящем параграфе рассмотрен расчет волнового сопротивления по методу проф. Г. Ф. Бураго.

Предположим, что на верхней поверхности крыла (фиг. 18.8) образовалась местная сверхзвуковая зона ABC, заканчивающаяся прямым скачком уплотнения. Выделим в потоке элементарную струйку, проходящую через скачок уплотнения. Параметры газа перед скачком обозначим: скорость через v_1, давление через p_1, плотность через ρ_1; после скачка — соответственно через v_2, p_2, ρ_2. Проведем на достаточно большом удалении от профиля две контрольные плоскости $I—I$ и $II—II$. Обозначим соответственно через $\rho_{1\infty}$, $p_{1\infty}$, $v_{1\infty}$, $dy_{1\infty}$ плотность, давление, скорость и элемент длины вдоль первой плоскости, а через $\rho_{2\infty}$, $p_{2\infty}$, $v_{2\infty}$ и $dy_{2\infty}$ — те же величины вдоль второй плоскости. Из условия постоянства расхода для каждой струйки будем иметь

$$\rho_{1\infty} v_{1\infty} dy_{1\infty} = \rho_{2\infty} v_{2\infty} dy_{2\infty}. \tag{18.75}$$

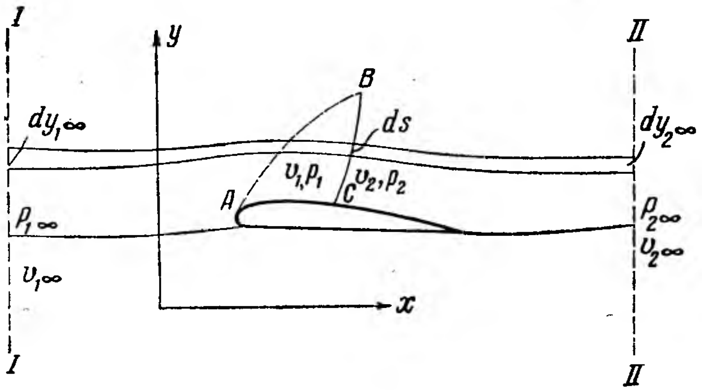
Применяя теорему о количестве движения к массе жидкости, заключенной между контрольными поверхностями, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{2\infty} v_{2\infty}^2 dy_{2\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{1\infty} v_{1\infty}^2 dy_{1\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{1\infty} - p_{2\infty})\, dy - X_{\text{в}} \qquad (18.76)$$

или, принимая во внимание соотношение (18.75),

$$X_{\text{в}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{1\infty} - p_{2\infty})\, dy + \rho_{1\infty} v_{1\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (v_{1\infty} - v_{2\infty})\, dy. \qquad (18.77)$$

При отсутствии скачка уплотнения, т. е. в случае непрерывного обтекания профиля изэнтропическим потоком газа при удалении контрольных поверхностей в бесконечность, получим $X_{\text{в}}=0$.



Фиг. 18.8. Расчетная схема обтекания профиля крыла при наличии прямого скачка.

При наличии скачка на поверхности профиля анализ формулы (18.77) упрощается, если предположить, что либо давление p, либо скорость v потока полностью в сечении II—II восстанавливаются и принимают те же значения, что и в контрольной плоскости I—I.

С. А. Христианович и Я. М. Серебрийский в своей работе предположили, что давление p впереди и позади тела стремится к общему значению p_∞, значение же скорости $v_{2\infty}$ стремится к $v_{1\infty}$ только в тех струйках, которые не пересекают скачка уплотнения. Это означает, что

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{1\infty} - p_{2\infty})\, dy = 0,$$

и вне следа от скачка

$$\lim \int \rho_{1\infty} v_{1\infty} (v_{1\infty} - v_{2\infty})\, dy = 0.$$

Следовательно,

$$X_в = \int_0^s \rho_{1\infty} v_{1\infty} (v_{1\infty} - v_{2\infty})\, dy, \tag{18.78}$$

где s — длина скачка уплотнения.

Примем согласно Г. Ф. Бураго предположение, что за крылом происходит выравнивание скоростей, т. е. $v_{1\infty} = v_{2\infty}$. В таком случае для $X_в$ будем иметь более простое выражение

$$X_в = p_{1\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{p_{2\infty}}{p_{1\infty}}\right) dy. \tag{18.79}$$

Учитывая, что при одинаковых скоростях давление на контрольной плоскости $II—II$ должно быть меньше, чем в плоскости $I—I$, так как между ними находится скачок уплотнения, получим.

$$\left(\frac{p_{20}}{p_{10}}\right)_\infty = \frac{p_{2\infty}}{p_{1\infty}} = \sigma < 1. \tag{18.80}$$

Как установлено выше (см. стр. 354), величина σ может быть принята равной

$$\sigma = \frac{166{,}7 M_1^2}{\left(7 - \frac{1}{M_1^2}\right)^{2,5} (1 + 0{,}2 M_1^2)^{3,5}} < 1, \tag{18.81}$$

где число M_1 соответствует скорости потока непосредственно перед скачком.

Очевидно, что для всех струек, не пересекающих скачок уплотнения, $\sigma = 1$.

Вводя σ в выражение (18.79), а также замечая, что

$$\rho_{1\infty} v_{1\infty}\, dy_{1\infty} = \rho_1 v_1\, ds \quad \text{или} \quad dy_{1\infty} = dy = \frac{\rho_1 v_1}{\rho_{1\infty} v_{1\infty}}\, ds,$$

получим

$$X_в = p_{1\infty} \int_0^s \frac{\rho_1 v_1}{\rho_{1\infty} v_{1\infty}} (1 - \sigma)\, ds, \tag{18.82}$$

где интегрирование ведется по длине скачка уплотнения (вне скачка $\sigma = 1$).

Так как на скачке уплотнения $\sigma < 1$, то $X_в > 0$, и с уменьшением σ величина $X_в$ будет возрастать.

На фиг. 15.12 показано изменение величины σ с ростом числа M_1. С помощью выражения (18.81) можно показать, что при $M_1 = 1$ производные $\frac{d\sigma}{dM_1} = 0$ и $\frac{d^2\sigma}{dM_1^2} = 0$, а $\frac{d^3\sigma}{dM_1^3} \neq 0$. В таком случае, разлагая выражение $(1-\sigma)$ в степенной ряд в окрестности точки $M_1=1$, можно получить

$$1-\sigma=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3\sigma}{dM_1^3}(M_1-1)^3+\ \ldots \tag{18.83}$$

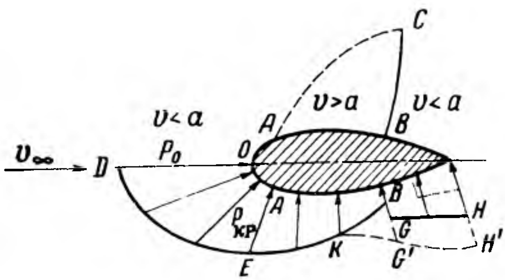
Это означает, что волновое сопротивление $X_в$ будет пропорционально $(M_1-1)^3$. Но разность (M_1-1) можно в первом приближении считать пропорциональной разности $(M_\infty-M_{кр})$, так как обе разности при $M_\infty=M_{кр}$ обращаются в нуль (действительно, при $M_\infty=M_{кр}$ число M_1 перед скачком по определению равно единице). В таком случае для коэффициента волнового сопротивления

$$c_{x\,в}=\frac{X_в}{\frac{\rho_{1\infty}v_{1\infty}^2}{2}b}$$

можно принять

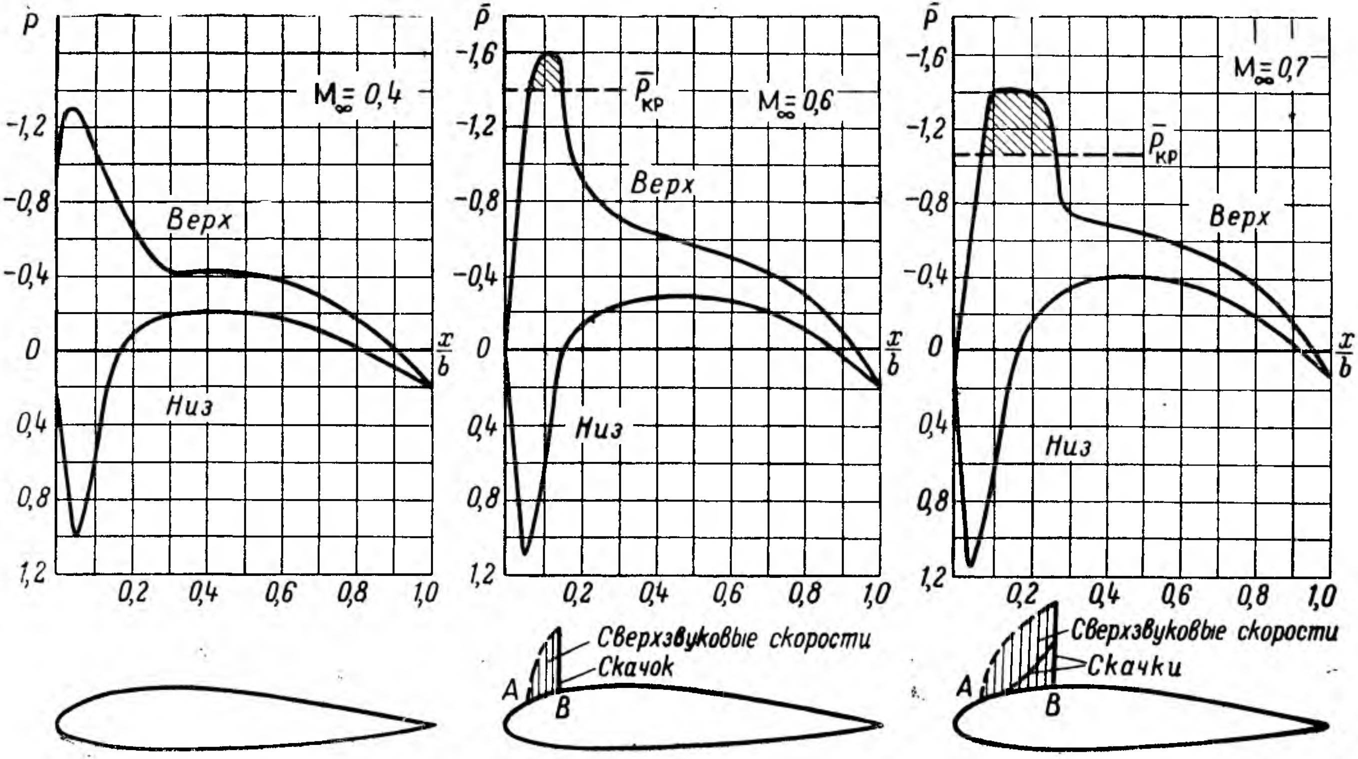
$$c_{x\,в}=A(M_\infty-M_{кр})^3. \tag{18.84}$$

С. А. Христианович и Я. М. Серебрийский в предположении выравнивания давления за крылом также пришли к выражению (18.84), которое по их заключению имеет место для чисел M_∞, не превышающих $M_{кр}+0{,}15$. Величина коэффициента A зависит от типа профиля и распределения давления. В качестве средней величины принимают $A=11$.

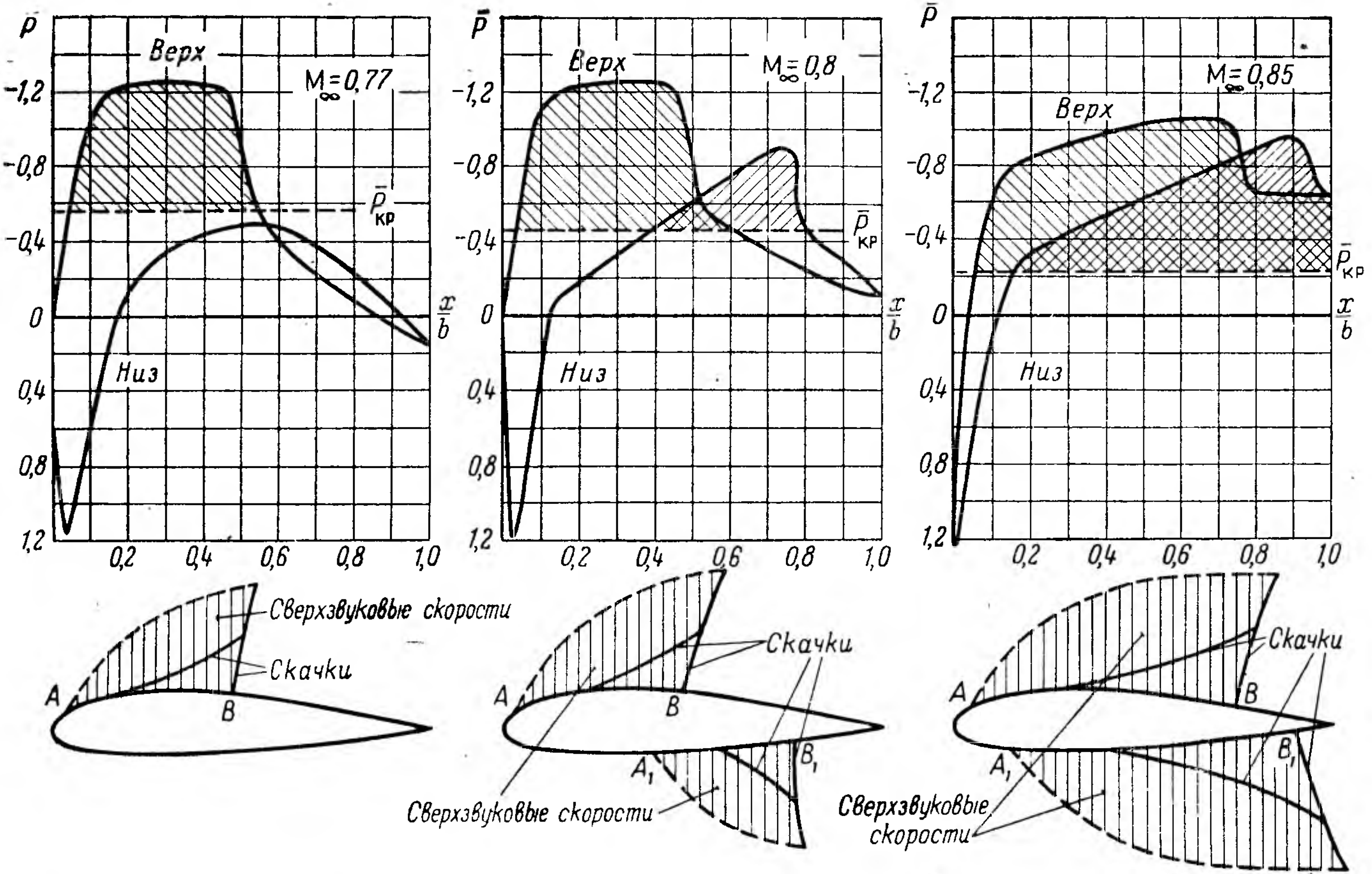


Фиг. 18.9. Распределение давления по профилю в случае $1>M_\infty>M_{кр}$.

На фиг. 18.9 представлен характер распределения давления по симметричному профилю, обтекаемому под нулевым углом атаки при наличии скачка уплотнения на верхней поверхности. Эпюра давления показана на нижней поверхности профиля соответственно верхней картине обтекания. В критической точке O имеет место наибольшее давление p_0. Далее давление по профилю падает и в точке A, где $v=a_{кр}$, достигает критического значения $p=p_{кр}$. В сверхзвуковой зоне AB давление еще более падает и лишь на скачке BC скачкообразно возрастает. В дальнейшем давление продолжает возрастать, а течение сжимаемой жидкости к концу профиля замедляется. Между тем, если бы торможение сверхзвукового потока происходило безударно, т. е. без скачка уплотнения, то при тех же скоростях мы имели бы в кормовой части профиля бóльшие давления, изменяющиеся по линии $KG'H'$ (вместо GH). Таким образом, при наличии скачка уплотнения давление в кормовой части



$\bar{p}$
$M_\infty = 0,4$
Верх
Низ
$\frac{x}{b}$
$M_\infty = 0,6$
$\bar{p}_{кр}$
Сверхзвуковые скорости
Скачок
A
B
$M_\infty = 0,7$
Скачки
-1,6
-1,2
-0,8
-0,4
0
0,4
0,8
1,2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0



Фиг. 18. 10. Распределение давления по поверхности профиля при различных числах M_∞ и некотором постоянном угле атаки.

профиля понижено по сравнению с безударным обтеканием, что и приводит к появлению дополнительного лобового сопротивления, называемого волновым.

§ 7. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОФИЛЯ В ЗАКРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

На фиг. 18.10 показано примерное изменение картины распределения давления на поверхности профиля при различных числах M_∞ и при постоянном угле атаки [9].

При $M_\infty=0{,}4$ местная скорость около профиля нигде не доходит до значения скорости, равной местной скорости звука. Скачок уплотнения в данном случае, естественно, отсутствует.

При $M_\infty=0{,}6$ в некоторой точке A верхней поверхности профиля местная скорость достигает величины местной скорости звука, и давление становится критическим. Точка A обычно располагается недалеко от передней кромки профиля.

За точкой A скорость на некотором расстоянии продолжает нарастать. Образуется небольшой сверхзвуковой участок между точками A и B. Давление на этом участке соответственно падает. В точке B сверхзвуковая скорость скачком переходит в дозвуковую, а давление скачкообразно возрастает — образуется скачок, замыкающий сверхзвуковой участок.

При $M_\infty=0{,}7$ и 0,77 имеем картину, аналогичную предыдущей, но только с более расширенной зоной сверхзвуковых скоростей на верхней поверхности профиля, приближающейся все ближе и ближе к задней кромке профиля.

При $M_\infty=0{,}8$ сверхзвуковая зона A_1B_1 образуется уже и на нижней поверхности профиля, где давление становится также меньше критического.

При $M_\infty=0{,}85$ сверхзвуковые зоны, существующие на обеих сторонах профиля, расширяются, захватывая почти всю поверхность профиля.

Приведенные эпюры распределения давлений наглядно показывают, что с ростом числа M_∞ зоны разрежения на задней части профиля увеличиваются, что приводит к значительному росту сопротивления.

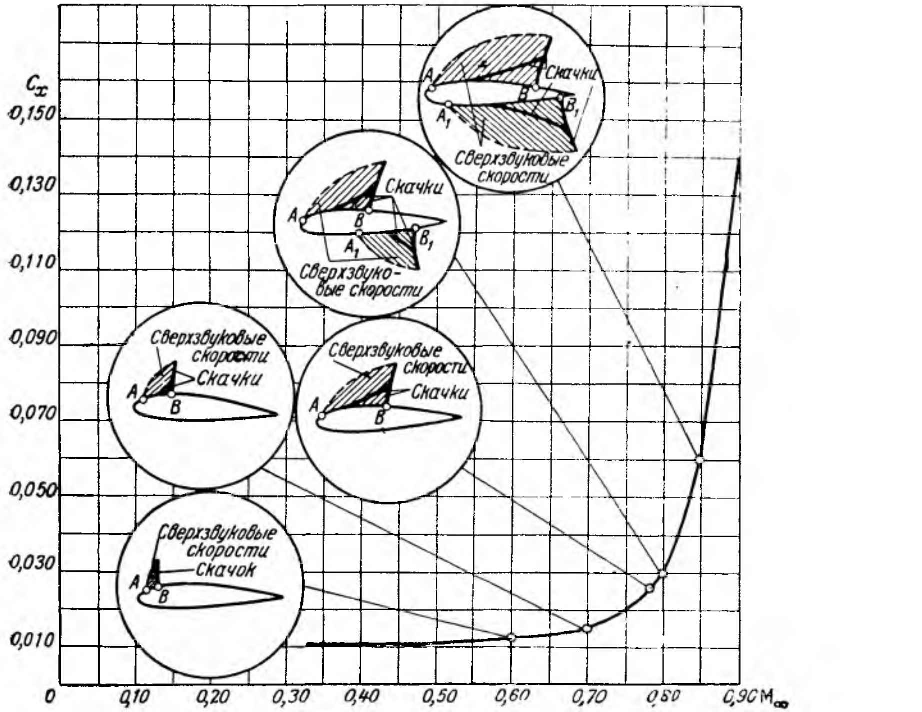
На фиг. 18.11 приведена зависимость коэффициента сопротивления профиля c_x от числа M_∞, причем возрастание коэффициента сопротивления сопоставлено со спектрами обтекания профиля при различных числах M_∞.

Фиг. 18.11 хорошо иллюстрирует связь между развитием скачков уплотнения на профиле крыла и возрастанием коэффициента сопротивления профиля. С ростом числа M_∞ скачки уплотнения перемещаются в направлении к задней кромке и одновременно становятся все протяженнее и мощнее; c_x профиля быстро возрастает.

Образование сверхзвуковых зон и замыкающих их скачков уплотнения с ростом числа M_∞ вызывает не только значительное изменение коэффициента c_x профиля, но и коэффициента подъемной силы c_y.

На фиг. 18. 12 приведена примерная зависимость коэффициента c_y от числа M_∞.

Сначала c_y растет примерно по закону (18. 12), затем при приближении к критическому значению числа M_∞ быстрота роста убывает и c_y, перейдя через максимум, начинает уменьшаться.



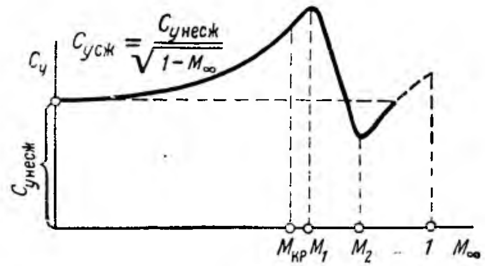
Фиг. 18. 11. Схематическое изображение влияния местных скачков уплотнения на коэффициент сопротивления профиля.

Это можно объяснить тем (см. фиг. 18. 10), что возрастание числа M_∞ приводит к быстрому развитию сверхзвуковой зоны значительного разрежения и на нижней стороне профиля, которое в основном и приводит к резкому падению коэффициента подъемной силы профиля на режиме $M_1 < M_\infty < M_2$.

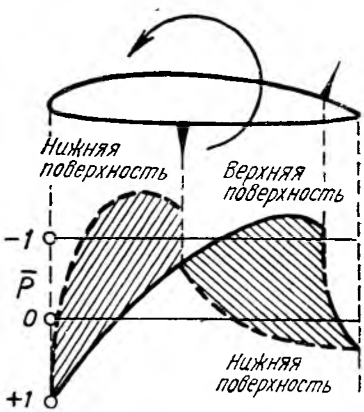
Однако это падение не является далее постоянным, а как показывает опыт, при некотором числе $M_2 > M_1$ снова сменяется возрастанием, истинная причина которого еще недостаточно выяснена.

Значительное перераспределение давления на поверхности профиля с ростом числа M_∞ при $M_\infty > M_{кр}$, естественно, сказывается и на коэффициенте момента.

На фиг. 18.13 приведена одна из эпюр распределения давления при $M_{кр} < M_\infty < 1$. Интересно отметить, что при таком распределении давления будет возникать пикирую-



Фиг. 18.12. Характер зависимости коэффициента подъемной силы профиля от числа M_∞ полета при некотором постоянном угле атаки.



Фиг. 18.13. Характер распределения давления на профиле при появлении пикирующего момента ($M_{кр} < M_\infty < 1$).

щий момент, который может достигать больших значений, в связи с чем появляется необходимость применения на самолете специальных устройств для его компенсации.

§ 8. ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ НА ВЕЛИЧИНУ ИНДУКТИВНОЙ СКОРОСТИ КРЫЛА

При изменении скорости воздушного потока, набегающего на тело, поле скоростей вокруг него изменяется с числом М, а следовательно, изменяются и индуктивные скорости крыла. Влияние сжимаемости на величину индуктивной скорости было исследовано Л. А. Симоновым и С. А. Христиановичем [61]. Ими установлено, что сжимаемость вносит существенное изменение в формулу Био—Савара.

Рассмотрим, как изменяется под влиянием сжимаемости воздуха поле скоростей, вызываемое вихревой нитью. Обратимся к основному уравнению газовой динамики, которое для пространственного случая имеет вид

$$(a^2 - v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} + (a^2 - v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y} + (a^2 - v_z^2)\frac{\partial v_z}{\partial z} - v_x v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) -$$

$$- v_x v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) - v_y v_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) = 0. \qquad (18.25)$$

Компоненты вихря, предполагаемые известными, определяются уравнениями

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right); \qquad (18.86)$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0. \qquad (18.87)$$

Скорость звука a связана со скоростью v в данной точке потока соотношением

$$\frac{v^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{a^2_{\text{кр}}(k+1)}{2(k-1)}. \tag{18.88}$$

Уравнения (18.85) и (18.86) представляют собой нелинейную систему уравнений.

Как показали Л. А. Симонов и С. А. Христианович, решение задачи определения поля скоростей по данной системе вихрей при наличии сжимаемости воздуха можно упростить для случая, относящегося к исследованию крыла (или винта) в силу следующих соображений. В этом случае поле скоростей определяется потоком, набегающим на крыло со скоростью V (скорость потока на бесконечности), а также добавочными скоростями, вызываемыми присутствием крыла и представляющими собой малые величины (за исключением небольших областей в непосредственной близости от крыла). Вихревую пелену будем считать простирающейся неограниченно, так что влиянием местных зон у поверхности крыла, где имеются незначительные возмущения, будем пренебрегать.

Положим $v_x = V+v'_x$ и будем считать, что v'_x, v_y, v_z — малые величины. В таком случае система уравнений (18.85) и (18.86) может быть преобразована в следующую:

$$(1-\text{M}^2)\frac{\partial v'_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0; \tag{18.89}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2\omega_x,\quad \frac{\partial v'_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=2\omega_y,\quad \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v'_x}{\partial y}=2\omega_z, \tag{18.90}$$

где $\text{M}=\frac{V}{a_\infty}$, a_∞ — скорость звука, соответствующая скорости V потока.

Как известно, систему уравнений (18.89) и (18.90) можно с помощью преобразования

$$v'_x=\frac{\bar{v}_x}{\sqrt{1-\text{M}^2}},\quad x'=\frac{x}{\sqrt{1-\text{M}^2}} \tag{18.91}$$

привести к системе уравнений, отвечающих случаю несжимаемой жидкости, именно к системе

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x'}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0; \tag{18.92}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2\omega_x,\quad \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x'}=2\omega_y\sqrt{1-\text{M}^2},\quad \frac{\partial v_y}{\partial x'}-\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}=2\omega_z\sqrt{1-\text{M}^2}. \tag{18.93}$$

Таким образом, задача сведена к определению поля скоростей по заданной системе вихрей в несжимаемой жидкости. Этот случай рассмотрен в гл. V, § 7. Следует указать, что вместо рассмотренного преобразования можно было бы воспользоваться другим, совершенно ему эквивалентным

$$x'=x,\quad y'=y\sqrt{1-\text{M}^2},\quad z'=z\sqrt{1-\text{M}^2}. \tag{18.94}$$

Как было показано в гл. V, § 7, решение системы уравнений (18.92) и (18.93) имеет вид

$$\bar{v}_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right),\quad v_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x'}\right),\quad v_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x'}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \tag{18.95}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\tau'} \frac{\omega_x(\xi'\sqrt{1-M^2}, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x'-\xi')^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\, d\xi'\, d\eta\, d\zeta;\\
a_y &= \frac{\sqrt{1-M^2}}{\pi}\int\limits_{\tau'} \frac{\omega_y(\xi'\sqrt{1-M^2}, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x'-\xi')^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\, d\xi'\, d\eta\, d\zeta;\\
a_z &= \frac{\sqrt{1-M^2}}{\pi}\int\limits_{\tau'} \frac{\omega_z(\xi'\sqrt{1-M^2}, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x'-\xi')^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\, d\xi'\, d\eta\, d\zeta.
\end{aligned}\right\} \qquad (18.96)$$

Интегрирование ведется по области τ', соответствующей в пространстве $x, y\ z$ области τ, заполненной вихрями.

Перейдем к рассмотрению вихревой линии с напряжением $\Gamma=2\omega\sigma$. В таком случае

$$\omega_x = \omega\cos(\omega, x) = \omega\frac{d\xi}{ds},\quad \omega_y = \omega\frac{d\eta}{ds},\quad \omega_z = \omega\frac{d\zeta}{ds}.$$

Принимая во внимание, что $d\tau = d\xi\, d\eta\, d\zeta = \sigma\, ds$, находим

$$\omega_x d\xi'\, d\eta d\zeta = \omega d\tau\frac{d\xi'}{d\xi}\frac{d\xi}{ds} = \omega\sigma d\xi'.$$

Кроме того,

$$\omega_y d\xi'\, d\eta d\zeta = \omega d\tau\frac{d\xi'}{d\xi}\frac{d\eta}{ds} = \frac{\omega\sigma d\eta}{\sqrt{1-M^2}},$$

$$\omega_z d\xi'\, d\eta d\zeta = \frac{\omega\sigma d\zeta}{\sqrt{1-M^2}}.$$

В таком случае формулы (18.96) примут следующий вид:

$$a_x = \frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_{L'}\frac{d\xi'}{r'},\quad a_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_{L'}\frac{d\eta}{r'},\quad a_z = \frac{\Gamma}{2\pi}\int\limits_{L'}\frac{d\zeta}{r'}, \qquad (18.97)$$

где $r' = \sqrt{(x'-\xi')^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. Интегрирование проводится по оси вихревой линии в пространстве x', y, z.

Из формул (18.96) и (18.97), выражающих закон Био—Савара, следует, что для того, чтобы при учете сжимаемости воздуха найти скорость, индуцированную вихревой линией в какой-нибудь точке пространства (x, y, z), следует растянуть вихревую линию, не изменяя ее напряжения, в направлении потока на бесконечности в $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ раз и определить, пользуясь законом Био — Савара, скорость, вызванную этой вихревой линией в точке $\left(\frac{x}{\sqrt{1-M^2}}, y, z\right)$; затем надо увеличить полученную добавочную составляющую скорости в направлении набегающего потока в $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ раз.

Обращаясь к вихревой схеме крыла конечного размаха, вспомним, что сбегающая с крыла вихревая пелена представляет систему полубесконечных прямолинейных вихрей. Для определения поля индуцированных скоростей достаточно определить поле скоростей, возбужденное полубесконечным прямолинейным вихрем, и затем проинтегрировать по всем вихрям.

С этой целью воспользуемся обобщенной формулой Био—Савара.

Рассмотрим прямолинейный отрезок вихревой линии, совпадающей по направлению со скоростью на бесконечности. Пусть точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ будут конечными точками этого вихревого отрезка. Скорость v_∞ направлена параллельно оси x. Рассмотрим произвольную точку $P(x, y, z)$. Индуцируемая в ней вихревым отрезком скорость будет лежать в плоскости, перпендикулярной оси вихря.

Добавочные составляющие скорости, параллельные скорости набегающего потока, будут, следовательно, равны нулю. В таком случае скорость v в плоскости, перпендикулярной оси вихря, согласно полученному результату определится следующим образом:

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi h}\left[\sqrt{1-\frac{h^2}{\left[\frac{(x-x_A)}{\sqrt{1-M^2}}\right]^2+h^2}}+\sqrt{1-\frac{h^2}{\left[\frac{x+x_B)}{\sqrt{1-M^2}}\right]^2+h^2}}\right], \tag{18.98}$$

где $h=\sqrt{(y-y_A)^2+(z-z_A)^2}$ — расстояние точки P от вихря. В частном случае для бесконечного полушнура будем иметь

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi h}\left[\sqrt{1-\frac{h^2}{\left[\frac{x-x_A}{\sqrt{1-M^2}}\right]^2+h^2}}+1\right]. \tag{18.99}$$

Для скорости в точке плоскости, перпендикулярной оси полушнура и проходящей через его конец, т. е. при $x=x_A$, получим

$$v=\frac{\Gamma}{4\pi h}.$$

Отсюда заключаем, что для крыла в дозвуковом потоке сжимаемой жидкости индуктивные скорости на несущей линии (и на всей поверхности, проходящей через нее перпендикулярно скорости набегающего потока) будут теми же, что и для крыла в несжимаемой жидкости с тем же распределением циркуляции по размаху. Влияние сжимаемости воздуха сказывается только на изменении характеристик сечений крыла.

§ 9. КРЫЛО КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В ПОТОКЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Как было установлено, влияние сжимаемости воздуха на аэродинамические характеристики профиля крыла в некотором диапазоне чисел M_∞ может оказаться весьма существенным.

Это влияние можно значительно ослабить путем применения специальных форм крыльев в плане — так называемых стреловидных крыльев.

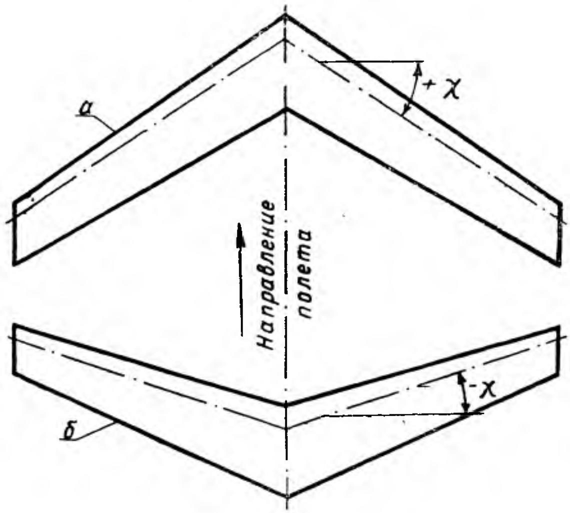
Крылья, ось которых по размаху крыла имеет форму ломаной линии, образующей с поперечной осью z некоторый угол χ, получили название *стреловидных* крыльев (см. фиг. 18. 14). Ось крыла располагают обычно на одной четверти местных хорд (считая от передней кромки) и принимают ее условно за линию положения фокусов крыла.

Угол χ называется *углом стреловидности.*

Эффект влияния стреловидности на аэродинамические характеристики крыла можно объяснить следующим образом.

Стреловидное крыло в первом приближении можно рассматривать как крыло, составленное из двух половин, поставленных косо к набегающему потоку, скорость которого обозначим через v.

Очевидно, что если бы мы имели крыло бесконечного размаха и поток подходил к крылу *перпендикулярно* размаху (см. фиг. 18. 15,*а*), то в этом случае скорость в каждой точке профиля имела бы свое определенное значение, отличающееся от скорости набегающего потока из-за влияния толщины профиля.



Фиг. 18. 14. Стреловидное крыло.
а—прямая стреловидность, *б*—обратная стреловидность.

В зависимости от распределения скорости по профилю на нем установится соответствующая картина распределения давления, которое также будет отличаться от давления в набегающем потоке.

Если бы мы имели то же крыло (см. фиг. 18. 15,*б*), но поток, набегающий на крыло, шел *вдоль* бесконечного размаха крыла, то в этом случае значение скорости около всех точек профиля было бы величиной постоянной и совпадало бы со значением скорости v, так как профили в каждом сечении, перпендикулярном размаху, предполагаются одинаковыми. Что касается распределения давлений, то в силу равенства скоростей будут равны и давления во всех точках такого бесконечного крыла.

Рассмотрим теперь случай (см. фиг. 18. 15,*в*), когда крыло бесконечного размаха наклонено к набегающему потоку v под некоторым углом χ.

Разлагая скорость v на две составляющие: $v\cos\chi$ и $v\sin\chi$, можно на основании рассмотренных выше двух случаев отбросить влияние составляющей скорости $v \sin\chi$ и учитывать только влияние составляющей $v \cos\chi$ [1].

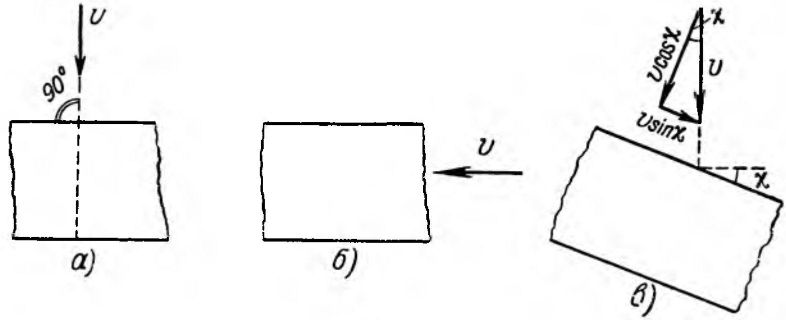
Компонента скорости $v \cos\chi$ обозначается через v_n:

$$v_n = v \cos\chi.$$

Легко видеть, что в этом случае эффективным числом M будет

$$M_n = M \cos\chi. \tag{18.100}$$

Таким образом, мы приходим к важному выводу. Волновой кризис у косо обдуваемого крыла может возникнуть только т)гда,



Фиг. 18.15. Различные случаи обтекания крыла бесконечного размаха.

когда составляющая скорости, перпендикулярная размаху $v \cos\chi$, а не полная скорость v, превысит критическое значение; при этом $M_{n\,кр}$ будет больше $M_{кр}$.

Стреловидное крыло в основном сходно с рассмотренным косо обдуваемым крылом. Поэтому у стреловидного крыла критическое число M обычно бывает больше, чем у нестреловидного крыла с таким же набором профилей, т. е. начало волнового кризиса отодвигается у стреловидного крыла на бо́льшие числа M.

На фиг. 18.16 приведена экспериментальная зависимость коэффициента лобового сопротивления c_x от числа M_∞ для некоторого прямоугольного крыла без стреловидности ($\chi=0$) и для того же крыла со стреловидностью ($\chi=40°$). Как видим, выигрыш от придания крылу стреловидности оказывается значительным и ощутимо сказывается на повышении $M_{кр}$ для всего крыла.

Кроме того, у стреловидных крыльев с ростом угла стреловидности резко падает максимальное значение коэффициента c_x. Это наглядно показано на фиг. 18.17, где приведена экспериментальная зависимость коэффициента c_x от числа M_∞ для четырех стреловидных крыльев с различными углами стреловидности.

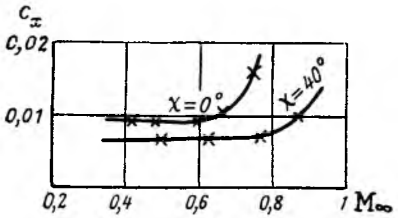
[1] Это строго справедливо только для потенциального течения, так как течение в пограничном слое в некоторой степени зависит от составляющей скорости, параллельной передней кромке.

Таким образом, стреловидные крылья имеют существенные преимущества перед нестреловидными при полетах с большими числами M_∞.

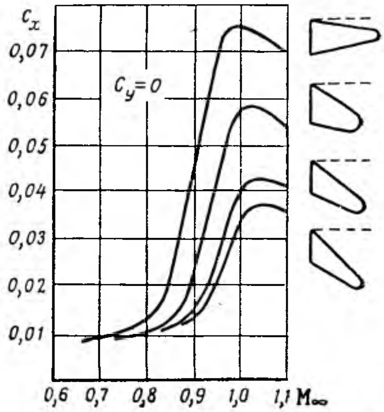
Вопрос об обтекании стреловидных крыльев рассматривался в работах Е. М. Минского, А. А. Дородницына [50], В. В. Струминского, Мультгоппа, Вейсзингера и др.

Обратим внимание на метод расчета аэродинамических характеристик стреловидного крыла на режиме полета, когда $M_\infty < M_{кр}$.

В гл. XI мы уже рассматривали вихревую теорию крыла конечного размаха. В этой теории крыло заменялось расположенной на $^1/_4$ хорды вихревой нитью, переменной по размаху интенсивности $\Gamma(z)$ и системой свободных вихрей интенсивности $\frac{\partial \Gamma(z)}{\partial z} dz$, образующих за крылом плоскую вихревую пелену. Эта теория хорошо



Фиг. 18.16. Зависимость $c_x = f(M_\infty)$ для стреловидного и нестреловидного крыльев.



Фиг. 18.17. Зависимость $c_x = f(M_\infty)$ для крыльев с различной стреловидностью.

согласуется с опытными данными при расчетах крыльев достаточно больших удлинений ($\lambda > 4$) и линией фокусов (линией $^1/_4$ хорд), перпендикулярной направлению невозмущенного потока.

Для крыльев, у которых линия фокусов не перпендикулярна к направлению невозмущенного потока (в частности, для стреловидных крыльев), теория вихревой нити плохо согласуется с опытными данными.

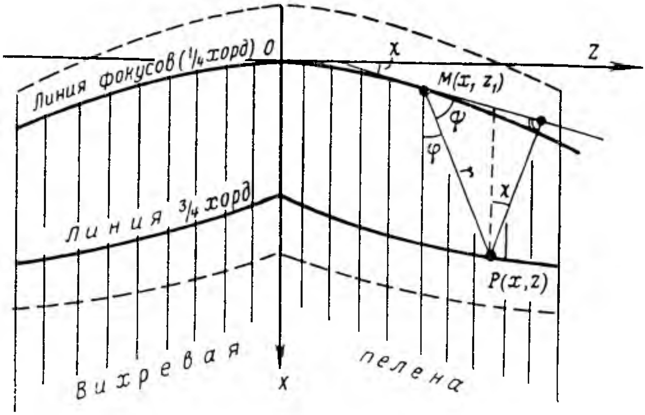
В этом случае для нахождения аэродинамических характеристик следовало бы вводить в рассмотрение вихревую поверхность. Однако вследствие значительных математических трудностей такая теория до сих пор не используется для конкретных практических расчетов.

Рассмотрим один из последних приближенных способов расчета аэродинамических характеристик крыльев [49], у которых линия фокусов в общем случае является криволинейной линией (фиг. 18.18).

Этот метод расчета позволяет достаточно быстро и с достаточной для практики точностью рассчитывать крылья произвольной формы в плане (в том числе и стреловидные).

Выведем основные соотношения, позволяющие определить распределение циркуляции $\Gamma(z)$ по размаху крыла произвольной формы в плане (см. фиг. 18. 18).

Легко видеть, что при не слишком малом удлинении крыло на всем его протяжении (за исключением центральной части) работает в условиях, близких к тем, которые имеют место для скользящего крыла с углом скольжения χ.



Фиг. 18. 18. К выводу соотношения, определяющего распределение циркуляции по размаху крыла произвольной формы в плане.

Для каждого сечения (z) крыла уравнение связи можно написать в следующем общем виде:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} a_0 \cos\chi(z)\, v_\infty b(z)\, [\alpha(z) - \Delta\alpha_i(z)], \tag{18.101}$$

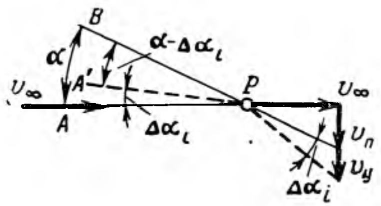
где $\Gamma(z)$ — циркуляция вокруг данного сечения (z); a_0 — величина $\frac{dc_y}{d\alpha}$ для профиля, взятого перпендикулярно к несущей линии; α — угол атаки в данном сечении, измеряемый в плоскости, параллельной плоскости xy, от направления нулевой подъемной силы; $b(z)$ — хорда, измеряемая вдоль оси Ox; $\Delta\alpha_i(z)$ — изменение угла атаки, которое вводится в уравнение связи, чтобы учесть влияние конечности размаха и хорды крыла.

Таким образом, считается (фиг. 18. 19), что каждое сечение крыла конечного размаха обтекается так же, как и сечение стреловидного крыла бесконечного размаха при угле атаки, измененном на величину $\Delta\alpha_i(z)$.

При определении $\Delta\alpha_i(z)$ поступают следующим образом. Вводятся два основных положения: 1) крыло заменяется несущим вихревым шнуром интенсивности $\Gamma(z)$, расположенным на $^1/_4$ хорд, и системой свободных вихрей интенсивности $\frac{\partial \Gamma(z)}{\partial z}\,dz$, образующих за крылом плоскую вихревую пелену; 2) приближенный учет конечности размаха и хорды крыла осуществляется путем определения индуктивных скоростей на линии $^3/_4$ хорд крыла.

Остановимся несколько подробнее на этих двух основных положениях.

По теории тонкого профиля имеем $c_y=2\pi\alpha$, где α — угол атаки, измеряемый от направления нулевой подъемной силы (от «первой оси профиля»). Таким образом, коэффициент подъемной силы тонкого профиля определяется местным углом атаки в точке касания первой оси профиля с его средней линией. Для профилей Жуковского эта точка лежит почти точно на $^3/_4$ хорды. Для других применяемых профилей эту точку также можно считать расположенной на $^3/_4$ хорды профиля.



Фиг. 18. 19. К выводу соотношения, определяющего распределение циркуляции по размаху крыла произвольной формы в плане.

Если написать для этой точки профиля условие равенства нулю нормальной составляющей результирующей скорости и заменить систему распределенных по средней линии профиля вихрей одним несущим вихрем на расстоянии c от этой точки, то мы найдем (используя формулу Био—Савара и уравнение связи), что $c=\frac{b}{2}$. Это дает возможность заменить тонкое крыло (и с достаточной точностью другие применяемые крылья) несущим вихревым шнуром, расположенным на линии $^1/_4$ хорд, и сходящей с него вихревой пеленой.

Мы уже замечали, что благодаря конечности размаха крыла поток несколько искажается. Каждое сечение (z) крыла конечного размаха обтекается так же, как сечение (z) стреловидного крыла с углом стреловидности $\chi(z)$ бесконечного размаха, но при измененном угле атаки.

Считается (см. фиг. 18. 19), что этот действительный угол атаки $(A'PB)$ в сечении z отличается от угла атаки (APB) в том же сечении при плоскопараллельном потоке на разность между углами скоса потока в точке $^3/_4$ хорды в обоих случаях:

$$\Delta\alpha_i(z)=\frac{v_y-v_n}{v_\infty}, \qquad (18.102)$$

где v_y — скорость, индуцированная параллельно оси Oy, всей вихревой системой крыла в точке, лежащей на $^3/_4$ хорды в рассматриваемом сечении (z);

v_n — скорость, индуцированная параллельно оси Oy скользящим крылом бесконечного размаха в рассматриваемом сечении (z) в точке, лежащей на $^3/_4$ хорды:

$$v_n = \frac{\Gamma(z)}{2\pi \frac{b}{2} \cos\chi(z)}. \tag{18.103}$$

Эту разность $\Delta\alpha_i$ называют *углом индуктивного скоса потока*[1].

Если в уравнение связи (18.101) подставить значение $\Delta\alpha_i$, используя уравнения (18.102) и (18.103), и для удобства перейти к безразмерным величинам

$$\frac{\Gamma}{l v_\infty} = G, \quad \frac{l}{b(z)} = \Lambda, \quad \frac{2z}{l} = \bar{z}, \quad \frac{2z_1}{l} = \bar{z}_1, \quad \frac{v_y}{v_\infty} = \Delta\alpha, \tag{18.104}$$

то уравнение связи (18.101) приобретает следующий вид:

$$\frac{\Lambda}{\pi\cos\chi}\left[\frac{2\pi}{a_0} - 1\right] G = \alpha - \Delta\alpha. \tag{18.105}$$

Это уравнение является основным уравнением для расчета распределения циркуляции по размаху крыла.

Здесь все величины являются функциями z, т. е. зависят от положения рассматриваемого сечения.

Угол $\Delta\alpha$, являющийся по существу безразмерной индуктивной скоростью, индуцируемой всей вихревой системой в точке $P(x, z)$, определяется равенством:

$$\Delta\alpha = \frac{v_y}{v_\infty} = \frac{v_{y1} + v_{y2}}{v_\infty},$$

где v_{y1} — индуцируемая скорость в точке $P(x, z)$ от всего присоединенного вихря;

v_{y2} — индуцируемая скорость в точке $P(x, z)$ от всей вихревой пелены, отходящей от крыла.

Найдем величину скорости v_{y1}.

Рассмотрим на присоединенном вихре произвольную точку $M(x_1, z_1)$. Выделим в окрестности этой точки $M(x_1, z_1)$ элементарный участок присоединенного вихря длиной dL с интенсивностью $\Gamma(z_1)$.

В таком случае выражение индуцируемой скорости v_{y1} для точки $P(x, z)$ [используя формулу (5.19)] будет иметь вид:

$$v_{y1} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma(z_1)}{4\pi r^2} \sin\psi \, dL,$$

[1] В отличие от аналогичного угла скоса потока (см. гл. XI), где угол скоса вычислялся на самой несущей линии, здесь угол индуктивного скоса потока вычисляется на расстоянии $^1/_2$ хорды позади несущей линии.

где (см. фиг. 18. 18)

$$r^2=(x-x_1)^2+(z-z_1)^2,$$

$$\sin\psi=\frac{x-x_1-(z-z_1)\operatorname{tg}\chi}{r}\cos\chi,$$

$x_1=x_1(z_1)$ — уравнение несущей линии;

$x=x(z)$ — уравнение линии $\frac{3}{4}$ хорд, на которой вычисляется индуцируемая скорость (v_y).

Если учесть, что $dL=\frac{dz_1}{\cos\chi}$, то получим

$$v_{y1}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\Gamma(z_1)}{r^2}\frac{\sin\psi}{\cos\chi}dz_1. \tag{18.106}$$

Найдем величину скорости v_{y2}.

Для этого необходимо воспользоваться формулой для определения в точке $P(x, z)$ скорости, индуцируемой полубесконечным вихрем интенсивности $\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1}dz_1$, сбегающим с крыла в точке $M(x_1, z_1)$.

В таком случае выражение индуцируемой скорости v_{y2} для точки $P(x, y)$ [используя формулу (5. 20)] будет иметь вид

$$v_{y2}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1}dz_1\frac{1}{z_1-z}(1+\cos\varphi), \tag{18.106'}$$

где $\cos\varphi=\frac{x-x_1}{r}$.

Следовательно, подставляя полученные выражения (18. 106 и 18. 106') соответственно для v_{y1} и v_{y2} в формулу $\Delta\alpha=\frac{v_{y1}+v_{y2}}{v_\infty}$, получим

$$\Delta\alpha(z)=\frac{1}{4\pi v_\infty}\left[\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\Gamma(z_1)}{r^2}\frac{\sin\psi}{\cos\chi}dz_1+\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\Gamma'(z_1)}{z-z_1}(1+\cos\varphi)\,dz_1\right]. \tag{18.107}$$

Представим второй интеграл в виде:

$$\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma'(z_1)}{z-z_1}[1+\cos\varphi]\,dz_1 = 2\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma'(z_1)}{z-z_1}dz_1 - \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma'(z_1)}{z-z_1}(1-\cos\varphi)\,dz_1. \tag{18.108}$$

Интегрируя по частям, найдем

$$-\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\Gamma'(z_1)}{z-z_1}[1-\cos\varphi]\,dz_1 = \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Gamma(z_1)\left[\frac{1-\cos\varphi}{(z-z_1)^2} - \frac{x-x_1-(z-z_1)\operatorname{tg}\chi}{r^3}\right]dz_1.$$

Подставляя полученное выражение второго интеграла в уравнения (18. 107) и переходя к безразмерным величинам, будем иметь

$$\Delta\alpha(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi}\left[2\int\limits_{-1}^{+1} \frac{G'(\bar{z}_1)}{\bar{z}-\bar{z}_1}d\bar{z}_1 + \int\limits_{-1}^{+1} G(\bar{z}_1)K(\bar{z};\ \bar{z}_1)\,d\bar{z}_1\right], \tag{18.109}$$

где

$$K(\bar{z};\ \bar{z}_1) = \frac{1-\cos\varphi(\bar{z};\ \bar{z}_1)}{(\bar{z}-\bar{z}_1)^2}. \tag{18.110}$$

Следовательно, уравнение связи (18. 105) для крыльев произвольной формы в плане приобретает окончательно следующий вид:

$$\frac{\lambda(\bar{z})}{\pi\cos\chi(\bar{z})}\left[\frac{2\pi}{a_0(\bar{z})} - 1\right]G(\bar{z}) = \alpha(\bar{z}) - \frac{1}{2\pi}\left[2\int\limits_{-1}^{+1} \frac{G'(\bar{z}_1)}{\bar{z}-\bar{z}_1}dz_1 + \int\limits_{-1}^{+1} G(\bar{z}_1)K(\bar{z},\ \bar{z}_1)\,d\bar{z}_1\right]. \tag{18.111}$$

Интегро-дифференциальное уравнение (18. 111) является основным уравнением, позволяющим определить циркуляцию $G(\bar{z})$ для любого сечения крыла, а следовательно, и по всему размаху крыла [1].

Зная распределение циркуляции, легко определить аэродинамические характеристики крыла.

В самом деле, получим формулу для определения c_y сечения.

[1] Для решения уравнения (18.111) можно воспользоваться, например, методом полиномов [49].

Используя уравнение связи

$$\Gamma(\bar{z}) = \frac{1}{2} c_y(\bar{z})\, b(\bar{z})\, v_\infty$$

и уравнение

$$\Gamma(\bar{z}) = l v_\infty G(\bar{z}),$$

будем иметь

$$c_y(\bar{z}) = \frac{2l}{b(\bar{z})} G(\bar{z}).$$

Для определения величины коэффициента подъемной силы всего крыла воспользуемся теоремой Жуковского:

$$dY = \rho \Gamma(\bar{z})\, v_\infty d\bar{z},$$

или, переходя к безразмерным величинам:

$$dY = \rho l v_\infty G(\bar{z})\, v_\infty \frac{l}{2} d\bar{z} = \frac{\rho v_\infty^2}{2} l^2 G(\bar{z})\, d\bar{z}.$$

Следовательно, подъемная сила всего крыла Y и коэффициент подъемной силы всего крыла ($c_{y\,\text{кр}}$) будут соответственно равны:

$$Y = \frac{\rho v_\infty^2}{2} l^2 \int_{-1}^{+1} G(\bar{z})\, d\bar{z}, \qquad c_{y\,\text{кр}} = \frac{l^2}{S} \int_{-1}^{+1} G(\bar{z})\, dz$$

или

$$c_{y\,\text{кр}} = \lambda \int_{-1}^{+1} G(\bar{z})\, d\bar{z},$$

где $\lambda = \frac{l^2}{S}$ — удлинение стреловидного крыла.

Таким образом,

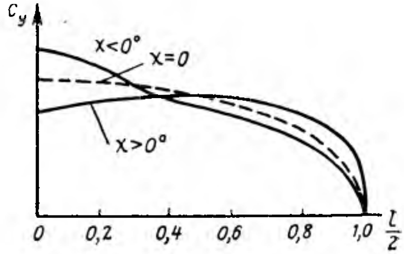
$$\frac{c_y(\bar{z})}{c_{y\,\text{кр}}} = \frac{2l}{b(\bar{z})} \frac{G(\bar{z})}{\lambda \int_{-1}^{+1} G(\bar{z})\, d\bar{z}}.$$

На фиг. 18.20 в качестве примера представлен вид кривых, характеризующих распределение коэффициента подъемной силы сечений вдоль размаха стреловидного крыла при различных углах стреловидности. Эта фигура наглядно показывает, что стреловидность крыла существенно влияет на характер распределения подъемной силы вдоль размаха крыла. Наличие стреловидности приводит к перераспределению подъемной силы по сравнению с нестреловидным ($\chi = 0$) крылом.

Обратим внимание на то, что для дозвуковых скоростей полета, не слишком близких к скорости звука, может быть учтено при расчете крыла и влияние сжимаемости воздуха.

Влияние сжимаемости учитывается при помощи линеаризованной теории по методу, предложенному Л. А. Симоновым и С. А. Христиановичем. Согласно этому методу (стр. 430) для определения индуктивных скоростей в сжимаемой жидкости необходимо «растянуть пространство» вдоль оси Ox в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз и в этом деформированном пространстве вычислять индуктивные скорости, так же как и для несжимаемой жидкости.

Таким образом, крылу с действительным углом стреловидности χ и удлинением λ при числе M_∞ соответствует крыло с углом стреловидности $\chi_M = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\chi}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\right)$ и удлинением $\lambda_M = \lambda\sqrt{1-M_\infty^2}$.



Фиг. 18.20. Характер распределения коэффициентов подъемной силы сечений вдоль размаха стреловидного крыла при различных углах стреловидности.

В заключение следует отметить, что основное уравнение (18.111) для расчета аэродинамических характеристик крыла получено в предположении, что сечения крыла ($\bar{z}$) обтекаются плоскопараллельным потоком. Однако на больших углах атаки (а также у крыльев малых удлинений) возникают интенсивные поперечные токи, которые сильно изменяют характер обтекания сечений крыла.

Поэтому изложенный здесь метод расчета, естественно, не может быть использован для определения аэродинамических характеристик крыльев, работающих на больших (около критических) углах атаки, и крыльев малых удлинений.

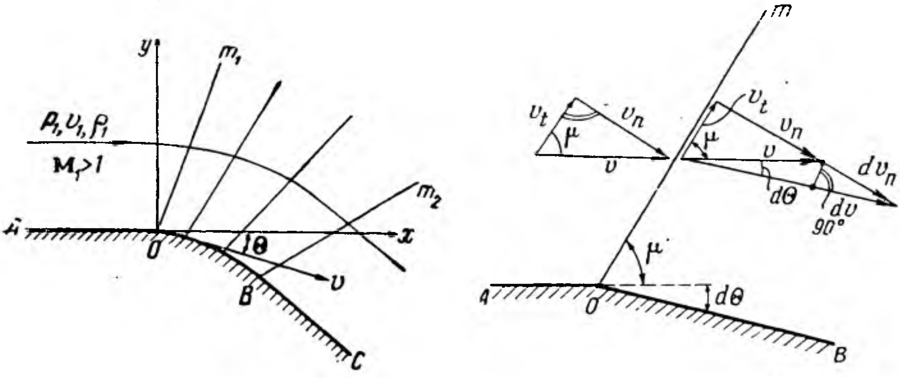
С методами расчета крыльев малых удлинений читатель может ознакомиться в работе Г. Ф. Бураго [76].

Глава XIX

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОФИЛЯ И КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

§ 1. ПОНЯТИЕ О ЛИНЕАРИЗОВАННОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ РАЗРЕЖЕНИЯ И СЖАТИЯ ГАЗА ВДОЛЬ ТВЕРДОЙ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим плоское сверхзвуковое потенциальное установившееся течение газа вдоль твердой границы, составленной из двух прямолинейных участков AO и BC и соединяющего их криволинейного участка OB (фиг. 19. 1 и фиг. 19. 2). Случай, представленный на фиг. 19. 1, соответствует течению разрежения, а на фиг. 19. 2 — течению сжатия. В обоих случаях кривая OB и полупрямые AO



Фиг. 19. 1. Плоское сверхзвуковое течение газа вдоль выпуклой стенки.

и BC имеют в точках O и B общие касательные. Невозмущенный сверхзвуковой поток газа, текущий вдоль границы AO, обладает скоростью v_1, давлением p_1 и плотностью ρ_1.

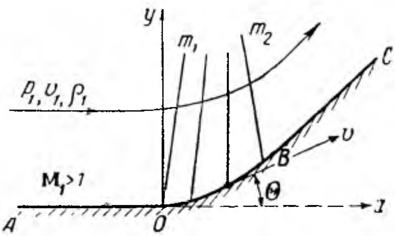
Прежде чем приступить к изучению этих двух течений с помощью метода линеаризации, обратимся к рассмотрению следующего случая.

Допустим, что равномерный сверхзвуковой поток газа, текущий вдоль твердой стенки AO со скоростью v, отклоняется на некоторый малый угол $d\theta$, причем отклонение потока вызвано отклонением стенки AO за точкой O на угол $d\theta$ (см. фиг. 19. 1).

Точка O будет являться источником малых возмущений в рассматриваемом сверхзвуковом потоке. Из точки O проведем характеристику Om. Левее этой характеристики поток будет невозмущен и во всех точках будет иметь одну и ту же скорость v. Следовательно, характеристика Om (как и другие характеристики этого семейства) — прямая линия, совпадающая с линией возмущения.

Пересекая линию возмущений Om, поток несколько изменит свое направление, отклоняясь от первоначального направления на угол $d\theta$, и будет двигаться параллельно стенке OB с несколько измененными скоростью $v+dv$ и давлением $p+dp$.

Найдем зависимость между величиной приращения скорости dv и изменением направления течения $d\theta$.



Фиг. 19.2. Плоское сверхзвуковое течение газа вдоль вогнутой стенки.

С этой целью воспользуемся уравнениями неразрывности и количества движения.

Используя уравнение неразрывности, будем иметь

$$\rho v_n = (\rho + d\rho)(v_n + dv_n) \qquad (19.1)$$

или, оставляя только малые первого порядка,

$$v_n d\rho + \rho dv_n = 0.$$

Применяя уравнение количества движения в проекции на направление, параллельное линии возмущения, получим

$$\rho v_n v_{t1} = (\rho + d\rho)(v_n + dv_n) v_{t2},$$

откуда, учитывая уравнение (19.1),

$$v_{t1} = v_{t2} = v_t, \qquad (19.2)$$

т. е. тангенциальные составляющие скорости с обеих сторон линии возмущения равны. Из уравнения количества движения в проекции на направление, перпендикулярное к линии возмущения, можно получить

$$v_n dv_n + \frac{dp}{\rho} = 0. \qquad (19.2')$$

Приращение абсолютной величины скорости v (см. фиг. 19.1) можно написать в виде

$$dv = dv_n \cos[90° - (\mu + d\theta)],$$

откуда с точностью до малых первого порядка

$$dv = dv_n \sin\mu. \qquad (19.3)$$

Из фиг. (19.1) следует также простое соотношение

$$v \sin(d\theta) = dv_n \sin[90^\circ - (\mu + d\theta)],$$

откуда с той же точностью можно получить

$$d\theta = \frac{dv_n \cos\mu}{v}. \tag{19.3'}$$

Используя последние два уравнения, находим соотношение между приращением скорости dv и изменением направления течения $d\theta$ в следующей дифференциальной форме:

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{tg}\mu\, d\theta.$$

Замечая, что угол возмущения μ связан с числом M соотношением

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}},$$

преобразуем последнее дифференциальное уравнение к следующему окончательному виду:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}\, d\theta. \tag{19.4}$$

Сравнение формулы (19.4) с формулой (16.26) показывает, что дифференциальное соотношение между приращением скорости и изменением направления течения одно и то же как для точек, лежащих на характеристиках, так и вдоль линий тока (в частности, вдоль твердой стенки). Но, как было показано в гл. XVI, уравнение (19.4) интегрируется в конечном виде, и интегральной кривой является эпициклоида. Следовательно, эпициклоиды (характеристики в плоскости v_x, v_y) можно рассматривать как годограф скорости для сверхзвукового течения около выпуклой или вогнутой криволинейной поверхности (в последнем случае образование скачков уплотнения не учитывается).

Применяя формулу (19.4) для отклонения потока от первоначального направления к линии возмущения, расположенной за рассмотренной выше (возникновение этой линии обусловлено наличием второй угловой точки на обтекаемой стенке), можно определить скорость и другие параметры газа за этой линией возмущения. Продолжая этот процесс далее и переходя к пределу, придем к картине течения около некоторой криволинейной стенки, изображенной на фиг. 19.1.

Обратимся теперь к линеаризации уравнений газовой динамики, считая все возмущения, возникающие в газовом потоке, малыми. Как известно, разлагая какую-либо функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots,$$

можно в первом приближении считать, что приращение функции при удалении от точки x_0 происходит по линейному закону

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0), \tag{19.5}$$

т. е. ограничиться лишь одним членом разложения $f(x)-f(x_0)$ в ряд.

Используем формулу (19.5) для разложения в ряд скорости v газа по переменному θ (см. фиг. 19.1 и 19.2). Тогда получим

$$v(\theta)=v(0)+\left(\frac{dv}{d\theta}\right)_{\theta=0}\theta=v_1+\left(\frac{dv}{d\theta}\right)_{\theta=0}\theta. \tag{19.6}$$

На основании уравнения (19.4) имеем

$$\frac{dv}{d\theta}=\frac{v_1}{\sqrt{M_1^2-1}}. \tag{19.7}$$

Так как при $\theta=0$ скорость $v=v_1$, то

$$\left(\frac{dv}{d\theta}\right)_{\theta=0}=\frac{v_1}{\sqrt{M_1^2-1}}.$$

Подставив найденное выражение $\left(\frac{dv}{d\theta}\right)_{\theta=0}$ в формулу (19.6), будем иметь

$$v=v_1+\frac{v_1}{\sqrt{M_1^2-1}}\theta. \tag{19.8}$$

Связь между давлением и скоростью с точностью до малых первого порядка выражается линеаризованным уравнением Бернулли, подобным уравнению (18.6):

$$p-p_1=-\rho_1 v_1(v-v_1). \tag{19.9}$$

С помощью выражения (19.8) линеаризованное уравнение Бернулли (19.9) примет вид

$$p=p_1-\frac{\rho_1 v_1^2}{\sqrt{M_1^2-1}}\theta.$$

Вводя в эту формулу обозначение для скоростного напора, соответствующего скорости v_1,

$$q_1=\frac{\rho_1 v_1^2}{2},$$

получим

$$p=p_1-\frac{2q_1}{\sqrt{M_1^2-1}}\theta. \tag{19.10}$$

Угол θ отсчитывается в направлении от вектора v к положительному направлению оси x. Если это направление соответствует повороту вектора скорости v против часовой стрелки, то углу θ приписывается знак плюс, в противном случае — знак минус. При этом из формулы (19. 10) следует, что при обтекании выпуклой стенки сверхзвуковым потоком давление падает, а при обтекании вогнутой стенки — возрастает.

Заметим, что формула (19. 10) является формулой первого приближения. Как будет показано ниже, формулу второго приближения можно легко получить, если в разложении вида (19. 5) ограничиться не одним членом, а двумя (см. § 4 настоящей главы).

Обратимся к исследованию величины наклона линий возмущения к оси x в рассматриваемых двух течениях разрежения и сжатия (вдоль стенок). В течении разрежения наклон линий возмущения уменьшается и становится в точке B наименьшим (см. фиг. 19. 1); в течении сжатия, наоборот, наклон линий возмущения возрастает и в точке B становится наибольшим (см. фиг. 19. 2).

Обозначим угол, образуемый вектором скорости с направлением характеристики, через μ (угол возмущений). Известно, что

$$\sin\mu=\frac{a}{v}=\frac{1}{\mathrm{M}} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\mu=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{M}^2-1}}$$

и, кроме того, угол наклона характеристик удовлетворяет соотношению

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}(\theta+\mu). \tag{19.11}$$

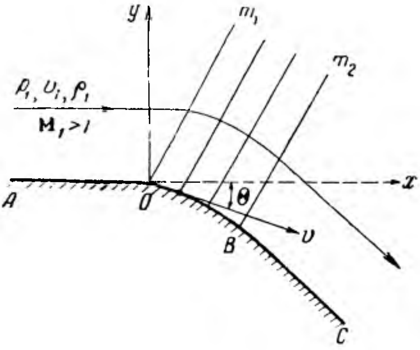
При сравнительно небольших числах M можно принять

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\mu_1, \tag{19.12}$$

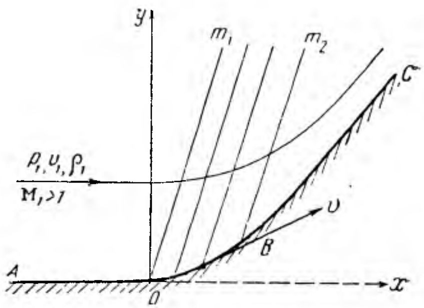
т. е. считать наклон линий возмущений во всем потоке неизменным и равным наклону этих линий в невозмущенном потоке (расчеты показывают, что сетку линий возмущений можно считать составленной из параллельных прямых до числа $\mathrm{M}_1=3$).

Таким образом, мы пришли к схеме течений, изображенных на фиг. 19. 3 и 19. 4, где линии тока представляют собой эквидистантные кривые и вдоль каждой линии возмущения скорость и другие параметры потока постоянны.

Выясним, что будет происходить в газовом потоке, если постепенно приближать точку B стенки BC к точке O, не изменяя наклона стенки BC к оси x. Для этого обратимся вначале к фиг. 19. 4. При переходе через каждую линию возмущения первого семейства, исходящую из любой точки стенки OB, имеет место бесконечно малое повышение давления. Если точка B будет приближаться к точке O, то будет происходить более интенсивный рост давления на единицу длины стенки OB, и когда точки B и O совпадут, давление будет скачкообразно возрастать на линии Om_1. В этом случае линия возмущения Om_1 станет линией уплотнения (фиг. 19.6). Следовательно, при совпадении точек O и B получим линеаризованное направление линии косого скачка уплотнения и линеаризованное обтекание тупого угла, меньшего 180°.

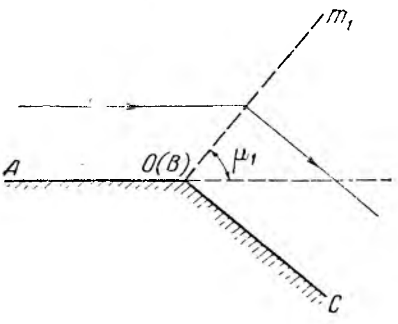


Фиг. 19.3. Линеаризованное течение разрежения.

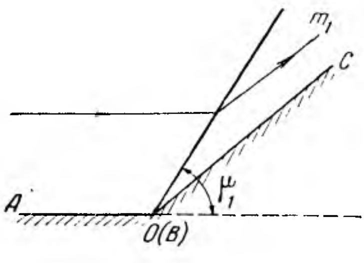


Фиг. 19.4. Линеаризованное течение сжатия.

В случае обтекания выпуклой стенки (фиг. 19.3) с помощью тех же рассуждений придем к выводу, что на линии возмущения Om_1 давление будет резко понижаться, и эта линия будет играть роль линии скачкообразного разрежения (фиг. 19.5). Таким



Фиг. 19.5. Линеаризованная линия разрежения.



Фиг. 19.6. Линеаризованная линия уплотнения.

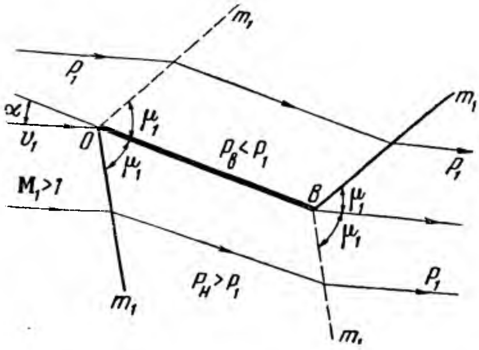
образом, в линеаризованной теории обтекания тупого угла, большего 180°, в точке B угла возникает плоская поверхность разрыва — скачок разрежения. Как известно, при точном решении задачи об обтекании выпуклого тупого угла из точки B угла исходит пучок элементарных волн разрежения.

В дальнейшем будем изображать линию уплотнения сплошной линией, а линию разрежения — пунктиром.

§ 2. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ ОБТЕКАНИЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Рассмотренная схема линеаризованного течения разрежения и сжатия вдоль стенки позволяет довольно просто построить схему обтекания потоком газа плоской пластинки. Допустим, что пластинка OB поставлена под углом атаки α к потоку, набегающему на нее со скоростью $v_1 > a_1$.

В точке O передней кромки пластинки набегающий поток разделяется на два потока. Наверху около точки O имеем обтекание тупого угла, большего 180°, что вызывает образование линии прерывного разрежения. Внизу около точки O имеем обтекание тупого угла, меньшего 180°, т. е. вниз из точки O исходит линия уплотнения. После этих линий верхний и нижний потоки текут параллельно пластинке OB. В точке B задней кромки пластинки происходит смыкание обоих потоков. Это смыкание происходит так, что верхний и нижний потоки приобретают одинаковое давление и одно и то же направление. Для этого достаточно верхнему и нижнему потокам повернуться около точки B на угол α против часовой стрелки. Тогда из уравнения Бернулли следует, что они приобретут одно и то же давление, равное давлению p_1 невозмущенного потока. Стало быть, смыкание потоков в точке B будет сопровождаться возникновением у точки B в верхнем потоке линии уплотнения, а в нижнем потоке — линии прерывного разрежения, после которых поток течет параллельно невозмущенному потоку.



Фиг. 19.7. К линеаризованной теории обтекания плоской пластинки в сверхзвуковом потоке.

Перейдем к вычислению аэродинамических сил, действующих на пластинку. Давления $p_в$ и $p_н$, действующие на пластинку, постоянны по ее длине и нормальны к ее поверхности, следовательно, на пластинку будет действовать полная аэродинамическая сила R, нормальная к ее поверхности и приложенная к середине пластинки (фиг. 19.8), т. е. центр давления плоской пластинки определяется соотношением

$$x_д = 0{,}5b.$$

Вычислим полную аэродинамическую силу, приходящуюся на единицу длины размаха пластинки:

$$R = (p_н - p_в)\, b.$$

Обращаясь к формуле (19. 10), получим

$$p_{н}=p_1+2q_1\alpha\operatorname{tg}\mu_1,$$
$$p_{в}=p_1-2q_1\alpha\operatorname{tg}\mu_1,$$

и, следовательно, величина

$$R=4q_1\alpha\operatorname{tg}\mu_1 b. \qquad (19.13)$$

Введем коэффициент силы R

$$c_R=\frac{R}{q_1b}=\frac{4\,q_1\alpha\operatorname{tg}\mu_1 b}{q_1b}$$

или

$$c_R=4\,\alpha\operatorname{tg}\mu_1.$$

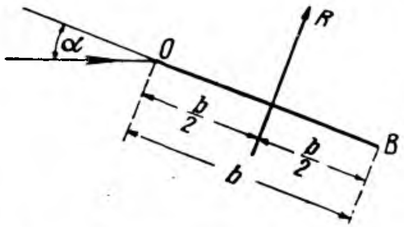
Так как

$$\operatorname{tg}\mu_1=\frac{1}{\sqrt{M_1^2-1}},$$

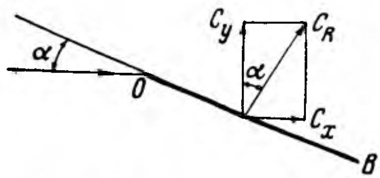
то окончательно находим выражение для коэффициента силы R:

$$c_R=\frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2-1}}. \qquad (19.14)$$

Чтобы определить коэффициент лобового сопротивления c_x и подъемной силы c_y пластинки, разложим коэффициент c_R на два



Фиг. 19. 8. Направление и точка приложения аэродинамической силы R, действующей на плоскую пластинку в сверхзвуковом потоке.



Фиг. 19. 9. Составляющие коэффициента c_R.

направления (фиг. 19. 9). Так как угол атаки α мал, то $\cos\alpha\approx 1$ и $\sin\alpha\approx\alpha$. В таком случае формулы для коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления пластинки в сверхзвуковом потоке примут вид

$$c_y=\frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2-1}}, \qquad (19.15)$$

$$c_x=\frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_1^2-1}}. \qquad (19.16)$$

Отсюда можно заключить, что величина аэродинамического качества

$$K=\frac{c_y}{c_x}$$

для пластинки в сверхзвуковом потоке будет равна

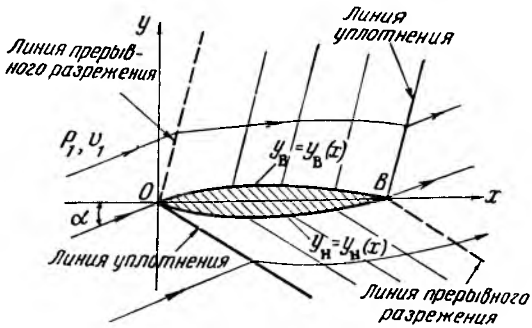
$$K=\frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, качество пластинки зависит только от угла атаки α (α во всех формулах выражен в радианах).

Для коэффициента c_m пластинки имеем $c_m=-\frac{c_y}{2}=-\frac{2\alpha}{\sqrt{M^2-1}}$; фокус же пластинки совпадает с центром давления, так как $c_{m0}=0$.

§ 3. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

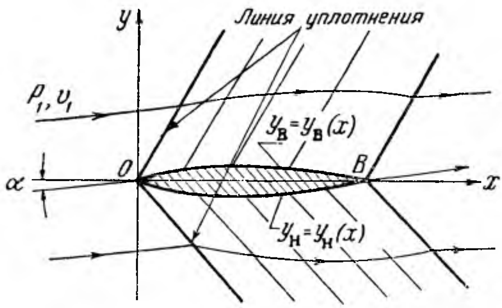
На основании изложенного в предыдущих параграфах легко построить линеаризованную картину обтекания тонкого профиля в плоском сверхзвуковом потоке. На фиг. 19.10 изображен случай,



Фиг. 19.10. Линеаризованная картина обтекания тонкого профиля сверхзвуковым потоком (первый случай).

когда из точки O исходят как линия прерывного разрежения, так и линия уплотнения. На фиг. 19.11 из точки O исходят две линии уплотнения (вверх и вниз). Реализация того или иного случая при заданной форме профиля зависит, очевидно, от угла атаки α. Как было показано в предыдущем параграфе, в точке B происходит смыкание обоих потоков, в результате которого верхний и нижний потоки приобретают одинаковое давление p_1 и одинаковое направление, совпадающее с направлением невозмущенного потока.

Направим ось x по хорде профиля, приняв переднюю кромку за начало координат, а ось y направим вверх нормально хорде (см. фиг. 19. 12).



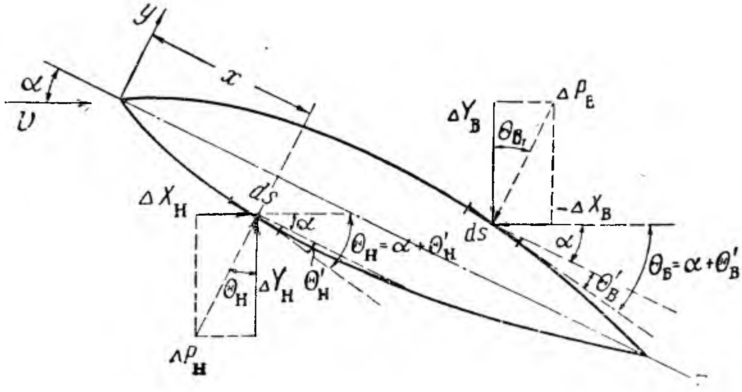
Фиг. 19. 11. Линеаризованная картина обтекания тонкого профиля сверхзвуковым потоком (второй случай).

Пусть верхний контур представляет собой кривую, уравнение которой напишем в виде

$$y_в = y_в(x). \tag{19. 17}$$

Аналогично для нижнего контура

$$y_н = y_н(x). \tag{19. 18}$$



Фиг. 19. 12. К расчету аэродинамических сил, действующих на профиль в сверхзвуковом потоке.

Найдем величину давления в точках верхнего и нижнего контуров профиля. Представим углы $\theta_в$ и $\theta_н$, образуемые элементом поверхности с направлением скорости потока, в следующем виде:

$$\theta_в = \alpha + \theta'_в; \quad \theta_н = \alpha + \theta'_н.$$

Знаки углов $\theta_в$ и $\theta_н$, $\theta'_в$ и $\theta'_н$ выбираются так же, как и знаки углов атаки крыла.

Давление в любой точке верхнего контура будет определяться с помощью уравнения

$$p_в = p_1 - 2q_1 \operatorname{tg} \mu_1 (\theta'_в + \alpha),$$

где можно принять

$$\theta'_в = -\frac{dy_в}{dx}.$$

В точках нижнего контура

$$p_н = p_1 + 2q_1 \operatorname{tg} \mu_1 (\theta'_н + \alpha),$$

где

$$\theta'_н = \frac{dy_н}{dx}.$$

Подъемная сила Y и сила лобового сопротивления X (по направлению скорости потока v) выразятся следующими формулами:

$$Y = \int_0^{s_н} p_н \cos(\theta'_н + \alpha)\, ds_н - \int_0^{s_в} p_в \cos(\theta'_в + \alpha)\, ds_в; \tag{19. 19}$$

$$X = \int_0^{s_н} p_н \sin(\theta'_н + \alpha)\, ds_н - \int_0^{s_в} p_в \sin(\theta'_в + \alpha)\, ds_в. \tag{19. 20}$$

В этих выражениях $ds_в$ и $ds_н$ — элементы дуг, образующих верхнюю и нижнюю стороны профиля; $s_в$ и $s_н$ — полные длины этих дуг. Чтобы выдержать допущения, связанные с принятием условия линеаризации, положим

$$ds_в = ds_н = dx,$$

где dx — элемент хорды профиля;

$$\cos(\theta'_н + \alpha) = \cos(\theta'_в + \alpha) \approx 1;$$

$$\sin(\theta'_в + \alpha) = \theta'_в + \alpha; \quad \sin(\theta'_н + \alpha) = \theta'_н + \alpha;$$

$$s_в = s_н = b.$$

Для тонкого профиля эти допущения дают хорошую степень точности.

При принятых допущениях выражения (19. 19) и (19. 20) можно заменить приближенными выражениями:

$$Y = \int_0^b (p_н - p_в)\, dx, \tag{19. 21}$$

$$X = \int_0^b p_н (\theta'_н + \alpha)\, dx - \int_0^b p_в (\theta'_в + \alpha)\, dx. \tag{19. 22}$$

Подставляя в уравнение (19. 21) выражения для $p_н$ и $p_в$, полученные ранее, находим

$$Y = 2q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta'_н + \alpha)\, dx + 2q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta'_в + \alpha)\, dx =$$

$$= 4q_1\alpha \operatorname{tg}\mu_1 b + 2q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta'_в + \theta'_н)\, dx.$$

Так как при сделанных выше допущениях можно принять

$$\int_0^b (\theta'_в + \theta'_н)\, dx = \int_0^b \left(-\frac{dy_в}{dx} + \frac{dy_н}{dx}\right) dx = [-y_в + y_н]_0^b = 0,$$

то

$$Y = 4q_1\alpha \operatorname{tg}\mu_1 b$$

и

$$c_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \qquad (19.23)$$

Из формулы (19. 23) следует, что *в первом приближении коэффициент подъемной силы c_y профиля не зависит от формы профиля и выражается так же, как и c_y для плоской пластинки.*

Перейдем к расчету силы лобового сопротивления:

$$X = \int_0^b p_1 (\theta'_н + \alpha)\, dx + 2q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta'_н + \alpha)^2 dx -$$

$$- \int_0^b p_1 (\theta'_в + \alpha)\, dx + 2q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta'_в + \alpha)^2\, dx.$$

Производя преобразования и учитывая, что $\int_0^b \theta'\, dx = 0$, получим

$$X = 4q_1\alpha^2 b \operatorname{tg}\mu_1 + 2q_1 \operatorname{tg}\mu_1 \int_0^b (\theta'^2_в + \theta'^2_н)\, dx.$$

Вводя обозначение

$$B = \frac{1}{b}\int_0^b (\theta'^2_в + \theta'^2_н)\, dx, \qquad (19.24)$$

где величина B зависит только от формы профиля, находим для коэффициента силы лобового (волнового) сопротивления следующее выражение:

$$c_x = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} + \frac{2B}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \qquad (19.25)$$

Анализ этого выражения приводит к важному заключению — *лобовое (волновое) сопротивление тонкого профиля в сверхзвуковом* *потоке состоит из двух частей: из сопротивления, зависящего от угла атаки и равного сопротивлению тонкой пластинки*

$$c_{x1} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} = \frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{4} c_y^2, \tag{19.26}$$

и из сопротивления

$$c_{x2} = \frac{2B}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \tag{19.27}$$

зависящего только от формы профиля и его относительной толщины. Эта часть сопротивления представляет собой минимальное волновое сопротивление данного профиля, получаемого при $c_y = 0$.

Как видим, по лобовому сопротивлению тонкая пластинка является наилучшим теоретическим профилем для сверхзвукового потока. Очевидно, практические профили будут тем лучше по лобовому сопротивлению, чем более они приближаются к этой форме.

§ 4. УТОЧНЕННЫЕ ТЕОРИИ ПРОФИЛЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Выше была рассмотрена теория первого приближения, при которой зависимость между разностью давлений и углом отклонения потока от невозмущенного направления принималась линейной:

$$p - p_1 = \Delta p = \pm \frac{2\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} q = \pm c_1 q\theta,$$

где q и M — скоростной напор и число M для невозмущенного потока. Эта зависимость справедлива для достаточно малых значений угла θ, т. е. для весьма тонких профилей, обтекаемых под малым углом атаки.

Рассмотрим основные положения теории второго приближения.

Используя разложение в ряд Тейлора и ограничиваясь только двумя первыми членами разложения, получим зависимость между разностью давлений Δp и углом θ в следующем виде:

$$p = p_1 + (c_1\theta + c_2\theta^2) q$$

или

$$\Delta p_{н} = (c_1\theta_{н} + c_2\theta_{н}^2) q, \tag{19.28}$$

$$\Delta p_{в} = (-c_1\theta_{в} + c_2\theta_{в}^2) q, \tag{19.29}$$

где попрежнему индексы «н» и «в» относятся соответственно к нижней и верхней поверхностям профиля.

Коэффициенты c_1 и c_2 выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}}, \\ c_2 &= \frac{1{,}2M^4 - 2M^2 + 2}{(M^2 - 1)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{19.30}$$

Для подъемной силы Y, лобового сопротивления X и момента M_z справедливы формулы

$$Y=\int_0^{s_\text{н}}\Delta p_\text{н}\cos\theta_\text{н}\,ds_\text{н}-\int_0^{s_\text{в}}\Delta p_\text{в}\cos\theta_\text{в}\,ds_\text{в},\tag{19.31}$$

$$X=\int_0^{s_\text{н}}\Delta p_\text{н}\sin\theta_\text{н}\,ds_\text{н}-\int_0^{s_\text{в}}\Delta p_\text{в}\sin\theta_\text{в}\,ds_\text{в},\tag{19.32}$$

$$M_z=\int_0^{s_\text{н}}\Delta p_\text{н}\cos\theta'_\text{н}x\,ds_\text{н}-\int_0^{s_\text{в}}\Delta p_\text{в}\cos\theta'_\text{в}x\,ds_\text{в}.\tag{19.33}$$

Интегралы (19.31)—(19.33) можно вычислить, если известны геометрические характеристики профиля.

Подставим значения $p_\text{н}$ (19.28) и $p_\text{в}$ (19.29) в выражение для Y (19.31) и так же, как и ранее, приближенно положим

$$\cos\theta\approx 1,\quad \sin\theta\approx\theta,$$
$$s_\text{н}=s_\text{в}=b.$$

Тогда получим

$$Y=\int_0^b(c_1\theta_\text{н}+c_2\theta_\text{н}^2)\,q\,dx-\int_0^b(-c_1\theta_\text{в}+c_2\theta_\text{н}^2)\,q\,dx.$$

Введя новое переменное $\bar{x}=\dfrac{x}{b}$, $\bar{b}=1$, будем иметь

$$c_y=\int_0^1(c_1\theta_\text{н}+c_2\theta_\text{н}^2)\,d\bar{x}-\int_0^1(-c_1\theta_\text{в}+c_2\theta_\text{в}^2)\,d\bar{x}.\tag{19.34}$$

Подставляя вместо $\theta_\text{н}$ и $\theta_\text{в}$ их значения, выраженные через углы α и θ', получим

$$c_y=\int_0^1[c_1(\alpha+\theta'_\text{н})+c_2(\alpha^2+2\theta'_\text{н}\alpha+\theta'^2_\text{н})]\,d\bar{x}-$$
$$-\int_0^1[-c_1(\alpha+\theta'_\text{в})+c_2(\alpha^2+2\theta'_\text{в}\alpha+\theta'^2_\text{в})]\,d\bar{x}$$

или иначе

$$c_y=\alpha c_1+c_1\int_0^1\theta'_\text{н}\,d\bar{x}+c_2\alpha^2+2c_2\alpha\int_0^1\theta'_\text{н}\,d\bar{x}+c_2\int_0^1\theta'^2_\text{н}\,d\bar{x}+$$
$$+c_1\alpha-c_1\int_0^1\theta'_\text{в}\,dx-c_2\alpha^2-2c_2\alpha\int_0^1\theta'_\text{в}\,d\bar{x}-c_2\int_0^1\theta'^2_\text{в}\,d\bar{x}.$$

Группируя члены, находим

$$c_y=c_1\int_0^1(\theta'_\text{н}-\theta'_\text{в})\,d\bar{x}+c_2\int_0^1(\theta'^2_\text{н}-\theta'^2_\text{в})\,d\bar{x}+$$
$$+\alpha\left[2c_1+2c_2\int_0^1(\theta'_\text{н}-\theta'_\text{в})\,a\bar{x}\right].\tag{19.35}$$

Производя такие же выкладки для величины X, будем иметь

$$c_x = c_1 \int_0^1 (\theta_н'^2 + \theta_в'^2)\, d\bar{x} + c_2 \int_0^1 (\theta_н'^3 - \theta_в'^3)\, d\bar{x} +$$
$$+ \left[2c_1 \int_0^1 (\theta_н' + \theta_в')\, d\bar{x} + 3c_2 \int_0^1 (\theta_н'^2 - \theta_в'^2)\, d\bar{x}\right]\alpha +$$
$$+ \left[2c_1 + 3c_2 \int_0^1 (\theta_н' - \theta_в')\, d\bar{x}\right]\alpha^2. \qquad (19.36)$$

Аналогично можно получить выражение для коэффициента момента [72]:

$$c_m = -\left[c_1 \int_0^1 (\theta_н' + \theta_в')\, \bar{x}\, d\bar{x} + c_2 \int_0^1 (\theta_н'^2 - \theta_в'^2)\, \bar{x}\, d\bar{x}\right] -$$
$$- \left[c_1 + 2c_2 \int_0^1 (\theta_н' - \theta_в')\, \bar{x}\, d\bar{x}\right]\alpha. \qquad (19.37)$$

Произведем следующие упрощения. Примем, что

$$\int_0^1 \theta_н'\, d\bar{x} \approx 0, \quad \int_0^1 \theta_в'\, d\bar{x} \approx 0.$$

Эти интегралы в точности будут равны нулю, если профиль симметричен. Выражения

$$\int_0^1 \theta_н'^3 d\bar{x} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \theta_в'^3 d\bar{x}$$

также являются малыми величинами, которыми можно пренебречь. В таком случае формулы (19.35), (19.36), (19.37) можно переписать в следующем виде[1]:

$$c_y = 2c_1\alpha + Ac_2, \qquad (19.38)$$
$$c_x = Bc_1 + 3Ac_2\alpha + 2c_1\alpha^2, \qquad (19.39)$$
$$c_m = -(c_1 + Dc_2)\,\alpha - (Ec_1 + Fc_2), \qquad (19.40)$$

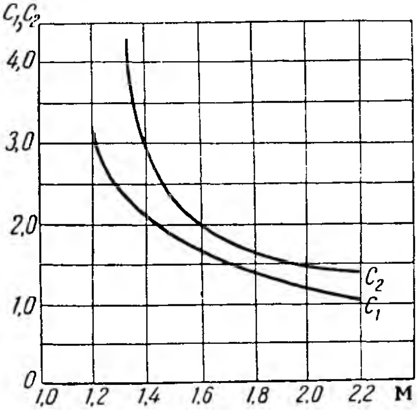
где

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\theta_н'^2 - \theta_в'^2)\, d\bar{x}, \\ B &= \int_0^1 (\theta_н'^2 + \theta_в'^2)\, d\bar{x}, \\ D &= 2\int_0^1 (\theta_н' - \theta_в')\, \bar{x}\, d\bar{x}, \\ E &= \int_0^1 (\theta_н' + \theta_в')\, \bar{x}\, d\bar{x}, \\ F &= \int_0^1 (\theta_н'^2 - \theta_в'^2)\, \bar{x}\, d\bar{x}. \end{aligned}\right\} \qquad (19.41)$$

---

[1] Легко видеть, что если в полученных выражениях коэффициент c_2 положить равным нулю, то получим формулы линеаризованной теории.

Как вытекает из полученных формул, влияние числа М на аэродинамические характеристики профиля учитывается лишь коэффициентами c_1 и c_2. Зависимость этих коэффициентов от числа М, рассчитанная по формулам (19. 30), изображена на фиг. 19. 13. Влияние же формы профиля целиком определяется значениями параметров *A, B, D, E, F*. Эти параметры являются, таким образом, геометрическими параметрами профиля и равны нулю для пластинки.



Фиг. 19. 13. Зависимость коэффициентов c_1 и c_2 от числа М.

Из пяти параметров три — *A, E, F* — учитывают несимметричность профиля (они равны нулю для симметричного профиля).

Параметры *B* и *D* учитывают толщину профиля, причем $B>0$, а $D<0$.

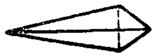
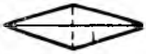
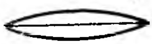
Исследованиями, проведенными в Московском авиационном институте им. С. Орджоникидзе А. А. Лебедевым, установлена следующая зависимость аэродинамических характеристик профиля в сверхзвуковом потоке от его конструктивных параметров:

$$\left.\begin{aligned} c_y &= 2c_1(\alpha-\alpha_0), \\ \alpha_0 &= k_1\bar{c}\bar{f}\frac{c_2}{c_1}, \\ c_x &= k_1\left(\frac{\bar{c}^2}{2}+2\bar{f}^2\right)c_1+\left(\alpha-\frac{3}{2}\alpha_0\right)^2 2c_1, \\ \bar{x}_F &= \frac{1}{2}\left(1-k_2\bar{c}\frac{c_2}{c_1}\right), \\ c_{m0} &= (-\bar{x}_F k_1 2\bar{c}\bar{f}+k_3\bar{c}\bar{f})c_2-k_2c_1\bar{f}, \end{aligned}\right\} \qquad (19.42)$$

где α_0 — угол атаки профиля при $c_y=0$; $\bar{c}$ — относительная толщина профиля; $\bar{f}$ — относительная вогнутость профиля; x_F — координата фокуса профиля; k_1, k_2, k_3 — некоторые численные коэффициенты, зависящие от формы профиля.

Значения этих коэффициентов для ряда профилей приведены в табл. 19. 1.

Таблица 19.1

Профиль		k_1	k_2	k_3
Линейный ($\bar{x}_в=\bar{x}_н=\bar{x}_c$)		$\frac{1}{\bar{x}_c(1-\bar{x}_c)}$	1	$\frac{2}{1-\bar{x}_c}$
Линейный ромбовидный ($\bar{x}_c=0{,}5$)		4	1	4
Профиль К. Э. Циолковского		$\frac{9}{2}$	1	6
Образованный двумя синусоидами		$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi^2}{2}$
Образованный двумя дугами окружностей		$\frac{16}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$

Из формул (19.42), в частности, следует что $c_{x\,\min}$ пропорционален квадратам толщины и вогнутости профиля.

Из приведенной таблицы следует, что наименьшим волновым сопротивлением обладает профиль в виде ромба ($k_1=4$), для которого

$$c_{x\,\min}=2\bar{c}^2c_1=\frac{4\bar{c}^2}{\sqrt{M^2-1}}. \qquad (19.42')$$

Следует отметить, что клиновидная форма профилей как наивыгоднейшая для сверхзвуковых скоростей впервые была указана К. Э. Циолковским.

Рассмотренная выше теория профиля в сверхзвуковом потоке является теорией второго приближения.

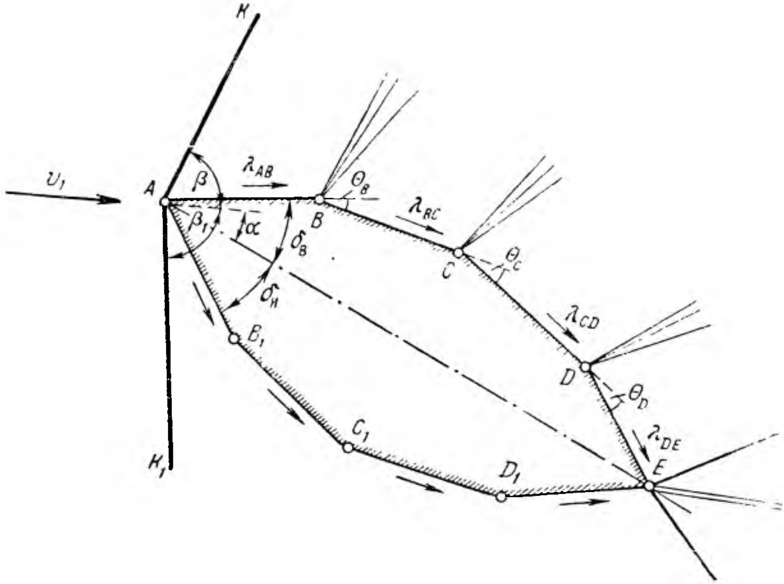
К числу более точных теорий принадлежит теория профиля в сверхзвуковом потоке, разработанная в СССР А. Е. Доновым.

А. Е. Донов получает формулы для аэродинамических коэффициентов (c_x и c_y) с учетом четвертой степени углов θ.

В связи с тем, что результаты А. Е. Донова не выражают в явном виде зависимости аэродинамических характеристик профиля от его геометрических параметров, они здесь не приводятся [63].

§ 5. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЕЙ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ОТРЕЗКОВ, СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Разобранные в предыдущих главах теория косых скачков уплотнения и теория обтекания выпуклого тупого угла позволяют рассчитать обтекание сверхзвуковым потоком газа любых профилей, контур которых составлен из прямолинейных отрезков.



Фиг. 19.14. Схема обтекания сверхзвуковым потоком профиля, составленного из прямолинейных отрезков (первый случай).

Допустим, что сверхзвуковой поток газа обтекает под некоторым углом атаки α произвольный профиль, составленный из прямолинейных отрезков (см. фиг. 19.14). Как и ранее, введем следующие обозначения: v_1 — скорость набегающего на профиль невозмущенного сверхзвукового потока газа; p_1 — давление в этом потоке; a_1 — скорость звука в набегающем потоке; $M_1 = \frac{v_1}{a_1}$ — число M набегающего потока. Установим вначале характер обтекания потоком передней кромки профиля A.

Если рассматриваемый профиль установлен в потоке газа так, что угол между направлением скорости v_1 и прямолинейными участками профиля AB и AB_1 меньше 180°, то при обтекании верхней поверхности профиля в окрестности точки A имеет место течение, аналогичное обтеканию клина с углом раствора $\delta_в - \alpha$. При обтекании же нижней поверхности профиля течение в окрестности точки A аналогично обтеканию клина с углом раствора $\delta_н + \alpha$.

Отсюда следует, что если углы раствора этих клиньев меньше предельного угла, то при обтекании передней кромки A профиля образуются два косых скачка уплотнения AK и AK_1. Пройдя через плоскости этих скачков, поток газа изменит свое первоначальное направление и будет двигаться параллельно стенкам профиля AB и AB_1.

Основываясь на теории косых скачков уплотнения, можно определить все газодинамические параметры газа, текущего вдоль стенок AB и AB_1.

В качестве примера укажем путь определения параметров газа, текущего вдоль стенки AB. Зная число M_1 набегающего потока и угол $\delta_в - \alpha$ поворота потока на скачке AK, легко найти угол β, образованный плоскостью косого скачка AK с первоначальным направлением потока v_1. Для этой цели можно использовать график зависимости угла β от угла раствора клина (см. фиг. 17. 3).

Далее для определения параметров газа за плоскостью скачка AK воспользуемся результатами (17. 6), (17. 7) и (17. 8), полученными в § 2 гл. XVII. Например, для определения давления p_{AB} можно воспользоваться формулой (17. 6)

$$\frac{p_{AB}}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2\beta - \frac{k-1}{k+1},$$

где p_{AB} — искомое давление вдоль стенки AB.

Скорость газового потока, текущего вдоль стенки AB, нетрудно определить графически, используя для этой цели ударную поляру (см. фиг. 17. 8).

Совершенно аналогично можно рассчитать параметры газа за косым скачком AK_1, т. е. вдоль стенки AB_1.

Из фиг. 19. 14 видно, что, пройдя косые скачки, поток газа будет последовательно обтекать ряд выпуклых тупых углов: ABC, BCD, CDE — на верхней поверхности и AB_1C_1, $B_1C_1D_1$, C_1D_1E — на нижней поверхности. При обтекании этих углов поток газа меняет направление соответственно на углы θ_B, θ_C, θ_D и т. д. Параметры газа вдоль каждого из прямолинейных отрезков BC, CD и т. д. также не трудно рассчитать, используя формулы для обтекания выпуклого тупого угла (гл. XVI, § 7). Для практических расчетов удобно пользоваться табл. 16. 1, приведенной на стр. 382. Ход расчета можно рекомендовать следующий.

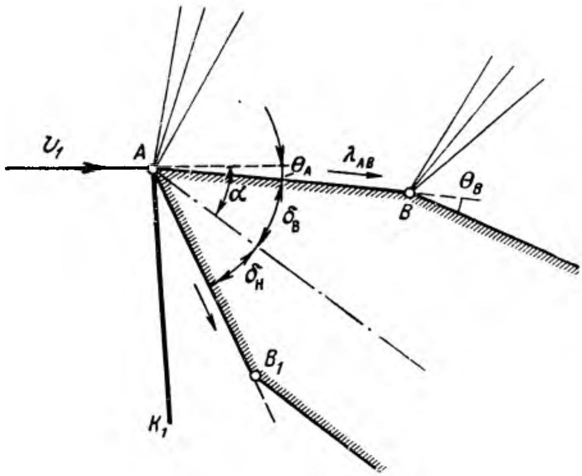
По определенной выше скорости v_{AB} определяем величину числа M_{AB} потока, текущего вдоль стенки AB. Далее по табл. 16. 1 отыскиваем фиктивный угол поворота потока θ_{*AB}, соответствующий значению числа M_{AB} (θ_{*AB} — угол, на который должен повернуться поток, текущий со скоростью звука, чтобы достичь заданного значения числа $M = M_{AB}$). Суммарный угол поворота звукового потока при обтекании угла ABC будет, очевидно, равен

$$\theta_{*BC} = \theta_{*AB} + \theta_B.$$

Для значения θ_{*BC} из табл. 16. 1 можно найти параметры газа, текущего вдоль стенки BC, отнесенные к параметрам торможения

$$M_{BC}, \ \frac{p_{BC}}{p_0}, \ \frac{T_{BC}}{T_0}.$$

Определив параметры торможения p_0 и T_0, по выведенным выше формулам (14. 22) найдем искомые параметры p_{BC} и T_{BC}. Аналогично можно определить параметры газа, текущего вдоль стенок CD, DE и т. д.



Фиг. 19. 15. Схема обтекания сверхзвуковым потоком профиля, составленного из прямолинейных отрезков (второй случай).

Что касается задней кромки профиля E, то от нее в соответствии с фиг. 19. 14 отойдут два косых скачка уплотнения. За этими скачками поток, сбегающий с верхней и нижней сторон профиля, вновь приобретет первоначальное направление, давление становится равным давлению невозмущенного потока p_1, но скорости потока непосредственно за скачками будут различными, скачкообразно изменяясь на вихревой поверхности раздела, условно показанной на фиг. 19. 14 двумя близкими линиями, исходящими из точки E.

Рассмотренная схема расчета обтекания профиля, составленного из прямолинейных отрезков, дает возможность достаточно точно определить давление вдоль каждого из прямолинейных участков профиля, а следовательно, подсчитать и силовое воздействие на профиль сверхзвукового потока. Приведенная схема расчета принципиально не изменится, если ее применить к профилю, изображенному на фиг. 19. 15. Особенность расчета в этом случае будет состоять только в том, что при определении параметров газа вдоль стенки AB нужно пользоваться формулами для обтекания выпуклого тупого угла, поворачивающего поток на угол θ_A.

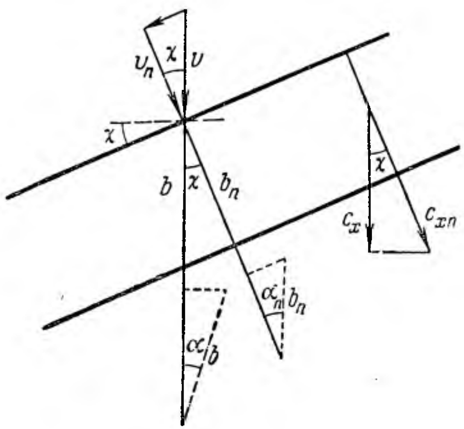
В заключение следует подчеркнуть, что изложенная схема расчета применима лишь при таких углах атаки α, при которых углы раствора клиньев у передней кромки профиля меньше предельного угла для заданного числа M_1 набегающего потока, так как при этом перед профилем образуется скачок уплотнения с криволинейным фронтом.

Расчет обтекания профиля рассматриваемой формы значительно осложняется также и в том случае, когда прямолинейная характеристика, выходящая, например, из точки B профиля, встречает фронт косого скачка уплотнения и, «отразившись» от него, снова попадает на профиль.

§ 6. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА БЕСКОНЕЧНО ДЛИННУЮ ПЛОСКУЮ ПЛАСТИНКУ ПРИ ЕЕ СКОЛЬЖЕНИИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим обтекание бесконечно длинной плоской пластинки сверхзвуковым потоком при наличии скольжения (фиг. 19.16).

Обозначим через v скорость потока, набегающего на пластинку. Скорость v можно разложить на две компоненты: v_n — компоненту скорости, перпендикулярную передней кромке, и v_t — компоненту скорости, совпадающую с направлением передней кромки. Угол χ, образованный векторами скорости v и v_n, называется углом скольжения.



Фиг. 19.16. Движение бесконечно длинной плоской пластинки со скольжением.

Таким образом, обтекание пластинки со скольжением ($\chi \neq 0$), отличается от обычного обтекания наличием составляющей скорости вдоль передней кромки v_t.

При определении аэродинамических сил, действующих на пластинку при скольжении, будем предполагать, что на распределение давлений оказывает влияние только компонента нормальной составляющей скорости v_n. Это означает, что обтекание скользящей пластинки можно рассматривать как обтекание пластинки плоскопараллельным потоком со скоростью.

$$v_n = v \cos \chi. \tag{19.43}$$

Число M и скоростной напор, соответствующие компоненте скорости v_n, очевидно, равны

$$M_n = M \cos \chi, \tag{19.44}$$

$$q_n = q \cos^2 \chi. \tag{19.45}$$

Определим угол атаки скользящей пластинки. Угол между скоростью потока v и хордой крыла, лежащей в плоскости, совпадающей с направлением скорости v, обозначим через α. Угол атаки α лежит в плоскости, параллельной потоку. Угол между скоростью v_n и хордой, лежащей в плоскости, перпендикулярной к передней кромке, обозначим через α_n. Угол атаки α_n лежит в плоскости, перпендикулярной к передней кромке. Как видим, для скользящей пластинки характерны два угла атаки α и α_n.

Углы α и α_n связаны между собой простой зависимостью

$$\sin\alpha = \sin\alpha_n \cos\chi.$$

При малых углах атаки можно положить

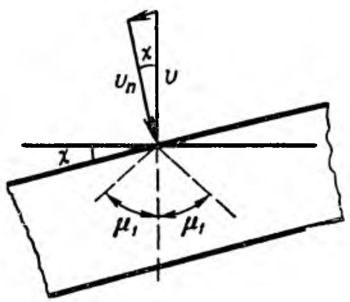
$$\alpha = \alpha_n \cos\chi. \tag{19.46}$$

Заметим, что в зависимости от угла скольжения χ и числа M возможны два случая обтекания скользящей пластинки (крыла) сверхзвуковым потоком.

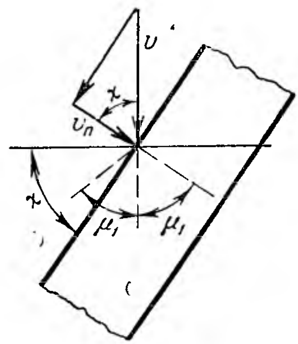
В первом случае (фиг. 19.17)

$$M_n = M\cos\chi > 1,$$

и передняя кромка пластинки встречает невозмущенный сверхзвуковой поток, так как волны возмущения, исходящие из каждой точки передней кромки пластинки, находятся позади передней кромки.



Фиг. 19.17. Сверхзвуковая передняя кромка крыла.



Фиг. 19.18. Дозвуковая передняя кромка крыла.

При этом угол $\chi < 90^\circ - \mu_1$, где угол возмущений, соответствующий скорости потока v, определяется равенством

$$\mu_1 = \arcsin\frac{1}{M}.$$

Передняя кромка в этом случае называется сверхзвуковой.

Во втором случае (фиг. 19.18)

$$M_n = M\cos\chi < 1,$$

и передняя кромка пластинки встречает возмущенный сверхзвуковой поток, так как волны возмущения, исходящие из каждой точки передней кромки пластинки, находятся впереди передней кромки.

В этом случае $\chi > 90^\circ - \mu_1$, где μ_1 — попрежнему угол возмущений, соответствующий скорости потока v.

Передняя кромка в этом случае называется дозвуковой.

Остановимся несколько подробнее на первом случае ($M_n > 1$).

Учитывая, что обтекание скользящей пластинки определяется (в смысле аэродинамического воздействия на нее потока) обтеканием этой пластинки плоскопараллельным потоком, направленным перпендикулярно к передней кромке, можно написать следующее выражение для определения избыточного давления на поверхности пластинки [см. формулу (19.10)]:

$$\frac{\Delta p}{q_n} = \pm \frac{2}{\sqrt{M_n^2 - 1}} \alpha_n = \pm c_1 \alpha_n, \tag{19.47}$$

где значения M_n, q_n и α_n определяются соответственно формулами (19.44), (19.45) и (19.46).

Если в уравнении (19.47) величины q_n и M_n выразить соответственно через q и M невозмущенного потока, то получим

$$\frac{\Delta p}{q} = \pm \frac{2\cos^2\chi}{\sqrt{M^2\cos^2\chi - 1}} \alpha_n. \tag{19.48}$$

Заменяя в уравнении (19.48) угол α_n через α [72] по уравнению (19.46), получим выражение для избыточного давления Δp в следующем виде:

$$\frac{\Delta p}{q} = \pm \frac{2\cos\chi}{\sqrt{M^2\cos^2\chi - 1}} \alpha. \tag{19.49}$$

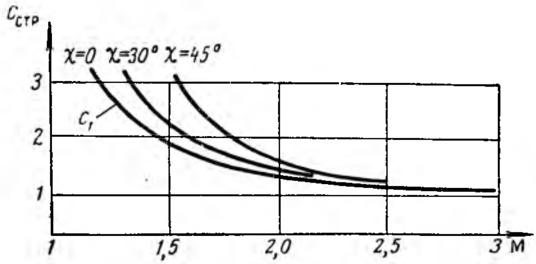
С целью упрощения записи введем обозначение

$$\frac{2\cos\chi}{\sqrt{M^2\cos^2\chi - 1}} = c_{стр}; \tag{19.50}$$

тогда

$$\frac{\Delta p}{q} = \pm c_{стр}\,\alpha. \tag{19.51}$$

На, фиг. 19.19 приведена зависимость коэффициента $c_{стр}$ от числа М для различных углов стреловидности χ.



Фиг. 19.19. Зависимость коэффициента $c_{стр}$ от числа М при различных углах χ стреловидности передней кромки.

Как видим, у пластинки при сохранении угла атаки α стреловидность передней кромки ($\chi > 0$) при одном и том же числе М набегающего потока приводит к увеличению разности давлений $\frac{\Delta p}{q}$, так как график на фиг. 19.19 показывает, что $c_{стр} > c_1$. С увеличением числа М влияние стреловидности передней кромки уменьшается.

Вычислим теперь аэродинамические силы, действующие на бесконечно длинную пластинку при наличии скольжения.

Выражение для коэффициента подъемной силы можно написать в следующем виде, используя для этого уравнения (19.48)—(19.51):

$$c_y = \frac{2\,\Delta p}{q\cdot 1} = \frac{4\cos^2\chi}{\sqrt{M^2\cos^2\chi - 1}}\,\alpha_n \tag{19.52}$$

или

$$c_y = \frac{4\cos\chi}{\sqrt{M^2\cos^2\chi - 1}}\,\alpha = 2c_{\text{стр}}\,\alpha. \tag{19.53}$$

Последнее выражение показывает, что при постоянном угле атаки α с увеличением угла скольжения χ коэффициент c_y несколько возрастает (см. фиг. 19.19).

Найдем коэффициент силы волнового сопротивления скользящей пластинки. Для этого надо найти проекцию силы давления на направление скорости потока v.

Учитывая, что силы давления направлены перпендикулярно к поверхности пластинки, будем иметь (см. фиг. 19.16)

$$c_x = c_{xn}\cos\chi = c_y \sin\alpha_n \cos\chi, \tag{19.54}$$

т. е.

$$c_x = c_y\,\alpha_n \cos\chi \tag{19.55}$$

или

$$c_x = c_y\,\alpha. \tag{19.56}$$

Подставляя в уравнение (19.56) значения c_y соответственно по формулам (19.52) или (19.53), получим

$$c_x = \frac{4\cos^3\chi}{\sqrt{M^2\cos^2\chi - 1}}\,\alpha_n^2, \tag{19.57}$$

т. е.

$$c_x = \frac{4\cos\chi}{\sqrt{M^2\cos^2\chi - 1}}\,\alpha^2 \tag{19.58}$$

или

$$c_x = 2c_{\text{стр}}\,\alpha^2, \tag{19.59}$$

и в соответствии с (19.53),

$$c_x = \frac{\sqrt{M^2\cos^2\chi - 1}}{4\cos\chi}\,c_y^2. \tag{19.60}$$

В заключение этого параграфа заметим, что при $M_n < 1$ сопротивление плоской скользящей пластинки будет равно нулю, так как этот случай соответствует обтеканию крыла плоскопараллельным дозвуковым потоком, когда при отсутствии циркуляции имеет место известный парадокс Эйлера—Даламбера.

§ 7. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КРЫЛЕ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком газа тонкого крыла конечного размаха [74]. Угол атаки, под которым обтекается это крыло, будем полагать малым. Скорость набегающего потока, давление и плотность обозначим соответственно через v_1, p_1 и ρ_1. Оси x_1, y_1, z_1 выберем так, чтобы ось x_1 совпадала с направлением скорости v_1. С целью упрощения поставленной задачи будем полагать возмущения, создаваемые крылом, малыми. Движение газа будем считать установившимся и потенциальным. Массовые силы учитывать не будем.

В силу малости возмущений будем иметь

$$v_{x_1} = v_1 + v_x'; \quad v_{y_1} = v_y'; \quad v_{z_1} = v_z'; \quad \rho = \rho_1 + \rho', \tag{19.61}$$

где v'_x, v'_y, v'_z и ρ' — малые величины, квадратами и произведениями которых можно пренебречь сравнительно с первыми степенями.

Условие потенциальности можно написать в виде

$$v_{x_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1};\ v_{y_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1};\ v_{z_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}.$$

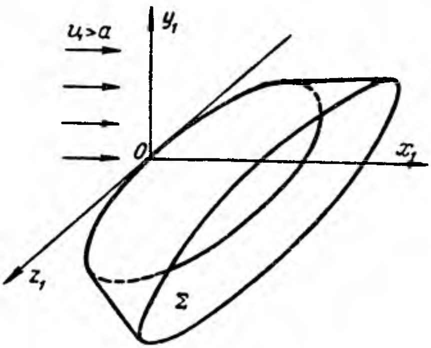
Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial x_1}+\frac{\partial(\rho v_{y_1})}{\partial y_1}+\frac{\partial(\rho v_{z_1})}{\partial z_1}=0$$

может быть преобразовано методом, показанным выше, в основное уравнение газовой динамики, которое в данном случае ввиду малости возмущений приобретет вид

$$m^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z_1^2}=0, \qquad (19.62)$$

где $m=\sqrt{M_1^2-1}$, $M_1=\frac{v_1}{a_1}$, a_1 — скорость звука в невозмущенном потоке перед крылом.



Фиг. 19.20. Волновая поверхность вокруг крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью.

Таким образом, задача определения поля скоростей около крыла сводится к отысканию потенциала скорости φ_1, удовлетворяющего уравнению (19.62) при определенных граничных условиях.

Важно заметить, что если крыло конечного размаха находится в сверхзвуковом потоке, то влияние каждой точки поверхности крыла будет сказываться только внутри конуса возмущений с вершиной в этой точке, а все крыло будет находиться внутри огибающей поверхности конусов с вершинами на передней кромке. Полный угол раствора конусов равен $2\mu_1$, где

$$\operatorname{ctg}\mu_1=m. \qquad (19.63)$$

Эту поверхность будем называть волновой и обозначать Σ (фиг. 19.20).

Обозначим потенциал возмущенной скорости через $\bar{\varphi}$ (x_1, y_1, z_1).

Внутри волновой поверхности Σ имеем

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_1}=v'_x;\ \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y_1}=v'_y;\ \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z_1}=v'_z,$$

где значение потенциала $\bar{\varphi}$ также удовлетворяет уравнению (19.62), т. е.

$$m^2\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z_1^2}=0. \qquad (19.64)$$

Это уравнение будет основным уравнением для определения потенциала скорости $\bar{\varphi}$ внутри волновой поверхности Σ. Что касается пространства вне волновой поверхности, то в нем значение потенциала $\bar{\varphi}$ будет просто равно нулю, туда возмущения от крыла не доходят.

Установим теперь граничные условия, которым должен удовлетворять потенциал скорости $\bar{\varphi}$. С этой целью используем условия безотрывного обтекания крыла.

Будем полагать, что передняя и задняя кромки крыла заданы уравнениями

$$x_1=\psi_1(z_1),\quad x_1=\psi_2(z_2),$$

а нижняя и верхняя поверхности — уравнениями

$$y_1=f_1(x_1,\ z_1),\quad y_1=f_2(x_1,\ z_1).$$

Тогда, исходя из условий безотрывного обтекания крыла в пределах точности линеаризованной теории, получим [1]

$$\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y_1}\right)_{y_1=0}=(v_1+v_x')\,\frac{\partial f}{\partial x_1}=v_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}, \tag{19.65}$$

так как для тонкого слабо изогнутого крыла $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ величина малая; здесь для верхней поверхности в качестве функции f надо брать функцию f_2, а для нижней поверхности f_1.

Задачу будем решать при условии существования сверхзвуковых передней и задней кромок крыла (см. § 6 этой главы), т. е. на функции ψ_1 и ψ_2 наложим следующие ограничения:

$$\left|\frac{d\psi_1}{dz_1}\right|\leqslant\operatorname{ctg}\mu_1\quad\text{и}\quad\left|\frac{d\psi_2}{dz_1}\right|\leqslant\operatorname{ctg}\mu_1. \tag{19.66}$$

С целью определения потенциала $\bar{\varphi}\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$, что даст возможность определить аэродинамические характеристики (c_x и c_y) крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке, введем новые переменные:

$$x=\frac{x_1}{m};\quad y=y_1;\quad z=z_1. \tag{19.67}$$

Тогда для определения потенциала $\bar{\varphi}\,(x_1,\ y_1,\ z_1)=\varphi\,(x,\ y,\ z)$ будем иметь следующие уравнения (так как $d\psi_1=dx_1=mdx$; $dz_1=dz$):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \tag{19.68}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{v_1}{m}\,\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{19.69}$$

$$\left|\frac{d\psi_1}{dz}\right|\leqslant 1,\quad\left|\frac{d\psi_2}{dz}\right|\leqslant 1 \tag{19.70}$$

(в преобразованной плоскости угол $\mu_1=45°$). Заметим, что если $m=1$, т. е. $M=\sqrt{2}$, то разницы между x_1, y_1, z_1 и x, y, z нет.

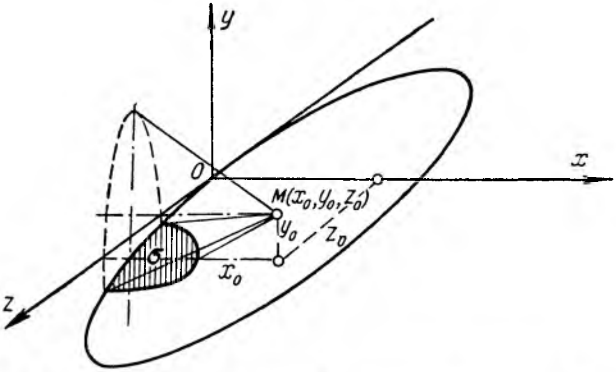
С. В. Фалькович [66] дает в качестве решения для потенциала φ следующее выражение:

$$\varphi\,(x_0,\ y_0,\ z_0)=\frac{-1}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}\frac{d\sigma}{\sqrt{(x_0-x)^2-[\,(z_0-z)^2+y_0^2]}}, \tag{19.71}$$

[1] Для линеаризованной задачи граничные условия с поверхности крыла можно перенести параллельно оси y_1 на проекцию крыла в плоскости $y_1=0$.

где σ — часть плоскости x, z, отсекаемая конусом с вершиной в точке M (x_0, y_0, z_0), ось которого параллельна оси x, а угол раствора равен $\frac{\pi}{2}$ (фиг. 19.21); эта часть плоскости x, z ограничена спереди передней кромкой крыла; $d\sigma = dx\,dz$.

Формула (19.71) имеет смысл только в тех случаях, когда значения $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ известны на поверхности σ и условия (19.70) выполняются.



Фиг. 19.21. К определению потенциала скорости φ.

В дальнейшем ограничимся изучением только этого случая. Если же на некоторой части площадки σ значения $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ неизвестны, то решение задачи сильно осложняется. Значения производной $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ на этой части площадки определяются специальным образом. Этот случай подробно рассмотрен Е. А. Красильщиковой, которой принадлежит наиболее общее решение задачи о сверхзвуковом обтекании крыла конечного размаха [64].

Итак, определив потенциал φ в точках, лежащих на поверхности крыла (точнее, при $y=0$), можно определить и перепады давления при любом числе М, перейдя от $\varphi\,(x, y, z)$ к $\bar{\varphi}\,(x_1, y_1, z_1)$ с помощью линеаризованного уравнения Бернулли (18.6):

$$p_{\text{н}} - p_{\text{в}} = 2\rho_1 v_1 \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_0}, \tag{19.72}$$

а следовательно, можно вычислить и подъемную силу.

В случае плоского крыла с прямолинейными передней и задней кромками все вычисления значительно упрощаются.

В этом случае уравнение поверхности крыла (пластинки) примет вид

$$y = -x\alpha$$

и

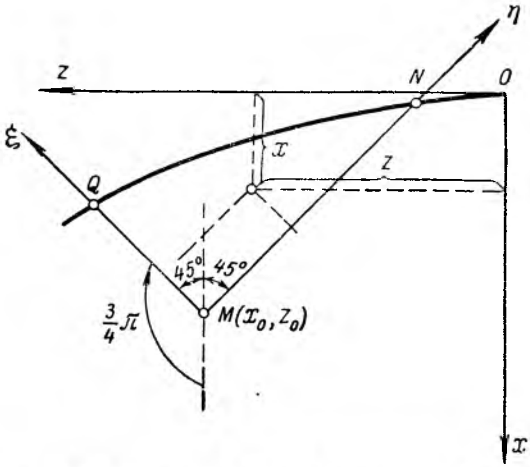
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = -v_1\alpha. \tag{19.73}$$

Следовательно, для точек на поверхности крыла $(y_0=0)$ будем иметь

$$\varphi\,(x_0, 0, z_0) = \frac{v_1\alpha}{\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{(x_0-x)^2-(z_0-z)^2}}. \tag{19.74}$$

Чтобы облегчить нахождение потенциала скорости $\varphi(x_0, z_0)$, перейдем к новой прямоугольной системе координат ξ, η с началом в точке $M(x_0, y_0)$, для чего осуществим параллельный перенос и поворот осей x, z на угол $\frac{3}{4}\pi$.

Новые оси (фиг. 19.22) будут совпадать в плоскости $y=0$ с образующими конуса возмущений M (фиг. 19.22), который отсекает на поверхности крыла площадь σ (MQN).



Фиг. 19.22. Переход к новым переменным ξ и η.

При этом будет иметь место следующая зависимость:

$$x = x_0 - \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \quad z = z_0 + \frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$$

и формула (19.74) приобретает следующий вид:

$$\varphi(x_0, z_0) = \frac{v_1\alpha}{\pi} \iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{2\xi\eta}} = \frac{v_1\alpha}{\pi} \int\limits_0^{\eta_N} \frac{d\eta}{\sqrt{2\eta}} \int\limits_0^{\psi_1(\eta)} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} =$$

$$= \frac{v_1\alpha\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^{\eta_N} \sqrt{\frac{\psi_1(\eta)}{\eta}}\, d\eta, \qquad (19.75)$$

где уравнение передней кромки в новых переменных обозначено через $\xi = \psi_1(\eta)$, а η_N — точка пересечения передней кромки крыла с осью η.

§ 8. РОМБОВИДНОЕ ПЛОСКОЕ КРЫЛО

Рассмотрим обтекание плоского ромбовидного крыла (фиг. 19.23). Обтекание крыла вначале рассмотрим в пространстве x, y, z (т. е. при $M=\sqrt{2}$), а окончательные формулы дадим и для пространства x_1, y_1, z_1, т. е. для любых значений числа M. Введем обозначения:

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = k_1,$$
$$\operatorname{tg}\gamma_2 = k_2,$$

где вследствие принятых ограничений, введенных в § 7,

$$\gamma_1 \geqslant 45^\circ,$$
$$\gamma_2 \geqslant 45^\circ.$$

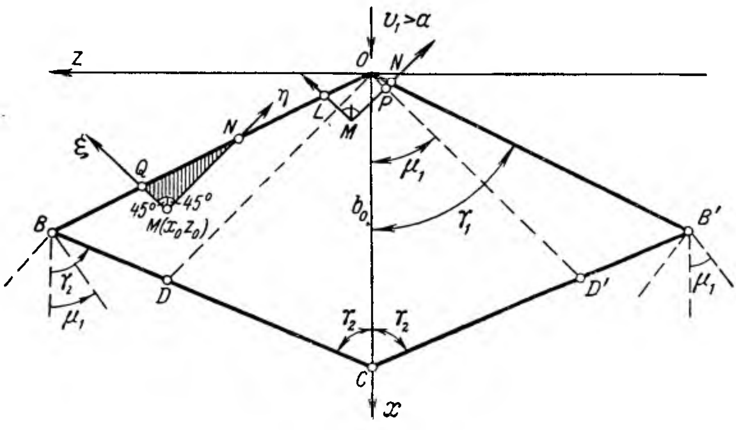
Тогда уравнения передних кромок (OB и OB') будут иметь вид

$$z = k_1 x,$$
$$z = -k_1 x$$

или в переменных ξ, η соответственно

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{k_1 x_0 - z_0}{k_1+1}\sqrt{2} - \frac{k_1-1}{k_1+1}\eta \\ \xi &= \frac{k_1 x_0 + z_0}{k_1-1}\sqrt{2} - \frac{k_1+1}{k_1-1}\eta \end{aligned}\right\} = \psi_1(\eta). \tag{19.76}$$

Учитывая симметрию, рассмотрим обтекание одной половины крыла. Выделим две области на крыле: I (BOD) и II (DOC), на которые делится крыло головным конусом, выходящим из точки O.



Фиг. 19. 23. Обтекание плоского ромбовидного крыла сверхзвуковым потоком.

Найдем значение потенциала φ для этих областей. Заметим, что при определении потенциала φ по формуле (19.75) в точке M (x_0, z_0), принадлежащей первой области, площадью интегрирования будет служить треугольник MQN; для точки M, принадлежащей второй области,— четырехугольник $MLON$.

Для области I имеем из (19.76)

$$\eta_N = \frac{k_1 x_0 - z_0}{k_1 - 1}\sqrt{2}.$$

Следовательно, выражение для потенциала (19.75) приобретает вид

$$\varphi(x_0, z_0) = \frac{v_1 \alpha \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\eta_N} \sqrt{\left[\frac{k_1 x_0 - z_0}{(k_1+1)\eta}\sqrt{2} - \frac{k_1-1}{k_1+1}\right]} d\eta.$$

Интегрируя, получим

$$\varphi(x_0, z_0) = \frac{v_1 \alpha}{\sqrt{k_1^2 - 1}} (k_1 x_0 - z_0). \tag{19.77}$$

В переменных (x_1, y_1, z_1), т. е. для любого значения числа M, будем иметь (не меняя индексы)

$$\overline{\varphi}(x_0, z_0) = \frac{v_1 \alpha}{\sqrt{n^2 - 1}} (k_1 x_0 - z_0), \tag{19.78}$$

где

$$n = mk_1.$$

Определяя потенциал скорости в области II, интегрирование по η следует разбить на две части: от точки M (x_0, z_0) до точки P и от P до N. Учитывая, что

$$\eta_P = \frac{x_0 + z_0}{\sqrt{2}}, \quad \eta_N = \frac{k_1 x_0 + z_0}{k_1 + 1} \sqrt{2},$$

выражение для потенциала (19.75) можно написать в виде

$$\varphi(x_0, z_0) = \frac{v_1 \alpha \sqrt{2}}{\pi} \left(\int_0^{\eta_P} \sqrt{\left[\frac{k_1 x_0 - z_0}{(k_1 + 1)\eta} \sqrt{2} - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \right]} d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{\eta_P}^{\eta_N} \sqrt{\left[\frac{k_1 x_0 + z_0}{(k_1 - 1)\eta} \sqrt{2} - \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \right]} d\eta \right). \tag{19.79}$$

В переменных (x_1, y_1, z_1), т. е. при любом значении числа M, после преобразований будем иметь (не меняя индексы)

$$\overline{\varphi}(x_0, z_0) = \frac{2 v_1 \alpha}{\pi \sqrt{n^2 - 1}} \left[(k_1 x_0 - z_0) \frac{\pi}{2} - k_1 x_0 \arcsin \sqrt{\frac{x_0 - m^2 z_0^2}{m^2 (k_1^2 x_0^2 - z_0^2)}} + \right.$$

$$\left. - z_0 \arcsin k_1 \sqrt{\frac{x_0^2 - m^2 z_0^2}{k_1^2 x_0^2 - z_0^2}} \right]. \tag{19.80}$$

Из формул (19.78) и (19.80), в частности, следует, что на луче OD потенциал скорости разрыва не претерпевает.

Определив потенциал скорости для областей крыла I и II, перейдем к определению сил.

На участке I из уравнения (19.78) имеем

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_0} = \frac{v_1 \alpha k_1}{\sqrt{n^2 - 1}}. \tag{19.81}$$

На основании формулы (19.72) можно заключить, что давление не зависит от координат точки M $(x_0,\ z_0)$[1].

Используя формулу (19.72) и вводя полярные координаты, r, θ с полюсом в точке O, можно написать выражение для подъемной силы на первом участке крыла в следующем виде:

$$Y_{\mathrm{I}}=2\rho_1 v_1 \int\limits_0^{r_1}\int\limits_{\alpha}^{\gamma_1} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_0} r\,dr\,d\theta, \quad \text{где } r_1=\frac{k_2 b_0}{\sin\theta+k_2\cos\theta},$$

т. е.

$$Y_{\mathrm{I}}=\frac{4\alpha k_1 q_1}{\sqrt{n^2-1}} S_{\mathrm{I}},$$

где S_{I} — площадь первого участка крыла.

Если ввести обозначение

$$n'=mk_2$$

и учесть, что

$$S_{\mathrm{I}}=\frac{k_2 n' (n-1) b_0^2}{2(n'+1)(n+n')},$$

то выражение для подъемной силы на первом участке крыла можно представить в следующем окончательном виде:

$$Y_{\mathrm{I}}=\frac{2\alpha q_1 k_1 k_2 n' (n-1) b_0^2}{(n'+1)(n+n')\sqrt{n^2-1}}. \tag{19.81'}$$

На участке II из уравнения (19.80) имеем

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_0}=\frac{2v_1\alpha k_1}{\pi\sqrt{n^2-1}}\arccos\sqrt{\frac{x_0^2-m^2 z_0^2}{m^2(k_1^2 x_0^2-z_0^2)}}=$$

$$=\frac{2v_1\alpha k_1}{\pi\sqrt{n^2-1}}\arccos\sqrt{\frac{1-m^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta}{n^2-m^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta}}. \tag{19.82}$$

---

[1] Попутно заметим, что для рассматриваемой части крыла легко подсчитать значение коэффициента c_y. В самом деле,

$$c_y=\frac{p_{\text{н}}-p_{\text{в}}}{\frac{\rho_1 v_1^2}{2}\,1}=\frac{4}{v_1}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x_0}=\frac{4\alpha k_1}{\sqrt{n^2-1}},$$

откуда при $\gamma_1=\frac{\pi}{2}$

$$c_y=\frac{4\alpha}{\sqrt{\mathrm{M}^2-1}}.$$

Из этого выражения следует [см. формулу (19.72)], что вдоль луча $\theta = \mathrm{const}$ давление постоянно.

Используя формулу (19.72) и вновь вводя полярные координаты r, θ с полюсом в точке O, можно написать выражение для подъемной силы на втором участке крыла в следующем виде:

$$Y_{\mathrm{II}} = \frac{4\rho_1 v_1^2 k_1 \alpha}{\pi\sqrt{n^2-1}} \int_0^{\alpha_1}\int_0^{r_1} \arccos\sqrt{\frac{1-m^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta}{n^2-m^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta}}\, r\,dr\,d\theta.$$

После преобразований получим выражение для подъемной силы второго участка в следующем окончательном виде:

$$Y_{\mathrm{II}} = \frac{4\alpha q_1 k_1 k_2 n' b_0}{\pi\sqrt{n^2-1}}\left[\frac{\pi(1-n)}{2(n'+1)(n+n')} + \frac{\sqrt{n^2-1}}{n'(n^2-n'^2)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\arcsin\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - \frac{n'^2}{\sqrt{n'^2-1}}\arcsin\frac{\sqrt{n'^2-1}}{n'}\right)\right]. \qquad (19.82')$$

Коэффициент подъемной силы крыла можно определить по формуле

$$c_y = \frac{2(Y_{\mathrm{I}}+Y_{\mathrm{II}})}{q_1 S},$$

где S — площадь всего крыла (двух половин).

Окончательно получим

$$c_y = \frac{8\alpha}{(n-n')m\pi}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\arcsin\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - \frac{n'^2}{\sqrt{n'^2-1}}\arcsin\frac{\sqrt{n'^2-1}}{n'}\right) \qquad (19.83)$$

В частном случае, если задняя (или передняя) кромка перпендикулярна к вектору скорости набегающего потока, то

$$n' = \infty \left(\text{или } \gamma_1 = \frac{\pi}{2},\ n = \infty\right),$$

$$c_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^2-1}} = 2c_1\alpha, \qquad (19.84)$$

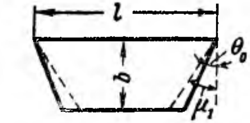
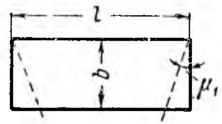
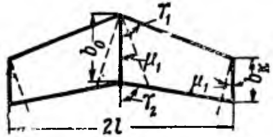
т. е. такие треугольные крылья дают тот же коэффициент подъемной силы, что и пластинка (см. § 6).

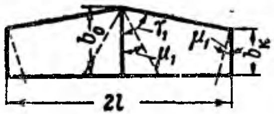
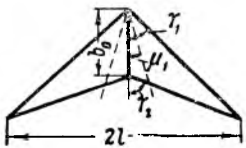
Учитывая, что результирующая аэродинамическая сила перпендикулярна к поверхности крыла (пластинки), сопротивление треугольной пластинки также равно сопротивлению пластинки бесконечного размаха в плоскопараллельном потоке:

$$c_x = c_y\alpha = 2c_1\alpha^2 = \frac{c_y^2}{2c_1}. \qquad (19.85)$$

Обратим внимание на то, что изложенный метод можно применять для расчета аэродинамических характеристик крыльев различной формы в плане (конечно, при выполнении указанных выше ограничений).

В заключение приводим таблицу формул для определения аэродинамических характеристик некоторых крыльев в сверхзвуковом потоке.

№ по пор.	Форма крыла в плане	Коэффициент подъемной силы	сопротивления $c_x=c_y\alpha$
1		$c_y=\frac{4\alpha}{m}\,\frac{l-0,5\,b\,(\operatorname{tg}\mu_1+\operatorname{tg}\theta_0)}{l-b\operatorname{tg}\theta_0}$	
2		$c_y=\frac{4\alpha}{m}\left(1-0,5\,\frac{b}{l}\operatorname{tg}\mu_1\right)$	
3		$c_y=\frac{4\alpha}{m}\,\frac{b_0^2}{(n+n')\left(b_0^2+b_к^2\right)}\left[\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\left(1-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n}\right)+\right.$ $\left.+\frac{n'^2}{\sqrt{n'^2-1}}\left(1+\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n'}\right)\right]-\frac{b_к^2}{b_0^2-b_к^2}\sqrt{\frac{n'^2}{n'+1}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}$. $n=m\operatorname{tg}\gamma_1,\ n'=m\operatorname{tg}\gamma_2,\ b_к=b_0-\frac{ml\,(n'-n)}{n\cdot n'}$	

	Направление полета	Коэффициент волнового
4		$$c_y=\frac{4\alpha}{m}\,\frac{b_0^2}{b_0^2-b_к^2}\left[1-\frac{b_к^2}{b_0^2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right]$$ $$n=m\operatorname{tg}\gamma_1=m\,\frac{l}{b_0-b_к}$$
5		$$c_y=\frac{4\alpha}{m}\,\frac{1}{(n+n')}\left[\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}\left(1-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n}\right)+\frac{n'^2}{\sqrt{n'^2-1}}\left(1+\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{n'}\right)\right]$$ $$n=m\operatorname{tg}\gamma_1=m\,\frac{l\operatorname{tg}\gamma_2}{b_0\operatorname{tg}\gamma_2+l}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, ГИТТЛ, 1950.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ГИТТЛ, ч. I, II, 1948.
3. Голубев В. В., Лекции по теории крыла, ГИТТЛ, 1949.
4. Христианович С. А., Гальперин В. Г., Миллионщиков М. Д., Симонов Л. А., Прикладная газовая динамика, 1948.
5. Фабрикант Н. Я., Аэродинамика, ГИТТЛ, ч. I, 1949.
6. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, ГИТТЛ, 1950.
7. Левинсон Я. И., Аэродинамика больших скоростей, Оборонгиз, 1950.
8. Абрамович Г. Н., Прикладная газовая динамика, ГИТТЛ, 1953.
9. Мартынов А. К., Экспериментальная аэродинамика, Оборонгиз, 1950.
10. Бураго Г. Ф., Теория крыловых профилей с учетом влияния сжимаемости воздуха, ВВИА им. Жуковского, 1949.

Дополнительная литература

11. Келдыш М. В. и Франкль Ф. И., Внешняя задача Неймана для линейных эллиптических уравнений в приложениях к теории крыла в сжимаемом газе, Известия АН СССР, серия матем., № 4, 1934.
12. Оглоблин А. П., Систематическое исследование крыльев. Труды ЦАГИ, вып. 147, 1933.
13. Глауэрт, Основы теории крыла и винта, ГНТИ, 1931.
14. Голубев В. В., Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке, ГОНТИ, НКТП, 1938.
15. Мизес, Теория полета, Издательство иностр. литературы, 1949.
16. Чаплыгин С. А. и Аржаников Н. С., К теории открылка и закрылка. Труды ЦАГИ, вып. 105, 1931.
17. Чаплыгин С. А., Подъемная сила составного крыла, Собрание сочинений, т. III, 1935.
18. Седов Л. И., Теория плоских движений идеальной жидкости, Оборонгиз, 1939.
19. Нужин С. Г., К теории тонкого профиля, Труды КАИ, вып. 1937.
20. Theodorsen, General Potential Theory of Arbitrary Wing Sections, NACA Report № 452 (1933).
21. Серебрийский Я. М., Обтекание крыловых профилей произвольной формы, Инженерный сборник, гл. III, вып. 1, 1946.
22. Нужин С. Г., Построение потенциального потока несжимаемой жидкости около крыловых профилей произвольной формы. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 1, 1947.
23. Симонов Л. А., Расчет обтекания крыловых профилей и построение профиля по распределению скоростей на его поверхности. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 1, 1947.
24. Нужин С. Г., К теории крыла в плоско-параллельном потоке. Труды КАИ, вып. XX, 1948.
25. Нужин С. Г. и Киселев А. М., К технике построения потенциального потока несжимаемой жидкости около крыловых профилей произвольной формы. Труды КАИ, вып. XXVI, 1951.

26. Жуковский Н. Е., Видоизменения метода Кирхгофа для определения движения жидкости.

Сборник сочинений, т. II. Госуд. издательство технико-теоретической литературы, М.—Л., 1949.

27. Некрасов А. Н., О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга, Изв. Иваново-Вознесенского политехнического института, № 5, 1922.

28. Голубев В. В., Крыло и винт самолета. Механика в СССР за тридцать лет, ГИТТЛ, 1950.

29. Каменков Г. В., Теория крыла в закритической области. Труды КАИ, вып. XVIII, 1947.

30. Каменков Г. В., О вихревой теории лобового сопротивления. Труды III Всесоюзной конференции по аэродинамике, ч. II, изд. ЦАГИ, 1935.

31. Некрасов А. И., Диффузия вихря, Труды ЦАГИ, вып. 84, 1931.

32. Некрасов А. И., Теория крыла в нестационарном потоке. Изд. Академии Наук СССР, 1947.

33. Обухов А. М., Турбулентность. Механика в СССР за тридцать лет, ГИТТЛ, 1950.

34. Лойцянский Л. Г., Пограничный слой. Механика в СССР за тридцать лет, ГИТТЛ, 1950.

35. Жуковский Н. Е., Теоретические основы воздухоплавания (посмертное издание), ГТИ, М., 1925.

36. Голубев В. В., Теория крыла аэроплана конечного размаха. Труды ЦАГИ, вып. 108, 1931.

37. Лойцянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, ГИТТЛ, 1941.

38. Дородницын А. А. и Лойцянский Л. Г., Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный и ламинарные профили. Труды ЦАГИ, № 563, 1945. Прикладная математика и механика, т. IX, вып. 4, 1945.

39. Дородницын А. А., Пограничный слой в сжимаемом газе. Прикладная математика и механика, т. VI, вып. 6, 1942.

40. Журнал «Прикладная математика и механика», Академия Наук СССР. Посвящается С. А. Чаплыгину, т. V, вып. 2, 1941.

41. Жуковский Н. Е., Вихревая теория гребного винта (статья вторая). Собрание сочинений, т. IV, 1949.

42. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, Гостехиздат, 1933, стр. 415.

43. Рисберг А. Б., Влияние формы крыла на распределение нагрузки по размаху и продольную устойчивость. Труды ЦАГИ, вып. 335, 1937.

44. Тарг С. М., Основные задачи теории ламинарных течений, ГИТТЛ, 1951.

45. Голубев В. В., К теории крыла малого удлинения. Известия АН СССР, Отделение технических наук, № 3, 1947.

46. Чаплыгин С. А., Избранные работы по теории крыла, ГИТТЛ, 1949.

47. Оглоблин А. П., Основы гидромеханики, Оборонгиз, 1945.

48. Астров В., Левин Е., Павлов Л., Христианович С., О расчете сопел Лаваля. Прикладная математика и механика, т. VII, вып. 1, 1943.

49. Лисс Н. Ю., Расчет распределения циркуляции по размаху крыла произвольной формы в плане. Труды КАИ, вып. XXIV, 1949.

50. Дородницын А. А., Обобщение теории несущей линии на случай крыла с изогнутой осью и осью, не перпендикулярной к потоку. Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 1, 1944.

51. Вулис Л. А., Термодинамика газовых потоков, Энергоиздат, 1950.

52. Христианович С. А., О сверхзвуковых течениях газа. Труды ЦАГИ, вып. 543, 1941.

53. Христианович С. А., Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940.

54. Слезкин Н. А., К вопросу о плоском движении газа. ДАН, новая серия, т. III, № 9, 1936.

55. Кибель И. А., Газовая динамика. Механика в СССР за тридцать лет, ГИТТЛ, 1950.

56. Некрасов А. И., О плоско-параллельном движении газа при дозвуковых скоростях. Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 4, 1944.
57. Полядский В. С., Влияние сжимаемости на аэродинамические характеристики профиля крыла при больших скоростях полета. Изд. БНТ НКАП, вып. 21, 1943.
58. Нужин С. Г., К теории обтекания тел газом при больших дозвуковых скоростях. Прикладная математика и механика, т. X, вып, 5—6, 1946.
59. Нужин С. Г., К теории обтекания крылового профиля при докритической скорости потока. Труды КАИ, т. XXIII, 1949.
60. Нужин С. Г., Аэродинамика тонких тел при докритических скоростях. Труды КАИ, вып. XXV, 1951.
61. Симонов Л. А. и Христианович С. А., Влияние сжимаемости на индуктивные скорости крыла и винта. Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 2, 1944.
62. Франкль Ф. И. и Карпович Е. А., Газодинамика тонких тел, Гостехиздат, 1948.
63. Донов Н. Е., Плоское крыло с острыми кромками в сверхзвуковом потоке. Известия Академии Наук СССР, серия математ., № 6, 1939.
64. Красильщикова Е. А., Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, ГИТТЛ, 1952.
65. Фалькович С. В., О подъемной силе крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 1, 1947.
66. Фалькович С. В., К теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке, Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 4, 1947.
67. Галин Л. А., О крыле конечного размаха в сверхзвуковом потоке, Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 3, 1947.
68. Галин Л. А., Крыло прямоугольной формы в плане в сверхзвуковом потоке, Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 4, 1947.
69. Гуревич М. И., Подъемная сила стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке, Прикладная математика и механика, т. X, вып. 4, 1946.
70. Гуревич М. И., Замечания об обтекании стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке, Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 2, 1947.
71. Гуревич М. И., К вопросу о тонком треугольном крыле, движущемся со сверхзвуковой скоростью, Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 3, 1947.
72. Лебедев А. А., Некоторые вопросы аэродинамики крыла в сверхзвуковом потоке (кандидатская диссертация), МАИ, 1947.
73. Капилевич М. Б., Аэродинамические характеристики стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке. Технич. отчет МАП № 126, 1948.
74. Федоров Е. Я., К расчету подъемной силы плоского крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. Труды КАИ, вып. XXIV, 1949.
75. Франкль Ф. И. и Карпович Е. А., Сопротивление стреловидного крыла при сверхзвуковых скоростях, Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 4, 1947.
76. Бураго Г. Ф., Теория крыла конечного размаха, ВВИА им. Жуковского, 1952.
77. Дейч М. Е., Техническая газодинамика, ГЭИ, 1953.
78. Прандтль Л., Гидроаэромеханика, ИИЛ, 1949.
79. Гошек И., Аэродинамика больших скоростей, ИИЛ, 1954.
80. Ферри А., Аэродинамика сверхзвуковых течений, ГЦТТЛ, 1952.
81. Хилтон У. Ф., Аэродинамика больших скоростей, ИИЛ, 1955.
82. Липман Г. В. и Пакет А. Е., Введение в аэродинамику сжимаемой жидкости, ИИЛ, 1949.
83. Зауер Р., Течение сжимаемой жидкости, ИИЛ, 1954.
84. Ламб, Гидродинамика, ИИЛ, 1947.
85. Хоуарт Л. и др., Современное состояние аэродинамики больших скоростей, ИИЛ, 1955.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV

Основы гидродинамики идеальной жидкости

Глава V

Основы теории вихрей

Глава VI

Применение теории функций комплексного переменного к изучению плоскопараллельного потока идеальной жидкости

Глава VII

Теория крыла в плоскопараллельном потоке

Глава VIII

Теория струйного и вихревого сопротивления

Глава IX

Основы теории движения вязкой жидкости

Глава X

Пограничный слой

Глава XI

Теория крыла конечного размаха

Глава XII

Основные понятия газовой динамики

Глава XIII

Система основных дифференциальных уравнений газовой динамики

Глава XIV

Одномерные изэнтропические течения газа

Глава XV

Теория прямого скачка уплотнения

Глава XVI

Плоские сверхзвуковые течения газа

Стр.

Глава XVII

Теория косого скачка уплотнения

Глава XVIII

Основы теории профиля и крыла в дозвуковом потоке

Глава XIX

Основы теории профиля и крыла в сверхзвуковом газовом потоке

Николай Сергеевич Аржаников
и *Владимир Николаевич Мальцев*

АЭРОДИНАМИКА

Издательский редактор *И. А. Петрова* Техн. редактор *Н. Н. Гладких*

Г-22640 Подписано в печать 20/VII 1956 г. Уч.-изд. л. 27,91
Формат бумаги $60\times92^1/_{16}$=15,13 бум. л.—30,25 печ. л.
Цена 11 руб. 25 **к.** в переплете Тираж 8500 экз. **Заказ** 1237/1447

Типография Оборонгиза