М. В. СТОРОЖЕВ, Е. А. ПОПОВ

ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Издание четвертое,
переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Машины и технология обработки металлов давлением»

Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1977

6П4.2
С82
УДК 621.77.001.1 (075.8)

Рецензент кафедра
«Оборудование и технология ковки и штамповки»
Московского станкоинструментального института

Сторожев М. В., Попов Е. А.

С82 Теория обработки металлов давлением. Учебник для вузов. Изд. 4-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1977.

423 с. с ил.

Книга содержит изложение элементов теории обработки металлов давлением в объеме программы, утвержденной для политехнических и машиностроительных втузов.

Книга предназначена для студентов, специализирующихся по кузнечно-штамповочному производству, а также может быть использована аспирантами и научно-техническими работниками.

С $\frac{31205\text{-}092}{038(01)\text{-}77}$ 092-77 6П4.2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория обработки металлов давлением как отдельная инженерная дисциплина и предмет преподавания в значительной степени обязана своим становлением академику АН БССР С. И. Губкину (1898—1955). В 1947 г. он написал первый учебник по указанной дисциплине [12].

Этот учебник более всего подходил для студентов металлургических вузов, поскольку даваемые в нем сведения по физикохимии пластической обработки в значительной степени превалировали над сведениями по механике деформирования. Между тем в машиностроительных и политехнических вузах утвердилась специализация с механическим уклоном. Кроме того, работы Е. П. Унксова, А. Д. Томленова, И. Я. Тарновского и др., выполненные в начале 50-х годов, внесли значительный вклад в теорию расчета усилий и деформаций при обработке металлов давлением.

Эти обстоятельства побудили авторов, имевших многолетний опыт преподавания именно в машиностроительных вузах (МВТУ, Мосстанкин), написать учебник по теории обработки металлов давлением, соответствующий учебным программам этих вузов.

В учебнике в основном рассмотрена механика пластической деформации и ее положения и методы иллюстрируются на примерах расчетов усилий и деформаций при операциях ковки, объемной и листовой штамповки.

Первое издание учебника вышло в свет в 1957 г., затем учебник переиздавался в 1963 и 1971 гг.

В настоящем четвертом издании добавлены сведения о сверхпластичности, переработан параграф, посвященный пластическому трению, значительно переработан расчет усилий при закрытой прошивке, приведено решение задачи по определению усилий штамповки методом верхней оценки, внесены коррективы в главу, относящуюся к листовой штамповке, а также внесен ряд исправлений и уточнений в другие разделы книги.

Авторы глубоко благодарны В. Г. Березкину, Д. И. Васильеву, Ю. П. Глебову, А. З. Журавлеву, С. Б. Кирсановой, А. Д. Матвееву, Г. А. Навроцкому, А. Г. Овчинникову, П. М. Рыбакову, П. И. Середину, С. С. Соловцову, Е. П. Унксову, В. Я. Шехтеру и др., а также рецензенту всех изданий — кафедре «Оборудование и технология ковки и штамповки» Московского станкоинструментального института, руководимой В. Т. Мещериным.

Главы 1, 2 (большая часть) и 8 написаны Е. А. Поповым, остальные — М. В. Сторожевым.

ВВЕДЕНИЕ

Задачей дисциплины «Теория обработки металлов давлением» является анализ и разработка общих принципиальных основ рационального построения процессов обработки металлов давлением, которая не только обеспечивает получение заготовок, а часто и готовых деталей требуемой формы, но и вызывает в металле качественные изменения. Теория обработки металлов давлением является научной базой технологии этой обработки.

Теория обработки металлов давлением рассматривает и изучает:

1) термические и механические условия, при которых обеспечивается возможность наибольшего формоизменения металла, что необходимо для установления оптимальных режимов технологических процессов;

2) влияние обработки давлением на механические и физические свойства металлов в целях получения наилучших эксплуатационных характеристик заготовок и деталей;

3) характер формоизменения заготовок при различных операциях в целях отыскания наиболее благоприятных соотношений между размерами и формой исходных заготовок и заготовок или деталей, получаемых после обработки давлением;

4) сопротивление металла пластическим деформациям при операциях обработки давлением, т. е. распределение напряжений, необходимые усилия и работы для осуществления этих операций, в целях правильного выбора оборудования и прочностного расчета рабочего инструмента.

Основной базой для теории обработки металлов давлением является наука о пластической деформации металлов. Эта наука развивается совокупно в трех взаимно связанных основных направлениях, имеющих одинаково важное значение для теории обработки металлов давлением.

1. Физика процесса пластической деформации металла. Это направление изучает экспериментально и теоретически механизм пластического формоизменения металла, устанавливает влияние различных факторов на этот процесс, в основном температуры, степени и скорости деформации и вида напряженного состояния,

а равно устанавливает условия, при которых металл переходит из состояния упругого в состояние пластическое.

2. Физико-химия процесса деформации, рассматривающая связь пластической деформации с химическим составом и фазовым состоянием металла.

3. Механика пластической деформации, математически разрабатывающая вопросы напряженного и деформированного состояния, величины и распределения напряжений и деформаций в пластически деформируемом теле, анализирующая условия перехода тела в пластическое состояние.

Первыми работами, положившими начало научной теории пластичности, можно считать работы французского ученого Г. Треска, который в конце 60-х годов прошлого века начал экспериментально изучать поведение металла при пластическом течении и высказал утверждение, что пластическая деформация начинается при возникновении в металле максимального касательного напряжения определенной величины, постоянной для данных условий. Учитывая это положение, Б. Сен-Венан и М. Леви разработали системы уравнений, относящихся к «внутренним движениям, возникающим в пластических телах».

Дальнейшее развитие теория пластичности получила лишь в начале текущего столетия благодаря работам М. Губера, Р. Мизеса, Г. Генки, Л. Прандтля, Т. Кармана, А. Надаи, Г. Гейрингер и др., и с тех пор теория пластичности непрерывно развивается (Р. Хилл, В. Прагер и др.).

Отечественные ученые внесли огромный вклад в науку о пластических деформациях.

В области физики и физико-химии пластической деформации капитальные труды создали В. Д. Кузнецов, Н. С. Курнаков, который является зачинателем физико-химической теории пластичности («Давление течения и твердость пластических тел», 1913 г.); Н. Н. Давиденков, исследовавший, в частности, вопросы, относящиеся к скорости деформации; А. А. Бочвар, открывший рекристаллизационный и растворно-осадительный механизмы пластической деформации; С. И. Губкин, обобщивший основные положения физико-химической теории пластичности, и ряд других ученых.

В области механики пластической деформации советским ученым также принадлежит ведущая роль. Здесь надо указать, для примера, такие имена, как С. А. Христианович, развивший применение метода характеристик к плоской задаче теории пластичности, А. Ю. Ишлинский, решивший осесимметричную задачу, А. А. Ильюшин, придавший законченную форму теории малых упругопластических деформаций, В. В. Соколовский, Л. М. Качанов и др.

Основоположником теории обработки металлов давлением по справедливости следует считать Д. К. Чернова, который не только поставил, но и научно решил ряд вопросов, касающихся существа обработки металлов давлением, и предугадал направление их разрешения в будущем. После годичной работы в молотовом цехе Обуховского завода Д. К. Чернов опубликовал статью «О выделке стальных осей для подвижного состава железных дорог» (1867 г.), высказав в ней мысли, которые и ныне лежат в основе правильного подхода к рациональному выполнению ряда процессов обработки металлов давлением. «Постепенность нагревания, — пишет Д. К. Чернов, — необходима для того, чтобы не было большой разницы в деформации внешних и внутренних слоев», — принцип, на котором строятся режимы нагрева. «Кругление на вырезной наковальне имеет большие преимущества перед подобною работой на плоской наковальне, в последнем случае, как доказано опытом, центральные части металла разрыхляются, образуя столб рыхлости» — теперь мы говорим о схеме всестороннего сжатия как условии максимальной пластичности материала.

Теория обработки металлов давлением создана трудами многих ученых. Среди зарубежных ученых можно в первую очередь указать Э. Зибеля, Г. Закса, Т. Кармана, В. Джонсона, Э. Томсена и др. К плеяде советских ученых относятся С. И. Губкин, Е. П. Унксов, И. М. Павлов, А. И. Целиков, Н. И. Корнеев, В. П. Северденко, Г. А. Смирнов-Аляев, В. С. Смирнов, И. Л. Перлин, А. Д. Томленов, Л. А. Шофман, В. Т. Мещерин, И. А. Норицын, И. Я. Тарновский, И. П. Ренне, О. А. Ганаго и др.

Значение этих трудов нельзя переоценить. Они обеспечили создание научной базы технологии обработки металлов давлением как инженерной дисциплины, позволяющей творчески и осмысленно совершенствовать технологические процессы, поднимать на более высокую ступень технику нашей социалистической промышленности.

Роль теории обработки металлов давлением в отечественной промышленности будет неуклонно возрастать в связи с непрерывно растущим значением кузнечно-прессового производства. Эта теория располагает современными методами исследования механики процессов ковки и штамповки. В каждом отдельном случае следует применять тот метод (или ту комбинацию методов), который обеспечивает наиболее простые, удобные и достоверные решения, что и будет показано далее.

В настоящее время считается бесспорным, что пластичность является состоянием вещества, зависящим от условий деформирования: механической схемы деформации, температуры, скорости и степени деформации и внешних условий (трения, среды).

Согласно учению о механической схеме деформации пластичность металла возрастает с увеличением гидростатического давления, наложенного на основную схему напряжений. Путем создания схем напряженного состояния с большим гидростатическим давлением удалось деформировать малопластичные в обычных условиях сплавы и вещества

Изучение совместного влияния температуры и скорости деформации на вид процесса деформации показало, что даже при весьма низкой соответственной (гомологической) температуре (меньше 0,3) может происходить разупрочнение и, наоборот, при большой скорости деформации упрочнение наблюдается при высоких температурах. Вместе с тем при значительных скоростях деформации большее значение приобретает температурный эффект, что необходимо учитывать при деформировании на машинах с высокими скоростями рабочего органа. Таким образом, можно говорить о термомеханическом факторе (температуре, скорости и степени деформации).

Для установления термомеханического режима обработки металлов давлением необходимо знать изменение механических свойств металла с температурой при разных скоростях деформирования. Истинное напряжение при деформировании растяжением или сжатием (с приведением к линейной схеме) представляет собой напряжение текучести и определяет сопротивление металла деформированию. Эта величина входит во все формулы для определения усилий, необходимых для осуществления ковочно-штамповочных операций. Наиболее сложным оказывается учет влияния скорости деформации на напряжение текучести при различных температурах.

Не меньшее значение имеют показатели пластичности (относительное сужение поперечного сечения при растяжении, относительное обжатие при осадке статической и динамической до появления первой трещины и относительная деформация при кручении, получаемая при разрушении образца, относительное удлинение и ударная вязкость), определение которых для разных сплавов при различных температурах с нанесением результатов на графики имеет исключительно важное значение для установления термомеханического режима обработки. Большое число таких диаграмм уже получено советскими исследователями.

Глава 1
ПРИРОДА ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

1.1. ПОНЯТИЯ О ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В твердых телах существуют достаточно большие силы взаимосвязи атомов, чтобы противостоять действию силы тяжести, и без воздействия внешних сил твердые тела сохраняют свою форму и размеры. Приложение внешних сил к твердому телу вызывает изменение его формы и размеров, что сопровождается изменением расстояния между отдельными материальными точками, составляющими данное тело, или же изменением размеров и формы элементарных объемов, на которые можно разделить рассматриваемое твердое тело.

Для оценки величины формоизменения вводят понятие деформации.

Различают деформации линейные, угловые, поверхностные и объемные. Эти виды деформаций могут относиться как к элементарному объему, выделенному в твердом теле, так и ко всему телу.

Линейные деформации характеризуют изменение какого-либо одного размера.

Угловые деформации характеризуют изменение угла между какими-либо двумя линиями, проведенными в деформируемом теле.

Поверхностные деформации характеризуют изменение площади какого-либо сечения или участка поверхности.

Объемные деформации характеризуют изменение объема.

Указанные деформации, в свою очередь, можно разделить на абсолютные, относительные и логарифмические.

Абсолютная деформация выражает абсолютное изменение какого-либо линейного размера, углового размера, площади сечения или участка граничной поверхности элемента, выделенного в деформируемом теле, или всего тела.

Относительная деформация характеризует относительное изменение тех же величин. Обычно относительную деформацию определяют как отношение абсолютного изменения какого-либо параметра (абсолютной деформации) к первоначальному значению этого параметра.

Логарифмическая деформация является разновидностью относительной деформации. Она представляет собой натуральный логарифм отношения измененного в результате деформирования размера к первоначальному размеру элемента тела или всего тела до начала деформирования.

Степень деформации является относительной деформацией, характеризующей общее формоизменение деформируемого тела. При неравномерном распределении деформаций в теле степень деформации дает представление о некоторой средней для всего тела величине деформации.

В последующем изложении будут даны некоторые уточнения и дополнения к этим понятиям. Заметим, что так как формоизменение есть процесс, протекающий во времени, то деформации можно определять для любого, в том числе и конечного, момента деформирования.

Если деформация, вызванная внешними силами, исчезает при прекращении действия внешних сил и твердое тело полностью восстанавливает свои исходные форму и размеры, то такую деформацию называют упругой деформацией.

Если же при прекращении действия внешних сил твердое тело не полностью восстанавливает свои исходные форму и размеры, то такую деформацию называют пластической (остаточной) деформацией.

Как упругая, так и пластическая деформация происходят без разрушения деформируемого тела или отдельных его участков (без нарушения сплошности).

Способность твердого тела получать пластические деформации называют пластичностью. Пластичность можно оценивать максимальной величиной пластической деформации, которую можно получить без разрушения деформируемого тела. Пластичность зависит от условий деформирования, и ее следует рассматривать не как свойство какого-либо материала, а как его состояние.

Расстояния между атомами в твердых телах имеют определенную величину, зависящую от рода материала, его химического состава и температурных условий и изменяющуюся в данном теле в весьма узких пределах.

Величины межатомных расстояний устанавливаются в результате силового взаимодействия между атомами.

Между атомами действуют силы притяжения и силы отталкивания, и величина межатомных расстояний определяется условием равенства этих противодействующих сил.

Равновесное положение атомов при одновременном действии сил притяжения и отталкивания возможно, если интенсивность изменения этих сил по мере изменения межатомного расстояния различна. Схематично можно считать, что с удалением атомов одного от другого убывают и сила притяжения, и сила отталкивания, но убывание это происходит с разной интенсивностью.

Величина межатомного расстояния a (рис. 1.1) соответствует равенству сил притяжения и отталкивания и, следовательно, минимуму потенциальной энергии. Увеличение межатомного расстояния по сравнению с расстоянием, соответствующим положению равновесия, приводит к тому, что сила притяжения P_2 по абсолютной величине становится больше силы отталкивания P_1, и, следовательно, для удаления атомов от положения равновесия требуется приложить внешнюю, как бы растягивающую силу. Наоборот, при $x < a$ для уравновешивания избыточной силы отталкивания необходимо приложить внешние, как бы сжимающие силы.

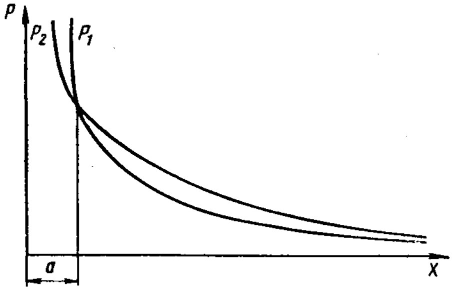


Рис. 1.1

Силовое взаимодействие атомов в твердом теле намного сложнее рассмотренного нами взаимодействия между двумя атомами, так как каждый атом окружен атомами, расположенными в трехмерном пространстве, и находится в силовом взаимодействии не с одним, а со значительным количеством атомов.

В зависимости от степени упорядоченности взаимного расположения атомов различают аморфные твердые тела и кристаллические.

Кристаллическое строение твердого тела характеризуется идентичностью взаимного расположения атомов на расстояниях, значительно превышающих межатомные, или, что то же, характеризуется трехмерной повторяемостью одного и того же элемента строения на значительные расстояния (дальний порядок).

Аморфное строение твердого тела характеризуется отсутствием упорядоченного взаимного расположения атомов с дальним порядком.

Любая деформация — и упругая, и пластическая — может осуществляться в твердых телах путем относительного смещения атомов. При упругой деформации величина смещения атомов из положений равновесия не превышает расстояния между соседними атомами.

Однако вследствие изменения межатомных расстояний упругая деформация вызывает обратимое изменение объема. Обратимое изменение объема составляет, например, при всестороннем сжатии давлением, равным 100 кгс/мм^2, для стали $\sim$0,6%, для меди $\sim$1,3%.

При упругих деформациях смещение атомов из положения равновесия возрастает с увеличением элементарных сил, вызывающих это смещение. Для металлов в определенных пределах нагружения обычно существует пропорциональная зависимость между деформирующими силами (напряжениями) и смещениями атомов из положений равновесия (деформациями), которая соответствует условиям упругой деформации и известна как закон Гука. Однако существуют материалы, например резина, для которых в пределах упругих деформаций отсутствует линейная связь между напряжениями и деформациями (нелинейно упругие материалы).

С ростом величины упругих деформаций потенциальная энергия твердого тела возрастает. Смещение атомов из положения равновесия является реакцией на действие внешних сил на все твердое тело или его отдельную часть. В любых условиях нагружения действие внешних сил на тело уравновешивается противодействием межатомных сил, стремящихся вернуть атомы в положения, соответствующие минимуму потенциальной энергии.

Однако увеличение потенциальной энергии тела за счет смещения атомов из положения равновесия не может происходить безгранично. При достижении определенного предела потенциальной энергии атомы получают возможность смещаться на расстояния бо́льшие, чем межатомные расстояния ненагруженного твердого тела. В этом случае после снятия внешних усилий атомы не возвращаются в свои исходные положения равновесия, а занимают новые положения устойчивого равновесия. Сумма смещений атомов в новые положения равновесия создает пластическую деформацию или же остаточное изменение формы и размеров твердого тела в результате действия внешних сил.

Для того чтобы смещение атомов в новые положения равновесия не приводило к нарушению сплошности, необходимо, чтобы в процессе такого смещения атомы не удалялись один от другого на расстояния бо́льшие, чем размеры зоны активного действия сил взаимного притяжения атомов.

Под нагрузкой атомы всегда смещены из положений равновесия. Отсюда следует, что *в условиях пластического деформирования общая (полная) деформация содержит как пластическую составляющую, так и упругую, исчезающую после снятия деформирующих сил*. Это есть так называемый закон наличия упругой деформации при пластическом деформировании.

Так как при снятии деформирующих сил после пластического деформирования атомы стремятся занять положения равновесия (новые) и установить исходные межатомные расстояния, пластическая деформация не может приводить к сколько-нибудь заметному изменению объема деформируемого тела.

1.2. СТРОЕНИЕ МЕТАЛЛОВ

Все металлы и сплавы имеют кристаллическое строение. Последнее, как было отмечено ранее, характеризуется в целом закономерным и периодичным расположением атомов в пространстве, при котором каждый атом находится в идентичном окружении соседних [1]. Рентгенограммы кристаллов показывают, что атомы в них расположены по прямым линиям и по плоскостям, и позволяют не только выявить взаимное расположение атомов в пространстве, но и определить расстояния между ними.

Вследствие закономерного расположения атомов по плоскостям и по прямым линиям строение кристалла можно представить в виде трехмерной сетки из прямых линий, в точках пересечения (узлах) которых размещены атомы (точнее, узлы являются центрами, относительно которых происходят тепловые колебания атомов, положения же узлов соответствуют положениям атомов при минимуме потенциальной энергии). Такую сетку (рис. 1.2) можно считать состоящей из многогранников (параллелепипедов, призм и т. п.) одинаковой величины с соприкасающимися гранями. Любой многогранник этой сетки, например параллелепипед *АБВГДЕЖЗ* (если сетка состоит из параллелепипедов), путем переноса в любом из трех направлений ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) на определенное расстояние может быть полностью совмещен с любым другим параллелепипедом данной сетки.

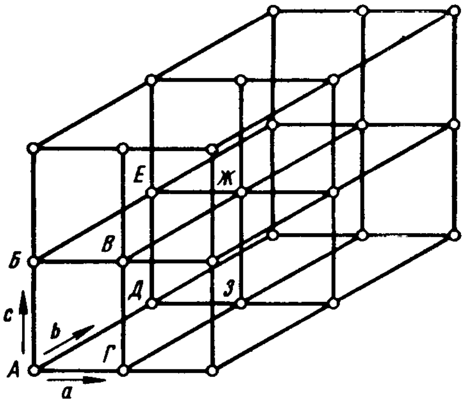


Рис. 1.2

Наименьший многогранник, путем непрерывных переносов которого в основных кристаллографических направлениях можно построить всю пространственную сетку, называют элементарной ячейкой кристаллической решетки.

Совокупность соприкасающихся гранями элементарных ячеек, расположенных в трехмерном пространстве, называется **пространственной решеткой**.

Длины отрезков (a, b, c), определяющие минимальную величину смещения элементарной ячейки, необходимого для полного совмещения атомов данной ячейки с атомами соседней ячейки, называют параметрами решетки или периодами повторяемости.

Взаимное расположение атомов в ячейке полностью определяет расположение атомов в данной пространственной решетке.

Различают простые пространственные решетки кристаллов, в которых атомы размещаются только в узлах решетки (только в вершинах основной элементарной ячейки), и сложные простран-

[1] Кроме атомов, расположенных на поверхности тела, на границах зерен и внутри зерен при нарушении в них правильности кристаллического строения (см. стр. 21).

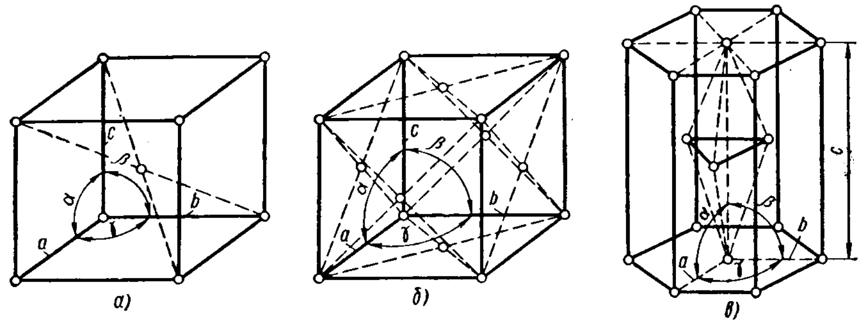


Рис. 1.3

ственные решетки, у которых внутри основных элементарных ячеек в одних и тех же местах также размещены атомы.

Для описания строения кристаллов или же пространственной решетки кристаллов обычно выбирают систему координат, осями которой служат три прямые, проведенные из одной точки (узла решетки), совпадающие с основными узловыми прямыми кристалла (например, прямые, совпадающие по направлению с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ на рис. 1.2), причем кристаллографическую систему осей выбирают в соответствии с симметрией кристалла. В системе кристаллографических осей форма элементарной ячейки пространственной решетки может быть описана с помощью трех координатных углов α, β, γ между кристаллографическими осями и трех параметров решетки a, b, c.

Типовые формы основных элементарных ячеек пространственных кристаллических решеток металлов приведены на рис. 1.3.

Для элементарной ячейки кубических решеток — объемно-центрированной (рис. 1.3, *а*) и гранецентрированной (рис. 1.3, *б*) характерно равенство углов $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ и равенство параметров решетки $a = b = c$. Для гексагональной плотноупакованной решетки (рис. 1.3, *в*) характерны значения углов $\alpha = \beta = 90°$ и $\gamma = 120°$ и равенство только двух параметров решетки $a = b \neq c$.

Приведенные три типа решеток свойственны большинству металлов.

Объемно-центрированную кубическую решетку имеют, например, металлы α- и β-железо, литий, ванадий, вольфрам, молибден, хром, тантал; гранецентрированную кубическую решетку имеют металлы алюминий, γ-железо, золото, медь никель, платина, свинец, серебро; решетку с гексагональными плотноупакованными ячейками, с тремя атомами внутри призмы (рис. 1.3, *в*) имеют металлы магний, цинк, бериллий, кадмий, кобальт, α-титан.

Для определения плоскостей, которые можно провести в элементарных ячейках пространственных решеток (следовательно,

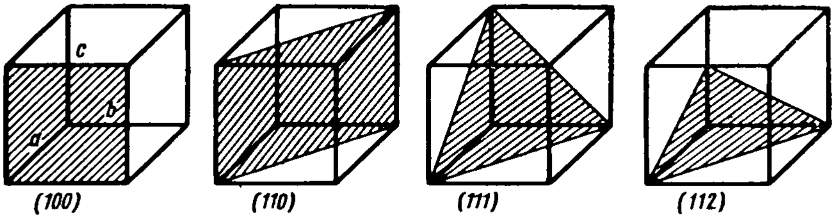


Рис. 1.4

и в самих пространственных решетках), а также для определения кристаллографических направлений в кристаллографии принята система индексации.

По этой системе для кубической решетки индексация плоскостей осуществляется тремя цифрами, заключенными в круглые скобки. Эти цифры представляют собой три взаимно простых целых числа, пропорциональных обратной величине отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях, причем за единицу измерения отрезков принимают параметр решетки. На рис. 1.4 даны обозначения некоторых плоскостей кубической элементарной ячейки.

В гексагональной элементарной ячейке индексацию плоскостей производят по обратным величинам отрезков, отсекаемых рассматриваемой плоскостью на четырех кристаллографических осях (рис. 1.5), три из которых a_1, a_2 и a_3 лежат в плоскости основания шестигранной призмы (в так называемой плоскости базиса), а четвертая c совпадает с осью призмы. На рис. 1.5 указаны также обозначения некоторых плоскостей в гексагональной ячейке. Знак минус над цифрой показывает, что плоскость отсекает отрезок на отрицательном направлении оси. Заметим, что обозначение отдельных плоскостей в элементарных ячейках кристаллографической решетки сохраняют одинаковым для всех плоскостей, проведенных в пространственной решетке, параллельных данной рассматриваемой плоскости.

В пространственной решетке рассматривают также кристаллографические направления.

В качестве прямой, определяющей направление какого-либо семейства параллельных прямых, обычно выбирают прямую, проходящую через начало координат. Вдоль этой прямой расположен ряд атомов, отстоящих один от другого на определенном расстоянии. Положение этой прямой в пространстве определяется координатами любого атома, на ней расположенного. Поэтому в качестве индексов направления берут три взаимно простых целых числа, пропорциональных координатам любого атома, лежащего на рассматриваемой прямой, причем за единицу измерения принимается параметр решетки (индексы направлений заключают в квадратные скобки). На рис. 1.6 дано схематическое изо-

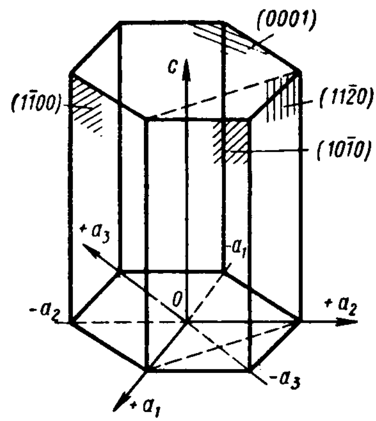


Рис. 1.5

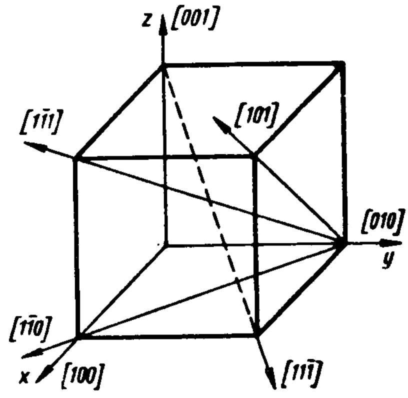


Рис. 1.6

бражение основных направлений в кубической элементарной ячейке и их обозначение.

Взаимное расположение атомов на различных кристаллографических плоскостях различно, а также различна и величина межатомных расстояний по разным кристаллографическим направлениям. Так как свойства вещества (физические, химические и механические) зависят от взаимодействия атомов, то вследствие различия в расстояниях между атомами и их взаимном расположении свойства кристаллов неодинаковы по разным кристаллографическим направлениям. Различие свойств по разным направлениям называется анизотропией, которая характерна для кристаллического строения.

В силу того, что процесс кристаллизации при затвердевании жидкого (расплавленного) металла идет одновременно в очень большом количестве центров кристаллизации, технический металл представляет собой не единый кристалл, а конгломерат зерен (кристаллитов), форма, размеры и направление кристаллографических осей которых зависят от условий кристаллизации и последующей обработки. Такое строение называется поликристаллическим. В каждом зерне наблюдается упорядоченное расположение атомов, соответствующее пространственной решетке данного металла, однако направление определенных кристаллографических плоскостей в различных зернах может быть различно. Металлы и сплавы представляют собой, как правило, поликристаллы.

В каждом зерне поликристаллического металла наблюдается анизотропия. Однако вследствие разнообразной, беспорядочной ориентировки кристаллографических плоскостей в различных зернах поликристалл может иметь одинаковые свойства по разным направлениям и не обнаруживать анизотропии (когда размеры зерен значительно меньше размеров поликристалла и количество их весьма велико). Это обстоятельство во многих случаях позволяет рассматривать поликристаллическое тело как подобное изотропному, несмотря на анизотропию свойств отдельных составляющих его зерен (квазиизотропное тело).

В отличие от поликристалла, тела, для всего объема которых характерно постоянство направления определенных кристаллографических плоскостей в пространстве (вне зависимости от внешней формы этого тела), называют монокристаллами.

В настоящее время есть способы искусственно получать монокристаллы некоторых металлов настолько больших размеров, что из них можно изготовлять образцы для механических испытаний. Это в значительной степени облегчает изучение процесса пластической деформации.

Зерна (кристаллиты) нельзя смешивать с кристаллами, наружные поверхности которых не произвольны, а оформлены в виде плоских граней, пересекающихся под определенными углами.

Неправильность внешней формы зерен металла, а также различие в направлениях определенных кристаллографических плоскостей в смежных зернах приводят к тому, что пограничный слой на стыке между зернами имеет нарушения правильности взаимного расположения атомов и обычно насыщен примесями и неметаллическими включениями вследствие того, что в первую очередь кристаллизуются частицы металла, содержащие наименьшее количество примесей.

1.3. ХОЛОДНАЯ ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ МОНОКРИСТАЛЛА

Пластическая деформация монокристалла может происходить в основном двумя путями: скольжением и двойникованием.

Скольжение представляет собой параллельное смещение тонких слоев монокристалла относительно друг друга. Движение охватывает ряд плоскостей или тончайших слоев (полосы скольжения), в промежутках между которыми элементы пластической деформации отсутствуют.

Экспериментально установлено, что полосы скольжения отстоят одна от другой в среднем на расстоянии около 1 мкм, в то время как расстояния между соседними атомными плоскостями выражаются цифрами порядка $1 \cdot 10^{-4}$ мкм.

Характер деформации монокристалла путем скольжения виден (рис. 1.7) на образце из монокристалла сплава меди и алюминия, подвергнутом растяжению [56].

Скольжение в монокристаллах происходит по определенным кристаллографическим плоскостям, которые называются *плоскостями скольжения*. Обычно плоскостями скольжения являются плоскости с наибольшей плотностью размещения

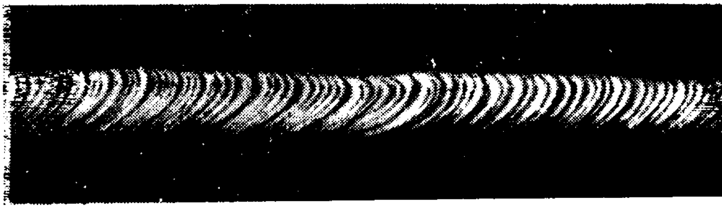


Рис. 1.7

атомов, а направлениями скольжения являются те направления, по которым межатомные расстояния имеют минимальную величину. Например, в металлах с гранецентрированной кубической кристаллической решеткой плоскостями скольжения обычно являются плоскости октаэдра типа (111), а направлениями скольжения направления типа [101].

В металлах с гексагональной кристаллической решеткой плоскостью скольжения обычно бывает плоскость базиса типа (0001), а направлениями скольжения — направления, совпадающие с диагональю шестиугольника (основания этой ячейки) типа [100].

В металле с объемно-центрированной кубической решеткой скольжение может осуществляться по плоскостям нескольких типов (112), (123) и (110), так как плотность расположения атомов в них различается незначительно. Преимущественным направлением скольжения является направление [111].

На возможность смещения атомов по каким-либо кристаллическим плоскостям значительное влияние оказывает температура. Повышение температуры, а следовательно, и амплитуды тепловых колебаний атомов в ряде случаев приводит к тому, что процесс скольжения может происходить по другим плоскостям, отличным от тех, по которым происходит скольжение при комнатной температуре. Например, в металлах с гексагональной плотно упакованной решеткой при комнатной температуре существует одна плоскость скольжения — плоскость базиса (0001), а при повышенной температуре дополнительно появляется возможность скольжения по плоскостям типа $(10\bar{1}1)$ и $(10\bar{1}2)$.

Двойникование представляет собой смещение атомов, расположенных в плоскостях, параллельных некоторой плоскости, называемой плоскостью двойникования, на расстояния, пропорциональные расстоянию этих плоскостей от плоскости двойникования (на рис. 1.8 штриховыми линиями показан двойник, получившийся в результате деформации), причем ребра кристаллической решетки, первоначально наклоненные к плоскости двойникования под углом $\alpha < 90°$, поворачиваются на угол, равный $180° - 2\alpha$.

Решетка части кристалла, получившей деформацию двойникованием, является зеркальным изображением решетки недеформированной части кристалла относительно плоскости двойникования (двойником), и взаимное расположение атомов в двойнике аналогично расположению их в недеформированном металле. Двойникование сравнительно редко происходит при статическом нагружении и значительно чаще при деформировании ударом. Двойникование может возникать не только в результате воздействия на деформируемое тело внешних сил, но и в результате отжига после пластической деформации. Такое явление наблюдается, в частности, в меди, латуни и некоторых других металлах с гранецентрированной кубической решеткой. Двойникование может сопутствовать деформации скольжением. При деформации скольжением двойникование скачкообразно уменьшает усилие, необходимое для деформирования.

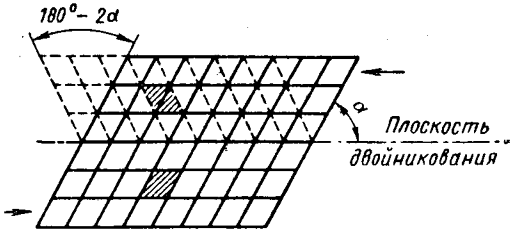


Рис. 1.8

Плоскости двойникования обычно совпадают с плоскостями скольжения. Для металлов с гранецентрированной кубической решеткой плоскостью двойникования обычно является плоскость (111), для металлов с объемно-центрированной кубической решеткой — плоскость (112) и для металлов с гексагональной плотноупакованной решеткой — плоскость $(10\bar{1}2)$.

У металлов процесс пластической деформации в основном осуществляется путем скольжения.

Многочисленные исследования показали, что *сдвигающее* (*касательное*) *напряжение, необходимое для начала пластической деформации скольжения для данного металла, при данной температуре и скорости деформации есть величина постоянная, не зависящая от ориентировки плоскостей скольжения относительно действующих на тело сил.* Так, например, если растягивать усилием P образец из монокристалла с площадью поперечного сечения F, у которого нормаль к плоскости скольжения наклонена к направлению действующей силы под углом φ, а направление скольжения под углом λ (рис. 1.9), то величину сдвигающего напряжения τ можно найти по формуле

$$\tau = \frac{P}{F}\cos\varphi\cos\lambda, \tag{1.1}$$

где $F/\cos\varphi$ — площадь сечения образца плоскостью скольжения.

На рис. 1.10 приведена зависимость $P/F = f(\cos\varphi\cos\lambda)$ [118], полученная расчетом по формуле (1.1), в предположении, что $\tau = \text{const}$; точками показаны результаты опытов.

График (рис. 1.10) также показывает, что величина предела текучести монокристалла (нормального напряжения $\sigma = P/F$,

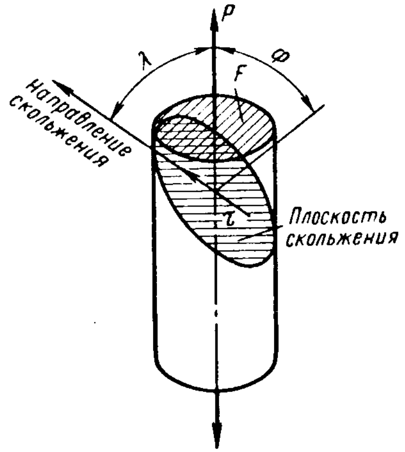


Рис. 1.9

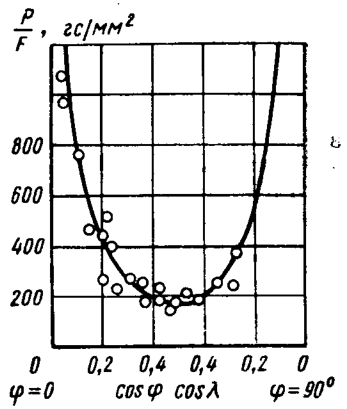


Рис. 1.10

соответствующего началу пластической деформации) для каждого металла существенно зависит от ориентировки плоскостей скольжения относительно направления действия сил, имея минимум при углах $\varphi = \lambda = 45°$.

Подобные опыты показали, что по мере увеличения пластической деформации величина сдвигающего напряжения τ, необходимого для дальнейшего деформирования образца, увеличивается.

Многочисленные исследования показали также, что процесс скольжения нельзя рассматривать как одновременное смещение всех атомов одной плоскости относительно атомов соседней.

По современным воззрениям процесс скольжения осуществляется путем последовательного смещения отдельных групп атомов. Возможность относительного смещения в процессе деформации лишь части атомов, расположенных в параллельных кристаллографических плоскостях, обусловливается наличием в металле нарушений правильного кристаллического строения. Нарушения правильности кристаллического строения приводят к тому, что в отдельных участках кристаллической решетки атомы в недеформированном металле смещены из положений устойчивого равновесия с минимумом потенциальной энергии. Наличие таких смещений приводит к тому, что для перемещения отдельных групп атомов, уже смещенных из положения равновесия в новые положения равновесия, могут потребоваться меньшие сдвигающие напряжения, чем при отсутствии таких смещений.

В настоящее время значительное распространение получила теория, объясняющая процесс скольжения перемещением в плоскости скольжения отдельных несовершенств пространственной решетки, так называемых *дислокаций*.

Заметим, однако, что теория дислокаций не является единственной, объясняющей механизм скольжения. Например, Я. И. Френкель и Т. А. Конторова считают, что скольжение может происходить и при отсутствии местных нарушений правильности кристаллического строения путем постепенного перехода групп атомов кристаллической решетки в новые положения равновесия [37]. Такая возможность обеспечивается тем, что каждый атом смещающейся цепочки при условии неодинакового по цепочке смещения, вызванного действием внешних сил, и при подвижности атомов на близлежащих параллельных плоскостях, при достаточной величине смещения, может занять новое положение равновесия.

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИСЛОКАЦИЙ

Предположение о наличии дислокаций, как своеобразных нарушений закономерности расположения атомов в решетке монокристалла, было выдвинуто в связи с необходимостью объяснить значительную разницу расчетных и фактических величин касательных напряжений, необходимых для начала пластических деформаций. Расчетные значения этих касательных напряжений превышали фактические на три-четыре порядка. Столь существенную разницу можно было объяснить лишь тем, что действительный процесс скольжения осуществляется не одновременным смещением всех атомов одной кристаллографической плоскости относительно атомов смежной, параллельной плоскости, а последовательным смещением групп атомов, расположенных в данной плоскости.

Возможность последовательного смещения отдельных групп атомов вдоль плоскости скольжения при уменьшенных напряжениях возникает, если дефекты кристаллической решетки являются не точечными (вакансии, лишние атомы), а линейными, т. е. вызывающими нарушения правильного расположения атомов на значительные (макроскопические) расстояния в одном направлении и на малые (несколько межатомных расстояний) в направлениях, перпендикулярных к первому.

Предположение о существовании линейных дефектов кристаллической решетки реальных монокристаллов позволило не только объяснить причины различия расчетных и фактических величин касательных напряжений, вызывающих пластическую деформацию, но также выяснить многие вопросы, связанные с механизмом деформирования и явлениями, сопутствующими пластической деформации.

Появление элементов теории дислокаций относится к 20-м годам этого столетия (работы Я. И. Френкеля, Дж. Тейлора, Е. Орована и др.). Однако экспериментальное подтверждение существования дислокаций получено лишь в 50-х годах благодаря развитию экспериментальных средств исследований строения кристаллов. Существование дислокаций было подтверждено как прямыми методами исследования (с помощью ионного проектора, рентгеновской топографии, электронно-микроскопического исследования), так и косвенными методами исследования (метод ямок травления, муаровых фигур и др. [49]).

1.4.1. Типы дислокаций

Основными типами дислокаций, встречающихся в реальных монокристаллах, являются краевая и винтовая дислокации.

Как видно из схемы (рис. 1.11), краевая дислокация возникает, если по одну сторону от плоскости скольжения количество атомных плоскостей, перпендикулярных к плоскости скольжения, больше, чем по другую. В случае, представленном на рис. 1.11, выше плоскости скольжения имеется добавочная плоскость *а*, усеянная атомами, не имеющая продолжения ниже плоскости скольжения. Линию *в—г* пересечения добавочной плоскости с плоскостью скольжения называют линией дислокации, а точки (*в*, *г* и др.) пересечения линии дислокации с перпендикулярными к ней кристаллографическими плоскостями называют центрами дислокации. Условное обозначение краевой дислокации показано жирными линиями около центра дислокации.

Краевые дислокации условно разделяют на положительные (обозначаются $\perp$) и отрицательные (обозначаются $\top$) в зависимости от расположения дополнительной плоскости относительно плоскости скольжения. Краевая дислокация считается положительной, если дополнительная плоскость находится выше плоскости скольжения, и отрицательной, если дополнительная плоскость расположена ниже плоскости скольжения.

Наличие дополнительной плоскости, ограниченной линией *в—г*, вызывает нарушение правильного взаимного расположения атомов, соответствующего минимуму потенциальной энергии. Наибольшие нарушения правильности взаимного расположения атомов возникают вблизи центра дислокации (или линии дислокации). Для положительной краевой дислокации (рис. 1.11) межатомные расстояния вблизи линии дислокации выше плоскости скольжения уменьшены, а ниже плоскости скольжения увеличены по сравнению с межатомными расстояниями в идеальной решетке. Эти искажения межатомных расстояний быстро убывают по мере удаления от линии дислокации. Нарушение правильности взаимного расположения атомов вблизи линии дислокации повышает потенциальную энергию участка кристаллической решетки вблизи линии дислокации. Таким образом, вблизи дислокации возникает силовое поле с повышенным уровнем потенциальной энергии.

Под действием сдвигающих напряжений τ (рис. 1.12), действующих параллельно плоскости скольжения, краевая дислокация способна передвигаться. Смещение дислокации состоит

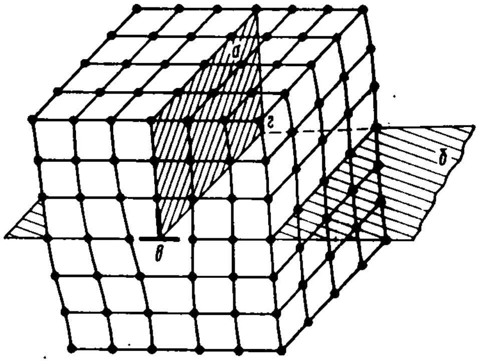


Рис. 1.11

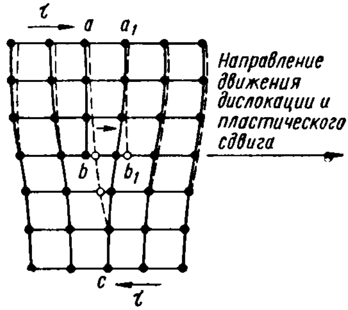


Рис. 1.12

в том, что дополнительной, лишней, плоскостью поочередно становятся плоскости, параллельные исходной плоскости ab (рис. 1.12). Элементарный акт смещения краевой дислокации на одно межатомное расстояние схематично показан на рис. 1.12. Штриховыми линиями на этом рисунке показана решетка, образованная после смещения центра дислокации из положения b в положение b_1. При этом первоначальная лишняя плоскость ba замыкается на расположенную ниже плоскости скольжения кристаллографическую плоскость bc, а лишней плоскостью становится плоскость b_1a_1. Естественно, что пробег такой дислокации от одной боковой поверхности монокристалла до противоположной дает смещение части монокристалла выше плоскости скольжения относительно части монокристалла, расположенной ниже плоскости скольжения на одно межатомное расстояние. Таким образом, смещение краевой дислокации приводит к последовательному переходу атомов на плоскости скольжения в новые положения равновесия, т. е. приводит к возникновению пластической деформации.

Как видно из приведенной схемы, направление пластического сдвига параллельно направлению движения краевой дислокации. Заметим, что одно и то же смещение одной части монокристалла относительно другой вдоль плоскости скольжения создается противоположным смещением положительных и отрицательных дислокаций.

Схема винтовой дислокации приведена на рис. 1.13. В области винтовой дислокации кристаллографические плоскости, перпендикулярные к плоскости скольжения, получают изгиб. Схематично возникновение винтовой дислокации можно представить следующим образом: часть кристаллической решетки разрезана по плоскости скольжения, и разделенные участки смещены один относительно другого на одно межатомное расстояние, как это показано на рис. 1.13. Образующаяся при этом зона изогнутых кристаллографических поверхностей, с обеих сторон

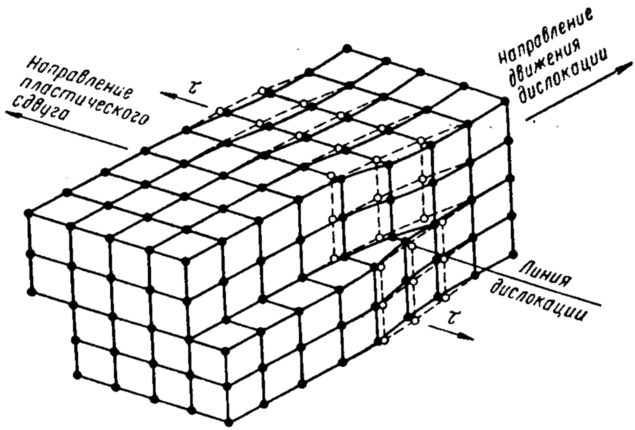


Рис. 1.13

граничащая с участками, имеющими правильное кристаллическое строение, является зоной силового влияния винтовой дислокации.

Линия, находящаяся в плоскости разреза и проходящая в зоне наибольшего искажения решетки, называется линией винтовой дислокации. Движение линии винтовой дислокации в плоскости скольжения вызывает поперечное смещение атомов в новые положения равновесия. Таким образом, если движение краевой дислокации дает пластический сдвиг в том же направлении, в котором движется дислокация, то движение винтовой дислокации дает пластический сдвиг в направлении, перпендикулярном к направлению движения дислокации.

Пробег винтовой дислокации от одной внешней границы монокристалла до другой вызывает смещение одной части монокристалла относительно другой в плоскости скольжения на одно межатомное расстояние.

Дислокация данного типа названа винтовой вследствие того, что смещенные из положений равновесия атомы располагаются в пространстве по винтовой линии. Сказанное можно пояснить рис. 1.14 [57]. На этом рисунке показано расположение атомов в двух смежных атомных плоскостях, одна из которых расположена в плоскости скольжения. Белыми кружочками обозначены атомы, расположенные в плоскости скольжения (см. рис. 1.13), а черными — атомы, расположенные в смежной параллельной плоскости, находящейся выше плоскости скольжения. Атомы, находящиеся в рядах от 1-го до 5-го и от 9-го до 14-го, образуют правильную кристаллическую решетку. Атомы же, расположенные в рядах от 5-го до 9-го, смещены из положений равновесия и располагаются по винтовой линии, схематично показанной на рис. 1.14, *б*, закручиваясь вокруг линии дислокации *BC*. Дислокация, как и резьба винта, может быть правой или левой в зависимости от направления движения по винтовой линии при переходе от атомов верхнего горизонта к атомам нижнего горизонта

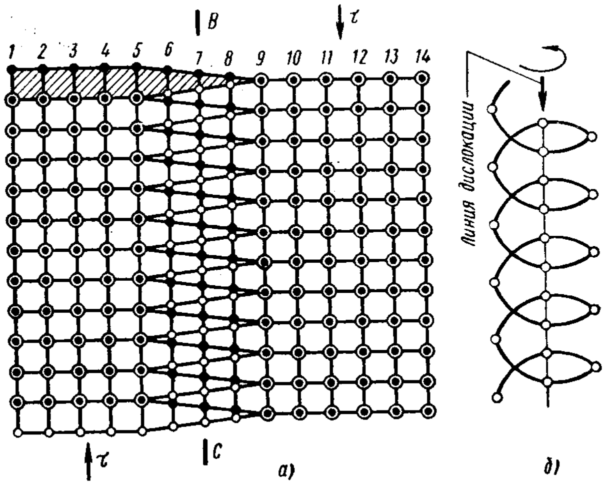


Рис. 1.14

около линии дислокации. Изображенная на рис. 1.13 и 1.14 дислокация является левой винтовой дислокацией, так как линию дислокации при движении сверху вниз следует обходить по спирали против часовой стрелки.

Для того чтобы движение дислокаций могло приводить к пластической деформации монокристалла, необходимо, чтобы линия дислокации выходила на поверхности монокристалла или же образовывала замкнутую петлю.

Замкнутые петли дислокаций могут быть составлены из краевых дислокаций или образованы из краевых и винтовых дислокаций. Они могут быть замкнутыми криволинейными, когда на некоторых участках петли будут так называемые смешанные дислокации, при которых нарушения правильности взаимного расположения атомов имеют признаки, свойственные и краевым, и винтовым дислокациям.

1.4.2. Переползание дислокаций

Краевые и винтовые дислокации могут перемещаться из одной плоскости скольжения в другую, ей параллельную.

Различают *движение* дислокации и *переползание* дислокации. Применительно к краевым дислокациям движение дислокации характеризуется смещением дислокации вдоль одной плоскости скольжения, причем размеры дополнительной атомной плоскости остаются неизменными. Переползание краевой дислокации дает переход дислокации из одной плоскости скольжения в другую, ей параллельную, причем размеры дополнительной плоскости изменяются за счет переноса вещества путем диффузии.

Для перехода краевой дислокации в расположенную выше соседнюю плоскость скольжения необходимо, чтобы цепочка атомов на самой кромке добавочной плоскости ушла в глубь монокристалла путем диффузии (положительное переползание). Для перехода краевой дислокации на нижележащую соседнюю плоскость скольжения необходимо, чтобы к краю добавочной плоскости за счет диффузии присоединился один атомный ряд.

Так как диффузия есть термически активируемый процесс, то переползание также является термически активируемым процессом, скорость протекания которого существенно зависит от температуры, возрастая с увеличением последней.

Переползание дислокации, связанное с изменением межатомных расстояний, вызывает деформацию кристаллов, а при интенсивном переползании и направленной (вследствие воздействия внешних сил) диффузии атомов может являться источником возникновения пластических деформаций.

Так как винтовые дислокации не имеют «лишних» атомных плоскостей, то переползание винтовой дислокации не требует переноса вещества путем диффузии и переход винтовой дислокации на новую плоскость скольжения осуществляется сравнительно беспрепятственно.

1.4.3. Вектор Бюргерса

Для характеристики типа дислокации и степени нарушения правильности взаимного расположения атомов, вносимого дислокацией в идеальную решетку, удобно использовать так называемый вектор Бюргерса. А. Х. Коттрелл [40] дает следующее определение вектора Бюргерса. Допустим, что в плоскости чертежа (рис. 1.15) находится плоскость скольжения, причем на ней в области *A* скольжение уже произошло, а в области *B* еще нет. Граница является линией дислокации. Вектор Бюргерса определяет направление и расстояние, на которое атомы в области *A* сместились над плоскостью скольжения по отношению к атомам, находящимся под этой плоскостью. Если модуль вектора Бюргерса равен параметру решетки, то такая дислокация называется единичной или дислокацией единичной мощности. Из схем краевой дислокации (см. рис. 1.11) и винтовой дислокации (см. рис. 1.13) следует, что вектор Бюргерса для краевой дислокации перпендикулярен линии дислокации, а для винтовой дислокации параллелен этой линии. Для смешанной дислокации вектор Бюргерса составляет с линией дислокации угол, отличный от нуля или 90°, и его можно разложить на два составляющих вектора, направленных вдоль линии дислокации и перпендикулярно ей. Разложение вектора Бюргерса на составляющие соответствует разложению смешанной дислокации на составляющие ее краевую и винтовую дислокации.

Различают полные (единичные) дислокации и частичные.

П о л н а я д и с л о к а ц и я характеризуется вектором Бюргерса, равным по модулю расстоянию между двумя смеж-

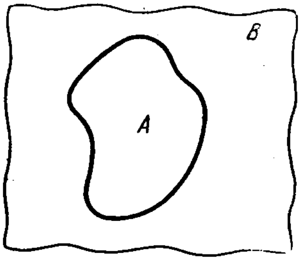


Рис. 1.15

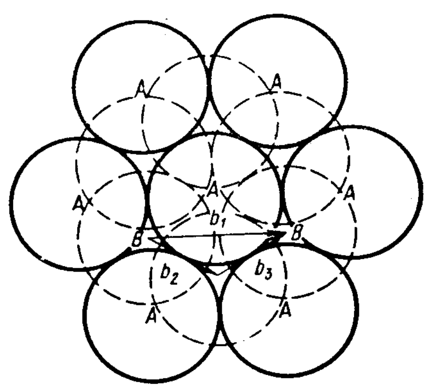


Рис. 1.16

ными атомами на плоскости скольжения в направлении сдвига.

Если представить атомы в виде шаров, то наиболее плотное их взаимное положение на плоскости скольжения может быть представлено так, как это показано на рис. 1.16. Слой атомов, расположенных выше или ниже рассматриваемого слоя с атомами A, при плотной упаковке должен располагаться так, чтобы центры шаров находились в лунках шаров A (точки B на рис. 1.16). Вектор Бюргерса $\bar{b}_1$ полной дислокации соответствует расстоянию между лунками в направлении сдвига. Однако переход атомов из B в B может осуществляться двойным перемещением по векторам $\bar{b}_2$ и $\bar{b}_3$, что требует меньших затрат энергии (требуется перекатываться через бугор меньшей высоты). Если движение дислокации дает смещение меньшее, чем $\bar{b}_1$, то такую дислокацию называют **частичной** (например, смещение по вектору $\bar{b}_2$ или $\bar{b}_3$).

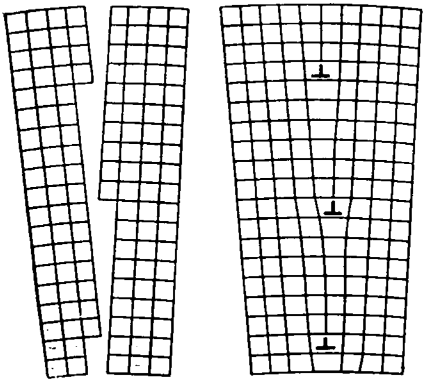
Частичные дислокации, нарушая закономерность чередования взаимного расположения атомов по слоям, параллельным плоскости скольжения, приводят к образованию дефектов упаковки.

1.4.4. Возникновение и размножение дислокаций

В реальных монокристаллах дислокации возникают в процессе кристаллизации, а также в процессе пластической деформации.

Механизм возникновения дислокаций в процессе кристаллизации из жидкого расплава разнообразен.

Дислокации могут возникать в результате срастания слегка разориентированных ветвей дендрита. Разориентировка может быть следствием наличия градиента температур, конвекционных токов и других причин. На рис. 1.17 показан простейший случай срастания двух симметрично разориентированных частей одного кристалла (*а*) и образования на поверхности срастания положительных дислокаций (*б*).



а) б)

Рис. 1.17

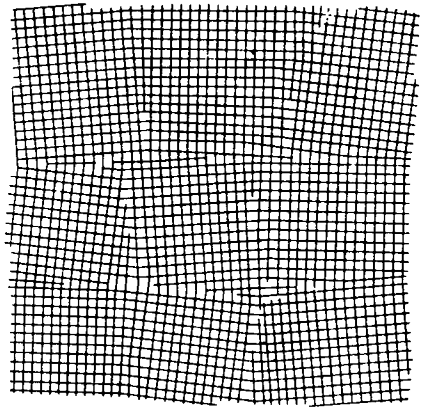


Рис. 1.18

Начальная ступенька винтовой дислокации может образоваться при кристаллизации под влиянием инородных атомов и посторонних примесей, а также вследствие того, что зародыши кристаллов чаще возникают на готовой подложке (например, стенки изложницы, твердые частицы, взвешенные в расплаве), форма которой отлична от формы правильного кристалла затвердевающего вещества.

Существуют и другие варианты возникновения дислокаций в процессе кристаллизации [48, 111], но все они связаны с несовершенством условий кристаллизации. Это несовершенство условий кристаллизации, связанное с конвекционными токами, градиентами температур, действием инородных атомов и другими причинами, приводит к тому, что реальный монокристалл состоит из субзерен (блоков мозаики). Блоки мозаики представляют собой стыкующиеся ячейки монокристаллов размерами порядка 10^{-4}—10^{-6} см, имеющие сравнительно правильное кристаллическое строение, но повернутые один относительно другого на угол порядка 10′—20′. На рис. 1.18 показана схема мозаичной структуры реального монокристалла [41].

Дислокации возникают и в процессе пластической деформации, причем, хотя часть дислокаций выходит на поверхность монокристалла или взаимно уничтожается (например, слияние положительной и отрицательной краевых дислокаций), общее количество дислокаций в процессе холодной деформации увеличивается. Так, например, А. Д. Манасевич [48] отмечает, что согласно теоретическим расчетам в хорошо отожженном металле число дислокаций составляет примерно 10^8 в 1 см^2, а в наклепанном металле может достигать 10^{12} в 1 см^2.

Механизм возникновения дислокаций в процессе пластической деформации выяснен не полностью, и существует ряд гипотез, часть из которых имеет косвенное экспериментальное подтверждение. Наиболее обоснованной является гипотеза, объясняющая возникновение новых дислокаций наличием локальных препятствий движению исходной дислокации. Эта гипотеза была предложена Ф. К. Франком и В. Т. Ридом [82]. Были предложены два механизма возникновения новых дислокаций.

Первый относится к случаю, когда дислокация имеет одностороннее защемление. Допустим, что линия ABC (рис. 1.19, *а*) изображает краевую дислокацию, а плоскости, параллельные плоскости CDE, — единственно действующие плоскости скольжения. Примем также, что отрезок AB (край дислокации) закреплен. Отрезок BC может двигаться в плоскости CDE и вращаться вокруг точки B. При его движении во всех пройденных им областях осуществляется единичный сдвиг. Так, при переходе отрезка BC в положение BD на площади сектора BCD происходит сдвиг на одно межатомное расстояние. На остальных участках плоскости CDE скольжения нет. Полный оборот отрезка BC дает сдвиг всей плоскости на одно межатомное расстояние.

Повторяющимся вращением отрезка BC можно получить неограниченное количество единичных сдвигов. В действительности для осуществления единичных сдвигов необходимо, чтобы вращающаяся линия закручивалась по спирали, как это показано на рис. 1.19, *б*. После того, как линия в процессе вращения получит форму спирали по всей плоскости сдвига CDE, за каждый полный оборот спирали будет происходить единичный сдвиг. Закручивание линии BC по спирали соответствует тому, что «лишняя» плоскость $ABCC_1$ становится цилиндрической поверхностью, дающей спираль в сечениях, перпендикулярных к линии AB. Закручивание вокруг точки B приводит к увеличению длины линии дислокации.

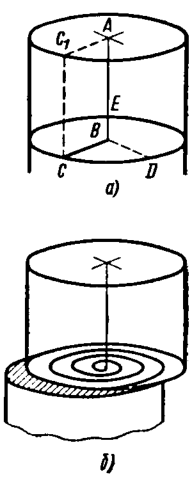


Рис. 1.19

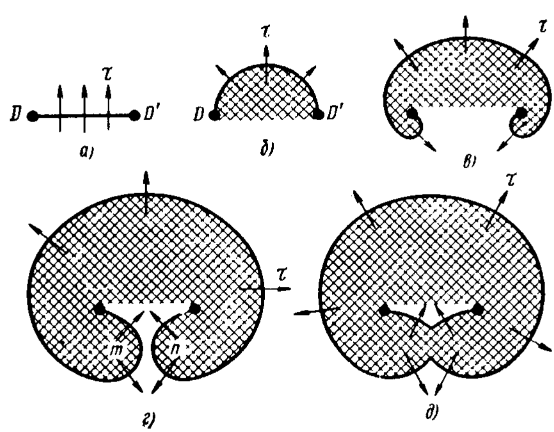


Рис. 1.20

Второй вариант размножения дислокаций при движении частично заторможенной дислокации относится к случаю, когда дислокационная линия закреплена с обоих концов. Это так называемый источник Франка—Рида. На рис. 1.20 приведена схема образования новых дислокаций из источника Франка—Рида [82]. Плоскость чертежа на рис. 1.20 является плоскостью скольжения, содержащей линию дислокации DD' (рис. 1.20, *а*), закрепленную в точках D и D'. Приложенные напряжения τ выгибают линию дислокации в дугу (рис. 1.20, *б*). Радиус кривизны зависит от приложенного напряжения и уменьшается по мере роста последнего. Минимальный радиус кривизны получится, когда линия дислокации примет форму полуокружности.

Дальнейшее движение дислокации может приводить к увеличению радиуса кривизны линии дислокации, что должно соответствовать уменьшению напряжения τ. При неизменном же значении τ линия дислокации должна закручиваться вокруг точек D и D'. Дальнейшее последовательное изменение формы и размеров линии дислокации показано на рис. 1.20, *в—д*. Линия дислокации образует большую петлю, которая в результате встречного движения точек m и n в конечном итоге превращается в замкнутую петлю дислокации и новую дислокацию DD', аналогичную исходной. При встрече сегментов в точках m и n они аннигилируются, так как в этих точках дислокация имеет положительную и отрицательную краевую ориентацию.

Описанные источники появления дислокаций в процессе пластической деформации не являются единственно возможными. В частности, при деформировании поликристалла дислокации могут зарождаться у границ зерен вследствие местного «надавливания» соседних зерен, имеющих неправильную форму, в процессе их формоизменения.

Появление новых дислокаций в процессе пластической деформации и направленное перемещение их от одного края монокристалла к другому под действием внешних сил приводит к тому, что относительное смещение отдельных элементов монокристалла в процессе пластической деформации намного превышает межатомные расстояния.

1.4.5. Скорость движения дислокаций

Дислокации движутся с определенными скоростями, величина которых для данного металла существенно зависит от величины действующих напряжений и температурных условий. Ф. Зейтц [27] приводит данные, по которым при скорости деформации $1 \cdot 10^{-6}$ $с^{-1}$ для монокристаллов чистых металлов сдвигающее напряжение, необходимое для начала пластической деформации, составляет десятые доли килограмма на 1 $мм^2$, и отмечает, что при меньших скоростях деформации в металлах наблюдается малое и постепенное течение при любых сколь угодно малых нагрузках. Это, очевидно, объясняется тем, что даже минимальные нагрузки при наличии тепловых флуктуаций способны вызвать направленное смещение дислокаций, а следовательно, и пластическую деформацию.

По мере увеличения напряжения влияние тепловых флуктуаций на возможность смещения дислокаций уменьшается, и движение дислокаций, а также скорость их движения в основном определяются величинами действующих напряжений.

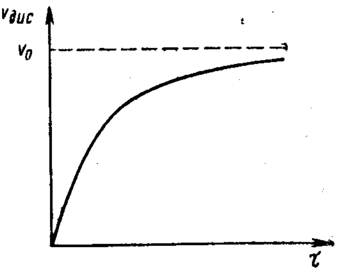


Рис. 1.21

Имеющиеся экспериментальные данные по изучению зависимости скорости движения дислокации от основных факторов пока ограничены [111], однако они показывают, что эта зависимость в первом приближении может быть представлена в виде экспоненциальной функции [111]

$$v_{дис} = v_0 \exp\left(-\frac{A}{\tau T}\right), \tag{1.2}$$

где $v_{дис}$ — скорость движения дислокации; v_0 — скорость звука в данном металле; A — константа материала; τ — действующее касательное напряжение; T — абсолютная температура.

Схематично зависимость $v_{дис} = f(\tau)$ при $T = \text{const}$ представлена на рис. 1.21.

Как следует из формулы (1.2), что получило и некоторое экспериментальное подтверждение, интенсивность увеличения скорости движения дислокаций уменьшается по мере увеличения напряжения, а скорость движения дислокаций асимптотически приближается к скорости звука.

1.4.6. Взаимодействие дислокаций

Как было отмечено ранее, в области дислокации атомы смещены из положений с минимумом потенциальной энергии, что соответствует возникновению поля напряжений, вызывающего увеличение потенциальной энергии в области дислокаций.

Силовые поля дислокаций могут взаимодействовать с силовыми полями примесных атомов, и примесные атомы притягиваются к дислокациям. Причину этого притяжения можно понять, рассмотрев силовое поле краевой дислокации (см. рис. 1.11). Над плоскостью скольжения есть область сжатия, а под плоскостью скольжения — область растяжения. Атомы элемента, растворенного по способу внедрения, притягиваются к области растяжения, так как им легче разместиться среди более удаленных атомов (под дополнительной плоскостью). Атомы элемента, растворенного по способу замещения, притягиваются к области растяжения, если их размеры больше атомов основного металла, и к области сжатия, если они меньше. Такое размещение примесных атомов уменьшает потенциальную энергию, так как энергия итогового поля, имеющего место при слиянии силовых полей дислокаций и инородных атомов, будет меньше суммы энергий силовых полей, создаваемых дислокацией и инородными атомами.

Таким образом, в результате диффузионных процессов дислокации оказываются окутанными облаком примесных атомов (облако Коттрелла). Напряжение, необходимое для начала движения таких дислокаций (для выведения их из облака Коттрелла), больше напряжения, требующегося для последующего движения дислокации. Разница в величинах этих напряжений тем больше, чем больше разница между энергией силового поля дислокации, окруженной инородными атомами, и суммой энергий силовых полей дислокации без инородных атомов и примесных (инородных) атомов без дислокации.

Силовые поля дислокаций могут взаимодействовать не только с силовыми полями инородных атомов, но и между собой. Так, например, разноименные дислокации (положительные и отрицательные), расположенные в одной плоскости скольжения, притягиваются (и при слиянии уничтожаются), а одноименные дислокации отталкиваются. Дислокации, расположенные в пересекающихся плоскостях, также взаимодействуют и стремятся занять положение, соответствующее уменьшению потенциальной энергии кристаллической решетки. В ходе длительного отжига при достаточно высокой температуре дислокации могут смещаться, образовывая узлы или трехмерную сетку с ячейками приблизительно одинакового размера (сетка Франка) [111]. Объединившиеся краевые дислокации, «лишние» плоскости которых пересекаются, требуют для начала движения значительно бо́льших напряжений, чем единичные краевые или винтовые дислокации. Подобные дислокации называют «сидячими».

Наличие трехмерной сетки дислокаций в недеформированном металле создает препятствие началу смещения подвижных дислокаций, что приводит к увеличению предела упругости монокристалла.

Кроме образования пространственной сетки дислокации (также с уменьшением общей энергии) могут образовывать так называемые стенки дислокаций, когда краевые дислокации одного знака, расположенные в параллельных плоскостях скольжения, выстраиваются одна под другой. Параллельные стенки дислокаций разной длины, расположенные на малом удалении друг от друга, приводят к разделению монокристалла на субзерна (блоки мозаики) (см. рис. 1.18). Образование стенок дислокаций, приводящее к подразделению монокристалла на субзерна — полигоны (многоугольники), называют полигонизацией. Для выстраивания дислокаций в стенку необходимо и движение, и переползание дислокаций, а следовательно, полигонизация — термически активируемый процесс.

Увеличение плотности дислокаций в процессе деформации может приводить к тому, что часть возникших дислокаций группируется, образуя новые пространственные сетки и стенки дислокаций, приводя, в частности, к увеличению углов разориентировки блоков мозаики. Последующее движение дислокаций, образовавших сетки и стенки, становится более затрудненным, и в то же время сетки дислокаций и границы блоков мозаики становятся препятствиями для движения через них других (подвижных) дислокаций.

Однако не только пространственные сетки и стенки дислокаций оказывают сопротивление движению дислокаций. Значительное сопротивление движению дислокаций оказывают силовые поля, образованные примесными атомами, а также узлы пересечения плоскостей скольжения (вне зависимости от того, идет ли скольжение по обеим пересекающимся плоскостям или по одной из них). Последнее обстоятельство связано с тем, что в области пересечения плоскостей скольжения могут возникать угловые (сидячие) дислокации, силовое поле которых оказывает значительное сопротивление смещению подвижных дислокаций.

Рост сопротивления движению дислокаций обусловлен также накоплением дислокаций одного знака у препятствий, что повышает энергетический потенциал в области препятствия, и рядом других причин, более детально рассмотренных в специальной литературе по дислокациям [49, 57, 111] и др.

Накопление дислокаций одного знака у препятствий может подавлять деятельность источников дислокаций, что уменьшает возможность появления подвижных дислокаций.

Как было отмечено ранее, силовые поля примесных атомов являются препятствиями для движения дислокаций. Отсюда следует, что с увеличением количества примесных атомов сопротивление движению дислокаций, а следовательно, и сопротивление пластическому деформированию должно увеличиваться.

В то же время наличие подвижных дислокаций создает возможность последовательного смещения групп атомов в новые положения равновесия и уменьшает сопротивление по сравнению со случаем, когда скольжение осуществляется путем одновременного относительного смещения атомов параллельных плоскостей (бездислокационное скольжение). Отсюда следует, что существенное уменьшение числа дислокаций и источников их появления должно повысить сопротивление пластическим деформациям. Последнее подтверждается тем, что у полученных в естественных или искусственных условиях нитевидных монокристаллов («усов»), почти не имеющих дислокаций, сопротивление пластическим деформациям близко к теоретическому, рассчитанному из предположения об одновременном смещении атомов параллельных плоскостей. Отмечается, что совершенное

Рис. 1.22

кристаллическое строение «усов» можно получить, если их поперечные размеры меньше длины звена сетки Франка, т. е. примерно меньше 1 мкм [4]. Нитевидные монокристаллы используют при создании композитных материалов.

В связи с вышесказанным представляет интерес приведенная А. А. Бочваром [7] диаграмма, характеризующая качественную зависимость прочности монокристалла от количества имеющихся в ней искажений кристаллической решетки (рис. 1.22).

Из диаграммы следует, что повышение прочности монокристалла относительно минимального его значения можно получить или путем увеличения количества искажений в решетке, или путем сведения этих искажений к минимуму. Первый путь — это легирование металла такими примесями, которые дают наибольшее (по величине и количеству) искажение кристаллической решетки и, следовательно, создают наибольшие трудности смещению дислокаций. Второй путь — получение весьма чистых металлов, не имеющих искажений в кристаллической решетке, не только за счет устранения примесных атомов, но и за счет уменьшения количества или устранения дислокаций.

1.5. ХОЛОДНАЯ ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛА

Общее остаточное формоизменение поликристаллического тела складывается из пластической деформации составляющих его зерен (изменения их формы и размеров) и их относительного смещения. В соответствии с этим различают внутрикристаллитную и межкристаллитную деформации поликристалла. Деформация отдельных зерен поликристалла осуществляется скольжением или двойникованием, как и для монокристалла. Однако наличие значительного количества зерен в поликристалле приводит к некоторым особенностям процесса его пластической деформации.

Плоскости скольжения в отдельных зернах поликристалла произвольно ориентированы в пространстве. Разная их ориентировка приводит к тому, что при нагружении поликристаллического тела внешними силами пластическая деформация начинается не одновременно во всех зернах. В первую очередь пластическая деформация возникает в зернах с наиболее благоприятной ориентировкой плоскостей скольжения, т. е. такой, при которой последние совпадают с площадками действия наибольших по величине касательных напряжений, вызываемых данной системой сил. Остальные зерна деформируются упруго и могут получать лишь относительное смещение. При линейном растяжении и сжатии наиболее благоприятную для начала пластической деформации ориентировку имеют зерна, у которых плоскости скольжения расположены под углом 45° к направлению действия внешней силы. Внешним проявлением групповых сдвигов в наиболее благоприятно ориентированных зернах являются линии скольжения, наблюдаемые часто на поверхности деформируемого тела и обнаруженные Людерсом и Д. К. Черновым. На рис. 1.23 видны линии скольжения, образовавшиеся на покрытой пленкой окислов поверхности заготовки в начальной стадии вытяжки.

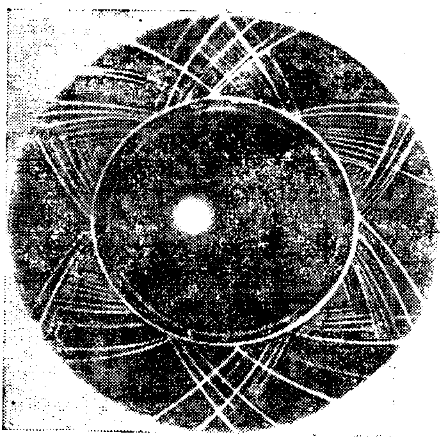


Рис. 1.23

Так как первые сдвиги в зернах происходят в направлениях, по которым в деформируемом теле действуют наибольшие касательные напряжения, то линии скольжения, выявляемые на поверхности поликристаллического тела, позволяют судить о направлениях максимальных сдвигающих напряжений, вызываемых в теле приложенными к нему силами. По мере увеличения деформирующих сил касательные напряжения, действующие в менее благоприятно ориентированных плоскостях скольжения, достигают величины, необходимой для начала пластической деформации, причем последняя начинает охватывать всевозрастающее количество зерен поликристалла. Нормальное напряжение при линейном растяжении или сжатии, соответствующее включению в пластическую деформацию преобладающего большинства зерен металла, является *пределом текучести*.

Разная направленность плоскостей скольжения, а следовательно, и разная направленность сдвигов в соседних зернах приводят к «надавливанию» одного зерна на другое. При этом на отдельных участках поверхности зерен повышается уровень действующих напряжений (как бы возникает концентрация напряжений). Участки поверхности зерен с повышенным уровнем напряжений при деформировании поликристалла становятся дополнительными источниками дислокаций, если локально действующие напряжения способны вызвать смещение одной части кристаллита относительно другой.

Увеличение деформации сверх значения, соответствующего пределу текучести, приводит в поликристалле к тому, что зерна получают вытянутую форму в направлении наиболее интенсивного течения металла. Определенная ориентировка вытянутых в результате пластической деформации зерен называется полосчатостью микроструктуры.

Соотношение между средними величинами наибольших и наименьших размеров зерен указывает на величину деформации зерен.

Одновременно с изменением формы зерен в процессе деформации происходит поворот кристаллографических осей отдельных зерен в пространстве. По мере протекания пластической деформации разница в направлениях кристаллографических осей отдельных зерен уменьшается, а плоскости скольжения стремятся совместиться с направлением наиболее интенсивного течения металла. Это приводит к тому, что при значительной деформации возникает преимущественная ориентировка кристаллографических осей зерен поликристалла, называемая текстурой деформации. Возникновение текстуры приводит к анизотропии свойств поликристалла.

Пластическая деформация металлов может сопровождаться направленной диффузией примесных атомов. Примесные атомы вызывают локальные изменения межатомных расстояний и, как было отмечено ранее, стремятся скапливаться вблизи дислокаций. Дислокации в своем движении способны увлекать за собой часть примесных атомов. Кроме того, примесные атомы, не связанные с дислокациями, также способны смещаться под действием деформирующих сил, проходя по вакансиям, и т. п.

Таким образом, создается направленное перемещение (диффузия) атомов примеси в деформируемых зернах в направлении градиента напряжений. Это явление, названное диффузионной пластической деформацией, исследовали Г. В. Курдюмов [79], С. Т. Конобеевский [36], И. А. Одинг [61] и др.

Явление диффузионной пластичности, так же как и скольжение, может приводить к остаточным изменениям размеров и формы зерен, которые возникают в результате смещения дислокации.

Механизм диффузионной пластичности наиболее сильно проявляется в периферийных слоях зерен и по границам блоков мозаики. Этот механизм сопутствует скольжению. Его роль увеличивается при деформации с нагревом.

Описанные выше процессы внутрикристаллитной деформации являются основными процессами, обусловливающими изменение формы поликристаллического металла. Межкристаллитная деформация в этом смысле играет значительно меньшую роль.

Межкристаллитная деформация, как сказано ранее, выражается в относительном смещении зерен одного относительно другого. При этом на соотношение между внутрикристаллитной и межкристаллитной деформациями поликристалла оказывает влияние различие свойств металла внутри зерен и по их границам.

На границе зерен существует переходный слой, в котором закономерность расположения атомов резко нарушается. Отсутствие закономерного расположения атомов в пограничных слоях зерен является следствием взаимодействия атомов смежных зерен, неправильности их формы и взаимного «надавливания» зерен при кристаллизации из расплава. Кроме того, при затвердевании расплава по границам зерен скапливаются нерастворимые примеси. Таким образом, пограничные слои зерен отличаются от внутренних слоев физико-химическими свойствами. Отсутствие правильности строения металла в пограничных межзеренных слоях приводит к тому, что атомы в этих слоях не находятся в положениях, соответствующих минимуму потенциальной энергии. Отсюда следует, что их подвижность может быть больше, чем во внутренних слоях зерен, а их относительное перемещение (происходящее не по каким-либо определенным плоскостям) может требовать относительно меньших касательных напряжений. Однако возможность относительного смещения атомов в пограничных слоях не всегда больше, чем для внутренних слоев, в которых скольжение осуществляется перемещением дислокации.

Смещение атомов в пограничных слоях зерен затрудняется наличием нерастворимых примесей и неправильной формой поверхности зерен, приводящей к их зацеплениям и заклиниваниям в процессе деформации.

При межкристаллитной деформации возникают повреждения по границам зерен, ведущие при ее развитии к образованию микро- а затем и макротрещин, что в конечном итоге может привести к разрушению поликристалла.

Повреждения по границам зерен уменьшаются с уменьшением величины зерен, так как в этом случае облегчается вращение зерен (особенно равноосных).

Значительная пластическая деформация может происходить в случае достаточно прочных границ зерен, когда межкристаллитные перемещения незначительны и играют второстепенную роль.

Однако межзеренные перемещения могут играть и значительную роль в формоизменении тела, если возникающие повреждения границ зерен «залечиваются» полностью или в значительной степени в процессе деформации. Это явление наблюдается преимущественно при высоких температурах и будет разъяснено далее (стр. 59).

Разная ориентировка плоскостей скольжения в зернах поликристалла, а следовательно, и разная величина упругой деформации, соответствующей началу пластической деформации отдельных зерен, приводят при разгрузке к возникновению остаточных напряжений второго рода. Заметим, что остаточные напряжения условно делят на три рода. Остаточные напряжения первого рода образуют силы, уравновешивающиеся между отдельными частями твердого тела (заготовки), остаточные напряжения второго рода — между отдельными зернами поликристалла и остаточные напряжения третьего рода — между отдельными группами атомов (например, дислокации).

Механизм возникновения остаточных напряжений второго рода приближенно можно представить таким образом: упругая составляющая деформации в зернах с благоприятной ориентировкой плоскостей скольжения («слабые» зерна) меньше, чем в зернах с неблагоприятной ориентировкой плоскостей скольжения («сильные» зерна). При разгрузке упругое изменение размеров «сильных» зерен должно быть больше, чем упругое изменение размеров «слабых» зерен. Однако деформации зерен при разгрузке вследствие их взаимосвязи одинаковы. Равенство деформаций возможно, если «слабые» зерна после уменьшения действующих в них напряжений до нуля будут нагружены затем напряжениями обратного знака. Эти напряжения не позволят напряжениям, действующим в «сильных» зернах, упасть до нуля. Таким образом, при разгрузке поликристаллического тела часть зерен сохранит некоторую долю напряжений, возникших в них при нагружении, а другая часть зерен получит напряжения обратного знака по сравнению с напряжениями, существующими при нагружении. Отмеченное ранее неодновременное включение зерен поликристалла в пластическую деформацию и возникновение при разгрузке остаточных напряжений второго рода приводят к некоторым особенностям деформирования, рассматриваемым ниже.

1. Нарушение линейной зависимости деформаций от напряжений при нагружении выше предела пропорциональности. Действительно, можно ожидать, что линейная зависимость деформаций от напряжений будет существовать лишь до тех пор, пока все зерна поликристалла деформируются упруго, и линейная зависимость нарушается, как только хотя бы часть зерен начнет деформироваться пластически (при том же увеличении напряжения приращение деформации становится больше, чем при упругой деформации).

2. Упругое последействие, которое состоит в том, что образец под постоянной нагрузкой, не превышающей предел текучести, с течением времени получает дополнительную деформацию, а после снятия внешних сил имеет некоторую остаточную деформацию, со временем уменьшающуюся или исчезающую. Это явление можно объяснить тем, что даже сравнительно небольшие напряжения в зернах с благоприятной ориентировкой плоскостей скольжения с течением времени приводят к пробегам дислокаций, вызывающим элементы пластической деформации этих «слабых» зерен, а следовательно, к большей упругой деформации смежных «сильных» зерен и к дополнительной деформации всего образца. Снятие внешних сил приводит к тому, что, восстанавливая свою форму, упругодеформированные («сильные») зерна создадут в «слабых» зернах, получивших пластическую деформацию, оста-

точные напряжения обратного знака по сравнению с напряжениями, действовавшими под нагрузкой. Под действием остаточных напряжений в «слабых» зернах с течением времени за счет пробегов дислокаций возникнут пластические деформации обратного знака. Это приведет к уменьшению величины остаточных напряжений и упругой деформации «сильных» зерен, а следовательно, и к уменьшению остаточной деформации всего поликристаллического тела.

3. Релаксация напряжений, заключающаяся в том, что с течением времени убывает усилие (напряжение), необходимое для поддержания постоянной деформации образца. Объясняется это явление тем, что в деформированных зернах, особенно с благоприятной ориентировкой плоскостей скольжения, наблюдается направленное движение дислокаций, приводящее к тому, что доля упругой деформации в полной деформации зерна убывает, а следовательно, уменьшается величина напряжения, необходимого для поддержания постоянной деформации, которая зависит только от величины упругой деформации.

4. Упругий гистерезис — явление, характеризующееся тем, что линия нагружения на графике изменения усилия в зависимости от деформации не совпадает с линией разгрузки, образуя петлю гистерезиса, характеризующую работу, выделившуюся в процессе деформации в виде теплоты. Образование петли гистерезиса можно объяснить следующим: при нагружении выше предела пропорциональности в зернах с благоприятной ориентировкой наблюдается появление элементов пластических деформаций, благодаря чему увеличивается прирост деформации образца при том же увеличении напряжения по сравнению с линейной зависимостью. При разгрузке уменьшение деформаций «сильных» зерен вначале снимает упругую деформацию «слабых» зерен, затем создает в них упругую деформацию обратного знака, которая при достаточной величине действующих напряжений начинает частично переходить в пластическую. Вследствие этого в конечной стадии разгрузки интенсивность убывания деформации по мере уменьшения деформирующих сил возрастает по сравнению с линейной зависимостью.

Если за счет процессов упругого последействия упругие деформации зерен полностью снимутся, то петля гистерезиса будет замкнутой.

Если принять, что в процессе нагружения и разгрузки происходит релаксация напряжений в «сильных» зернах, то получает объяснение наблюдаемое при последовательных нагружениях растягиваемого образца до напряжений, близких к пределу текучести, приращение пластической деформации за каждый цикл нагружения.

5. Эффект Баушингера, характеризующийся тем, что образец, предварительно деформированный за предел текучести, уменьшает сопротивление деформированию (т. е. пределы пропорциональ-

ности, упругости, текучести) при последующей деформации обратного знака. Объясняется это тем, что зерна с наиболее благоприятной ориентировкой плоскостей скольжения при деформировании образца с обратным знаком деформации получают пластические деформации при напряжениях меньших, чем при прямом деформировании. Действительно, при разгрузке эти зерна за счет снятия упругой деформации в соседних зернах получат упругие деформации обратного знака, и, следовательно, потребуется меньшее увеличение напряжения (при деформации обратного знака), чтобы в этих зернах возникли пластические деформации.

6. Наличие площадки текучести. Площадка текучести, встречающаяся на диаграмме растяжения, представляет собой участок этой диаграммы, на протяжении которого удлинение образца происходит при постоянном напряжении, соответствующем пределу текучести $\sigma_т$ (физическому в отличие от условного σ_{02}). Если на диаграмме растяжения наблюдается резкий перегиб, так называемый зуб, то предел текучести $\sigma_т$ меньше напряжения, соответствующего вершине зуба текучести и называемого верхним пределом текучести (ВПТ). В этом случае величину $\sigma_т$ иногда называют нижним пределом текучести (НПТ). Площадка текучести наблюдается у некоторых сплавов цветных металлов, а также у отожженной низкоуглеродистой стали.

Существует несколько гипотез, объясняющих появление площадки текучести. Одна из них — теория скелетной сетки — основана на том, что в определенных условиях по границам зерен и мозаичных блоков образуется достаточно прочная и хрупкая скелетная сетка. Пластической деформации оказывают сопротивление не только сами зерна, но и эта сетка. При напряжениях, соответствующих ВПТ, хрупкая сетка разрушается и последующее деформирование зерен требует меньших по величине напряжений. По другой гипотезе, если дислокации окружены облаками примесных атомов, которые существенно увеличивают напряжение, необходимое для начала движения дислокаций, то с развитием пластической деформации, когда дислокации выйдут из облаков примесных атомов, последующая деформация может требовать меньших напряжений. Существенное уменьшение сопротивления деформированию приводит к локализации пластических деформаций вблизи зерен с наиболее благоприятной ориентировкой плоскостей скольжения, а возникающая при этом концентрация напряжений способствует распространению пластических деформаций от этих локальных участков. При этом в деформируемом теле (и на его поверхности) образуются зоны (линии) сосредоточенной пластической деформации (линии течения и линии скольжения), которые увеличиваются по мере деформирования и сливаются, охватывая весь объем деформируемого тела при деформациях, бóльших, чем максимальная деформация, соответствующая площадке текучести.

1.6. УПРОЧНЕНИЕ ПРИ ХОЛОДНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Пластическая деформация приводит к значительному изменению механических, физических и химических свойств металла. В деформируемом металле с увеличением степени деформации увеличиваются все показатели сопротивления деформированию: пределы упругости, пропорциональности, текучести и прочности. Увеличивается также твердость металла. Одновременно с этим наблюдается уменьшение показателей пластичности (относительное удлинение, относительное сужение, ударная вязкость); увеличивается электрическое сопротивление, уменьшаются сопротивление коррозии, теплопроводность, изменяются магнитные свойства ферромагнитных металлов и т. п. Совокупность явлений, связанных с изменением механических и физико-химических свойств металлов в процессе пластической деформации, называется упрочнением (наклепом). До настоящего времени физическая природа упрочнения полностью не выяснена.

Изменение механических свойств металлов и, в частности, увеличение их прочностных характеристик, как указано ранее, в значительной степени объясняется возрастающим по мере деформирования сопротивлением смещению дислокаций.

Одними из основных участков повышенного сопротивления смещению дислокаций являются участки пересечения плоскостей скольжения, на которых взаимодействие силовых полей дислокаций, перемещающихся по пересекающимся плоскостям, приводит к их «застреванию» и к последующему скоплению около них дислокаций одинакового знака. Наглядным подтверждением сказанного является то, что монокристаллы с гексагональной кристаллической решеткой (одна плоскость скольжения) упрочняются значительно менее интенсивно, чем монокристаллы с кубической кристаллической решеткой, имеющие несколько плоскостей скольжения. В то же время можно полагать, что границы зерен в поликристалле являются значительными препятствиями для выхода дислокаций и способствуют скоплению около них дислокаций одного знака, а следовательно, и более интенсивному упрочнению. Последнее подтверждается тем, что для металлов с гексагональной решеткой кривые напряжение — деформация для поликристаллического металла и монокристалла резко различаются (рис. 1.24).

В то же время для металлов с кубической решеткой такой разницы не наблюдается, очевидно, вследствие того, что и монокристалл имеет значительное количество возможных плоскостей скольжения, а следовательно, и препятствий для прохождения дислокаций.

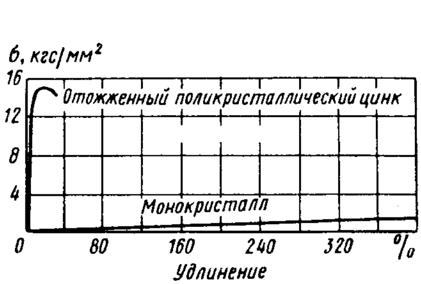


Рис. 1.24

Однако можно полагать, что упрочнение является следствием не только увеличения сопротивления смещению дислокаций по мере деформирования. Влияют на изменение механических свойств при упрочнении и блокообразование, и искривление плоскостей скольжения, и появление «обломков» кристаллов в пачках скольжения (резкий поворот отдельных ячеек блоков мозаики).

Кроме того, рядом исследований показано, что на изменение прочностных свойств в процессе деформирования сплавов, имеющих метастабильные структуры некоторых составляющих, оказывает влияние изменение структурного состояния этих фаз.

По представлениям С. Т. Кишкина [35], в процессе пластической деформации стали по плоскостям скольжения выделяются субмикроскопические частицы (карбиды), блокирующие сдвиги и способствующие упрочнению металла.

С. Т. Конобеевский и М. А. Захарова [79] рентгенографическим методом обнаружили, что в процессе деформации твердого раствора меди в алюминии происходит распад этого раствора с выделением дисперсных частиц по плоскостям скольжения.

С. С. Носырева и М. В. Буракова [59] наблюдали превращение переохлажденного аустенита в мартенсит по плоскостям скольжения в процессе пластической деформации.

Выделение субмикроскопических частиц по плоскостям скольжения, очевидно, является следствием значительного увеличения температуры по этим плоскостям и в малых объемах, прилегающих к ним.

Повышение температуры является дополнительным источником энергии, необходимой для протекания диффузионных процессов и, в частности, для коагуляции и выпадения карбидов на плоскостях скольжения.

Изменениями в строении металла и взаимном расположении атомов решетки объясняют и другие изменения свойств металлов в результате пластической деформации.

1.7. КРИВЫЕ УПРОЧНЕНИЯ

Кривые упрочнения дают зависимость величины напряжения, действующего в пластически деформируемом теле при линейном напряженном состоянии, от величины деформации.

Так как напряжения, вызывающие пластическую деформацию, зависят от многих факторов, в том числе от температурно-скоростных условий деформирования, то кривые упрочнения для каждого металла и сплава следует устанавливать применительно к конкретным температурно-скоростным условиям деформирования.

Меняющиеся в зависимости от величины и скорости деформации напряжения, вызывающие пластическую деформацию при линейном напряженном состоянии при данных температурно-скоростных условиях деформирования, называют **напряжением текучести** и обозначают σ_s.

Для экспериментального определения σ_s необходимо создать такие условия деформирования, при которых деформации равномерно распределены по деформируемой части заготовки, а напряженное состояние линейное. Наиболее подходящими для построения кривых упрочнения являются данные, получаемые при испытании на растяжение или сжатие (осадку). Если в этих испытаниях имеет место линейное напряженное состояние, то напряжение текучести определяется как частное от деления усилия деформирования на истинную площадь поперечного сечения образца в данный момент деформирования (поэтому напряжение текучести называют также истинным напряжением в отличие от условных, см. стр. 44).

При испытании на растяжение линейное напряженное состояние существует лишь до момента начала образования шейки, в которой нарушается равномерность распределения деформаций, а напряженное состояние становится объемным. Поэтому построение кривой упрочнения для деформаций бóльших, чем деформация, соответствующая началу образования шейки, затрудняется и возможно лишь с известным приближением на основании разработанных методов.

При испытании на осадку в пределах пластических деформаций нет ограничения по величинам деформаций, при которых могут быть определены значения напряжения текучести, однако необходимо исключить влияние контактного трения, что представляет довольно сложную задачу.

Л. А. Шофман [120] предложил способ исключения влияния сил трения путем испытания на осадку нескольких образцов с разным отношением диаметра d к высоте h и определением напряжения текучести путем экстраполяции зависимости удельных усилий осадки от d/h при одинаковой степени деформации на $d/h = 0$. Неплохие результаты дает осадка образцов с торцовыми выточками, заполненными густой смазкой.

Рассмотрим некоторые кривые упрочнения, полученные при испытании на растяжение.

Показателями формоизменения образца, оценивающими степень деформации, могут быть относительное удлинение образца при растяжении $\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$ или относительное уменьшение площади поперечного сечения $\psi = \frac{F_0 - F}{F_0}$, где l_0 и F_0 — исходные значения расчетной длины образца и площади его поперечного сечения, а l и F — текущие значения длины и площади поперечного сечения образца в данный момент деформирования.

Характер кривых упрочнения для некоторых металлов и сплавов показан на рис. 1.25. Наиболее интенсивное увеличение напряжения текучести происходит в начальной стадии деформи-

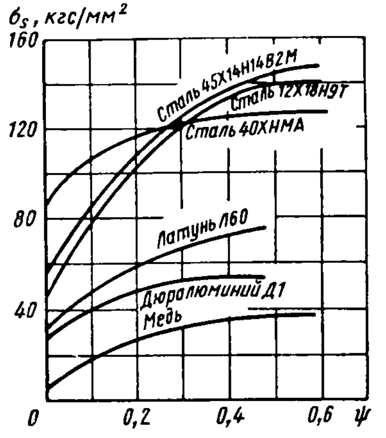


Рис. 1.25

рования, а при некоторых значениях степени деформации (порог упрочнения) дальнейшая деформация не вызывает значительного изменения величины напряжения текучести.

В зависимости от принятого показателя степени деформации различают кривые упрочнения первого и второго рода. В кривых упрочнения первого рода напряжение текучести дается в зависимости от относительного удлинения, а в кривых упрочнения второго рода — от относительного сужения.

Заметим, что при построении кривых упрочнения по данным испытания на осадку деформацией первого рода является относительное увеличение диаметра образца, а второго рода — относительное уменьшение высоты образца. Эти деформации эквивалентны по упрочняющему эффекту деформациям относительного удлинения и относительного сужения при испытании на растяжение. Характерной особенностью эквивалентных деформаций является то, что их величина теоретически изменяется в одинаковых пределах (от 0 до ∞ для деформаций первого рода и от 0 до 1 для деформаций второго рода).

Как видно из рис. 1.25, зависимость напряжения текучести от деформации носит сложный характер. При отыскании приближенных зависимостей, учитывающих влияние упрочнения на процесс деформирования, в теории обработки металлов давлением часто используют линейную аппроксимацию кривой упрочнения. В качестве прямой, приближенно характеризующей изменение напряжения текучести в зависимости от деформации, чаще всего принимают касательную, проведенную к кривой упрочнения в точке, соответствующей окончанию этапа равномерного удлинения при линейном растяжении и началу образования шейки. Известно, что этому моменту соответствует максимум на кривой усилие — деформация или условное напряжение — деформация, где под условным напряжением понимается частное от деления растягивающего усилия P на исходную площадь поперечного сечения F_0:

$$\sigma_{усл} = \frac{P}{F_0}.$$

В то же время усилие в любой момент деформирования можно выражать через напряжение текучести σ_s и действительную площадь поперечного сечения образца F в данный момент деформирования:

$$P = \sigma_s F. \qquad (1.3)$$

Дифференцируя уравнение (1.3), находим

$$dP = \sigma_s\, dF + F\, d\sigma_s. \qquad (1.4)$$

Из выражения (1.4) видно, что в процессе растяжения упрочнение способствует росту усилия ($d\sigma_s$ положительно), в то время как уменьшение площади поперечного сечения образца способствует уменьшению усилия (dF отрицательно). На этапе равномерного удлинения превалирует влияние упрочнения, и растягивающее усилие возрастает, а с началом образования шейки превалирует уменьшение площади поперечного сечения, и усилие убывает. Начало образования шейки соответствует моменту, когда интенсивность роста усилия в результате упрочнения по абсолютному значению равна интенсивности убывания усилия вследствие уменьшения площади поперечного сечения (завершение этапа «устойчивой» деформации):

$$dP_ш = \sigma_ш\, dF_ш + F_ш\, d\sigma_ш = 0. \qquad (1.5)$$

Пользуясь равенством (1.5), можно установить так называемые свойства кривых упрочнения, характеризующиеся величинами отрезков, отсекаемых указанной касательной на осях координат, знание которых облегчает их построение по данным стандартного испытания на растяжение.

Рассмотрим кривую упрочнения первого рода (рис. 1.26). Напряжение текучести для любого момента деформации до начала образования шейки можно определить из соотношения (1.6) по текущим значениям условного напряжения $\sigma_{усл}$ и площади поперечного сечения F:

$$\sigma_s = \sigma_{усл} \frac{F_0}{F}. \qquad (1.6)$$

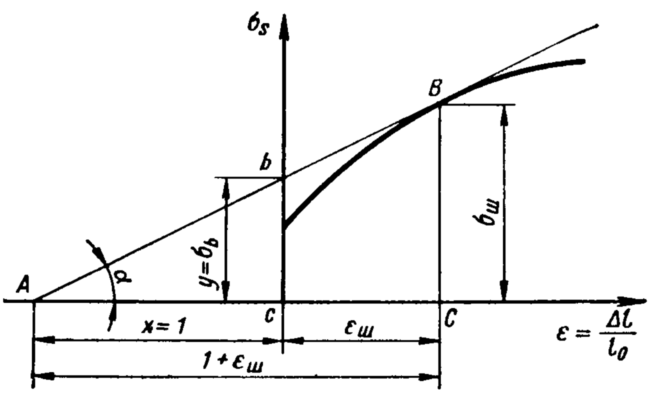


Рис. 1.26

В момент, соответствующий началу образования шейки, условное напряжение равно пределу прочности $\sigma_в$ (усилие растяжения имеет максимальную величину). Напряжение текучести $\sigma_ш$, соответствующее этому моменту, определится выражением

$$\sigma_ш = \sigma_в \frac{F_c}{F_ш}, \tag{1.7}$$

где $F_ш$ — площадь поперечного сечения образца в момент образования шейки при его растяжении.

Из условия постоянства объема при равномерном удлинении образца можно установить

$$F = \frac{F_0 l_0}{l} = \frac{F_0 l_0}{l_0 + \Delta l} = \frac{F_0}{1+\varepsilon}; \quad dF = -\frac{F_0\, d\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}, \tag{1.8}$$

где $\varepsilon = \dfrac{l - l_0}{l_0}$ — относительное удлинение образца.

Соотношения (1.6)—(1.8) справедливы до момента начала образования шейки включительно, когда $F = F_ш$; $\varepsilon = \varepsilon_ш$ и $d\varepsilon = d\varepsilon_ш$.

Подставляя значения F и dF для момента начала образования шейки из уравнения (1.8) в (1.5), после несложных преобразований получим

$$dP = \left(d\sigma_ш - \frac{\sigma_ш\, d\varepsilon_ш}{1+\varepsilon_ш}\right)\frac{F_0}{1+\varepsilon_ш} = 0; \tag{1.9}$$

отсюда следует, что

$$\frac{d\sigma_ш}{d\varepsilon_ш} = \frac{\sigma_ш}{1+\varepsilon_ш}. \tag{1.10}$$

Но $d\sigma_ш/d\varepsilon_ш = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной, проведенной к кривой упрочнения в точке, соответствующей началу образования шейки. Найдем величины отрезков, отсекаемых этой касательной на оси абсцисс и на оси ординат (рис. 1.26).

Из треугольника ABC находим, что $AC + \varepsilon_ш = \sigma_ш/\operatorname{tg}\alpha = 1 + \varepsilon_ш$, откуда следует, что $AC = 1$.

Из подобия треугольников ABC и Abc следует, что $\dfrac{bc}{\sigma_ш} = \dfrac{1}{1+\varepsilon_ш}$, а величина $bc = \dfrac{\sigma_ш}{1+\varepsilon_ш}$. Используя соотношения (1.7) и (1.8), находим, что $bc = \sigma_в$.

Таким образом, *касательная, проведенная к кривой упрочнения первого рода в точке, соответствующей началу образования шейки, отсекает на отрицательном направлении оси деформаций отрезок, численно равный единице, а на оси напряжений текучести — отрезок, численно равный пределу прочности.*

Рассмотрим свойства кривых упрочнения второго рода (рис. 1.27). Относительное уменьшение площади поперечного

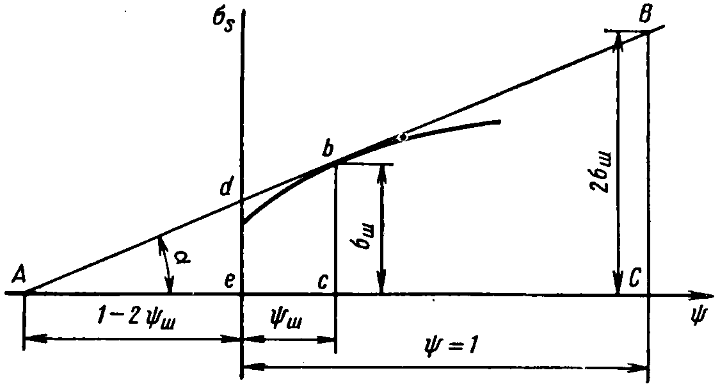


Рис. 1.27

сечения образца при растяжении определяется выражением $\psi = \frac{F_0 - F}{F_0}$, откуда следует, что

$$F = F_0 (1 - \psi) \text{ и } dF = -F_0\, d\psi. \tag{1.11}$$

Подставляя из уравнения (1.11) значения F и dF для момента, соответствующего началу образования шейки, когда $\psi = \psi_ш$, а $d\psi = d\psi_ш$ в уравнение (1.5), можем получить соотношение

$$\frac{d\sigma_ш}{d\psi_ш} = \frac{\sigma_ш}{1 - \psi_ш}. \tag{1.12}$$

Отношение $d\sigma_ш/d\psi_ш$ является тангенсом угла α наклона касательной, проведенной к кривой упрочнения второго рода в точке, соответствующей началу образования шейки. Отсюда следует, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma_ш}{1 - \psi_ш}$, а из треугольников ABC и Abc находим, что на отрицательном направлении оси абсцисс касательная отсекает отрезок, численно равный $1—2\psi_ш$, а на перпендикуляре к оси абсцисс в точке $\psi = 1$ — отрезок, численно равный $2\sigma_ш$.

Таким образом, *касательная, проведенная к кривой упрочнения второго рода в точке, соответствующей началу образования шейки, отсекает на перпендикуляре к оси абсцисс в точке* $\psi = 1$ *отрезок, численно равный удвоенному значению напряжения текучести в момент начала образования шейки.*

Кривыми упрочнения можно пользоваться для анализа характера и степени влияния упрочнения на величину необходимых для деформирования усилий при обработке металлов давлением. Для облегчения аналитического решения задачи по установлению влияния упрочнения на величину усилия деформирования и на распределение напряжений в деформируемом теле необходимо кривую упрочнения представить в виде уравнения, связывающего напряжение текучести со степенью деформации. С целью упрощения функциональной зависимости напряжений текучести от степени деформации кривую упрочнения заменяют прямой линией или степенной кривой.

Рассмотрим случай, когда в качестве прямой линии, приближенно характеризующей влияние упрочнения на величину напряжения текучести, принята касательная, проведенная к кривой упрочнения в точке, соответствующей началу образования шейки. Уравнение этой прямой в координатах σ_s—ψ может быть записано в виде

$$\sigma_s = \sigma_{т0} + П\psi, \tag{1.13}$$

где $\sigma_{т0}$ — экстраполированный предел текучести (отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат при $\psi = 0$); $П$ — модуль упрочнения, являющийся тангенсом угла α наклона прямой к оси абсцисс.

Используя соотношения (1.12) и (1.11), а также учитывая, что $\sigma_ш = \sigma_в \frac{F_0}{F_ш}$, можно получить

$$П = \frac{\sigma_в}{(1 - \psi_ш)^2}. \tag{1.14}$$

Величину $\sigma_{т0}$ можно найти из треугольника Ade (рис. 1.27), и формула для определения $\sigma_{т0}$ с использованием выражения (1.14) для определения $\operatorname{tg}\alpha = П$ получит вид

$$\sigma_{т0} = \frac{\sigma_в (1 - 2\psi_ш)}{(1 - \psi_ш)^2}. \tag{1.15}$$

Величины σ_s, определенные расчетом по формуле (1.13), при всех значениях ψ, за исключением $\psi = \psi_ш$, будут несколько больше значений σ_s, определяемых по кривой упрочнения, причем особенно заметной будет разница между этими величинами при малых степенях деформации ($\psi \ll \psi_ш$).

Аналогичные выражения можно получить и для линейной зависимости $\sigma_s = f(\varepsilon)$ для кривой упрочнения первого рода.

Более точно отражает действительную зависимость напряжения текучести от величины ψ степенная функция вида

$$\sigma_s = C\psi^n. \tag{1.16}$$

Значения C и n можно определить следующим образом: при $\psi = \psi_ш$; $\sigma_s = \sigma_ш$, а следовательно, $C = \sigma_ш/\psi_ш^n$.

Подставляя значение C в уравнение (1.16), получаем

$$\sigma_s = \frac{\sigma_ш}{\psi_ш^n}\psi^n. \tag{1.17}$$

Из уравнений (1.3), (1.11) и (1.17) может быть найдена формула для определения усилия P в любой момент растяжения (до начала образования шейки):

$$P = \frac{\sigma_ш}{\psi_ш^n}\psi^n F_0 (1 - \psi). \tag{1.18}$$

Дифференцируя выражение (1.18) и приравнивая (для момента начала образования шейки) $dP = 0$, находим, что

$$n = \frac{\psi_ш}{1 - \psi_ш}.$$

Подставляя значение n в уравнение (1.17) и выражая в последнем $\sigma_ш$ через $\sigma_в$ по соотношению $\sigma_ш = \sigma_в \frac{F_0}{F_ш} = \frac{\sigma_в}{1 - \psi_ш}$, окончательно получаем

$$\sigma_s = \frac{\sigma_в}{1 - \psi_ш} \left(\frac{\psi}{\psi_ш} \right)^{\frac{\psi_ш}{1-\psi_ш}}. \tag{1.19}$$

Формула (1.19), предложенная С. И. Губкиным, как показало сопоставление расчетных значений σ_s с фактическими, достаточно правильно отражает характер и степень влияния упрочнения на величину истинного напряжения.

Однако при анализе процессов деформирования с малыми пластическими деформациями использование формулы (1.19) может привести к значительным погрешностям, так как эта формула не выявляет то обстоятельство, что пластическая деформация возникает при напряжении, равном пределу текучести $\sigma_т$ (напряжение σ_s возрастает от нуля). В этих случаях целесообразно использование степенной аппроксимации кривой упрочнения в виде двучлена

$$\sigma_s = \sigma_т + A\psi^m. \tag{1.20}$$

Коэффициенты A и m могут быть найдены аналогично тому, как это было сделано при получении формулы (1.19), и тогда формула (1.20) может быть записана в виде

$$\sigma_s = \sigma_т + \left(\frac{\sigma_в}{1 - \psi_ш} - \sigma_т \right) \left(\frac{\psi}{\psi_ш} \right)^{\frac{\sigma_в \psi_ш}{(1-\psi_ш)\,[\sigma_в - \sigma_т\,(1-\psi_ш)]}}. \tag{1.20а}$$

Можно аналогично найти уравнения, аппроксимирующие кривую упрочнения и в иных координатах. В теории обработки давлением пользуются кривыми упрочнения, построенными в координатах напряжение текучести — логарифмическая деформация (выражается натуральным логарифмом отношения конечного размера образца к начальному), или же кривыми в координатах интенсивность напряжений—интенсивность деформаций (см. стр. 94, 116).

В частности, если кривая упрочнения дана в виде $\sigma_s = f(\delta)$, где $\delta = \ln l/l_0 = \ln F_0/F$ — логарифмическая деформация, то ее аппроксимация линейной и степенной зависимостью, полученная подобно предыдущему, имеет вид:

а) линейная аппроксимация

$$\sigma_s = \sigma_{т\,0} + П\delta, \tag{1.21}$$

где $\sigma_{т\,0} = \sigma_ш (1 - \delta_ш) = \sigma_в e^{\delta_ш} (1 - \delta_ш)$;

$$П = \sigma_ш = \sigma_в e^{\delta_ш};$$

$\delta_ш$ — логарифмическая деформация, соответствующая началу образования шейки;

б) степенная аппроксимация

$$\sigma_s = \sigma_ш \left(\frac{\delta}{\delta_ш}\right)^{\delta_ш} = \sigma_в e^{\delta_ш} \left(\frac{\delta}{\delta_ш}\right)^{\delta_ш}. \tag{1.22}$$

Заметим, что в некоторых случаях удобство использования логарифмических деформаций в кривых упрочнения заключается в том, что логарифмические деформации обладают свойством аддитивности (суммарная деформация равна сумме промежуточных деформаций), и, кроме того, в том, что логарифмические деформации, выраженные через изменение линейных размеров, при растяжении и сжатии являются эквивалентными по упрочняющему эффекту (изменяются в одинаковых пределах).

Глава 2

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ НА ПРОЦЕСС ДЕФОРМИРОВАНИЯ

2.1. ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ; ВОЗВРАТ И РЕКРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

При нагревании деформируемого металла в последнем возникают разупрочняющие процессы, а именно возврат и рекристаллизация. Таким образом, при повышенных температурах в процессе деформации протекают одновременно как упрочняющие, так и разупрочняющие процессы.

При холодной деформации вследствие неодинакового направления плоскостей скольжения в зернах, неравномерного распределения деформаций в объеме заготовки, различия в форме, размерах и свойствах зерен последние получают разную по величине упругую деформацию. В результате после снятия внешних усилий в холоднодеформированном металле возникают остаточные напряжения.

При нагреве до определенных температур амплитуда тепловых колебаний атомов увеличивается настолько, что облегчает возвращение атомов в положение равновесия. В связи с этим возникающие при деформировании указанные выше упругие деформации зерен в значительной мере выравниваются, что обеспечивает снижение остаточных напряжений после снятия внешних усилий (если не учитывать термических напряжений, которые могут возникнуть при неравномерном охлаждении заготовки после деформирования). Это явление называется возвратом (отдыхом).

Для чистых металлов возврат проявляется при абсолютных температурах выше (0,25—0,30) $T_{пл}$, где $T_{пл}$ — абсолютная температура плавления. Наличие растворимых примесей в металле приводит к увеличению температуры возврата (отдыха).

Возврат в процессе обработки приводит к некоторому уменьшению сопротивления деформированию и к увеличению пластичности. Тем не менее деформирование при температурах возврата сопровождается упрочнением, хотя интенсивность его несколько меньше.

Возврат не оказывает влияния на размеры и форму зерен, которые при деформации с наличием возврата, так же как и при его отсутствии, вытягиваются в направлении более интенсивного течения металла. Возврат также не препятствует образованию текстуры при деформации.

Возврат протекает во времени; с увеличением температуры скорость возврата увеличивается. В связи с этим эффект возврата зависит от соотношения между температурой и скоростью деформации. Повышение скорости деформации при данной температуре может снизить эффект возврата.

Возврат происходит также при нагреве (отпуске) металла после его холодного деформирования.

Нагрев холоднодеформированного металла до температуры возврата не оказывает заметного влияния на показатели его механических свойств (показатели прочности незначительно уменьшаются, а показатели пластичности несколько увеличиваются).

Возврат повышает сопротивление холоднодеформированного металла коррозии и резко уменьшает возможность самопроизвольного растрескивания. Последнее явление наблюдается в деталях, полученных холодной штамповкой, особенно из латуни, и происходит под действием остаточных напряжений при уменьшении сопротивления разрушению за счет межкристаллитной коррозии.

У ряда металлов и сплавов, например у углеродистой стали, при температурах возврата может возникать явление старения, оказывающее противоположное возврату влияние на механические свойства. Старение приводит к увеличению показателей прочности при одновременном уменьшении показателей пластичности. Физическая природа старения окончательно еще не выяснена. Предполагается, что изменение механических свойств в процессе старения происходит вследствие выпадения мелкодисперсных частиц примесей по плоскостям скольжения. Есть данные, что процесс старения связан с концентрацией примесных атомов вблизи дислокаций, а образующиеся «облака» примесных атомов затрудняют движение дислокаций [111].

Увеличение температуры деформируемого металла сверх температуры возврата ведет к возникновению процесса рекристаллизации. Рекристаллизация при пластической деформации заключается в появлении зародышей, возникновении и росте новых зерен взамен деформированных.

Возможность рекристаллизации обусловлена тем, что увеличение температуры деформируемого металла поднимает энергетический потенциал атомов настолько, что последние получают возможность перегруппировок и интенсивного обмена местами. Зародышами новых зерен становятся имеющиеся в деформируемом металле ячейки с относительно правильной, не искаженной в процессе деформации решеткой (отдельные блоки мозаики, обломки зерен на плоскостях скольжения или в пограничных межзеренных слоях). К этим зародышам в соответствии с параметрами решетки пристраиваются атомы, смежные с зародышами зерен, и начинают расти новые зерна. Последние увеличиваются в размерах и с течением времени могут полностью поглотить атомы деформированных зерен. Вследствие одинаковой возможности роста новых зерен по всем направлениям новые образующиеся из зародышей зерна равноосны, т. е. имеют в среднем одинаковые размеры по всем направлениям.

Таким образом, деформация металла при температурах выше температуры рекристаллизации сопровождается двумя противоположно и одновременно действующими процессами: деформацией зерен (упрочнением) и их рекристаллизацией.

Процесс рекристаллизации происходит во времени с некоторой скоростью, которая зависит от температуры и степени деформации. Чем выше температура и степень деформации, которую получает деформируемое тело, тем выше скорость рекристаллизации. Конечный результат зависит от соотношения между скоростью деформации и скоростью рекристаллизации. Если в процессе деформации рекристаллизация идет с такой скоростью, что в результате все зерна деформированного металла получают равноосную форму, а кристаллическое строение их соответствует строению недеформированных зерен, то изменения свойств металла, вызываемого упрочнением, не произойдет.

Для чистых металлов, по данным А. А. Бочвара, температура начала рекристаллизации определяется из соотношения

$$T_{\text{рекр}} \approx 0{,}4 T_{\text{пл}},$$

где $T_{\text{рекр}}$ — абсолютная температура рекристаллизации; $T_{\text{пл}}$ — абсолютная температура плавления.

Наличие растворимых примесей несколько повышает температуру рекристаллизации. Температура начала рекристаллизации для сплавов обычно выше, чем для составляющих сплав металлов, хотя температура плавления ниже. Объясняется это, очевидно, тем, что перестройка решетки из разнородных атомов требует более высокого энергетического потенциала.

В процессе рекристаллизации облегчается диффузия атомов как внутри кристаллитов, так и по границам зерен, что способствует уменьшению химической неоднородности зерен и снятию повреждений, возникающих по границам зерен в результате межкристаллитной деформации.

Размеры равноосных зерен в металле, деформированном при наличии рекристаллизации, зависят от температуры, при которой происходит рекристаллизация, от степени деформации, а также от скорости деформации. Связь между величиной зерна после деформации с рекристаллизацией, температурой и степенью деформации обычно представляется объемными диаграммами рекристаллизации (второго рода), которые строятся по результатам специально проводимых экспериментов и являются характерными для каждого металла и сплава. На рис. 2.1 представлена объемная диаграмма рекристаллизации низкоуглеродистой стали. Аналогичный характер имеют диаграммы рекристаллизации и для других металлов и сплавов. Особенностью зависимости величины зерна после деформации с рекристаллизацией от степени деформации является наличие так называемых критических степеней

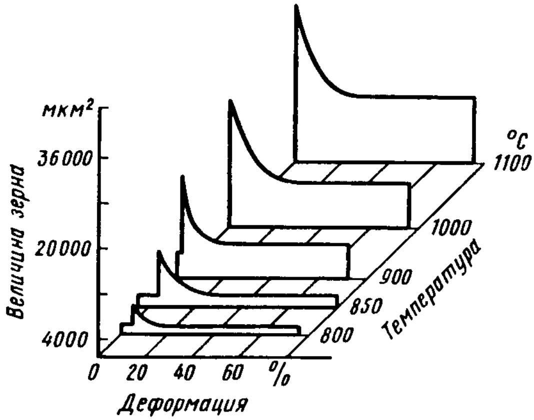


Рис. 2.1

деформации, при которых наблюдается резкое увеличение размеров рекристаллизованных зерен. Величина критической степени деформации при температурах, близких к температуре начала рекристаллизации, обычно не превышает 8—10% и уменьшается при увеличении температуры (зона критических степеней деформации смещается к началу координат).

Наличие критических степеней деформации можно объяснить следующим образом. В начальной стадии деформация происходит в основном за счет внутрикристаллитных процессов без нарушения межкристаллического вещества, обволакивающего зерна. Вследствие этого увеличение размеров зерен при рекристаллизации путем их объединения затруднено. Кроме того, при относительно малой величине деформаций количество образовавшихся блоков — обломков кристаллитов — невелико, а следовательно, невелико и число возможных центров рекристаллизации. При критических степенях число центров рекристаллизации остается небольшим (несколько увеличивается), однако межкристаллическое вещество частично разрушается, что приводит к непосредственному соприкосновению кристаллитов. Это обстоятельство в процессе рекристаллизации облегчает присоединение атомов соседних зерен к новому зерну, растущему из центра рекристаллизации, что в конечном итоге приводит к объединению нескольких деформированных зерен в одно, т. е. к увеличению размеров рекристаллизованных зерен.

Дальнейшее увеличение степени деформации приводит к увеличению числа центров рекристаллизации, а следовательно, и числа рекристаллизованных зерен, что при данном объеме тела дает уменьшение их размеров.

С увеличением температуры прочность межкристаллического вещества уменьшается, непосредственное соприкосновение кристаллитов происходит при меньших степенях деформации, что и вызывает смещение критических степеней деформации к началу координат. С ростом температуры увеличивается подвижность атомов, облегчающая объединение соседних зерен в процессе рекристаллизации, что приводит к относительному увеличению размеров рекристаллизованных зерен при всех степенях деформации.

В работах ряда отечественных ученых было показано, что у некоторых сортов стали при весьма высоких степенях деформации наблюдается появление второго максимума на кривых рекристаллизации (рис. 2.2). Появление второго максимума связывают с тем, что при больших деформациях образующаяся текстура и размытие межкристаллических прослоек облегчают объединение смежных зерен в процессе рекристаллизации.

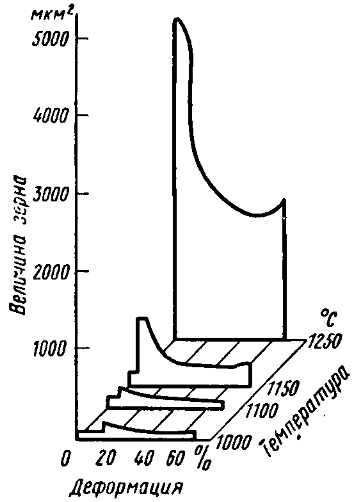


Рис. 2.2

Величина зерна после рекристаллизации зависит еще и от длительности выдержки нагретого металла при температурах, превышающих температуру рекристаллизации. При длительной выдержке наблюдается так называемая собирательная рекристаллизация, сущность которой состоит в том, что размеры равноосных зерен, получившихся в результате рекристаллизации обработки, увеличиваются вследствие их объединения.

Собирательная рекристаллизация протекает медленнее, чем рекристаллизация обработки. Возможность роста зерен при собирательной рекристаллизации обусловлена стремлением атомов в процессе перестройки занять положения, отвечающие минимуму потенциальной энергии. Искажения правильности взаимного расположения атомов, имеющиеся в поверхностных слоях зерен, увеличивают потенциальную энергию, накопленную в поликристалле. При увеличении размеров зерен суммарная поверхность их уменьшается, а следовательно, уменьшается и накопленная в теле потенциальная энергия. Особенно интенсивно собирательная рекристаллизация происходит при температурах, значительно превышающих температуру начала рекристаллизации.

Рекристаллизация происходит также и при нагреве холоднодеформированного металла до температуры, несколько превышающей температуру начала рекристаллизации (низкий или рекристаллизационный отжиг).

Величина зерен, получившихся в результате рекристаллизации холоднодеформированного металла, зависит от степени деформации, которую получила заготовка или отдельные ее участки, от температуры рекристаллизации и от времени выдержки при этой температуре. Характер зависимости величины зерна от этих факторов аналогичен рассмотренному ранее. В этом случае также имеются критические степени деформации, при которых наблюдается значительное увеличение размеров рекристаллизованных зерен, причем тем больше, чем выше температура нагрева (диаграммы рекристаллизации первого рода). Интересно отметить, что температура начала рекристаллизации несколько уменьшается с увеличением степени предварительной холодной деформации. Это объясняется увеличением энергетического потенциала деформированного металла при упрочнении.

Рекристаллизация холоднодеформированного металла, получившего весьма большую степень деформации и имеющего текстуру деформации, может привести к устранению текстуры. Однако это бывает не всегда.

В результате рекристаллизационного отжига металла, имеющего текстуру деформации, может получиться так называемая текстура рекристаллизации, характеризующаяся тем, что кристаллографические оси рекристаллизованных равноосных зерен имеют преимущественную ориентировку в пространстве (большинство зерен имеет одинаковое направление кристаллографических осей в пространстве). Текстура рекристаллизации может быть идентична исходной текстуре деформации, но может и отличаться от нее, т. е. направления преимущественной ориентировки кристаллографических осей в теле после рекристаллизации изменяются.

Возникновение текстуры рекристаллизации объясняется, очевидно, тем, что зародыши новых зерен, существующие в деформированном металле, имеют преимущественную ориентировку кристаллографических осей в пространстве. Текстура рекристаллизации, а также возможность устранения текстуры деформации без образования новой текстуры после отжига зависят от состава сплава и содержания примесей, от степени деформации, полученной при холодном деформировании, от характера текстуры деформации, от температуры отжига и его продолжительности. Наличие текстуры рекристаллизации приводит к анизотропии механических свойств в отожженном металле, что может сказаться на служебных свойствах полученной детали или на поведении отожженной заготовки при последующей пластической деформации. Так, например, образование фестонов (ушей) при вытяжке стакана из плоской круглой заготовки является следствием наличия в прокатанном (и отожженном) металле (листе) текстуры рекристаллизации.

2.2. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Упрочняющие и разупрочняющие процессы при обработке давлением протекают во времени с определенными скоростями, обусловленными условиями деформации (температура, скорость и степень деформации) и природой деформируемого металла.

В зависимости от того, какой из процессов будет преобладающим, результаты деформации будут различны.

По С. И. Губкину [12], различают горячую, неполную горячую, неполную холодную и холодную деформацию.

Горячей деформацией (с полным разупрочнением) называют такую, в процессе которой рекристаллизация успевает произойти полностью. В результате горячей деформации металл получает полностью рекристаллизованную равноосную микроструктуру при отсутствии каких-либо следов упрочнения.

При неполной горячей деформации (с неполным разупрочнением) рекристаллизация протекает не полностью. При неполной горячей деформации, а также после окончания деформации в металле одновременно имеют место микроструктуры двух разных типов: рекристаллизованная (с равноосными зернами) и нерекристаллизованная (с вытянутыми зернами). Наличие рекристаллизованных зерен наряду с деформированными приводит к увеличению неравномерности деформации, которая способствует уменьшению пластичности металла и увеличению вероятности разрушения. Металл, подвергнутый неполной горячей деформации, имеет значительные по величине остаточные напряжения, могущие при недостаточной пластичности вызвать его разрушение.

Неполная горячая деформация может иметь место при температурах деформации, мало превышающих температуру начала рекристаллизации, причем вероятность ее возникновения увеличивается с возрастанием скорости деформации.

Неполной горячей деформации (особенно при деформировании литого металла) следует избегать, так как она обусловливает низкое качество поковки. Этот вид деформации легко возникает у сплавов с малой скоростью рекристаллизации (например, у некоторых алюминиевых и магниевых сплавов, представляющих многофазные метастабильные системы). Поэтому деформирование их производят с малыми скоростями.

Неполной холодной деформацией (с неполным упрочнением) называют такую, при которой рекристаллизация отсутствует, но процесс возврата успевает произойти. В результате неполной холодной деформации металл получает полосчатую микроструктуру без следов рекристаллизации, а при значительной деформации — текстуру деформации. Пластические свойства его выше, чем у металла, деформированного при отсутствии возврата, а прочностные свойства несколько ниже.

Неполная холодная деформация может быть при температуре деформации большей, чем температура начала возврата; при этом скорость деформации должна быть такой, чтобы возврат успевал полностью произойти.

При холодной деформации (с полным упрочнением) рекристаллизация и возврат полностью отсутствуют и деформированный металл имеет все признаки упрочнения. Холодная деформация протекает при температурах, меньших температуры начала возврата.

Таким образом, температурно-скоростные условия оказывают существенное влияние на строение деформированного металла.

2.3. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЮ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

Сопротивление деформированию — это величина удельного усилия, вызывающая пластическую деформацию при данных условиях нагружения и температурно-скоростных условиях деформирования. При линейном растяжении или сжатии сопротивление деформированию эквивалентно напряжению текучести.

Повышение температуры металла оказывает существенное влияние и на его механические характеристики. О ходе изменения показателей прочности и пластичности с увеличением температуры можно судить по приведенным на рис. 2.3 графикам. Из графиков видно, что нагрев углеродистой стали примерно до 100° С несколько увеличивает пластичность и уменьшает сопротивление деформированию. Дальнейшее увеличение температуры примерно до 300° С значительно уменьшает пластичность и увеличивает прочность (зона синеломкости). Это предположительно объясняется выпадением мельчайших частиц карбидов по плоскостям скольжения аналогично процессу старения. Дальнейшее увеличение температуры приводит к постепенному, но значительному уменьшению прочности. При температурах порядка 1000° С предел прочности уменьшается более чем в 10 раз.

На основе многочисленных экспериментов Н. С. Курнаков установил, что изменение прочностных характеристик (твердости, предела текучести, предела прочности) с изменением температуры подчиняется экспоненциальной зависимости для металлов и сплавов, не имеющих физико-химических превращений в данном интервале температур (закон Курнакова). Математическая запись этого закона может быть представлена в виде

$$p_{t_1} = p_{t_2} e^{\alpha (t_1 - t_2)},$$

где p_{t_1} — значение прочностной характеристики при температуре t_1; p_{t_2} — то же, при температуре t_2; α — температурный коэффициент, постоянный для данного металла (сплава), если в этом интервале температур в нем отсутствуют физико-химические превращения.

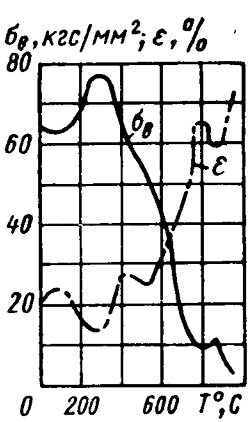


Рис. 2.3

В отношении показателей пластичности характерно их некоторое уменьшение в области температур, при которых возможна неполная горячая деформация, и в области температур фазовых превращений (часто оба эти явления происходят при почти одинаковых температурах).

Снижение пластичности в области температур фазовых превращений объясняется наличием в деформируемом теле одновременно двух фаз с различными свойствами, что приводит к увеличению неравномерности напряженного и деформированного состояний.

При температурах несколько меньших температуры плавления наблюдается резкое снижение пластичности, являющееся результатом значительного роста зерна и последующего пережога металла (окисление границ зерен). Аналогичный характер имеют графики зависимости показателей прочности и пластичности для других металлов и сплавов.

Общим положением для всех металлов и сплавов является то, что наибольшую пластичность они имеют при температурах рекристаллизации, т. е. в условиях горячего деформирования, которым одновременно соответствуют и малые значения показателей прочности, а следовательно, и сопротивления деформированию.

Опасными зонами температур, при которых наблюдается уменьшение пластичности, являются зоны, в области которых возможны фазовые превращения, неполная горячая деформация или явления старения и синеломкости.

Увеличение пластичности при нагреве до температур горячей деформации является следствием увеличения подвижности атомов, но, кроме того, увеличению пластичности способствуют еще некоторые явления. Так, например, в условиях горячего деформирования обычно значительно возрастает пластичность межкристаллических прослоек, содержащих повышенное количество примесей. Это объясняется тем, что пограничные слои с повышенным содержанием примесей обладают меньшей термодинамической устойчивостью и имеют температуру плавления меньшую, чем температура плавления зерен основного металла. С нагревом до температур горячего деформирования прочность межзеренных прослоек уменьшается более интенсивно, чем прочность зерен, и доля межкристаллитной деформации в общей деформации металла увеличивается. Одновременно хрупкость этих прослоек уменьшается, а следовательно, уменьшается и образование в них микротрещин.

Уменьшение опасности образования микротрещин объясняется также возможностью их «залечивания» в процессе деформирования. В объяснении возможности «залечивания» микротрещин в процессе деформирования двухфазных сплавов существенное значение имеет установленное А. А. Бочваром [6] явление скачкообразного переноса атомов кристаллитов одной фазы на кристаллиты другой фазы. Явление это А. А. Бочвар назвал растворно-осадительным типом пластической деформации. При межфазовом перемещении атомов происходит «залечивание» микроскопических трещин, так как осаждение металла легче происходит в микропустотах.

Так как подвижность атомов увеличивается с ростом температуры, то и «залечивание» микротрещин легче осуществляется при температурах горячей деформации.

Таким образом, обработка давлением в условиях горячей деформации требует наименьших усилий деформирования и позволяет получать максимальное формоизменение заготовки.

Однако для заготовок малых размеров трудно выдержать заданный температурный режим деформирования (учитывая охлаждение при соприкосновении с холодным инструментом и потери теплоты в окружающую среду, возрастающие с ростом отношения площади поверхности заготовки к ее объему), поэтому горячую обработку давлением обычно применяют для крупных и средних заготовок (листовых заготовок с толщиной примерно более 10 мм и заготовок из сортового металла массой более 0,1 кг). Заготовки малых размеров и тонколистовые заготовки обычно обрабатывают в условиях холодной или неполной холодной деформации.

Для многих металлов температуры горячей деформации соответствуют температурам сравнительно интенсивного окисления поверхностных слоев, а для углеродистых сталей — температурам, при которых поверхностные слои обедняются углеродом (обезуглероживание). Это обстоятельство ухудшает качество поверхности заготовок, полученных горячей обработкой, и вынуждает назначать большие припуски на последующую механическую обработку. Стремление уменьшить усилие деформирования по сравнению с холодной деформацией и в то же время улучшить качество поверхности и повысить точность получаемых штампованных заготовок по сравнению с горячей штамповкой привело к тому, что в ряде случаев нашла применение так называемая полугорячая штамповка, осуществляемая в режиме, близком к условиям неполной горячей деформации.

2.4. ВЛИЯНИЕ ГОРЯЧЕЙ ДЕФОРМАЦИИ НА СВОЙСТВА МЕТАЛЛА

Заготовки, имеющие литую структуру (слитки, литые заготовки), обычно подвергают обработке давлением в условиях горячей деформации.

Литая структура характеризуется наличием в ней крупных кристаллитов первичной кристаллизации, по границам которых расположены прослойки, обогащенные примесями и неметаллическими включениями.

Деформирование литой структуры приводит к дроблению кристаллитов и вытягиванию их в направлении наиболее интенсивного течения металла. Одновременно с этим происходит вытягивание в том же направлении межкристаллитных прослоек, содержащих неметаллические включения. При достаточно большой

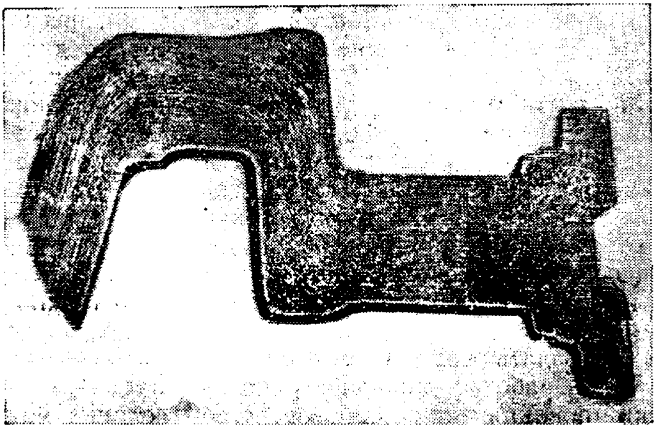


Рис. 2.4

степени деформации неметаллические включения принимают форму прядей, вытянутых в направлении наиболее интенсивного течения металла, образуя так называемую **полосчатость макроструктуры** (однако полосчатость микроструктуры в условиях горячего деформирования отсутствует). Полосчатость макроструктуры выявляется при травлении шлифа и при наличии значительного количества неметаллических включений наблюдается невооруженным глазом или при незначительном увеличении (до десятикратного). При этом строение металла на макрошлифе имеет волокнистый вид (рис. 2.4).

Возникновение полосчатости макроструктуры одновременно приводит к векториальности механических свойств (анизотропии).

Показатели пластичности вдоль и поперек волокон значительно отличаются, причем разница в их значениях возрастает с увеличением степени деформации.

Показатели пластичности в продольном направлении (вдоль волокон) увеличиваются с увеличением степени деформации, но интенсивность увеличения постепенно уменьшается. Если в качестве показателя степени деформации принять относительное обжатие (отношение исходной площади поперечного сечения к текущему ее значению), то показатели пластичности в продольном направлении интенсивно увеличиваются до степени обжатия $F_0/F_1 \leqslant 4$, затем медленно увеличиваются до $F_0/F_1 = 10$, а при дальнейшем увеличении степени обжатия практически не изменяются. Показатели пластичности в поперечном относительно волокон направлении уменьшаются по мере увеличения обжатия (более интенсивно до степеней обжатия $F_0/F_1 < 6$ и менее интенсивно при дальнейшем увеличении обжатия).

Разница между показателями пластичности в продольном и поперечном направлениях выражена менее ярко для относительного сужения площади поперечного сечения (для стали при

$F_0/F_1 \approx 10$ разница составляет около 10%), несколько больше для относительного удлинения и максимально для ударной вязкости (для стали при $F_0/F_1 \approx 10$ разница достигает 20%).

Прочностные характеристики металла вдоль и поперек волокон отличаются незначительно, причем увеличение степени деформации практически не сказывается на их величине.

Таким образом, пластическая деформация металлов сопровождается рядом явлений, оказывающих влияние на механические свойства металла, а также приводящих к изменению их физико-химических свойств. Сознательно учитывая эти явления и управляя ими, при обработке металлов давлением можно обеспечивать такие условия деформирования, при которых полученная деталь будет обладать наилучшими служебными качествами.

При обработке давлением обычно стремятся вести процесс деформирования таким образом, чтобы волокна макроструктуры были расположены в направлениях наибольших нормальных напряжений, возникающих в детали при нагружении в условиях ее работы.

В ряде случаев явление упрочнения используют дл і увеличения показателей прочности металла.

2.5. УСЛОВИЕ ПОСТОЯНСТВА ОБЪЕМА

Плотность металла в результате пластической деформации изменяется весьма незначительно[1]. Это изменение не имеет практического значения при решении задач, связанных с напряжениями и деформациями, поэтому обычно принимают следующее условие: *объем пластически деформируемого тела остается постоянным или, другими словами, объем тела до пластической деформации равен его объему после деформации.*

Отсюда не следует, что объем тела в период самой пластической деформации при его нагрузке внешними силами равен его объему после снятия нагрузки. *Пластическая деформация тела всегда сопровождается его упругой деформацией, зависимость которой от напряжений определяется законом Гука*[2] [12]. Значит, размеры тела в конечный момент его нагружения отличаются от его размеров после снятия нагрузки.

Пусть дана обычная диаграмма растяжения, снятая на испытательной машине (рис. 2.5). По оси ординат отложено усилие, по оси абсцисс — деформация. В какой-то момент при усилии, определяемом отрезком *Оа*, деформация выражается отрезком *Ос*. Если из точки *А* провести прямую, параллельную линии *ОВ*,

---

[1] Относится к металлу, уже подвергнутому первичной горячей обработке давлением. В результате же первоначального деформирования литого металла (здорового) плотность его несколько возрастает (доли процента) за счет ликвидации имеющихся в нем пустот.

[2] Это так называемый закон наличия упругой деформации при пластическом деформировании.

где точка B соответствует пределу пропорциональности (упругости), то отрезок Oc на оси абсцисс, представляющий собой полную деформацию при нагруженном состоянии образца, разделится на две части. Часть (отрезок bc) будет представлять собой упругую деформацию, а часть (Ob) — пластическую. После снятия нагрузки длина образца уменьшается на величину bc, но эта длина будет больше исходной на величину остаточной (пластической) деформации, определяемой отрезком Ob. Понятно, что тангенсы углов BOc и Abc выражают собой модуль Юнга (E).

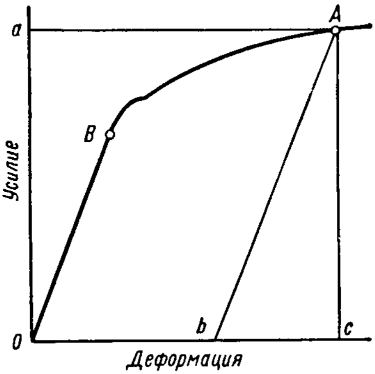


Рис. 2.5

При горячей обработке давлением при значительной пластической деформации наличием упругой деформации можно пренебречь. Однако в некоторых случаях, например при холодной гибке, упругая деформация очень заметна. В практике это явление называют пружинением. При проектировании технологических процессов с этим необходимо считаться. Так, угол в штампе при гибке «вхолодную» приходится делать несколько отличающимся от требуемого угла изгиба, учитывая угол пружинения.

2.6. СТЕПЕНЬ ДЕФОРМАЦИИ И СМЕЩЕННЫЙ ОБЪЕМ

Возьмем параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат, и с исходными размерами до пластической деформации $X_и$, $Y_и$ и $Z_и$ (рис. 2.6, *а*). Пусть этот параллелепипед после деформации остается также параллелепипедом и размеры его будут $X_д$, $Y_д$ и $Z_д$ (рис. 2.6, *б*). Индексы означают: и — исходный и д — деформированный. По условию постоянства объема

$$V = X_и Y_и Z_и = X_д Y_д Z_д, \qquad (2.1)$$

откуда

$$\frac{X_д}{X_и}\frac{Y_д}{Y_и}\frac{Z_д}{Z_и} = 1, \qquad (2.2)$$

а после логарифмирования (логарифмы берут натуральные для удобства рассмотрения вопросов пластической деформации)

$$\ln\frac{X_д}{X_и} + \ln\frac{Y_д}{Y_и} + \ln\frac{Z_д}{Z_и} = 0 \qquad (2.3)$$

или

$$\delta_x + \delta_y + \delta_z = 0, \qquad (2.3а)$$

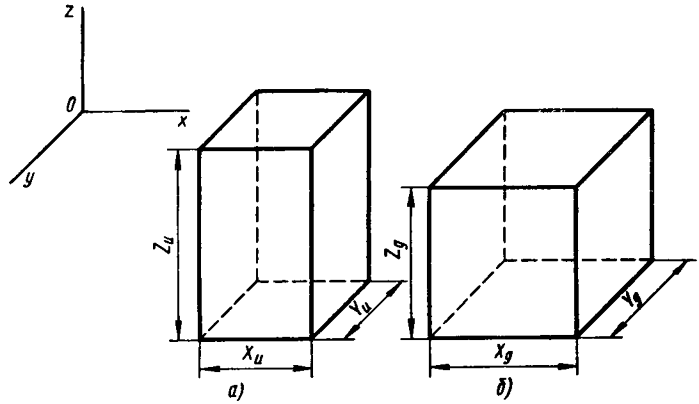


Рис. 2.6

где

$$\delta_x = \ln \frac{X_д}{X_и}; \quad \delta_y = \ln \frac{Y_д}{Y_и}; \quad \delta_z = \ln \frac{Z_д}{Z_и}. \qquad (2.4)$$

Величины δ_x, δ_y и δ_z носят название истинных или действительных степеней деформации, а также степеней деформации третьего рода или логарифмических.

Индексы x, y, z при обозначении δ показывают, по направлению какой координатной оси мы рассматриваем деформацию. Легко видеть, что числовое значение δ не изменится, если в числителе поставить предыдущий размер, а в знаменателе последующий, в этом случае изменятся только знаки.

В рассматриваемом примере (рис. 2.6) параллелепипед подвергался сжатию. Ребро его Z уменьшилось, ребра X и Y увеличились ($Z_и > Z_д$, $X_и < X_д$ и $Y_и < Y_д$). Следовательно, по формулам (2.4) деформация δ_z будет отрицательной, а деформации δ_x и δ_y положительными (увеличение размера — положительная деформация, уменьшение размера — отрицательная деформация).

Логарифмическая степень деформации представляет собой интеграл бесконечно малого приращения данного размера тела или его элемента, отнесенного к его величине в каждый данный момент деформации, например

$$\delta_x = \int_{X_и}^{X_д} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{X_и}^{X_д} = \ln \frac{X_д}{X_и}.$$

На основании равенства (2.3) можно сделать следующие выводы.

1. *При пластической деформации алгебраическая сумма логарифмических степеней деформации по трем взаимно перпендикулярным направлениям равна нулю.*

2. *Одна из степеней деформации имеет знак, противоположный знаку двух других, а по абсолютной величине равна их сумме, т. е. максимальна по абсолютной величине.*

Степень деформации можно выразить иначе, а именно как отношение приращения размера к начальному размеру:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{X_д - X_и}{X_и} = \frac{\Delta x}{X_и}; \quad \varepsilon_y = \frac{Y_д - Y_и}{Y_и} = \frac{\Delta y}{Y_и}; \\ \varepsilon_z &= \frac{Z_д - Z_и}{Z_и} = \frac{\Delta z}{Z_и}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Здесь также положительным величинам степеней деформации соответствует растяжение, а отрицательным — сжатие; ε_x, ε_y и ε_z носят название степеней деформации первого рода (или просто степеней деформации).

Так как деформации в различных точках тела могут быть различны, т. е. деформация может быть неравномерной, то формулы (2.4) и (2.5) дают лишь средние степени деформации данного тела или его части. С определением значений деформаций в окрестностях данной точки тела познакомимся ниже (см. стр. 111).

Величины δ и ε связаны между собой, например

$$\delta_x = \ln\frac{X_д}{X_и} = \ln\frac{X_и + \Delta x}{X_и} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{X_и}\right) = \ln(1 + \varepsilon_x).$$

Разложим $\ln(1 + \varepsilon_x)$ в ряд

$$\delta_x = \ln(1 + \varepsilon_x) = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_x^2}{2} + \frac{\varepsilon_x^3}{3} - \frac{\varepsilon_x^4}{4} + \cdots$$

Этот ряд при $\varepsilon_x < 1$ сходящийся. Отбросив все члены, кроме первого, получим

$$\delta_x \approx \varepsilon_x.$$

При степенях деформации меньших 0,1 разница между δ и ε меньше 5%, а поэтому для малых деформаций можно считать

$$\delta = \varepsilon \qquad (2.6)$$

и соответственно

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \qquad (2.7)$$

Умножив все члены равенства (2.3а) на объем деформируемого тела V, получим

$$V\delta_x + V\delta_y + V\delta_z = 0, \qquad (2.8)$$

а для малых деформаций

$$V\varepsilon_x + V\varepsilon_y + V\varepsilon_z = 0. \qquad (2.8а)$$

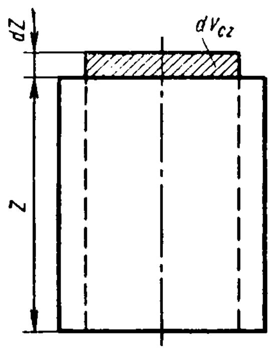


Рис. 2.7

Произведения объема на логарифмические степени деформации представляют собой *смещенные объемы* V_c по соответствующим направлениям x, y, z, т. е.

$$V_{cx} + V_{cy} + V_{cz} = 0. \tag{2.9}$$

Отсюда следует еще одна формулировка условия постоянства объема, а именно: *сумма смещенных объемов по трем взаимно перпендикулярным направлениям равна нулю.*

В то же время один из смещенных объемов имеет знак, противоположный знаку двух других, а по абсолютной величине равен их сумме, т. е. будет максимальным по абсолютной величине.

Докажем, что произведение $V\delta$ действительно представляет собой смещенный объем. Пусть в данный момент деформации параллелепипед имеет, например по оси z, размер Z, который в следующий момент получает приращение dz (рис. 2.7). Легко видеть, что элементарный смещенный объем

$$dV_{cz} = F_z\, dz,$$

где F_z — площадь поперечных (нормальных к оси z) сечений тела в каждый данный момент процесса деформации; тогда

$$V_{cz} = \int\limits_{Z_и}^{Z_д} F_z\, dz. \tag{2.10}$$

Если

$$F_z = \frac{V}{z},$$

то

$$V_{cz} = V \int\limits_{Z_и}^{Z_д} \frac{dz}{z}, \tag{2.11}$$

где, как и раньше, $Z_и$ и $Z_д$ — соответственно исходная высота тела и его высота после деформации.

Интегрируя, получим

$$V_{cz} = V \ln \frac{Z_д}{Z_и} = V\delta_z \tag{2.12}$$

и в общем виде

$$V_c = V\delta. \tag{2.12а}$$

Для малых деформаций

$$\delta = \varepsilon,$$

тогда

$$V_c = V\varepsilon. \qquad (2.12б)$$

Геометрический смысл смещенного объема ясен из рис. 2.8. Из написанного ранее выражения (2.2) следует

$$\frac{X_д}{X_и} = \frac{Y_и Z_и}{Y_д Z_д} = \frac{F_{их}}{F_{дх}},$$

так как

$$Y_и Z_и = F_{их} \text{ и } Y_д Z_д = F_{дх},$$

где $F_{их}$ и $F_{дх}$ — площади соответственно нормальных к оси x сечений тела до и после деформации.

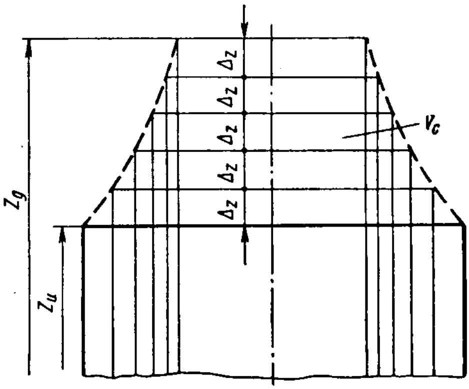


Рис. 2.8

Это дает возможность выразить степени деформации и смещенные объемы не только через линейные размеры, но и через площади сечений, нормальных к оси координат, в направлении которой рассматривается степень деформации и смещенный объем:

$$\delta_x = \ln\frac{X_д}{X_и} = \ln\frac{F_{их}}{F_{дх}} = -\ln\frac{F_{дх}}{F_{их}};$$

$$\varepsilon_x = \frac{X_д - X_и}{X_и} = \frac{\Delta x}{X_и} = \frac{F_{их} - F_{дх}}{F_{дх}} = -\frac{\Delta F_x}{F_{дх}}.$$

Аналогично можно получить выражения для степеней деформации по направлениям осей координат y и z.

В общем виде можно написать

$$\delta = -\ln\frac{F_д}{F_и}; \quad \varepsilon = -\frac{\Delta F}{F_д}. \qquad (2.13)$$

Приведенное выражение (2.11) смещенного объема $V_{cz} = V\int\frac{dz}{z}$, как следует из вывода, действительно только в том случае, если величина площадей сечений тела F_z как до деформации, так и после деформации является постоянной по всей длине тела Z, например, когда цилиндр переходит в цилиндр, параллелепипед в параллелепипед и т. п.

2.7. СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ

Скоростью деформации будем называть изменение степени деформации в единицу времени или относительное смещение объема в единицу времени, т. е.

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{V}\,\frac{dV_c}{dt} \qquad (2.14)$$

или, если величина деформации выражена по формуле (2.5),

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{2.14а}$$

Размерность скорости деформации — $с^{-1}$.

Вопрос о скоростях деформации в окрестностях любой данной точки будет рассмотрен далее (см. 118).

При постоянной скорости, а также для средней скорости

$$\dot{\delta} = \frac{\delta}{t} \tag{2.15}$$

или

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{t}. \tag{2.15а}$$

От скорости деформации следует отличать как скорость движения деформирующего инструмента (скорость деформирования), так и скорость смещения тех или иных точек тела в процессе деформации. Размерность этих скоростей выражается в см/с.

При одной и той же скорости деформирования скорость деформации может быть различной в зависимости, например, от размеров деформируемого тела, а скорости смещения точек деформируемого тела могут изменяться от нуля до максимума.

Пусть происходит равномерное растяжение двух образцов разной исходной длины $Z_{и1} < Z_{и2}$ (рис. 2.9) при одинаковой скорости деформирования, т. е. зажимы машины, захватывающие конца образцов по плоскостям a_1b_1 и a_2b_2, движутся с одинаковой скоростью. Пусть плоскости a_1b_1 и a_2b_2 в единицу времени переместятся в положение $a_1'b_1'$ и $a_2'b_2'$.

Так как скорость деформирования принята одинаковой, то $b_1b_1' = b_2b_2' = Z_{д1} - Z_{и1} = Z_{д2} - Z_{и2} = \Delta Z$. Скорости же деформации будут (промежуток времени принят, как указано, за единицу)

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\Delta Z}{Z_{и1}} \text{ и } \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\Delta Z}{Z_{и2}}, \tag{2.15б}$$

откуда

$$\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2} = \frac{Z_{и2}}{Z_{и1}}. \tag{2.16}$$

Таким образом, при одной и той же скорости деформирования скорость деформации при равномерном растяжении (и сжатии) обратно пропорциональна длине (высоте) образца. Если обозначить скорость

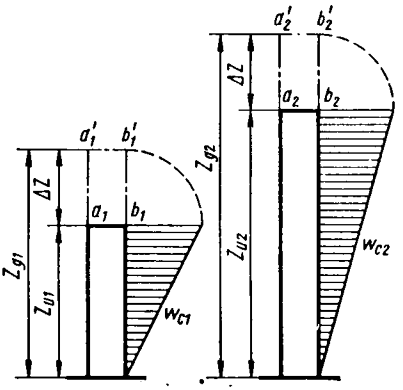


Рис. 2.9

деформирования через v, то для промежутка времени, равного единице, $\Delta Z = v$.

Подставляя в равенства (2.15б), получим

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{v}{Z_{н1}} \quad \text{или} \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{v}{Z_{н2}}. \qquad (2.16а)$$

Выражения (2.16а) дают связь между скоростью деформации, скоростью деформирования и линейным размером в каждый данный момент при равномерном растяжении и сжатии.

Скорости смещения w_c точек рассматриваемых тел будут изменяться по их высоте по закону прямой от нуля в месте закрепления до максимума в плоскостях ab, как показано на эпюрах рис. 2.9.

2.8. ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ НА ПЛАСТИЧНОСТЬ И СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЮ

Обычно определения механических свойств металлов производят на испытательных машинах со скоростями деформирования, не превышающими 10 мм/с. Обработка давлением на прессах и ковочных машинах ведется при средней скорости движения рабочего органа машины в пределах примерно 0,1—0,5 м/с. При обработке на молоте воздействие на металл носит уже динамический характер; скорость бабы молота в момент удара составляет 5—10 м/с, а весь процесс деформации за один удар длится лишь сотые доли секунды. Еще более высокие скорости деформирования возникают при штамповке на высокоскоростных молотах (~20—30 м/с и выше), а также при штамповке взрывом, электрогидравлическим разрядом, магнитоимпульсным и другими видами импульсного нагружения, ныне с успехом внедряющимися в промышленность. Поэтому весьма важно знать, можно ли при анализе и проектировании процессов обработки давлением пользоваться данными о механических свойствах металлов, полученными путем обычных испытаний. Иначе говоря, очень важно знать, как влияет скорость деформации на пластичность и напряжение текучести.

В первом приближении можно сказать, что при увеличении скорости деформации напряжение текучести возрастает, а пластичность падает.

С увеличением скорости деформации особенно резко падает пластичность некоторых магниевых сплавов, высоколегированной стали и медных сплавов некоторых марок. Значительно менее чувствительны к скорости деформации большинство алюминиевых сплавов, низколегированная и углеродистая конструкционная стали [39]. Последние обладают при горячей обработке вполне достаточной пластичностью при любых практически применяемых скоростях деформирования [12].

Влияние скорости деформации при холодной обработке давлением значительно меньше, чем при горячей. Интенсивность роста этого влияния больше в диапазоне малых скоростей (мм/мин) и весьма мала в диапазоне больших скоростей.

Однако приведенные данные требуют уточнения. Надо учитывать прежде всего два существенных обстоятельства: наличие при горячем пластическом деформировании двух противоположных процессов: упрочняющего и разупрочняющего (возврат и рекристаллизация), а также тепловой эффект пластической деформации. О возврате и рекристаллизации говорилось ранее. Тепловой эффект выражается в том, что энергия, расходуемая на пластическую деформацию, превращается в основном в теплоту. Коэффициент выхода теплоты, по данным С. И. Губкина, составляет для чистых металлов 0,85—0,90, для сплавов 0,75—0,85. Остальная часть работы деформации идет на повышение внутренней энергии металла. Тепловой эффект при прочих равных условиях уменьшается с увеличением температуры деформации, так как с повышением температуры падает напряжение текучести и снижается энергия, необходимая для деформации. Поэтому при одной и той же степени деформации данного образца в холодном и горячем состоянии в последнем случае теплоты выделится меньше. Если скорость деформации малая, то теплота будет рассеиваться и процесс будет протекать почти изотермически. Наоборот, при больших скоростях деформации выделяющаяся теплота повысит температуру тела, иначе говоря, будет наблюдаться температурный эффект. На основании сказанного температурный эффект при горячей деформации меньше как вследствие выделения меньшего количества теплоты, так и потому, что количество выделившейся теплоты мало по сравнению с теплосодержанием нагретого металла.

При холодной обработке давлением разупрочняющие процессы не происходят. Напряжение текучести растет со степенью деформации в результате упрочнения, изменение скорости в некоторых пределах мало влияет на ход процесса. В отдельных же случаях холодной обработки давлением при высоких скоростях деформирования в результате температурного эффекта может возникнуть явление возврата; напряжение текучести станет меньше, а пластичность больше, чем это было при более низкой скорости.

При горячей деформации идет процесс рекристаллизации. Чем выше скорость деформации и чем меньше скорость рекристаллизации, тем больше напряжение текучести и тем меньше пластичность.

Сталь при низких температурах нагрева и магниевые сплавы при нормальном температурном интервале ковки имеют очень малую скорость рекристаллизации, поэтому повышение скорости деформации может изменить характер обработки: из горячей она обратится в неполную горячую, что и вызовет резкое уменьшение пластичности при одновременном росте напряжения текучести.

Особый эффект может дать изменение скорости деформации, если обработка производится при температурах, близких к зонам хрупкости. Например, у технически чистого железа (армко-железа) зона хрупкости лежит в температурном интервале 825—1100° С. Если производить ковку, например, при температуре, близкой к 825° С [39], с большой скоростью деформации, то вследствие температурного эффекта деформации металл окажется в зоне хрупкости. Тот же температурный эффект при температуре, близкой к 1100° С, может вывести металл из зоны хрупкости. Таким образом, в одних случаях повышение скорости деформации ведет к увеличению напряжения текучести и снижению пластичности, а в других в связи с температурным эффектом может привести к обратным результатам [12, 13].

Многие исследователи пытались аналитически выразить зависимость напряжения текучести от скорости деформации при заданной температуре и степени деформации. Наибольшего внимания заслуживают формулы, предложенные П. Людвиком

$$\sigma_s = \sigma_{s0} + n \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}$$

и А. Рейто

$$\sigma_s = \sigma_{s0} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m .$$

Здесь σ_s и σ_{s0} — напряжения текучести соответственно при скоростях деформации $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\varepsilon}_0$; n и m — константы, определяемые экспериментально.

С. И. Губкин [13] считает, что первой формулой целесообразно пользоваться в области температур деформации с полным и неполным упрочнением, а вторую применять для температур деформации с полным и неполным разупрочнением. Это в общем подтверждает и Л. Д. Соколов в своих исследованиях, посвященных изучению влияния температуры и скорости деформации на сопротивление деформированию [90].

При практических расчетах можно учитывать влияние скорости деформации при помощи так называемого скоростного коэффициента ψ_c, показывающего, во сколько раз увеличивается напряжение текучести при том или ином увеличении скорости деформации (табл. 2.1).

Поведение металла при весьма больших скоростях деформирования, соответствующих, например, процессам штамповки взрывом, пока еще изучено недостаточно. Однако опыты показывают, что углеродистые и легированные конструкционные стали, а также пластичные сплавы цветных металлов при высоких скоростях деформирования допускают неограниченную степень деформации. У сплавов же с низкой пластичностью значительного повышения пластичности не наблюдается. С другой стороны,

Таблица 2.1

Значение скоростного коэффициента ψ_c (по С. И. Губкину [13])

Отношение скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_2/\dot{\varepsilon}_1$	Температуры деформации			
	$\frac{T}{T_{пл}} < 0,3$	$\frac{T}{T_{пл}} = 0,3 \div 0,5$	$\frac{T}{T_{пл}} = 0,5 \div 0,7$	$\frac{T}{T_{пл}} > 0,7$
10	1,05—1,10	1,10—1,15	1,15—1,30	1,30—1,50
100	1,10—1,22	1,22—1,32	1,32—1,70	1,70—2,25
1000	1,16—1,34	1,34—1,52	1,52—2,20	2,20—3,40
При переходе от скорости $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-1}$ $с^{-1}$ к ударной нагрузке	1,10—1,25	1,25—1,75	1,75—2,50	2,50—3,50

Примечание. T — абсолютная температура деформации; $T_{пл}$ — абсолютная температура плавления.

известно, что некоторые сплавы, труднодеформируемые в обычных условиях, успешно обрабатываются под действием взрыва.

Вместе с тем для многих металлов и сплавов обнаружены критические скорости деформации, при которых они теряют пластичность и становятся хрупкими.

Кроме того, при весьма значительных скоростях деформирования уже сказывается влияние сил инерции. Нагрев же обрабатываемого металла за счет тепловыделения бывает выражен настолько резко, что могут возникнуть явления местного пережога, если нагревать металл до обычно принятых температур.

В последнее время начали применять обработку металлов давлением при одновременном воздействии ультразвуковыми колебаниями на очаг деформации. Эксперименты показывают, что при облучении металла ультразвуком в процессе деформации заметно снижается напряжение текучести и тем самым уменьшаются необходимое деформирующее усилие и работа деформации. Однако в отдельных случаях наблюдается и некоторое уменьшение пластичности, выражающееся в снижении допустимой степени деформации [84].

2.9. СВЕРХПЛАСТИЧНОСТЬ

Явление сверхпластичности характеризуется резким (на один-два порядка) увеличением удлинения при испытании на растяжение при значительном (иногда более чем на два порядка) уменьшении сопротивления деформированию по сравнению со значениями, характерными для обычных условий деформирования.

Особенностью деформирования при линейном растяжении в состоянии сверхпластичности является резкое увеличение равномерной (без образования шейки) деформации.

Впервые такой необычный процесс деформирования был отмечен в работах Розенхейма, А. А. Бочвара и др.. В настоящее время это явление изучается достаточно интенсивно, а деформирование в состоянии сверхпластичности начинает получать промышленное применение.

Было установлено, что явление сверхпластичности чаще наблюдается у эвтектических и эвтектоидных сплавов, таких, как сплавы олова со свинцом и висмутом, сплавы 78% цинка и 22% алюминия и т. п. В несколько меньшей степени явление сверхпластичности проявляется при определенных условиях в сплавах и металлах, имеющих полиморфные превращения (переход феррита в аустенит, аустенита в мартенсит и т. п.), таких, как железо, сплавы железа с никелем, марганцем, хромом. Также было установлено, что возможность возникновения сверхпластичности зависит от размеров зерен и температурно-скоростных условий деформирования.

Для возникновения сверхпластичности желательно, чтобы зерна были равноосными, а размеры их были порядка 1—2 мкм (размеры зерен в обычных деформируемых металлах порядка 10—100 мкм).

В экспериментах было установлено, что при сверхпластичности относительное удлинение при линейном растяжении, превышающее даже 1000%, не приводит к заметному изменению микроструктуры. Это свидетельствует о том, что механизм пластической деформации при сверхпластичности существенно отличается от механизма обычной пластической деформации (скольжение и двойникование).

Исследования показали, что в явлении сверхпластичности определяющую роль играют процессы, протекающие вблизи межфазовых или межзеренных границ, а пластическая деформация осуществляется главным образом путем межкристаллитной деформации, а также вакансионной и дислокационной ползучестью. Для реализации такого механизма пластической деформации необходимо увеличение потенциальной энергии поликристалла за счет энергии пограничных участков зерен (с уменьшением размеров зерен увеличивается их суммарная поверхность) и энергии дефектов строения зерен (дислокаций, вакансий и т. п.).

Раздробление зерен может осуществляться холодной пластической деформацией со степенями деформации, превышающими 50%. При таких деформациях существенно развиваются межзеренные границы как по протяженности, так и по уровню потенциальной энергии пограничных участков вследствие скопления дислокаций у границ зерен. Кроме того, указанная холодная деформация увеличивает фрагментацию зерен путем образования блоков мозаики и увеличения степени их разориентировки (накопление дислокаций по границам блоков мозаики).

Увеличение потенциальной энергии межзеренных прослоек и уменьшение размеров зерен в сочетании с увеличением подвижности атомов в результате нагрева приводят к облегчению межкристаллитной деформации (мелкие округлые зерна как бы находятся в массе сравнительно толстых межзеренных прослоек, имеющих аморфное строение, что облегчает их относительное проскальзывание и перекатывание в условиях течения подобного течению вязкой жидкости с твердыми вкраплениями).

В то же время вызванное значительной холодной деформацией увеличение поврежденности строения самих зерен облегчает протекание в них диффузионных процессов, характерных для явления ползучести, приводящих к такому изменению формы зерен, которое облегчает межкристаллитную деформацию.

Облегчению межкристаллитной деформации способствует также увеличение подвижности границ в многофазных сплавах при определенных повышенных температурах (образование «псевдожидкой» фазы вследствие того, что зародыши новой фазы появляются главным образом у границ зерен, имеющих повышенный энергетический потенциал, и практически увеличивают толщину межзеренных прослоек).

Температуры, соответствующие наиболее яркому проявлению сверхпластичности, обычно близки к температурам фазовых переходов (полиморфные превращения или плавление).

Для сохранения мелкозернистого строения с повышенной потенциальной энергией при нагреве до температур, дающих максимальный эффект сверхпластичности, скорость нагрева должна быть весьма большой (200—300° С/с). При больших скоростях нагрева рекристаллизация (особенно собирательная) не успевает происходить и строение металла, созданное холодной деформацией, остается практически неизменным.

Кроме температуры и строения сплава на эффект сверхпластичности существенное влияние оказывает скорость деформации. Считается, что оптимальной скоростью деформации для проявления эффекта сверхпластичности является такая, при которой скорости процессов упрочнения и разупрочнения одинаковые.

Типовая зависимость предельной деформации и сопротивления деформации от скорости деформации при сверхпластичности приведена на рис. 2.10 [5]. Как видно из рис. 2.10, *а*, наибольшая деформация имеет место при определенной оптимальной скорости

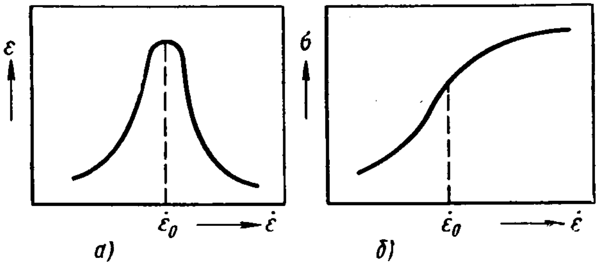


Рис. 2.10

деформации $\dot{\varepsilon}_0$. При бóльших скоростях деформации наблюдается уменьшение предельной деформации вследствие упрочнения металла (подавляются процессы, способствующие сверхпластичности, и, в частности, диффузия). При меньших скоростях деформации доминируют процессы разупрочнения, уменьшающие потенциальную энергию строения металла (уменьшается количество дислокаций при рекристаллизации и т. п.), а также способствующие появлению собирательной рекристаллизации, увеличивающей размеры зерен и, следовательно, затрудняющей межзеренное проскальзывание. Все это приводит также к уменьшению предельной деформации, к уменьшению эффекта сверхпластичности.

Как видно из рис. 2.10, *б*, в области оптимальной скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0$ наблюдается наибольшее влияние изменения скорости деформации на величину сопротивления деформированию ($d\sigma/d\dot{\varepsilon}$ имеет максимальную величину). Именно этим и объясняется резкое увеличение равномерной деформации при линейном растяжении в условиях сверхпластичности.

В обычных условиях равномерная деформация (до образования шейки) определяется упрочнением, при котором увеличение деформации в зарождающейся шейке блокируется интенсивным упрочнением, и деформация развивается в других участках образца (блуждающая шейка).

В состоянии сверхпластичности происходит также блокирование развития деформаций в участке зарождающейся шейки, но в этом случае блокирование происходит вследствие резкого роста сопротивления деформации при увеличении скорости деформации.

Как известно, интенсивность упрочнения убывает по мере увеличения деформации, и это приводит к ограничению величины равномерной деформации в обычных условиях испытания на растяжение.

В условиях сверхпластичности зависимость напряжения текучести от скорости деформации почти не зависит от величины деформации, и это приводит к резкому увеличению равномерной

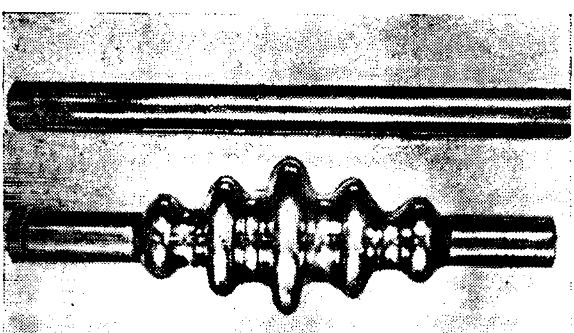


Рис. 2.11

деформации (увеличению этапа деформирования с блуждающей шейкой).

Как было отмечено ранее, в условиях сверхпластичности сопротивление деформации на два-три порядка меньше, чем в обычных условиях деформирования. Это открывает новые возможности штамповки, когда для деформирования тонкостенных листовых и трубчатых заготовок оказывается достаточно атмосферного давления (вакуумная штамповка). Штамповка труднодеформируемых и толстостенных заготовок может осуществляться гидростатическим давлением.

В качестве примера возможностей штамповки листового металла в состоянии сверхпластичности на рис. 2.11 [132] показана деталь, отштампованная формовкой в матрицу гидростатическим давлением из сплава 63% олова и 37% свинца при комнатной температуре и при скорости деформации порядка 10^{-3}—10^{-4} $с^{-1}$. Состояние сверхпластичности может использоваться при штамповке монолитных объемных деталей и при штамповке из труднодеформируемых малопластичных материалов.

Глава 3
НАПРЯЖЕНИЯ

3.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Тело, подвергающееся действию сил, находится в напряженном состоянии. Внешние силы, действующие на тело, бывают двух основных видов: поверхностные и объемные (массовые).

К поверхностным силам относят силы, приложенные к поверхности тела. Они могут быть сосредоточенными и распределенными.

К объемным силам относят силы, действующие на все материальные точки тела и пропорциональные их массам, например силы тяжести, силы инерции и др. В дальнейшем действие объемных сил рассматривать не будем.

При изучении напряженного состояния принимаем, что тело однородно, изотропно и представляет собой систему непрерывных материальных точек. Если система точек находится в равновесии, то принимается, что внешние силы уравновешиваются так, как если бы система отвердела. Это так называемый принцип отвердения.

При упругом состоянии равновесие может существовать при разных соотношениях внешних сил.

При пластическом равновесии соотношения и величины сил должны быть вполне определенны, как это будет показано в гл. 5.

Под действием внешних сил в теле возникают внутренние усилия. Предел отношения внутреннего усилия ΔP, действующего на какую-либо элементарную площадку, выделенную в рассматриваемой точке тела, к ее площади ΔF при неограниченном уменьшении последней называется напряжением S:

$$S = \frac{\Delta P}{\Delta F}_{\Delta F \to 0}.$$

Каждая точка в напряженном теле находится под действием всех ее окружающих точек, а поэтому в любой плоскости, проведенной через данную точку, на нее будет действовать напряжение, характеризуемое определенной величиной и направлением.

Полное напряжение по правилу параллелепипеда всегда можно разложить на три: одно нормальное и два касательных. В равной мере полное напряжение можно разложить на три по направлениям осей координат.

3.2. НАПРЯЖЕНИЯ В КООРДИНАТНЫХ ПЛОЩАДКАХ

Проведем через напряженную точку A (рис. 3.1) три плоскости, параллельные плоскостям координат. Для того чтобы иметь возможность обозначить на чертеже напряжения, действующие на точку в этих плоскостях, построим параллелепипед, ребра которого примем бесконечно малыми, неограниченно приближающимися к точке. Тогда на гранях такого элементарного параллелепипеда, проходящих через точку A, можно изобразить векторы напряжений, действующих на точку в трех взаимно перпендикулярных плоскостях (координатных площадках). При этом напряжение в каждой площадке разложим на три: одно нормальное и два касательных, которые направим параллельно осям координат. Таким образом, всего получим три нормальных и шесть касательных напряжений.

Нормальные напряжения в координатных площадках обозначим σ, касательные τ. Примем индексы из двух букв. Первая буква будет указывать ту координатную ось, по направлению которой действует напряжение, а вторая—ту координатную ось, которая нормальна (перпендикулярна) той площадке (внешняя нормаль), к которой напряжение приложено (адрес напряжения). Например, τ_{xy} — касательное напряжение, действующее параллельно оси x на площадку, перпендикулярную к оси y, т. е. на площадку, параллельную плоскости xz. Поскольку для нормальных напряжений направление и адрес совпадают, применим для их обозначения индекс из одной буквы, например σ_x вместо σ_{xx}.

Напряжения, действующие в точке по площадкам, параллельным плоскостям координат, геометрически изображены на рис. 3.1 стрелками.

Нормальные напряжения считают положительными, если они стремятся вызвать растяжение.

Знак касательных напряжений зависит от знака и направления нормального напряжения в рассматриваемой грани элементарного параллелепипеда.

Касательные напряжения, направления которых совпадают с положительными направлениями координатных осей, считают положительными при условии, если направление растягивающего нормального напряжения по той же координатной площадке совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси (или если сжи-

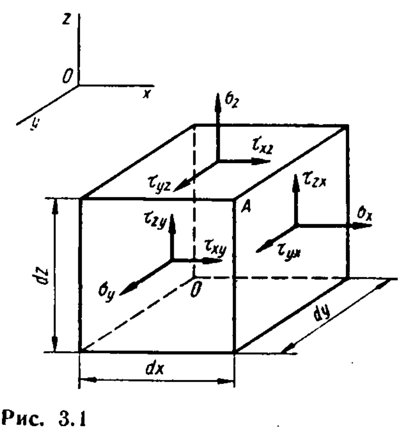


Рис. 3.1

мающее нормальное напряжение направлено по отрицательному направлению координатной оси).

Если направления нормальных напряжений противоположны указанным, то касательные напряжения следует считать положительными, когда их направления совпадают с отрицательными направлениями соответствующих координатных осей.

На рис. 3.1 все напряжения являются положительными. Запишем напряжения в точке по трем координатным площадкам в форме матрицы

$$\left.\begin{array}{cccl} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \text{— направление } x; \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} & \text{— направление } y; \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z & \text{— направление } z. \\ | & | & | & \\ \text{адрес } x & \text{адрес } y & \text{адрес } z & \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

В каждой горизонтальной строчке записаны напряжения одного направления в последовательности адресов x, y и z. В каждом вертикальном столбике записаны напряжения одного адреса в последовательности направлений x, y, z.

В трех взаимно перпендикулярных площадках можно представить девять напряжений: три нормальных и шесть касательных. Однако вследствие парности касательных напряжений различные значения могут быть только у шести напряжений: трех нормальных и трех касательных, так как

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \text{ и } \tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{3.2}$$

(касательные напряжения с индексами из двух одинаковых букв равны между собой независимо от порядка расположения букв в индексе).

Если учесть равенства (3.2), то легко установить, что касательные напряжения, расположенные в матрице симметрично относительно главной диагонали, попарно равны между собой. Учитывая это, матрицу можно переписать сокращенно

$$\left\{\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{matrix}\right\}. \tag{3.1a}$$

Указания направления и адреса в индексах касательных напряжений можно было бы поменять местами, т. е. первый индекс считать за указание адреса, второй — за указание направления. Все выводимые далее выражения и формулы при такой перестановке индексов останутся без изменения. Такое заключение можно, например, сделать на основании равенств (3.2).

3.3. НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННОЙ ПЛОЩАДКЕ

Докажем, что если заданы напряжения в трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку, то ее напряженное состояние вполне определено. Проведем плоскость наклонно к осям координат (рис. 3.2). В результате получим фигуру тетраэдра $Oabc$, сливающегося с точкой O при бесконечном убывании величины его граней. Пусть N — нормаль к наклонной грани тетраэдра. Положение ее определится направляющими косинусами

$$\cos\alpha_x = \cos(N, x) = a_x;$$
$$\cos\alpha_y = \cos(N, y) = a_y;$$
$$\cos\alpha_z = \cos(N, z) = a_z.$$

Пусть площадь наклонной грани будет ΔF, а площади остальных граней, т. е. треугольников OBC, OAC и OAB, соответственно ΔF_x, ΔF_y и ΔF_z. Считаем, что на наклонную грань действует какое-то напряжение S (полное). Напряжения по координатным площадкам также даны. Проекции напряжения S на направления осей координат, или, что то же, компоненты напряжения S по осям координат, обозначаем S_x, S_y и S_z.

Тетраэдр должен находиться в равновесии. Пишем условия равновесия, проецируя все действующие по его граням силы на оси координат:

$$\sum\nolimits_{\text{пр}\,x} = S_x\,\Delta F - \sigma_x\,\Delta F_x - \tau_{xy}\,\Delta F_y - \tau_{xz}\,\Delta F_z = 0;$$
$$\sum\nolimits_{\text{пр}\,y} = S_y\,\Delta F - \tau_{yx}\,\Delta F_x - \sigma_y\,\Delta F_y - \tau_{yz}\,\Delta F_z = 0;$$
$$\sum\nolimits_{\text{пр}\,z} = S_z\,\Delta F - \tau_{zx}\,\Delta F_x - \tau_{zy}\,\Delta F_y - \sigma_z\,\Delta F_z = 0;$$

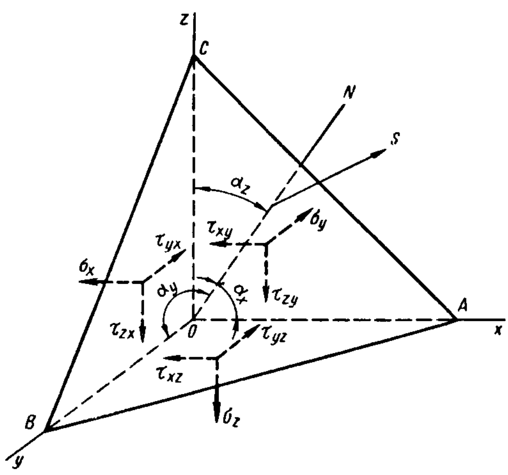


Рис. 3.2

Но

$$\Delta F_x = \Delta F a_x;$$ cosα x
$$\Delta F_y = \Delta F a_y;$$
$$\Delta F_z = \Delta F a_z.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z; \\ S_y &= \tau_{yx} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{yz} a_z; \\ S_z &= \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + \sigma_z a_z. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Суммируя компоненты напряжения S по правилу параллелепипеда, легко получить и само полное напряжение S:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2. \tag{3.4}$$

Нормальное напряжение в наклонной площадке $\sigma_н$ определится как сумма проекций компонент S_x, S_y, S_z на нормаль к площадке:

$$\sigma_н = S_x a_x + S_y a_y + S_z a_z, \tag{3.5}$$

а подставляя значения из уравнения (3.3), получим

$$\sigma_н = \sigma_x a_x^2 + \sigma_y a_y^2 + \sigma_z a_z^2 +$$
$$+ 2\tau_{xy} a_x a_y + 2\tau_{yz} a_y a_z + 2\tau_{zx} a_z a_x. \tag{3.5а}$$

Полное касательное напряжение в наклонной площадке τ найдем по правилу параллелограмма:

$$\tau^2 = S^2 - \sigma_н^2. \tag{3.6}$$

По полученным формулам можно определить напряжение в любой наклонной площадке. Таким образом, если даны шесть напряжений, действующих в точке по трем взаимно перпендикулярным площадкам, то ее напряженное состояние вполне определено.

3.4. ГЛАВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Исследуем полученное выражение (3.5а) для $\sigma_н$. Отложим от начала координат по направлению нормали N (рис. 3.2) к какой-нибудь наклонной площадке некоторый вектор r, величина которого определяется выражением

$$r = \frac{A}{\sqrt{|\sigma_н|}},$$

т. е. примем

$$\sigma_н = \pm \frac{A^2}{r^2},$$

где A — некоторая произвольная постоянная, определяющая масштаб.

Координаты конца вектора запишутся

$$x = ra_x; \quad y = ra_y; \quad z = ra_z,$$

а следовательно,

$$a_x = \frac{x}{r}; \quad a_y = \frac{y}{r}; \quad a_z = \frac{z}{r}.$$

Подставляя эти значения a в уравнение (3.5а) и сокращая на r, получим

$$A^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx. \tag{3.7}$$

Из аналитической геометрии известно, что полученное уравнение представляет собой поверхность второго порядка, отнесенную центру (отсутствуют x, y, z в первой степени).

С изменением положения наклонной площадки изменятся направление и координаты x, y, z конца вектора r, но конец его всегда будет лежать на поверхности, определяемой уравнением (3.7). Отсюда следует, что эта поверхность полностью определяется напряженным состоянием точки. Она носит название поверхности напряжений Коши.

При изменении положения координатных осей, т. е. при отнесении указанной поверхности к другим координатным осям, сама поверхность останется неизменной, а изменятся лишь коэффициенты уравнения, т. е. величины напряжений в координатных площадках, поскольку эти площадки станут другими.

Из аналитической геометрии известно, что если поверхность второго порядка отнести не только к центру, но и к сопряженным диаметрам, т. е. к осям, то коэффициенты при произведениях координат обратятся в нуль. Так же можно поступить и с поверхностью, определяемой уравнением (3.7). А это значит, что через точку, находящуюся в напряженном состоянии, всегда можно провести такие три взаимно перпендикулярные плоскости, в которых касательных напряжений не будет и останутся только три нормальных напряжения. Эти три напряжения называют **главными нормальными напряжениями**, их направления — главными и плоскости, на которых они действуют, — главными плоскостями. Таким образом, если оси координат выбраны параллельно главным направлениям (главные оси), то в соответствующих координатных плоскостях (главных) действуют только нормальные напряжения — главные.

Отсюда следует, что напряженное состояние точки вполне определяется, если даны направления трех главных осей и величины трех главных нормальных напряжений, которые обозначим индексами 1, 2, 3 вместо индексов x, y, z: σ_1, σ_2, σ_3.

Такими же индексами 1, 2, 3 будем в дальнейшем отмечать и главные оси, а также направляющие косинусы площадок, наклонных к этим осям, и соответствующие углы α.

Если напряженное состояние точки задано главными напряжениями, то напряжения в наклонных площадках выразятся на основании формул (3.3), (3.4), (3.5) и (3.6) весьма просто. Компоненты по осям координат

$$S_1 = \sigma_1 a_1; \quad S_2 = \sigma_2 a_2; \quad S_3 = \sigma_3 a_3. \tag{3.8}$$

Полное напряжение

$$S^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2. \tag{3.9}$$

Нормальное напряжение

$$\sigma_н = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2. \tag{3.10}$$

Касательное напряжение

$$\tau^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2. \tag{3.11}$$

3.5. ПОНЯТИЕ О ТЕНЗОРЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Ранее было установлено, что напряженное состояние точки выражается поверхностью (3.7). Это значит, что напряженное состояние есть величина тензорная в отличие от скалярной (определяемой числом) и векторной (определяемой числом и направлением). Эта поверхность, а вместе с ней и напряженное состояние определяются девятью напряжениями в координатных площадках. Поэтому можно дать особый смысл матрице (3.1), которой были представлены эти напряжения, а именно записать

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \tag{3.12}$$

Правая часть равенства представляет собой с точки зрения тензорного анализа симметричный тензор 2-го ранга. Эту запись можно понимать так: напряженное состояние T_σ данной точки равно тензору напряжений с такими-то компонентами (σ и τ являются компонентами тензора напряжений). Так как касательные напряжения попарно равны между собой и равные касательные напряжения располагаются в матрице симметрично относительно главной диагонали (σ_x, σ_y, σ_z), то возможна сокращенная запись

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{Bmatrix}. \tag{3.12а}$$

Если даны главные напряжения, то тензор напряжений запишется так:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma_3 \end{Bmatrix}. \tag{3.12б}$$

С тензором можно производить различные математические действия, изучаемые в тензорном анализе, в частности тензоры можно вычитать и складывать, с чем мы встретимся дальше.

Выясним теперь, можно ли определить величину главных напряжений и положение главных плоскостей по тензору напряжений, данному в произвольных координатных осях.

Пусть в какой-то, пока неизвестной, наклонной площадке действует только нормальное напряжение σ, т. е. эта площадка является главной. Пусть положение этой площадки определяется направляющими косинусами a_x, a_y, a_z по отношению к взятой системе координат. Тогда компоненты напряжения σ по координатным осям будут σa_x, σa_y, σa_z, так как направление σ совпадает с нормалью к площадке.

Пользуясь известными выражениями (3.3), можно написать

$$\left.\begin{aligned}\sigma a_x &= \sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z;\\ \sigma a_y &= \tau_{yx} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{yz} a_z;\\ \sigma a_z &= \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + \sigma_z a_z.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Преобразуем написанные уравнения так:

$$(\sigma_x - \sigma) a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z = 0;$$

$$\tau_{yx} a_x + (\sigma_y - \sigma) a_y + \tau_{yz} a_z = 0;$$

$$\tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + (\sigma_z - \sigma) a_z = 0.$$

Полученная система уравнений относительно a_x, a_y, a_z является линейной и однородной (свободные члены равны нулю). Так как a_x, a_y и a_z не могут быть все три одновременно равны нулю, то, как известно из теории уравнений, определитель этой системы должен быть равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.13)$$

Развертывая определитель и производя преобразования, получим кубическое уравнение относительно σ:

$$\begin{aligned}&\sigma^3 - \sigma^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \\ &+ \sigma (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - \\ &- (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0. \qquad (3.13а)\end{aligned}$$

Это уравнение имеет три корня, представляющие значения σ_1, σ_2 и σ_3, которые по характеру уравнения всегда будут действительными. Написав дополнительно известное из аналитической геометрии условие, что

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1, \qquad (3.14)$$

можно определить и значения направляющих косинусов площадок действия главных напряжений, как это следует из условия, принятого при составлении системы уравнений (а).

При выводе уравнения (3.13а) для определения величины главных напряжений оси координат были выбраны произвольно. Главные же напряжения при данном напряженном состоянии имеют единственные значения. Отсюда следует, что коэффициенты кубического уравнения (3.13а) имеют одни и те же значения независимо от того, как были выбраны оси координат. Они не изменяют своей величины при изменении положения координатных осей. Иначе говоря, эти коэффициенты инвариантны к преобразованию координат. А так как эти коэффициенты составлены из компонент тензора напряжений, то они являются и его инвариантами при преобразовании координат.

Возьмем квадрат первого инварианта (3.15) тензора напряжений, выраженного в главных нормальных напряжениях:

$$i_1^2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1 \quad (3.31)$$

и второй инвариант (3.16), выраженный также в главных напряжениях:

$$i_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1. \quad (3.32)$$

Сравнивая уравнения (3.31) и (3.32) с уравнением (3.29), видим, что

$$\tau_o^2 = \frac{2}{9}(i_1^2 - 3i_2), \quad (3.29а)$$

откуда получаем возможность определить октаэдрическое касательное напряжение через компоненты напряжений, действующих по случайным (не главным) ортогональным площадкам, используя выражения для первого и второго инвариантов тензора напряжений (3.15) и (3.16):

$$\tau_o^2 = \frac{2}{9}\left[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \right.$$
$$\left. + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\right].$$

После преобразования получим

$$\tau_o = \pm\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \cdots\rightarrow}$$
$$\overline{\leftarrow\cdots + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (3.30б)$$

Определим, используя выражение (3.16), второй инвариант девиатора напряжений (3.24):

$$\bar{i}_2 = (\sigma_x - \sigma_{ср})(\sigma_y - \sigma_{ср}) + (\sigma_y - \sigma_{ср})(\sigma_z - \sigma_{ср}) +$$
$$+ (\sigma_z - \sigma_{ср})(\sigma_x - \sigma_{ср}) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

или, учитывая (3.23),

$$\bar{i}_2 = -\frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \right.$$
$$\left. + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right] =$$
$$= -\frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]. \quad (3.32а)$$

Отсюда видно, что *квадрат октаэдрического касательного напряжения равен двум третям второго инварианта* девиатора напряжений, взятого с обратным знаком:

$$\tau_o^2 = -\frac{2}{3}\bar{i}_2 \quad (3.29б)$$

или

$$\tau_0 = \pm \sqrt{-\frac{2}{3} \bar{I}_2}. \qquad (3.30в)$$

Октаэдрическое касательное напряжение близко по величине к наибольшему касательному напряжению для той же точки и находится в пределах $0,941 > \tau_0/\tau_{max} > 0,816$.

Касательное напряжение, выражаемое уравнениями (3.30), принимая интерпретацию М. Роша и А. Эйхингера, называют также интенсивностью касательных напряжений [33]. Другие авторы интенсивность касательных напряжений τ_i, согласно Г. Генки, определяют выражением [91]

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \qquad (3.30г)$$

отличающимся от уравнения (3.30) постоянным коэффициентом. Квадрат правой части этого выражения в точности равен второму инварианту девиатора напряжений, взятому с обратным знаком. В отличие от октаэдрического касательного напряжения по равенству (3.30) интенсивность касательных напряжений по уравнению (3.30г) является величиной скалярной.

Величина интенсивности касательных напряжений τ_i изменяется в зависимости от вида напряженного состояния (соотношений между компонентами тензора напряжений) в пределах

$$\tau_i = (1 - 1,155)\, \tau_{max},$$

где τ_{max} — максимальное по абсолютной величине главное касательное напряжение.

От интенсивности касательных напряжений следует отличать интенсивность напряжений или обобщенное напряжение σ_i^*, которое в главных напряжениях выражается

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad (3.33)$$

Величина σ_i так же, как и τ_i по формуле (3.30г), представляет собой величину скалярную.

Величина интенсивности напряжений σ_i в зависимости от вида напряженного состояния изменяется в пределах

$$\sigma_i = \left(1 \div \frac{1}{1,155}\right)(\sigma_{max} - \sigma_{min}),$$

где σ_{max} и σ_{min} — соответственно алгебраически максимальное и минимальное главное нормальное напряжение.

Легко определить, что для линейного напряженного состояния (линейного растяжения или сжатия), когда два из трех глав-

* Применяют также термин «эффективное напряжение».

ных напряжений равны нулю, интенсивность напряжений по величине совпадает с главным нормальным напряжением, растягивающим или сжимающим.

На основании ранее сказанного о напряженном состоянии точки можно отметить следующие характерные площадки, проходящие через нее:

а) три главные площадки, на которые действуют главные нормальные напряжения, а касательные отсутствуют;

б) шесть площадок, по которым действуют главные касательные напряжения;

в) четыре площадки действия одинаковых по величине октаэдрических напряжений.

Таким образом, всего есть 13 характерных площадок.

3.9. ДИАГРАММА НАПРЯЖЕНИЙ МОРА

Диаграмма напряжений по О. Мору (или круги Мора) дает графическое представление о совокупности векторов напряжений нормального $\sigma_н$ и касательного τ, действующих в различных наклонных площадках, рассматриваемых в системе главных осей. Диаграмму эту строят, откладывая величины нормальных напряжений $\sigma_н$ по оси абсцисс, а корреспондирующих им касательных напряжений τ — по оси ординат.

Нормальное напряжение в наклонной площадке определяется выражением (3.10):

$$\sigma_н = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2.$$

Вместе с тем из уравнений (3.11) и (3.10) следует

$$\sigma_н^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2. \tag{3.34}$$

Кроме того, напишем известное условие для направляющих косинусов в виде

$$1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \tag{3.35}$$

Умножим обе части уравнения (3.10) на $(\sigma_2 + \sigma_3)$, затем почленно вычтем результат из уравнения (3.34) и прибавим сюда почленно уравнение (3.35), предварительно умножив обе части его на $\sigma_2\sigma_3$. Таким образом, получим

$$\sigma_н^2 + \tau^2 - \sigma_н(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 = \sigma_1^2 a_1^2 +$$
$$+ \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2) +$$
$$+ \sigma_2\sigma_3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2). \tag{а}$$

Прибавляя к обеим частям уравнения (а) по $\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2$, после элементарных преобразований получим

$$\left(\sigma_н-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2+$$
$$+a_1^2(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_2). \tag{3.36а}$$

Применяя ту же методику, выведем еще два аналогичных уравнения

$$\left(\sigma_н-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2+$$
$$+a_2^2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3); \tag{3.36б}$$
$$\left(\sigma_н-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+$$
$$+a_3^2(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1). \tag{3.36в}$$

Из сравнения полученных уравнений (3.36а, б и в) с известным из аналитической геометрии уравнением окружности

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

можно заключить, что уравнения системы (3.36) также определяют окружности. Центры их расположены на оси абсцисс (на оси $\sigma_н$) и отстоят от начала координат соответственно для уравнений (а), (б) и (в) на расстояния

$$\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2};\quad \frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\ \text{и}\ \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}.$$

В правых частях уравнений (3.36), представляющих собой квадрат радиуса R окружности, есть изменяемый параметр (a_1, a_2 и a_3). Поэтому каждое из уравнений (3.36) является уравнением семейства концентрических окружностей.

Уравнения (3.10), (3.34) и (3.35) определяют корреспондирующие значения напряжений $\sigma_н$ и τ для заданных условий. При математическом преобразовании этих уравнений в систему (3.36) физический смысл остается неизменным.

Таким образом, первое уравнение системы (3.36) определяет в виде окружности геометрическое место точек $\sigma_н$, и τ для того или иного заданного значения направляющего косинуса a_1. То же справедливо и для двух других уравнений системы.

Следовательно, для заданной возможной [т. е. удовлетворяющей уравнению (3.35)] группы значений направляющих косинусов a_1, a_2 и a_3 величины $\sigma_н$ и τ определяются (рис. 3.6) точками P пересечения трех окружностей.

Выясним далее, в какой зоне могут быть расположены эти точки. Примем условие $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, т. е. индексом 1 обозначим наибольшее (алгебраически) по величине главное нормальное напряжение, индексом 3 — минимальное, а индексом 2 — среднее, промежуточное. Это условие всегда можно соблюсти, поскольку оси координат равноправны.

Определим величины радиусов R_1, R_2 и R_3 окружностей, заданных уравнениями (а), (б) и (в) системы (3.36) при значениях направляющих косинусов соответственно

$\cos \alpha_1 = a_1 = 0;$

$\cos \alpha_2 = a_2 = 0$ и

$\cos \alpha_3 = a_3 = 0,$

т. е. для углов $\alpha = 90°$

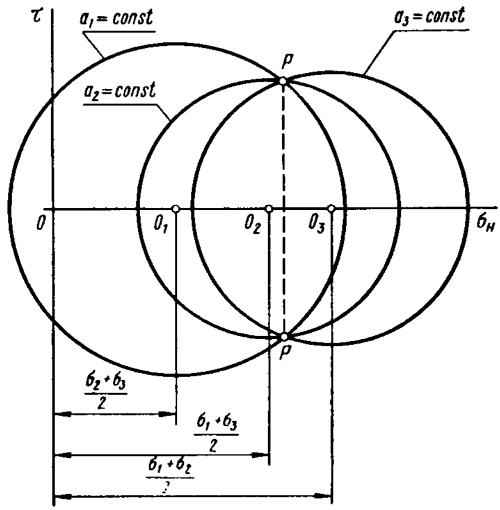


Рис. 3.6

$$R_{1\,(a_1=0)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \tag{3.37а}$$

$$R_{2\,(a_2=0)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \tag{3.37б}$$

$$R_{3\,(a_3=0)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{3.37в}$$

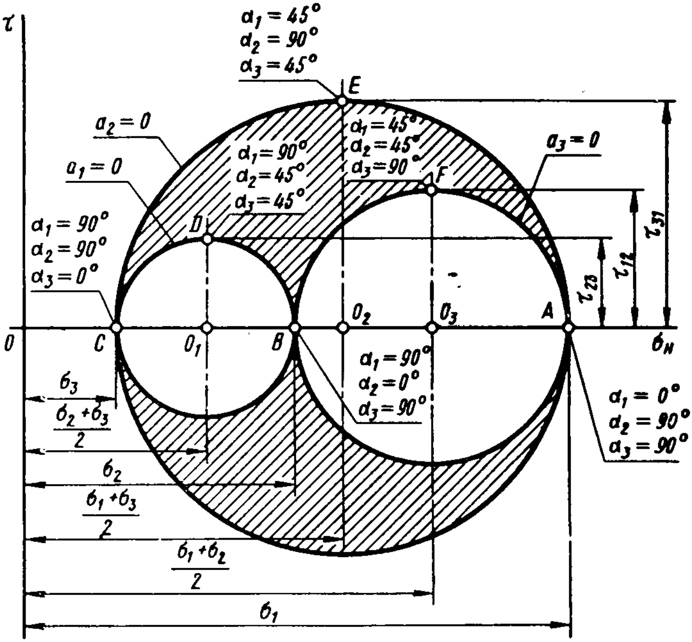
Как видно из уравнений (3.36а) и (3.36в), при увеличении значений a_1 и a_3 радиусы соответствующих окружностей увеличиваются. А это значит, что возможные пары значений $\sigma_н$ и τ находятся на самих окружностях радиусов $R_{1\,(a_1=0)}$ и $R_{3\,(a_3=0)}$ или вне их, но не могут располагаться внутри.

Если же увеличивается значение a_2, то радиус R_2 уменьшается, поскольку разность σ_2—σ_1 отрицательна согласно принятому выше соотношению главных напряжений, и, следовательно, значения $\sigma_н$ и τ располагаются внутри окружности радиуса R_2 при $\alpha_2 = 0$.

Проведя окружности радиусами $R_{1\,(a_1=0)}$, $R_{2\,(a_2=0)}$ и $R_{3\,(a_3=0)}$, по уравнениям (3.37) из ранее указанных центров получим диаграмму Мора (рис. 3.7). Пары корреспондирующих значений $\sigma_н$ и τ лежат внутри заштрихованных криволинейных треугольников, ограниченных проведенными окружностями — «главными кругами» Мора. На рис. 3.7 также отмечены характерные точки (A, B, C, D, E, F) диаграммы.

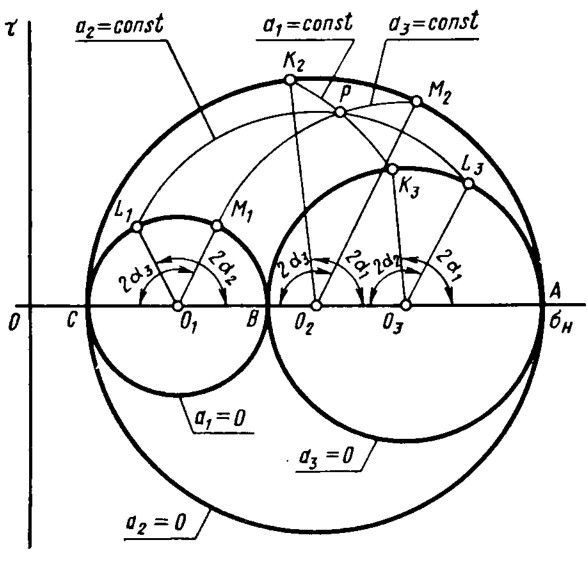
Из формул (3.37) видно, что радиусы кругов численно равны величинам главных касательных напряжений.

При помощи построения, показанного на рис. 3.8, по заданным углам α_1, α_2 и α_3 можно определить значения $\sigma_н$ и τ в наклон-



τ
α1 = 45°
α2 = 90°
α3 = 45°
E
α2 = 0
α1 = 45°
α2 = 45°
α3 = 90°
α3 = 0
α1 = 0
α1 = 90°
α2 = 45°
α3 = 45°
F
D
α1 = 90°
α2 = 90°
α3 = 0°
τ31
τ12
τ23
O
C
O1
B
O2
O3
A
σн
α1 = 90°
α2 = 0°
α3 = 90°
σ3
(σ2 + σ3)/2
σ2
(σ1 + σ3)/2
(σ1 + σ2)/2
σ1
α1 = 0°
α2 = 90°
α3 = 90°

Рис. 3.7



τ
α2 = const
α1 = const
α3 = const
K2
P
M2
L3
K3
L1
M1
2α3
2α2
2α3
2α1
2α2
2α1
A
O
C
O1
B
O2
O3
σн
α1 = 0
α3 = 0
α2 = 0

Рис. 3.8

ной площадке, а также решить обратную задачу. Знак касательного напряжения по диаграмме Мора в общем случае определить нельзя.

Легко заметить, что увеличение или уменьшение напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 на одну и ту же величину не изменяет радиусов главных кругов и взаимных расстояний между их центрами. Изменяется лишь положение оси τ. Если ось τ сдвинуть в сторону фигуры (в случае, показанном на рис. 3.7, — вправо) на величину среднего нормального напряжения $\sigma_{ср}$ [формула (3.23)], то получим отображение девиатора напряжений (рис. 3.9). Ось τ в этом случае всегда пересекает фигуру. Ее можно провести при помощи построения, показанного на рис. 3.9, не вычисляя $\sigma_{ср}$.

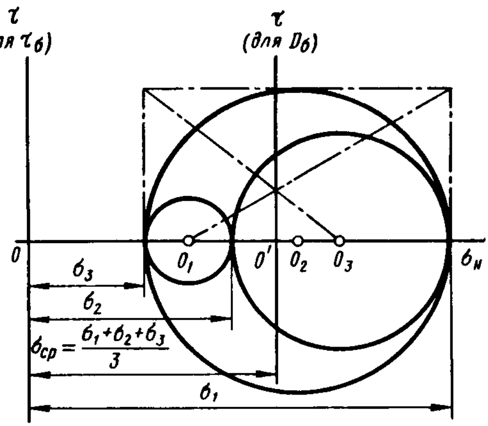


Рис. 3.9

Шаровой тензор напряжений отобразится на диаграмме Мора окружностью нулевого радиуса (точкой O'), расположенной на расстоянии $\sigma_{ср}$ от начала координат.

3.10. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ОБЪЕМНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Величина напряжений в теле, нагруженном силами и находящемся в равновесии, в общем случае непрерывно изменяется от точки к точке, т. е. напряжения являются непрерывными функциями координат. Выделим в напряженном теле элементарный параллелепипед (рис. 3.10) с гранями, параллельными координатным плоскостям, и выясним, какие существуют условия, обеспечивающие его равновесие.

Пусть одна из напряженных точек a с координатами x, y, z отображается гранями параллелепипеда $abcd$, $adb'c'$ и $ac'd'b$. Вторая точка a' отстоит от a на бесконечно малое расстояние, и соответственно этому координаты ее будут $x + dx$, $y + dy$ и $z + dz$. Эта точка a' отображается гранями параллелепипеда $a'b'c'd'$, $a'd'bc$ и $a'cdb'$. Понятно, что размеры ребер параллелепипеда равны dx, dy и dz.

Пусть напряженное состояние точки a определяется тензором напряжений

$$T_{\sigma a} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}.$$

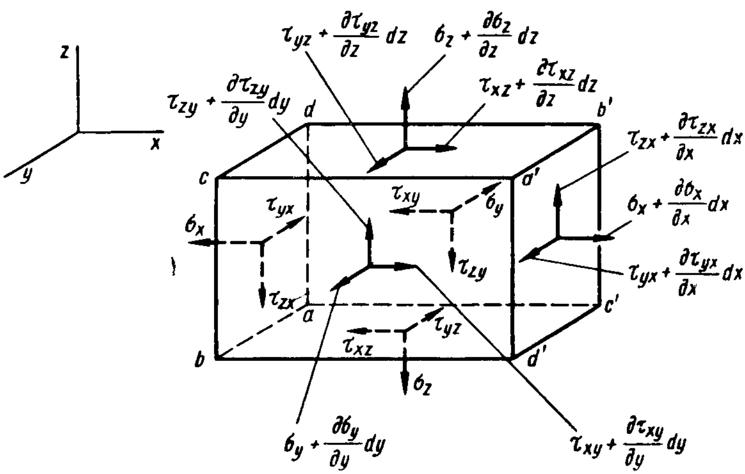


Рис. 3.10

Напряжения в точке a' отличаются от напряжений в точке a на бесконечно малые величины. Пренебрегая членами высших порядков, можно принять, что приращение каждого напряжения выражается частным дифференциалом по той координате, по которой переместилась площадка действия данного напряжения, т. е. по координате, указываемой индексом адреса напряжения. Тогда тензор напряжений для точки a'

$$T_{\sigma a'} = \begin{Bmatrix} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) & \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) & \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) \\ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx\right) & \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) & \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz\right) \\ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx\right) & \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy\right) & \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) \end{Bmatrix}.$$

Усилия, действующие по граням параллелепипеда, равны напряжениям, умноженным на площади соответствующих граней, указываемых индексами адреса напряжения.

Составляем условия равновесия, взяв суммы проекций всех сил на оси координат и приравнивая эти суммы нулю.

На ось x

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy\,dz - \sigma_x\,dy\,dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx\,dz -$$

$$- \tau_{xy}\,dx\,dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dx\,dy - \tau_{xz}\,dx\,dy = 0.$$

Раскрывая скобки и сокращая на $dxdydz$, получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0.$$

Суммы проекций на оси y и z можем написать по аналогии. В результате получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0;\\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=0;\\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (3.38)$$

Таким образом, мы получили условия равновесия для объемного напряженного состояния в виде дифференциальных уравнений в частных производных.

Эти условия обязательны для всех точек деформируемого тела.

Напряжения меняются по объему тела, и в элементах, выходящих на поверхность, их величина должна быть такой, чтобы уравновешивать внешнюю нагрузку, действующую на поверхностную грань [104], т. е. удовлетворять поверхностным условиям или условиям на контуре.

Связать напряжение в бесконечно малом элементе тела, выходящем на его поверхность, с внешней нагрузкой можно, используя уравнения (3.3). Действительно, в общем случае элементарный участок поверхности тела можно рассматривать как наклонную грань элементарного тетраэдра (стр. 80).

Три дифференциальных уравнения равновесия (3.38) содержат шесть неизвестных (учитывая, что касательные напряжения попарно равны между собой), и, следовательно, для их решения требуются дополнительные уравнения. Таким образом, объемная задача в общем случае является статически неопределимой.

3.11. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Одним из частных случаев объемного напряженного состояния, весьма часто встречающимся при обработке металлов давлением, является осесимметричное напряженное состояние.

Под этим видом напряженного состояния подразумевается напряженное состояние тела вращения, к поверхности или части поверхности которого приложены распределенные нагрузки, расположенные симметрично относительно его оси и одинаковые во всех меридиональных сечениях (рис. 3.11). Примерами могут служить осадка цилиндрической заготовки, ее прошивка, выдавливание (прессование), волочение и др.

При рассмотрении осесимметричного напряженного состояния весьма удобно пользоваться взамен декартовых цилиндрическими координатами, в которых положение любой точки A определяется радиусом-вектором ρ, полярным углом θ, отсчитываемым от оси ρ (x), и аппликатой z, как представлено на рис. 3.12, где a — проекция точки A на плоскость, перпендикулярную к оси z,

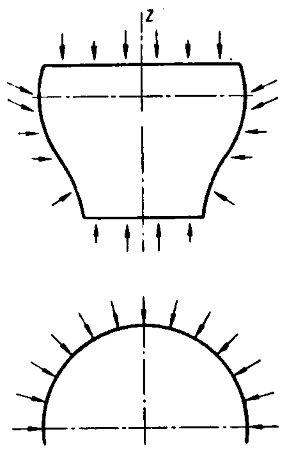


Рис. 3.11

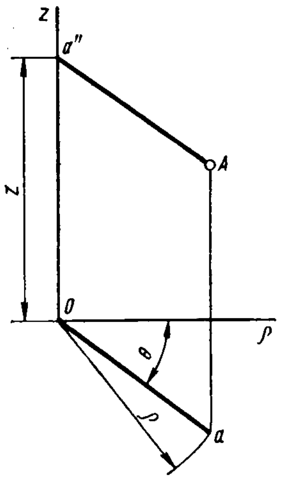


Рис. 3.12

проходящую через точку O. Обозначения напряжений в цилиндрических координатах и форма элемента показаны на рис. 3.13. Тензор напряжений в цилиндрических координатах запишется так:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\theta} & \tau_{\rho z} \\ \tau_{\theta\rho} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{z\rho} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{Bmatrix}.$$

Напряжение σ_ρ называют радиальным, σ_θ — тангенциальным, а σ_z — осевым.

При осесимметричном напряженном состоянии компоненты напряжений не зависят от координаты θ, и, следовательно, все производные по этой координате в дифференциальных уравнениях равновесия обратятся в нуль. Кроме того, в меридиональных плоскостях (плоскостях, проходящих через ось z, т. е. плоскостях θ) не могут возникнуть касательные напряжения вследствие симметричности тела и симметрии внешней нагрузки. Поэтому с учетом закона парности касательных напряжений $\tau_{\rho\theta} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta\rho} = \tau_{\theta z} = 0$. Следовательно, напряжение σ_θ всегда будет главным, т. е. $\sigma_\theta = \sigma_2$, а ось ρ может иметь любое направление в плоскости z (т. е. в плоскости, нормальной к оси z).

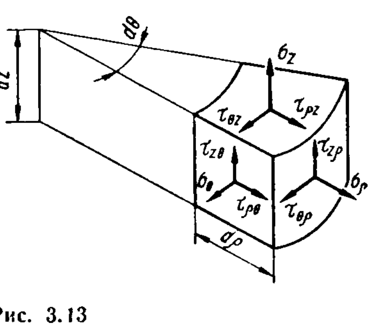


Рис. 3.13

Таким образом, компоненты напряжений при осесимметричном напряженном состоянии можно записать так:

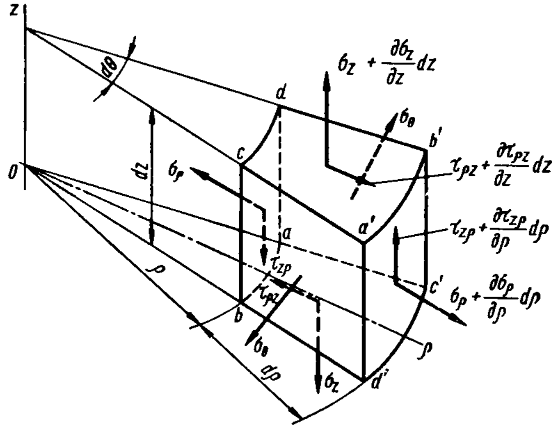


Рис. 3.14

$$\left.\begin{matrix} \sigma_\rho & 0 & \tau_{\rho z} \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ \tau_{z\rho} & 0 & \sigma_z \end{matrix}\right\}.$$

Всего будет три нормальных и два равных между собой касательных напряжения.

Применяя тот же метод, который был использован при рассмотрении объемного напряженного состояния в декартовых координатах (стр. 100), выведем дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах для осесимметричного напряженного состояния.

Действующие напряжения показаны на рис. 3.14. Ось ρ, как сказано ранее, можно провести в любом направлении на плоскости z. Для удобства вычисления на рис. 3.14 эта ось проведена так, что плоскость ρz является плоскостью симметрии выделенного элементарного объема.

Площади элементарных площадок

$$F_\rho = \text{пл. } abcd = \rho d\theta dz;$$

$$F_{(\rho+d\rho)} = \text{пл. } a'b'c'd' = (\rho + d\rho)\, d\theta\, dz;$$

$$F_\theta = \text{пл. } a'd'bc = d\rho dz;$$

$$F_z = \text{пл. } a'cdb' = \text{пл. } ac'd'b = \rho\, d\theta d\rho.$$

Запишем условия равновесия, проецируя все действующие на элемент силы на оси ρ и z, принимая $\left(\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}\right)$:

$$-\sigma_\rho \rho\, d\theta\, dz + \left(\sigma_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho}\, d\rho\right)(\rho + d\rho)\, d\theta\, dz - \sigma_\theta\, d\theta\, d\rho\, dz -$$

$$- \tau_{\rho z} \rho\, d\theta\, d\rho + \left(\tau_{\rho z} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z}\, dz\right) \rho\, d\theta\, d\rho = 0; \qquad \text{(a)}$$

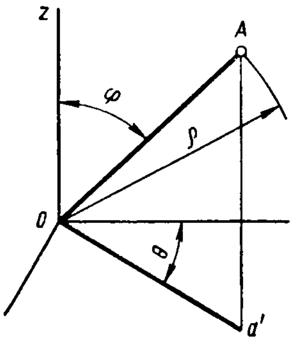


Рис. 3.15

$$-\tau_{z\rho}\rho d\theta dz + \left(\tau_{z\rho} + \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} d\rho\right)(\rho + d\rho)\, d\theta\, dz - \sigma_z \rho\, d\theta\, d\rho + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) \rho\, d\theta\, d\rho = 0. \qquad (б)$$

После алгебраических преобразований и сокращений, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.39)$$

При решении некоторых осесимметричных задач в дальнейшем придется встретиться кроме цилиндрических координат со сферическими. В этой системе (рис. 3.15) положение точки определяется радиусом-вектором ρ и двумя углами θ и φ, определяющими его положение в пространстве. Угол φ отсчитывается от оси z (аналогичен географической широте), а угол θ отсчитывается от некоторой оси в плоскости, нормальной к оси z и проходящей через центр O системы (аналогичен географической долготе). Обозначения напряжений в сферических координатах получим, заменив индекс z в обозначениях, данных для цилиндрической системы, индексом φ.

При осесимметричном напряженном состоянии напряжения не зависят от координаты θ, а касательные напряжения, содержащие в индексе эту координату, т. е. $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho}$ и $\tau_{\varphi\theta} = \tau_{\theta\varphi}$, равны нулю.

Дифференциальные уравнения равновесия для осесимметричного напряженного состояния в сферических координатах приведем без вывода:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho}\left[2\sigma_\rho - (\sigma_\varphi + \sigma_\theta) + \tau_{\rho\varphi} \operatorname{ctg} \varphi\right] = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho}\left[3\tau_{\rho\varphi} + (\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \operatorname{ctg} \varphi\right] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.39а)$$

3.12. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ И ПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ («ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА»)

Плоское напряженное и плоское деформированное состояния характеризуются следующими особенностями.

1. Все компоненты напряжений не зависят от одной из координат, общей для всех компонент, и остаются постоянными при ее изменении.

2. В плоскостях, нормальных к оси этой координаты:

а) компоненты касательных напряжений равны нулю;

б) нормальное напряжение или равно нулю (плоское напряженное состояние), или равно полусумме двух других нормальных напряжений (плоское деформированное состояние).

Примем за ось, о которой говорилось ранее, ось y. Из предыдущего ясно, что эта ось будет главной, т. е. ее можно обозначить также и индексом 2. При этом σ_x, σ_z и $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ не зависят от y; вместе с тем τ_{xy} и τ_{zy}, а следовательно, и τ_{yx} и τ_{yz} равны нулю.

Для плоского напряженного состояния $\sigma_y = 0$. Для плоского деформированного состояния $\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$ (эта особенность плоского деформированного состояния будет доказана далее, на стр. 141).

Следует всегда учитывать существенную разницу между плоским напряженным и плоским деформированным состояниями.

В первом, в направлении третьей оси, нет нормального напряжения, но есть деформация, во втором есть нормальное напряжение, но нет деформации.

Плоское напряженное состояние может быть, например, в пластине, подверженной действию сил, приложенных к ее контуру параллельно плоскости пластины и распределенных равномерно по ее толщине (рис. 3.16). Изменение толщины пластины в этом случае не имеет значения, и толщина ее может быть принята за единицу [104]. Плоским с достаточной точностью можно считать напряженное состояние фланца при вытяжке цилиндрической заготовки из листового материала.

Плоское деформированное состояние может быть принято для участков цилиндрического [1] или призматического тела большой длины, отдаленных от его концов, если тело нагружено силами, не меняющимися по его длине и направленными перпендикулярно образующим. В плоском деформированном состоянии, например, можно считать брус, подвергающийся осадке в направлении его толщины, когда деформацией по длине можно пренебречь.

Все уравнения напряженного состояния для плоской задачи значительно упрощаются и сокращается количество переменных.

Уравнения для плоской задачи можно легко получить из выведенных ранее для объемного напряженного состояния, учитывая, что $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$ и принимая $a_y = 0$, поскольку следует рассматривать наклонные площадки только параллельные оси y, т. е. нормальные к площадкам, свободным от напряжений при плоском напряженном состоянии или свободным от деформаций при плоском деформированном состоянии (рис. 3.17).

В рассматриваемом случае

$$a_x^2 + a_z^2 = 1,$$

---

[1] В общем смысле этого термина.

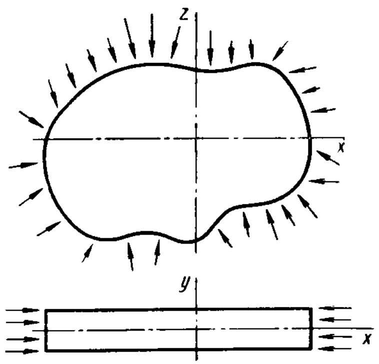


Рис. 3.16

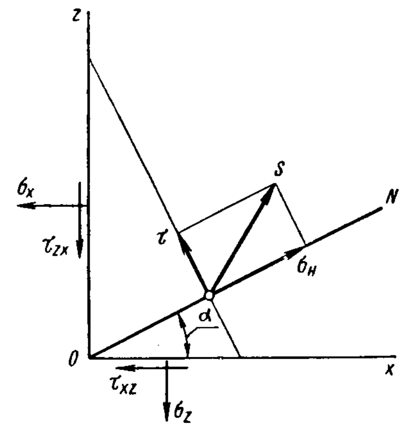


Рис. 3.17

т. е.

$$a_z^2 = 1 - a_x^2.$$

Обозначая угол (см. рис. 3.17) между нормалью к наклонной площадке и осью x (или осью *1*, если напряженное состояние дано в главных осях *1* и *2*) через α *, получаем

$$a_x = \cos\alpha; \quad a_z^2 = 1 - \cos^2\alpha,$$

откуда

$$a_z = \sin\alpha.$$

Учитывая вышесказанное, путем непосредственных подстановок в соответствующие выражения (3.10) и (3.11) для объемного напряженного состояния получим нормальное и касательное напряжения в наклонной площадке (см. рис. 3.17).

Нормальное напряжение

$$\sigma_н = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_3 \sin^2\alpha. \tag{3.40}$$

Касательное напряжение

$$\tau = \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1) \sin 2\alpha. \tag{3.41}$$

Из выражения (3.41) легко видеть, что τ имеет максимум при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = 45°$:

$$\tau_{31} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1). \tag{3.42}$$

* Без индекса, поскольку положение площадки в рассматриваемом случае определяется всего одним углом.

Величину главных напряжений можно выразить через компоненты в произвольных осях, использовав уравнение (3.13), из которого получим

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0;$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_z)\,\sigma + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2 = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}. \tag{3.43}$$

При этом для плоского напряженного состояния

$\sigma_2 = 0$;

для плоского деформированного состояния

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Зная напряженное состояние в главных осях, легко перейти на любые произвольные координатные оси (рис. 3.18). Пусть новая координатная ось x составляет угол α с осью *1*, тогда, рассматривая ее как нормаль к наклонной площадке, имеем для последней по уравнению (3.40)

$$\sigma_н = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_3 \sin^2\alpha,$$

но для оси x напряжение $\sigma_н$ является напряжением σ_x, следовательно,

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_3 \sin^2\alpha;$$

выражение это можно преобразовать так:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_3 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \\ \sigma_x &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

Новая ось z будет наклонена к оси *1* на угол $(\alpha + 90°)$; следовательно, заменяя в предыдущем уравнении α на $(\alpha + 90°)$, получим

$$\sigma_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha. \tag{3.45}$$

Напряжение τ_{xz} определим из выражения (3.41):

$$\tau_{xz} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)\sin 2\alpha. \tag{3.46}$$

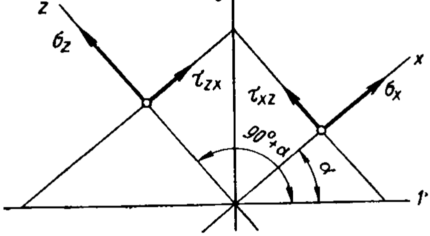


Рис. 3.18

Обозначая среднее напряжение через $\sigma_{ср}$, т. е. принимая

$$\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \sigma_{ср}, \tag{3.47}$$

и учтя уравнение (3.42), получим так называемые **формулы преобразования**, которые выражают компоненты напряжений в функции угла α:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_z\end{matrix}\right\} = \sigma_{ср} \pm \tau_{31}\cos 2\alpha;\\ &\quad\tau_{xz} = \tau_{31}\sin 2\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

При построении диаграммы Мора учтем, что поскольку мы рассматриваем площадки, параллельные оси y (т. е. оси 2), направляющий косинус a_2 всегда равен нулю, т. е. угол $\alpha_2 = 90°$. Поэтому все корреспондирующие значения $\sigma_н$ и τ будут расположены на окружности, определяемой уравнением (3.36б) при подстановке в него $a_2 = 0$, а именно:

$$\left(\sigma_н - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \tag{3 49}$$

или с учетом выражений (3.47) и (3.42)

$$(\sigma_н - \sigma_{ср})^2 + \tau^2 = \tau_{31}^2. \tag{3.49а}$$

Эта окружность представлена на рис. 3.19 и является диаграммой Мора. Координаты какой-нибудь точки P, расположенной на окружности, определяют корреспондирующие значения $\sigma_н$ и τ. Соединим точку P с точкой O_2. Легко видеть, что отрезки

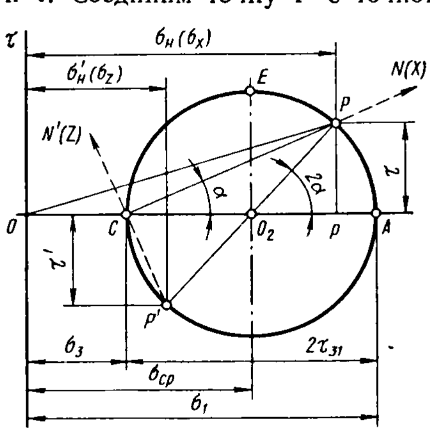


Рис. 3.19

$$O_2P = \tau_{31};\quad Pp = \tau;\quad Op = \sigma_н,$$

и, следовательно,

$$\tau = \tau_{31}\sin \angle PO_2A,$$

$$\sigma_н = \sigma_{ср} + O_2p =$$

$$= \sigma_{ср} + \tau_{31}\cos \angle PO_2A.$$

Сравнивая полученные выражения с уравнениями (3.48), можно установить, что

$$\angle PO_2A = 2\alpha,$$

и, следовательно,

$$\angle PCA = \alpha.$$

Таким образом, зная положение наклонной площадки, определяемое углом α, можно найти значения напряжений $\sigma_н$ и τ, действующих в этой площадке.

Так как

$$OP^2 = Op^2 + Pp^2,$$

то отрезок OP выражает полное напряжение S.

Если элемент напряженного тела, в наклонной грани которого рассматривают напряжения, вычертить так, чтобы главное напряжение σ_1 было направлено параллельно оси $\sigma_н$, то нормаль N, проведенная к этой наклонной грани, а следовательно, и направление напряжения $\sigma_н$ будут параллельны отрезку CP.

Продолжив линию PO_2 до пересечения с окружностью, в точке P' получим вторую пару значений $\sigma_н'$ и τ' для другой наклонной площадки, у которой $\alpha' = \alpha + 90°$, т. е. для площадки, перпендикулярной к первой, с направлением нормали N'. Направления нормалей N и N' можно принять соответственно за направления новых осей x и z, а напряжения $\sigma_н$ и $\sigma_н'$ — соответственно за координатные напряжения σ_x и σ_z. Таким образом, можно определить напряженное состояние в произвольных осях без использования формул (3.44)—(3.46). Абсолютные величины напряжений τ и τ' равны между собой по закону парности.

Нетрудно решить и обратную задачу: по заданным напряжениям в двух взаимно перпендикулярных площадках σ_x, τ и σ_z, τ' (где $\tau' = \tau$) найти главные напряжения.

Проводим координатные оси $\sigma_н$ и τ (рис. 3.19). Наносим точки P и P' с координатами, соответствующими заданным напряжениям σ_x, τ и σ_z, τ. Пересечение отрезка PP' с осью $\sigma_н$ определит центр круга Мора O_2 с диаметром $PP' = 2\tau_{31}$. Далее, если построить оси N, N' (или, что то же, x, z) и повернуть фигуру так, чтобы направления этих осей были параллельны направлениям напряжений σ_x и σ_z в рассматриваемой точке данного тела, то направления осей $\sigma_н$ и τ диаграммы будут параллельны направлению главных осей *1* и *2*.

Дифференциальное уравнение равновесия для плоской задачи получим из уравнений (3.38), учитывая, что все производные по y равны нулю, а также равны нулю τ_{yx} и τ_{yz}:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0. \tag{3.50}$$

При решении некоторых задач, относящихся к плоским, иногда бывает удобно пользоваться вместо прямоугольных координат полярными, определяя положение точки радиусом-вектором ρ и полярным углом θ, т. е. углом, который составляет радиус-вектор с осью ρ.

Условия равновесия в полярных координатах легко получить из тех же условий в цилиндрических координатах, приравняв

$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{z\rho} = \tau_{\rho z} = 0$ и учтя, что производные по z равны нулю:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{\theta\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.51)$$

Частным случаем плоской задачи является такой, когда напряжения не зависят также и от координаты θ (симметричное относительно оси распределение напряжений). В этом случае обратятся в нуль производные по θ и напряжения $\tau_{\rho\theta}$ и $\tau_{\theta\rho}$, а условия равновесия определятся одним дифференциальным уравнением

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \qquad (3.52)$$

Ясно, что напряжения σ_ρ и σ_θ здесь являются главными. Такое напряженное состояние можно принять для фланца круглой заготовки при вытяжке без прижима цилиндрического стакана.

Глава 4

МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

4.1. КОМПОНЕНТЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ОБЪЕМЕ

При обработке давлением металл получает остаточные деформации значительной величины. Тем не менее необходимо знание основных положений и соответствующих дифференциальных зависимостей, относящихся к малым деформациям, так как всякий процесс пластической деформации часто можно и удобно рассматривать в каждый данный момент его протекания.

Если тело деформируется, то каждая его точка смещается от своего первоначального положения. При этом подразумевается, что тело находится в равновесии и не имеет возможности перемещаться как целое. Таким образом, считается, что перемещение каждой точки происходит исключительно вследствие деформации (т. е. жесткое перемещение отсутствует).

Пусть координаты точки в начальный момент x, y, z, а в данный момент деформации (близкий к начальному) x', y', z', тогда

$$x' - x = u_x;$$

$$y' - y = u_y;$$

$$z' - z = u_z,$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} \qquad (4.1)$$

представляют собой проекции перемещения на координатные оси, т. е. являются компонентами перемещения точки.

Для различных точек тела компоненты перемещения различны, и они и их производные являются непрерывными функциями координат.

Элементарный прямоугольный параллелепипед, мысленно выделенный в теле, при деформации последнего изменит не только свое положение, но и свою форму. В общем случае ребра параллелепипеда изменят длину, а углы перестанут быть прямыми. Получим деформации двух видов: линейные (удлинения) и угловые (сдвиги). При этом, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, можно считать, что угловые деформации (сдвиги) (при

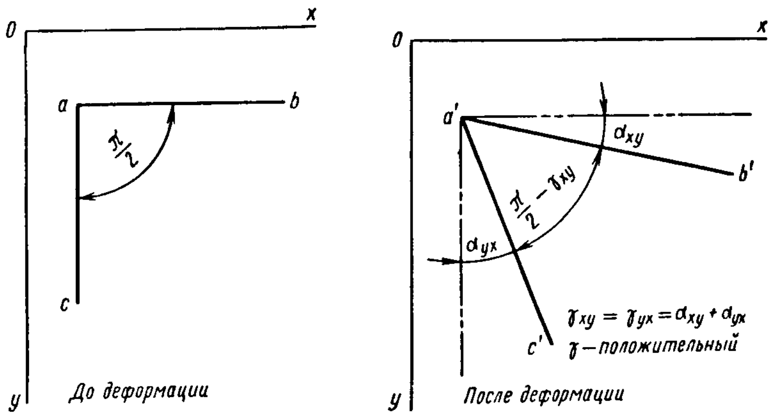


Рис. 4.1

малой деформации элементарного объема) не влияют на линейные размеры.

Относительные линейные деформации обозначим ε с индексами, подобными принятым для напряжений σ. Относительные сдвиги обозначим γ с двумя индексами, как у напряжений τ, указывая этими индексами координатную плоскость, на которую проецируется искажаемый деформацией угол. При этом относительные сдвиги считаются положительными, если им соответствует уменьшение угла со сторонами, направленными в положительном направлении координатных осей. Сказанное поясняет рис. 4.1.

Из изложенного следует, что компонент деформаций шесть:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{vmatrix}.$$

Выразим теперь компоненты деформации через компоненты перемещения. Выделим для этого в какой-либо точке M деформируемого тела элементарный параллелепипед с бесконечно малыми ребрами dx, dy и dz, параллельными осям координат, так, чтобы одна из вершин его совпадала с точкой M.

Пусть (рис. 4.2) $abcd$ — проекция этого элементарного параллелепипеда на плоскость xy до деформации, причем точка a является проекцией точки M.

После деформации точки a, b, c, d получили перемещения. Точка a перешла в a', b — в b', c — в c', d — в d'. Выразим перемещения точек b и c через перемещения точки a. Точка a получила перемещения u_x и u_y, которые являются функциями координат точки M, проекцией которой служит точка a; $u_x = f(x, y, z)$; $u_y = f_1(x, y, z)$. Точка b расположена на беско-

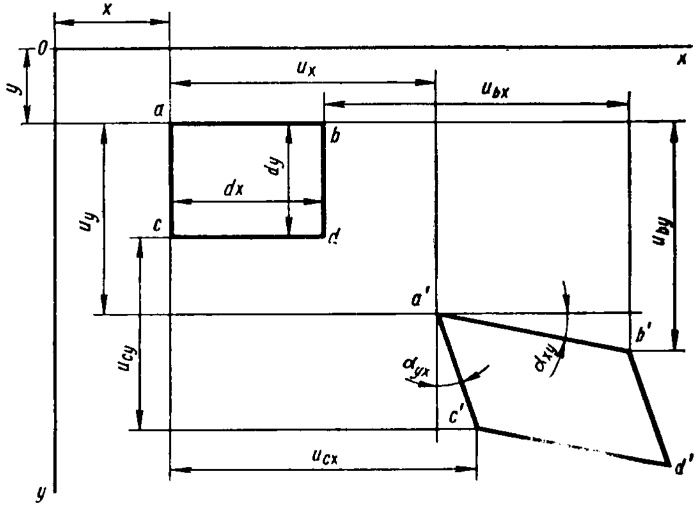


Рис. 4.2

нечно малом расстоянии dx от точки a в направлении оси x. Поэтому перемещение u_{bx} точки b по направлению оси x

$$u_{bx} = f(x + dx,\ y,\ z),$$

но, пренебрегая членами высших порядков, можно считать, что перемещение точки b в направлении оси x отличается от перемещения точки a на величину приращения функции u_x на длине dx по координате x. Тогда

$$u_{bx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}\,dx;$$

отсюда относительное удлинение ребра ab длиной dx, т. е. относительная деформация ε в направлении x,

$$\varepsilon_x = \frac{u_{bx} - u_x}{dx} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}\,dx - u_x}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Аналогично получим

$$u_{cy} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y}\,dy;$$

$$\varepsilon_y = \frac{u_{cy} - u_y}{dy} = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y}\,dy - u_y}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

а также

$$u_{by} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x}\,dx; \quad u_{cx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}\,dy.$$

Перейдем к определению угловых деформаций.

Так как изменения углов бесконечно малые, то $\operatorname{tg}\alpha_{xy} = \alpha_{xy}$ и $\operatorname{tg}\alpha_{yx} = \alpha_{yx}$, поэтому (см. рис. 4.2)

$$\alpha_{xy} = \frac{u_{by} - u_y}{u_{bx} + dx - u_x}.$$

Подставляя полученные значения u_{bx} и u_{by}, получим

$$\alpha_{xy} = \frac{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x}dx - u_y}{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + dx - u_x} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}}.$$

Так как $\partial u_x/\partial x = \varepsilon_x$ и значительно меньше единицы, то

$$\alpha_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Тем же способом получим

$$\alpha_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

и, наконец,

$$\gamma_{xy} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Проецируя рассматриваемый параллелепипед на плоскости yz и zx, найдем выражения других компонент деформации.

В итоге получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{а) относительные удлинения}\\
&\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x};\\
&\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y};\\
&\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};\\
&\text{б) относительные сдвиги}\\
&\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x};\\
&\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y};\\
&\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Эти уравнения получил О. Л. Коши.

Выражения относительных сдвигов γ получены как значения суммы двух углов, например, для сдвига γ_{xy} (см. рис. 4.1 и 4.2) как сумма угла поворота (α_{xy}) ребра ab, параллельного оси x, в направлении оси y, и угла поворота (α_{yx}) ребра ac, параллельного оси y, в направлении оси x.

В отношении результатов деформации (искажения) формы совершенно безразлично, какие будут относительные значения углов α_{xy} и α_{yx}, лишь бы их сумма оставалась постоянной, равной γ_{xy}. Это дает возможность каждую компоненту сдвиговой деформации представить в виде двух, рассматривая половины значений γ и принимая индексы аналогично тому, как это было сделано для углов α. Например, вместо относительного сдвига γ_{xy} взять $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ и $\frac{1}{2}\gamma_{yx}$, причем $\frac{1}{2}\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{yx}$. Индексация при этом будет совпадать с индексацией напряжений τ, и деформации можно записать так же, как записаны напряжения в уравнениях (3.12), (3.12а):

$$T_\varepsilon=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

или, учитывая равенство компонент, расположенных симметрично относительно главной диагонали,

$$T_\varepsilon=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \cdot & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_z \end{Bmatrix}; \tag{4.3а}$$

T_ε является тензором деформаций, обладающим такими же свойствами, как и тензор напряжений (3.12). Он полностью определяет деформированное состояние точки, имеет такие же инварианты, как тензор напряжений, и его также можно разложить на шаровой тензор деформаций и девиатор деформаций (см. стр. 91). Первый в общем случае упругой деформации выражает изменение объема (объемную деформацию), второй — изменение формы (девиаторную деформацию).

При пластической деформации, как было показано ранее, объем тела не изменяется и сумма малых деформаций $\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=0$, следовательно, и $\varepsilon_{\text{ср}}=0$. Поэтому *при пластической деформации шаровой тензор деформации равен нулю и тензор деформации является девиатором.*

Для осесимметричного напряженно-деформированного состояния в цилиндрических координатах запишем выражения деформаций без вывода:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_\rho}{\rho}; \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z};\\ \gamma_{\rho z} &= \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

Для деформаций, так же как и для напряжений, всегда можно найти главные оси деформаций, в направлении которых возникают главные линейные деформации (главные удлинения) ε_1, ε_2 и ε_3, а сдвиги γ отсутствуют. Вообще все необходимые формулы теории деформаций можно записать по аналогии с соответствующими формулами теории напряжений [3].

Так, в площадках, параллельных одной координатной плоскости и составляющих одинаковые углы 45° с каждой из двух других, возникают наибольшие (главные) сдвиги γ_{12}, γ_{23} и γ_{31}, определяемые через главные линейные деформации:

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \quad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \text{ и } \gamma_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1. \quad (4.5)$$

Главные сдвиги связаны между собой выражением

$$\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{31} = 0. \quad (4.6)$$

В площадках, равнонаклоненных к осям координат (октаэдрических), возникают октаэдрические деформации.

Линейная октаэдрическая деформация является средней деформацией

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{ср} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}. \quad (4.7)$$

При пластическом деформировании, когда объем тела остается постоянным,

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{ср} = 0. \quad (4.8)$$

Октаэдрическая деформация сдвига или октаэдрический сдвиг определяется формулой

$$\gamma_0 = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (4.9)$$

Кроме того, в теории пластических деформаций находят применение положительные скалярные величины, интенсивность деформаций сдвига γ_i и интенсивность деформаций ε_i *. Эти величины выражаются следующими формулами:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (4.11)$$

---

* Иначе обобщенная деформация или эффективная деформация.

Величины γ_o, γ_i и ε_i отличаются одна от другой лишь постоянным множителем.

Главные линейные деформации связаны между собой следующими соотношениями:

для плоского деформированного состояния

$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2 = 0$;

для линейного растяжения и сжатия

$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0{,}5\varepsilon_1$, коэф. Пуассона $\nu = -0,5$

где ε_1 — наибольшая по абсолютной величине главная деформация. Если эти выражения подставить в формулы (4.9), (4.10), (4.11), то можно убедиться, что величина октаэдрической деформации сдвига колеблется в пределах 0,816—0,941 от максимального главного сдвига.

Для плоского деформированного состояния интенсивность деформаций сдвига γ_i равна наибольшему главному сдвигу, а интенсивность деформаций ε_i составляет $1{,}155\varepsilon_1$. Для линейного растяжения или сжатия интенсивность деформаций сдвига γ_i в 1,155 раза больше максимального главного сдвига, а интенсивность деформаций ε_i равна наибольшей по абсолютной величине главной линейной деформации. Для других видов деформированного состояния γ_i и ε_i получают значения, промежуточные между указанными выше.

Учитывая сказанное о возможной величине γ_0, γ_i и ε_i, можно написать следующие выражения:

$$\gamma_0 = (0{,}816 \div 0{,}941)\,|\gamma|_{max}; \qquad (4.12)$$

$$\gamma_i = (1 \div 1{,}155)\,|\gamma|_{max}; \qquad (4.13)$$

$$\varepsilon_i = (1 \div 1{,}155)\,|\varepsilon|_{max}, \qquad (4.14)$$

где $|\gamma|_{max}$ и $|\varepsilon|_{max}$ — наибольшие по абсолютной величине главный сдвиг и главная линейная деформация.

Для деформаций, так же как и для напряжений, пользуясь теми же приемами, можно построить диаграммы Мора, но в координатах ε и γ.

При пластической деформации объем тела остается постоянным и тензор деформации является девиатором. Поэтому ось γ всегда пересекает фигуру диаграммы. Ее положение легко определить построением, указанным на рис. 4.3.

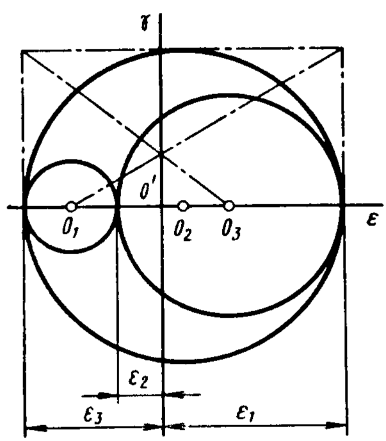


Рис. 4.3

4.2. НЕРАЗРЫВНОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ

Компоненты деформации в уравнениях (4.2) определяются тремя компонентами перемещений u_x, u_y, u_z. Следовательно, они не могут быть произвольными, а между ними должны существовать определенные зависимости. Эти зависимости носят название условий (уравнений) совместности или неразрывности деформаций. Зависимости существуют как между компонентами деформаций в одной плоскости, так и между компонентами в разных плоскостях.

Выведем условия совместности для плоской задачи. При плоском напряженном и плоском деформированном состояниях все деформации не зависят от координаты y, перемещение u_y не зависит от координат x и z и в плоскостях, нормальных к оси y, сдвиги отсутствуют. Учитывая сказанное, из выражений (4.2) получим

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ &\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Продифференцируем первое из равенств (4.15) дважды по z, а второе дважды по x:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x\, \partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_z}{\partial z\, \partial x^2}.$$

Сложим почленно и несколько преобразуем

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x\, \partial z^2} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial z\, \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right).$$

Замечая, что выражение в правой части в скобках представляет собой относительный сдвиг γ_{xz}, получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x\, \partial z}. \tag{4.16}$$

Выражение (4.16) и является условием совместности. Легко видеть, что при двух заданных деформациях третья получит вполне определенное и единственное значение.

Для осесимметричного напряженно-деформированного состояния условием совместности линейных деформаций ε_ρ и ε_θ является

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \rho} = \frac{\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta}{\rho}. \tag{4.17}$$

4.3. СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

В процессе деформации материальные точки деформируемого тела находятся в движении таким образом, что расстояние между ними изменяется, что обусловливает появление деформации. Чем быстрее изменяется расстояние между точками тела, тем больше скорость деформации.

Скорости перемещений точек обозначим буквой u с точкой сверху, т. е. $\dot{u}$, с обычными индексами направлений и адресов. Скорости перемещений, как и сами перемещения, являются непрерывными функциями координат и времени. Так, например, линейные скорости перемещений определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_x &= \varphi_x(x, y, z, t); \\ \dot{u}_y &= \varphi_y(x, y, z, t); \\ \dot{u}_z &= \varphi_z(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \quad (4.18)$$

Если деформации малые, а их мы и рассматривали в предыдущих параграфах этой главы, то компоненты скоростей перемещений можно выразить частными производными по времени t от соответствующих компонент перемещений

$$\dot{u}_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}; \quad \dot{u}_y = \frac{\partial u_y}{\partial t}; \quad \dot{u}_z = \frac{\partial u_z}{\partial t}. \quad (4.19)$$

Если рассматривать две точки, весьма близкие одна к другой, то скорости деформации по какому-либо направлению можно определить как предел отношения разностей скоростей указанных точек к расстоянию между ними, если величины последнего стремятся к нулю. Скорости деформаций обозначим теми же буквами, что и деформации, но с точкой сверху.

Тогда, например,

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} \text{ и } \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x};$$

или, учитывая уравнения (4.19) и (4.2), получим

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t};$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}.$$

Аналогично можно определить все остальные компоненты скорости деформации:

скорости относительных удлинений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}; && \text{(а)} \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}; && \text{(б)} \\ \dot{\varepsilon}_z &= \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}; && \text{(в)} \end{aligned}\right\} \quad (4.20)$$

скорости относительных сдвигов

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}; \quad (г)\\
\dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t}; \quad (д)\\
\dot{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial t}. \quad (е)
\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Таким образом, компоненты скорости деформации равны производным скоростей перемещений по соответствующей координате, а также производным компонент деформации по времени.

Компоненты скорости деформации, так же как и компоненты деформации, образуют тензор компонент деформации

$$T_{\dot{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & \dot{\varepsilon}_y & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zy} & \dot{\varepsilon}_z \end{Bmatrix}. \tag{4.21}$$

При пластической деформации объем тела не изменяется и тензор скоростей деформации является девиатором, а следовательно,

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 0. \tag{4.22}$$

Для скоростей деформации, так же как и для деформаций, можно определить главные оси скоростей деформации, в направлении которых наблюдаются главные скорости линейных деформаций (относительных удлинений), а скорости сдвигов отсутствуют.

По формулам, аналогичным соответствующим формулам теории деформации, можно найти главные скорости сдвига $\dot{\gamma}_{12}$, $\dot{\gamma}_{23}$ и $\dot{\gamma}_{31}$, скорость октаэдрического сдвига $\dot{\gamma}_0$, интенсивность скорости сдвига $\dot{\gamma}_i$ и интенсивность скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_i$.

Для скоростей деформации можно построить диаграммы скоростей деформации Мора (круги).

В заключение укажем на невстречающееся до сих пор понятие л и н и и т о к а. Последние представляют собой кривые, касательные к которым в каждой точке параллельны вектору скорости перемещения материальной точки, совпадающей с данной точкой. Для стационарного движения линии тока совпадают с траекториями движения.

4.4. ОДНОРОДНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Как видно из уравнений (4.2), компоненты малой деформации элементарного параллелепипеда, т. е. малые деформации в окрестностях данной материальной точки деформируемого тела, являются линейными функциями от производных перемещений по координатам. В свою очередь, если рассматривается бесконечно малая окрестность точки, то самые перемещения следует считать линейными функциями координат, а следовательно, их производные, выражающие деформации, являются постоянными.

Деформация, характеризующаяся тем, что перемещения являются линейными функциями координат и величины относительных деформаций постоянны, называется *однородной деформацией*.

Малая деформация элементарного объема всегда считается однородной. Но и в конечном объеме можно считать деформацию однородной, например, при равномерном растяжении, а также в ряде случаев в порядке упрощающей предпосылки при решении практических задач.

Однородная деформация характеризуется рядом достаточно очевидных особенностей. Плоскости и прямые линии остаются плоскостями и прямыми после деформации. Параллельные прямые и параллельные плоскости остаются параллельными после деформации. Сфера, мысленно выделенная внутри тела, превращается в эллипсоид. Два геометрически подобных и подобно расположенных элемента тела и после искажения при однородной деформации остаются геометрически подобными [104].

Глава 5

УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

5.1. УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

Упругое равновесие тела возможно при различных соотношениях и величинах нагрузок. Пластическое же равновесие возможно только при вполне определенных нагрузках. Так, можно считать, что при линейном растяжении признаки пластической деформации появятся тогда, когда нагрузка вызовет напряжение, равное пределу текучести.

Если по мере увеличения деформации происходит упрочнение материала, то для дальнейшего развития пластической деформации необходимо увеличивать напряжение. Величина его определяется кривой упрочнения (кривой истинных напряжений). Если упрочнение отсутствует, то при линейном растяжении пластическая деформация происходит при постоянном напряжении.

Тело, материал которого является несжимаемым и неупрочняющимся, называется идеально пластичным. Для идеально пластичного тела диаграмма деформация—истинное напряжение при растяжении примет вид, показанный на рис. 5.1. Диаграмма показывает, что для идеально пластичного тела в зоне пластической деформации задачи, решаемые в теории упругости, в общем случае не имеют смысла [33]. Так, например, по заданному напряжению σ нельзя найти величину деформации (она может быть любой), а при произвольно заданной внешней силе невозможно пластическое равновесие, так как величина силы должна быть определенной, например, для деформирования растяжением — такой, которая вызывала бы напряжение σ_s (рис. 5.1).

Из предыдущего явствует, что при линейном растяжении условием для перехода от упругого к пластическому состоянию является равенство $\sigma_1 = \sigma_s$. Вместе с тем существенная разница между упругой и пластической деформацией состоит в том, что величина упругой деформации полностью определяется действующими напряжениями, а знание мгновенного распределения напряжений в какой-то момент пластического деформирования позволяет судить лишь о том, каковы будут приращения деформаций.

Однако необходимо знать, какими условиями определяется переход в пластическое состояние и дальнейшее поддержание его при любом виде напряженного состояния. Эти условия можно выявить только на основании экспериментальных исследований.

Вместе с тем можно уверенно предположить, что переход любой элементарной частицы тела в пластическое состояние обусловливается каким-то соотношением между напряжениями, с одной стороны, и его механическими свойствами при данных температурно-скоростных условиях — с другой.

Существует несколько гипотез, определяющих условие перехода напряженного тела (точки) от упругого состояния к пластическому, сокращенно «условие пластичности».

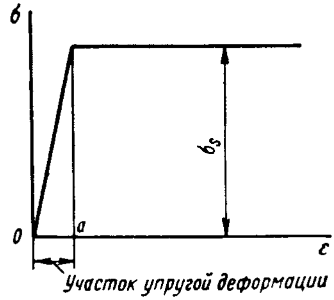


Рис. 5.1

Наиболее обоснованным является условие пластичности, выдвинутое М. Губером (1914 г.) и Р. Мизесом (1913 г.). Это условие можно сформулировать следующим образом.

Любая элементарная частица металлического тела переходит из упругого в пластическое состояние, когда интенсивность напряжений достигает величины, равной напряжению текучести при линейном пластически напряженном состоянии, соответствующему температурно-скоростным условиям деформирования и степени деформации. Короче можно сказать так: при пластическом состоянии интенсивность напряжений постоянно равна напряжению текучести

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_s. \quad (5.1)$$

Кроме того, следует учитывать, что под напряжением текучести σ_s в уравнении (5.1) следует подразумевать не условное, а истинное напряжение при линейном пластически напряженном состоянии.

В условиях холодного деформирования пластическая деформация начинается при $\sigma_i = \sigma_{0,2}$ (если считать предел текучести $\sigma_{0,2}$ за истинное напряжение). В дальнейшем при увеличении степени деформации напряжение текучести σ_s вследствие упрочнения увеличится, а следовательно, возрастет и необходимая величина σ_i для поддержания пластического состояния.

В случае горячей деформации с полной рекристаллизацией (с полным разупрочнением) вместо σ_s можно взять значение предела прочности $\sigma_в$ из испытаний на растяжение при соответствующей температуре, так как значения σ_s и $\sigma_в$ при высоких температурах разнятся не столь значительно.

Для определения σ_s можно использовать также результаты испытаний высоких (с отношением высоты к диаметру, бо́льшим единицы) образцов на сжатие в условиях, близких к линейному напряженному состоянию (хорошая смазка, специальные бойки). Однако во всех случаях надо учитывать необходимость внесения поправок для учета разницы в скоростях деформации при испытании и осуществлении реального процесса деформирования.

Из сравнения выражений, определяющих октаэдрическое касательное напряжение по уравнению (3.30) и интенсивность касательных напряжений по уравнению (3.30г), с выражением (5.1) следует, что условие пластичности можно написать также и в следующих формах:

$$\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_s; \tag{5.2}$$

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s, \tag{5.2а}$$

т. е. *при пластическом состоянии и октаэдрическое касательное напряжение* τ_o, *и интенсивность касательных напряжений* τ_i, *так же как* σ_i, *имеют вполне определенную величину.*

Правую часть выражения (5.2а) обычно обозначают одной буквой k, откуда

$$\tau_i = k,$$

где

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s \approx 0{,}575\sigma_s.$$

Величину k часто называют постоянной пластичности. С ней мы встретимся неоднократно в дальнейшем.

Возводя уравнение (5.1) в квадрат, получим

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2, \tag{5.3}$$

а заменяя разности главных нормальных напряжений главными касательными напряжениями, получим

$$\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2 = \frac{1}{2}\sigma_s^2. \tag{5.4}$$

Отсюда следуют две другие формулировки условия пластичности.

1. *При пластической деформации сумма квадратов разностей главных нормальных напряжений есть величина определенная, равная удвоенному квадрату напряжения текучести.*

2. *При пластической деформации сумма квадратов главных касательных напряжений есть величина определенная, равная половине квадрата напряжения текучести.*

Выражение рассматриваемого условия пластичности в форме (5.3) является наиболее употребительным.

Сравнивая это выражение с выражением (3.32а) второго инварианта девиатора напряжений, легко заключить, что условие пластичности инвариантно к преобразованию координат, а переход в пластическое состояние зависит только от девиатора напряжений и не зависит от шарового тензора, т. е. от всестороннего равномерного растяжения или сжатия (гидростатического давления).

Пользуясь выражением (3.32а), можно написать условие пластичности (5.3) в произвольных осях координат, а не в главных:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 +$$
$$+ 6\,(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_s^2. \qquad (5.5)$$

5.2. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Выясним физический смысл условия пластичности, пользуясь уравнением (5.3). Для этого обратимся к потенциальной энергии деформации.

Полная потенциальная энергия деформации $A_\text{п}$ представляет собой сумму потенциальной энергии изменения объема $A_\text{о}$ и потенциальной энергии изменения формы $A_\text{ф}$:

$$A_\text{п} = A_\text{о} + A_\text{ф},$$

откуда

$$A_\text{ф} = A_\text{п} - A_\text{о}.$$

Из теории упругости известно, что удельная потенциальная энергия деформации (т. е. отнесенная к единице объема) равна половине скалярного произведения тензора напряжений на тензор деформаций. Это произведение представляет собой сумму произведений компонент напряжений на компоненты соответствующих деформаций. В главных осях имеем

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma_3 \end{Bmatrix} \text{ и } T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \varepsilon_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_3 \end{Bmatrix};$$

отсюда

$$A_\text{п} = \frac{1}{2}\,(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3).$$

Из сопротивления материалов известно, что

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\,[\sigma_1 - \mu_p\,(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\,[\sigma_2 - \mu_p\,(\sigma_3 + \sigma_1)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\,[\sigma_3 - \mu_p\,(\sigma_1 + \sigma_2)],$$

где μ_p — коэффициент Пуассона.

Значит,

$$A_п = \frac{1}{2E} \{\sigma_1 [\sigma_1 - \mu_p (\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 [\sigma_2 -$$

$$- \mu_p (\sigma_3 + \sigma_1)] + \sigma_3 [\sigma_3 - \mu_p (\sigma_1 + \sigma_2)]\} =$$

$$= \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\mu_p (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right].$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема определится тем же способом, но за исходные данные необходимо взять шаровой тензор напряжений и шаровой тензор деформаций

$$T_\sigma^0 = \begin{Bmatrix} \sigma_{ср} & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma_{ср} & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma_{ср} \end{Bmatrix} \text{ и } T_\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ср} & 0 & 0 \\ \cdot & \varepsilon_{ср} & 0 \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_{ср} \end{Bmatrix};$$

отсюда

$$A_о = \frac{1}{2} (\sigma_{ср}\varepsilon_{ср} + \sigma_{ср}\varepsilon_{ср} + \sigma_{ср}\varepsilon_{ср}) = \frac{3}{2} \sigma_{ср}\varepsilon_{ср},$$

но

$$\sigma_{ср} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

а

$$\varepsilon_{ср} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

или, пользуясь выражениями деформации, приведенными выше, получим

$$\varepsilon_{ср} = \frac{1}{3E} \{[\sigma_1 - \mu_p (\sigma_2 + \sigma_3)] +$$

$$+ [\sigma_2 - \mu_p (\sigma_3 + \sigma_1)] + [\sigma_3 - \mu_p (\sigma_1 + \sigma_2)]\} =$$

$$= \frac{1}{3E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\mu_p (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)];$$

следовательно,

$$A_о = \frac{2}{2 \cdot 3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \frac{1}{3E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 -$$

$$-2\mu_p (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{6E} [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 -$$

$$- 2\mu_p [(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2].$$

Удельная потенциальная энергия изменения формы

$$A_ф = A_п - A_о = \frac{1}{2E}\left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \right.$$

$$\left. - 2\mu_p(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] -$$

$$- \frac{1}{6E}\left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2\mu_p(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2\right],$$

т. е.

$$A_ф = \frac{1}{6E}\left[3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 6\mu_p(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \right.$$

$$\left. - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + 2\mu_p(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{6E}\left\{\left[3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \mu_p\left[2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 6(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]\right\}$$

или

$$A_ф = \frac{1}{6E}\left[(3\sigma_1^2 + 3\sigma_2^2 + 3\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \right.$$

$$- \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1) +$$

$$+ \mu_p(2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 + 4\sigma_1\sigma_2 +$$

$$+ 4\sigma_2\sigma_3 + 4\sigma_3\sigma_1 - 6\sigma_1\sigma_2 - 6\sigma_2\sigma_3 -$$

$$\left. - 6\sigma_3\sigma_1)\right] = \frac{1+\mu_p}{6E}(2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 -$$

$$- 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1).$$

Окончательно получим

$$A_ф = \frac{1+\mu_p}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]. \tag{5.6}$$

Сопоставляя уравнения (5.6) и (5.3), можно установить, что при выполнении условия пластичности

$$A_ф = \frac{1+\mu_p}{6E}2\sigma_s^2 = \text{const}. \tag{5.7}$$

Таким образом, рассматриваемое условие пластичности равносильно утверждению, что *количество удельной потенциальной энергии упругой деформации формы элемента металлического тела при его пластической деформации является для данных условий деформации (степени, скорости и температуры деформации) величиной постоянной независимо от схемы напряженного состояния.*

Понятно, что если взять это положение за основу, то можно получить из него условие пластичности согласно уравнению (5.3).

Известно, что при линейном растяжении $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, а пластическое состояние наступит, если напряжение σ_1 станет равным напряжению текучести σ_s. Подставляя эти значения напряжений в уравнение (5.6), получим величину удельной потенциальной энергии упругой деформации формы в момент начала пластической деформации при линейном растяжении:

$$A_{\text{фл}} = \frac{1+\mu_p}{3E}\sigma_s^2. \qquad (5.8)$$

Так как по приведенному принципу величина $A_\text{ф}$ не зависит от схемы напряженного состояния, то правые части выражений (5.8) и (5.6) должны быть равны, т. е.

$$\frac{1+\mu_p}{3E}\sigma_s^2 = \frac{1+\mu_p}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2],$$

откуда

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2,$$

т. е. мы получили условие пластичности (5.3).

Физический смысл условия пластичности Губера—Мизеса был установлен Г. Генки в 1924 г. В связи с этим физическим смыслом условию пластичности, приведенному выше в различных формах, дано название «энергетическое».

Таким образом, условие пластичности Губера—Мизеса, представленное формулами (5.1)—(5.5), носит в литературе несколько наименований:

условие постоянства интенсивности напряжений;

условие постоянства октаэдрического касательного напряжения;

условие постоянства интенсивности касательных напряжений;

условие постоянства удельной энергии изменения формы или энергетическое условие.

В дальнейшем мы будем в основном пользоваться термином «энергетическое условие» как наиболее кратким.

Наиболее ранняя экспериментальная проверка энергетического условия пластичности была проведена А. Надаи и В. Лодэ (1926 г.). В дальнейшем этому вопросу был посвящен ряд исследований, которые также подтверждают энергетическое условие пластичности. В частности, проверкой законов пластичности занимался Г. А. Смирнов-Аляев, исследования которого также дали положительные результаты.

5.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Если в условии пластичности, отображенном в уравнении (5.3)

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2,$$

рассматривать напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 как текущие координаты, то уравнение (5.3) представит собой поверхность неограниченного по длине круглого цилиндра с радиусом $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_s$, ось которого проходит через начало координат и одинаково наклонена к осям координат, т. е. составляет с каждой из них угол, косинус которого равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

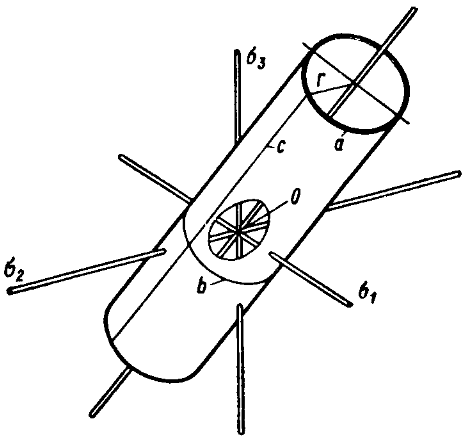


Рис. 5.2

Если главные нормальные напряжения в каком-либо элементе тела таковы, что они определяют точку, лежащую на поверхности цилиндра, то этот элемент будет в пластическом состоянии. Таким образом, поверхность согласно уравнению (5.3) является «предельной поверхностью пластической деформации» по энергетическому условию пластичности. Графически этот цилиндр представлен на рис. 5.2.

Если главные нормальные напряжения в элементе тела таковы, что они определяют точку, лежащую внутри цилиндра, то элемент будет находиться в упругом напряженном состоянии. Комбинации же напряжений, определяющие точки вне поверхности цилиндра, не имеют физического смысла. Понятно, что существует неограниченное число комбинаций величин главных нормальных напряжений, удовлетворяющих уравнению (5.3), поскольку число точек на поверхности цилиндра бесконечно большое.

Чем больше напряжение текучести σ_s, тем больше и радиус цилиндра r. Если деформация сопровождается упрочнением, то σ_s увеличивается и, следовательно, предельная поверхность пластической деформации расширяется.

Окружности на поверхности цилиндра (например, a), полученные пересечением его плоскостями, перпендикулярными к его оси, представляют собой геометрические места точек, определяющих предельные напряженные состояния, для которых сумма главных нормальных напряжений постоянна [1], т. е. напряженные состояния с одинаковым шаровым тензором (гидростатическим давлением). В частности, для круга b, образованного пересечением цилиндра плоскостью, проходящей через начало координат O, эта сумма равна нулю (т. е. напряженное состояние является чисто девиаторным).

---

[1] Это вытекает из того, что уравнением плоскостей, нормальных к оси цилиндра, является уравнение $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = p\sqrt{3}$, где p — длина нормали, проведенной из начала координат к этой плоскости.

Образующие цилиндра (например, c) являются геометрическими местами точек, для которых постоянны разности трех главных напряжений, т. е. определяют напряженные состояния с одинаковым девиатором.

Возьмем сечение поверхности, выраженной уравнением (5.3), координатной плоскостью $\sigma_3 = 0$; тогда, подставляя $\sigma_3 = 0$ в уравнение (5.3), получим

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 = 2\sigma_s^2$$

или

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_s^2. \tag{5.9а}$$

Сечениями каждой из двух других координатных плоскостей ($\sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 = 0$) соответственно являются

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = \sigma_s^2; \tag{5.9б}$$

$$\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 = \sigma_s^2. \tag{5.9в}$$

Уравнения (5.9) определяют совершенно одинаковые эллипсы с центрами в начале координат и осями, наклоненными под углом 45° к соответствующим осям координат.

Элементарными приемами аналитической геометрии можно определить координаты всех характерных точек эллипса и его полуосей (рис. 5.3). Ясно, что малая полуось эллипса равна по величине радиусу цилиндра, т. е. (рис. 5.3)

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_s.$$

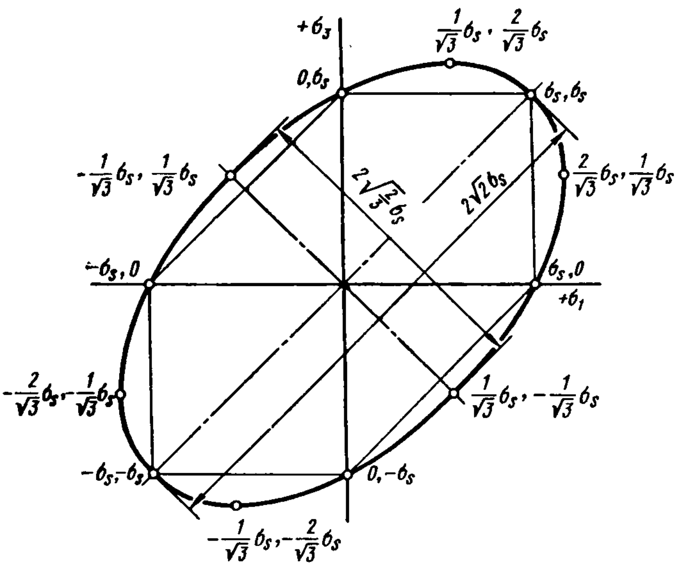


Рис. 5.3

Уравнения (5.9) получены подстановкой в условие пластичности (5.3) $\sigma_{3,2,1} = 0$. А при одном из главных напряжений, равном нулю, напряженное состояние будет плоским. Значит, уравнения (5.9) являются условием пластичности для плоского напряженного состояния, а эллипс, определяемый уравнениями (5.9), — **предельным контуром пластичности** для плоского напряженного состояния. Так как координатные оси равноправны, то безразлично, каким индексом (1, 2 или 3) обозначить главное нормальное напряжение, равное нулю. Поэтому, как и раньше, считаем $\sigma_2 = 0$. Из рис. 5.3 следует, что при плоском напряженном состоянии ни одно из главных напряжений (при пластическом состоянии) не может превысить величины

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = 1{,}155\sigma_s.$$

Четыре точки эллипса (0, σ_s; σ_s, 0; 0, $-\sigma_s$; $-\sigma_s$, 0) определяют линейное напряженное состояние (линейные растяжение и сжатие). Другие четыре точки $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s,\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s;\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s,\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \text{ и } -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s\right)$ соответствуют наличию одновременно не только плоского напряженного состояния, но и плоского деформированного состояния, так как одно из напряжений равно полусумме двух других (при этом принимается во внимание и напряжение, равное нулю):

$$\frac{0+\sigma_1}{2} = \sigma_3 \text{ или } \frac{0+\sigma_3}{2} = \sigma_1.$$

Две точки $\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$ и $-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$ соответствуют чистому сдвигу, поскольку при одном напряжении, равном нулю, два других равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

5.4. ЧАСТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Для **плоского напряженного** состояния было принято

$$\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0.$$

Подставляя эти значения в условие пластичности в компонентах тензора напряжений (5.5)

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ + 6\,(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_s^2,$$

получим

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_z^2 + 6\tau_{xz}^2 = 2\sigma_s^2$$

или

$$\sigma_x^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_z + 3\tau_{xz}^2 = \sigma_s^2, \tag{5.10}$$

а в главных напряжениях ($\tau_{xz} = 0$)

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = \sigma_s^2;$$

это выражение (5.9) получено ранее.

При плоском деформированном состоянии

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}; \quad \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0;$$

следовательно,

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)\right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - \sigma_x\right]^2 + 6\tau_{xz}^2 = 2\sigma_s^2;$$

раскрывая скобки и преобразовывая, получим

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = \frac{4}{3}\sigma_s^2. \tag{5.11}$$

Ранее обозначали (стр. 124)

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s,$$

теперь обозначим дополнительно

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = \sigma_s^*,$$

и, следовательно,

$$\sigma_s^* = 2k \text{ или } k = \frac{\sigma_s^*}{2}.$$

Учтя эти обозначения из формулы (5.11), получим

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = (\sigma_s^*)^2 = 4k^2. \tag{5.12}$$

В главных напряжениях для плоского деформированного состояния имеем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = \pm\sigma_s^* = \pm 2k, \tag{5.13}$$

но $\sigma_1 - \sigma_3$ есть удвоенное главное касательное напряжение, следовательно,

$$\tau_{13} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s = \pm\frac{1}{2}\sigma_s^* = \pm k. \tag{5.13a}$$

Таким образом, $k = \frac{1}{2}\sigma_s^* = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$ *есть максимальная величина, которой может достичь главное касательное напряжение при пластической деформации.*

Для осесимметричного напряженного состояния

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_{z\theta} = 0.$$

Изменяя в уравнении (5.5) индексы x и y соответственно на ρ и θ, получим

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + + 6\tau_{\rho z}^2 = 2\sigma_s^2 \qquad (5.14)$$

или в главных напряжениях

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2.$$

Последнее, естественно, не отличается от общего выражения условия пластичности (5.3).

В частном случае, если $\sigma_\theta = \sigma_\rho$, из уравнения (5.14) имеем

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 3\tau_{\rho z}^2 = \sigma_s^2, \qquad (5.15)$$

а учитывая из уравнения (5.13а), что $\sigma_s = \sqrt{3}\,k$, получим уравнение, построенное аналогично уравнению (5.12),

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 3\tau_{\rho z}^2 = 3k^2. \qquad (5.15а)$$

5.5. ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ПО ВЕЛИЧИНЕ ГЛАВНОГО НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Пусть главное нормальное напряжение σ_2 имеет величину промежуточную между σ_1 и σ_3, т. е. удовлетворяется какое-либо из двух неравенств

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \text{ или } \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3, \qquad (5.16)$$

Такое по величине напряжение σ_2 будем называть *средним главным* и обозначим $\sigma_{\text{сг}}$ [$\sigma_{\text{сг}}$ не следует смешивать со средним нормальным напряжением $\sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$; см. уравнение (3.28)]. Напряжения σ_1 и σ_3 в этом случае будут крайними (одно из них максимальное, другое минимальное). Для установления, какое из напряжений является средним главным, надо учитывать знаки напряжений, а не только их абсолютную величину: положительное напряжение считается большим вне зависимости от абсолютной величины отрицательного напряжения; отрицательное напряжение с меньшей абсолютной величиной больше отрицательного с большей абсолютной величиной, т. е. рассматривается алгебраическая величина напряжения.

Возьмем случай, когда $\sigma_2 = \sigma_{\text{сг}} = \sigma_1$; тогда из условия пластичности (5.3) получим

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2,$$

откуда

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_s \text{ или } \tau_{13} = \pm \frac{1}{2} \sigma_s. \tag{5.17}$$

Знаки $\pm$ поставлены потому, что σ_s считается существенно положительным, а разность $\sigma_1 - \sigma_3$ согласно условию (5.16) может иметь любой знак.

Пусть теперь $\sigma_2 = \sigma_{\text{сг}} = \sigma_3$. Тогда, подставляя в уравнение (5.3), имеем

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_s \text{ или } \tau_{13} = \pm \frac{1}{2} \sigma_s,$$

т. е. опять получили выражение (5.17), что и в предыдущем случае. Эти зависимости словесно можно сформулировать так.

При среднем главном нормальном напряжении, равном одному из крайних, пластическое состояние наступает, если разность крайних главных нормальных напряжений равна напряжению текучести или если соответствующее главное касательное напряжение равно половине напряжения текучести.

Среднее главное нормальное напряжение $\sigma_2 = \sigma_{\text{сг}}$ может изменяться лишь в пределах между σ_1 и σ_2 (в противном случае оно само станет крайним, а какое-то другое — промежуточным). Возьмем теперь среднее значение σ_2:

$$\sigma_2 = \sigma_{\text{сг}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

В таком случае напряжение σ_2 не только удовлетворяет неравенству (5.16), но и является средним нормальным напряжением вообще:

$$\sigma_2 = \sigma_{\text{сг}} = \sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2},$$

а деформированное состояние — плоским. Подставляя это значение σ_2 в условие пластичности (5.3), получим

$$\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3\right)^2 +$$
$$+ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2,$$

откуда

$$\frac{3}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2,$$

и, наконец, как и раньше (5.13),

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s.$$

Из сравнения выражений (5.17) и (5.13) следует, что для любого значения $\sigma_2 = \sigma_{\text{сг}}$ можно написать

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \beta\sigma_s \tag{5.18}$$

или

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \beta\sigma_s, \tag{5.18а}$$

где β — переменный коэффициент, изменяющийся в незначительных пределах от 1 до $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155$ и достигающий наибольшей величины при плоском деформированном состоянии.

Уравнение (5.18) является упрощенной записью условия пластичности. Им можно пользоваться при рассмотрении объемного напряженного состояния как приближенным, но более простым, чем условие (5.3). Выражая же разность главных нормальных напряжений через главное касательное напряжение, получим

$$\tau_{13} = \pm \frac{1}{2} \beta\sigma_s. \tag{5.18б}$$

Понятно, что поскольку напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 равноправны, постольку можно написать неравенства (5.16) при любых других комбинациях индексов, что не повлияет на сделанные выводы.

При решении же конкретных задач необходимо выбирать индексы, соответствующие условиям задачи, т. е. выяснять, какое главное нормальное напряжение является средним и какие — крайними.

Упрощенной записью условия пластичности можно пользоваться и при рассмотрении задач на плоское напряженное состояние. Но здесь надо учитывать напряжение $\sigma_2 = 0$, которое может быть и крайним, и средним. Если напряжения σ_1 и σ_3 имеют разные знаки, т. е. $\sigma_1\sigma_3 < 0$, то напряжение σ_2 является средним. Если же σ_1 и σ_3 положительны ($\sigma_1\sigma_3 > 0$), то σ_2 минимальное; если σ_1 и σ_3 отрицательны ($\sigma_1\sigma_3 > 0$), то σ_2 максимальное, или вообще, если $\sigma_1\sigma_3 > 0$, то σ_2 будет крайним.

Учитывая сказанное, для плоского напряженного состояния на основании уравнения (5.18) получим

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\beta\sigma_s \ (\text{при } \sigma_1\sigma_3 \lessdot 0); \\ &\sigma_1 = \pm\beta\sigma_s \ (\text{при } \sigma_1\sigma_3 \gtrdot 0 \text{ и } |\sigma_1| \gtrdot |\sigma_3|); \\ &\sigma_3 = \pm\beta\sigma_s \ (\text{при } \sigma_1\sigma_3 \gtrdot 0 \text{ и } |\sigma_3| \gtrdot |\sigma_1|). \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Коэффициент β является функцией главных нормальных напряжений $\beta = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Его можно выразить аналитически. Для этого вернемся к диаграмме Мора (см. рис. 3.7). Точка B на этой диаграмме в зависимости от величины среднего главного напряжения может перемещаться в пределах диаметра большого круга между точками A и C. Выразим ее относительное расстояние ν_σ от центра этого круга в форме

$$\nu_\sigma = \frac{\overline{O_2B}}{\overline{AC}}.$$

При этом отрезок O_2B считаем положительным, если он направлен вправо от точки O_2. На рассматриваемом чертеже он отрицательный. Учитывая это, можно написать (см. рис. 3.7)

$$\nu_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \tag{5.20}$$

или

$$\nu_\sigma = \frac{\sigma_{СГ} - \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}}{\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}} = \frac{2\sigma_{СГ} - \sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} - \sigma_{min}}. \tag{5.20a}$$

При $\sigma_2 = \sigma_1$ (т. е. при $\sigma_{СГ} = \sigma_{max}$) $\nu_\sigma = 1$, а при $\sigma_2 = \sigma_3$ (т. е. при $\sigma_{СГ} = \sigma_{min}$) $\nu_\sigma = -1$; наконец, при $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ $\left(\text{т. е. при } \sigma_{СГ} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}\right)$ $\nu_\sigma = 0$.

Таким образом, ν_σ изменяется в пределах от -1 до 1.

Из уравнения (5.20) можно определить σ_2:

$$\sigma_2 = \frac{\nu_\sigma (\sigma_1 - \sigma_3)}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Подставляя это значение σ_2 в условие пластичности (5.3) и производя необходимые преобразования, получим

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} \sigma_s.$$

Сравнивая полученное выражение с условием пластичности (5.18), можно усмотреть, что

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}. \tag{5.21}$$

График изменения β показан на рис. 5.4. Он представляет собой участок параболы. Этот теоретический график отвечает экспериментальным данным В. Лодэ.

Величина ν_σ определяется соотношениями между главными нормальными напряжениями и поэтому характеризует пластическое напряженное состояние точки, точнее, девиатор напряжений, поскольку ν_σ не зависит от шарового тензора (гидростатического давления).

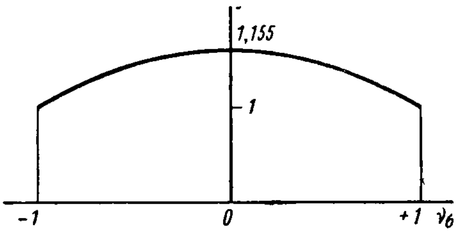


Рис. 5.4

Если для всех случаев принять $\beta = 1$ (т. е. не учитывать влияние среднего главного нормального напряжения), то условие пластичности для общего случая выразится так:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_s; \; \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_s; \; \sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma_s \tag{5.22}$$

или

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2} \sigma_s; \; \tau_{23} = \pm \frac{1}{2} \sigma_s;$$

$$\tau_{31} = \pm \frac{1}{2} \sigma_s. \tag{5.22a}$$

Такое условие пластичности можно сформулировать следующим образом:

пластическое состояние наступает и поддерживается, если одна из разностей двух главных нормальных напряжений становится равной напряжению текучести вне зависимости от значений двух других, т. е. независимо от величины среднего главного напряжения.

Иначе можно сказать так:

пластическое состояние наступает, если какое-либо одно из главных касательных напряжений достигает величины половины напряжения текучести.

Здесь так же, как и ранее, следует учитывать замечания, сделанные в отношении напряжения текучести (стр. 123).

Это условие пластичности носит название условия постоянства главного касательного напряжения или условия постоянства разности главных нормальных напряжений. Оно было высказано Г. Треска и разработано Б. Сен-Венаном значительно раньше, чем было сформулировано более точное энергетическое условие пластичности.

Условие постоянства главных касательных напряжений и условие постоянства интенсивности касательных напряжений совпадают:

1) при линейном напряженном состоянии;

2) при объемном напряженном состоянии, когда среднее главное напряжение равно одному из крайних, т. е. два из трех главных нормальных напряжений равны между собой (по величине и знаку);

3) при плоском напряженном состоянии, когда оба напряжения, отличные от нуля, равны (по величине и знаку, как всегда, когда идет речь о равенстве напряжений).

Максимальная разница между двумя указанными условиями возникает при плоском деформированном состоянии, т. е. когда среднее главное нормальное напряжение равно полусумме крайних.

Предельная поверхность по условию постоянства главных касательных напряжений [уравнение (5.22)] имеет вид правильной шестигранной призмы, вписанной в цилиндр, представляющий собой предельную поверхность пластической деформации по энергетическому условию. Контуром же пластичности для плоского напряженного состояния будет шестиугольник (см. рис. 5.3).

Если для плоского деформированного состояния подставить в какое-либо из уравнений (5.22), например в третье, значения главных нормальных напряжений из уравнения (3.43), то получим условие пластичности по принципу постоянства главных касательных напряжений для любых осей

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = \sigma_s^2. \quad (5.23)$$

Сравнивая уравнения (5.22) и (5.23) соответственно с уравнениями (5.13) и (5.12), легко обнаружить, что условие постоянства главных касательных напряжений и условие постоянства интенсивности касательных напряжений отличаются для плоского деформированного состояния только постоянными (σ_s и σ_s^*) в правых частях уравнений.

5.6. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Связь между напряжениями и деформациями при пластическом деформировании может быть выведена на основании следующих экспериментально установленных положений.

В каждый данный момент активной пластической деформации, по крайней мере в условиях простого нагружения:

1) *направления главных линейных деформаций (удлинений) совпадают с направлениями главных нормальных напряжений;*

2) *диаграмма Мора для деформаций* (в координатах ε и γ) *геометрически подобна диаграмме Мора для напряжений* (в координатах σ и τ).

Для получения необходимых выводов следует учесть, кроме того, условие постоянства объема

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

(ε — для малых деформаций).

Деформация, согласно А. А. Ильюшину, будет в данный момент активной в том случае, если интенсивность напряжений σ_i (стр. 94) имеет значение, превышающее все предшествующие ее значения. Если σ_i меньше хотя бы одного из предшествующих ее значений, то деформация элемента будет пассивной.

Ограничение, по крайней мере в условиях простого нагружения, вытекает из «теоремы о простом нагружении», выведенной А. А. Ильюшиным [33]. Процесс нагружения тела является простым, когда «внешние силы от начала их приложения возрастают пропорционально общему параметру».

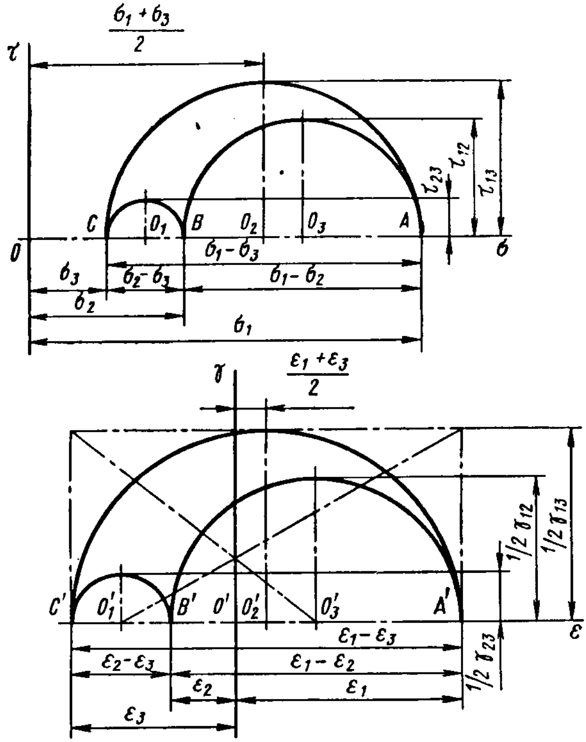


Рис. 5.5

Построим для какой-либо точки, находящейся в пластическом состоянии, диаграммы Мора для напряжений и деформаций (рис. 5.5).

На основании положения о подобии диаграмм Мора для напряжений и деформаций непосредственно из чертежа (рис. 5.5) получим (учитывая знаки деформаций)

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} = 2G'; \qquad (5.24)$$

$2G'$ взят как коэффициент пропорциональности. Смысл его будет выяснен в дальнейшем.

Возьмем из уравнения (5.24) выражение

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = 2G'$$

и, заменив в нем на основании условия постоянства объема $-\varepsilon_3$ на $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, определим ε_2:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3 - 2G'\varepsilon_1}{4G'}.$$

Возьмем теперь из уравнения (5.24) выражение

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = 2G'$$

и, подставив в него найденное значение ε_2, получим

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2G' \left(\varepsilon_i - \frac{\sigma_2 - \sigma_3 - 2G'\varepsilon_i}{4G'} \right).$$

Решив это уравнение относительно ε_i и поступив аналогично с другими сочетаниями уравнений (5.24), получим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{3G'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{3G'} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{3G'} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned}\right\} \qquad (5.25)$$

Обозначив $3G'$ через E', окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E'} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E'} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E'} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned}\right\} \qquad (5.25а)$$

Так как при пластической деформации объем тела не изменяется ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$), то коэффициент 1/2 в уравнении (5.25а) при суммах напряжений представляет собой коэффициент Пуассона. Отсюда следует, что выражения пластических деформаций ε совершенно аналогичны выражениям для упругих деформаций, с той лишь разницей, что модуль упругости первого рода E заменен коэффициентом E'. Этот коэффициент называют [3] модулем деформации (или модулем пластичности) первого рода.

Модуль упругости второго рода G связан с модулем Юнга E соотношением

$$G = \frac{1}{2(1 + \mu_p)} E.$$

Приняв коэффициент Пуассона $\mu_p = 0{,}5$, имеем

$$G = \frac{1}{3} E.$$

Из сравнения уравнений (5.25) и (5.25а) вытекает, что в случае пластической деформации

$$G' = \frac{1}{3} E'. \qquad (5.26)$$

Таким образом, G' является модулем деформации второго рода.

Существенная разница между модулями упругости E и G, с одной стороны, и модулями деформации E' и G' — с другой, состоит в том, что первые величины постоянные — константы материала, а вторые являются величинами переменными, могущими принимать различные значения, из которых каждое действительно только для одного какого-либо момента процесса деформации.

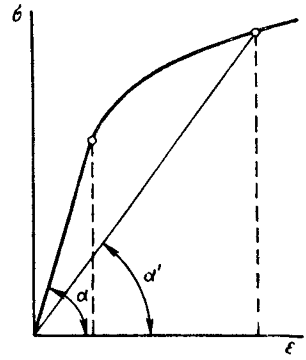


Рис. 5.6

Из рис. 5.6 видно, что $E = \operatorname{tg}\alpha$, а $E' = \operatorname{tg}\alpha'$, причем α' является переменным. Отсюда можно охарактеризовать значение E' следующим образом. Если бы с самого начала деформации модуль имел данную величину E', то при получении элементом тела данной деформации ε величина напряжения была бы $E'\varepsilon$.

Пусть $\sigma_2 = \sigma_1$. Подставив это значение в первое и второе уравнения (5.25а), получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E'}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right];\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E'}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right].$$

Таким образом, если два напряжения равны между собой, то равны и соответствующие деформации.

Если деформированное состояние плоское, то одна из деформаций равна нулю. Подставим $\varepsilon_2 = 0$ в среднее уравнение (5.25), тогда

$$\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$$

или

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Таким образом доказано ранее принятое положение, что *при плоском деформированном состоянии напряжение в направлении отсутствующей деформации равно полусумме двух других.*

Подставим в то же уравнение (5.25) $\sigma_2 = 0$, т. е. будем иметь в виду плоское напряженное состояние

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{E'}\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Таким образом, *при плоском напряженном состоянии деформация в направлении отсутствующего напряжения пропорциональна полусумме двух других, т. е. среднему напряжению.*

Наконец, из уравнений (5.25) видно, что деформация имеет положительный знак, если соответствующее ей напряжение больше полусуммы двух других (алгебраически).

Вернемся к диаграммам Мора для напряжений и деформаций (рис. 5.5). Из их подобия следует

$$\frac{O_2B}{AC} = \frac{O_2'B'}{A'C'},$$

а выражая отрезки через напряжения и деформации с учетом знаков (направлений) отрезков, получим

$$\frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}} \qquad (5.27)$$

или

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}. \qquad (5.27а)$$

Поскольку на рис. 5.5 принято $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то левая часть равенства (5.27) представляет собой не что иное, как величину ν_σ [см. уравнение (5.20)]. Правая часть построена аналогично левой. Если левая часть характеризует напряженное состояние, то правую часть можно считать характеристикой деформированного состояния. Обозначив последнюю ν_ε, можем написать

$$\nu_\sigma = \nu_\varepsilon, \qquad (5.28)$$

что дает еще одну форму выражения связи между напряженным и деформированным состоянием.

Пользуясь интенсивностями напряжений σ_i и деформаций ε_i, можно написать обобщенное уравнение связи напряжений с деформациями

$$\sigma_i = E'\varepsilon_i. \qquad (5.29)$$

Интенсивность деформаций ε_i при пластическом формоизменении определяет степень упрочнения материала. Можно утверждать, что интенсивность напряжений при пластической деформации является функцией интенсивности деформаций

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i). \qquad (5.29а)$$

Кривую $\sigma_i - \varepsilon_i$ можно построить на основании опытных данных.

Если считать материал несжимаемым и пренебрегать изменением его плотности при деформации, то зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций в точности совпадает с диаграммой истинных напряжений при растяжении, поскольку при простом растяжении σ_i равно растягивающему напряжению, а ε_i — относительному удлинению.

Заменяя в правых частях уравнений (5.25а) суммы двух напряжений через разности утроенного среднего напряжения и третьего напряжения (например, $\sigma_1 + \sigma_2 = 3\sigma_{\text{ср}} - \sigma_3$) и выражая из уравнения (5.29) модуль пластичности

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \tag{5.30}$$

можно получить уравнения связи напряжений и деформаций в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_1; \quad \sigma_2 - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_2; \\ &\sigma_3 - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_3. \end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

Уравнения (5.25) и (5.31) действительны и в том случае, если главные напряжения и деформации заменить напряжениями и деформациями, данными в произвольных осях x, y, z. Однако при этом необходимо добавить еще три уравнения, связывающие касательные напряжения τ и сдвиги γ, а именно:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\gamma_{zx}. \tag{5.32}$$

Приведенные уравнения связи напряжений и деформаций лежат в основе теории так называемых *малых пластических деформаций*. Особенностью этих уравнений является то, что коэффициент пропорциональности определяется упрочнением металла и, следовательно, представляет собой функцию деформации. В другой теории, а именно так называемой *теории пластического течения*, за основу положена связь напряжений со скоростями деформаций (приращениями деформаций). Предпосылки для установления этой связи аналогичны указанным ранее при рассмотрении связи напряжений и деформаций:

1) направления скоростей главных линейных деформаций совпадают с направлениями главных нормальных напряжений;

2) диаграмма Мора для скоростей деформаций геометрически подобна диаграмме Мора для напряжений;

3) объем тела принимается постоянным, что определяется выражением

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 0.$$

Коэффициенты пропорциональности в уравнениях связи будут другие: вместо обозначений G' и E' примем обозначения G'' и E''. При этом

$$E'' = \frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}. \tag{5.33}$$

Таким образом, в теории течения принято, что интенсивность напряжений (напряжение текучести) для каждого материала является функцией интенсивности скоростей деформации

$$\sigma_i = \varphi(\dot{\varepsilon}_i) = E''\dot{\varepsilon}_i. \tag{5.34}$$

Все уравнения связи напряжений и скоростей деформаций можно написать по аналогии с уравнениями напряжения — деформации. Следует лишь заменить в последних обозначения деформаций обозначениями скоростей деформаций, а равно заменить коэффициенты пропорциональности: например, вместо уравнения (5.24) будет действительно уравнение

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1} = 2G''.$$

Теория течения при использовании динамических уравнений равновесия дает возможность решать задачи динамики при пластическом деформировании, а также учитывать сопротивление, зависящее от скорости деформации [уравнение (5.34)]. Эта теория позволяет описать процесс установившейся ползучести.

В случае медленной и непродолжительной деформации деформационная теория и теория течения являются тождественными. При линейной связи интенсивности деформаций со временем интенсивность скоростей деформации не зависит от времени и, следовательно, интенсивность напряжений согласно уравнению (5.34) также постоянна по времени [3, 34].

5.7. МЕХАНИЧЕСКАЯ СХЕМА ДЕФОРМАЦИИ

Весьма большое значение для исследования процессов деформации при обработке металлов давлением имеет понятие о механической схеме деформации, разработанное С. И. Губкиным.

Механическая схема деформации для данного элементарного объема дает графическое представление о наличии и знаке главных напряжений и главных деформаций. Она представляет собой совокупность схемы главных напряжений и схемы главных деформаций [12, 13].

Вследствие постоянства объема максимальная по абсолютной величине главная деформация равна сумме двух других, взятой с обратным знаком. Таким образом, одна из деформаций, максимальная по абсолютной величине, всегда имеет знак, противоположный знаку двух других. Отсюда следует, что может быть только три вида схем главных деформаций:

1) схемы с одной деформацией положительной и двумя другими отрицательными, т. е. растяжение; 2) с одной деформацией, равной нулю, и двумя другими, равными по абсолютной величине и противоположными по знаку (плоское деформированное состояние — сдвиг); 3) с одной отрицательной и двумя положительными деформациями, т. е. сжатие. Частный случай растяжения: две

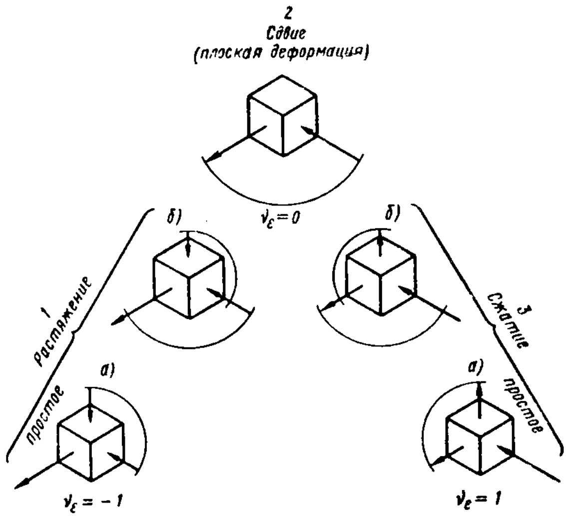


Рис. 5.7

отрицательные деформации равны между собой. Такое растяжение можно назвать простым. Аналогично простым сжатием будет такое, при котором две положительные деформации равны между собой.

Первый и третий виды схем содержат объемные схемы, второй — плоскую схему главных деформаций. Все схемы в то же время и разноименные, поскольку знаки деформаций различны (рис. 5.7).

Можно учесть не только наличие и направление главных деформаций, но и соотношения между последними при помощи величины ν_ε. Из выражения (5.27) известно, что

$$\nu_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}},$$

или, если принять во внимание условие постоянства объема $\varepsilon_2 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$,

$$\nu_\varepsilon = -3\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}. \qquad (5.35)$$

При плоском деформированном состоянии $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3$ и, следовательно, $\nu_\varepsilon = 0$. Для объемных схем с одной положительной главной деформацией ε_1 предельным случаем является $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1$ и $\nu_\varepsilon = -1$. Таким образом, для этих схем $0 > \nu_\varepsilon > -1$. Для объемных же схем с одной отрицательной деформацией $0 < \nu_\varepsilon < 1$ (рис. 5.7).

Схемы главных напряжений, исходя из количества возможных векторов, бывают линейные (один вектор) — линейное напряженное состояние, плоские (два вектора) — плоское напряженное состояние и объемные (три вектора) — объемное напряженное состояние. При этом линейных схем будет две с положительным (растягивающим) или отрицательным (сжимающим) напряжением. Плоские и объемные схемы, кроме того, могут быть одноименные и разноименные. В одноименных схемах все напряжения одного знака. Следовательно, может быть два вида плоских одноименных схем (с двумя сжимающими или с двумя растягивающими напряжениями) и два вида одноименных объемных схем (с тремя растягивающими напряжениями — всестороннее растяжение или с тремя сжимающими напряжениями — всестороннее сжатие).

(Напомним, что при пластическом формоизменении не может быть равенства трех напряжений, т. е. равномерного всестороннего растяжения или равномерного всестороннего сжатия).

Разноименные схемы бывают: плоские — только одного вида, а объемные — двух (с двумя положительными напряжениями и одним отрицательным или наоборот). Таким образом, существует всего девять видов схем главных напряжений (рис. 5.8): два линейных, три плоских и четыре объемных.

Понятно, что в плоских и объемных схемах соотношения между величинами напряжений могут быть различны.

Каждый из семи видов плоских и объемных схем главных напряжений для получения механических схем деформаций можно сочетать с каждым из трех видов схем главных деформаций. Это даст 21 вид механических схем. Линейная схема с одним главным растягивающим напряжением сочетается только с объемной схе-

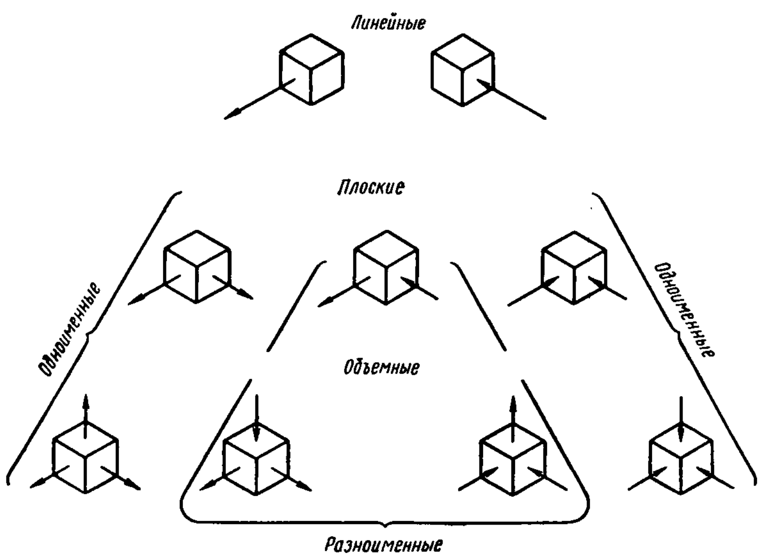


Рис. 5.8

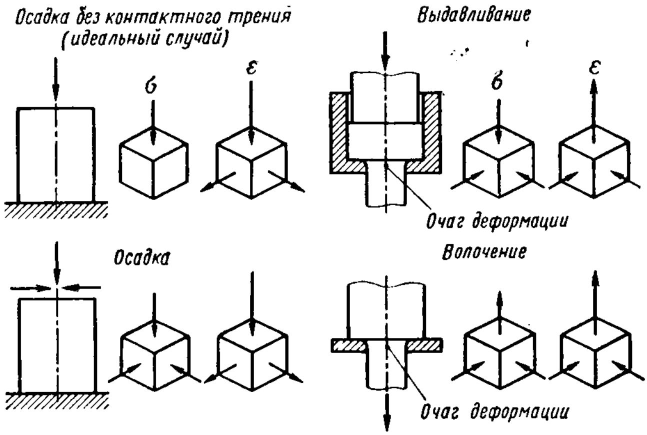


Рис. 5.9

мой главных деформаций, у которой одна положительная деформация и две равные между собой отрицательные (растяжение), а линейная схема с одним сжимающим напряжением сочетается со схемой деформаций, у которой одна деформация отрицательная и две равные между собой положительные (сжатие). Таким образом, общее число возможных видов механических схем деформаций может быть 23.

Механические схемы деформации отображают схему действующих сил и определяют характер формоизменения. Процессы деформации механически сравнимы, если они имеют одну и ту же преобладающую схему. Следовательно, различные процессы деформации можно классифицировать по их механическим схемам [12]. При рассмотрении операций обработки металлов давлением можно пользоваться для их характеристики механическими схемами деформации С. И. Губкина. Для примера на рис. 5.9 приведено несколько элементарных схем, являющихся преобладающими при проведении указанных на рисунке операций. Как видно из рис. 5.9, у одинаковых по результатам и схеме главных деформаций процессов могут быть, исходя из приведенной классификации, различные схемы главных напряжений (например, выдавливание и волочение), и, наоборот, при сходных схемах главных напряжений характер деформации может быть различным (например, осадка и выдавливание).

Схемы главных деформаций предопределяют характер изменения физико-механических свойств металла при деформировании. Так, получение равномерного волокна наиболее легко достижимо при схеме главных деформаций с одной положительной деформацией и двумя равными по величине отрицательными деформациями. При этой же схеме наиболее интенсивно происходит образование текстуры и упрочнение (схема *1*, *а* на рис. 5.7).

При переходе от схемы *1*, *а* через схемы *1*, *б*, *2* и *3*, *б* к схеме *3*, *а* картина резко изменяется. При схеме *3*, *а* волокно, например, стремится образоваться в направлении двух положительных главных деформаций, в результате чего зерна как бы сплющиваются в направлении отрицательной деформации. Включения же рассредоточиваются в направлении положительных деформаций, что оказывает неблагоприятное влияние на механические качества [18].

Однако по схеме главных деформаций, не обращаясь к схеме главных напряжений, нельзя судить ни о сопротивлении деформированию, ни о пластичности металла в процессе деформации. Так, при схеме с двумя деформациями растяжения и при схеме с двумя деформациями сжатия пластичность металла может быть одинаковой. Пластичность и сопротивление деформированию зависят от схемы главных напряжений.

При переходе от плоских разноименных схем через линейное растяжение к одноименным схемам с растягивающими напряжениями пластичность металла при деформировании уменьшается, и, наоборот, при переходе через линейное сжатие к одноименным схемам со сжимающими напряжениями пластичность увеличивается (см. рис. 5.8). Таким образом, при деформировании в условиях, отвечающих одноименным схемам со сжимающими напряжениями, пластичность металла всегда больше, чем при одноименных схемах с растягивающими напряжениями.

Как указывалось ранее (стр. 91), тензор напряжений можно разложить на девиатор напряжений и шаровой тензор. При среднем нормальном напряжении $\sigma_{ср} = 0$ напряженное состояние будет чисто девиаторным.

При наложении на девиаторы положительного шарового тензора, т. е. всестороннего равномерного растяжения, пластичность падает в тем большей степени, чем больше величина компоненты шарового тензора $\sigma_{ср}$. Наоборот, при наложении на девиаторы отрицательного шарового тензора, т. е. всестороннего равномерного сжатия, пластичность увеличивается в тем большей степени, чем больше абсолютная величина компоненты шарового тензора.

То же самое можно выразить словами С. И. Губкина: «Чем меньшую роль в схеме (главных напряжений) играют растягивающие напряжения и чем бóльшую роль играют сжимающие, тем бóльшую способность к пластической деформации проявляет металл» [12].

Преобладающие схемы главных напряжений при различных операциях обработки металлов давлением различны, а следовательно, и различную пластичность будет проявлять металл в условиях обработки. Так, пластичность металла при выдавливании выше, чем при волочении (см. рис. 5.9). Для металла, по природе менее пластичного, следует выбирать процесс деформирования, более благоприятный в отношении проявления пластических свойств.

Н. И. Корнеев в связи с этим разделяет все способы обработки металлов ковкой и штамповкой на следующие [38].

1. Способы, которые могут приводить к хрупкому состоянию:

а) свободная ковка на плоских бойках;

б) свободная ковка в плоских ручьях многоручьевых штампов;

2. Способы, повышающие пластичность:

а) ковка в фигурных бойках;

б) ковка в фигурных ручьях многоручьевых штампов;

в) штамповка в открытых штампах со свободным уширением обрабатываемого металла.

3. Способы, значительно повышающие пластичность:

а) штамповка в открытых штампах с ограниченным уширением обрабатываемого металла;

б) штамповка в закрытых штампах на горизонтально-ковочных машинах с ограниченным уширением;

в) штамповка в закрытых штампах без свободного уширения на молотах и прессах.

Что касается сопротивления деформированию, то наибольшим сопротивлением отличается металл в условиях деформирования при одноименных схемах главных напряжений (сжимающих или растягивающих). При деформировании в условиях разноименных плоских и объемных схем, а также линейных сопротивление деформированию снижается.

Так как каждую из семи видов плоских и объемных схем главных напряжений можно сочетать с каждой из трех схем главных деформаций, то без дополнительных данных нельзя решить, какую деформацию — растяжение, сжатие или сдвиг — вызывает какое-либо напряженное состояние, соответствующее данной схеме главных нормальных напряжений. Для выяснения этого вопроса обратимся к девиаторам напряжений, которые, как говорилось ранее, предопределяют формоизменение элемента тела (стр. 91).

Компоненты σ девиатора обладают тем же свойством, что и компоненты ε пластических деформаций, — сумма их равна нулю, а следовательно, максимальное по абсолютной величине нормальное напряжение, являющееся компонентой девиатора, равно сумме двух других, взятой с обратным знаком.

Главные нормальные напряжения, являющиеся компонентами девиатора напряжений, в дальнейшем для краткости будем называть главными компонентами девиатора. Поэтому возможны только три вида схем главных компонент девиаторов, и эти схемы идентичны схемам главных деформаций (см. рис. 5.7 и 5.10).

Охарактеризовать эти схемы прежде всего можно величиной ν_σ (стр. 136). Для схемы *2* (рис. 5.10) чистого сдвига $\nu_\sigma = 0$. При переходе к схемам растяжения *1* ν_σ уменьшается, достигая минимальной величины $\nu_\sigma = -1$ в схеме *1*, *а*, а при переходе к схемам сжатия *3* ν_σ увеличивается, достигая максимальной величины $\nu_\sigma = 1$ в схеме *3*, *а*.

Другой характеристикой схем главных компонент девиаторов может служить среднее главное напряжение σ_{cr}. Решим уравнение (5.20а) относительно σ_{cr} (см. стр. 136):

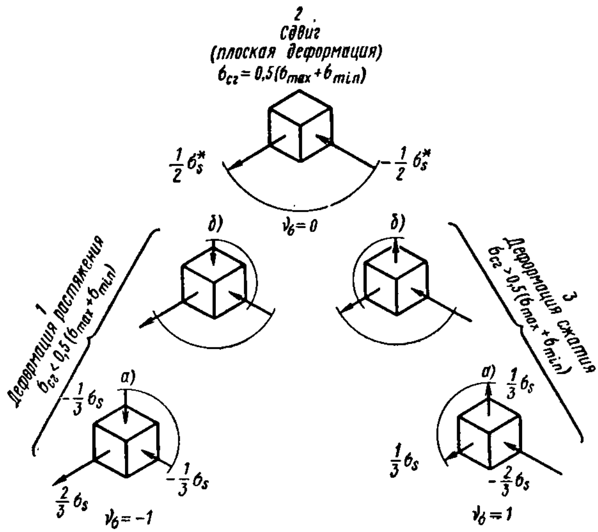


Рис. 5.10

$$\sigma_{\text{сг}} = \nu_\sigma \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} + \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}. \tag{5.20б}$$

Из уравнения (5.20б) видно, что при $\nu_\sigma = 0$

$$\sigma_{\text{сг}} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2};$$

при $\nu_\sigma > 0$

$$\sigma_{\text{сг}} > \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2},$$

а при $\nu_\sigma < 0$

$$\sigma_{\text{сг}} < \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}.$$

Таким образом, при сдвиге

$$\sigma_{\text{сг}} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2};$$

при деформации растяжения

$$\sigma_{\text{сг}} < \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2};$$

при деформации сжатия

$$\sigma_{\text{сг}} > \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2},$$

что и указано на рис. 5.10.

Величиной ν_σ можно не только охарактеризовать схемы главных компонент девиаторов напряжений, как это сделано на рис. 5.10, но и выразить через нее все возможные значения главных напряжений при пластической деформации. Для этого решим уравнение (5.20а) совместно с уравнением пластичности (5.3) относительно σ, учитывая очевидное равенство $\sigma_{max} + \sigma_{min} + \sigma_{СГ} = 3\sigma_{ср}$.

В результате получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{max} &= \sigma_s \frac{3 - \nu_\sigma}{3\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} + \sigma_{ср}; \\ \sigma_{min} &= -\sigma_s \frac{3 + \nu_\sigma}{3\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} + \sigma_{ср}; \\ \sigma_{СГ} &= \sigma_s \frac{3\nu_\sigma}{3\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} + \sigma_{ср}. \end{aligned}\right\} \quad (5.36)$$

Для девиатора напряжений $\sigma_{ср} = 0$ и, следовательно, каждому значению ν_σ соответствуют определенные значения главных компонент девиаторов, что представлено на z-диаграмме (рис. 5.11).

Как сказано ранее, схемы главных компонент девиаторов напряжений вполне идентичны схемам главных деформаций. Каждая схема компонент девиатора напряжений сочетается только с одной схемой деформаций. Если, например, в схеме главных компонент одно положительное и два отрицательных напряжения, то точно такова же и схема главных деформаций. В направлении положительной главной компоненты возникает положительная деформация; в направлении максимальной по абсолютной величине отрицательной главной компоненты произойдет и максимальная по абсолютной величине отрицательная деформация.

При наложении шарового тензора (гидростатического давления) на девиаторы изменятся схемы главных напряжений, но показатель схемы ν_σ и характеризующее ее соотношение между средним главным напряжением и полусуммой крайних $\sigma_{СГ} \lesseqgtr (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2$ не изменится. Не изменится и схема главных деформаций. Показатели же, характеризующие пластичность и сопротивление деформированию, будут изменяться.

Если временно исключить схемы *1*, *а* и *3*, *а* (см. рис. 5.10), то наложением на прочие схемы шарового тензора соответствующей величины и знака можно получить любые схемы главных напряжений по клас-

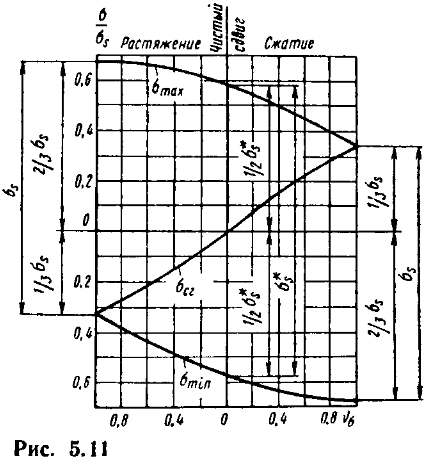


Рис. 5.11

сификации, изложенной на стр. 146 и показанной на рис. 5.8, кроме линейных.

Линейная схема растяжения получается только из девиатора с одним растягивающим и двумя равными между собой сжимающими напряжениями *1, а* (см. рис. 5.10). Но из этого девиатора нельзя получить объемную разноименную схему с двумя растягивающими напряжениями и плоскую одноименную схему с растягивающими напряжениями.

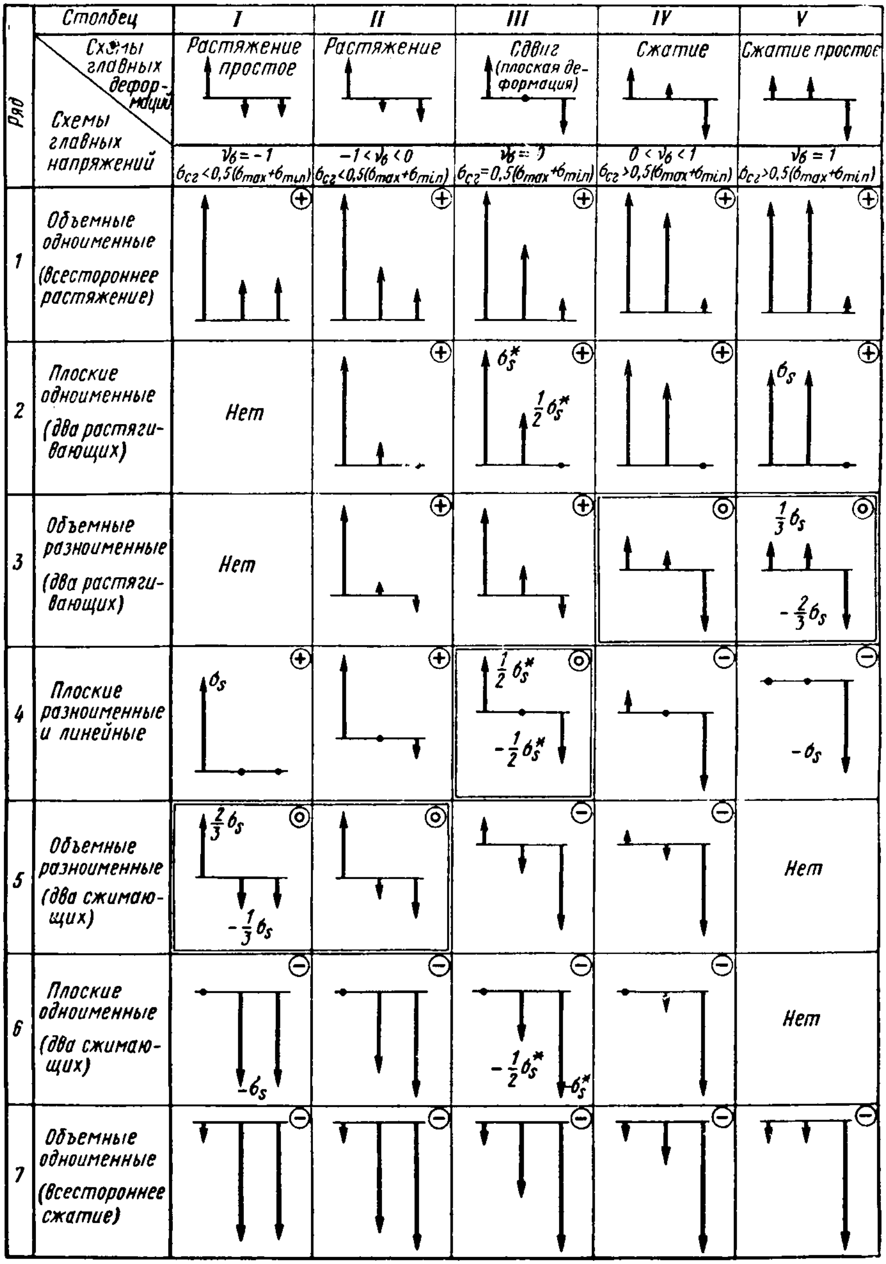
Линейная схема сжатия получается только из девиатора с одним сжимающим и двумя равными между собой растягивающими напряжениями *3, а* (см. рис. 5.10). Но из этого девиатора нельзя получить объемную разноименную схему с двумя сжимающими напряжениями и плоскую одноименную схему со сжимающими напряжениями. Однако, если какие-либо две схемы главных напряжений формально мы можем считать одинаковыми, например отнести их к неравномерному всестороннему сжатию, то по существу они могут быть весьма различны в смысле вызываемой деформации в зависимости от соотношений величин главных напряжений [87].

Наоборот, если две схемы главных напряжений имеют одинаковые соотношения напряжений, то они не могут сочетаться с различными схемами главных деформаций. Так, например, нельзя осуществить процесс выдавливания и объемного осаживания при одних и тех же соотношениях между главными напряжениями.

На рис. 5.12 дана развернутая классификация схем главных напряжений и деформаций. Классификация составлена путем наложения шаровых тензоров на исходные схемы главных напряжений, являющихся компонентами девиаторов.

На рис. 5.12 показаны также значения различных показателей (например, ν_σ) и указаны знаки налагаемых шаровых тензоров, а также приведены схемы главных деформаций, соответствующие схемам напряжений. Схемы выполнены в приблизительном масштабе и поэтому показывают возможные соотношения между величинами главных напряжений. Там, где величины главных напряжений могут быть только вполне определенными, они указаны на схемах. Положительные напряжения и деформации (растяжение) показаны стрелками, направленными вверх, отрицательные (сжатие) — вниз. Максимальное главное напряжение в схемах показано с левой стороны, минимальное — с правой, среднее главное $\sigma_{\text{ср}}$ — посередине.

Для примера рассмотрим вертикальный столбец *II*. В нем содержатся все виды схем главных напряжений по классификации, приведенной на стр. 146, от всестороннего растяжения до всестороннего сжатия. Однако у всех этих схем девиатор напряжений один и тот же (см. 5-й ряд). Всем схемам этого столбца будет соответствовать одна и та же схема главных деформаций; для всех будут действительны неравенства $\sigma_{\text{ср}} < 0{,}5\,(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$ и $-1 < \nu_\sigma < 0$ (указано сверху столбца). По схемам на рис. 5.12



◎ девиатор

⊕ наложен на девиатор положительный шаровой тензор

⊖ наложен на девиатор отрицательный шаровой тензор

Рис. 5.12

легко установить, какой величины надо наложить шаровой тензор, чтобы перейти от соответствующего девиатора к рассматриваемой схеме. Например, чтобы получить из схемы главных напряжений чистого сдвига объемную схему всестороннего сжатия, необходимо наложить отрицательный шаровой тензор $|\sigma| > \frac{1}{2}\sigma_s^*$.

Рис. 5.12 дает возможность получать ответы на разнообразные вопросы. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Каковы будут соотношения между напряжениями при выдавливании и волочении круглого профиля? При этих обеих операциях происходит удлинение вдоль одной оси и равные между собой укорочения вдоль двух других осей, т. е. деформация простого растяжения. Этой схеме деформаций соответствуют схемы напряжений столбца *I*.

Из характера операций ясно, что обе схемы объемные: для выдавливания — одноименная (сжатие), для волочения — разноименная. Первая лежит в 7-м ряду столбца *I*, вторая — в 5-м ряду столбца *I*. Из указанных схем ясно, что при волочении растягивающее напряжение по абсолютной величине является максимальным, но меньшим σ_s, а два сжимающих меньше по абсолютной величине, чем растягивающее, и меньше σ_s (значит, давление на стенки конического очка меньше σ_s).

При выдавливании, наоборот, осевое напряжение меньше радиальных, а последние обязательно больше σ_s, что видно из сравнения схемы 7-го ряда со схемой 6-го ряда. Следовательно, давление на стенки конической матрицы (не контейнера) больше σ_s.

Пример 2. Можно ли при осадке за счет бокового подпора создать такое же напряженное состояние всестороннего сжатия, как при выдавливании из конической матрицы? В первом случае схема деформации является «простым сжатием» (столбец *V*), во втором — «простым растяжением» (столбец *I*). Напряженное состояние в обоих случаях — всестороннее сжатие (7-й ряд). Сравнивая схемы *I*, *7* и *V*, *7*, видим, что задача неразрешима. При осадке два равных (боковых) напряжения всегда меньше третьего (активного), а при выдавливании последнее меньше двух других.

Пример 3. Даны две разноименные плоские схемы напряженного состояния. В одной положительное (растягивающее) напряжение по абсолютной величине больше сжимающего, а в другой наоборот. Какое деформированное состояние вызовут эти схемы? Обе схемы находятся в 4-м ряду: первая — в столбце *II*, т. е. вызывает растяжение; вторая — в столбце *IV*, т. е. вызывает сжатие.

Пример 4. Одноименные сжимающие напряженные состояния в двух схемах определяются следующими относительными цифрами:

Схемы	σ_{max}	$\sigma_{ср}$	σ_{min}
Первая	—6	—10	—12
Вторая	—6	—8	—12

Как видно, эти схемы отличаются одна от другой только величиной среднего главного напряжения.

В первом случае

$$\sigma_{ср} < \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \left(-10 < \frac{-6-12}{2}\right).$$

Во втором случае

$$\sigma_{cr} > \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}.$$

Первая схема напряженного состояния располагается в столбце *II* (деформация — растяжение), вторая — в столбце *IV* (деформация — сжатие).

5.8. ПРИНЦИП ПОДОБИЯ

Принцип подобия имеет очень большое значение, так как дает возможность по испытанию модели (образца) определять соответствующие параметры для осуществления процесса деформирования натуры, т. е. моделировать процессы обработки металла давлением.

Принцип подобия можно сформулировать следующим образом: *если осуществлять в подобных условиях одинаковые процессы пластического деформирования геометрически подобных тел из одинакового материала, то необходимые удельные усилия деформирования*[1] *будут равны между собой, отношение полных усилий деформирования будет равно квадрату, а отношение затрачиваемых работ — кубу отношений соответственных линейных размеров.*

Этот принцип выдвинут И. Барба и Ф. Киком в 1885 г. и представляет собой распространение на пластическую деформацию закона подобия, сформулированного В. Л. Кирпичевым (1874 г.) для упругой деформации. Однако к пластическому деформированию, в особенности нагретого металла, нельзя непосредственно применить закон подобия В. Л. Кирпичева, так как пластическая деформация, представляя собой значительно более сложное явление, требует и более сложного комплекса условий, обеспечивающих подобие процессов.

Изучению условий подобия и методов моделирования процессов пластического формоизменения посвящен ряд работ С. И. Губкина [12, 13, 18], А. А. Ильюшина [32], Н. М. Золотухина [30, 55], Е. Н. Мошнина [53, 54], С. А. Довнара [21], Ю. М. Чижикова [115] и др.

Рассмотрим главнейшие условия подобия процессов пластического деформирования.

1. Согласно формулировке принципа, деформируемые тела должны быть геометрически подобны. Для этого необходимо, чтобы отношения соответственных (сходственных) размеров

---

[1] Под удельным усилием деформирования или средним давлением деформирования условимся понимать отношение потребного для деформирования активного усилия к площади проекции поверхности металла, подвергнутой с помощью инструмента непосредственному воздействию этого усилия. Проекция берется на плоскость, нормальную к направлению этого усилия. Более точное определение см. на стр. 178

(длины, ширины, высоты и т. п.) натуры и модели были одинаковы:

$$\frac{l_н}{l_м} = \frac{a_н}{a_м} = \frac{h_н}{h_м} \text{ и т. д.} = n; \qquad (5.37)$$

здесь n назовем масштабом моделирования. При этом отношение соответственных поверхностей натуры и модели равны квадрату, а отношение объемов — кубу масштаба моделирования n.

Следует отметить, что отношения величины той или иной поверхности F к объему V у натуры и модели различны. С увеличением масштаба моделирования n отношение F/V у натуры уменьшается обратно пропорционально этому масштабу.

2. Формы рабочей части инструментов для деформирования натуры и модели должны быть геометрически подобны, а отношения их соответственных (сходственных) размеров (например, закругления матрицы и т. п.) равны масштабу моделирования n.

3. Степени деформации модели и натуры в сравниваемые моменты должны быть одинаковы:

$$\varepsilon_м = \varepsilon_н.$$

Соблюдение этого требования, с одной стороны, обеспечивает геометрическое подобие натуры и модели в сравниваемые моменты деформирования, а с другой стороны, при прочих равных условиях предопределяет одинаковую степень упрочнения или разупрочнения.

4. Условия трения между соприкасающимися (контактными) поверхностями деформирующего инструмента и металла должны быть одинаковы. Для этого необходимо, чтобы были одинаковы материал и обработка рабочих поверхностей инструмента, технологическая смазка, а также температура $t^\circ_к$ контактных поверхностей модели и натуры и скорости скольжения $v_с$ металла по контактным поверхностям:

$$t^\circ_{км} = t^\circ_{кн}; \qquad (5.38)$$

$$v_{см} = v_{сн}. \qquad (5.39)$$

Последнее равенство требует, в свою очередь, равенства скоростей деформирования, т. е. скоростей движения рабочего инструмента модели и натуры:

$$v_м = v_н. \qquad (5.40а)$$

Тогда для скоростей деформации $\dot{\varepsilon}$ и времени деформирования t модели и натуры на основании уравнения (2.16) необходимо соблюдение соотношений

$$\dot{\varepsilon}_м = n\dot{\varepsilon}_н \qquad (5.40б)$$

и

$$t_м = \frac{1}{n} t_н. \qquad (5.40в)$$

Если допустить, что при деформировании нагретого металла условия теплоотдачи со свободных поверхностей и контактных при наличии смазки близки между собой, то скоростные условия по уравнениям (5.40) будут определять также и равенство (5.38) температур поверхности модели и натуры при деформировании [53].

5. Модель и натура должны быть физически подобны, т. е. во всех соответственных точках иметь одинаковый химический состав, одинаковые микро- и макроструктуры, фазовое состояние, степени упрочнения и разупрочнения. Все это в конечном итоге должно определить одинаковые механические свойства или одинаковое распределение их по объему модели и натуры.

Для физического подобия при прочих равных условиях прежде всего необходима одинаковая длительность процесса деформирования модели и натуры

$$t_м = t_н, \tag{5.41а}$$

что, в свою очередь, обусловливает равенство скоростей деформации

$$\dot{\varepsilon}_м = \dot{\varepsilon}_н \tag{5.41б}$$

и в n раз меньшую скорость деформирования модели

$$v_м = \frac{1}{n} v_н. \tag{5.41в}$$

Эти требования определяются необходимостью поставить сравниваемые тела в одинаковые условия по времени протекания физических и физико-химических процессов, сопровождающих пластическую деформацию [13], как, например, процессов рекристаллизации, залечивания межкристаллитных повреждений и т. п. Вместе с тем эти требования ставят испытуемые тела в одинаковые условия в отношении влияния скорости деформации на сопротивление, что особенно важно при деформировании с нагревом.

Для обеспечения физического подобия кроме соблюдения скоростных условий, выражаемых уравнениями (5.41), необходимо тепловое подобие модели и натуры. Для теплового подобия недостаточно одинаковой начальной температуры деформирования.

Из практики и опытов известно, что при обработке давлением геометрически подобных заготовок из одинакового материала, нагретых до одной и той же начальной температуры, удельное усилие деформирования падает с увеличением размеров заготовки. То же, но в меньшей степени, наблюдается и в условиях холодного деформирования при больших скоростях движения инструмента.

Это явление прежде всего можно объяснить тем, что одинаковая начальная температура не обеспечивает одинаковых температур и тождественного их распределения в процессе самой деформации, так как происходит теплообмен между деформируемым телом и окружающей средой, инструментом, в частности.

У тела малого размера, геометрически подобного телу большого размера, отношение поверхности к объему больше, а следовательно, при прочих равных условиях будет больше теплоотдача и меньше температура в процессе деформации, что и должно вести к увеличению удельного усилия.

Если принять, что при деформировании нагретых заготовок теплоотдача происходит только с контактных поверхностей и притом чистых от окалины и смазки, то тепловое подобие будет существовать при следующем скоростном условии деформирования [32]:

$$t_м = \frac{1}{n^2} t_н; \tag{5.42а}$$

$$\dot{\varepsilon}_м = n^2 \dot{\varepsilon}_н; \tag{5.42б}$$

$$v_м = n v_н. \tag{5.42в}$$

Сравнивая скоростные условия (5.40), (5.41) и (5.42), легко видеть, что подобие трения и физическое подобие не могут быть достигнуты одинаковыми скоростными условиями. Кроме того, условия (5.41) и (5.42), необходимые для обеспечения физического подобия, несовместимы.

Из сказанного можно сделать вывод, что точное моделирование практически вряд ли осуществимо, и основная задача заключается в установлении методов приближенного моделирования.

По одному из таких методов [30] предлагается, отказавшись от выполнения требования полного теплового подобия модели и натуры, т. е. одинаковых температур в сходственных точках, выполнять горячее деформирование при равенстве средних по объему температур модели и натуры и соблюдении скоростного условия (5.41). Однако этот метод требует деформирования модели в печи для поддержания ее температуры на требуемом уровне, что вызывает затруднения. Предложены и другие методы приближенного моделирования [21; 53; 115 и др.], однако общепринятой методики моделирования пока еще нет.

Несмотря на практическую невозможность создания полностью подобных условий, принцип подобия все же приходится применять даже при их нарушении, используя экспериментально устанавливаемые коэффициенты.

Одним из последних является скоростной коэффициент ψ_c, о котором говорилось ранее (стр. 72). Другой носит название масштабного или объемного. Этот коэффициент ψ_0 (меньше единицы) учитывает нарушение подобных условий, возникающее при деформировании тел увеличивающегося объема.

Как будет видно в дальнейшем, во все формулы для вычисления удельных усилий деформирования, полных деформирующих усилий и работ деформации входит величина σ_s как основная константа. Эту величину (или другие ее заменяющие, например $\sigma_в$ — стр. 123) определяют в лабораторных условиях на малых образцах. Для использования в формулах значения константы, определенного в лабораторных условиях, необходимо помножить его на коэффициенты ψ_c и ψ_o.

По данным С. И. Губкина, при увеличении деформируемого объема от 25 до 25 000 см³ коэффициент ψ_o уменьшается от 1 до 0,4.

Е. Н. Мошнин и Н. М. Золотухин для внесения поправки в расчетные значения удельных усилий, деформирующих сил и работ при операции горячей осадки стальных слитков рекомендуют следующие значения коэффициента ψ_o в зависимости от массы слитков [54, 55]:

Масса слитка, т	0,5	6,0	20	50	100
ψ_o	0,80	0,70	0,60	0,55	0,50

За температуру слитка при осадке принята средняя температура в его поперечном сечении.

5.9. КОНТАКТНОЕ ТРЕНИЕ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

5.9.1. Особенности пластического трения

Подавляющее число операций обработки металлов давлением осуществляется в условиях соприкосновения обрабатываемого металла с давящим инструментом. При этом частицы деформируемого металла скользят по поверхности инструмента, в результате чего возникают силы контактного трения, затрудняющие это скольжение.

Трение при обработке металлов давлением, за исключением отдельных операций, когда оно играет активную роль (например, прокатка, вальцовка, некоторые операции листовой штамповки и др.), является вредным фактором.

1. Контактное трение ведет к возникновению неоднородности деформации или усиливает эту неоднородность, если последняя определяется самим характером осуществляемой операции. Это объясняется тем, что *в каждой точке поверхности контакта возбуждаются элементарные касательные силы трения, что вызывает появление касательных напряжений на контактных поверхностях деформируемого тела, направленных противоположно направлению скольжения металла относительно поверхности инструмента в каждой данной точке.* В результате может измениться и сама схема напряженного состояния. Например, наличие сил трения при осадке создает объемную схему напряжений, в то время как при отсутствии трения напряженное состояние было бы линейным. Действие трения от контактных поверхностей распространяется в глубину деформируемого тела, и создаются зоны затруднен-

ной деформации. Неоднородность деформации нарушает идентичность условий протекания упрочняющих и разупрочняющих процессов в объеме тела, в результате чего может возникать неоднородность металла (различная степень упрочнения по объему поковки, различная величина зерна и т. п.).

2. Контактное трение в конечном итоге преодолевается активной нагрузкой. Следовательно, контактное трение увеличивает необходимое деформирующее усилие и работу деформации. Увеличение усилия бывает весьма заметным — в несколько раз.

3. Контактное трение снижает стойкость инструмента как в результате непосредственного износа контактной поверхности, так и вследствие дополнительного нагрева поверхности и увеличения напряжений в связи с ростом деформирующего усилия.

4. Контактное трение вызывает необходимость применения технологических смазок. Это усложняет технологический процесс, а также иногда требует предварительной обработки исходного материала (например, нанесения пластмассовых пленок, фосфатирования).

Трение при пластическом деформировании существенно отличается от трения скольжения в кинематических парах.

Большое внимание особенностям пластического трения уделил И. М. Павлов, которым и сформулированы основные отличия его от непластического («машинного») трения, излагаемые далее [64].

В кинематических парах давление между соприкасающимися поверхностями относительно мало, и последние находятся в упругом деформированном состоянии. При пластическом деформировании поверхность инструмента деформирована упруго, а обрабатываемое тело деформируется пластически, его поверхность подвергается смятию и стремится принять форму поверхности инструмента.

В результате действительная (фактическая) площадь контакта пластически деформируемой заготовки с инструментом увеличивается с повышением степени деформации, а равно и при выполнении процессов с высоким сжимающим средним нормальным напряжением. При этом действительная площадь контакта необратимо приближается к номинальной, т. е. к геометрической площади трущихся поверхностей. Так, например, эксперименты на сжатие в контейнере холодных образцов из чистого алюминия показали, что при давлении, превышающем предел текучести в 4 раза, значение действительной площади контакта составляет 95% от номинальной при отсутствии смазки, 55% — при смазке минеральным маслом и 25% — касторовым маслом [133].

Понятно, что действительная площадь контакта при горячей деформации растет более интенсивно.

В кинематических парах происходит износ и приработка трущихся поверхностей с механическим отделением продуктов износа. При пластическом деформировании главное значение имеет непрерывное «обновление» поверхности контакта деформируемого тела, так как в процессе деформации на эту поверхность непрерывно поступают из глубины новые частицы металла.

При обработке металлов давлением трущиеся поверхности, особенно при горячей обработке, нагреты до температур значительно более высоких, чем обычные кинематические пары.

Значительное влияние вместе с тем имеет окалина как образовавшаяся при нагреве, так и возникающая во время самой горячей обработки давлением, а также поверхностные окислы при обработке без нагрева. В последнем случае на условия трения также влияет деформационное упрочнение металла.

И. М. Павлов указывает, что существенным является также то, что движение частиц пластически деформируемого тела по поверхности контакта в общем случае происходит одновременно в разных направлениях, причем это сложное движение обладает реальной физической основой [64].

5.9.2. Факторы, влияющие на величину сил контактного трения

На величину возникающих на поверхности контакта элементарных сил трения при пластическом деформировании влияет ряд факторов: состояние поверхности давящего инструмента, состояние поверхности обрабатываемого тела, химический состав обрабатываемого сплава, температура деформации, скорость деформирования и характер приложения нагрузки.

Состояние поверхности рабочего инструмента является существенным фактором, влияющим на величину сил контактного трения. Понятно, что чем выше качество обработки поверхности инструмента, тем меньше при прочих равных условиях силы трения. Влияние обработки настолько значительно, что величина сил трения различна в зависимости от направления скольжения металла по отношению к направлению обработки. Этот факт, исследованный И. М. Павловым, назван анизотропией трения. Даже при обработке инструмента двойным шлифованием и при наличии смазки силы трения поперек направления обработки примерно на 20% больше, чем вдоль направления обработки. При отсутствии смазки и при грубой обработке инструмента анизотропия трения сказывается еще резче [64].

В. П. Северденко совместно с А. В. Степаненко, изучая анизотропию трения, установили, что при работе на грузообработанном инструменте анизотропия трения достигает 65%. Применение же смазки снижает анизотропию трения, однако эффект смазки уменьшается с увеличением шероховатости инструмента. Анизотропия трения в интервале температур 20—800° С для стали и 20—400° С для алюминия уменьшается с ростом температуры [83].

Анизотропия трения может вызывать искажение формы тела при пластическом деформировании. Так, например, при осадке цилиндра в результате анизотропии трения поверхности контакта из круглых могут превратиться в эллиптические.

В и д о б р а б о т к и к о н т а к т н о й п о в е р х н о с т и д е ф о р м и р у е м о г о т е л а, по мнению Е. П. Унксова, имеет значение лишь в начальный момент деформации. При ее дальнейшем развитии контактная поверхность деформируемого металла сглаживается и «становится как бы отпечатком поверхности инструмента».

Существенное влияние на трение [108, 109] оказывает ф и з и к о - х и м и ч е с к о е с о с т о я н и е п о в е р х н о с т и. Однако, несмотря на значительное количество исследований, полной ясности в этом вопросе еще нет. Из работ А. К. Чертавских [116], К. Н. Кана и др. следует, что в случае холодной деформации при тщательной очистке контактной поверхности образцов от окислов и загрязнений трение достигает значительной величины, вплоть до того, что происходит схватывание трущихся металлов.

Трение становится минимальным при некоторой определенной толщине (весьма малой) пленки окислов, а затем при увеличении толщины пленки увеличивается. Особенно вредны пленки хрупких окислов, например окалины при горячей деформации стали, которая не только увеличивает трение, но и может служить причиной различных дефектов поверхности поковки, внедряясь в металл.

Экспериментальные исследования о в л и я н и и х и м и ч е с к о г о с о с т а в а д е ф о р м и р у е м о г о с п л а в а на трение пока не дают согласных результатов. Так, по опытам Л. А. Шофмана [120], при холодной осадке без смазки при полированной поверхности инструмента трение оказалось минимальным для стали, максимальным для дюралюминия, промежуточным по величине для меди.

По данным С. И. Губкина [12], для деформации без смазки при температурах меньших 0,5 $T_{пл}$ уменьшение сил трения соответствует следующему порядку сплавов: сталь и алюминиевые сплавы, магниевые сплавы, тяжелые цветные сплавы, жаростойкие цветные сплавы. Весьма вероятно, что некоторое различие опытных данных является результатом неидентичного физико-химического состояния поверхности испытуемых образцов, и это последнее играет бóльшую роль, чем химический состав сплава.

Т е м п е р а т у р а д е ф о р м а ц и и является важнейшим фактором, влияющим на трение. При холодной деформации трение наименьшее. С повышением температуры трение растет, достигая максимума в некотором интервале температур.

В. П. Северденко и Е. С. Воячек, изучая трение при деформировании стали, установили наличие минимума и двух максимумов: первого — в зоне температур 450—500° С и второго — в интервале 900—1050° С. Наличие минимума в интервале температур 600—750° С (в зависимости от марки стали) объясняют качественным изменением окалины — появлением в ней новой фазы FeO, которая, в свою очередь, способствует дальнейшему интенсивному окислению стали, что приводит к появлению второго максимума [83].

Наблюдаемое при малых степенях деформации (~0,2) снижение трения в зоне высоких температур после второго максимума Е. П. Унксов объясняет повышением пластичности и падением напряжения текучести [109].

В. П. Северденко, в свою очередь, указывает на благоприятное влияние снижения интенсивности окисления при температурах 1000—1100° С и смазывающего действия окалины при температурах, близких к 1200° С.

Исследования С. И. Губкина, М. В. Врацкого, И. М. Павлова и др. определенно показывают, что контактное трение несколько снижается с увеличением относительной скорости скольжения металла по поверхности инструмента, т. е. с увеличением скорости деформирования. В частности, контактное трение при обработке на молоте меньше, чем при обработке на прессе.

Характер нагрузки также оказывает влияние на трение. Так, при деформировании вибрационной нагрузкой деформирующее усилие при осадке образцов иногда снижается в 1,5—2 раза, неравномерность деформации уменьшается (бочкообразность меньше, волокна макроструктуры более прямолинейны, микроструктура однороднее). Все это свидетельствует о значительном снижении трения.

Контактное трение снижается также при наложении на деформируемую заготовку ультразвуковых колебаний [84].

Рационально выбранная смазка снижает трение в несколько раз. Однако и при наличии смазки наблюдается относительный рост сил трения, особенно заметный при повышении температуры и степени деформации [134].

От смазки требуется, чтобы она создавала прочную пленку, хорошо прилипала к поверхности контакта и в то же время легко удалялась после обработки.

Рецептуры современных смазочных составов для холодного деформирования отличаются разнообразием и сложностью. В состав смазок входят минеральные и органические масла, активизирующие присадки (олеиновая кислота, сера), а также нейтральные наполнители (графит, мел, тальк) и другие вещества. При горячей обработке в качестве смазок применяют мазут, древесные опилки, коллоидальный графит и др.

В настоящее время при горячей обработке большое значение приобрели смазки на основе стекла. Эти смазки более эффективно снижают трение по сравнению, например, с графитовыми смазками. Они образуют теплоизолирующую пленку между поверхностями инструмента и металла, которая, кроме того, предохраняет металл от окисления, что ведет к улучшению качества поверхности.

Однако стеклянные смазки имеют серьезные недостатки, а именно: несовершенство и трудоемкость способов нанесения, загрязнение штампа, трудность удаления стекла с поверхности штампа и поковки.

Как сказано ранее, трение для подавляющего числа операций обработки металлов давлением является вредным фактором. Поэтому следует принимать все возможные меры к снижению трения. Среди них наиболее эффективны повышение качества обработки поверхности давящего инструмента и совершенствование технологических смазок.

5.9.3. Определение касательного напряжения на контактной поверхности

Если применять закон Амонтона—Кулона, то элементарная сила контактного трения $R_э$ выразится уравнением

$$R_э = \mu p_н, \tag{5.43}$$

где μ — коэффициент контактного трения при пластическом деформировании; $p_н$ — нормальное давление со стороны инструмента на поверхность металла.

Нормальное давление равно нормальному напряжению на контактной поверхности, а элементарная сила трения, возбуждаемая на контактной поверхности инструмента, равна касательному напряжению на контактной поверхности $\tau_к$. Следовательно, можно написать

$$\tau_к = \mu \sigma_н. \tag{5.44}$$

Коэффициент трения определяют экспериментально специально для условий пластического деформирования. Следует учитывать, что значения коэффициента трения, принятые для условий трения в машинных парах, ни в какой мере не пригодны для определения элементарных сил контактного трения (контактных касательных напряжений) при пластическом деформировании.

Из предыдущего параграфа следует, что на величину трения влияет ряд факторов, которые могут создавать различные условия трения во времени и на разных участках контактной поверхности. Например, при выдавливании меняется по длине матрицы степень деформации, скорость скольжения и даже температура. Поэтому коэффициент трения на контактной поверхности вообще зависит от координат и меняется во времени. Это обстоятельство предопределяет возможность пользоваться лишь некоторым осредненным значением коэффициента трения, что и подчеркивает И. Л. Перлин [66].

В отношении выражения (5.44) необходимо сделать существенную оговорку. Дело в том, что по энергетическому условию пластичности максимальная величина касательного напряжения не может быть больше, чем $\sigma_s^*/2$ при плоском деформированном состоянии и $\sigma_s/2$ при $\sigma_{сг}$, равном одному из крайних главных нормальных напряжений (см. стр. 132), т. е.

$$\tau_{к\,max} \leqslant \frac{\beta\sigma_s}{2}.$$

Поэтому контактное трение может возбудить на контактной поверхности металла касательное напряжение, величина которого ограничена в соответствии с неравенством

$$\tau_к = \mu\sigma_н \leqslant \frac{\beta\sigma_s}{2}. \qquad (5.45)$$

Пусть $\sigma_н$ при данном μ увеличивается; возрастает одновременно и $\tau_к$, но только до тех пор, пока произведение $\mu\sigma_н$ станет равным $\beta\sigma_s/2$. При дальнейшем увеличении $\sigma_н$ касательное напряжение остается постоянным, а скольжение частиц металла по поверхности инструмента затормозится. Аналогичная картина будет и при изменении μ. Если, например, нормальное напряжение равно $\beta\sigma_s$, то подстановка в выражение (5.44) значений μ бо́льших 0,5 не имеет смысла и $\tau_к$ определяется как $\beta\sigma_s/2$.

Использование закона Амонтона—Кулона (5.43) не является единственно возможным способом учета контактного трения при расчетах напряженного состояния пластически деформируемых заготовок. Изложенные ранее особенности пластического трения, в первую очередь пластическая деформация контактной поверхности, необратимо приближающая действительную площадь контакта к номинальной (стр. 160), обусловливают потерю линейной зависимости (5.44) сил трения от нормальной нагрузки [45]. Поэтому ряд исследователей (А. Г. Малэ, В. Де-Пьер, И. Ловен и др.) считают более целесообразным, особенно при горячей деформации, принимать трение независимым от нормальной нагрузки и выражать его в долях от величины k максимального главного касательного напряжения, обусловливающего пластическую деформацию [см. формулу (5.18б)]. Поскольку последнее однозначно определяется напряжением текучести, примем в качестве второго выражения величины контактного трения

$$\tau_к = \mu_s\beta\sigma_s. \qquad (5.46)$$

Коэффициент μ_s в отличие от кулоновского коэффициента трения будем именовать фактором трения (коэффициентом трения по напряжению текучести).

В выражении (5.46) значение σ_s принимают осредненным, а μ_s постоянным по всей поверхности контакта. Таким образом, это выражение предопределяет и постоянство контактных касательных напряжений (элементарных сил трения).

Поскольку максимальное касательное напряжение не может превзойти величины $0{,}5\beta\sigma_s$, постольку фактор трения

$$\mu_s < 0{,}5. \qquad (5.47)$$

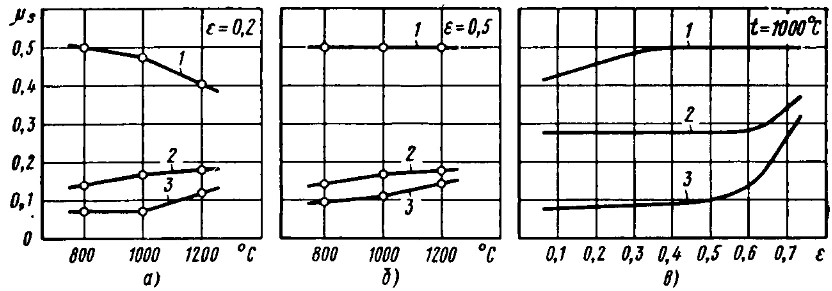


Рис. 5.13

Условием (5.46) уместно пользоваться при исследовании процессов горячей деформации с достаточно выраженным всесторонним сжатием (значительной абсолютной величине отрицательного среднего главного напряжения $\sigma_{ср}$), например в случаях выдавливания (прессования), осадки низких заготовок или при больших степенях деформации, штамповки и т. п.

Зависимость (5.44) целесообразно использовать при расчете ряда операций холодной листовой штамповки, а также операций со слабо выраженной схемой всестороннего сжатия при малых степенях деформации.

Для характеристики численных значений фактора трения μ_s при осадке и влияния на него температуры, степени деформации и смазки приведен рис. 5.13, *а—в*, где кривая *1* относится к осадке без смазки, *2* — со смазкой нитридом бора и *3* — со смазкой графитом в масле [134].

5.10. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Принцип наименьшего сопротивления, выдвинутый применительно к пластической деформации Г. Треска (1895 г.), сформулирован С. И. Губкиным [12] следующим образом:

«*В случае возможности перемещения точек деформируемого тела в различных направлениях, каждая его точка перемещается в направлении наименьшего сопротивления*».

Прямым следствием закона наименьшего сопротивления является, например, образование заусенца при штамповке в открытых штампах. Металл (рис. 5.14) в начальный период штамповки начинает вытекать в стороны за пределы фигуры штампа в зазор *а* между верхним и нижним штампами. Заполнение же элементов полости штампа возможно, если сопротивление течению металла в заусенец *b* становится больше сопротивления течению в те или иные участки полости. Сопротивление течению металла в заусенец увеличивается по мере уменьшения его толщины в процессе движения верхнего штампа, что и обеспечивает в конечном итоге заполнение всех элементов полости.

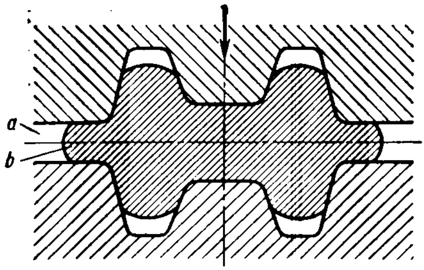


Рис. 5.14

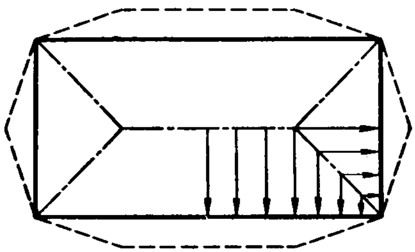


Рис. 5.15

Для практического применения закона наименьшего сопротивления необходимо знать направление траектории, по которой для точек, на ней расположенных, сопротивление течению будет наименьшим.

Для случая осадки (сжатия) призматических и цилиндрических тел между параллельными плитами (бойками) при наличии трения по плоскостям контакта эти траектории определяются по принципу кратчайшей нормали, сформулированному А. Ф. Головиным [8], заключающемуся в том, что *перемещение любой точки тела в плоскости, перпендикулярной к действию внешней силы, происходит по кратчайшей нормали к периметру сечения.* Аналогичный принцип выдвинут Э. Зибелем [28]. Следует добавить, что максимальную конечную деформацию тело получит в тех направлениях, по которым будет передвигаться наибольшее количество точек [12].

Пусть, например, осаживается призма с прямоугольным основанием, какое-то сечение которой плоскостью, нормальной к направлению действующего усилия, представлено на рис. 5.15. Согласно принципу перемещения точек по кратчайшей нормали к периметру сечения прямоугольник можно разделить на два треугольника и две трапеции линиями (штрихпунктирными на рис. 5.15), представляющими собой граничные линии или линии раздела течения, поскольку длина нормалей к периметру сечения по обе стороны из каждой точки, лежащей на этих линиях, будет одинаковой. Направление движения точек показано на рис. 5.15 стрелками.

Учитывая количество точек тела, расположенных на направлениях течения в данном сечении, можно предположить, что после некоторой осадки сечение примет вид, показанный на рис. 5.15 штриховыми линиями. Нетрудно представить, что при увеличении степени осадки тела, рассматриваемого в нашем примере, периметры его поперечных сечений стремятся к эллипсам, а эллипсы в дальнейшем преобразуются в круги, после чего движение точек происходит по радиусам.

Такая закономерность изменения формы поперечных сечений тела при осадке была замечена еще С. Зоббе (1908 г.) [130], который

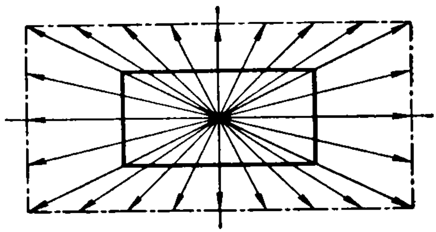


Рис. 5.16

предложил **принцип наименьшего периметра**. Этот принцип можно сформулировать так: *любая форма поперечного сечения призматического или цилиндрического тела при осадке его в пластическом состоянии с наличием контактного трения стремится принять форму, имеющую при данной площади наименьший периметр, т. е. в пределе стремится к кругу.*

Принцип наименьшего периметра подвергался неоднократно тщательной экспериментальной проверке в работах А. Ф. Головина [8], С. И. Губкина и Е. М. Савицкого [12], Л. А. Шофмана [120] и др.

Принцип наименьшего периметра справедлив при перемещении точек деформируемого тела по кратчайшим нормалям к периметрам сечений, перпендикулярных к направлению действующей силы. В дальнейшем было установлено, что кратчайшая нормаль не всегда является направлением наименьшего сопротивления, а лишь при условиях [13]:

1) если трение на поверхностях контакта металла с инструментом изотропно, т. е. одинаково по всем направлениям;

2) если величина контактного трения значительна.

При осадке, например, прямоугольного параллелепипеда между плоскими бойками без контактного трения схема перемещения точек отличается от представленной на рис. 5.15. Движение частиц в плоскостях, нормальных к направлению внешней силы, носит радиальный характер (рис. 5.16), и поперечные сечения в процессе деформации будут оставаться подобными исходным [101]. В. Г. Березкин это показал весьма тонкими экспериментами по осадке прямоугольных свинцовых и алюминиевых образцов, при которых трение было практически исключено [4].

Возможны и схемы течения, промежуточные между изображенными на рис. 5.15 и 5.16 [117].

Закон наименьшего сопротивления следует учитывать при теоретических исследованиях и при решении практических задач. Так, например, штамповка осадкой круглой в плане поковки во многих случаях может быть осуществлена из заготовки с квадратным поперечным сечением.

5.11. НЕРАВНОМЕРНОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Как было выяснено ранее (см. стр. 83), напряженное состояние точки вполне определяется тензором напряжений. При переходе же от одной точки тела к другой будут изменяться компоненты тензора напряжений, в общем случае изменяться будут и направления главных осей. Поэтому для получения полного представления о напряженном состоянии тела необходимо знать напряженное состояние всех его точек, иначе говоря, распределение напряжений.

В отдельных частных случаях все точки тела имеют одно и то же напряженное состояние, характеризуемое одним и тем же тензором напряжений. Так, например, при линейном растяжении образца, до момента начала образования шейки, напряжения в любых точках образца (удаленных от мест зажима) одинаковы, напряженное состояние образца однородно; однородна и деформация. Основные особенности последней изложены ранее (см. стр. 121).

При пластическом деформировании в процессах обработки металлов давлением однородной деформации практически не бывает, хотя при теоретическом решении ряда задач часто условно допускают, что плоскости и прямые не искажаются при деформации.

При обработке металлов давлением, как правило, возникает неоднородность напряженного состояния, а следовательно, и неоднородность деформации. Вопрос этот изучали ряд исследователей, из которых в первую очередь следует упомянуть И. М. Павлова, С. И. Губкина и Н. И. Корнеева.

В связи с неоднородностью деформации отдельные слои и элементы деформируемого тела стремятся к различному изменению размеров. В то же время отдельные слои и элементы тела не могут изменить своих размеров самостоятельно без влияния на соседние слои и элементы. «Поэтому *слои, стремящиеся к большему изменению размеров против (некоторого) среднего значения, будут передавать слоям и элементам, стремящимся к меньшему изменению размеров, силы такого знака, которые увеличивают изменение размеров. Слои и элементы, стремящиеся к меньшему изменению размеров, будут передавать слоям и элементам, стремящимся к большему изменению размеров, силы такого знака, которые уменьшают изменение размеров*» (С. И. Губкин [12]).

В результате, кроме внутренних сил, уравновешивающих внешние приложенные силы, в теле возникают взаимно уравновешивающиеся внутренние силы, обусловливающие напряжения, которые не могут быть отражены условиями на контуре и уравнениями равновесия (см. стр. 101). Они не определяются схемой напряженного состояния, соответствующей внешним силам.

Эти взаимно уравновешивающиеся напряжения названы С. И. Губкиным дополнительными, и, учитывая, что неоднородность напряженного состояния, как правило, существует всегда, С. И. Губкин сформулировал следующее положение:

«*При любом пластическом изменении формы в слоях и элементах тела, стремящихся к большему изменению размеров, возникают дополнительные напряжения, знак которых отвечает уменьшению размеров, а в слоях и элементах тела, стремящихся к меньшему* *изменению размеров, возникают дополнительные напряжения, знак которых отвечает увеличению размеров»* [12].

Дополнительные напряжения могут быть трех родов: а) дополнительные напряжения первого рода, уравновешивающиеся между отдельными слоями тела; б) дополнительные напряжения второго рода, уравновешивающиеся между отдельными кристаллитами, и в) дополнительные напряжения третьего рода, уравновешивающиеся между отдельными элементами кристаллитов [12, 13].

Возникая в деформируемом теле, дополнительные напряжения могут:

а) оставаться в теле после снятия нагрузки в виде остаточных напряжений [1], что в общем случае может вызывать снижение пластических качеств металла, понижение химической стойкости, поводку, коробление;

б) сниматься в результате возникновения пластической деформации в слоях и элементах, в которых они возникли под действием дополнительных сдвигов;

в) сниматься за счет нарушения целостности тела в отдельных его слоях и элементах, т. е. вызывать макро- и микротрещины, которые, в свою очередь, вызывают брак заготовок, получаемых обработкой давлением.

Возникновение дополнительных напряжений в процессе деформирования вызывает следующие неприятные для обработки металлов давлением последствия: а) увеличение сопротивления деформированию; б) снижение пластичности и в) искажение той картины распределения напряжений в теле, которая вытекает из условий на контуре и условий равновесия.

Поскольку неравномерность напряженного состояния является общим случаем, а однородная деформация — частным случаем, постольку трудно говорить о причинах, вызывающих неравномерное напряженное состояние. Однако надо учитывать следующие факторы, воздействием на которые можно влиять на процесс деформирования для снижения неоднородности деформации.

1. Контактное трение, т. е. трение на поверхности соприкосновения обрабатываемой заготовки и деформируемого инструмента. Трение в ряде случаев создает неоднородное напряженное состояние, а в других случаях увеличивает степень неоднородности. Так, например, считают, что при операции осадки без контактного трения деформация была бы однородной, в результате же контактного трения однородность деформации нарушается. Поэтому давящий инструмент требует особо тщательной обработки поверхности, а применение смазки всегда оказывает благотворное влияние.

---

[1] В литературе иногда вместо термина «остаточные напряжения» применяют неправильный термин «внутренние напряжения», не считаясь с тем, что «внешних» напряжений не существует.

6.2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СОВМЕСТНО С УСЛОВИЕМ ПЛАСТИЧНОСТИ

Этот метод заключается в совместном решении системы из дифференциальных уравнений равновесия и уравнения, выражающего условие пластичности. Уравнения пишут в форме (для объемного, осесимметричного, плоского напряженного состояний, плоского деформированного состояния) и в координатах (прямоугольных, цилиндрических, полярных, сферических), отвечающих условиям рассматриваемой конкретной задачи.

Произвольные постоянные определяют из граничных условий. При наличии трения необходимо задать условия трения, определяющие касательные напряжения на поверхностях контакта. Условия трения принимают практически только в двух формах: либо контактные касательные напряжения считают независимыми от координаты, по которой они направлены, т. е. постоянными [см. выражение (5.46)], либо их считают пропорциональными нормальным напряжениям на поверхности контакта [см. выражение (5.44)].

Если задача представляется статически неопределимой, то дополнительно используют уравнения связи между напряжениями и деформациями и уравнения неразрывности деформаций.

Решение в принципе должно дать величину и распределение напряжений по всему объему тела, т. е. значения напряжений как функции координат точек тела, в том числе и лежащих на поверхности, непосредственно воспринимающей активное усилие. К сожалению, такое решение возможно лишь в отдельных частных случаях и то при отсутствии (или в предположении отсутствия) сил трения на контактных поверхностях.

Разберем теперь возможности решения дифференциальных уравнений равновесия для различных видов пластически напряженного состояния.

При объемном напряженном состоянии мы располагаем тремя уравнениями равновесия (3.38), в которые входят шесть неизвестных (три нормальных и три касательных напряжения) и условие пластичности (5.5), заключающее те же неизвестные.

В этом случае в четырех уравнениях шесть неизвестных, и задача дважды статически неопределима. Дополнительно можно использовать уравнения связи между напряжениями и деформациями и уравнения неразрывности деформаций, которые внесут, однако, новые неизвестные (шесть деформаций и модуль пластичности). В результате можно получить 13 уравнений с 13 неизвестными [3]. Однако, несмотря на то, что количество неизвестных будет соответствовать числу уравнений, практически решение этой системы невозможно.

Таким образом, объемная задача в общем виде (шесть напряжений, каждое из которых есть функция трех координат) является пока неразрешимой.

Для осесимметричного напряженного состояния есть два уравнения равновесия (3.39), содержащие четыре неизвестных, и условие пластичности (5.14), в которое входят те же неизвестные. Таким образом, осесимметричная задача так же, как и объемная, статически неопределима, и для решения ее требуется привлечение уравнений связи между напряжениями и деформациями (четыре уравнения, которые внесут четыре новых неизвестных) и уравнение совместимости деформаций. Всего получим восемь уравнений с восемью неизвестными. Отсюда следует, что осесимметричная задача значительно проще объемной. Однако точные замкнутые решения этой задачи существуют только для отдельных частных случаев, когда касательное напряжение на контактной поверхности или отсутствует, или зависит только от одной из двух координат, входящих в условия равновесия.

Для плоского напряженного и плоского деформированного состояний располагаем двумя уравнениями равновесия (3.50) в декартовых координатах или (3.51) в полярных координатах и условием пластичности (5.10) или (5.12). В этих трех уравнениях содержится три неизвестных. Таким образом, число уравнений соответствует числу неизвестных. Тем не менее для системы уравнений этой задачи существуют точные замкнутые решения тоже лишь для частных случаев при касательных напряжениях на контактной поверхности, равных нулю или не зависящих от одной из двух координат, входящих в уравнения равновесия.

К числу осесимметричных и плоских задач, для которых метод интегрирования дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием пластичности дает при вышеуказанных предпосылках точные замкнутые решения, например, относятся: пластическое равновесие толстостенной трубы под действием внутреннего и внешнего давлений (А. Надаи [56]), сжатие бесконечной полосы между шероховатыми плитами при $\tau_к$ = const (Л. Прандтль [103]), сжатие клина (А. Надаи [56]), равновесие пластической массы, заполняющей форму конуса (В. В. Соколовский [91]), осадка без трения толстостенной трубы, замкнутой в матрицу (Л. Г. Степанский [94]), и др.

6.3. ОСНОВЫ МЕТОДА РАСЧЕТА ДЕФОРМИРУЮЩИХ УСИЛИЙ ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ УРАВНЕНИЯМ РАВНОВЕСИЯ И УСЛОВИЮ ПЛАСТИЧНОСТИ

Непреодолимые трудности точного интегрирования дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием пластичности привели к тому, что исследователи (Г. Закс, Э. Зибель, С. И. Губкин, И. М. Павлов, И. Л. Перлин, Е. П. Унксов, А. И. Целиков, Л. А. Шофман и др.) уже давно, с 20—30-х годов, при решении практических задач по определению деформирующих усилий (при осадке, протяжке, прошивке, выдавливании, прокатке, волочении и т. п.) вводили упрощающие предпосылки, составляли для каждого случая упрощенные уравнения равновесия и решали их совместно с условием пластичности, выраженным в главных напряжениях.

Однако вследствие отсутствия общей методики составления упрощенных уравнений и отсутствия учета влияния упрощающих предпосылок на точность получаемых результатов иногда возникали весьма значительные ошибки. Впоследствии Е. П. Унксов произвел детальный теоретический анализ возможности введения тех или иных упрощающих допущений и разработал метод составления и использования приближенных, а также ограниченных уравнений равновесия и пластичности, теоретически и экспериментально доказав их вполне достаточную практическую точность.

Сформулируем этот метод, следуя в основном Е. П. Унксову [108, 109], с учетом последующих уточнений [97, 98].

1. Задачу приводят к осесимметричной или плоской. В случае сложности формы деформируемого тела необходимо разбить его на ряд объемов, на которые можно наложить условия осесимметричной или плоской задачи.

2. Распределение нормальных напряжений определяют только для контактной поверхности (что и требуется для вычисления удельного усилия деформирования) при отказе от выявления распределения напряжений внутри тела.

3. Дифференциальные уравнения равновесия (3.39), (3.50), (3.51), взятые в форме и координатах, отвечающих условиям задачи, упрощают. Для этого, в частности, принимают нормальные напряжения зависимыми только от одной из координат, что будет отвечать изложенному в п. 2, а зависимость касательных напряжений от соответствующей координаты обычно принимают линейной. В результате число дифференциальных уравнений равновесия сократится до одного, которое будет содержать простые производные взамен частных, как в точных уравнениях равновесия. С порядком упрощения дифференциальных уравнений равновесия мы ознакомимся в дальнейшем, в гл. 7, при рассмотрении операций обработки металлов давлением.

4. Условия пластичности обычно используют также приближенные, которые приведены ниже.

Рассмотрим возможности получения **приближенных условий пластичности**. При анализе операций обработки металлов давлением в большинстве случаев необходимо пользоваться дифференциальными уравнениями равновесия, составленными в компонентах тензора напряжений, т. е. в напряжениях, заданных не в главных координатных плоскостях.

Отсюда следует, что для решения этих уравнений совместно с условием пластичности последнее надо бы выражать также в компонентах тензора: (5.5), (5.10), (5.12), (5.14) и (5.15). Все перечисленные уравнения являются достаточно сложными и, главное, нелинейными, что резко затрудняет совместное с ними решение дифференциальных уравнений равновесия даже для осесимметричной и плоской задач.

Поэтому желательно эти уравнения упростить, заменив их линейными уравнениями, хотя бы и приближенными. Линейную форму имеет уравнение (5.18), которое при соответствующем выборе коэффициента β является точным при равенстве двух из трех главных напряжений ($\beta = 1$) и при плоском деформированном состоянии $\left(\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}155\right)$.

Уравнение (5.18) определяет соотношение между главными нормальными напряжениями, необходимое для перехода в пластическое состояние. Однако для получения приближенного условия можно допустить замену в уравнении (5.18) главных нормальных напряжений нормальными компонентами тензора в том случае, если его касательная компонента τ относительно мала. Тогда, учитывая уравнения (5.18), а также (5.13), (5.17) и (5.19), получим следующие приближенные выражения условия пластичности для случая малых значений $\tau_к$, величина которых будет уточнена дальше:

а) осесимметричное напряженное состояние при $\sigma_\rho \neq \sigma_\theta \neq \sigma_z$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm\beta\sigma_s \\ \text{или} \\ \sigma_\theta - \sigma_z = \pm\beta\sigma_s, \\ \text{или} \\ \sigma_z - \sigma_\rho = \pm\beta\sigma_s\end{array}\right\} \qquad (6.6)$$

в зависимости от того, какая из разностей представляет собой разность крайних напряжений;

б) осесимметричное напряженное состояние при $\sigma_\rho = \sigma_\theta$

$$\sigma_\rho - \sigma_z = \pm\sigma_s; \qquad (6.7)$$

в) плоское деформированное состояние при $\sigma_y = \sigma_{ср}$

$$\sigma_x - \sigma_z = \pm\sigma_s; \qquad (6.8)$$

г) плоское напряженное состояние

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x - \sigma_z = \pm\beta\sigma_s \\ (\text{при } \sigma_x\sigma_z < 0); \\ \sigma_x = \pm\beta\sigma_s \\ (\text{при } \sigma_x\sigma_z > 0 \text{ и } |\sigma_x| > |\sigma_z|); \\ \sigma_z = \pm\beta\sigma_s \\ (\text{при } \sigma_x\sigma_z > 0 \text{ и } |\sigma_z| > |\sigma_x|).\end{array}\right\} \qquad (6.9)$$

Понятно, что, приняв в случаях «а» и «г» $\beta = 1$, мы перейдем от энергетического условия пластичности к условию пластичности по постоянству главных касательных напряжений.

Приближенные выражения условия пластичности типа (6.6)—(6.9) уже сравнительно давно применяли Э. Зибель [28], Г. Закс [127], С. И. Губкин, Е. П. Унксов, а впоследствии и многие другие исследователи. Однако в отдельных случаях ошибочно пользовались выражениями (6.6)—(6.9) при значениях τ, близких к предельным ($\tau_к \to k$), когда эти выражения неприемлемы. Для больших значений $\tau_к$ приближенное выражение условия пластичности было предложено Е. П. Унксовым [108].

Напишем условие пластичности для осесимметричного напряженного состояния (5.14) и плоского напряженного состояния (5.12) в таких формах:

$$\frac{\sqrt{(\sigma_\rho-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_\rho)^2}}{\sqrt{2}\sigma_s}=\sqrt{1-\frac{\tau_{\rho z}^2}{k^2}}; \tag{а}$$

$$\frac{\sigma_x-\sigma_z}{\sigma_s^*}=\sqrt{1-\frac{\tau_{xz}^2}{k^2}}. \tag{б}$$

Левые части уравнений (а) и (б), выражающие соотношение между нормальными напряжениями и постоянной σ_s, являются функцией касательного напряжения τ. Величина последнего (абсолютная) может изменяться в пределах от нуля до максимальной величины, равной k.

Если $\tau = 0$, то из уравнений (а) и (б) легко получить выражения (6.6), (6.7) и (6.8), принятые ранее в качестве приближенных для условия пластичности при $\tau_к \to 0$. При подстановке же в уравнения (а) и (б) предельного значения $\tau = k$ получаем

$$\sigma_\rho=\sigma_\theta=\sigma_z \tag{6.10а}$$

или

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z. \tag{6.10б}$$

При подстановке $\tau = k$ в уравнение (а) следует учесть, что сумма квадратов разностей напряжений σ может быть равна нулю только при равенстве этих напряжений. Из уравнения (б) при $\tau = k$ получается $\sigma_x = \sigma_z$, но поскольку $\sigma_y = 0{,}5\,(\sigma_x + \sigma_z)$, то и $\sigma_y = \sigma_x = \sigma_z$.

Выражение (6.10), являющееся точным в случае $\tau = k$, можно применять как приближенное при значениях τ меньших, но достаточно близких к k. Для плоского напряженного состояния приближенного выражения, аналогичного равенствам (6.10), не существует.

Исследуя уравнения (а) и (б), можно установить, что значения разности нормальных напряжений, вычисленные по приближенным выражениям (6.7) и (6.8), отличаются от действительных величин меньше чем на 5%, если $\tau_к < 0{,}3k$, и меньше чем на 10%, если $\tau < 0{,}4k$.

По мнению Е. П. Унксова, приближенные выражения условия пластичности (6.6)—(6.9) можно применять вплоть до значений

$\tau_к \leqslant 0{,}7k$. Таким образом, выражения (6.6)—(6.9) можно считать действительными при $0 \leqslant \tau_к \leqslant 0{,}7k$, приближенные же выражения (6.10) применимы в случае $0{,}7k \leqslant \tau \leqslant k$.

Весьма часто при решении практических задач условие пластичности необходимо для того, чтобы выразить производную одного напряжения по данной координате через производную другого напряжения по той же координате. Исследуем этот вопрос.

Дифференцируя уравнение пластичности (5.15) для осесимметричного напряженного состояния (при $\sigma_\rho = \sigma_\theta$) и (5.12) для плоского деформированного состояния по какой-либо координате, например соответственно по ρ и x, получим

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)\left(\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} - \frac{\partial\sigma_z}{\partial\rho}\right) = 3\tau_{\rho z}\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}; \qquad (в)$$

$$(\sigma_x - \sigma_z)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_z}{\partial x}\right) = 4\tau_{xz}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}. \qquad (г)$$

Если значения τ не зависят от координаты ρ или x (например, постоянны или изменяются параметрически), то правые части уравнений (в) и (г) обращаются в нуль. Тогда, учитывая, что разности нормальных напряжений в левой части уравнений в общем случае не равны нулю, получим

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} = \frac{\partial\sigma_z}{\partial\rho} \text{ или } \partial\sigma_\rho = \partial\sigma_z \qquad (6.11а)$$

для осесимметричного напряженного состояния при $\sigma_\rho = \sigma_\theta$ и

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial\sigma_z}{\partial x} \text{ или } \partial\sigma_x = \partial\sigma_z \qquad (6.11б)$$

для плоского деформированного состояния.

Понятно, что уравнения (5.15) и (5.12) можно было бы дифференцировать и по любой другой координате.

Таким образом, уравнения (6.11) представляют собой выражения условия пластичности в дифференциальной форме. При любых не зависящих от данной координаты значениях τ выражения (6.11) будут точным условием пластичности для указанных видов напряженного состояния. Если же значения τ зависят от данной координаты, то выражением (6.11) можно пользоваться как приближенным [97, 108].

Легко видеть, что уравнения (6.11) можно получить, кроме того, дифференцированием уравнений (6.7) и (6.10а), (6.8) и (6.10б), а также (6.6) и (6.10а). Результаты дифференцирования уравнений (6.6) и (6.10а) показывают, что выражение (6.10а) пригодно как приближенное и для осесимметричного напряженного состояния при $\sigma_\theta \neq \sigma_\rho$.

6.4. МЕТОД ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ

6.4.1. Основные понятия о линиях скольжения

Метод линий скольжения, применяемый для решений плоских (и отчасти осесимметричных) задач, сущность которого будет изложена в этом параграфе, ведет свое начало от работ М. Леви (1871 г.), Г. Генки и Л. Прандтля (20-е годы) [103]. Дальнейшее развитие он получил в работах советских ученых А. А. Ильюшина, А. Ю. Ишлинского, С. Г. Михлина, В. В. Соколовского, С. А. Христиановича и др., а также ряда иностранных ученых, как, например, Г. Гейрингер, В. Джонсона, Е. Ли, В. Прагера, Э. Томсена, Ф. Г. Ходжа, Р. Хилла. В теории процессов ковки и штамповки этим методом с успехом пользовались А. Д. Томленов, К. Н. Шевченко, Л. А. Шофман, а также Е. М. Макушок, И. П. Ренне и др.

Метод в конечном итоге выражается в построении сетки (поля) линий скольжения и использовании их свойств. Возьмем на плоскости xz в теле, находящемся в плоском деформированном состоянии, какую-нибудь точку a_1 (рис. 6.5) и отложим от нее вектор τ_1 главного касательного напряжения. Перейдем в направлении этого вектора к точке a_2, весьма близко отстоящей от точки a_1. От точки a_2 отложим вектор τ_2 главного касательного напряжения на этой точке. Вектор τ_2 в общем случае будет отличаться от вектора τ_1 как по направлению, так и по величине. Поступая таким же образом дальше, мы получим в результате ломаную линию $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ и т. д.

Так как от взятой точки a_1 вследствие парности касательных напряжений можно отложить второй вектор τ, перпендикулярный к ранее отложенному, то аналогичным способом от точки a_1 можно построить вторую ломаную линию $a_1'a_2'a_3'a_4'a_5'a_6'$ и т. д. В точке a_1

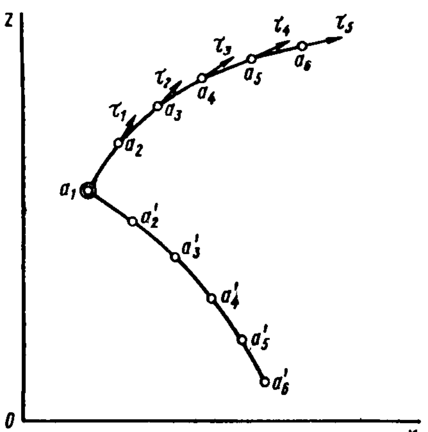


Рис. 6.5

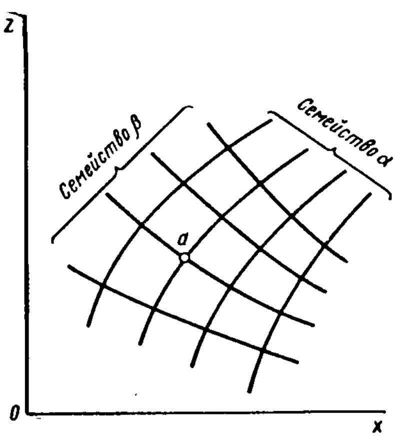


Рис. 6.6

линии пересекаются под прямым углом. Понятно, что эти линии можно продолжить и по другую сторону от точки a_1.

При неограниченном увеличении числа точек a и точек a' ломаные линии превратятся в плавные кривые α и β (рис. 6.6), представляющие собой траектории главных касательных напряжений или линий скольжения.

Из каждой точки a и a' (рис. 6.5) данной пары линий скольжения можно начать построение других линий скольжения. В результате получим ортогональную сетку (поле) линий скольжения (рис. 6.6), в общем случае криволинейную из двух семейств линий α и β. Точки пересечения линий скольжения двух семейств называют узловыми точками (точка a на рис. 6.6).

Из рассуждений, на основании которых показана возможность построения поля линий скольжения, явствует, что для разных напряженных состояний поля́ линий скольжения различны и каждому определенному напряженному состоянию соответствует определенное поле линий скольжения.

Касательные к каждой из двух линий скольжения в любой точке совпадают с направлением главных касательных напряжений и пересекают ось x под какими-то углами ω и ω' (рис. 6.7), плавно изменяющимися при переходе от одной точки к соседней.

Так же как сетку линий скольжения, можно построить ортогональную сетку траекторий главных напряжений. Эти траектории пересекают линии скольжения под углом $\pi/4$. Траектории главных напряжений σ_1 и σ_3, проходящие через точку a, показаны на рис. 6.7. Касательные к ним являются главными осями *1* и *3*, которые пересекают ось x соответственно под углами φ и $\varphi + \pi/2$.

Из рис. 6.7 следует, что для линий скольжения соответственно семейств α и β

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\omega; \quad \frac{dz}{dx} = -\operatorname{ctg}\omega, \tag{6.12}$$

где $\omega = \varphi + \pi/4$.

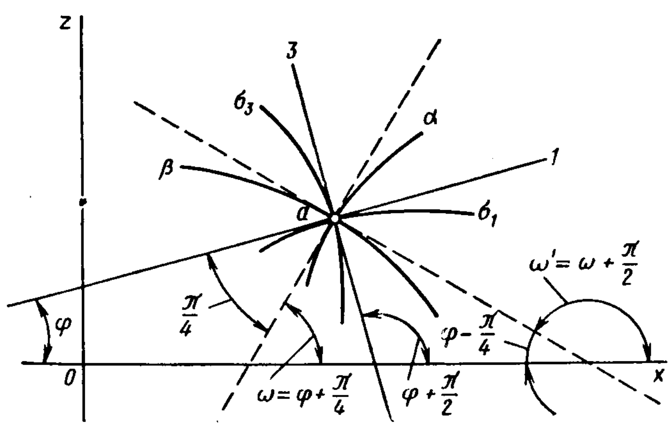


Рис. 6.7

Уравнения (6.12) представляют собой дифференциальные уравнения линий скольжения. Линии скольжения реально отображаются в деформируемом теле в виде линий Людерса—Чернова, как это было показано на рис. 1.23.

Выпишем теперь формулы (3.48), выражающие компоненты напряжений при плоском деформированном состоянии в функции угла φ, т. е. угла между произвольной осью x и главной осью 1:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x\\ \sigma_z\end{array}\right\} = \sigma_{ср} \pm \tau_{31}\cos 2\varphi;$$

$$\tau_{xz} = \tau_{31}\sin 2\varphi.$$

Заменим в этих выражениях угол φ углом ω, одновременно учтем, что при плоской пластической деформации по уравнению (5.13а) $\tau_{31} = k$.

В результате получим

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\sigma_x\\ \sigma_z\end{array}\right\} = \sigma_{ср} \pm k\sin 2\omega;\\ \tau_{xz} = -k\cos 2\omega.\end{array}\right\} \qquad (6.13)$$

Заметим, что выражения (6.13) обладают тем свойством, что они тождественно удовлетворяют условию пластичности (5.12):

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = 4k^2.$$

Действительно, подставляя уравнения (6.13) в (5.12), получим $4k^2 = 4k^2$.

Следовательно, в дальнейшем при оперировании выражениями (6.13) можно не обращаться к условию пластичности, поскольку последнее будет удовлетворяться при любом значении ω. Подставив значения напряжений из (6.13) в дифференциальные уравнения равновесия (3.50)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

получим

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \sigma_{ср}}{\partial x} + 2k\left(\cos 2\omega\dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \sin 2\omega\dfrac{\partial \omega}{\partial z}\right) = 0;\\ \dfrac{\partial \sigma_{ср}}{\partial z} - 2k\left(\cos 2\omega\dfrac{\partial \omega}{\partial z} - \sin 2\omega\dfrac{\partial \omega}{\partial x}\right) = 0.\end{array}\right\} \qquad (6.14)$$

Перейдем в уравнениях (6.14) к криволинейной системе координат α и β, где в качестве координатной сетки примем сетку линий скольжения.

Поскольку сетка линий скольжения является вполне закономерной, постольку можно рассматривать, например, линии $O'\alpha$

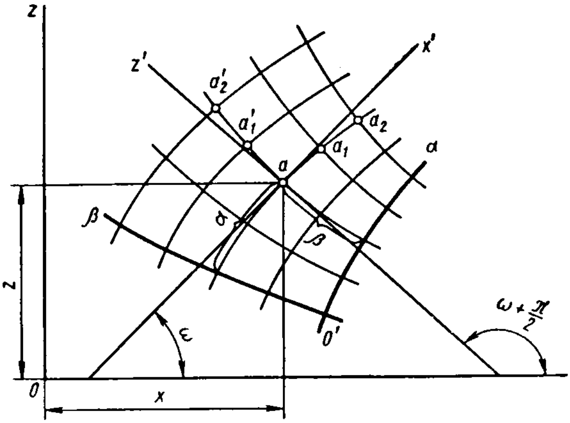


Рис. 6.8

и $O'\beta$ (рис. 6.8) как начальные или нулевые (криволинейные оси) и по отношению к ним определять положение на сетке любой точки a координатами α и β взамен координат x и z. Ясно, что декартовы координаты и криволинейные будут функционально связаны между собой.

Как во всякой системе координат, в рассматриваемом случае при перемещении точки a вдоль одной из координатных линий, например вдоль линии α (в положении a_1, a_2 и далее), ее координата β останется постоянной; при перемещении же точки вдоль линии β (в положение a_1', a_2' и далее) постоянной останется координата α.

Поместим теперь начало координат O системы xz в произвольную точку a пересечения двух линий скольжения и направим оси x и z по касательным x' и z' к паре линий скольжения, пересекающихся в данной точке. Уравнения (6.13), а следовательно, и (6.14) при этом останутся в силе, так как при выводе уравнения (6.13) направления осей принимались произвольными.

В бесконечно малой окрестности точки a элементы дуг системы α, β можно считать совпадающими с касательными, по которым направлены новые оси x', z', и, следовательно, можно принять

$$dx = d\alpha;\ dz = d\beta;\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha},\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Угол же ω теперь равен нулю в силу совпадения осей с касательными к линиям скольжения. Однако $\partial\omega/\partial\alpha$ и $\partial\omega/\partial\beta$ в нуль не обратятся, так как угол ω изменяется вдоль криволинейных координатных направлений. Учтя сказанное и заменяя в уравнении (6.14) производные по x, z производными по α, β, получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\sigma_{\text{ср}} + 2k\omega) = 0;\ \frac{\partial}{\partial \beta}(\sigma_{\text{ср}} - 2k\omega) = 0. \qquad (6.15)$$

Поскольку точка a при выводе (6.15) являлась произвольной, постольку эти уравнения будут действительны для любой точки.

Таким образом, от координат x, z в (6.14) мы перешли к новым координатам α, β. Уравнения (6.15) являются также дифференциальными уравнениями равновесия и притом удовлетворяющими условию пластичности *.

Интегрируя уравнения (6.15), первое по α, второе по β, получим

$$\sigma_{\text{ср}} + 2k\omega = C_1; \tag{а}$$

$$\sigma_{\text{ср}} - 2k\omega = C_2. \tag{б}$$

В приведенное выше решение следует внести корректив, поскольку мы интегрировали уравнения в частных производных. Дело в том, что при дифференцировании по одной переменной функция другой принимается за постоянную и производная ее обращается в нуль. Следовательно, уравнение (а) может содержать какую-то функцию от β, производная которой обратилась в нуль в первом уравнении (6.15). Это обстоятельство надо учесть, заменяя в уравнении (а) произвольную постоянную C_1 произвольной функцией от β. То же относится к уравнению (б), где постоянную C_2 необходимо заменить произвольной функцией от α **.

В качестве произвольных функций от β и α примем соответственно

$2k\eta(\beta)$ и $2k\xi(\alpha)$.

Тогда уравнения (а) и (б) можно написать в окончательной форме

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{ср}} + 2k\omega &= 2k\eta(\beta) \ (\text{по линии } \alpha); \\ \sigma_{\text{ср}} - 2k\omega &= 2k\xi(\alpha) \ (\text{по линии } \beta). \end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

Уравнения (6.16) носят название интегралов Генки.

Произвольные функции $2k\eta(\beta)$ и $2k\xi(\alpha)$ имеют постоянные значения при перемещении точки вдоль одной и той же линии скольжения соответственно системы α и системы β и изменяются при переходе от одной линии скольжения к другой.

Если бы линии скольжения α, β были нам всегда известны, то интегралы Генки представляли бы общее решение задачи о плоской деформации при отсутствии упрочнения.

Пусть в какой-либо точке M данной линии скольжения напряжение $\sigma_{\text{ср}} = \sigma_{\text{ср}\,M}$ и $\omega = \omega_M$, а в другой точке N той же линии $\sigma_{\text{ср}} = \sigma_{\text{ср}\,N}$ и $\omega = \omega_N$.

* Строгий вывод уравнений (6.15) см. в работах [33 и 103].

** Общее положение теории интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных заключается в том, что необходимо и достаточно, чтобы C было постоянным относительно переменной интегрирования, но C может быть любой функцией других переменных.

Подставляя эти данные, например, в первое уравнение системы (6.16), получим

$$\sigma_{\text{ср}\,M} + 2k\omega_M = 2k\eta(\beta); \quad \sigma_{\text{ср}\,N} + 2k\omega_N = 2k\eta(\beta).$$

Но так как при перемещении точки вдоль одной и той же линии скольжения произвольная функция не изменяется, то

$$\sigma_{\text{ср}\,M} + 2k\omega_M = \sigma_{\text{ср}\,N} + 2k\omega_N;$$

соответственно другое уравнение даст

$$\sigma_{\text{ср}\,M} - 2k\omega_M = \sigma_{\text{ср}\,N} - 2k\omega_N.$$

Объединяя и несколько преобразовывая последние уравнения, получим

$$\sigma_{\text{ср}\,M} - \sigma_{\text{ср}\,N} = \pm\, 2k(\omega_M - \omega_N), \tag{6.17}$$

а обозначая $\omega_M - \omega_N$ через ω_{MN}, где ω_{MN} представляет собой угол поворота линии скольжения при переходе от точки M к точке N, имеем

$$\sigma_{\text{ср}\,M} - \sigma_{\text{ср}\,N} = \pm\, 2k\omega_{MN}. \tag{6.18}$$

Уравнение (6.18) показывает, что *изменение* $\sigma_{\text{ср}}$ *пропорционально углу поворота линии скольжения, а коэффициентом пропорциональности является величина* $2k$.

Выражения (6.16)—(6.18) имеют существенное значение. Действительно, если дана линия скольжения, а также известно напряжение $\sigma_{\text{ср}}$ в одной ее точке (например, из граничных условий), то уравнения (6.16)—(6.18) позволяют легко определить среднее напряжение в любой другой ее точке. Если же известно поле линий скольжения и напряжение в какой-либо одной узловой точке, то, переходя от одной узловой точки к другой, нетрудно установить распределение средних напряжений по всему полю. Зная же средние напряжения $\sigma_{\text{ср}}$ и углы ω, легко определить и компоненты напряжений σ_x, σ_z и τ_{xz}, используя систему уравнений (6.13), что и будет показано дальше.

Если некоторый отрезок линии скольжения прямой, то напряженное состояние не изменяется при движении вдоль этого отрезка. Если в некоторой области прямолинейны оба семейства линий скольжения, то напряженное состояние в этой области будет однородным, и, наоборот, при однородном напряженном состоянии поле линий скольжения представляет собой сетку ортогональных прямых.

6.4.2. Свойства линий скольжения

Выделим в поле линий скольжения произвольный криволинейный четырехугольник $MNQP$ (рис. 6.9), ограниченный двумя линиями скольжения MN и PQ системы α и двумя линиями MP и NQ системы β. Учитывая, что разность средних напряжений в двух точках не может зависеть от того, с помощью каких промежуточ-

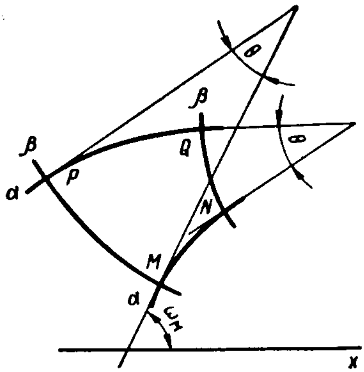


Рис. 6.9

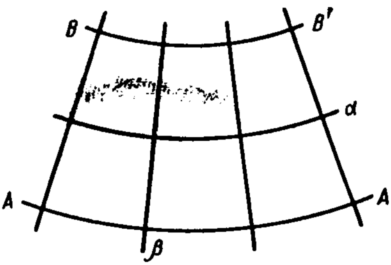


Рис. 6.10

ных точек N и P она вычислена, на основании уравнений (6.16) можно написать

$$\sigma_{\text{ср}\,Q} - \sigma_{\text{ср}\,M} = (\sigma_{\text{ср}\,Q} - \sigma_{\text{ср}\,N}) + (\sigma_{\text{ср}\,N} - \sigma_{\text{ср}\,M}) =$$
$$= 2k(\omega_Q + \omega_M - 2\omega_N),$$

а также

$$\sigma_{\text{ср}\,Q} - \sigma_{\text{ср}\,M} = (\sigma_{\text{ср}\,Q} - \sigma_{\text{ср}\,P}) + (\sigma_{\text{ср}\,P} - \sigma_{\text{ср}\,M}) =$$
$$= 2k(2\omega_P - \omega_Q - \omega_M).$$

Из этих двух уравнений получим

$$\omega_Q - \omega_N = \omega_P - \omega_M = \theta, \qquad (6.19)$$

где θ — угол между двумя касательными линиями MN и PQ системы α в точках пересечения каждой из них одной и той же линией системы β (рис. 6.9). Аналогичным способом можно получить такой же результат для любой пары линий другого семейства.

Таким образом, *угол между касательными к двум линиям скольжения одного семейства в точках пересечения их каждой линией скольжения другого семейства остается постоянным* (рис. 6.9). Это положение представляет собой первую теорему Генки.

Отсюда вытекает такое следствие: *если какой-либо отрезок линии скольжения данного семейства есть отрезок прямой, то и все другие отрезки линий скольжения этого семейства, отсекаемые одними и теми же линиями скольжения другого семейства, будут также отрезками прямых и длина их одинакова, например $AB = A'B'$* (рис. 6.10).

Вторую теорему Генки формулируют следующим образом: *при перемещении точки вдоль данной линии скольжения одного семейства радиусы кривизны линий скольжения другого семейства в точках пересечения с данной изменяются на величину пройденных расстояний.*

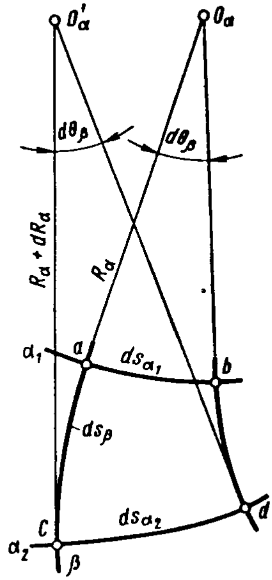


Рис. 6.11

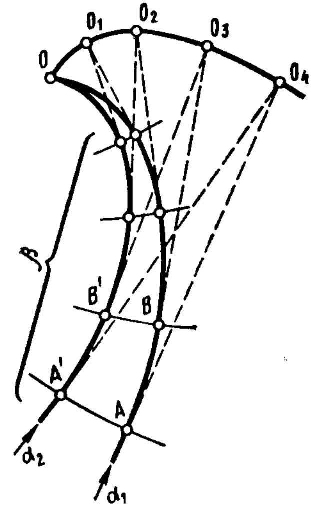


Рис. 6.12

Для доказательства выделим в поле линий скольжения бесконечно малый криволинейный четырехугольник, образованный парой ab и cd линий скольжения системы α, которые пересекаются двумя линиями ac и bd системы β (рис. 6.11). Так как четырехугольник считаем бесконечно малым, то стороны его можно считать дугами окружностей.

Длину дуги ab ($\widehat{ab} = ds_{\alpha_1}$) можно определить через радиус кривизны $O_\alpha a = R_\alpha$ и угол $aO_\alpha b = d\theta_\beta$, т. е.

$$ds_{\alpha_1} = R_\alpha \, d\theta_\beta.$$

Длину же дуги cd ($\widehat{cd} = ds_{\alpha_2}$) с точностью до величин высшего порядка малости можно выразить так:

$$ds_{\alpha_2} = (R_\alpha + ds_\beta) \, d\theta_\beta.$$

С другой стороны, так как кривизна дуг системы α уменьшается при переходе от линии α_1 к линии α_2, можно считать, что радиус кривизны дуги cd будет больше радиуса кривизны дуги ab на некоторую величину приращения dR_α, т. е.

$$O'c = R_\alpha + dR_\alpha.$$

На этом основании можно написать второе выражение для длины дуги ds_{α_2}, а именно:

$$ds_{\alpha_2} = (R_\alpha + dR_\alpha) \, d\theta_\beta.$$

($\angle cO'_\alpha d = \angle aO_\alpha b = d\theta_\beta$ на основании первой теоремы Генки).

Приравнивая правые части полученных для ds_α, выражений, получим

$$dR_\alpha = ds_\beta.$$

Аналогичным способом получим

$$dR_\beta = ds_\alpha.$$

Таким образом, вторая теорема Генки доказана [1].

Вторую теорему Генки можно представить в несколько иной форме. Для этого рассмотрим две близкие линии скольжения α_1 и α_2, пересекаемые рядом линий скольжения системы β (рис. 6.12). Касательные к двум близким линиям скольжения системы α в точках пересечения их элементами дуг линий системы β пересекаются в центре кривизны этих элементов.

Радиус кривизны AO_4 дуги AA' линии β равен сумме радиуса кривизны BO_3 линии β в точке B и длины дуги AB. Аналогичные рассуждения можно продолжить в отношении радиуса BO_3 и других, отмеченных на рисунке. Следовательно, геометрическим местом центров кривизны O, O_1, O_2 и т. д. является эвольвента линии скольжения α_1.

Таким образом, *центры кривизны дуг линий скольжения одного семейства образуют эвольвенту для данной линии скольжения другого семейства, которую они пересекают.* Это положение называют теоремой Прандтля.

Так как радиус кривизны линий скольжения уменьшается при перемещении от линии к линии данной системы в сторону их вогнутости, то в результате радиус кривизны может обратиться в нуль.

На рис. 6.12 это, например, произойдет для линий системы β в точке O, которая является точкой пересечения эвольвенты $OO_{1,2,3,4}$ бесконечно близкими линиями α_1 и α_2, сходящимися в этой точке. Отсюда следует, что точка O принадлежит огибающей семейства α и одновременно представляет собой точку заострения (точку возврата) семейства β.

Таким образом, *огибающая линия скольжения одного семейства является геометрическим местом точек возврата линий скольжения другого семейства.*

Так как линия скольжения системы β в точке O образует точку возврата, то она не может пересечь огибающую системы α. Эта огибающая является границей возможного аналитического решения, и, как доказал С. А. Христианович, она является линией разрыва.

Следовательно, *огибающая линий скольжения одного семейства является предельной линией, через которую нельзя продолжить линии скольжения другого семейства.*

Линии скольжения выходят на свободную или контактную поверхность. На свободной поверхности, а также и на контактной при отсутствии трения $\tau_{xz} = 0$. Из третьего уравнения системы

---

[1] Более точные доказательства см. в работах [34, 73, 113].

(6.13) для этого значения τ_{xz} получим $\cos 2\omega = 0$, $\omega = \pm 45° = \pm\pi/4$, т. е. *линии скольжения обоих семейств пересекают свободную поверхность (а также контактную поверхность при отсутствии трения) под постоянным углом* 45°.

Если трение достигает на контактной поверхности максимального значения, т. е. $|\tau_{xz}| = k$, то $\cos 2\omega = 1$; $\omega = 0$; $\omega_1 = \omega \pm 90° = 90°$. Таким образом, при максимальном трении контактная поверхность является огибающей для одного семейства линий скольжения и геометрическим местом точек возврата для линий другого семейства. При промежуточном значении контактного касательного напряжения значения углов ω также будут промежуточными: $0 \leqslant \tau \leqslant k$; $\pi/4 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$; $\pi/4 \geqslant \omega \geqslant 0$.

Зная величину τ_{xz}, эти углы можно определить по уравнению (6.13).

Резюмируем вкратце сказанное об основных свойствах линий скольжения.

1. Линии скольжения непрерывны.
2. Линии скольжения образуют два семейства.
3. Семейства линий скольжения взаимно ортогональны.
4. Линии скольжения пересекают траектории главных напряжений под углом $\pi/4$.
5. Изменение среднего нормального напряжения при движении вдоль линии скольжения пропорционально углу ее поворота.
6. Угол между касательными к двум линиям скольжения одного семейства в точках пересечения их линиями другого семейства остается постоянным.
7. Радиусы кривизны линий скольжения изменяются на величину расстояний, пройденных по линиям скольжения другого семейства.
8. Углы наклона линий скольжения при выходе на контур зависят от величины касательного напряжения на контуре.

6.4.3. Характеристики

Исключим из уравнений (6.14) переменную $\sigma_{ср}$, для чего первое уравнение продифференцируем по z, второе по x и вычтем одно из другого:

$$-\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + 2\operatorname{ctg} 2\omega \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} - 4\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial z} +$$

$$+ 2\operatorname{ctg} 2\omega \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right] = 0. \qquad (6.20)$$

Полученное уравнение в обобщенной форме может быть написано так:

$$A\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial z} + C\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + F\left(x, z, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial z}\right) = 0. \qquad (6.20а)$$

Тогда уравнение в обыкновенных производных вида

$$A\,dz^2 - 2B\,dx\,dz + C\,dx^2 = 0 \qquad (6.20б)$$

будет являться, как говорят в теории дифференциальных уравнений, уравнением характеристик уравнения (6.20а), а его решения — характеристиками.

Составим уравнение характеристик для (6.20):

$$-dz^2 - 2\operatorname{ctg} 2\omega\,dx\,dz + dx^2 = 0.$$

Определяя отсюда dz/dx как явную функцию ω, имеем

$$\frac{dz}{dx} = -\operatorname{ctg} 2\omega \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\omega + 1} = -\frac{\cos 2\omega}{\sin 2\omega} \pm \frac{1}{\sin 2\omega},$$

откуда получим два дифференциальных уравнения характеристик уравнения (6.20):

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\omega; \quad \frac{dz}{dx} = -\operatorname{ctg}\omega. \qquad (6.21)$$

Сравнивая уравнения (6.12) и (6.21), заключаем, что линии скольжения совпадают с характеристиками дифференциального уравнения (6.20). Решения уравнений характеристик осуществляются преимущественно с приведением их к так называемой канонической форме путем замены переменных x и y новыми переменными ξ и η. На основании интегралов Генки (6.16) примем

$$\xi = \xi(\alpha); \quad \eta = \eta(\beta).$$

Тогда, исключая из уравнений (6.16) сначала $\sigma_{ср}$, а затем ω, получим

$$\omega = 0{,}5(\eta - \xi); \quad \sigma_{ср} = k(\eta + \xi);$$

$$\xi + \eta = \frac{\sigma_{ср}}{k},$$

x и y являются функциями координат α и β, следовательно, они являются функциями переменных ξ и η. Поэтому имеют смысл выражения

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} \text{ и } \frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

Умножая на эти выражения соответственно первое и второе уравнения (6.21), получим

$$\frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\operatorname{tg}\omega;$$

$$\frac{dz}{dx}\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial \xi}{\partial z}\operatorname{ctg}\omega,$$

откуда, заменяя знаки производных, окончательно получим систему[1]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\mathrm{tg}\,\omega; \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\mathrm{ctg}\,\omega;\\ &\omega = 0{,}5\,(\eta - \xi); \quad \sigma_{ср} = k\,(\eta + \xi).\end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

Линии скольжения из этих уравнений определяются в параметрическом виде $x = f_1(\xi, \eta)$ и $z = f_2(\xi, \eta)$.

Если решить уравнения характеристик, то станут известны линии скольжения и можно будет вычислить напряжения. Однако получение решений в замкнутой форме оказывается возможным в отдельных случаях. В общем случае применяют численное интегрирование уравнений характеристик, при котором вместо отыскания общего решения определяют искомые функции в конечном числе узловых точек сетки характеристик[2].

6.4.4. Виды полей линий скольжения

Простейшее поле линий скольжения представляет собой систему двух ортогональных семейств прямых линий. Поскольку углы поворота линий скольжения каждого семейства в этом случае равны нулю, среднее напряжение $\sigma_{ср}$ остается постоянным в любой точке поля в соответствии с уравнением (6.18). Следовательно, такое поле выражает однородное (равномерное) напряженное состояние, при котором параметры ξ и η также постоянны. Среднее напряжение $\sigma_{ср}$ — единственная неизвестная величина, которую надо определить из граничных условий. *У прямолинейной свободной границы или находящейся под равномерной нормальной нагрузкой полем линий скольжения всегда является сетка ортогональных прямых, образующих углы 45° с границей* (рис. 6.13, *а*).

В другой группе полей линий скольжения одно семейство линий скольжения состоит из прямых линий, а другое — из кривых, к ним ортогональных. Такие поля называют простыми. В этом случае при перемещении вдоль каждой из прямых линий скольжения среднее напряжение $\sigma_{ср}$ остается постоянным, но изменяется при переходе от одной к другой прямой линии скольжения. При этом если кривые линии скольжения считать принадлежащими к семейству α, то параметр ξ будет постоянным (рис. 6.13, *б*).

Частным случаем рассматриваемой группы полей скольжения является центрированное поле, образуемое пучком прямых и концентрическими окружностями. Нормальные напря-

---

[1] Строгий вывод системы (6.22) см. в работах [33, 34, 103].

[2] Изложение методов численного интегрирования уравнений характеристик выходит за пределы настоящего учебника и требует от читателя знаний по математике, превышающих программу втузов.

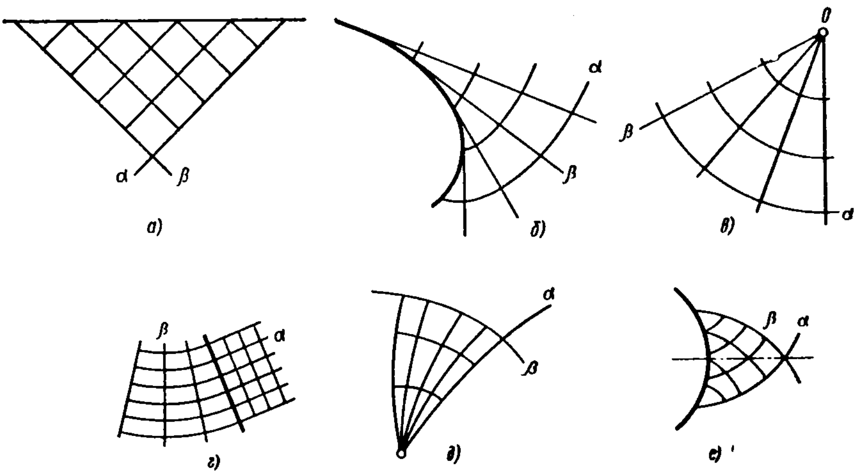


Рис. 6.13

жения по радиальным и окружным (тангенциальным) площадкам равны среднему давлению $\sigma_{ср} = 2k\,(-\omega + \eta)$ и являются линейными функциями угла наклона прямой (рис. 6.13, *в*). Центр такого поля O называют о с о б о й т о ч к о й. Поскольку в особой точке сходятся прямые линии скольжения, вдоль каждой из которых средние напряжения $\sigma_{ср}$ различны по величине, постольку *в особой точке напряжения теоретически не имеют единственного значения.* Однако ф о р м а л ь н о условия равновесия и пластичности удовлетворяются и в этой точке.

Учитывая сказанное о полях линий скольжения указанных видов, можно утверждать, что *в области, примыкающей к области равномерного, напряженного состояния, поле линий скольжения возможно только простое, т. е. в котором одно из семейств состоит из прямых* (6.13, *г*).

Наконец, к общему случаю относятся поля линий скольжения, образованные двумя ортогональными семействами плавных кривых линий. Сюда относятся, например, взаимно ортогональные циклоиды, логарифмические спирали и другие более сложные кривые. В таких полях, в частности, кривые одного семейства могут пересекаться в одной точке (рис. 6.13, *д*), которая поэтому будет являться особой.

Следует отметить, что *поле линий скольжения у свободной или находящейся под равномерной нормальной нагрузкой круговой границы представляет собой ортогональную сетку логарифмических спиралей* (рис. 6.13, *е*).

Учитывая это положение и сказанное на стр. 196 относительно прямолинейной границы, можно сделать такое обобщающее заключение: *поле линий скольжения у границы, свободной от усилий* (*или* *находящейся под равномерной нормальной нагрузкой), определяется только формой самой границы.*

При решении практических задач редко бывает возможно построить поле линий скольжения одного и того же вида по всей деформируемой зоне. Обычно необходимо комбинировать поля линий скольжения, соответствующие решениям, справедливым для различных областей, при условии, чтобы границами различных областей являлись линии скольжения, общие для смежных полей, и компоненты напряжений поперек (по нормалям) границ были непрерывны.

6.4.5. Построение полей линий скольжения

Построение полей линий скольжения в общем случае является задачей достаточно сложной, и отыскание решения требует опытности и интуиции [124].

В любом случае должны быть заданы граничные условия, обычно в виде соотношений между нормальными и касательными напряжениями.

Решение какой-либо задачи, полученное методом линий скольжения, не является, однако, единственным, и возможны другие решения, справедливые для заданных граничных условий. Поэтому необходима их последующая проверка на единственность и корректность [46, 106].

Как уже было сказано ранее, для построения полей линий скольжения можно применить аналитическое интегрирование уравнений плоской деформации, пользуясь теми или иными методами, обычно приближенными. Однако этот путь представляет часто значительные математические трудности и не распространен в теории обработки металлов давлением.

Иногда представляется возможным строить поле линий скольжения без решения уравнений на базе анализа условий задачи и использования геометрических свойств линий скольжения. В некоторых простейших случаях бывает возможно получать элементарным путем замкнутые аналитические решения. Наконец, теория линий скольжения позволяет строить поля линий скольжения графическими методами. В некоторых случаях поля линий скольжения возможно построить по координатам узловых точек, вычисленным аналитически и приведенным в литературе [106, 113]. Все это будет иллюстрировано далее.

Рассмотрим построение поля линий скольжения для плоского кольца (рис. 6.14), нагруженного по внутреннему контуру равномерно распределенной растягивающей нагрузкой p. Деформация принимается плоской в направлении оси z (т. е. толщины кольца). Определим величину p, при которой все кольцо находится в состоянии пластической деформации.

Поскольку касательных напряжений на внутреннем контуре нет, напряжения σ_ρ (т. е. направленные радиально) являются главными нормальными. Следовательно, напряжения σ_θ, направленные тангенциально, также будут главными нормальными. Поэтому траектории главных напряжений представляют собой сетку окружностей и ортогональных к ним радиусов (рис. 6.14, правая сторона). Линии скольжения наклонены к траекториям главных напряжений под углом 45°, т. е. каждая линия скольжения с любым радиусом, который она пересекает, образует угол 45° (то же и с любой окружностью, поскольку последняя ортогональна радиусам).

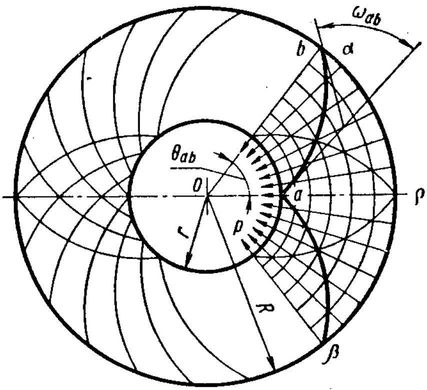


Рис. 6.14

Из теории кривых известно, что кривая, пересекающая все лучи, выходящие из одной точки O под одним и тем же углом α, есть логарифмическая спираль. Следовательно, в рассматриваемой задаче линии скольжения являются логарифмическими спиралями.

Уравнение логарифмической спирали

$$\rho = r \exp A\theta;$$

$A = \operatorname{ctg} \alpha$; в нашем случае $A = \operatorname{ctg} 45° = 1$, и, следовательно, для данного случая

$$\rho = re^{\theta}.$$

Откладывая (начиная с точки a) θ и ρ от оси ρ против часовой стрелки, получим линию одного семейства α; откладывая θ и ρ по часовой стрелке, получим линию другого семейства β (рис. 6.14). Аналогично можно получить любое количество других пар линий скольжения. Слева на рисунке представлен участок поля линий скольжения. Легко доказать, что это поле удовлетворяет требованию ортогональности и постоянству угла между касательными.

Так как построенные линии скольжения наклонены к радиусам под постоянным углом 45°, то угол поворота их равен углу поворота радиуса от одной точки пересечения с данной линией скольжения до другой. Поэтому $\theta_{ab} = \omega_{ab}$ (рис. 6.14).

Из уравнения кривой следует

$$\ln \frac{\rho}{r} = \theta,$$

и, следовательно,

$$\theta_{ab} = \omega_{ab} = \ln \frac{R}{r}.$$

На основании уравнения (6.18) можно написать

$$\sigma_{\text{ср}\,a} - \sigma_{\text{ср}\,b} = 2k \ln \frac{R}{r}.$$

Точка b лежит на свободной поверхности, следовательно, $\sigma_{\rho b} = 0$.

По условию пластичности, учитывая, что напряжение σ_ρ растягивающее, а σ_θ сжимающее, имеем

$$\sigma_{\rho b} - \sigma_{\theta b} = 2k,$$

откуда

$$\sigma_{\theta b} = -2k$$

и

$$\sigma_{\text{ср}\,b} = \frac{\sigma_{\rho b} + \sigma_{\theta b}}{2} = -k.$$

Тогда

$$\sigma_{\text{ср}\,a} = 2k \ln \frac{R}{r} - k,$$

но

$$\sigma_{\text{ср}\,a} = \frac{p + \sigma_{\theta a}}{2}.$$

По условию пластичности
$p - \sigma_{\theta a} = 2k$, и, следовательно, $\sigma_{\theta a} = p - 2k$, поэтому

$$\sigma_{\text{ср}\,a} = \frac{p + p - 2k}{2} = 2k \ln \frac{R}{r} - k,$$

откуда

$$p = 2k \ln \frac{R}{r} = \sigma_s^* \ln \frac{R}{r}.$$

Таким образом, задача решена элементарным путем. Получено замкнутое решение для определения удельного усилия и построено поле линий скольжения.

Также элементарно для данного случая можно определить удельное усилие, решая уравнение равновесия совместно с условием пластичности. Напряженное состояние здесь одновременно и плоское, и осесимметричное.

Дифференциальное уравнение равновесия одно, а именно уравнение (3.52)

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0.$$

Напряжения σ_ρ и σ_θ здесь являются главными. Условиями пластичности служит уравнение

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s^*;$$

подставляя это уравнение в уравнение равновесия, решаем последнее; определяем постоянную интегрирования из условия, что $\rho = R$, напряжение $\sigma_\rho = 0$. В результате получим

$$\sigma_\rho = \sigma_s^* \ln \frac{R}{\rho}. \tag{6.23}$$

При $\rho = r$ напряжение $\sigma_\rho = p$, следовательно,

$$p = \sigma_s^* \ln \frac{R}{r}. \tag{6.23а}$$

Таким образом, мы получили тот же результат, что и при решении данной задачи методом линий скольжения.

Рассмотрим теперь построение поля линий скольжения для начала внедрения плоского пуансона в пластическое полупространство при отсутствии контактного трения.

Так как принято, что контактное трение отсутствует, то линии скольжения должны подходить к рабочей поверхности пуансона *ab* под углом 45° (см. стр. 196), и участок поля линий скольжения, примыкающий к ней, представляет однородное напряженное состояние (сетка двух ортогональных семейств прямых линий). Проводим линии скольжения *ac* и *bc*, ограничивающие этот участок (рис. 6.15). Справа и слева от пуансона распространяется свободная поверхность, на которую линии скольжения также должны выходить под углом 45°. Проведем под этим углом из точек *a* и *b* направления линий скольжения *aa'* и *bb'*. Точки *a* и *b* будут особыми. Проведя из этих точек окружности радиусами *ac* = *bc*, получим границы центрированных полей, которые могут соединять области однородного напряженного состояния. Наконец, проведя под углом 45° к свободной поверхности прямые *dd'* и *ee'*, получим границу всего поля линий скольжения для данного случая *d'dcee'*. Для наглядности внутри полученных областей проводим также соответствующие этим областям линии скольже-

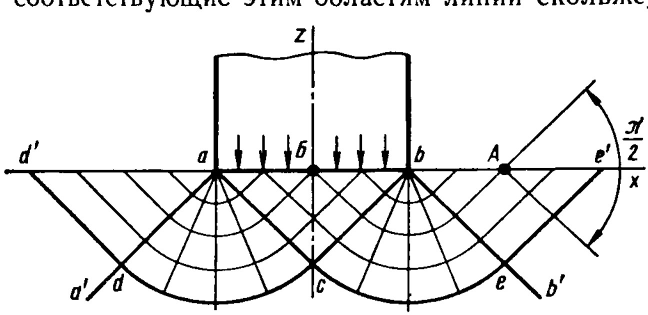


Рис. 6.15

ния (ортогональные прямые, ортогональные радиусы и окружности), как показано на рис. 6.15. Это поле построил Л. Прандтль.

Теперь определим удельное усилие. Линии скольжения наклонены как к плоскости торца пуансона, так и к свободной поверхности под углами 45°. Следовательно, угол поворота линий скольжения при движении от точек свободной поверхности к точкам, расположенным на торце пуансона (например, от точки *А* к точке *Б*), равен 90°, т. е.

$$\omega_{АБ} = \frac{\pi}{2}.$$

На свободной поверхности напряжение $\sigma_{zА} = 0$, напряжение $\sigma_{xА}$ — сжимающее и притом главное. Следовательно, по условию пластичности

$$0 - \sigma_{xА} = 2k,$$

и среднее напряжение

$$\sigma_{ср\,А} = -k.$$

На основании уравнения (6.18), учитывая, что $\sigma_{ср\,А} > \sigma_{ср\,Б}$, можно написать

$$\sigma_{ср\,А} - \sigma_{ср\,Б} = 2k\omega_{АБ},$$

а после подстановки значения $\sigma_{ср\,А}$

$$\sigma_{ср\,Б} = -(k + 2k\omega_{АБ}). \quad \text{(а)}$$

Вместе с тем для точки *Б*

$$\sigma_{xБ} - \sigma_{zБ} = 2k; \quad \frac{\sigma_{xБ} + \sigma_{zБ}}{2} = \sigma_{ср\,Б}.$$

Исключив из этих уравнений $\sigma_{xБ}$, получим

$$\sigma_{ср\,Б} = \sigma_{zБ} + k.$$

Подставим это значение $\sigma_{ср\,Б}$ в полученное выше выражение (а).

Тогда

$$\sigma_{zБ} = -2k(1 + \omega_{АБ}).$$

Удельное усилие $p = -\sigma_{zБ}$, следовательно,

$$p = 2k(1 + \omega_{АБ}), \quad (6.24)$$

или в рассматриваемом случае

$$p = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \approx 2{,}6\sigma_s^*. \quad (6.24а)$$

Поле линий скольжения (рис. 6.15) не является единственно возможным для начала вдавливания жесткого пуансона в пласти-

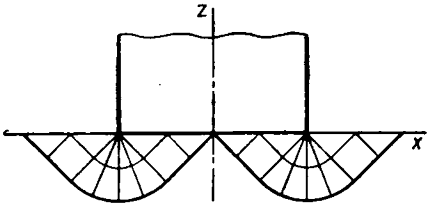


Рис. 6.16

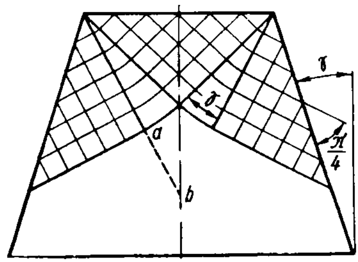


Рис. 6.17

ческое полупространство. Р. Хилл предложил вариант, представленный на рис. 6.16. Величина удельного усилия вдавливания, определенная на основании поля Р. Хилла, будет та же, что и при пользовании полем Л. Прандтля, поскольку величина угла $\omega_{АБ}$ остается в обоих случаях одна и та же.

Элементарными приемами, использованными при решении рассмотренной задачи, можно решить и задачи построения полей линий скольжения при осадке усеченного клина (рис. 6.17), при вдавливании в полупространство закругленного пуансона (рис. 6.18) и многие другие [105, 113].

Что касается специальных методов графического построения полей линий скольжения, то основы их заложили В. Прагер, Ф. Ходж [73] и Р. Зауэр [128]. Л. А. Шофман и П. И. Перлин для решения сложных задач теории обработки металлов давлением применили разработанный ими метод, сущность которого заключается в замене плавных кривых линий скольжения ломаными линиями с постоянным углом между каждой парой смежных звеньев [17]. Значительный вклад в метод графического построения и анализа полей линий скольжения внес Е. М. Макушок [46].

В качестве примера [121] построим поле линий скольжения для осадки полосы шириной a и толщиной h плоскими шероховатыми плитами (трение на поверхности контакта максимальное).

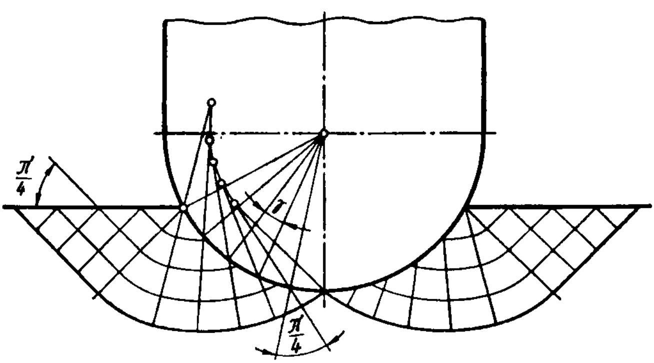


Рис. 6.18

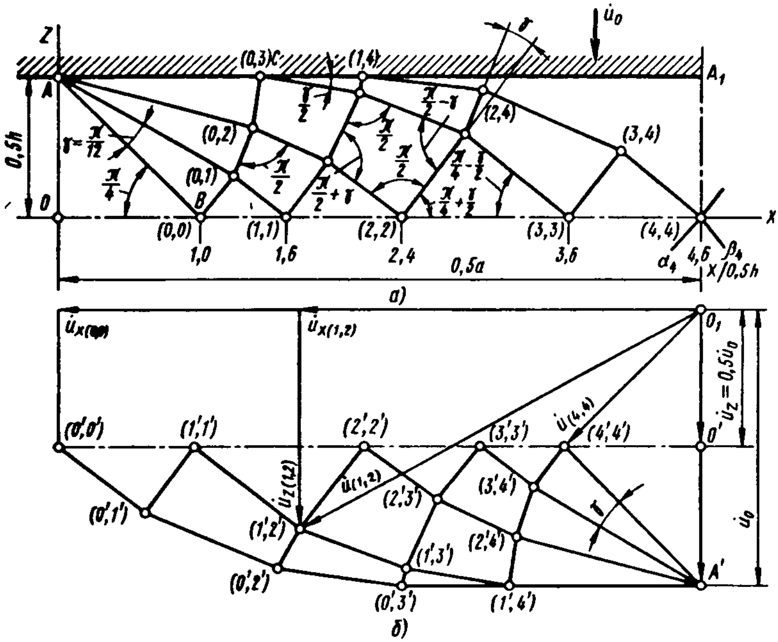


Рис. 6.19

Вследствие симметрии относительно осей x и z достаточно рассматривать одну четверть сечения полосы (рис. 6.19, *а*).

Так как свободная поверхность OA плоская, то она является границей поля однородного напряженного состояния (треугольник OAB, к которому следует примкнуть центрированное поле ABC, ограниченное линией скольжения BC), представляющей собой дугу окружности. Точка A будет особой.

Проведем из точки A пучок прямых под одинаковыми углами γ между ними (принимаем $\gamma = \pi/12$), ограниченных дугой окружности BC, и заменим дугу ломаной линией, состоящей из равных отрезков — хорд. Концы этих отрезков обозначены точками (*0*, *0*), (*0*, *1*), (*0*, *2*) и (*0*, *3*) *. Проведя затем отрезок (*0*, *1*)—(*1*, *1*) перпендикулярно отрезку (*0*, *0*)—(*0*, *1*), отрезок (*0*, *2*)—(*1*, *2*) перпендикулярно отрезку (*0*, *1*)—(*0*, *2*) и отрезок (*1*, *1*)—(*1*, *2*) параллельно отрезку (*0*, *0*)—(*0*, *1*), получим в их пересечении узловую точку (*1*, *2*). Аналогично находим положение узлов (*1*, *3*), (*1*, *4*) и получаем линию скольжения *1* семейства α. Продолжая построение, далее определим другие линии семейства α и одновременно с ними и линии семейства β. В результате получим поле

---

* Первая цифра в индексе точки означает порядковый номер линии скольжения семейства α, вторая — семейства β, на пересечении которых лежит данная точка.

линий скольжения, состоящее из четырехугольных ячеек, у которых два угла равны по $\pi/2$, а два других по $\pi/2 \pm \gamma$.

При принятом граничном условии $\left(\tau_к = \mu_s\sigma_s^* = \frac{1}{2}\sigma_s^*\right)$ линии скольжения семейства α при точном построении пересекают линию контакта AA_1 под углом $\pi/2$, а для линий скольжения семейства β линия AA_1 является огибающей (рис. 6.19, *а*).

Угол поворота линий скольжения каждого семейства при переходе от одной узловой точки к другой равен принятому углу γ. Поэтому значения напряжений ($\sigma_{ср}$, σ_x, σ_y и τ) и соотношения между ними можно вычислить столь же правильно, как и в случае точного построения поля. Ошибка будет заключаться в координатах узловых точек. Чем меньше угол γ, тем ближе ломаные линии поля приближаются к главным кривым и тем точнее координаты узловых точек. Однако построение вместе с тем становится более трудным. Целесообразно принимать угол $\gamma = 5 \div 15°$.

Легко заметить, что до линии *3* системы β линия AA_1 не влияла на построение поля. Если бы линию контакта устранить, то было бы возможно продлить центрированное поле и продолжать построение, базируясь на продленную граничную линию скольжения BC.

Поле, построенное на базе двух пересекающихся линий скольжения (учитывая линию, расположенную симметрично BC вниз), являющихся дугами окружностей, Э. Томсен называет «двухцентровой веерной сеткой линий скольжения» [106], Е. М. Макушок — «полем, образованным двумя дугами окружностей равного радиуса» [46]. Далее будет применяться последнее наименование. Это поле имеет исключительно большое значение, как позволяющее решать очень многие и разнообразные задачи [46, 106, 121, 124]. Поэтому оно было подвергнуто тщательному математическому анализу [46, 106, 113], и в настоящее время для его построения можно пользоваться таблицами вычисленных значений координат узловых точек [106, 113].

Координаты узловых точек в этих таблицах даны для определенных значений углов γ. За единицу измерения принят радиус AB дуг окружностей, образующих поле. Умножив приводимые цифры на $\sqrt{2}$, можно выразить табличные значения координат также и величинами, кратными отрезкам AO—OB (рис. 6.19, *а*).

Поле, образованное дугами равного радиуса, рассмотрим подробнее в следующей задаче.

Пусть металл, заполнивший штамп, начинает вытекать в обе стороны в зазоры между верхней и нижней частями штампа.

Длина штампа значительна, поперечные сечения (рис. 6.20) по длине штампа одинаковы. Деформированное состояние можно считать плоским. Поле линий скольжения, по предположению Л. А. Шофмана [121], имеет вид, показанный на рис. 6.20. Вследствие симметрии как по отношению к оси z, так и по отношению

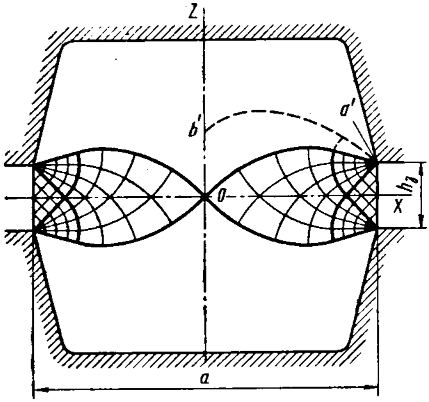


Рис. 6.20

к оси x достаточно рассмотреть участок поля, расположенный в одном квадранте (рис. 6.21). В нем три области: прямоугольный треугольник AM (0, 0), круговой сектор A (0, 0) (0, 4) и криволинейный треугольник (0, 0) (0, 4) (4, 4).

В треугольнике AM (0, 0) линия AM представляет собой в данном примере свободную поверхность деформируемого тела. Следовательно, на этой линии $\sigma_x = \tau_{xz} = 0$, и линии скольжения обоих семейств наклонены к ней под углом $\pi/4$. Они образуют сетку ортогональных прямых. Напряженное состояние однородное. Напряжение σ_z здесь главное, сжимающее, и по условию пластичности (5.13) $|\sigma_z| = \sigma_s^* = 2k$.

Среднее напряжение

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = -k.$$

Касательные напряжения на оси x равны нулю. Параметры ξ и η также постоянны, так как постоянны $\sigma_{\text{ср}}$ и $\omega = \pi/4$. Из формул (6.22) имеем

$$\eta = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ и } \xi = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

В круговом секторе A (0, 0) (0, 4) поле центрированное и состоит из дуг окружностей (семейство α) и ортогональных к ним радиусов (семейство β). Вдоль каждого из радиусов напряженное состояние остается постоянным, но изменяется при переходе от

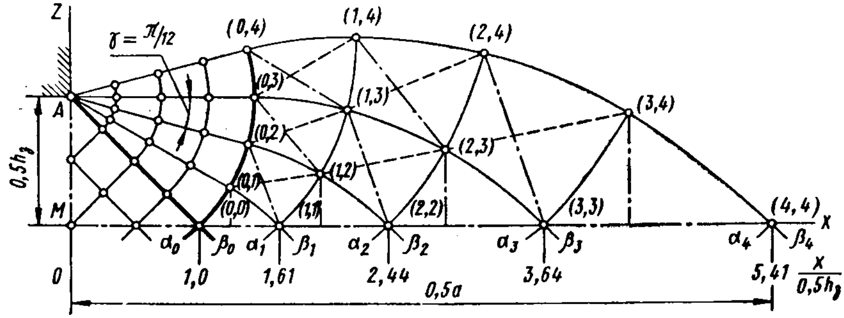


Рис. 6.21

одного радиуса к другому, т. е. при движении по линиям α. Поэтому достаточно для характеристики напряженного состояния в секторе A (*0*, *0*) (*0*, *4*) определить напряжения в узловых точках (*0*, *1*), (*0*, *2*), (*0*, *3*) и (*0*, *4*). В точке (*0*, *0*) $\omega_{0,0} = \pi/4$.

Легко видеть, что в других точках, расположенных на линии скольжения,

$$\omega = \omega_{0,0} + \gamma n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{12},$$

где n — порядковый номер линии скольжения второго семейства.

По формуле (6.16) можно написать

$$\sigma_{\text{ср}} = 2k(\eta - \omega).$$

Для данного случая

$$\sigma_{\text{ср}} = 2k\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{12}\right)\right],$$

откуда

$$\sigma_{\text{ср}} = -2k\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{12}\right).$$

Подставляя $n = 1$, 2, 3 и 4, найдем $\sigma_{\text{ср}}$ в узловых точках на линии скольжения α_0, а затем по уравнениям (6.13) и компоненты напряжений σ_x, σ_z и τ_{xz}.

Криволинейный треугольник (*0*, *0*) (*0*, *4*) (*4*, *4*) представляет собой часть поля, образованного двумя дугами окружностей равного радиуса. При построении его на рис. 6.21 использована таблица Р. Хилла [113]. Единицей измерения служит отрезок $h_3/2$. В этой области, так же как и в треугольнике AM (*0*, *0*), линии скольжения пересекают ось x под углами $\pi/4$, так как касательные напряжения вдоль этой оси, являющейся осью симметрии, отсутствуют.

Узловые точки на дуге (*0*, *0*)—(*0*, *4*) на рис. 6.21 выбраны на одинаковом угловом расстоянии $\gamma = \pi/12$ одна от другой. Такой выбор предопределяет получение так называемой р а в н о у г о л ь н о й сетки линий скольжения. В таком поле угол ω при переходе вдоль линии скольжения от одной точки к смежной с ней изменяется на одну и ту же величину, равную γ.

Поэтому, рассматривая, например, линию скольжения β_4, легко установить, что угол ω при переходе от точки (*0*, *4*) до точки (*4*, *4*) уменьшается на 4γ. Тогда для линии β_4 можно написать

$$\omega = \omega_{(0,4)} - \gamma m.$$

Раньше было установлено, что на линии α_0 угол $\omega = \omega_{0,0} + \gamma n$, поэтому $\omega_{(0,4)} = \omega_{0,0} + n\gamma$, и, следовательно, для узловых точек, расположенных на линии β_4,

$$\omega = \omega_{(0,0)} + (n - m)\gamma.$$

Аналогичные рассуждения можно повторить для любой линии скольжения семейства β, и, следовательно, выражение

$$\omega_{(m,\,n)} = \omega_{(0,\,0)} + (n - m)\,\gamma \tag{6.25}$$

будет определять угол $\omega_{(m,\,n)}$ в любой узловой точке данного поля при любых выбранных значениях γ.

Определим для точки (*0*, *4*), а тем самым и для всей линии β_4 значение ξ_4.

По третьему уравнению системы (6.22)

$$\xi_4 = \eta_0 - 2\omega_{(0,\,4)}.$$

Ранее определено, что

$$\eta_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

В свою очередь,

$$\omega_{(0,\,4)} = \frac{\pi}{4} + \frac{(4-0)\,\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}.$$

Следовательно,

$$\xi_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{2\cdot 7\pi}{12} = -\frac{1}{2} - \frac{11}{12}\,\pi.$$

Далее, используя второе уравнение (6.16), имеем

$$\sigma_{ср} = 2k\,(\xi_4 + \omega).$$

Подставляя значения постоянной ξ_4 и переменной ω по уравнению (6.25) с учетом, что $n = 4$, получим для линии β_4

$$\sigma_{ср} = -2k\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{12}\right).$$

Определив $\sigma_{ср}$, найдем и компоненты напряжений по формулам (6.13) так же, как для узловых точек линии α_0.

Вместо интегралов Генки (6.16) для получения значений среднего напряжения может служить уравнение (6.18), например для узловых точек линии α_0 можно написать

$$\sigma_{ср} = \sigma_{(0,\,0)} - 2k\gamma n$$

или, подставляя в уравнение значение среднего напряжения в точке (*0*, *0*) $\sigma_{(0,\,0)} = -k$ и $\gamma = \pi/12$, получим

$$\sigma_{ср} = -2k\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{12}\right),$$

т. е. то же, что определили и раньше.

Вычисление напряжений для остальных узловых точек, как видно из предыдущего, не представит затруднений. Это вычисление еще более облегчается, если учесть дополнительно свойства диагоналей криволинейных прямоугольников, образующих рассматриваемое поле линий скольжения.

Таблица 6.1

β		α				
		$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$n=0$	ω	$\frac{1}{4}\pi$	—	—	—	—
	ξ	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\pi$				
	η	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$				
	σ_{cp}	$-k$				
	σ_x	0				
	σ_z	$-2k$				
	τ_{xz}	0				
$n=1$	ω	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	—	—	—
	ξ	$-\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\pi$	$-\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\pi$			
	η	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\pi$			
	σ_{cp}	$-0{,}76\cdot 2k$	$-1{,}02\cdot 2k$			
	σ_x	$-1{,}33\cdot 2k$	$-0{,}52\cdot 2k$			
	σ_z	$-1{,}19\cdot 2k$	$-1{,}52\cdot 2k$			
	τ_{xz}	$0{,}5k$	0			
$n=2$	ω	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	—	—
	ξ	$-\frac{1}{2}-\frac{7}{12}\pi$	$-\frac{1}{2}-\frac{7}{12}\pi$	$-\frac{1}{2}-\frac{7}{12}\pi$		
	η	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\pi$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\pi$		
	σ_{cp}	$-1{,}02\cdot 2k$	$-1{,}29\cdot 2k$	$-1{,}55\cdot 2k$		
	σ_x	$-0{,}77\cdot 2k$	$-0{,}85\cdot 2k$	$-1{,}05\cdot 2k$		
	σ_z	$-1{,}27\cdot 2k$	$-1{,}72\cdot 2k$	$-2{,}05\cdot 2k$		
	τ_{xz}	$0{,}87k$	$0{,}5k$	0		
$n=3$	ω	$\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	—
	ξ	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{12}-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\pi$	
	η	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\pi$	$-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\pi$	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{12}\pi$	
	σ_{cp}	$-1{,}29\cdot 2k$	$-1{,}55\cdot 2k$	$-1{,}81\cdot 2k$	$-2{,}07\cdot 2k$	

β		α				
		$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n=3$	σ_x	$-1{,}29 \cdot 2k$	$-1{,}30 \cdot 2k$	$-1{,}38 \cdot 2k$	$-1{,}57 \cdot 2k$	—
	σ_z	$-1{,}29 \cdot 2k$	$-1{,}80 \cdot 2k$	$-2{,}24 \cdot 2k$	$-2{,}57 \cdot 2k$	
	τ_{xz}	k	$0{,}87k$	$0{,}5k$	0	
$n=4$	ω	$\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{7}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$
	ξ	$-\frac{1}{2} - \frac{11}{12}\pi$	$-\frac{1}{2} - \frac{11}{12}\pi$	$-\frac{1}{2} - \frac{11}{12}\pi$	$-\frac{1}{2} - \frac{11}{12}\pi$	$-\frac{1}{2} - \frac{11}{12}\pi$
	η	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\pi$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\pi$	$-\frac{1}{2} - \frac{3}{12}\pi$	$-\frac{1}{2} - \frac{5}{12}\pi$
	$\sigma_{ср}$	$-1{,}55 \cdot 2k$	$-1{,}81 \cdot 2k$	$-2{,}07 \cdot 2k$	$-2{,}33 \cdot 2k$	$-2{,}59 \cdot 2k$
	σ_x	$-1{,}8 \cdot 2k$	$-1{,}81 \cdot 2k$	$-1{,}82 \cdot 2k$	$-1{,}90 \cdot 2k$	$-2{,}09 \cdot 2k$
	σ_z	$-1{,}3 \cdot 2k$	$-1{,}81 \cdot 2k$	$-2{,}32 \cdot 2k$	$-2{,}77 \cdot 2k$	$-3{,}09 \cdot 2k$
	τ_{xz}	$0{,}87k$	k	$0{,}87k$	$0{,}5k$	0

Из выражения (6.25) видно, что угол ω остается постоянным для всех узловых точек, у которых разность индексов $(n - m)$ не изменяется. На рис. 6.21 такие точки соединены штриховыми линиями, которые представляют собой диагонали ячеек сетки. На этой же линии постоянны касательные напряжения τ_{xz}, что следует из третьего уравнения (6.13).

Другие диагональные линии, соединяющие точки, у которых постоянна сумма индексов $(n + m)$, являются изобарами, т. е. среднее напряжение $\sigma_{ср}$ вдоль этих линий не изменяется. На рис. 6.21 они также проведены штриховыми линиями приближенно в виде прямых. Возьмем, например, точку (*1*, *2*). При переходе от этой точки к точкам (*1*, *3*) и (*2*, *2*) угол наклона касательных к соответствующим линиям скольжения изменяется на одну и ту же величину γ. Следовательно, согласно уравнению (6.18) значения среднего напряжения в точках (*1*, *3*) и (*2*, *2*), для которых $(n + m) = \mathrm{const} = 4$, будут одинаковы. Поскольку исходная точка (*1*, *3*) была взята произвольно, вывод является общим.

Вычисленные значения напряжений и параметров ω, ξ и η для всех узловых точек приведены в табл. 6.1. Данные таблицы показывают, что среднее напряжение $\sigma_{(m,\, n)}$ в каждой из узловых точек можно выразить через ее индексы

$$\sigma_{(m,\, n)} = -2k\left[\frac{1}{2} + (n + m)\gamma\right]. \tag{6.26}$$

Первое слагаемое в уравнении (6.26) представляет величину $-k$ среднего напряжения $\sigma_{(0,\,0)}$ в точке $(0, 0)$ для рассматриваемого случая. Поэтому для общего случая предыдущее выражение следует переписать так:

$$\sigma_{(m,\,n)} = \sigma_{(0,\,0)} - 2k(n+m)\gamma. \tag{6.26а}$$

Подставляя это значение $\sigma_{(m,\,n)}$ и ранее полученное (6.25) для $\omega_{(m,\,n)}$ уравнения (6.13), имеем

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_z\end{matrix}\right\} = \sigma_{(0,\,0)} - 2k(n+m)\gamma \pm k\cos\cdot 2(n-m)\gamma;$$

$$\tau_{x,\,z} = k\sin\cdot 2(n-m)\gamma. \tag{6.26б}$$

Эти выражения дают возможность при заданном $\sigma_{(0,\,0)}$ весьма просто определять компоненты напряжения в угловых точках рассматриваемого поля линий скольжения по их индексам.

6.4.6. Жесткопластическая схема

Поле линий скольжения, представленное на рис. 6.14, существенно отличается от полей, показанных на рис. 6.15, 6.17, 6.18, 6.19а и 6.20. В первом случае линии скольжения распространяются от одной границы — нагруженной к другой — свободной. Во втором случае поля линий скольжения не охватывают всего объема металла. Легко усмотреть, что при попытке продлить, расширить любое из указанных полей линий скольжения нарушается какое-либо из условий правильного их построения. Любая другая линия скольжения, дополнительно проведенная или продолженная, например $a'b'$ на рис. 6.20 и ab на рис. 6.17, пересечет вертикальную ось симметрии под углом, отличающимся от 45°, т. е. покажет наличие сдвигающих напряжений на оси симметрии, что абсурдно.

Таким образом, при построении полей линий скольжения в общем случае наблюдается, что объем металла разделяется на две области: одна область пластическая, занимаемая полем, другая же считается жесткой. При этом предполагается, что металл на границе областей скачкообразно переходит в пластическое состояние.

Такая концепция, широко применяемая при решении различных задач, носит название жесткопластической схемы.

На рисунках видно, что *границами, разделяющими пластические и жесткие зоны, являются линии скольжения. Этими границами могут быть и огибающие линий скольжения* (см. рис. 6.19).

Правильность построения поля линий скольжения с наличием жесткопластической границы определяется двумя условиями: пересечение линиями скольжения осей симметрии под углом 45° и контакт жестких зон в одной точке (точка O на рис. 6.20).

В точке контакта все компоненты напряжений, определяемые по двум соприкасающимся полям линий скольжения, равны между собой.

Жесткопластическая граница, как правило, заранее не задана, и определение ее является составной частью решения задачи методом линий скольжения.

Вместе с тем жесткопластическую схему можно применять и при решении задач другими методами, причем жесткопластической границей в этом случае бывает необходимо задаться на основании экспериментальных данных или каких-либо соображений, лежащих в основе применяемого решения.

Жесткопластическая схема представляет собой концепцию математического порядка. Физически никакой резко выраженной жесткопластической границы нет. Существует определенный приграничный слой, в котором приращения упругих и пластических деформаций вполне сравнимы. Поэтому жесткопластическая схема отнюдь не предопределяет физически точных решений. В настоящее время делают попытки (Е. М. Макушок) выявить напряженнодеформированное состояние в переходных зонах, что дает перспективы получения уточненных решений [46].

6.4.7. Связь полей линий скольжения с полями скоростей

Задача построения поля линий скольжения, вообще говоря, не имеет единственного решения (стр. 198). Правильно построенное возможное поле линий скольжения, удовлетворяя условиям равновесия, уравнениям связи напряжений и деформаций и заданным граничным условиям в напряжениях, может оказаться не соответствующим условиям кинематическим. Теория пластичности доказывает, что таким *статически возможным полем линий скольжений, но не удовлетворяющим кинематическим условиям, определяется «нижняя оценка» удельного усилия деформирования.*

Для определения же так называемого действительного значения удельного усилия деформирования необходимо, чтобы поле линий скольжения удовлетворяло и кинематическим условиям. Поэтому для получения соответствующего полного решения необходимо строить поля скоростей или годографы. Поля скоростей вместе с тем дают возможность определять направления перемещений и судить о характере деформированного состояния.

Выведем прежде всего уравнения, которым должны удовлетворять скорости перемещений вдоль линий скольжения. Для этого выразим компоненты вектора скорости перемещения $\dot{u}_x$ и $\dot{u}_z$ через его компоненты $\dot{u}_\alpha$ и $\dot{u}_\beta$ по направлениям произвольной пары пересекающихся линий скольжения α и β (рис. 6.22).

На основании элементарных формул аналитической геометрии (перемена направлений осей координат) следует

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_x &= \dot{u}_\alpha \cos\omega - \dot{u}_\beta \sin\omega;\\ \dot{u}_z &= \dot{u}_\alpha \sin\omega + \dot{u}_\beta \cos\omega.\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Дифференцируем эти уравнения соответственно по элементам дуг линий скольжения систем α и β, т. е. первое по s_α, а второе по s_β:

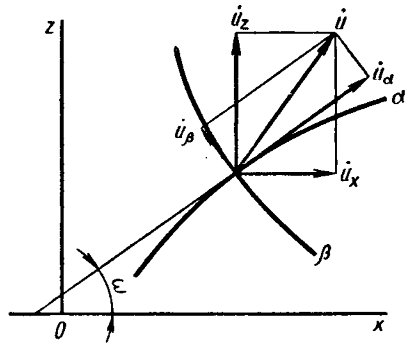


Рис. 6.22

$$\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial s_\alpha}\cos\omega - \dot{u}_x \sin\omega \frac{\partial\omega}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s_\alpha}\sin\omega + \dot{u}_z \cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial s_\alpha} =$$

$$= (\dot{u}_z \cos\omega - \dot{u}_x \sin\omega)\frac{\partial\omega}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial s_\alpha}\cos\omega + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s_\alpha}\sin\omega.$$

Но согласно рис. 6.22

$$\dot{u}_z \cos\omega - \dot{u}_x \sin\omega = \dot{u}_\beta;$$

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial s_\alpha}\cos\omega = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial s_\alpha}\sin\omega = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}.$$

Следовательно, на основании первого уравнения системы (а) получим

$$\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} + \dot{u}_\beta \frac{\partial\omega}{\partial s_\alpha}.$$

Аналогично на основании второго уравнения системы (а) выводим

$$\frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial s_\beta} = -\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} - \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} - \dot{u}_\alpha \frac{\partial\omega}{\partial s_\beta}.$$

Но согласно уравнениям (4.20) и (4.22) и учитывая, что рассматривается плоская деформация ($\varepsilon_y = 0$), можно написать

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = 0.$$

Поэтому из предыдущих двух уравнений получим

$$\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial s_\alpha} = \dot{u}_\beta \frac{\partial\omega}{\partial s_\alpha}; \qquad \frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial s_\beta} = -\dot{u}_\alpha \frac{\partial\omega}{\partial s_\beta}.$$

Из этих выражений окончательно получим искомые уравнения, которым должны удовлетворять скорости перемещений вдоль линий скольжения:

$$\left.\begin{aligned} d\dot{u}_\alpha - \dot{u}_\beta\, d\omega = 0 \ \text{(вдоль } \alpha\text{)};\\ d\dot{u}_\beta - \dot{u}_\alpha\, d\omega = 0 \ \text{(вдоль } \beta\text{)}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.27)$$

Эти уравнения принадлежат Г. Гейрингер. Они представляют собой также уравнения неразрывности и отражают, что скорости линейных деформаций вдоль линий скольжения равны нулю. Из уравнений Г. Гейрингер непосредственно следует, что в простых полях линий скольжения компоненты скоростей вдоль каждой из прямых линий скольжения постоянны. В центрированном поле эти скорости являются функциями только угла ω. С помощью уравнений Г. Гейрингер можно построить план скоростей по известному полю линий скольжения.

6.4.8. Разрывы напряжений и скоростей

Из сопротивления материалов известно, что при упругом изгибе бруса в условиях плоской деформации нормальные напряжения σ_1 изменяются по линейному закону, как показано на рис. 6.23, *а*, переходя от растяжения к сжатию через нуль на нейтральной линии. По мере увеличения изгибающего момента напряжения на поверхности σ_1 будут увеличиваться и в какой-то момент достигнут величины σ_s^* в зоне растяжения и $-\sigma_s^*$ в зоне сжатия (рис. 6.23, *а* — штриховая линия). При чистом пластическом изгибе упругие зоны полностью отсутствуют, а эпюра напряжений получит вид, представленный на рис. 6.23, *б*. На нейтральной поверхности нормальное напряжение $\sigma_1 = \sigma_s^*$ изменяется скачком от величины σ_s^* до величины $-\sigma_s^*$, т. е. наблюдается так называемый разрыв нормальных напряжений.

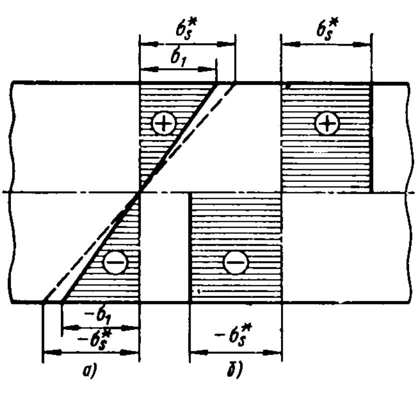


Рис. 6.23

Не всегда бывает возможно построить решение с непрерывными напряжениями, и поэтому в современной теории пластичности получили распространение так называемые **разрывные решения**.

Линию разрыва напряжений можно рассматривать как предельный случай, при котором тонкая упругая мембрана разделяет две пластические области [121]. В теории пластичности доказан ряд по-

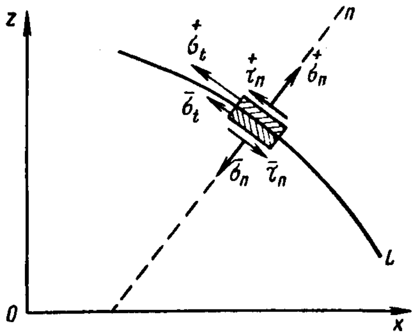


Рис. 6.24

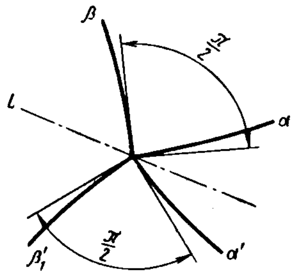


Рис. 6.25

ложений [113], характеризующих особенности, присущие разрыву напряжений.

На линии разрыва испытывают разрыв нормальные напряжения, направленные вдоль этой линии (тангенциальные). Нормальные напряжения, направленные к ней перпендикулярно, и касательные (сдвигающие) изменяются непрерывно.

Если на линии разрыва L выделить бесконечно малый прямоугольник (рис. 6.24) и обозначить напряжения, расположенные по разные стороны от этой линии, индексами $+$ и $-$, то

$$\sigma_t^+ \neq \sigma_t^-; \quad \sigma_n^+ = \sigma_n^- = \sigma_n;$$

$$\tau_n^+ = \tau_n^- = \tau_n.$$

Линия разрыва напряжений является биссектрисой L *угла, образованного одноименными линиями скольжения* α *и* α', β *и* β' (рис. 6.25), *а кривизна линий скольжения при переходе через линию разрыва, а следовательно, и угол* ω *изменяется скачком* [113].

Следует помнить, что в одной и той же точке поля линий скольжения не может быть одновременного разрыва напряжений и скоростей. Разрыв скоростей может происходить только вдоль линий скольжения или вдоль огибающей линии скольжения.

Пусть, например, деформируемый материал в точке P пересекает линию скольжения системы α и слева от нее вектором скорости перемещения является $\dot{u}$, а после пересечения, справа, $\dot{u}'$ (рис. 6.26).

Условие неразрывности требует, чтобы нормальные компоненты скорости при пересечении линии по обеим ее сторонам имели одинаковую величину, в противном случае был бы разрыв сплошности.

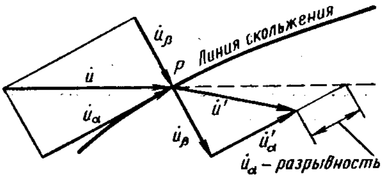


Рис. 6.26

Нормальной компонентой вектора скорости $\dot{u}$ по отношению к линии скольжения системы α будет компонента $\dot{u}_\beta$, значит, $\dot{u}_\beta = \dot{u}'_\beta$.

На основании уравнения Г. Гейрингер (6.27) пишем (рис. 6.26)

$d\dot{u}_\alpha = \dot{u}_\beta \, d\omega$ и $d\dot{u}'_\alpha = \dot{u}'_\beta \, d\omega$.

Следовательно, вдоль рассматриваемой линии скольжения системы α

$d\dot{u}_\alpha = d\dot{u}'_\alpha$;

отсюда

$$\dot{u}_\alpha - \dot{u}'_\alpha = \text{const}. \qquad (6.28а)$$

Аналогично для случая разрыва скорости на линии скольжения системы β получим

$$\dot{u}_\beta - \dot{u}'_\beta = \text{const}; \qquad (6.28б)$$

это решение принадлежит Х. Форду.

Из уравнений (6.28) явствует, что в случае возникновения разрыва скорости вдоль линии скольжения величина его остается постоянной (или равной нулю, когда разрыв отсутствует). Так как жесткопластической границей может быть линия скольжения (или огибающая линия скольжения), то разрыв скорости может происходить вдоль этой границы, нормальная же скорость обязательно должна оставаться непрерывной. Это положение следует учитывать также в случае любой предполагаемой жесткопластической границы при приближенных решениях любыми методами.

6.4.9. Построение годографа скоростей

Годограф скоростей в общем случае представляет собой диаграмму (график), в которой векторы скоростей перемещения точек деформируемого тела отображаются по величине и направлению прямолинейными отрезками (лучами), исходящими из выбранной на графике произвольной точки, называемой полюсом.

Каждой точке в поле линий скольжения соответствует точка, отображающая ее на годографе. Равно каждая линия скольжения получает свое отображение соответствующими линиями на годографе. Последние представляют собой скорости вдоль отображаемых линий скольжения.

Из сказанного видно, что в том случае, когда в какой-либо области металл перемещается без деформации как жесткое тело (т. е. вектор скорости перемещения всех точек один и тот же), то все точки этой области на годографе отображаются одной точкой. Графическое построение годографа скоростей основано на свойстве ортогональности отрезков линий скольжения их отображениям на годографе.

Для примера рассмотрим построение годографа скоростей для участка поля линий скольжения, изображенного на рис. 6.19, *а*. Узловые точки годографа обозначим так же, как и соответственные точки поля линий скольжения, добавляя индекс «прим». То же сделаем и в отношении линий годографа, отображающих те или иные линии скольжения.

Область металла, расположенная от линии скольжения β_4 вверх, жесткая, и все точки ее, если принять нижнюю плиту неподвижной, движутся с одинаковой скоростью, равной скорости опускания верхней плиты $\dot{u}_0$.

Линия скольжения β_4, представляя собой жесткопластическую границу, тем самым является линией разрыва. Принимаем точку O_1 за полюс (см. рис. 6.19, *б*), откладываем вертикально вниз отрезок O_1A', который будет представлять собой в масштабе вектор скорости. Так как все точки жесткой зоны движутся с одинаковой скоростью $\dot{u}_0$, то точка A' является отображением всех точек этой зоны. В данном случае целесообразно, чтобы отрезок O_1A' был равен масштабному размеру в поле линий скольжения, т. е. размеру h.

Построение начинаем [121] с точки контакта жестких зон (*4, 4*). Определяем нормальную и касательную компоненты скорости к линии β_4 в точке (*4, 4*), для чего из точек O_1 и A' проводим прямые под углом 45°, так как линия скольжения β_4 наклонена к оси симметрии под этим углом. В точке их пересечения получим точку (*4′, 4′*), отображающую точку (*4, 4*) поля линий скольжения. Нормальная к линии β_4 компонента скорости является касательной компонентой по линии α_4, т. е. это будет $\dot{u}_{\alpha\,(4,\,4)}$, а касательная компонента к линии β_4, т. е. $\dot{u}_{\beta\,(4,\,4)}$, является нормальной к линии α_4. При этом в точке (*4, 4*) скорости $\dot{u}_{\alpha\,(4,\,4)} = \dot{u}_{\beta\,(4,\,4)} = \dot{u}_0 \frac{1}{\sqrt{2}}$. В точке (*4, 4*) вертикальная компонента скорости $\dot{u}_{z\,(4,\,4)}$ определяется вектором O_1O', а горизонтальная $\dot{u}_{x\,(4,\,4)}$ вектором O' (*4′, 4′*), причем $\dot{u}_{x\,(4,\,4)} = \dot{u}_{z\,(4,\,4)} = 0{,}5\dot{u}_0$.

Так как в поле линий скольжения линия β_4 является линией разрыва, то скорость вдоль нее, т. е. $\dot{u}_{\beta 4}$, постоянна по модулю и равна модулю вектора $\dot{u}_{\beta\,(4,\,4)} = \dot{u}_0 \frac{1}{\sqrt{2}}$, отображаемого согласно выполненному построению лучом A' — (*4′, 4′*). Поэтому концы векторов скорости $\dot{u}_{\beta 4}$ для всех точек линий скольжения β_4 будут расположены на дуге окружности с центром в точке A' радиуса A' — (*4′, 4′*). Разделив эту дугу на участки соответственно шагу $\gamma = \pi/12$, принятому для построения поля линий скольжения, получим отображения узловых точек, расположенных на линии скольжения β_4: (*4′, 4′*), (*3′, 4′*), (*2′, 4′*), (*1′, 4′*). Далее в плоскости годографа проводим линии (*3′, 4′*)—(*3′, 3′*), (*2′, 4′*)—(*2′, 3′*), (*1′, 4′*)—(*1′, 3′*), ортогональные к соответственным отрезкам линий скольжения $(3, 3)$—$(3, 4)$ ... $(1, 3)$—$(1, 4)$, и линии $(3', 3')$—$(2', 3')$, $(2', 3')$—$(1', 3')$, тоже ортогональные к одноименным отрезкам линий скольжения. Точки пересечения проведенных линий определяют узловые точки годографа $(3', 3')$, $(2', 3')$, $(1', 3')$. Аналогично получают и все остальные узловые точки годографа.

Луч, проведенный из полюса O_1 к любой узловой точке годографа, например $(1', 2')$, будет вектором скорости смещения точки $(1, 2)$ в поле линий скольжения. Нетрудно определить и компоненты этого вектора по осям x, z, как показано на рис. 6.19, *б*. Построив в других квадрантах фигуры, симметричные выполненной, получим полный годограф.

На первый взгляд может показаться, что векторы скоростей $\dot{u}$ должны быть направлены симметрично относительно оси x, т. е. оси симметрии поля линий скольжения. Отсутствие этого объясняется тем, что точка O_1 принята неподвижной, и, следовательно, все точки, лежащие на оси симметрии поля линий скольжения, движутся относительно полюса со скоростью $\dot{u}_z = 0{,}5\dot{u}_0$. Принимая же ось симметрии за неподвижную, мы сможем проводить векторы скорости перемещения точки от полюса O', что покажет симметричное распределение скоростей относительно этой оси.

В рассмотренном примере поле линий скольжения и поле (годограф) скоростей являются совместными. Это видно из того, что количество металла, вытесняемого в вертикальном направлении, равно количеству металла, перемещаемого в горизонтальном направлении, поскольку

$$\frac{a}{2}\,\frac{\dot{u}_0}{2} = \frac{h}{2}\,\dot{u}_{x\,(0,\,0)}.$$

В рассмотренном случае годограф представляет собой ту же фигуру, что и фигура поля линий скольжения, изображенная на рис. 6.19, *г*, но повернутую на 180°. То же самое можно сказать в отношении поля линий скольжения, образованного дугами двух окружностей (см. рис. 6.21), годограф для которого представлен на рис. 6.27. Указанным выше способом легко установить, что

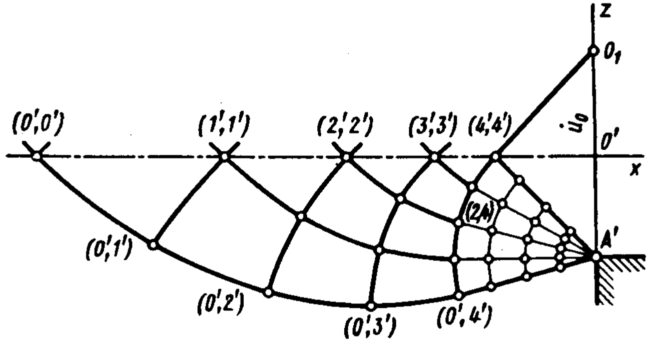


Рис. 6.27

и это поле скольжения удовлетворяет кинематическим условиям. Если же граничные условия для скоростей не удовлетворяются, то поле скольжения следует видоизменить.

Решения, отвечающие одновременно статическим и кинематическим условиям, т. е. совместностью поля линий скольжения и поля (годографа) скоростей, дают так называемую действительную величину усилий деформирования. Это надо понимать в том смысле, что такое решение не представляет собой только «нижней оценки» этого усилия (см. стр.212) и отличается от его «верхней оценки» в меньшую сторону. *Эта верхняя оценка определяется построением кинематически возможного поля линий скольжения, удовлетворяющего условиям сплошности и граничным условиям для перемещений, но не удовлетворяющего условиям равновесия* [121].

Однако не следует забывать, что все решения, выполняемые методом линий скольжения на основе жесткопластической схемы, как правило, являются приближенными, подобно решениям, получаемым другими методами.

6.5. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКИ*

Метод верхней оценки применительно к плоской деформации разработали В. Джонсон и Х. Кудо. Сущность его заключается в том, что объем очага деформации представляется в виде жестких (недеформируемых) блоков (треугольных по В. Джонсону), скользящих один относительно другого и по границам с жесткой зоной. Тем самым действительное поле линий скольжения заменяют полем, состоящим из системы прямолинейных отрезков, образующих треугольники. Вдоль границ блоков — сторон треугольников — компоненты скоростей перемещений претерпевают разрывы. Внутри каждого блока поле скоростей однородно, т. е. вектор скорости для всех точек данного блока один и тот же. На этом основании строят поле скоростей, которое при правильном построении всегда является кинематически возможным. Число и размеры треугольных блоков первоначально выбирают произвольно.

Вдоль границ между блоками касательные напряжения, возникающие при скольжении блоков, являются максимальными: $\tau_n = k$. На свободных поверхностях, как всегда, $\tau_n = 0$, а на контактных принимают от $\tau_n = \mu_s \sigma_s^*$ до предельного значения $\tau_n = k$.

Поскольку блоки приняты жесткими, мгновенная мощность внутренних сил, включая контактное трение, выразится уравнением

$$w = \sum \tau_n \dot{u}_n l_n b_n, \qquad (6.29)$$

* По А. Д. Томленову — приближенный энергетический метод [105].

где $\dot{u}_n$ — скорости скольжения вдоль границ треугольных участков, а l_n — длины сторон треугольников при плоской деформации, b_n — длина проекции площадки контакта (в направлении оси y).

Мощность, развиваемая деформирующей силой P,

$$w_A = P\dot{u}_0, \tag{6.30}$$

где $\dot{u}_0$ — скорость движения рабочего органа (скорость деформирования).

Приравнивая выражения (6.29) и (6.30) и решая уравнение относительно P, получим

$$P = \frac{\sum \tau_n \dot{u}_n l_n b_n}{\dot{u}_0}. \tag{6.31}$$

Для плоской деформации, обозначив ширину проекции площадки контакта вдоль оси x через a, можно выразить удельное усилие p:

$$p = \frac{\sum \tau_n \dot{u} l_n}{a\dot{u}_0}. \tag{6.32}$$

Для примера вернемся к задаче о внедрении плоского пуансона в полупространство и преобразуем непрерывное поле линии скольжения, предложенное Р. Хиллом, в кинематически возможное поле, состоящее из жестких треугольных блоков. Для этого заменим на рис. 6.16 дуги отрезками прямых. Тогда получим поле, представленное на рис. 6.28, *а*.

Вследствие симметрии поля относительно оси z на этом рисунке изображена его правая половина, что достаточно для дальнейших построений и расчетов. Цифрами обозначены: *0* — жесткая неподвижная зона; *1*, *2* и *3* — блоки; *4* — свободное пространство; *5* — пуансон. Границы между зонами и блоками определяются двумя цифрами, например 12 — границы между блоками *1* и *2*; 34 — свободная поверхность; 15 — контактная поверхность. Длину соответствующих границ (линий) обозначаем соответственно l_{12}, l_{23} и т. п.

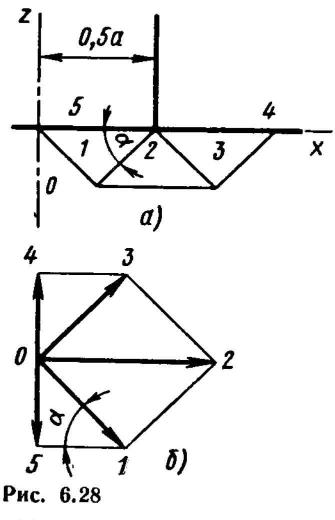


Рис. 6.28

Компоненты скоростей блоков, нормальные к жесткопластической границе, т. е. соответственно к линиям 10, 20, 30, равны нулю, и блоки движутся вдоль указанных границ. Вдоль границ 12 и 23 блоков происходит разрыв скоростей.

Для построения годографа (рис. 6.28, *б*) от центра *0* по вертикали отложили вектор 05 скорости пуансона $\dot{u}_{05}$, длину которого примем за единицу. Далее от конца вектора проводим линию, параллельную линии 15, а из точки *0* — линии 10. Пересечение этих линий определяет точку *1*, т. е. конец вектора скорости блока *1*. Продолжая построение подобным образом далее, получим изображенный на рис. 6.28, *б* годограф. Линии годографа 12, 23 обозначают относительные скорости блоков вдоль линий разрыва 12, 23 (рис. 6.28, *а*) $\dot{u}_{12}$ и $\dot{u}_{23}$.

Теперь найдем верхнюю оценку деформирующего усилия. Задачу решим в общем виде, принимая угол α при основании равнобедренных треугольников как параметр. Согласно выражению (6.32) удельное усилие

$$p \cdot 0{,}5a\dot{u}_{05} = (l_{01}\dot{u}_{01} + l_{02}\dot{u}_{02} + l_{03}\dot{u}_{03} + l_{12}\dot{u}_{12} + l_{23}\dot{u}_{23})\,\tau_n.$$

Принимая $\tau_n = k = 0{,}5\sigma_s^*$ и выражая скорости $\dot{u}$ через $\dot{u}_{05}$ и угол α, а длины l через a и α, после простейших преобразований получим

$$p = \frac{\sigma_s^*}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha\right). \tag{6.33}$$

Поле, изображенное на рис. 6.28, *а*, получено непосредственно из непрерывного поля по Р. Хиллу, и угол $\alpha = 45°$. Подставляя это значение в уравнение (6.33), получим

$$p = 3\sigma_s^*.$$

Изменяя угол α, можно получить другие значения p. Наиболее правильное, естественно, то значение, которое будет наименьшим.

В данном случае минимум функции (6.33), т. е. величины p, будет при угле $\alpha = 55°$:

$$p_{\alpha=55°} = 2{,}83\sigma_s^*, \tag{6.34}$$

что отличается в бо́льшую сторону на 10% от значения, полученного ранее на основе непрерывного поля линий скольжения (стр. 202).

Можно учесть контактное трение, введя в выражение в скобках в исходном уравнении еще один член $\tau_n ab\dot{u}_1$. Если принять трение максимальным, т. е. $\tau_n = k = \sigma_s^*/2$, то

$$p = (2{,}83 + 0{,}61)\,\sigma_s^* \approx 3{,}4\sigma_s^*. \tag{6.35}$$

Для рассмотренной задачи получено аналитическое решение. В других сложных случаях можно остановиться на чисто графическом решении, взяв значения сторон треугольников и скоростей непосредственно из чертежа. При этом необходимо построить несколько вариантов разрывного поля и годограф к нему, чтобы получить величину верхней оценки, близкую к наименьшей.

Достаточно удобный метод верхней оценки для осесимметричных задач разработал Х. Кудо. В дальнейшем его усовершенствовал Ш. Кобаяши.

6.6. МЕТОД СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМАЦИЯМ

Метод, разработанный и успешно развиваемый Г. А. Смирновым-Аляевым и его сотрудниками, назван его автором сопротивлением материалов пластическим деформациям [87—89]. Этот метод позволяет решать ряд практических задач на конечное формоизменение при обработке металлов давлением. К числу таких задач относятся определение деформирующего усилия по заданному формоизменению, определение деформации по заданной нагрузке или заданной работе внешних сил, определение формы тела на последовательных переходах по конечной его форме и др.

Метод сопротивления материалов пластическим деформациям применяет ряд оригинальных способов аналитического и экспериментального исследования. Сюда относятся микроструктурные исследования деформации металлов, определение функциональной зависимости σ_i—ε_i с аппроксимацией графика аналитическим выражением, установление критериев пластичности и начала разрушения металлов и др.

К числу основных предпосылок метода сопротивления материалов пластическим деформациям относятся приведенные ниже.

1. При условии монотонности или приближенной монотонности процесса деформации главные оси деформаций совпадают по направлению с главными осями напряжений. А это значит, что при монотонном процессе и для больших деформаций можно применить уравнения связи между напряжениями и деформациями, полученные для малых деформаций. Эти уравнения Г. А. Смирнов-Аляев берет в форме *

$$\frac{\delta_1 - \delta_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\sigma_3 - \sigma_2} = \frac{\delta_1 - \delta_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{2G'} = \rho. \qquad (6.36)$$

Уравнение (6.36) представляет собой несколько иначе написанное выражение (5.24), но в последнем имелись в виду малые деформации, когда $\varepsilon = \delta$, а в данном случае речь идет о конечных деформациях. Поэтому в выражение (6.36) введены логарифмические деформации δ (см. стр. 64).

Под монотонным (протекающим однозначно) подразумевается такой процесс деформации рассматриваемой малой материальной частицы, когда любые две ее материальные точки либо все время

* Обозначения взяты в соответствии с принятыми в нашей книге.

приближаются одна к другой, либо все время одна от другой удаляются, и если при этом вид деформации (растяжение, сдвиг, сжатие), определяемый показателем ν (стр. 145), остается неизменным.

Монотонность процесса значительно облегчает его анализ, особенно при деформации с упрочнением, если необходимо учитывать изменение величины σ_s или вычислять изменение размеров (например, уточнение при вытяжке листового материала). Немонотонность процесса может не только создать серьезные затруднения, но и сделать иногда задачу анализа процесса неразрешимой даже грубо приближенно. При осесимметричных операциях вытяжки, отбортовки листового материала деформацию можно считать приближенно монотонной [17] и, следовательно, пользоваться уравнением (6.36).

В тех случаях, когда можно рассматривать каждый данный момент процесса, немонотонность его существенной роли не играет. Однако вместо уравнения (6.36) для больших деформаций δ следует пользоваться выражением (5.24) для малых деформаций ε и только для суждения о соотношениях между напряжениями или деформациями в рассматриваемый момент. Таким образом можно анализировать большинство операций, осуществляемых при полном разупрочнении металла (горячей деформации).

2. Коэффициент пропорциональности, обозначенный в уравнении (6.36) через ρ, принимается функцией удельной работы изменения формы: $\rho = f_1(A_ф)$. Связь коэффициента с удельной работой изменения формы установлена Г. А. Смирновым-Аляевым на базе проведенных обширных экспериментов.

Рассматривая интенсивность деформаций δ_i в виде

$$\delta_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\delta_1-\delta_2)^2+(\delta_2-\delta_3)^2+(\delta_3-\delta_1)^2}, \tag{6.37}$$

которая соответствует обобщенной деформации по уравнению (4.11). Как величина δ_i, так и величина σ_i [см. уравнение (3.33)] — суть функции $A_ф$:

$$\sigma_i = f_2(A_ф); \quad \delta_i = f_3(A_ф)$$

и

$$\delta_i = \rho\sigma_i = f_1(A_ф)\, f_2(A_ф) = f_3(A_ф).$$

Функциональную зависимость $f(\delta_i, \sigma_i) = 0$ устанавливают экспериментально на основе опытов по простому растяжению, кроме того, Г. А. Смирнов-Аляев указывает методы приближенного ее построения. Эта зависимость широко используется при решении задач.

3. Напряженное и деформированное состояния рассматриваются в полном соответствии одно с другим с использованием показателя ν_σ из уравнения (5.20) для напряжений и показа-

теля ν_δ для деформаций δ, аналогичного показателю ν_ε по уравнениям (5.27), (5.28).

Соответствие напряженного и деформированного состояний будет только в том случае, когда

$$\nu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2\delta_2 - \delta_1 - \delta_3}{\delta_1 - \delta_3} = \nu_\delta. \qquad (6.38)$$

Здесь, как и раньше, σ_2 и δ_2 являются средними по алгебраической величине соответственно главным напряжением и главной логарифмической деформацией (см. стр. 133).

Для определения напряженно-деформированного состояния можно применить следующий общий ход решения. Выделить в конечно-деформируемой заготовке достаточно малые частицы, представляющие наибольший интерес, размер которых в пределах каждой из них обеспечивает монотонность процесса.

Из геометрических соображений или непосредственно из опыта установить направления наибольшего удлинения и укорочения и вычислить значения δ_1, δ_2 и δ_3.

Вычислить показатель схемы деформированного состояния

$$\nu_\delta = \frac{2\delta_2 - \delta_1 - \delta_3}{\delta_1 - \delta_3}.$$

Определить коэффициент β по уравнению (5.21), исходя из того, что

$$\nu_\sigma = \nu_\delta.$$

Тогда можно будет определить

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta\sigma_s;$$

$$2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 = \nu_\sigma (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Окончательно все три компоненты напряжений были бы известны, если бы была известна сумма $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, которую, однако, нельзя определить из условия деформированного состояния частицы.

Для ее определения пользуются условиями равновесия выделяемых малых частиц тела. Переходя от одной частицы к другой, можно определить напряженное состояние тела в целом.

В тех случаях, когда необходимо рассмотреть напряженно-деформированное состояние частиц, расположенных вблизи поверхности деформируемого тела, решение задачи значительно упрощается.

6.7. МЕТОД БАЛАНСА РАБОТ

Метод баланса работ, основанный в конечном итоге на законе сохранения энергии, давно применяли многие исследователи, в том числе, например, С. Н. Петров [68], Э. Зибель [28], А. Ф. Головин [8], И. Л. Перлин [67] и ряд других.

Исходным положением этого метода, который называют также энергетическим, является следующее: *при пластической деформации работа внешних сил на соответствующих им перемещениях равна работе внутренних сил*:

$$A_B = A_D. \tag{6.39}$$

Работа A_D представляет собой работу внутренних сил, иначе говоря — работу пластической деформации. Работа A_B — это работа внешних (поверхностных) сил, включая и работу внешних сопротивлений (т. е. сил контактного трения) A_T, которая противоположна по знаку работе активных (деформирующих) сил A_A. Учтя сказанное и рассматривая абсолютные значения работ, уравнение (6.39) можно переписать так:

$$A_A - A_T = A_D. \tag{6.40}$$

Здесь, как и дальше, принимают условие постоянства объема и упругую деформацию не учитывают. Следовательно, A_D представляет собой работу деформации формы.

Ранее было указано (стр. 125), что удельная потенциальная энергия упругой деформации равна половине скалярного произведения компонент напряжений на компоненты соответствующих деформаций. Этим положением можно воспользоваться и для нахождения работы A_D. Однако в данном случае следует брать скалярное произведение полностью, а не половину его [1].

Пусть для элементарного объема dV величина работы деформации dA_D. Тогда, используя главные напряжения и деформации, на основании предыдущего можно написать

$$dA_D = (\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)\, dV.$$

Подставляя значения деформаций из уравнения (5.25а) и учитывая, что на основании уравнения (5.29)

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},$$

получим после раскрытия скобок

$$dA_D = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right) dV,$$

откуда

$$dA_D = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] dV.$$

Так как по уравнению (3.33)

$$0{,}5\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \sigma_i^2,$$

[1] При упругом деформировании напряжения увеличиваются от нуля прямо пропорционально деформациям, при пластической же деформации напряжения отличны от нуля и на малых этапах их можно принять постоянными.

то окончательно получим

$$dA_D = \sigma_i \varepsilon_i \, dV,$$

откуда работа деформации для всего объема V

$$A_D = \iiint\limits_V \sigma_i \varepsilon_i \, dV.$$

Наконец, поскольку согласно условию пластичности (5.1) $\sigma_i = \sigma_s$,

$$A_D = \iiint\limits_V \sigma_s \varepsilon_i \, dV. \qquad (6.41)^*$$

Если упрочнение отсутствует, то σ_s можно вынести за знак интеграла.

Работа внешних (поверхностных) сил в общем виде определяется так:

$$A_B = \iint\limits_F (Xu_x + Yu_y + Zu_z) \, dF, \qquad (6.42)$$

где X, Y и Z — проекции сил, действующих по участку поверхности dF, на оси координат, а u_x, u_y и u_z — соответствующие им перемещения в направлении этих осей.

Работу внешних сил (поверхностных) часто можно выразить значительно проще, не прибегая к интегрированию уравнения (6.42).

Во всех приведенных уравнениях можно заменить деформации ε *скоростями деформаций* $\dot{\varepsilon}$ *и перемещения и скоростями перемещений* $\dot{u}$. *Тогда вместо работ получим соответствующие мощности* w. *Мощность внутренних сил* w_D *называют мощностью пластической деформации.*

Определим усилие P, необходимое для горячей осадки цилиндрической заготовки диаметром d и высотой h [101]. Деформация осесимметричная. Поэтому используем цилиндрические координаты ρ, θ и z. Ось z расположим по оси заготовки. Примем следующие допущения: величину элементарных сил трения, т. е. касательных напряжений на контактных поверхностях (торцах цилиндра) $\tau_к$, будем считать постоянной (не зависящей от координат): $\tau_к = \text{const}$; деформацию же, несмотря на наличие контактного трения, примем однородной.

Пусть высота цилиндра уменьшится на весьма малую величину Δh. Тогда работа внешней активной силы

$$A_A = P \, \Delta h.$$

---

* Выражение (6.41) можно представить иначе в виде $A_D = \iiint\limits_V k\gamma_i \, dV$, где γ_i — интенсивность деформаций сдвига.

Работа деформации согласно (6.41)

$$A_D = \sigma_s \iiint\limits_V \varepsilon_i \rho \, d\rho \, d\theta \, dz.$$

Работу трения (на двух торцах) определим по формуле (6.42), учтя, что перемещения точек происходят по радиусам и элементарные силы трения также будут направлены по радиусам:

$$A_T = 2\tau_к \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{0,5d} - u_\rho \rho \, d\rho \, d\theta.$$

Для определения ε_i и u_ρ в условие постоянства объема подставим деформации ε_ρ и ε_θ из выражений (4.4):

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \varepsilon_z = 0.$$

Так как на контактных поверхностях ε_z не может зависеть от z, то при сделанном допущении однородности деформации ε_z следует считать вообще не зависящей от координат, т. е. постоянной по всему объему осаживаемой заготовки:

$$\varepsilon_z = \frac{du_z}{dz} = \mathrm{const} = -\frac{\Delta h}{h}.$$

Подставляем $\varepsilon_z = -\Delta h/h$ в предыдущее уравнение и несколько преобразуем его:

$$\frac{\partial (u_\rho \rho)}{\partial \rho} - \frac{\Delta h}{h} \rho = 0,$$

откуда после интегрирования

$$u_\rho = \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h} \rho + f(z).$$

На оси заготовки при $\rho = 0$ перемещение $u_\rho = 0$, и, следовательно, $f(z) = 0$. Окончательно получаем

$$u_\rho = \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h} \rho;$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{u_\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h};$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\rho = \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h}.$$

Подставляя значения деформаций ε_z, ε_ρ и ε_θ в формулу (4.11), определим

$$\varepsilon_i = \pm \varepsilon_z = -\frac{\Delta h}{h},$$

что уже указано на стр. 116. Используя найденные величины и уравнение (6.40), получаем

$$P\,\Delta h = -\sigma_s \frac{\Delta h}{h} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{0,5d} \int\limits_0^{h} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz - \tau_\text{к} \frac{\Delta h}{h} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{0,5d} \rho^2\, d\rho\, d\theta,$$

откуда после интегрирования

$$P = -\frac{\pi d^2}{4}\left(\sigma_s + \frac{1}{3}\tau_\text{к}\frac{d}{h}\right),$$

а удельное усилие деформирования (опускаем знак минус, означающий сжатие)

$$p = \sigma_s + \frac{1}{3}\tau_\text{к}\frac{d}{h}. \tag{6.43}$$

В дальнейшем вопрос об удельном усилии деформирования при осадке будет разобран подробно.

Используем теперь начало возможных перемещений. Пусть тело находится в пластическом равновесии под действием заданных внешних сил и перемещений. Будем считать, что точкам тела сообщены дополнительные бесконечно малые и непрерывные кинематически возможные, т. е. совместимые с граничными условиями, смещения δu_x, δu_y и δu_z. Тогда работа внешних сил получит приращение

$$\delta A_B = \iint\limits_F (X\delta u_x + Y\delta u_y + Z\delta u_z)\, dF.$$

В свою очередь, работа внутренних сил получит приращение

$$\delta A_D = \iiint\limits_V \sigma_s \delta\varepsilon_i\, dV.$$

Согласно началу возможных перемещений *сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях*[1] *около состояния равновесия равна нулю* [34].

Это можно выразить следующим образом:

$$\iiint\limits_V \sigma_s \delta\varepsilon_i\, dV - \iint\limits_F (X\delta u_x + Y\delta u_y + Z\delta u_z)\, dF = 0, \tag{6.44}$$

или иначе

$$\delta\left[\iiint\limits_V \sigma_s \varepsilon_i\, dV - \iint\limits_F (Xu_x + Yu_y + Zu_z)\, dF\right] = 0. \tag{6.44а}$$

Величина в квадратных скобках носит название полной энергии $Э$, и сокращенно уравнение (6.44) можно написать в форме

$$\delta Э = 0. \tag{6.44б}$$

[1] Например, для случая осадки смещения по координатам ρ и θ являются кинематически возможными, а по координате Z они кинематически запрещены.

Уравнение (6.44) показывает, что *действительная форма равновесия пластически деформируемого тела отличается от всех других мыслимых форм тем, что сообщает полной энергии минимальное значение* [34]. Это один из так называемых экстремальных принципов.

Практическое использование экстремальных принципов для решения задач в теории обработки металлов давлением начато сравнительно недавно в работах И. Я. Тарновского, А. А. Поздеева, О. А. Ганаго [101, 102] и др.— в одном плане; Л. Г. Степанского [95] и др.— в другом; Г. Я. Гуна [19] и др.— в третьем.

Метод баланса работ при использовании экстремальных принципов, в частности, дает возможность в большей степени, чем другие, приближенно описывать формоизменение в процессе деформации, например бочкообразность при осадке.

Однако уравнение (6.44) является вариационным и, таким образом, применение принципа наименьшей энергии требует часто использования методов вариационного исчисления, и все же решения, как и при использовании всех других методов, можно получить только приближенные. В ряде случаев минимизацию решения можно выполнить элементарным путем [1].

6.8. ПОНЯТИЕ О ВИЗИОПЛАСТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

Этот экспериментально-аналитический метод, предложенный Э. Томсеном с сотрудниками [106], заключается в том, что при помощи координатной сетки, которую помещают на соответствующую плоскость образца, например на меридиональную или ей нормальную плоскость цилиндрического образца, экспериментальным путем устанавливают векторное поле скоростей. Плоскость, на которую наложена координатная сетка, после каждого очередного приращения деформации фотографируют и по смещению положения узлов получают картину течения металла.

Последующим анализом для точек, которые расположены достаточно близко одна к другой, можно построить зависимости компонент скоростей $\dot{u}_x$ и $\dot{u}_y$, а затем определить и скорости деформаций. В дальнейшем, используя уравнения связи, можно определить напряжения по методике, даваемой Э. Томсеном. По мнению Э. Томсена, единственным допущением, требуемым при решениях методом визиопластичности, является установление зависимостей между напряжением и деформацией.

Однако Е. П. Унксов считает, что необходимость прерывать процесс деформации для постадийного фотографирования изменений координатной сетки вносит существенные изменения в условия контактного трения [2].

---

[1] Желающим изучить метод рекомендуем обратиться к литературе [102].
[2] Примеры решений, выполненных визиопластическим методом, см. в работе [106].

6.9. КРАТКОЕ СОПОСТАВЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ

Метод составления и совместного решения приближенных уравнений равновесия и пластичности для анализа силового режима процессов обработки металла давлением является наиболее простым и наглядным. Он позволяет находить непосредственным интегрированием уравнения, выражающие распределение напряжений на контактной поверхности, и получать уравнения зависимости удельных усилий от различных факторов, играющих роль в том или ином технологическом процессе. В известной мере этот метод пригоден и для решения простейших задач по формоизменению, например по нахождению разделов течения. Приемлемость получаемых решений подтверждается расчетами, проведенными с использованием других методов, например метода линий скольжения. Однако метод совместного решения приближенных уравнений равновесия и пластичности принципиально не пригоден для получения распределения напряжений по объему деформируемого тела. Кроме того, есть некоторые задачи, которые этим методом разрешить не удается, например определить усилие внедрения пуансона в полупространство, что выполнимо методом линий скольжения.

Метод линий скольжения в инженерном его выражении является вполне доступным и часто позволяет находить распределение напряжений в объеме тела, решать некоторые вопросы, касающиеся формоизменения и распространения очага деформации. Однако получение замкнутых решений возможно лишь в отдельных случаях. Обычно после получения эпюры нормальных напряжений на поверхности необходимо подобрать подходящую алгебраическую зависимость для ее выражения.

Метод приближенных уравнений и метод линий скольжения не исключают друг друга, наоборот, вполне целесообразно их совместное использование.

Метод сопротивления материалов пластическим деформациям позволяет, как указывалось ранее (стр. 222), решать разнообразные задачи. В частности, его ценной особенностью является широкое использование экспериментальных данных, а также применение разнообразных вспомогательных таблиц. Метод этот, кроме того, нагляден и вполне доступен для изучения.

Этого нельзя сказать про метод баланса работ с использованием экстремальных принципов, который вместе с тем требует многочисленных математических выкладок даже при введении ряда дополнительных упрощающих предпосылок и допущений. В дальнейшем область его полезного использования будет расширяться, особенно в связи с применением ЭВМ.

Таким образом, в теории обработки металлов давлением находят применение разные и отнюдь не взаимно исключающие друг друга методы анализа технологических процессов.

Глава 7
ОПЕРАЦИИ КОВКИ И ОБЪЕМНОЙ ШТАМПОВКИ*

7.1. ОСАДКА

Осадкой называют технологическую операцию, при помощи которой уменьшают высоту исходной заготовки с одновременным увеличением площади ее поперечного сечения.

По схеме деформации осадка представляет собой сжатие — деформация в направлении активного усилия отрицательна, а две другие деформации положительны. В частных случаях возможно равенство последних между собой (простое сжатие) или равенство одной из них нулю (плоская деформация).

В идеальном случае, при отсутствии сил трения, схема главных напряжений при осадке соответствует схеме столбца *V* ряда *4* ** по рис. 5.12 (линейное сжатие *V.4*). Во всех остальных случаях преобладающие схемы главных напряжений при осадке представляют собой схемы всестороннего неравномерного сжатия (*III*, *7*, *IV*, *7* и *V*, *7*).

7.1.1. Осадка прямоугольной полосы неограниченной длины

Поскольку длина заготовки предполагается неограниченной, постольку деформацию можно считать плоской, т. е. равной нулю в направлении длины заготовки (схема *III*, *7*). Искажением формы сечения пренебрегаем. Процесс деформации рассматриваем в каждый данный момент, следовательно, получим результаты, отвечающие всему периоду процесса. Оси координат расположим, как показано на рис. 7.1. Ось z направлена по высоте заготовки, т. е. по направлению активной силы.

---

* В этой главе рассмотрены простейшие задачи по определению усилий при некоторых операциях ковки и объемной штамповки, в основном для иллюстрации применения различных методов теории обработки металлов давлением. Приведенные решения отнюдь не исключают других, более сложных и точных решений. Следует, однако, заметить, что излишнее стремление к формальной теоретической точности расчетов в ряде случаев превращает выполняемое решение в математическое упражнение, оторванное от практических целей.

** В дальнейшем при ссылках на рис. 5.12 схемы напряжений будут обозначаться двумя рядом поставленными цифрами: первая цифра — римская — будет означать столбец, вторая — арабская — ряд.

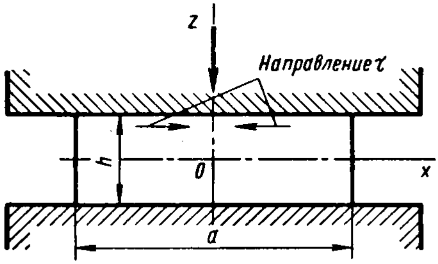


Рис. 7.1

Если бы трение на контактной поверхности отсутствовало, то напряженное состояние было бы двухосным (*III*, *6*). Трение же меняет схему напряженного состояния на схему *III*, *7*.

Направление элементарных сил трения на контактной поверхности заготовки, а следовательно, и контактных касательных напряжений показано на рис. 7.1. Согласно правилу знаков (стр. 78) касательные напряжения на половине фигуры справа от оси отрицательны, а слева положительны. В силу симметрии сечения относительно координатных осей достаточно рассматривать лишь первый квадрант.

Решение с применением точных уравнений равновесия и условия пластичности.

При заданных осях дифференциальные уравнения равновесия напишутся так (3.50):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Первое уравнение дифференцируем по z, второе по x:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x\, \partial z} = 0.$$

Из первого вычитаем второе

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 (\sigma_x - \sigma_z)}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2}. \qquad \text{(а)}$$

Пишем условие пластичности (5.12)

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = 4k^2,$$

откуда

$$(\sigma_x - \sigma_z) = \pm 2\sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2}. \qquad \text{(б)}$$

Поскольку σ_x и σ_z отрицательны, а $|\sigma_z| > |\sigma_x|$, то разность $\sigma_x - \sigma_z$ положительна и знак перед корнем плюс.

Подставляем $\sigma_x - \sigma_z$ из (б) в (а):

$$\frac{2\partial^2 \sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2}}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} \tag{в}$$

и получаем одно уравнение с одним неизвестным.

Это уравнение разрешимо в том случае, если принять, что τ_{xz} не зависит от x и является функцией только z:

$$\tau_{xz} = f(z);\quad \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = 0.$$

В этом случае левая часть уравнения (в) обратится в нуль, и мы получим уравнение

$$\frac{d^2 \tau_{xz}}{dz^2} = 0.$$

Решая его, имеем

$$\tau_{xz} = C_1 + C_2 z.$$

Плоскость xy в силу симметрии является главной, т. е. при $z = 0$ и $\tau_{xz} = 0$, отсюда $C_1 = 0$.

Пусть на контактной поверхности, т. е. при $z = 0{,}5$, касательное напряжение τ_{xz} имеет какую-то определенную величину $\tau_к$, тогда

$$C_2 = \frac{2\tau_к}{h},$$

и для τ_{xz} получим решение

$$\tau_{xz} = \frac{2\tau_к}{h} z; \tag{г}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{d\tau_{xz}}{dz} = \frac{2\tau_к}{h}. \tag{д}$$

Внося (г) и (д) в условия равновесия и учитывая, что $\partial \tau_{xz}/\partial x = 0$, имеем

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{2\tau_к}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$\sigma_x = -\frac{2\tau_к}{h} x + \varphi_1(z);$$

$$\sigma_z = \varphi_2(x), \tag{е}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(x)$ — произвольные функции (см. примечание на стр. 189).

Для определения произвольных функций используем условие пластичности (5.12), которое должно тождественно удовлетворяться при подстановке в него полученных значений σ_x, σ_z и τ_{xz}:

$$-\frac{2\tau_к x}{h}+\varphi_1(z)-\varphi_2(x)\equiv 2\sqrt{k^2-\frac{4\tau_к^2}{h^2}z^2}.$$

Располагаем члены этого уравнения следующим образом:

$$-\frac{2\tau_к x}{h}-\varphi_2(x)\equiv 2\sqrt{k^2-\frac{4\tau_к^2}{h^2}z^2}-\varphi_1(z),$$

откуда видно, что уравнение будет тождественно удовлетворяться, если положить

$$\varphi_2(x)=-\frac{2\tau_к x}{h}+C;$$

$$\varphi_1(z)=2\sqrt{k^2-\frac{4\tau_к^2}{h^2}z^2}+C.$$

Подставляя эти значения произвольных функций в уравнения (е) и учитывая уравнение (г), имеем

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{2\tau_к}{h}x+2\sqrt{k^2-\frac{4\tau_к^2}{h^2}z^2}+C;\\ \sigma_z&=-\frac{2\tau_к}{h}x+C;\\ \tau_{xz}&=\frac{2\tau_к}{h}z.\end{aligned}\right\}\qquad (ж)$$

Таким образом, нормальное напряжение σ_z является линейной функцией x и не зависит от z, а касательное τ_{xz} представляет линейную функцию z и не зависит от x. Решение (ж) получил Л. Прандтль [103].

Казалось бы, что по данному решению, выполненному без каких-либо допущений, а лишь при физически вполне возможном условии постоянства касательных напряжений на контактной поверхности, можно получить как эпюру нормальных напряжений на контактной поверхности, так и распределение напряжений внутри заготовки. Однако для заготовки **конечной** ширины краевым условием является отсутствие нормальных и касательных напряжений на свободных боковых поверхностях. Между тем третье уравнение системы (ж) показывает рост касательных напряжений τ_{xz} на свободных поверхностях от нуля при $z=0$ до максимума $\tau_{xz}=k$ при $z=0{,}5h$ в соответствии с принципом парности касательных напряжений. Кроме того, при определении постоянной C из условия, что на свободной поверхности нормальное к ней напряжение $\sigma_x=0$, получим нереальные значения для напряжений σ_z по второму уравнению системы (ж).

Дело заключается в том, что точное решение системы уравнений равновесия (3.50) при условии пластичности (5.12) в виде уравнений (ж) определяет лишь то напряженное состояние, которое асимптотически осуществляется на достаточно большом расстоянии от свободных поверхностей весьма широкой полосы.

Для получения на основе системы (ж) практически пригодного, но приближенного решения используем лишь одно второе уравнение системы (ж)

$$\sigma_z = -\frac{2\tau_к}{h}x + C, \qquad (7.1а)$$

пренебрегая остальными.

При отсутствии трения напряжение σ_z оставалось бы постоянным и равным $-\sigma_s^*$. Можно предположить, что в крайних точках контактной поверхности, т. е. при $x = \pm 0{,}5a$, и при наличии трения начальное значение напряжения σ_z также равно $-\sigma_s^*$, и с этого значения абсолютная величина его растет по мере уменьшения координаты x.

Итак, полагая, что при $x = 0{,}5a$ напряжение $\sigma_z = -\sigma_s^*$, по уравнению (7.1а) получим

$$C = -\sigma_s^* + \frac{\tau_к a}{h},$$

а подставляя это значение постоянной в уравнение (7.1а), имеем

$$\sigma_z = -\sigma_s^* + \frac{\tau_к(a-2x)}{h}.$$

Так как $\tau_к$ принято постоянным, то его можно выразить только через σ_s^* по уравнению (5.46), которое для плоского деформированного состояния получит вид

$$\tau_к = -\mu_s\sigma_s^*.$$

Подставив это выражение $\tau_к$ в уравнение (7.1а), найдем окончательное значение σ_z:

$$\sigma_z = -\sigma_s^*\left[1 + \frac{\mu_s(a-2x)}{h}\right]. \qquad (7.1б)$$

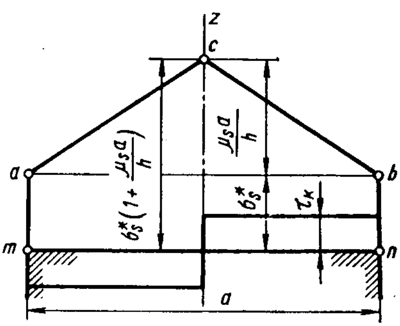


Рис. 7.2

На рис. 7.2 представлена эпюра распределения нормальных напряжений на контактной поверхности полосы по формуле (7.1б). Левая часть эпюры построена симметрично правой. При отсутствии контактного трения напряжения σ_z по всей ширине полосы были бы одинаковы и равны σ_s^* (линия ab). Наложенный на линию ab треугольник acb отражает влияние трения. Поскольку при плоском деформированном состоянии напряжения не зависят от координаты y, эпюра будет одна и та же для всех сечений, нормальных к оси y.

Определить деформирующую силу можно по интегралу (6.1а). Однако в данном весьма простом случае пользоваться выражением (6.1а) не обязательно. Действительно, площадь фигуры $mnbca$ представляет собой не что иное, как деформирующую силу, отнесенную к единице длины l заготовки. Исходя из чертежа рис. 7.2, можно написать

$$P = l\left(\sigma_s^* a + \mu_s \sigma_s^* \frac{a}{h}\frac{a}{2}\right) = al\sigma_s^*\left(1 + \frac{\mu_s a}{2h}\right)$$

(знак минус опущен, как не имеющий значения).

Удельное усилие p определяется делением P на al:

$$p = \sigma_s^*\left(1 + \frac{\mu_s a}{2h}\right). \tag{7.2а}$$

При максимальном возможном значении фактора трения $\mu_s = 0,5$

$$p = \sigma_s^*\left(1 + \frac{1}{4}\frac{a}{h}\right). \tag{7.2б}$$

Формула (7.2б) является основной для определения удельного усилия осадки заготовок значительной длины с прямоугольным сечением при горячей деформации.

Решение с использованием приближенных уравнений равновесия и условия пластичности.

В соответствии с изложенным на стр. 180 при применении этого метода ищем распределение нормальных напряжений только на контактной поверхности. На этой поверхности напряжения не зависят от координаты z, так как эта координата здесь постоянна и равна $0,5h$. Следовательно, для контактной поверхности

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{d\sigma_x}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} = \frac{d\sigma_z}{dx}.$$

Касательное напряжение на контактной поверхности обозначим через $\tau_к$, т. е. $\tau_{xz} = \tau_к$ при $z = 0,5h$. Напряжение τ_{xz} по мере удаления от каждой из контактных поверхностей будет по абсолютной величине уменьшаться и на оси x при $z = 0$ обратится в нуль, поскольку ось x является горизонтальной осью симметрии сечения полосы (см. рис. 7.1).

Допустим, что напряжение τ_{xz} является линейной функцией z:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{2\tau_к}{h}.$$

Подставляя приведенные данные в первое уравнение системы (3.50), получим уравнение

$$\frac{d\sigma_x}{dx}+\frac{2\tau_к}{h}=0,$$

которое и есть приближенное уравнение равновесия. Приняв условие пластичности для точек контактной поверхности в форме (6.11б)

$$\frac{d\sigma_x}{dx}=\frac{d\sigma_z}{dx},$$

получим

$$\frac{d\sigma_z}{dx}+\frac{2\tau_к}{h}=0. \qquad (7.3)$$

Для решения этого уравнения необходимо принять то или иное распределение касательных напряжений на контактной поверхности. Предположим, что $\tau_к$ пропорционально нормальному давлению на поверхности контакта. Так как знаки при $\tau_к$ и σ_z одинаковы (отрицательны) [1], то $\tau_к=\mu\sigma_z$.

Подставляя это значение $\tau_к$ в уравнение (7.3), получим

$$\frac{d\sigma_z}{dx}+\frac{2\mu\sigma_z}{h}=0.$$

Интегрируя, имеем

$$\sigma_z=C\exp-\frac{2\mu x}{h}.$$

Полагая, как и в предыдущем решении (см. стр. 235), что при $x=0{,}5a$ $\sigma_z=-\sigma_s^*$, найдем,

$$C=-\sigma_s^*\exp\frac{\mu a}{h};$$

$$\sigma_z=-\sigma_s^*\exp\frac{2\mu(0{,}5a-x)}{h}. \qquad (7.4)$$

Эпюра напряжений σ_z по уравнению (7.4) представлена на рис. 7.3 кривой $a'b'O'''$. Там же показана эпюра касательных напряжений $\tau_к=\mu\sigma_z$ — кривая dem. Эпюры вычислены для случая $a/h=10$ и $\mu=0{,}2$.

Рис. 7.3 показывает, что интенсивность роста напряжения σ_z, а также и $\tau_к$ увеличивается к оси симметрии сечения полосы z по мере удаления от края полосы. При этом в точке b контактной поверхности при $x=x_b$ касательное напряжение достигает значения $\tau_к=\tau_b=0{,}5\sigma_s^*$, а напряжение σ_z значения $\sigma_z=\sigma_b=0{,}5\sigma_s^*/\mu$, так как $\tau_b=\mu\sigma_b$. Ближе к оси z при значениях $x<x_b$

---

[1] Здесь, как и везде в этой книге, принимается алгебраическая величина напряжений.

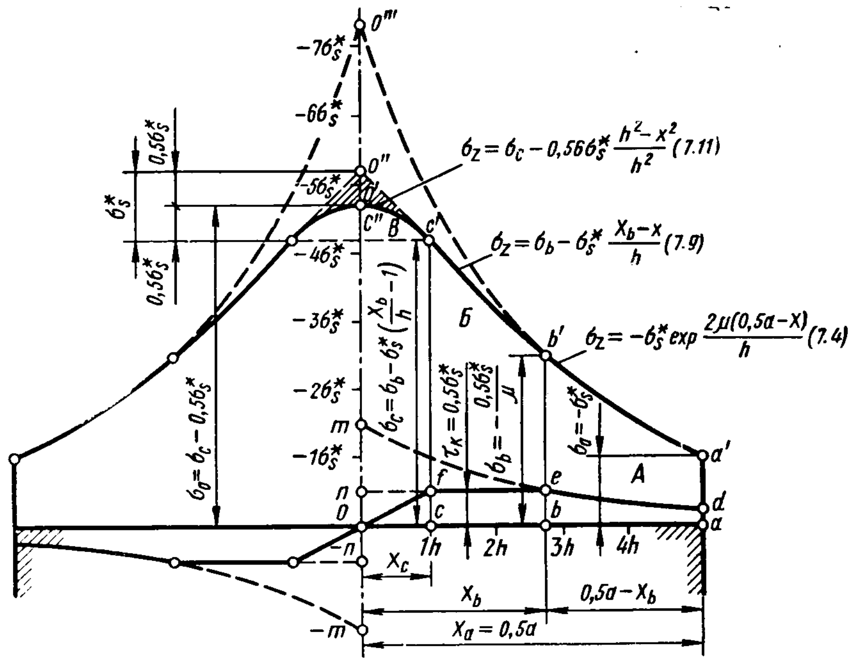


Рис. 7.3

абсолютная величина $\tau_к$, если пользоваться для σ_z уравнением (7.4), получит значения, превышающие $0{,}5\sigma_s^*$.

Ранее же (стр. 132) было указано, что при пластической деформации абсолютная величина касательного напряжения не может быть больше $k = 0{,}5\sigma_s^*$. Отсюда следует, что предпосылка $\tau_к = \mu\sigma_z$, принятая при выводе формулы (7.4), равно как и сама формула (7.4), действительны лишь при таких значениях x, при которых $|\mu\sigma_z| < 0{,}5\sigma_s^*$ или (что то же самое) $|\sigma_z| < 0{,}5\sigma_s^*/\mu$. Для этого необходимо соблюсти неравенство

$$\sigma_s^* \exp \frac{2\mu\,(0{,}5a - x)}{h} \leqslant \frac{0{,}5\sigma_s^*}{\mu}.$$

Решая это неравенство относительно x, получим [108]

$$x \geqslant 0{,}5a + \frac{h \ln 2\mu}{2\mu}. \qquad (7.5)$$

Обозначив

$$\frac{\ln 2\mu}{2\mu} = -\psi, \qquad (7.6)$$

можно представить неравенство (7.5) в виде

$$x \geqslant 0{,}5a - \psi h. \qquad (7.5а)$$

Таким образом,

$$x_b = 0{,}5a - \psi h, \tag{7.7}$$

а расстояние точки b от края контактной поверхности (от точки a)

$$(0{,}5a - x_b) = \psi h. \tag{7.7а}$$

Вычисленные значения ψ приведены ниже [108]:

μ	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,5
ψ	23,0	8,05	4,02	2,30	1,39	0,85	0,51	0,28	0,12	0

Чем больше коэффициент контактного трения, тем на меньшем участке контактной поверхности действительно выражение $\tau_к = \mu\sigma_s$, т. е. тем скорее касательные напряжения достигают предельного значения $|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^*$. При $\mu = 0{,}5$ касательное напряжение получает это значение уже по краю заготовки в точке a, т. е. при $x_b = x_a = 0{,}5a$.

В общем случае, начиная с точки b, касательное напряжение $\tau_к$ будет оставаться постоянным, и, следовательно, для установления закона изменения нормальных напряжений для значений $x \leqslant 0{,}5a - \psi h$ необходимо в уравнение (7.3) подставить

$$\tau_к = -0{,}5\sigma_s^*,$$

тогда получим

$$\frac{d\sigma_z}{dx} - \frac{\sigma_s^*}{h} = 0;$$

интегрируя, имеем

$$\sigma_z = \sigma_s^* \frac{x}{h} + C. \tag{7.8}$$

При $x = x_b$ напряжение $\sigma_z = \sigma_b$, откуда

$$C = \sigma_b - \sigma_s^* \frac{x_b}{h}.$$

Следовательно,

$$\sigma_z = \sigma_b - \sigma_s^* \frac{x_b - x}{h}. \tag{7.9}$$

Таким образом, при $\tau_к = \text{const}$ нормальные напряжения на контактной поверхности изменяются по линейному закону. На рис. 7.3 эпюра напряжений σ_z, вычисленная по формуле (7.9), представляется прямой линией $b'O''$, касательной в точке b' к кривой $a'b'O''$. В силу симметрии к точке O'' будет примыкать левая ветвь эпюры, являющаяся зеркальным отображением правой.

При рассмотрении построенной эпюры напряжений (рис. 7.3) вызывает сомнение реальная возможность пересечения под углом двух ветвей эпюры на оси z в точке O''. Казалось бы, что функция

σ_z и в этой точке должна быть непрерывной и иметь максимум, т. е. две ветви эпюры должны соединяться плавным переходом.

Касательные напряжения на поверхности контакта имеют разные знаки справа и слева от оси z, так как направлены противоположно. Таким образом, при $x = 0$ касательное напряжение должно перейти через 0. На эпюрах (рис. 7.3) этот переход осуществляется с нарушением непрерывности функции $\tau_к$, реальность чего также маловероятна.

На основании сказанного возникает предположение, что в действительности вблизи оси z при каких-то значениях $|x| > 0$ начнется падение значений $\tau_к$ с плавным переходом через 0 при $x = 0$. Если это принять, то при $\tau_к = 0$ и $x = 0$ из уравнения (7.3) получим

$$\frac{d\sigma_z}{dx} = 0,$$

а это значит, что функция σ_z на оси z будет иметь экстремум, и обе ветви эпюры σ_z плавно перейдут одна в другую.

Предположение о наличии падения значений абсолютной величины касательных напряжений на поверхности контакта при приближении к оси z подтверждается как экспериментально, так и теоретически методом линий скольжения.

С достаточным приближением к экспериментальным данным можно считать началом падения значений касательных напряжений точку $x = x_c = h^*$, а законом их изменения принять

$$\tau_к = \tau_c \frac{x}{h}, \tag{7.10}$$

где τ_c — касательное напряжение в точке $x = x_c = h$ [108]. В данном случае

$$\tau_к = -0{,}5\sigma_s^* \frac{x}{h}. \tag{7.10а}$$

Нормальные напряжения σ_z определяются из уравнения (7.3) при подстановке $\tau_к$ из выражения (7.10а):

$$\frac{d\sigma_z}{dx} - \sigma_s^* \frac{x}{h^2} = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = 0{,}5\sigma_s^* \frac{x^2}{h^2} + C.$$

Значение C найдем из условия, что $\sigma_z = \sigma_c$ при $x = x_c = h$. Отсюда

$$\sigma_z = \sigma_c - 0{,}5\sigma_s^* \frac{h^2 - x^2}{h^2}. \tag{7.11}$$

* Теоретически для широкой полосы $1{,}29h$.

Здесь (см. кривую $c'O'$ на рис. 7.3) σ_z изменяется в пределах от $\sigma_z = \sigma_c$ при $x = x_c = h$ до $\sigma_z = \sigma_0 = \sigma_c - 0{,}5\sigma_s^*$ при $x = 0$.

В свою очередь, по уравнению (7.9), принимая $x = x_c = h$, получим

$$\sigma_c = \sigma_b - \sigma_s^* \left(\frac{x_b}{h} - 1 \right).$$

Если бы не учитывать падения касательных напряжений, то при $x = 0$ получили бы по уравнению (7.9)

$$\sigma_{O''} = \sigma_b - \sigma_s^* \frac{x_b}{h}.$$

Из сравнения выражений для $\sigma_{O''}$, σ_0 и σ_c легко установить, что

$$\sigma_{O''} - \sigma_0 = \sigma_0 - \sigma_c = -0{,}5\sigma_s^*.$$

Таким образом, *при осадке полосы эпюры напряжений, а соответственно и контактная поверхность разделяются в общем случае* [108] *на три участка* (*зоны*), как показано на рис. 7.3.

Участок A — участок возрастания касательных напряжений $\tau_к$ или «зона скольжения» от $x = 0{,}5a$ до $x = x_b = 0{,}5a - \psi h$ [(по формуле (7.7)].

Касательные напряжения пропорциональны нормальным напряжениям $\tau_к = \mu\sigma_z$. Они изменяются от $|\tau_к| = \mu\sigma_s^*$ при $x = 0{,}5a$ до $|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^*$ при $x = x_b$.

Нормальные напряжения выражаются показательной функцией по уравнению (7.4)

$$\sigma_z = -\sigma_s^* \exp \frac{2\mu\,(0{,}5a - x)}{h},$$

а изменяются от $\sigma_z = \sigma_a = -\sigma_s^*$ при $x = 0{,}5a$ до $\sigma_z = \sigma_b = -0{,}5\sigma_s^*/\mu$ при $x = x_b$.

Участок $Б$ — участок постоянства касательных напряжений или «зона торможения» от $x = x_b = 0{,}5a - \psi h$ до $x = x_c = h$.

Касательные напряжения имеют постоянную величину

$$|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^*.$$

Нормальные напряжения изменяются по линейному закону согласно уравнению (7.9)

$$\sigma_z = \sigma_b - \sigma_s^* \frac{x_b - x}{h}$$

от $\sigma_z = \sigma_b = -\dfrac{0{,}5\sigma_s^*}{\mu}$ при $x = x_b$

до $\sigma_z = \sigma_c = \sigma_b - \sigma_s^* \left(\dfrac{x_b}{h} - 1 \right)$ при $x = x_c$.

Участок B — участок снижения касательных напряжений или «зона прилипания» от $x = x_c = h$ до $x = x_0 = 0$.

Касательные напряжения снижаются по линейному закону (7.10а)

$$|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^* \frac{x}{h}$$

от $|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^*$ при $x = x_c$ до $\tau_к = 0$ при $x = 0$.

Нормальные напряжения изменяются по параболической кривой согласно уравнению (7.11)

$$\sigma_z = \sigma_c - 0{,}5\sigma_s^* \frac{h^2 - x^2}{h^2}$$

от $\sigma_z = \sigma_b - \sigma_s^* \left(\frac{x_b}{h} - 1\right)$ при $x = x_c$

до $\sigma_z = \sigma_0 = \sigma_c - 0{,}5\sigma_s^*$ при $x = 0$.

Таким образом, $|\sigma_0| - |\sigma_c| = 0{,}5\sigma_s^*$.

При данных размерах a и h сечения полосы при изменении величины μ будет изменяться соотношение между протяженностью отдельных участков.

Длина участка A, равная $0{,}5a - x_b$, выражается уравнением (7.7а)

$$(0{,}5a - x_b) = \psi h.$$

При увеличении коэффициента трения μ величина ψ уменьшается, становясь меньше единицы при значениях μ, близких к 0,3. Следовательно, при больших величинах коэффициента трения длина участка A становится весьма незначительной, а при $\mu = 0{,}5$, когда $\psi = 0$, участок A исчезает вовсе. В этом случае эпюра напряжений σ_z состоит только из двух участков: участка $Б$ (постоянства касательных напряжений) и участка B (их снижения).

При этом, как показывает рис. 7.3, необходимо, чтобы ширина полосы a была не менее чем в 2 раза больше ее высоты h, так как ширина участка B равна $2h$, или $x_c = h < 0{,}5a$, $a/h > 2$. Пользуясь рис. 7.3, легко установить, что при эпюре, состоящей из двух участков $Б$ и B, точки a и b (a' и b') сливаются, и, следовательно,

$$x_b = x_a = 0{,}5a;$$

$$\sigma_b = \sigma_a = -\sigma_s^*; \quad \sigma_c = -\sigma_s^* \frac{0{,}5a}{h}.$$

Используя эти значения, а также уравнения (7.9), (7.11) и (7.10а), получим распределение напряжений по участкам, представленное на рис. 7.4 для случая $a/h = 10$ (так же, как и на рис. 7.3).

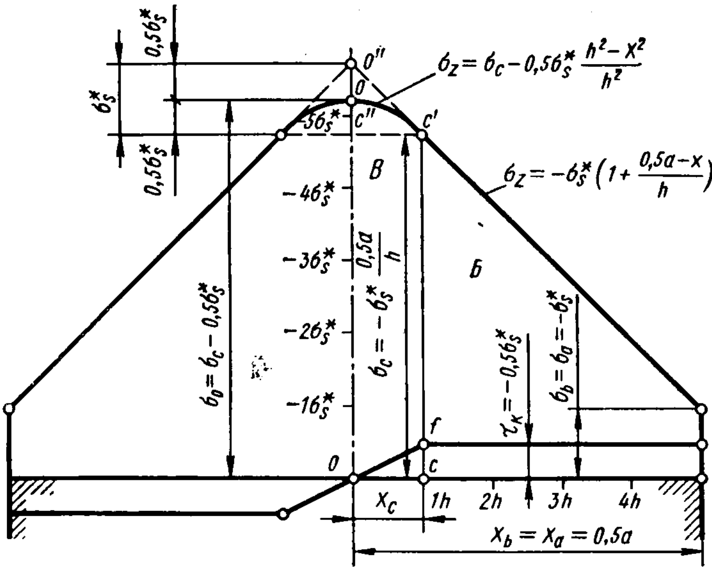


Рис. 7.4

Участок $Б$ — участок постоянства касательных напряжений от $x = x_{ab} = 0{,}5a$ до $x = x_c = h$.

Касательные напряжения имеют постоянную величину

$|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^*$.

Нормальные напряжения изменяются по линейному закону

$$\sigma_z = -\sigma_s^*\left(1 + \frac{0{,}5a - x}{h}\right) \tag{7.12}$$

от $\sigma_z = \sigma_{ab} = -\sigma_s^*$ при $x = x_{ab}$ до $\sigma_z = \sigma_c = -\sigma_s \frac{0{,}5a}{h}$ при $x = x_c$.

Участок $В$ — участок снижения касательных напряжений от $x = x_c = h$ до $x = x_0 = 0$.

Касательные напряжения снижаются по линейному закону (7.10а)

$$|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^* \frac{x}{h}$$

от $|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^*$ при $x = x_c$ до $\tau_к = 0$ при $x = x_0$.

Нормальные напряжения изменяются по параболической кривой [согласно уравнению (7.11)]

$$\sigma_z = \sigma_c - 0{,}5\sigma_s^* \frac{h^2 - x^2}{h^2}$$

от $\sigma_z = \sigma_c = -\sigma_s^* \frac{0{,}5a}{h}$ до $\sigma_z = \sigma_0 = \sigma_c - 0{,}5\sigma_s^* = -0{,}5\sigma_s^*\left(\frac{a}{h} + 1\right)$.

Вернемся к рис. 7.3. При данных значениях μ и h протяженность участка A $(0{,}5a - x_b = h\psi)$ и протяженность участка B $(x_c = h)$ останутся неизменными при уменьшении ширины полосы a. Следовательно, уменьшится протяженность участка $Б$ вплоть до того, что он исчезнет, и точки b и c совпадут. То же самое может произойти при данном значении a, если уменьшится коэффициент трения μ. Тогда протяженность участка B по-прежнему будет неизменна $(x_c = h)$, а протяженность участка A $(h\psi)$ возрастет (ψ увеличивается при уменьшении μ) за счет сокращения второго участка.

Из уравнения (7.5а) легко получить [108] значение a/h, при котором точки b и c совпадут

$$\frac{x}{h} = \frac{0{,}5a}{h} - \psi.$$

Рис 7.3 показывает, что для совпадения точек b и c надо, чтобы $x_b - x_c = 0$ или $x_b - h = 0$, откуда $x_b = h$.

Подставляя это значение x_b в уравнение (7.7), получим

$$\frac{a}{h} = 2(1 + \psi). \tag{7.13}$$

При $\frac{a}{h} > 2(1 + \psi)$ эпюра напряжений состоит из трех участков, при $\frac{a}{h} \leqslant 2(1 + \psi)$ — только из двух: A и B.

Эпюра напряжений из двух участков (рис. 7.5) A и B.

Участок A от $x = 0{,}5a$ до $x = x_c$.

Касательные напряжения $\tau_к$ пропорциональны нормальному напряжению $\tau_к = \mu\sigma_z$ и изменяются от $|\tau_к| = \mu\sigma_s^*$ до $\tau_к = \tau_c = \mu\sigma_c$.

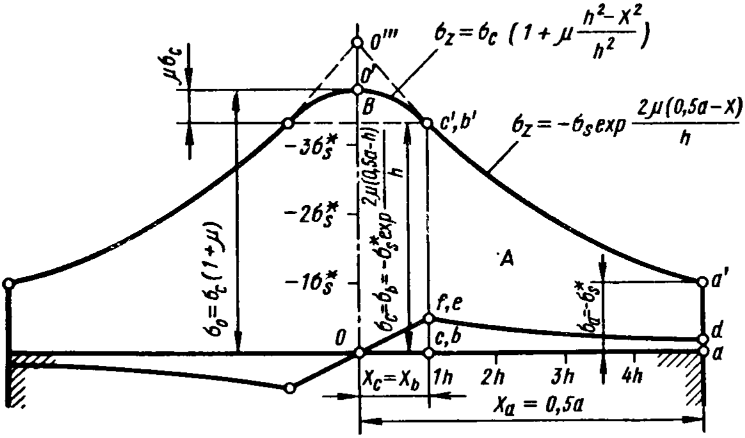


Рис. 7.5

Нормальные напряжения выражаются уравнением (7.4)

$$\sigma_z = -\sigma_s^* \exp\frac{2\mu\,(0{,}5a - x)}{h}$$

и изменяются от $\sigma_z = \sigma_a = -\sigma_s^*$ при $x = 0{,}5a$ до

$$\sigma_z = \sigma_c = -\sigma_s^* \exp\frac{2\mu\,(0{,}5a - h)}{h}$$

при $x = x_c = h$.

Участок B от $x = x_c = h$ до $x = 0$.

Касательные напряжения $\tau_к$ определяются уравнением (7.10):

$$\tau_к = \tau_c \frac{x}{h} = \mu\sigma_c \frac{x}{h}; \qquad (7.10б)$$

изменяясь от $\tau_к = \mu\sigma_c$ при $x = x_c = h$ до $\tau_к = 0$ при $x = 0$.

Нормальные напряжения получим из уравнения (7.3) при подстановке в него

$$\tau_к = \mu\sigma_c \frac{x}{h};$$

$$\frac{d\sigma_z}{dx} + 2\mu\sigma_c \frac{x}{h^2} = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = -\mu\sigma_c \frac{x^2}{h^2} + C.$$

При $x = h$ $\sigma_z = \sigma_c$. Из этого условия найдем постоянную C и получим

$$\sigma_z = \sigma_c\left(1 - \mu\frac{h^2 - x^2}{h^2}\right). \qquad (7.14)$$

На этом участке σ_z изменяется от $\sigma_z = \sigma_c$ при $x = x_c = h$ до $\sigma_0 = \sigma_c\,(1 + \mu)$ при $x = 0$.

Если уменьшать дальше ширину бруса a, то будет уменьшаться протяженность участка A, так как протяженность участка B остается постоянной и равной h. В пределе при $0{,}5a = h$ точка a совпадает с точкой c (т. е. точки a, b и c сольются). Таким образом, эпюра из двух участков A и B существует при $a/h \geqslant 2$, при $a/h < 2$ эпюра напряжений на контактной поверхности имеет только один участок B.

Эпюра напряжений из одного участка B (рис. 7.6).

Рис. 7.6

Касательные напряжения на контактной поверхности в этом случае имеют максимальное абсолютное значение $|\tau_к| = \mu\sigma_s^*$ на краю бруса при $x = 0{,}5a$ и падают в направлении оси, обращаясь в 0 при $x = 0$.

Закон распределения $\tau_к$ определяется тем же уравнением (7.10) при подстановке в него $\tau_c = -\mu\sigma_s^*$ и замене в знаменателе h на $0{,}5a$; так как $0{,}5a < h$ и падение напряжений идет на длине $0{,}5a$, то

$$\tau_к = -2\mu\sigma_s^* \frac{x}{a}. \tag{7.10в}$$

Выражение нормальных напряжений получим из уравнения (7.3) при подстановке в него указанного выше значения $\tau_к$:

$$\frac{d\sigma_z}{dx} - 4\mu\sigma_s^* \frac{x}{ah} = 0.$$

Интегрируя и определяя произвольную постоянную из условия, что при $x = 0{,}5a$ $\sigma_z = -\sigma_s^*$, получим

$$\sigma_z = -\sigma_s^* \left[1 + \frac{2\mu}{ah}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)\right]. \tag{7.15}$$

При $x = 0$

$$\sigma_z = -\sigma_s^*\left(1 + \frac{\mu a}{2h}\right).$$

Из последнего выражения видно, что чем меньше отношение a/h, тем равномернее распределение напряжений по контактной поверхности.

Резюмируем ранее сказанное о возможных вариантах распределения напряжений.

1-й вариант. При $\frac{a}{h} \geqslant 2(1+\psi)$ и $0 < \mu < 0{,}5$ эпюра напряжений состоит из трех участков: участок *А* — касательные напряжения $\tau_к$ пропорциональны нормальным σ_z ($\tau_к = \mu\sigma_z$); участок *Б* — касательные напряжения $\tau_к$ имеют постоянную максимальную абсолютную величину ($|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^*$); участок *В* — касательные напряжения падают от максимальной абсолютной величины до нуля. Нормальные напряжения σ_z определяются соответственно по участкам уравнениями (7.4), (7.9) и (7.11).

2-й вариант. При $\frac{a}{h} \geqslant 2$ и $\mu \geqslant 0{,}5$ эпюра напряжений состоит из двух участков: первый участок *Б* — касательные напряжения $\tau_к$ имеют постоянную максимальную абсолютную величину $|\tau_к| = 0{,}5\sigma_s^*$; участок *В* — касательные напряжения падают от максимальной величины до нуля. Нормальные напряжения определяются соответственно по участкам уравнениями (7.12) и (7.11).

3-й вариант. При $2(1+\psi) \geqslant \frac{a}{h} \geqslant 2$ и $0 < \mu < 0{,}5$ эпюра напряжений состоит из двух участков: участок *А* — касательные напряжения $\tau_к$ пропорциональны нормальным ($\tau_к = \mu\sigma_z$); участок B — касательные напряжения падают от $\mu\sigma_z$ до нуля. Нормальные напряжения σ_z определяются соответственно по участкам уравнениями (7.4) и (7.14).

4-й вариант. При $2 \geqslant \frac{a}{h} \geqslant 1$ и $\mu > 0$ эпюра напряжений состоит из одного участка B — касательные напряжения $|\tau_к|$ падают от $\mu\sigma_s^*$ до 0; нормальные напряжения σ_z определяются уравнением (7.15).

Наконец, может быть 5-й вариант. При $\mu = 0$ и любом a/h существует один участок: касательные напряжения $\tau_к = 0$ и нормальные напряжения σ_z постоянны и равны $-\sigma_s^*$.

В. В. Соколовский показал, что можно принимать $\sigma_z = -\sigma_s^*$ также и при значении $\mu > 0$, если отношение $\frac{a}{h} < 1$.

Зоны действия вышеперечисленных вариантов представлены на рис. 7.7 в зависимости от значений a/h и μ.

Экспериментальные исследования С. И. Губкина [13, 14, 16], Е. П. Унксова [108], Я. М. Охрименко [63] и др. подтверждают наличие различных участков на контактной поверхности, а также в общих чертах и установленный выше характер распределения напряжений, особенно для образцов с большими отношениями a/h.

Однако при экспериментах наблюдается появление вблизи краев образца дополнительных максимумов, по абсолютной величине значительно меньших центрального. Кроме того, у относительно высоких образцов $\left(\frac{a}{h} < 2 \div 2{,}5\right)$ наблюдаются эпюры нормальных напряжений не куполообразной, а вогнутой формы с некоторым падением нормальных напряжений от краев к оси образца. Такая форма эпюры для высоких образцов получена также теоретически при исследовании методом линий скольжения [17, 91 и др.].

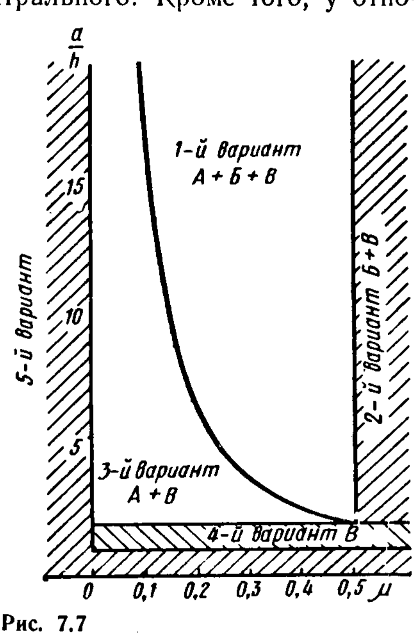


Рис. 7.7

В дальнейшем при вычислении удельных усилий для высоких образцов $\left(2 > \frac{a}{h} > 1\right)$ будем исходить все же из куполообразной формы эпюры по 4-му варианту, поскольку получаемые результаты достаточно оправдываются практикой и весьма мало отличаются от получаемых методом линий скольжения.

Значения удельных усилий (средних давлений) для различных вариантов. Зная распределение напряжений σ_z на контактной поверхности в пределах каждого участка и границы этих участков, можно определить деформирующие усилия, интегрируя уравнения, выражающие σ_z [1], по площадям соответствующих участков контактной поверхности, на которых они действительны, и беря сумму этих интегралов. Так как эпюры симметричны относительно оси z, эту сумму надо удвоить.

1-й вариант. При $\frac{a}{h} \geqslant 2(1+\psi)$ и $0 < \mu < 0{,}5$; σ_z по уравнениям (7.4), (7.9) и (7.11)

$$P = 2l\left[\int\limits_{x_b}^{0,5a} \sigma_s^* \exp\frac{2\mu\,(0{,}5a - x)}{h}\,dx + \right.$$

$$+ \int\limits_{h}^{x_b} -\left(\sigma_b - \sigma_s^*\frac{x_b - x}{h}\right)dx +$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{h} -\left(\sigma_c - 0{,}5\sigma_s^*\,\frac{h^2 - x^2}{h^2}\right)dx\right]. \qquad \text{(a)}$$

В целях упрощения последующих после интегрирования алгебраических преобразований и получения более наглядного по форме результата несколько преобразуем выражение (а).

Рис. 7.3 показывает, что второй интеграл можно взять в пределах не от h до x_b, а от нуля до x_b, вычтя при этом площадь $O''c'O'$, которая отражает влияние менее интенсивного роста нормальных напряжений на участке B падения касательных напряжений. Третий интеграл в выражении (а) при этом отпадает.

Площадь $O''c'O'$, в свою очередь, представляет собой разность между площадью треугольника $O''c'c''$ и площадью параболического сегмента $O'c'c''$: площадь $O''c'O' = O''c'c'' - O'c'c''$; площадь $O''c'O' = 0{,}5\sigma_s^* h - \frac{2}{3}\,0{,}5\sigma_s^* h = \frac{1}{6}\,\sigma_s^* h$.

На основании сказанного заменим выражение (а) следующим:

---

[1] Берем далее абсолютные величины напряжений, поскольку знак минус для удельных усилий (средних давлений) не имеет значения, т. е. их можно считать всегда положительными.

$$P = 2l\left[\int\limits_{x_b}^{0,5a} \sigma_s^* \exp\frac{2\mu\,(0,5a - x)}{h}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{x_b} -\left(\sigma_b - \sigma_s^*\frac{x_b - x}{h}\right)dx - \frac{1}{6}\sigma_s^* h\right]. \quad (б)$$

После интегрирования и подстановки значений σ_b и x_b, приведенных ранее, получим значение деформирующего усилия P. Разделив последнее на контактную площадь al, найдем у д е л ь н о е   у с и л и е   д е ф о р м и р о в а н и я p:

$$p = \sigma_s^* \frac{h}{\mu a}\left\{\left(\frac{1}{2\mu} - 1\right) + \left(\frac{a}{2h} - \psi\right)\left[1 + \mu\left(\frac{a}{2h} - \psi\right)\right] - \frac{\mu}{3}\right\}. \quad (7.16)^*$$

Последний член в фигурных скобках $\mu/3$ отражает влияние падения касательных напряжений на центральном участке. Таким образом, снижение удельного давления выражается величиной

$$\sigma_s^* \frac{h}{\mu a}\frac{\mu}{3} = \sigma_s^* \frac{1}{3}\frac{h}{a}.$$

Чем больше отношение a/h, т. е. чем относительно шире и ниже осаживаемая полоса, тем меньшее влияние на величину удельного давления оказывает наличие куполообразного участка на эпюре напряжений.

Пусть $\sigma_s^* \frac{1}{3}\frac{h}{a} \leqslant 0,1\sigma_s^*$, тогда $\frac{a}{h} \geqslant 3\frac{1}{3}$. Таким образом, уже при отношениях $\frac{a}{h} \geqslant 3\frac{1}{3}$ пренебрежение участком падения касательных напряжений вызовет абсолютную ошибку при определении удельного усилия, не превышающую 10% от σ_s^*. Поскольку же при рассматриваемом варианте всегда $p > \sigma_s^*$, постольку относительная ошибка будет еще меньше. Поэтому при отношениях $\frac{a}{h} > 3 \div 3,5$ последний член $\mu/3$ в фигурных скобках в формуле (1.16) можно не учитывать.

Значения p (в долях σ_s^*), вычисленные по формуле (7.16) для разных величин коэффициента трения μ, представлены графически на рис. 7.8. Там же показана граница применения формулы (7.16).

2-й в а р и а н т: $\frac{a}{h} \geqslant 2$ и $\mu \geqslant 0,5$; σ_z — по формулам (7.12) и (7.11).

---

* Формула (7.16) дана Е. П. Унксовым в другой, несколько более сложной форме, чем здесь [108, 109].

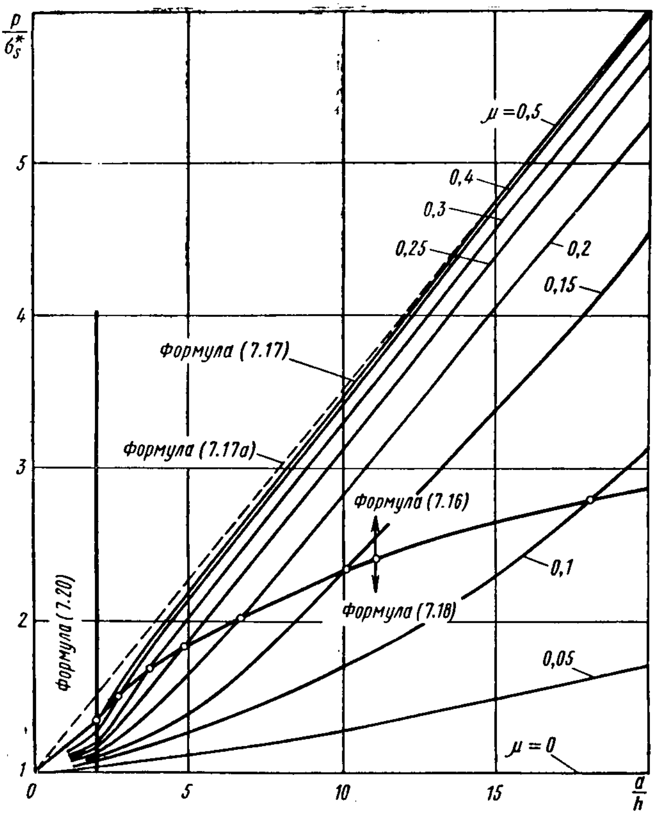


Рис. 7.8

Так же как и при рассмотрении предыдущего варианта, учтем снижение интенсивности роста нормальных напряжений на центральном участке площадью $O''c'O'$. Тогда

$$P = 2l\left[\int_0^{0,5a} \sigma_s^*\left(1 + \frac{0,5a - x}{h}\right)dx - \frac{1}{6}\,\sigma_s^* h\right], \tag{в}$$

откуда после интегрирования и деления на площадь получим [99]

$$p = \sigma_s^*\left(1 + \frac{1}{4}\,\frac{a}{h} - \frac{1}{3}\,\frac{h}{a}\right). \tag{7.17}$$

Е. П. Унксов показал [109], что эту формулу можно получить непосредственно из формулы (7.16) для трехучастковой эпюры подстановкой $\mu = 0,5$ и $\psi = 0$.

Если пренебречь в формуле (7.17) последним членом в скобках, учитывающим влияние падения касательных напряжений на центральном участке, то получим [109]

$$p = \sigma_s^*\left(1 + \frac{1}{4}\,\frac{a}{h}\right). \tag{7.17а}$$

Вычисление p по формуле (7.17а) даже при $\frac{a}{h}=2$ дает результат всего на 12,5% бо́льший, чем по формуле (7.17), и составляет по абсолютной величине $1/6\sigma_s^*$, что практически не имеет значения.

Формула (7.17а) уже была получена ранее другим методом и была отмечена как (7.2б).

3-й вариант. $2(1+\psi)\geqslant\frac{a}{h}\geqslant 2$ и $0<\mu<0{,}5$; σ_z — по формулам (7.4) и (7.14):

$$P=2l\left\{\int_h^{0,5a}\sigma_s^*\exp\frac{2\mu(0{,}5a-x)}{h}dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^h-\sigma_c\left(1+\mu\frac{h^2-x^2}{h^2}\right)dx\right\}, \qquad (г)$$

откуда

$$p=\sigma_s^*\frac{h}{\mu a}\left[\left(1+2\mu+\frac{4}{3}\mu^2\right)\exp\left(\frac{\mu a}{h}-2\mu\right)-1\right]. \qquad (7.18)$$

Кривые, построенные по формуле (7.16) для различных значений μ, являются продолжением кривых, построенных по формуле (7.18) (рис. 7.8).

Если пренебречь менее интенсивным ростом нормальных напряжений σ_z на центральном участке, т. е. второй интеграл в выражении (г) отбросить, а первый взять в пределах 0—0,5a, то формула упростится [107]:

$$p=\sigma_s^*\frac{h}{\mu a}\left(\exp\frac{\mu a}{h}-1\right). \qquad (7.19)$$

Расхождение результатов, вычисленных по формулам (7.18) и (7.19), тем меньше, чем больше отношение a/h и чем меньше коэффициент трения μ. Однако даже при $\mu=0{,}25$ максимальная ошибка формулы (7.19) не превышает 11%.

4-й вариант: $2\geqslant\frac{a}{h}\geqslant 1$; $\mu>0$; σ_z — по формуле (7.15):

$$P=2l\int_0^{0,5a}\sigma_s^*\left[1+\frac{2\mu}{ah}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)\right]dx,$$

откуда [108]

$$p=\sigma_s^*\left(1+\frac{\mu}{3}\frac{a}{h}\right). \qquad (7.20)$$

При значении $\mu>0{,}5$ подставляется $\mu=0{,}5$.

5-й вариант: при $\frac{a}{h} < 1$, а также при $\mu = 0$ при любых значениях a/h

$$p = \overset{*}{\sigma_s}. \tag{7.21}$$

Формулы (7.16) и (7.18) требуют для определения p в каждом отдельном случае сравнительно много арифметических подсчетов. Поэтому значительно удобнее пользоваться графиками, подобными представленному на рис. 7.8.

Однако при рассмотрении графиков (рис. 7.8) легко заметить, что влияние увеличения коэффициента трения μ на удельное усилие сказывается резко лишь в области изменения этого коэффициента в пределах малых значений. При больших значениях μ (примерно от $\mu \geqslant 0{,}25$) кривые удельных усилий для разных μ стремятся к прямолинейной форме и лежат весьма близко к кривой для $\mu = 0{,}5$ [108]. А так как при горячей осадке величина коэффициента трения, как правило, значительна (0,3—0,5), то **для определения удельного усилия при горячей осадке без смазки в качестве расчетной формулы можно пользоваться формулой** (7.17а), **выведенной для** $\mu = 0{,}5$:

$$p = \overset{*}{\sigma_s}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{a}{h}\right).$$

Эта формула дает при $\mu \neq 0{,}5$ тем бóльшую точность, чем больше отношение a/h и чем больше μ. Однако даже при $\mu = 0{,}25$ абсолютная ошибка не превышает $0{,}3\overset{*}{\sigma_s}$ в сторону преувеличения значения удельного усилия.

При осадке с применением смазки можно рекомендовать полученную ранее формулу (7.2а)

$$p = \overset{*}{\sigma_s}\left(1 + \frac{\mu_s a}{2h}\right), \tag{7.17б}$$

выбирая значения фактора трения μ_s по экспериментальным данным (стр. 166).

Изложенные результаты вычисления удельных усилий осадки полосы, полученные методом совместного решения приближенных уравнений равновесия и пластичности, достаточно близко совпадают с решениями, выполненными методом линий скольжения, в частности путем численного интегрирования уравнений характеристик, примененного и В. В. Соколовским.

Ранее была (стр. 204) показана возможность приближенного графического построения поля линий скольжения при осадке широкой полосы, изображенного на рис. 6.19. В центральной части полосы [треугольник (*1,4*) A' (*4,4*)] образуется жесткая зона. Она и является той зоной падения касательных напряжений (зона прилипания — зона B), которую было необходимо логически предположить при рассмотрении процесса осадки методом решения приближенных уравнений равновесия и пластичности (стр. 240).

Формулу (7.17а) легко получить и методом баланса работ, пользуясь уравнениями (6.40), (6.41) и (6.42) и учитывая, что при плоской деформации $\varepsilon_x = -\varepsilon_z$ и $\varepsilon_i = 1{,}15\varepsilon_x$.

В последнее время некоторые исследователи для определения удельного усилия при плоской осадке применили метод верхней оценки. Однако в этом случае пользование данным методом не представляется целесообразным ни с теоретической, ни с практической стороны, поскольку при минимизации результатов последние неизбежно совпадают с получаемым значительно проще методом баланса работ.

7.1.2. Осадка правильной призмы и цилиндра

Возьмем призму высотой h, имеющую в основании правильный многоугольник с числом сторон n и диаметром вписанной в основание окружности d. Плоскостями, проходящими через ось призмы и ее ребра, разделим объем призмы на n частей [96]. В соответствии с принципом наименьшего сопротивления (см. стр. 166) эти плоскости примем за плоскости раздела течения. Ось z совместим с осью призмы, а оси x и y направим, как показано на рис. 7.9.

Так как все n частей, на которые разделена призма, одинаковы и оси x, y можно расположить, как показано на рис. 7.9, в любой из этих частей, то рассмотрим распределение напряжений лишь в одной такой части Oab.

Предварительно сделаем одно допущение: примем, что в каждый данный момент при незначительной деформации форма поперечного сечения не изменяется и треугольник Oab остается треугольником.

Отсюда вытекают такие следствия:

1) $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, а следовательно, $\sigma_x = \sigma_y$, что соответствует схеме $V,7$ (см. рис. 5.12);

2) в плоскостях, параллельных xy, касательные напряжения отсутствуют, т. е. $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, и имеются лишь касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

При этих условиях дифференциальные уравнения равновесия (3.38) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \qquad (а)$$

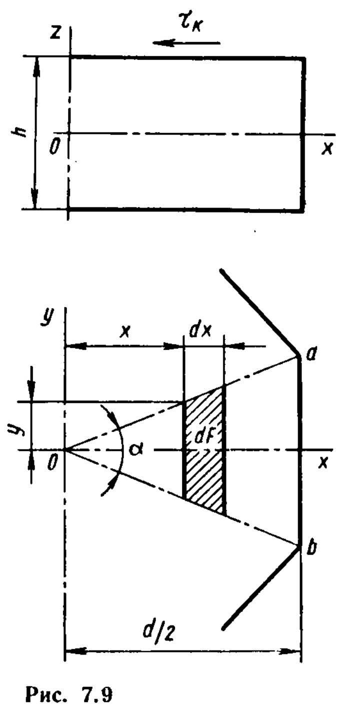


Рис. 7.9

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \qquad (б)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \qquad (в)$$

Из уравнения (в) явствует, что при сделанном допущении σ_y, а следовательно, и $\sigma_x = \sigma_y$ не зависят от координаты y. Напряжения σ_z и τ_{xz} будем считать также независимыми от этой координаты.

Поскольку система дифференциальных уравнений (а) и (в) аналогична системе (3.50), примененной для плоской задачи, за приближенное уравнение равновесия можно принять уравнение (7.3)

$$\frac{d\sigma_z}{dx} + \frac{2\tau_к}{h} = 0. \qquad (7.3)$$

Р е ш е н и я его, выражающие напряжение σ_z в зависимости от координаты x, б у д у т т е ж е с а м ы е, что и для плоской задачи, с той лишь разницей, что постоянную σ_s^* необходимо заменить на σ_s, а размер a на размер d.

Для определения деформирующего усилия интегрирование будем проводить в зависимости от варианта распределения напряжений по участкам площади треугольника Oab с умножением результата на число этих треугольников, т. е. на число сторон призмы n. Дифференциал площади dF в этом случае (рис. 7.9)

$$dF = 2y dx,$$

но

$$y = x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

поэтому

$$dF = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} x\, dx.$$

Выведем формулы для определения удельных усилий осадки для тех же вариантов распределения напряжений, которые были при плоской задаче.

1-й в а р и а н т (т р и у ч а с т к а)

$$\left(\frac{d}{h} \geqslant 2(1+\psi) \text{ и } 0 < \mu < 0{,}5\right).$$

Пишем интеграл

$$P = n \left[\int_{x_b}^{0,5d} \sigma_s \exp \frac{2\mu(0{,}5d - x)}{h} 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} x\, dx + \right.$$

$$+ \int_{h}^{x_b} - \left(\sigma_b - \sigma_s \frac{x_b - x}{h}\right) 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} x\, dx +$$

$$+\int\limits_0^h -\left(\sigma_c - 0{,}5\sigma_s \frac{h^2-x^2}{h^2}\right) 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\, x\,dx\Bigg].$$

После интегрирования, подстановки значений σ_b и σ_c и деления на площадь контакта $F = n\frac{d^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ получим

$$p = \sigma_s\left\{\frac{2h^2}{\mu^2 d^2}\left[\frac{1}{2\mu}\left(1+\frac{\mu d_b}{h}\right)-\left(1+\frac{\mu d}{h}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{d_b^2}{2\mu d^2}\left(1+\frac{\mu d_b}{3h}\right)-\frac{1}{3}\frac{h^2}{d^2}\right\}, \qquad (7.22)$$

где

$$d_b = 2x_b = 2\,(0{,}5d - h\psi).$$

Последний член в фигурных скобках отражает влияние падения касательных напряжений на центральном участке подобно аналогичному члену в формуле (7.16).

2-й вариант (два участка — *Б* и *В*) $\left(\frac{d}{h} \geqslant 2\right.$ и $\left.\mu \geqslant 0{,}5\right)$.

Деформирующее усилие для этого варианта

$$P = n\left[\int\limits_{x_c}^{0{,}5d}\sigma_s\left(1+\frac{0{,}5d-x}{h}\right)2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,x\,dx\,+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^{x_c} -\left(\sigma_c - 0{,}5\sigma_s\frac{h^2-x^2}{h^2}\right)2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,x\,dx\right].$$

Произведя интегрирование и отнеся к единице площади, получим [99]

$$p = \sigma_s\left(1+\frac{1}{6}\frac{d}{h}-\frac{1}{3}\frac{h^2}{d^2}\right). \qquad (7.23)$$

Эту формулу можно также получить из предыдущей (7.22) путем подстановки в последнюю $\mu = 0{,}5$ и $d_b = d$.

Пренебрегая в формуле (7.23) последним членом в скобках, учитывающим влияние падения касательных напряжений на центральном участке, получим

$$p = \sigma_s\left(1+\frac{1}{6}\frac{d}{h}\right). \qquad (7.24)$$

Вычисление p по формуле (7.24) при $\frac{d}{h} = 2$ дает результат всего на 7,5% больший, чем по формуле (7.23), и составляет по абсолютной величине лишь $1/12\sigma_s$. Таким образом, участок падения касательных напряжений здесь играет роль значительно меньшую, чем в формулах для осадки полосы в условиях плоской деформации, и практического значения не имеет.

Ранее была выведена (для цилиндра) методом баланса работ формула (6.43)

$$p = \sigma_s + \frac{1}{3}\tau_к \frac{d}{h}.$$

Если в этой формуле принять $\tau_к = 0{,}5\sigma_s$, как это сделано в рассматриваемом варианте, то получим формулу (7.24). Таким образом, результаты обоих методов в данном случае совпадают.

3-й вариант (два участка — A и B) $[2(1+\psi) \geqslant 2$ и $0 < \mu < 0{,}5]$.

Деформирующее усилие

$$P = n\left\{\int_{x_c}^{0,5d} \sigma_s \exp\frac{2\mu\,(0{,}5d - x)}{h}\, 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\, x\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{x_c} - \sigma_c\left[1 + \frac{\mu\,(h^2 - x^2)}{h^2}\right] 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\, x\,dx\right\}.$$

Интегрируя и деля на площадь контакта $F = n\frac{d^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, имеем

$$p = 2\sigma_s \frac{h^2}{\mu^2 d^2}\left[\left(\exp\frac{\mu d^2}{h} - \frac{\mu d}{h} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\frac{\mu d}{h}\left(1 - \frac{1 + 2\mu + 2\mu^2 + \mu^3}{\exp 2\mu}\right)\right].$$

В этой формуле второй член в квадратных скобках отражает влияние падения касательных напряжений на центральном участке. Однако он имеет очень малое значение, и учитывать его нет практического смысла. Отбрасывая этот член, получим расчетную формулу для 3-го варианта

$$p = 2\sigma_s \frac{h^2}{\mu^2 d^2}\left(\exp\frac{\mu d}{h} - \frac{\mu d}{h} - 1\right). \tag{7.25}$$

4-й вариант (один участок B) $\left(\frac{d}{h} \leqslant 2\right.$ и $\left.\mu > 0\right)$.

Деформирующее усилие

$$P = n\int_0^{0,5d} \sigma_s\left[1 + \frac{2\mu}{dh}\left(\frac{d^2}{4} - x^2\right)\right] 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\, x\,dx.$$

После интегрирования и деления на площадь основания $F = n\frac{d^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, получим

$$p = \sigma_s\left(1 + \frac{\mu}{4}\frac{d}{h}\right). \tag{7.26}$$

5-й вариант.

При $\mu = 0$ и любых значениях d/h, а также при $\mu \neq 0$, но при $\frac{d}{h} \leqslant 1$

$$p = \sigma_s. \tag{7.27}$$

Формулы (7.22) — (7.27) являются общими и для правильных призм, и для цилиндра, так как при неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника, являющегося основанием призмы, последняя переходит в цилиндр [96].

Поскольку же поперечные сечения любой призмы в процессе ее осадки стремятся принять форму круга (см. стр. 167), постольку выведенные формулы следует считать пригодными и для промежуточных переходных форм поперечных сечений, образующихся в процессе осадки.

Формулы (7.22), (7.24), (7.25) и (7.26) для случая осадки цилиндрической поковки вывел Е. П. Унксов. Он также провел обширные экспериментальные исследования, подтверждающие их правильность [108, 109][1].

Формулы (7.22) и (7.25) достаточно сложны для вычислений. Поэтому следует рекомендовать пользоваться на практике графиками. График на рис. 7.10, как и график на рис. 7.8, показывает, что интенсивность влияния роста коэффициента трения на удельное усилие уменьшается при увеличении его значений. Кривые для $\mu \geqslant 0{,}25$ весьма близки к кривой для $\mu = 0{,}5$. Это дает возможность рассчитывать удельное усилие при горячей осадке, когда коэффициент трения большой, по приближенной формуле (7.24)

$$p = \sigma_s \left(1 + \frac{1}{6} \frac{d}{h}\right).$$

Для расчета удельного усилия при осадке с применением смазки можно воспользоваться ранее полученной формулой (6.43), которая приведена вторично на стр. 256, положив в ней $\tau_к = \mu_s \sigma_s$:

$$p = \sigma_s \left(1 + \frac{\mu_s}{3} \frac{d}{h}\right), \tag{7.24а}$$

где μ_s, так же как и в формуле (7.17б), фактор трения (стр. 165).

Эта формула широко известна под наименованием формулы Э. Зибеля [28].

Все приведенные выше формулы, пригодные для определения удельных усилий осадки правильной призмы и круглого цилиндра, можно получить на базе рассмотрения осадки цилиндра, используя условия равновесия в цилиндрических координатах.

---

[1] Формула (7.22) приведена в [108] в другой, несколько более сложной форме.

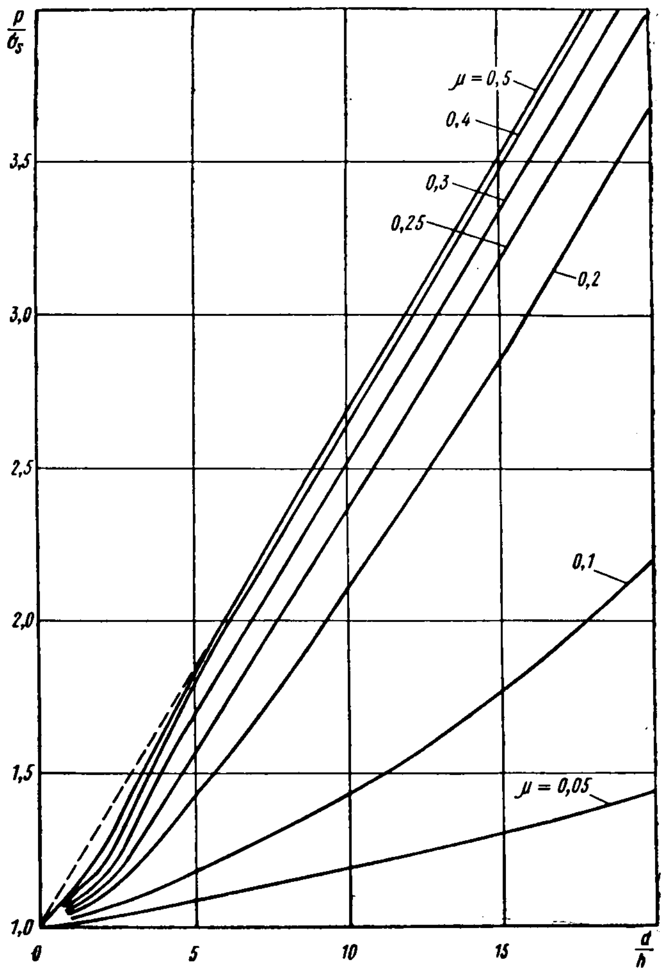


Рис. 7.10

Возьмем первое уравнение системы (3.39)

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0.$$

Учтем, что на контактной поверхности напряжения σ_ρ и σ_θ не зависят от координаты z и $\sigma_\rho = \sigma_\theta$, поскольку $\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta$ (стр. 140). Допустим также, что $\tau_{\rho z}$ является линейной функцией z. Тогда получим

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{2\tau_\text{к}}{h} = 0.$$

Приняв условие пластичности в форме (6.11а) имеем

$$\frac{dz}{d\rho} + \frac{2\tau_к}{h} = 0,$$

т. е. уравнение, аналогичное уравнению (7.3) на стр. 237, на основе которого были получены все формулы, относящиеся к осадке правильной призмы и круглого цилиндра.

7.1.3. Осадка полосы конечной длины

Эту задачу рассмотрим для случая, когда трение имеет значительную величину, принимая, что течение металла происходит по кратчайшим нормалям к периметру сечения (см. стр. 167). Касательные напряжения на контактной поверхности считаем постоянными и равными $|\mu_s \beta \sigma_s|$. Участками падения касательных напряжений пренебрегаем.

На рис. 7.11 представлена контактная поверхность с указанием границ течения в соответствии с принципом течения по кратчайшей нормали. Ось z перпендикулярна плоскости чертежа.

Примем, что изменение нормальных напряжений на контактной поверхности соответственно по координате x (для трапеций $afed$ и $bfec$) и по координате y (для треугольников abf и ced) определяется уравнением (7.1б).

В порядке обобщения постоянную σ_s^* заменим на $\beta\sigma_s$, где β — коэффициент $1 \div 1{,}155$ (см. стр. 135). Тогда для трапеций

$$|\sigma_z| = \beta\sigma_s \left(1 + \frac{\mu_s (a - 2x)}{h}\right);$$

для треугольников

$$|\sigma_z| = \beta\sigma_s \left(1 + \frac{\mu_s (l - 2y)}{h}\right).$$

Для получения деформирующего усилия P распространим эти напряжения по всей контактной поверхности, взяв 2 раза по площади трапеций F_1, и 2 раза по площади треугольника F_2:

$$P = 2 \int\limits_{F_1} \beta\sigma_s \left(1 + \frac{\mu_s (a - 2x)}{h}\right) dF_1 + 2 \int\limits_{F_2} \beta\sigma_s \left(1 + \frac{\mu_s (l - 2y)}{h}\right) dF_2.$$

Но (рис. 7.11)

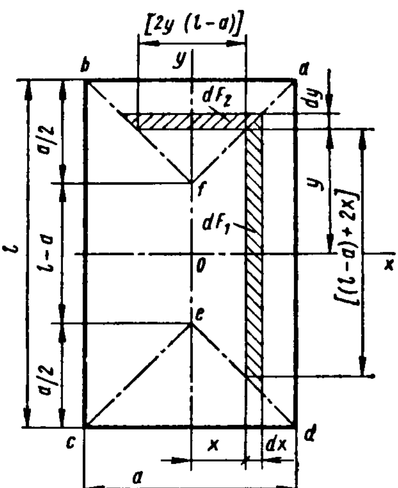


Рис. 7.11

$dF_1 = [(l - a) + 2x]\,dx;$
$dF_2 = [2y - (l - a)]\,dy.$

Следовательно,

$$P = 2\beta\sigma_s \left\{ \int\limits_0^{0,5a} \left(1 + \frac{\mu_s (a - 2x)}{h}\right) [(l - a) + 2x]\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0,5(l-a)}^{0,5l} \left(1 + \frac{\mu_s (l - 2y)}{h}\right) [2y - (l - a)]\,dy. \right.$$

Проинтегрировав и разделив на площадь контакта al, получим несколько скорректированную формулу С. И. Губкина [12]

$$p = \beta\sigma_s \left(1 + \frac{\mu_s \left(1 - \frac{1}{3}\frac{a}{l}\right)}{2} \frac{a}{h}\right). \tag{7.28}$$

Для полосы неограниченной длины $\left(\frac{a}{l} \to 0\right)$

$$p = \beta\sigma_s \left(1 + \frac{\mu_s}{2}\frac{a}{h}\right),$$

т. е. получим формулу (7.17а), если принять значение β максимальным $\left(\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Приняв $l = a$, получим призму с квадратным основанием, и тогда

$$p = \beta\sigma_s \left(1 + \frac{\mu_s}{3}\frac{a}{h}\right),$$

т. е. формула (7.28) превратится в формулу (7.24), если принять $\beta = 1$.

Подобно тому, как формула (7.24) определяет удельное усилие и для квадратного, и для кругового сечения, формула (7.28) вполне пригодна для эллиптического сечения [120].

Практически формулой (7.28) имеет смысл пользоваться до значений $1 < \frac{l}{a} < 5$, примерно пропорционально изменяя коэффициент β в пределах соответственно от 1 до 1,155. При больших значениях l/a вполне возможно применять формулу (7.17а).

К формуле, аналогичной (7.28), исходя из других оснований и более сложным путем, значительно позднее С. И. Губкина пришел также В. Джонсон. В современной иностранной литературе эту формулу приводят в различной транскрипции со ссылкой на последнего [135, 136].

Для определения деформирующего усилия, необходимого для осадки полосы конечной длины, получены также решения методом баланса работ [101, 102]. Ввиду сложности течения металла в условиях этой операции, результаты теоретических решений иногда получали форму, не допускающую явного алгебраического выражения [135].

7.1.4. Неоднородность деформации при осадке

Как было указано ранее, касательные напряжения имеют максимальную величину на контактных поверхностях заготовки и обращаются в нуль в средней плоскости. Поэтому деформации элементов торцовых поверхностей должны быть меньше деформаций в поперечных сечениях, удаленных от торцов, что и наблюдается в действительности.

В случае цилиндрической заготовки поперечные сечения при отсутствии анизотропии трения (стр. 161) сохраняют круговую форму, а меридиональные получают бочкообразную. Степень и характер бочкообразности зависят от величины коэффициента трения. Чем больше последний, тем сильнее торможение точек, расположенных на торцах, и тем больше при равных прочих условиях разница между диаметрами торцов осаженной заготовки и диаметрами других ее сечений. При этом у низких заготовок $\left(\frac{d_0}{h_0} > 1\right)$ сечение посредине образующей получает максимальный диаметр, т. е. заготовка сразу приобретает бочкообразную форму, причем степень бочкообразности уменьшается с увеличением отношения d_0/h_0, причина чего будет разъяснена далее.

При осадке высоких заготовок $\left(\frac{d_0}{h_0} < 0{,}5\right)$ явление значительно усложняется. Как показал еще Ф. Ридель (1913 г.) [126], образец с $\frac{d_0}{h_0} = 0{,}35$ при малой степени осадки принимает форму как бы двух бочек у торцов, соединенных цилиндрической частью (рис. 7.12, *а*). При дальнейшей осадке диаметр цилиндрической части растет и заготовка получает форму цилиндра, к которому примыкают концы в виде усеченных конусов с меньшим основанием у торцов (рис. 7.12, *б*). При еще большей деформации, порядка 40—50% [109], диаметр среднего сечения растет более интенсивно и заготовка принимает бочкообразную форму (рис. 7.12, *в*). При больших отношениях d/h, но меньших $^1/_2$, можно получить «двойную бочку» (рис. 7.12, *г*), которая при дальнейшей осадке за счет более интенсивного увеличения среднего диаметра переходит в одинарную с максимальным диаметром посредине заготовки.

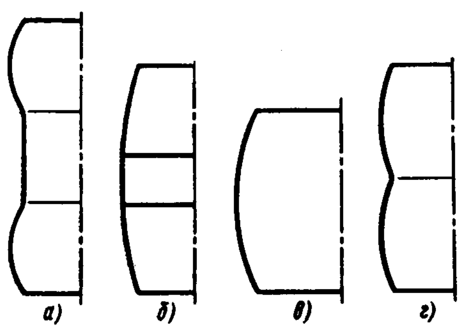


Рис. 7.12

Обширные исследования Я. М. Охрименко показывают, что с увеличением степени деформации бочкообразность сначала увеличивается, достигая максимума, а затем уменьшается. При этом чем больше начальное отношение d/h, тем меньшая бочкообразность получается при осадке, и при меньшей степени деформации достигается ее максимум. Так, например, для высоких образцов с исходным отношением $\frac{d}{h} = 0{,}5$ максимум бочкообразности наблюдался при степени деформации $\varepsilon = 0{,}55$; для низких образцов с $\frac{d}{h} = 4$ при $\varepsilon = 0{,}25$. Относительная величина максимальной бочкообразности у низких образцов более чем в 3 раза меньше, чем у высоких. Повышение коэффициента контактного трения во всех случаях увеличивает бочкообразность и изменяет степень деформации, при которой наблюдается максимальная бочкообразность.

Сказанное иллюстрируется диаграммой (рис. 7.13), где по оси абсцисс отложено отношение d/h, а по оси ординат — относительный объем бочкообразования $\theta = V_б/V$ [62, 63].

При деформировании ударом возможно образование вогнутой бочковой поверхности осаживаемой цилиндрической заготовки. Это наблюдается при осадке высоких образцов ($h > 2d$) на высокоскоростных молотах, а также на молотах с недостаточной массой падающих частей, когда деформация не распространяется в глубину, а происходит «расклепывание» торцовых участков заготовки.

Искажению наружного контура соответствует неоднородность деформаций внутренних зон и элементов осаживаемой заготовки. При этом в общем случае (см. рис. 7.12, *в*) можно различать три зоны [12].

Зоны *I* (рис. 7.14), прилегающие к торцам заготовки, деформируются весьма незначительно, что объясняется влиянием сил

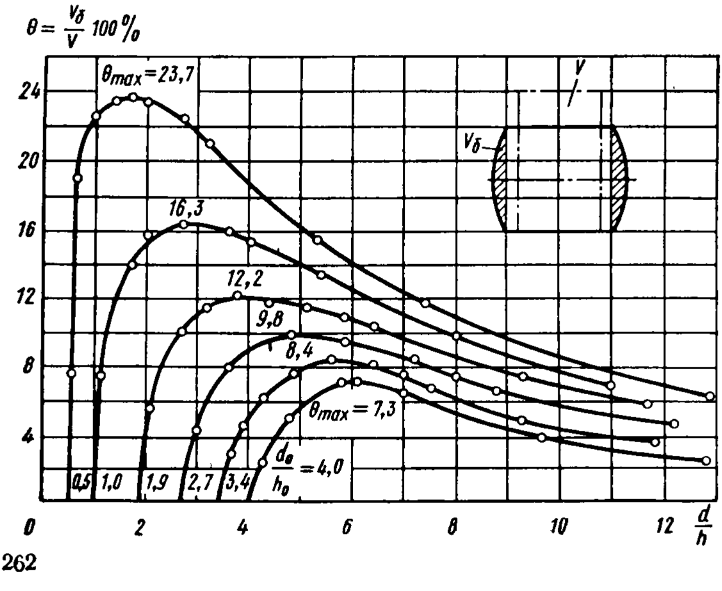


Рис. 7.13

трения на контактных поверхностях, создающих в этих зонах достаточно резко выраженное всестороннее сжатие. Эти зоны являются зонами «задержанной» или «затрудненной» деформации. Металл в них как бы менее податлив, и они как бы расклинивают находящуюся между ними зону *II*, деформация элементов которой наиболее интенсивна как в осевом, так и в радиальном направлении. По мнению Е. П. Унксова, в областях раздела первой и второй зон металл последней как бы обтекает первую зону, двигаясь в направлении торцов. Этим, по его мнению, объясняется наличие перехода элементов боковой поверхности на контактную, особенно заметного при $\frac{d}{h} < 1$.

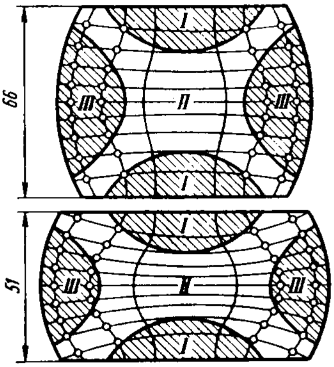


Рис. 7.14

Интенсивность деформации зоны *III* занимает промежуточное положение между двумя первыми. По мере увеличения степени осадки или при осадке образцов с большими отношениями d/h зона *III* резко уменьшается, а зоны *I* и *II* практически сливаются, и деформация охватывает объем этих обеих зон при резко выраженном объемном напряженном состоянии в связи со сближением контактных поверхностей. Равномерность деформации повышается, а бочкообразность снижается.

Наличие перечисленных выше зон подтверждается экспериментальными исследованиями, проведенными различными методами: осадкой многослойных образцов (Э. Зибель и др.), осадкой образцов с координатной сеткой (Ф. Кик и др.), микроструктурным методом (Г. А. Смирнов-Аляев), осадкой образцов с ввинченными шурупами (И. М. Павлов), определением твердости по сечению холоднодеформированного разрезанного образца (С. И. Губкин). В последнем случае в зонах с большей деформацией твердость вследствие упрочнения будет выше, чем в зонах, подвергшихся меньшей деформации. То же самое подтверждается и макроструктурой осаженных образцов.

Измерение деформаций непосредственно на торцах осаживаемой заготовки, например при помощи предварительно нанесенной координатной сетки, подтверждает, что на торцах заготовки с $\frac{d}{h} > 4$ существуют зоны скольжения и торможения.

На периферийной кольцевой зоне частицы металла на торцах цилиндрических образцов интенсивно перемещаются относительно бойков в радиальном направлении и расстояния между концентричными рисками, нанесенными на торце образца, увеличиваются. В следующей зоне скольжение заторможено, и диаметры кон-

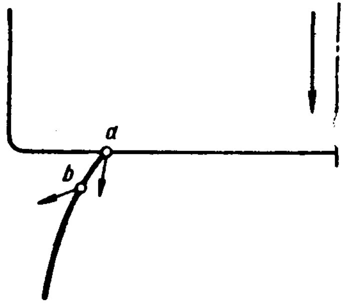


Рис. 7.15

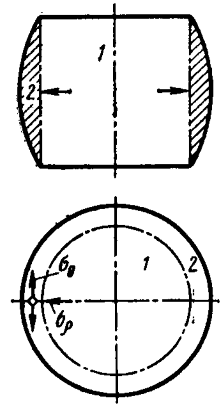


Рис. 7.16

центричных рисок изменяются мало. Наконец, непосредственно вблизи центра торцов на участке с радиусом, примерно равным текущей высоте образца, скольжение практически отсутствует. Этот участок внутри зоны торможения называют зоной прилипания (застоя).

Зоне скольжения соответствует зона, где контактные касательные напряжения $\tau_к = \mu\sigma_z$, а зона торможения образуется при достижении касательными напряжениями ($|\tau_к| = k$) максимальной абсолютной величины.

Зона скольжения почти не наблюдается при осадке заготовок $\frac{d}{h} < 1$, и увеличение диаметра торца в этом случае идет главным образом за счет перехода металла с боковых поверхностей на контактную. Этот переход продолжается, но в значительно меньшей степени и при отношениях $\frac{d}{h} > 1$ [12]. Набеганию боковой поверхности на контактную способствует бочкообразность заготовки в процессе осадки. Как видно из рис. 7.15, при движении бойка по стрелке точки a и b стремятся расположиться на одном уровне поверхности бойка.

Неоднородность деформации при осадке вызывает накопление дополнительных напряжений, искажающих основную схему напряженного состояния, вплоть до того, что в некоторых областях тела могут появиться растягивающие напряжения. Появлению последних способствует также развитие бочкообразности. Схематически можно представить, что при наличии бочкообразности в осаживаемом теле появляются как бы две зоны (рис. 7.16): центральная *1*, имеющая формулу цилиндра, и наружная *2* — кольцеобразная. Внутренняя цилиндрическая зона при течении в процессе осадки, стремясь принять бочкообразную форму, воздействует на наружную и вызывает в ней растягивающие напряжения σ_θ. Наружная зона представляет собой как бы трубку, находящуюся под внутренним давлением σ_ρ.

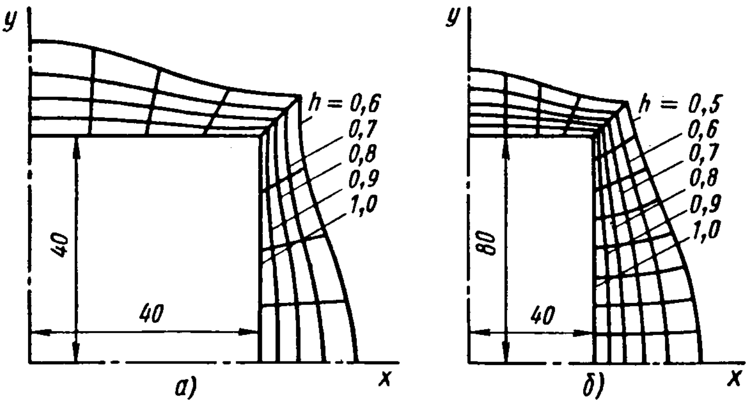


Рис. 7.17

Растягивающие напряжения при осадке в некоторых случаях достигают значительной величины и вызывают на поверхности осаживаемого тела продольные трещины.

При осадке заготовок с прямоугольным поперечным сечением помимо бочкообразности будут искажаться поперечные сечения под действием принципа наименьшего сопротивления (см. стр. 166). При этом ширина заготовки будет увеличиваться в большей степени, чем длина.

Определением зависимости между деформациями по высоте, ширине и длине прямоугольной заготовки при осадке занимались ряд исследователей: А. Ф. Головин [8], С. И. Губкин [12], И. Я. Тарновский [101], А. И. Сконечный, Е. Ф. Шарапин [117], Л. А. Шофман [120], В. Г. Березкин [4] и др., которые, пользуясь различными методами, получили формулы, достаточно отвечающие экспериментальным данным. Однако вполне строгого решения пока нет.

На рис. 7.17 [135] показано формоизменение четверти контура контактной поверхности заготовок: квадратной 80×80 мм (рис. 7.17, *а*) и прямоугольной 160×80 (рис. 7.17, *б*) с начальной высотой 10 мм, осаживаемых последовательно до высоты, указанной на рисунке. Обращает внимание «стойкость» углов, которые и при значительной деформации остаются почти прямыми.

Метод баланса работ, как требующий предварительного выбора уравнений, определяющий поле скоростей, позволяет одновременно воспользоваться этими уравнениями для анализа сложной формы, которую получает контур границ контактной поверхности заготовки в процессе деформации [101, 102, 135, 136 и др.].

Схема течения металла при осадке прямоугольной заготовки по кратчайшим нормалям (см. рис. 5.15) обусловливает максимальное относительное уширение при минимальном относительном удлинении. Это видно при сравнении рис. 5.15 и 5.16.

7.1.5. Работа деформирования при осадке

Пусть в какой-то момент процесса осадки при деформирующем усилии, равном P, высота тела уменьшается на бесконечно малую величину dh. Тогда элементарная работа деформирования

$$dA = P\,dh,$$

а полная работа деформирования при уменьшении высоты от начальной h_0 до заданной h

$$A = \int_{h_0}^{h} P\,dh.$$

Поскольку имеет значение абсолютная величина работы, переставим пределы интегрирования

$$A = \int_{h}^{h_0} P\,dh.$$

Но деформирующее усилие $P = pF$, где p — переменное удельное усилие деформирования, а F — также переменная площадь контакта. Следовательно,

$$A = \int_{h}^{h_0} pF\,dh. \qquad (7.29)$$

Выражение (7.29) представляет собой наиболее общее выражение работы деформирования.

Если предположить, что площади поперечных сечений осаживаемого тела в процессе осадки постоянны по высоте, т. е. бочкообразность отсутствует, то на основании условия постоянства объема

$$F = \frac{V}{h},$$

где V — постоянный объем осаживаемого тела. Подставляя в уравнение (7.29), имеем

$$A = V\int_{h}^{h_0} p\,\frac{dh}{h}. \qquad (7.30)$$

Так как p — величина переменная и зависит от h, то вынести p за знак интеграла нельзя. Однако, учитывая теорему о среднем значении, можно написать

$$A = p_{\text{ср}} V\int_{h}^{h_0} \frac{dh}{h},$$

где $p_{\text{ср}}$ — некоторое среднее значение удельного усилия в промежутке $h_0 - h$.

Интегрируя, получим

$$A = p_{\text{ср}} V \ln \frac{h_0}{h}. \tag{7.31}$$

Произведение $V \ln \frac{h_0}{h}$ представляет собой абсолютную величину смещенного объема V_c (стр. 66), и, следовательно,

$$A = p_{\text{ср}} V_c. \tag{7.32}$$

Таким образом, *работа деформирования равна произведению среднего удельного усилия на смещенный объем.*

В идеальном случае осадки без трения и упрочнения удельное давление равно напряжению текучести, и тогда

$$A = \sigma_s V_c. \tag{7.33}$$

Возьмем теперь наиболее простое выражение удельного усилия при постоянном касательном напряжении для правильной призмы (и цилиндра) (7.24а)

$$p = \sigma_s \left(1 + \frac{\mu_s}{3} \frac{d}{h}\right)$$

и подставим его в интеграл (7.30)

$$A = \sigma_s V \int\limits_h^{h_0} \left(1 + \frac{\mu_s}{3} \frac{d}{h}\right) \frac{dh}{h},$$

но $V = \frac{\pi d^2}{4} h$ и $d = \sqrt{\frac{4V}{\pi}}\, h^{-0,5}$. Отсюда

$$A = \sigma_s V \int\limits_h^{h_0} \left(1 + \frac{\mu_s}{3} \sqrt{\frac{4V}{\pi}}\, h^{-1,5}\right) h^{-1}\, dh.$$

Интегрируя, получим

$$A = \sigma_s V \left\{ \ln h - \frac{\mu_s}{3} \sqrt{\frac{4V}{\pi}} \frac{2}{3} h^{-1,5} \right\} \Bigg|_h^{h_0};$$

подставляя пределы и учитывая, что $\sqrt{\frac{4V}{\pi}}\, h^{-1,5} = \frac{d}{h}$, получим формулу автора [96]

$$A = \sigma_s V \left[\ln \frac{h_0}{h} + \frac{2\mu_s}{9} \left(\frac{d}{h} - \frac{d_0}{h_0} \right) \right]. \tag{7.34}$$

Сравнивая формулы (7.34) и (7.33), легко видеть, что первый член в квадратных скобках отображает работу деформации в случае осадки без трения, а второй член — работу трения.

В случае осадки длинной прямоугольной полосы для работы деформирования получим аналогичное выражение

$$A = \sigma_s^* V \left[\ln \frac{h_0}{h} + \frac{2\mu_s}{8} \left(\frac{a}{h} - \frac{a_0}{h_0} \right) \right]. \tag{7.35}$$

Для малых деформаций $\ln h_0/h = |\delta| = |\varepsilon|$ (см. стр. 65), а удельное усилие p за период малой деформации можно считать постоянным и равным удельному усилию в начальный или конечный момент этой малой деформации. Учитывая это для данного случая, получим

$$A = Vp|\varepsilon|. \tag{7.36}$$

Формулы, выражающие удельное усилие деформирования, позволяют определить требуемую деформирующую силу, т. е. выбрать пресс для осуществления операции. Формулы, определяющие работу деформирования, дают возможность решать вопросы, связанные с выбором молота.

7.2. ТОЛСТОСТЕННАЯ ТРУБА ПОД РАВНОМЕРНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

7.2.1. Общее решение

Перед тем, как приступить к рассмотрению других операций обработки металлов давлением, разберем пластически напряженное состояние толстостенной трубы под действием равномерного внутреннего или внешнего давления, поскольку решение этой задачи понадобится при рассмотрении других операций.

Эта задача осесимметричная — напряжения не зависят от координаты θ. Примем, что осевая нагрузка отсутствует, т. е. $\sigma_z = 0$. Поскольку рассматриваем равномерное давление, напряжения σ_ρ и σ_θ не зависят также и от координаты z. Вместе с тем эти напряжения будут главными, так как касательные напряжения отсутствуют. Условием равновесия будет служить уравнение (3.52)

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0,$$

а условием пластичности — уравнение (5.9а), которое напишем, изменяя индексы 1 и 3 на ρ и θ:

$$\sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_\rho\sigma_\theta = \sigma_s^2.$$

Для упрощения решения применим метод введения новых переменных. Умножим обе части уравнения (5.9) на 4 и к левой части прибавим и отнимем $2\sigma_\rho\sigma_\theta$. Тогда получим

$$\sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2 + 2\sigma_\rho\sigma_\theta + 3\sigma_\rho^2 + 3\sigma_\theta^2 - 6\sigma_\rho\sigma_\theta = 4\sigma_s^2,$$

откуда

$$\left(\frac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}\right)^2+3\left(\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\right)^2=\sigma_s^2,$$

но

$$\frac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}=\sigma_{ср}.$$

Кроме того, обозначим

$$\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}=\sigma_0.$$

Тогда

$$\sigma_{ср}^2+3\sigma_0^2=\sigma_s^2. \qquad (7.37)$$

Выразим $\sigma_{ср}$ и σ_0 через новый аргумент в виде некоторого параметрического угла ϑ так, чтобы уравнение (7.37) тождественно удовлетворялось. Для этого достаточно положить

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ср}&=\frac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}=\sigma_s\cos\vartheta;\\ \sigma_0&=\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s\sin\vartheta.\end{aligned}\right\} \qquad (7.38)$$

Из уравнений (7.38) выразим σ_ρ и σ_θ через параметр ϑ:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\vartheta+\frac{1}{2}\sin\vartheta\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\cos\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right);\\ \sigma_\theta&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\vartheta-\frac{1}{2}\sin\vartheta\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (7.39)$$

Поскольку значения $\sigma_{ср}$ и σ_0, выраженные через параметр ϑ по уравнениям (7.38), тождественно удовлетворяют условию пластичности (7.37), постольку подстановка значений σ_ρ и σ_θ из уравнения (7.39) обращает в тождество и условие (5.9) при любых значениях параметра ϑ.

Условие пластичности, выраженное формулами (5.9) (см. стр. 130), графически представляется контуром пластичности в виде эллипса (см. рис. 5.3), следовательно, и система уравнений (7.39) определяет тот же эллипс. На рис. 7.18 около соответствующих точек эллипса проставлены значения угла ϑ, отвечающие соответствующим значениям σ_ρ и σ_θ по уравнению (7.39). Подставим значения σ_ρ и σ_θ из уравнения (7.39) в уравнение равновесия (3.52)

$$\frac{d\left[\cos\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right)\right]}{d\rho}+\frac{\cos\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{6}\right)}{\rho}=0,$$

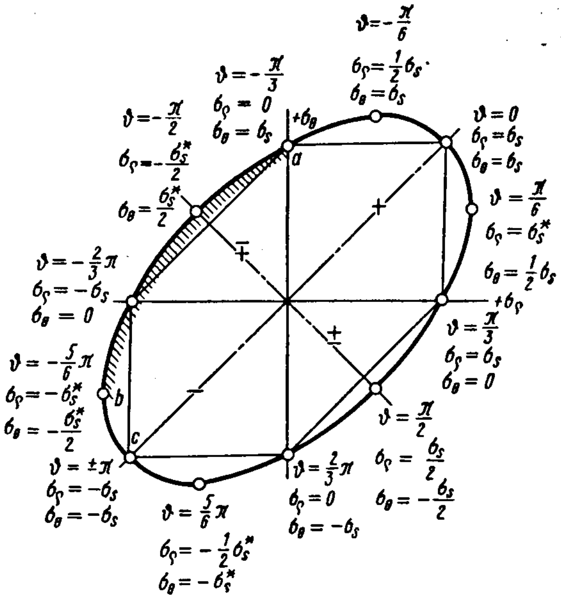


Рис. 7.18

откуда после преобразований

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\operatorname{ctg}\vartheta)\,d\vartheta.$$

Интегрируя, получим

$$\ln\rho=\frac{1}{2}(\vartheta\sqrt{3}-\ln\sin\vartheta+C),$$

откуда после потенцирования, обозначая постоянную e^C через B^2, найдем

$$\rho^2=\frac{B^2}{\sin\vartheta}\exp\vartheta\sqrt{3}.$$

Таким образом, получено [56] общее решение задачи по параметру ϑ:

$$\sigma_\rho=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\cos\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right); \tag{7.40а}$$

$$\sigma_\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{6}\right); \tag{7.40б}$$

$$\rho^2=\frac{B^2}{\sin\vartheta}\exp\vartheta\sqrt{3}. \tag{7.40в}$$

Определяя в частных случаях по краевым условиям постоянную B, получим для этих случаев значения σ_ρ, σ_θ и ρ в функции параметра ϑ. Каждому комплексу значений σ_ρ, σ_θ и параметра ϑ

на контуре пластичности (эллипсе) соответствуют определенные точки. При этом не следует думать, что параметр совпадает с углом, определяющим положение радиуса-вектора эллипса в той или иной точке.

Рассмотрим некоторые варианты.

7.2.2. Труба под внутренним давлением

Если труба подвергается только внутреннему равномерному давлению, то на свободной поверхности при $\rho = R$ (R — наружный радиус трубы) напряжение $\sigma_\rho = 0$, а напряжение σ_θ может быть только растягивающим: $\sigma_\theta > 0$. Подставляя $\sigma_\rho = 0$ в уравнение (7.40а), получим

$$\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

откуда (в пределах $0 \pm \pi$) $\vartheta = \frac{2}{3}\pi$ и $\vartheta = -\frac{1}{3}\pi$.

Подставляя же эти значения ϑ в уравнение (7.40б), увидим, что при $\vartheta = \frac{2}{3}\pi$ $\sigma_\theta < 0$, а при $\vartheta = -\frac{1}{3}\pi$ $\sigma_\theta > 0$; в этом, впрочем, легко убедиться непосредственно на рис. 7.18.

Таким образом, краевому условию соответствует параметр $\vartheta = -\frac{1}{3}\pi$, т. е. точка a на эллипсе пластичности (рис. 7.18). Подставляя $\vartheta = -\frac{1}{3}\pi$ и $\rho = R$ в уравнение (7.40в), определим произвольную постоянную B^2:

$$R^2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} B^2 \exp - \frac{\pi}{3}\sqrt{3}; \quad B^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} R^2 \exp \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$$

и получаем

$$\rho^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2\sin\vartheta} R^2 \exp\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right)\sqrt{3},$$

откуда

$$\frac{R^2}{\rho^2} = -\frac{2\sin\vartheta}{\sqrt{3}} \exp - \left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right)\sqrt{3}. \tag{7.41}$$

Подстановка в уравнения (7.41) и (7.40 а и б) различных значений ϑ, определяющих $\frac{R}{\rho} \geqslant 1$, начиная с $\vartheta = -\frac{1}{3}\pi$, дает значения R/ρ и корреспондирующие каждому из них значения σ_ρ и σ_θ. В результате получим распределение напряжений по сечению трубы, находящейся в пластическом состоянии под действием внутреннего давления.

Если принять, что $\rho = r$, где r — внутренний радиус трубы, то получим те значения σ_ρ на внутренней поверхности трубы, которые необходимы для того, чтобы она находилась в пластическом состоянии. Обозначая внутреннее давление через p и считая его положительным, имеем

$$p = -\sigma_{\rho=r}.$$

Какие значения ϑ следует брать, видно из рис. 7.18. Так как напряжение σ_ρ может быть только отрицательным, то от точки a надо переходить в сторону увеличения абсолютной величины отрицательных значений ϑ. Вторым крайним значением ϑ будет $-\frac{5}{6}\pi$, когда

$$\sigma_\rho = -\sigma_s^*; \quad \sigma_\theta = -0{,}5\sigma_s^* \text{ и } \frac{R}{r} = 2{,}963.$$

При дальнейшем увеличении абсолютного значения угла ϑ величина напряжения σ_ρ [по уравнению (7.40а)] будет падать, что не имеет физического смысла, так как невозможно, чтобы при дальнейшем увеличении толщины стенки требовалось меньшее давление для перевода трубы в пластическое состояние. Таким образом, при $\frac{R}{r} > 2{,}963$ трубу уже нельзя перевести по всей толщине в пластическое состояние. Пластическая зона окружена упругой. Следовательно, пластическому состоянию трубы под внутренним давлением соответствует участок эллипса от точки a $\left(\vartheta = -\frac{1}{3}\pi\right)$ до точки b $\left(\vartheta = -\frac{5}{6}\pi\right)$. На рис. 7.18 этот участок заштрихован.

Вычисленные значения R/r, σ_ρ и σ_θ в функции угла ϑ представлены на рис. 7.19. Имея эти значения, легко построить график напряжений $\sigma_\rho = -p$ в функции R/r (рис. 7.20, кривая *1*).

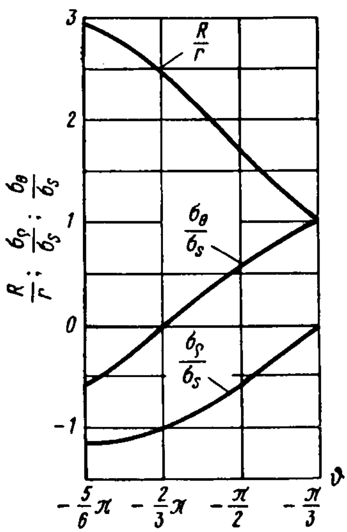


Рис. 7.19

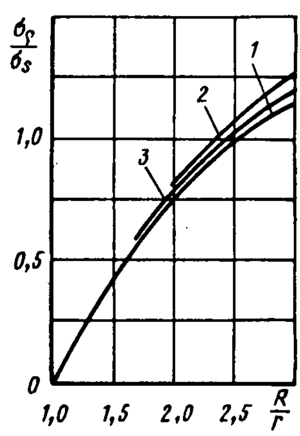


Рис. 7.20

Рассмотрим теперь задачу распределения напряжений в трубе с осевой нагрузкой и притом такой, чтобы деформация в осевом направлении отсутствовала, т. е. чтобы труба находилась в плоском деформированном состоянии.

Уравнение равновесия останется то же (3.52)

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0,$$

а условие пластичности возьмем в форме (5.18)

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm \beta\sigma_s.$$

В нашем случае $\sigma_\rho < \sigma_\theta$, следовательно,

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = - \beta\sigma_s.$$

Подставляя уравнение (5.18) в уравнение (3.52), получим

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} - \frac{\beta\sigma_s}{\rho} = 0,$$

откуда после интегрирования

$$\sigma_\rho = \beta\sigma_s \ln \rho C.$$

При $\rho = R$ $\sigma_\rho = 0$; следовательно,

$$C = \frac{1}{R}.$$

Тогда

$$\sigma_\rho = \beta\sigma_s \ln \frac{\rho}{R},$$

а для внутренней поверхности, когда $\rho = r$,

$$\sigma_\rho = \beta\sigma_s \ln \frac{r}{R}$$

или

$$p = \beta\sigma_s \ln \frac{R}{r}.$$

Для плоского деформированного состояния коэффициент $\beta = 1,155$, и кривая зависимости σ_ρ или p от отношения R/r пройдет выше (рис. 7.20, кривая *2*) кривой *1*, ранее полученной для плоского напряженного состояния.

Приняв же $\beta = 1,1$ и построив кривую *3* (рис. 7.20), мы увидим, что кривые *1* и *3* весьма близки одна к другой. Поэтому для плоского напряженного состояния взамен точного решения в параметрической форме в дальнейшем можно принять [108] приближенное решение

$$-\sigma_\rho = p = 1,1\sigma_s \ln \frac{R}{r} = 1,1\sigma_s \ln \frac{D}{d}. \tag{7.42}$$

7.2.3. Труба со стержнем под внешним давлением

Рассмотрим второй вариант. Пусть внутрь трубы с внутренним радиусом r вставлен жесткий стержень (оправка) того же радиуса. Примем, что трение на поверхности контакта трубы и стержня отсутствует. Снаружи нагрузим трубу равномерным давлением. Спрашивается, какую величину должно иметь это давление, чтобы труба по всей толщине находилась в пластическом состоянии.

Очевидно, что на внутренней поверхности, т. е. при $\rho = r$, радиальное перемещение u_ρ отсутствует. Следовательно, тангенциальная деформация $\varepsilon_\theta = u_\rho/\rho = 0$ [см. уравнения (4.4)]. А это значит, что внутренняя поверхность трубы будет находиться не только в плоском напряженном, но и в плоском деформированном состоянии, причем напряжение σ_θ будет средним:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_\rho + \sigma_z}{2},$$

и поскольку $\sigma_z = 0$,

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_\rho}{2}.$$

Для определения произвольной постоянной B^2 подставляем сперва $\sigma_\theta = \sigma_\rho/2$ в уравнение (7.40б) и решаем систему (7.40а) и (7.40б) относительно ϑ, исключая σ_ρ:

$$\sigma_\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$\frac{1}{2}\sigma_\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)$$

или

$$2\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right),$$

откуда

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

В пределах $0 \pm \pi$ этому значению тангенса соответствуют $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ и $\vartheta = -\frac{5}{6}\pi$.

Удовлетворяет условиям задачи (напряжения сжимающие) $\vartheta = -\frac{5}{6}\pi$, дающее при подстановке в уравнения (7.40) отрицательные значения σ_ρ и σ_θ. В этом можно убедиться также по рис. 7.18, где краевому условию соответствует точка b. Подставим теперь $\rho = r$ и $\vartheta = -\frac{5}{6}\pi$ в уравнение (7.40в):

$$r^2 = 2B^2 \exp - \frac{5\sqrt{3}}{6}\pi;$$

$$B^2 = -\frac{r^2}{2} \exp \frac{5\sqrt{3}}{6}\pi,$$

и, следовательно, получим

$$\frac{\rho^2}{r^2} = -\frac{1}{2\sin\vartheta} \exp \sqrt{3}\left(\vartheta + \frac{5}{6}\pi\right). \qquad (7.43)$$

Поскольку нас интересует необходимое давление $p = -\sigma_\rho$ на наружной поверхности для приведения трубы в пластическое состояние, можно написать

$$\frac{R^2}{r^2} = -\frac{1}{2\sin\vartheta} \exp \sqrt{3}\left(\vartheta + \frac{5}{6}\pi\right). \qquad (7.44)$$

Значения ϑ для рассматриваемого случая лежат в интервале $-\frac{5}{6}\pi \geqslant \vartheta \geqslant -\pi$, что представляет на эллипсе пластичности (см. рис. 7.18) участок bc.

При $\frac{R}{r} = 1$, т. е. когда толщина трубы стремится к 0, $|\sigma_\rho|$ достигает максимального абсолютного значения σ_s^*. При уменьшении же внутреннего диаметра абсолютное значение σ_ρ падает и при $r = 0$ $\left(\frac{R}{r} = \infty\right)$ снижается до σ_s. Таким образом, изменение σ_ρ происходит в ограниченных пределах. На рис. 7.21 дана кривая значений $|\sigma_\rho| = p$ в функции R/r.

Может показаться несколько парадоксальным, что при увеличении толщины стенок наружное давление, необходимое для приведения трубы в пластическое состояние, падает. Однако при $r = 0$ получается сплошной цилиндр, деформированное состояние которого определяется деформациями $-\frac{1}{2}\varepsilon_z = \varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta$, т. е. представляет «простое растяжение» (см. стр. 145), чему соответствует плоское одноименное напряженное состояние $\sigma_\rho = \sigma_\theta = -\sigma_s$ согласно схеме *1,6* (см. рис. 5.12).

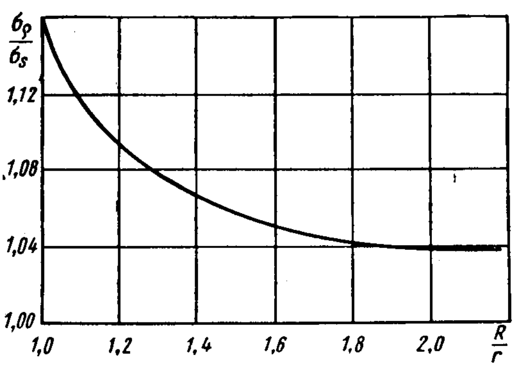


Рис. 7.21

7.3. ПРОТЯЖКА

7.3.1. Протяжка заготовки прямоугольного сечения под плоскими бойками

Протяжка представляет собой кузнечную операцию, посредством которой увеличивается длина заготовки за счет уменьшения ее поперечного сечения. Протяжка в общем случае осуществляется путем последовательных «обжимов» заготовки с кантовкой ее после каждого обжима. Два обжима с кантовкой заготовки между ними будем называть «переходом». Таким образом, в целом процесс деформации при протяжке не является монотонным (см. стр. 222). На каждом обжиме процесс протяжки прямоугольного бруса можно в общем случае представлять как последовательную осадку смежных участков заготовки. При этом к каждому осаживаемому участку примыкают с концов его свободные участки заготовки, не находящиеся под воздействием инструмента — бойка. Последние задерживают течение металла в горизонтальной плоскости по направлению, перпендикулярному к оси заготовки, чем увеличивают неравномерность деформации, а равно и деформирующую силу.

В свою очередь, участок, непосредственно находящийся под бойками, воздействует на примыкающие к нему зоны свободных участков. Поэтому в этих переходных зонах возникают области пластической деформации, протяженность которых зависит от соотношения геометрических размеров, величины трения и других условий деформирования, но в общем случае незначительные. За областями пластической деформации следуют области упругой деформации, а затем свободные участки заготовки становятся полностью недеформированными или, как говорят, следуя И. М. Павлову, «жесткими».

Как показал В. Г. Березкин (рис. 7.22), если отношение величины подачи l_0 к ширине полосы a (относительная подача) большое, свободные участки значительно повышают неравномерность деформации, резко снижая уширение на концах деформируемого участка и весьма мало влияя на величину уширения в середине участка и тем самым на среднюю по участку величину уширения (рис. 7.22, *а*). При уменьшении l_0/a влияние свободных участков на величину среднего уширения сначала возрастает (рис. 7.22, *б*, *в*), а при дальнейшем уменьшении l_0/a становится опять неощутимым, так как деформация приближается к плоской и уширение вообще становится незначительным, так же как и неравномерность [101] деформации по ширине (рис. 7.22, *г*).

Для определения удельного усилия деформирования при протяжке можно пользоваться формулой (7.20), выведенной для плоской осадки при $\frac{a}{h} \leqslant 2$, представив ее в следующем виде:

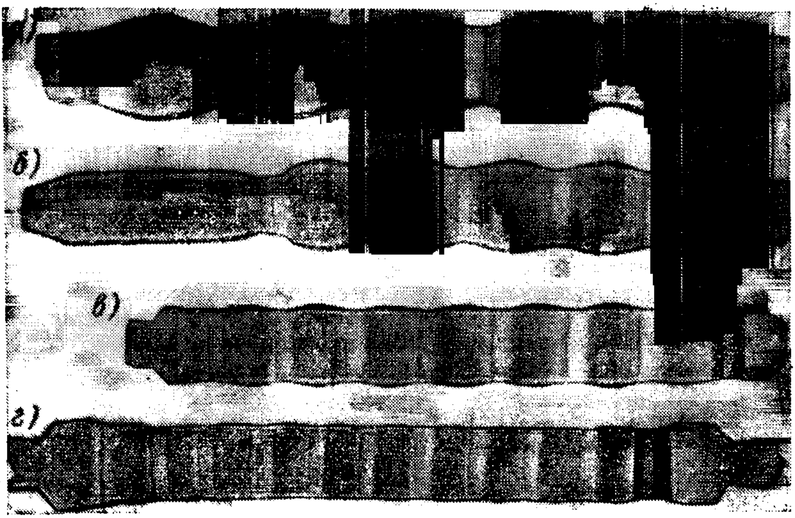


Рис. 7.22

$$p = \sigma_s^* \left(1 + \frac{\mu}{3} \frac{l_0}{h}\right), \tag{7.45}$$

где l_0 — величина подачи; h — высота полосы.

Возможность применения этой формулы для протяжки оправдывается тем, что, как правило, относительная подача $\frac{l_0}{h} < 2$, а принимая деформацию плоской при фактическом наличии уширения, мы как бы учитываем увеличение удельного усилия под влиянием свободных участков.

По мере уменьшения отношения подачи l_0 к высоте заготовки h удельное усилие p уменьшается. Однако теория и эксперимент показывают, что при значениях $\frac{l_0}{h} < 1$ происходит значительное изменение характера напряженного состояния и при дальнейшем уменьшении l_0/h, как показали работы, проведенные под руководством В. И. Залесского, качество проработки металла при протяжке значительно ухудшается.

Задачу вдавливания узкого бойка решили Р. Хилл [113], а также В. В. Соколовский [91] с помощью метода линий скольжения, используя поле, предложенное для этого случая Л. Прандтлем [103]. В свою очередь, А. Д. Томленов [105] на основе работ Р. Хилла и В. В. Соколовского дал замкнутое решение, выразив приближенно зависимость удельного усилия p от l_0/h.

Поле линий скольжения, характеризующее напряженное состояние при протяжке с малыми подачами $\left(\frac{l_0}{h} < 1\right)$, представлено

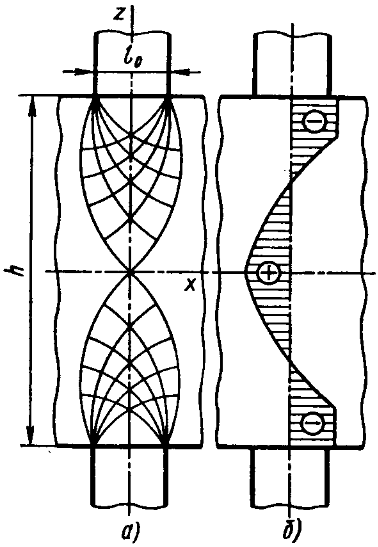


Рис. 7.23

на рис. 7.23, *а*. Особенностями такого напряженного состояния является появление растягивающих напряжений σ_x в зоне горизонтальной плоскости симметрии xy, как показано на эпюре (рис. 7.23, *б*).

Эти растягивающие напряжения при $\frac{l_0}{h} \approx 0{,}25$ достигают σ_s^*.

Наличие растягивающих напряжений, особенно при вытяжке малопластичных сплавов, может привести к образованию трещин.

Для определения необходимого удельного усилия можно пользоваться табл. 7.1, в которой приведены также максимальные значения растягивающих напряжений σ_x (при $z = 0$) [91].

При очень малых l_0/h вновь происходит изменение вида напряженного состояния: вместо осадки начинается вытеснение металла вверх у краев бойка и врезание его в металл. Боек становится топором, а протяжка превращается в рубку.

Определим приближенно работу деформирования при протяжке. Пусть мы начинаем протяжку прямоугольного бруса высотой h_0 и шириной a_0, причем h_0 и a_0 мало отличаются один от другого (рис. 7.24). После первого обжима поперечное сечение получит размеры: высота $h_1 < h_0$ и ширина $a_1 > a_0$. При этом деформацию по высоте надлежит задавать такую, чтобы после обжима было соблюдено соотношение $\frac{a_1}{h_1} < 2{,}5$. В противном случае на втором обжиме может возникнуть продольный изгиб заготовки по новой высоте a_1.

Таблица 7.1

$\frac{l_0}{h}$	1	0,625	0,410	0,275	0,185	0,123	0,081
$\frac{p}{\sigma_s^*}$	1	1,17	1,43	1,79—1,84	2,08	2,54	2,57
$\frac{\sigma_x}{\sigma_s^*}$	0	0,35	0,61	0,75	0,92	1,08	—

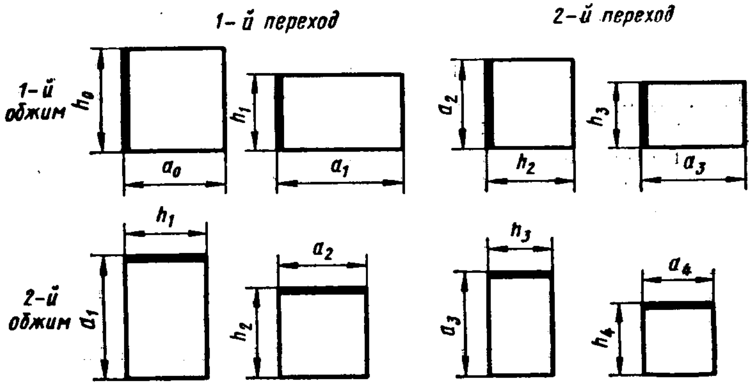


Рис. 7.24

Отношение a/h после обжима назовем коэффициентом перехода φ. В частности, $\frac{a_1}{h_1} = \varphi_1$ и т. д.

Работа деформирования на первый обжим согласно уравнению (7.31)

$$A_1 = p_{ср} V \ln \frac{h_0}{h_1}.$$

После кантовки на втором обжиме высотой заготовки будет ее предыдущая ширина, т. е. a_1, которая после обжима уменьшится до h_2, а размер h_1 превратится в a_2.

Работа деформирования за второй обжим

$$A_2 = p_{ср} V \ln \frac{a_1}{h_2}.$$

При втором переходе получим

$$A_3 = p_{ср} V \ln \frac{a_2}{h_3}; \quad A_4 = p_{ср} V \ln \frac{a_3}{h_4}$$

и далее аналогично получим работы на последующих обжимах и переходах. Работа за весь процесс

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots + A_{n-1} + A_n =$$
$$= p_{ср} V \ln \frac{h_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-2} a_{n-1}}{h_1 h_2 h_3 h_4 \ldots h_{n-1} h_n}.$$

Учитывая, что $\frac{a_1}{h_1} = \varphi_1$; $\frac{a_2}{h_2} = \varphi_2$ и т. д., окончательно имеем [107]

$$A = p_{ср} V \ln \left(\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1} \frac{h_0}{h_n} \right). \tag{7.46}$$

Формула (7.46) показывает резкое увеличение работы деформирования вследствие немонотонности процесса.

7.3.2. Протяжка заготовки круглого сечения

Если обрабатывать круглую заготовку плоскими бойками (рис. 7.25) при небольших обжатиях за каждый удар молота или нажим пресса, непрерывно кантуя ее после каждого удара, то можно получить заготовку меньшей площади также круглого сечения. Однако в практике ковки давно известно, что при таком способе протяжки круглой заготовки даже из пластичной стали по ее оси образуются рыхлоты.

Это объясняется особенностями напряженного состояния круглой заготовки при ее обжатии плоскими бойками, которое в поперечных сечениях круглой заготовки аналогично (рис. 7.25) напряженному состоянию в продольном сечении прямоугольной заготовки при вытяжке с малыми отношениями l_0/h (см. рис. 7.23).

Из рис. 7.25 видно, что при протяжке круглой заготовки ширина a поверхности контакта заготовки с бойком переменная. Чем больше обжатие, тем больше становится и отношение a/h и тем меньше будет величина растягивающих напряжений на оси заготовки.

Однако для того чтобы вести протяжку плоскими бойками «с круга на круг», нельзя применять степень обжатия сколько-нибудь значительную, а вследствие необходимости в непрерывной кантовке растягивающие напряжения, направленные горизонтально, будут совпадать с различными радиусами заготовки.

Таким образом, создается разноименная схема напряженного состояния со значительной ролью растягивающих напряжений, которая обусловливает неблагоприятные условия для проявления металлом пластических свойств (см. стр. 148).

С качественной стороны судить о распределении напряжений можно в известной мере по опытам, поставленным в условиях упругой деформации, близкой к предельной. Используя оптический метод исследования напряжений, Е. П. Унксов [108] для круглого сечения получил, что как вертикально направленное напряжение σ_1, так и горизонтально направленное σ_2 в сечении a—a (рис. 7.26, a) имеют наибольшее значение в центре и падают к периферии, но при этом напряжение σ_2 является растягивающим.

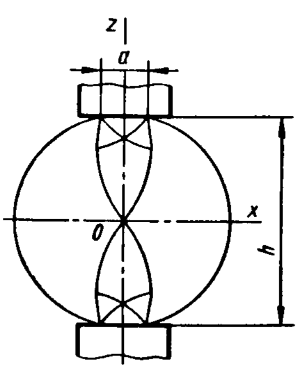


Рис. 7.25

При испытании образцов со срезанными параллельными фасками, что имитирует увеличение степени деформации, обнаруживается, что величина растягивающего напряжения σ_2 сначала снижается по всему сечению a — a (рис. 7.26, $б$) вплоть до нуля в центре сечения (рис. 7.26, $в$) и, наконец, это напряжение σ_2 становится в центре сжимающим (рис. 7.26, $г$). Отсюда можно с достаточной

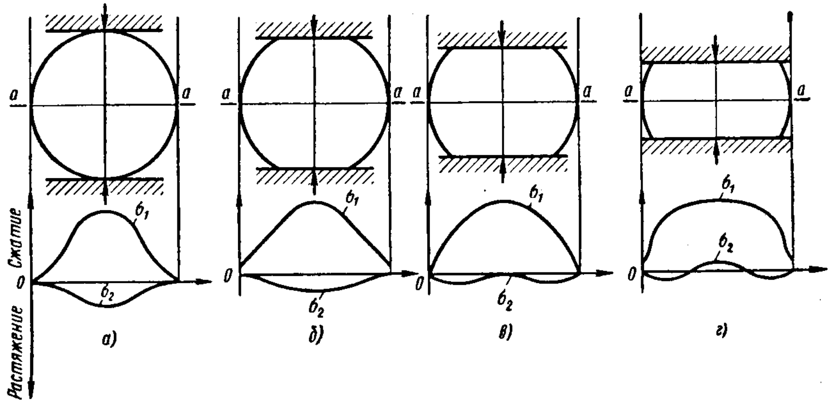


Рис. 7.26

вероятностью заключить, что и при пластической деформации опасные растягивающие напряжения в центре заготовки будут снижаться с увеличением степени деформации [108], что следует, как указано выше, и из рассмотрения поля линий скольжения (см. рис. 7.25).

Учитывая, что при протяжке на круг плоскими бойками легко образуется осевая рыхлость даже при обработке сплавов с большой пластичностью, на практике издавна избегали применять эту схему и пользовались не плоскими бойками, а бойками с вырезом.

Из рис. 7.27 видно, что при вырезных бойках напряженное состояние будет более равномерным и в большей степени приближаться к всестороннему (неравномерному) сжатию. Максимум в этом смысле, очевидно, должен быть при схеме по рис. 7.27, *г*. Бойки по рис. 7.27, *а* и *б* («ромбические») применяют главным образом при обкатке граней слитков, а бойки по рис. 7.27, *в* и *г* — для отделки поковок круглых сечений.

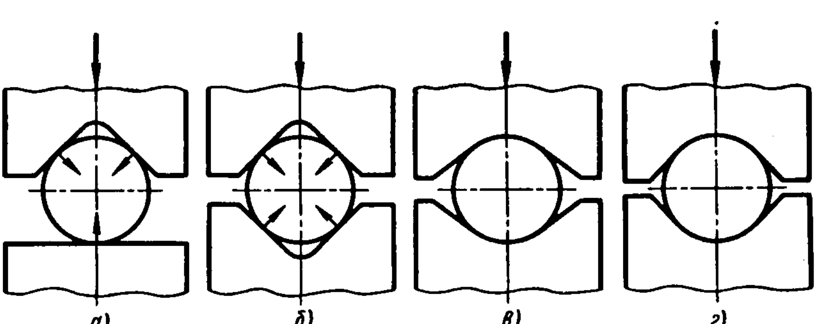


Рис. 7.27

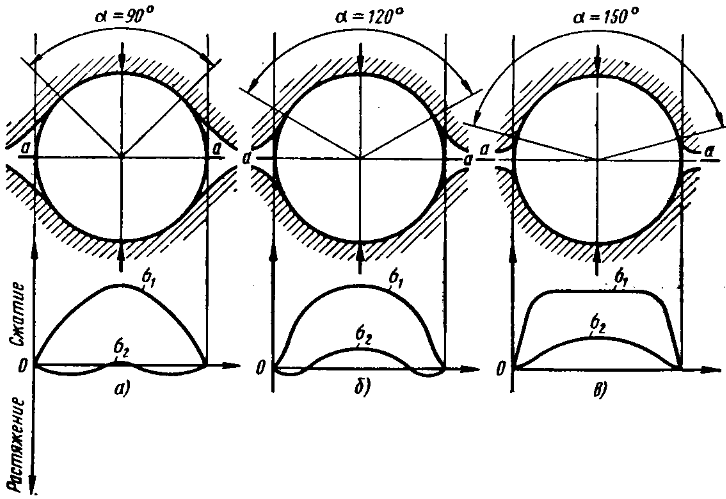


Рис. 7.28

Сказанное подтверждается экспериментально в предположении возможности качественной аналогии с упругой деформацией, близкой к предельной. Из рис. 7.28 видно [108], что с увеличением угла охвата напряжение σ_2 в конечном итоге становится сжимающим по всему сечению *а—а*.

Определим теперь необходимое удельное усилие для протяжки в вырезных круглых бойках типа *г* (см. рис. 7.27). Для упрощения решения рассмотрим предельный случай, считая, что вырез охватывает заготовку по всей окружности контура. Это будет соответствовать схеме напряженного состояния I,7 (см. рис. 5.12). При меньшем охвате удельное усилие, естественно, будет меньше. Вместе с тем учет неполноты охвата потребует дополнительных допущений.

Задача является осесимметричной, а потому примем цилиндрическую систему координат, расположив ось *z* по оси заготовки, а плоскость $\theta\rho$ по плоскости раздела течения металла, которая делит l_0 пополам (рис. 7.29).

Деформация ε_z не зависит от θ, так как напряженное состояние принимается осесимметричным. Будем считать ее не зависящей также и от ρ. Выясним относительную величину деформаций ε_ρ и ε_θ. Формулы (4.4) дают

$$\varepsilon_z = \frac{du_z}{dz}; \quad \varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho};$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho}.$$

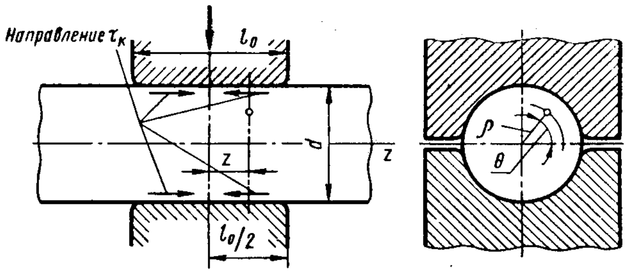


Рис. 7.29

По условию постоянства объема, рассматривая деформацию в каждый данный момент, имеем

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta = -\varepsilon_z.$$

Тогда

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} = -\varepsilon_z$$

или

$$\frac{\partial (\rho u_\rho)}{\partial \rho} = -\varepsilon_z \rho.$$

Интегрируя, получим

$$\rho u_\rho = -\varepsilon_z \frac{\rho^2}{2} + f(z).$$

Произвольную функцию определим из условия, что на оси z, т. е. при $\rho = 0$, перемещение u_ρ также равно нулю. Отсюда следует, что $f(z) = 0$, т. е. перемещение u_ρ, а следовательно, и деформации ε_ρ и ε_θ не зависят от z:

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= -\varepsilon_z \frac{\rho}{2}; \\ \varepsilon_\rho = \frac{du_\rho}{d\rho} &= -\frac{\varepsilon_z}{2}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho} = -\frac{\varepsilon_z}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.47)$$

Таким образом, мы установили, что $\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta$, а отсюда следует (см. стр. 141), что и $\sigma_\rho = \sigma_\theta$. Учитывая это равенство, имеем условия равновесия (3.39)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Касательное напряжение $\tau_{\rho z}$ на оси симметрии заготовки, т. е. при $\rho = 0$, также равно нулю, а на поверхности оно равно $\tau_к$. Считая $\tau_{\rho z}$ за линейную функцию ρ, получим

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} = \frac{2\tau_к}{d},$$

и, учитывая, что на контактной поверхности, которая нас интересует, σ_z не зависит от ρ и $\partial\sigma_z/\partial z = d\sigma_z/dz$, а $\rho = 0{,}5d$, по второму уравнению системы (а) получим

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{4\tau_к}{d} = 0.$$

Используя условие пластичности в форме (6.11), имеем

$$d\sigma_z = d\sigma_\rho,$$

откуда

$$\frac{d\sigma_\rho}{dz} + \frac{4\tau_к}{d} = 0. \tag{б}$$

На краю бойка, т. е. при $z = 0{,}5l_0$, σ_ρ будет таким же, как в случае отсутствия трения, т. е. при $z = 0{,}5l_0$ $\sigma_\rho = -\sigma_s$. Контактное касательное напряжение на краю бойка принимаем $\tau_к = -\mu_s\sigma_s$.

Поскольку на практике при вытяжке в вырезных бойках отношение $\frac{l_0}{d} < 2$, то по аналогии с процессом осадки полосы можно предположить, что падение касательных напряжений на контактной поверхности начнется непосредственно от края бойка к оси (в данном случае размеры l_0 и d и координата z аналогичны соответственно размерам a и h и координате x при осадке полосы).

Поэтому изменение контактных касательных напряжений при протяжке в вырезных бойках можно представить уравнением (7.10в) (см. стр. 246), заменив в нем обозначения соответственно сказанному выше:

$$\tau_к = -2\mu_s\sigma_s\frac{z}{l_0}.$$

Подставляя значение $\tau_к$ в уравнение (б), получим

$$\frac{d\sigma_\rho}{dz} = 8\mu_s\sigma_s\frac{z}{dl_0} = 0,$$

откуда после интегрирования

$$\sigma_\rho = \frac{4\mu_s\sigma_s}{dl_0}z^2 + C.$$

Из условия, что при $z = 0{,}5l_0$ $\sigma_\rho = -\sigma_s$, определим постоянную C:

$$C = -\sigma_s\left(1 + \frac{\mu_s l_0}{d}\right),$$

и получим окончательно

$$\sigma_\rho = -\sigma_s\left[1 + \frac{4\mu_s}{dl_0}\left(\frac{l_0^2}{4} - z^2\right)\right]. \tag{7.48}$$

Деформирующую силу определим на основании интеграла (6.1), учитывая, что $dF = d \cdot dz$ (σ_ρ не зависит от θ):

$$P = 2 \int_0^{0,5l_0} |\sigma_\rho| d \cdot dz = 2 \int_0^{0,5l_0} \sigma_s \left[1 + \frac{4\mu_s}{dl_0}\left(\frac{l_0^2}{4} - z^2\right)\right] d \cdot dz.$$

После интегрирования получим

$$P = dl_0\sigma_s \left(1 + \frac{2}{3}\mu_s \frac{l_0}{d}\right). \tag{7.49}$$

Разделив на площадь проекции контактной поверхности dl_0, определим давление:

$$p = \sigma_s \left(1 + \frac{2}{3}\mu_s \frac{l_0}{d}\right). \tag{7.50}$$

В заключение этого параграфа определим удельное усилие для протяжки в вырезных бойках с оправкой, применяемой при изготовлении полых поковок.

Схема этой операции представлена на рис. 7.30. Существенным ее отличием от предыдущей является то, что трение происходит по двум поверхностям: наружной (бойка) и внутренней (оправки). Для решения этой задачи допустим, как и в предыдущем случае, что напряжение σ_z на контактной поверхности не зависит от координаты ρ:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{d\sigma_z}{dz}.$$

Из системы уравнений равновесия (3.39) необходимо второе уравнение, которое напишется так:

$$\frac{d\tau_{\rho z}}{d\rho} + \frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \tag{г}$$

Касательные напряжения $\tau_{\rho z}$, где-то при $0,5D > \rho > 0,5d$, должны обратиться в нуль (рис. 7.30). Предположим, что это произойдет на среднем радиусе заготовки при $\rho = \frac{D+d}{4}$.

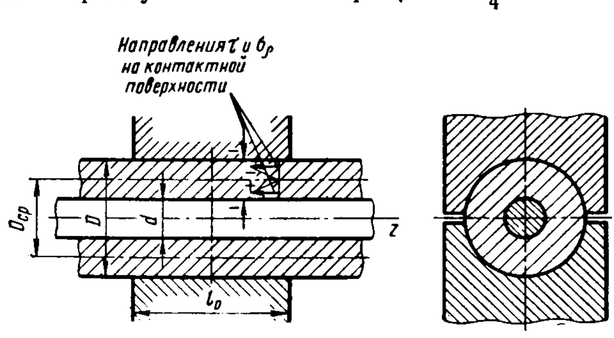


Рис. 7.30

Для получения условия равновесия на наружной контактной поверхности допустим, что $\tau_{\rho z}$ является линейной функцией ρ. Тогда

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} = \frac{\tau_к}{0{,}5D - 0{,}25(D+d)} = \frac{4\tau_к}{D-d}.$$

Подставляя значения

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho};\quad \rho = 0{,}5D \text{ и } \tau_{\rho z} = \tau_к$$

в уравнение (*г*), получим для наружной контактной поверхности

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{4\tau_к}{D-d} + \frac{2\tau_к}{D} = 0.$$

Используем условие пластичности в форме (6.11)

$$d\sigma_z = d\sigma_\rho,$$

и, следовательно,

$$\frac{d\sigma_\rho}{dz} + \frac{4\tau_к}{D-d} + \frac{2\tau_к}{D} = 0. \qquad (д)$$

На краю бойка, т. е. при $z = 0{,}5l_0$, напряжение σ_ρ должно быть таким же, как при протяжке с оправкой при отсутствии трения. Схема же такой операции представляет собой не что иное, как деформацию трубы с оправкой, подвергнутой внешнему равномерному давлению, т. е. задачу, рассмотренную ранее (см. стр. 274). Из рис. 7.21 видно, что требуемое напряжение уменьшается с увеличением толщины стенок.

На практике при протяжке с оправкой отношение D/d находится обычно в пределах 1,3—3, что по рис. 7.20 соответствует значениям $|\sigma_\rho|$, равным (1.08—1,03)σ_s.

Примем некоторое среднее значение, учитывая незначительную величину коэффициента, например 1,05, т. е. будем считать, что при протяжке с оправкой $\sigma_\rho = -1{,}05\sigma_s$ при $z = 0{,}5l_0$.

Аналогично, как при протяжке в вырезных бойках сплошной заготовки, примем, что

$$\tau_к = -2\mu_s \cdot 1{,}05\sigma_s \frac{z}{l_0}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (*d*) и произведя преобразования, получим

$$\frac{d\sigma_\rho}{dz} - 4\mu_s \cdot 1{,}05\sigma_s\left(\frac{2}{D-d} + \frac{1}{D}\right)\frac{z}{l_0} = 0.$$

Интегрируя и учитывая, что $D - d = 2s$, где s — толщина стенки, получим

$$\sigma_\rho = 2\mu_s \cdot 1{,}05\sigma_s \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{D}\right) \frac{z^2}{l_0} + C;$$

$$C = -1{,}05\sigma_s \left[1 + 2\mu_s \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{D}\right) \frac{l_0}{4}\right];$$

$$\sigma_\rho = -1{,}05\sigma_s \left[1 + \frac{2\mu_s}{l} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{D}\right) \left(\frac{l_0^2}{4} - z^2\right)\right]. \qquad (7.51)$$

Деформирующее усилие определяется, как всегда, равнодействующей нормальных напряжений по проекции контактной поверхности:

$$P = 1{,}05\sigma_s l_0 D \left[1 + \mu_s \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{D}\right) \frac{l_0}{3}\right],$$

а удельное усилие деформирования

$$p = 1{,}05\sigma_s \left[1 + \frac{1}{3} \mu_s \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{D}\right) l_0\right]. \qquad (7.52)$$

При $d = 0$, т. е. при $s = D/2$, формула (7.52) смысла не имеет, поскольку при $d = 0$ не может быть второй поверхности трения. Таким образом, формула (7.52) не может перейти в формулу (7.50).

7.4. ВЫДАВЛИВАНИЕ

7.4.1. Общие положения

При штамповке выдавливанием происходит истечение металла, заключенного в замкнутую полость, через отверстие в ней, форма которого определяет поперечное сечение выдавленного участка деформированной заготовки.

Штамповку выдавливанием применяют для получения поковок с формой стержня (цилиндрического, конического, ступенчатого и т. п.) с утолщением на одном конце его. Выдавливанием получают стержневые элементы таких поковок.

Штамповка выдавливанием принципиально не отличается от процессов прессования. Последние уже давно широко распространены для производства прутков, профилей и труб из различных материалов. Этим объясняется, что большинство исследований посвящено именно процессам прессования. Основоположниками работ в области физики процесса прессования являются Н. С. Курнаков и С. Ф. Жемчужный [43]. Ценнейшие экспериментальные и теоретические исследования проводил С. И. Губкин. Большие обобщающие работы по технологии прессования принадлежат П. С. Истомину.

И. М. Павлов [64] изучал влияние дополнительных напряжений в процессе выдавливания и создал оригинальную теорию, объясняющую образование трещин (елки). Фундаментальный обоб-

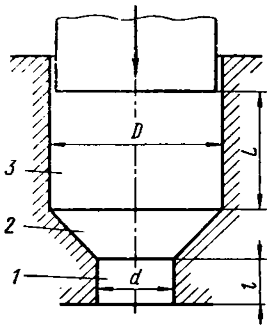


Рис. 7.31

щающий и оригинальный труд по теории прессования создал И. Л. Перлин [66]. Непосредственно штамповке выдавливанием ряд работ посвятили А. В. Ребельский [76] и Л. А. Шофман [121].

Из зарубежных исследователей успешно занимались прессованием Х. Ункель [131], Г. Закс и В. Эйсбейн [127], Э. Зибель [28], Э. Фангмайер. Впоследствии к изучению процессов прессования был применен метод линий скольжения (Р. Хилл [113], В. Прагер и Ф. Ходж [73], А. Г. Грин и Д. Ф. В. Бишоп). Позже В. Джонсон, Х. Кудо [20], а также Ш. Кобаяши разработали метод верхних оценок; Э. Томсен применил метод визиопластичности [106].

Штамповка выдавливанием протекает при ярко выраженной схеме неравномерного всестороннего сжатия, обеспечивающей металлу высокую пластичность.

Штамповка выдавливанием, не отличаясь принципиально по схеме напряженно-деформированного состояния от процесса прессования прутков, профилей и труб, тем не менее имеет свои характерные особенности. При штамповке выдавливанием: 1) расстояние от торца пуансона до дна матрицы в конце рабочего хода обусловлено заданным размером утолщенного элемента поковки, а не толщиной минимально допустимого пресс-остатка; 2) длина стержневой части поковки определяется ее конструкцией, но в то же время возможность выполнения стержневой части ограничена параметрами пресса; 3) поковка извлекается из штампа при обратном ходе пресса при помощи выталкивателя, а не отделяется от пресс-остатка, как пруток при прессовании.

В дальнейшем будем в основном рассматривать выдавливание тел вращения, когда напряженное состояние в очаге деформации осесимметрично и схемой главных напряжений будет схема *1*, *7* (см. рис. 5. 12).

Рассмотрим простейший случай штамповки выдавливанием, когда матрица состоит из трех рабочих участков (рис. 7.31): выходного цилиндрического участка *1*, который калибрует стержневую часть поковки; заходного конического участка *2*, в котором происходит основная деформация исходной заготовки и который образует переход от стержня к утолщению поковки; наконец, цилиндрического участка *3*, являющегося приемником («контейнером») исходной заготовки с размерами D и L (утолщенную часть поковки можно подвергать дальнейшей деформации на последующих переходах).

В соответствии с этим условия течения металла необходимо рассмотреть по всем этим участкам, в совокупности определяющим усилие выдавливания.

7.4.2. Цилиндрический выходной участок матрицы

Металл, протекающий через цилиндрическую часть матрицы, не претерпевает формоизменения. Деформирование заканчивается в конце предыдущего участка. Следовательно, по закону наличия упругой деформации при пластическом деформировании (см. стр. 62) металл в выходной цилиндрической части матрицы находится в упругом напряженном состоянии. Отсюда следует, что максимальная абсолютная величина радиального напряжения $\sigma_{\rho 1}$ у стенки матрицы не может превзойти напряжения текучести σ_{s1}[1]. Фактически это напряжение меньше, поскольку матрица не является абсолютно жесткой и сама упруго деформируется. Примем максимально возможное абсолютное значение напряжения $\sigma_{\rho 1}$:

$$|\sigma_{\rho 1}| = \sigma_{s1}.$$

Сопротивление движению металла будет создавать контактное трение, равнодействующая которого (рис. 7.31)

$$P_1 = \mu_1 |\sigma_{\rho 1}| \pi\, dl = \mu_1 \sigma_{s1} \pi\, dl,$$

а необходимое удельное усилие p на входном сечении цилиндрической части матрицы

$$p_1 = \frac{P_1}{F_1} = \frac{\mu_1 \sigma_{s1} \pi\, dl}{\frac{\pi d^2}{4}},$$

откуда окончательно получаем

$$p_1 = \sigma_{s1} \frac{4\mu_1 l}{d}. \tag{7.53}$$

7.4.3. Конический участок матрицы

Рассмотрим этот участок, используя сферические координаты ρ, φ и θ. За верхнюю границу очага деформации приближенно примем поверхность mfn шарового сектора с радиусом b и углом при вершине конуса 2γ (рис. 7.32). Нижней границей будем считать поверхность $m'f'n'$ шарового сектора с радиусом a, с тем же углом при вершине конуса 2γ. Давление на нижнюю границу очага деформации известно — это давление p_1; удельное усилие p_2 на верхней границе является искомым. Примем, что смещения частиц в очаге деформации происходят по радиусам ρ. Тогда смещения по координатам φ и θ будут равны нулю: $u_\varphi = u_\theta = 0$.

Задачу решим, пользуясь методом баланса работ. Применительно к данному случаю уравнение (6.40) можно написать так:

$$A_2 = A_D + A_T + A_1, \tag{a}$$

---

[1] В дальнейшем к обозначениям напряжения текучести σ_s и коэффициента трения μ будут добавляться индексы участков, так как величины σ_s и μ по участкам в общем случае различны.

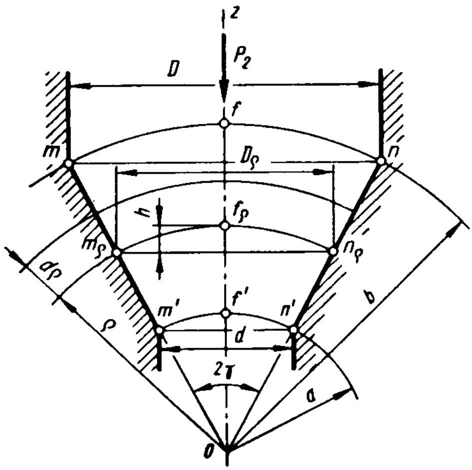


Рис. 7.32

где A_2 — работа равнодействующей P_2 активного давления на верхнюю (по рис. 7.32) поверхность очага деформации; A_D — работа деформации формы; A_T — работа сил контактного трения на конической контактной поверхности; наконец, A_1 — работа сопротивлений со стороны цилиндрического участка *1*.

Допустим, что за какой-то весьма малый промежуток времени равнодействующая P_2, направленная по оси z, осуществит работу на перемещении u_z. Тогда работа A_2 выразится так:

$$A_2 = P_2 u_z. \tag{б}$$

Составляющие правой части уравнения (а) определим, используя формулы (6.41) и (6.42). Работа деформации

$$A_D = \iiint\limits_V \sigma_{s2} \varepsilon_i \, dV.$$

Так как в данном случае $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$, а $\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\rho = 0$, то $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = -0{,}5\varepsilon_\rho$ и интенсивность деформаций ε_i по выражению (4.11) представится в виде $\varepsilon_i = \pm\varepsilon_\rho$.

В свою очередь, по формуле (4.4)

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \text{ и } \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho},$$

откуда

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + 2\frac{u_\rho}{\rho} = 0;$$

это уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial (u_\rho \rho^2)}{\partial \rho} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$u_\rho \rho^2 = f(\varphi).$$

На верхней граничной поверхности очага деформации ($\rho = b$) при $\varphi = 0$ перемещение $u_\rho = u_z$.

Следовательно, в точке $\rho = b$ и $\varphi = 0$

$$f(\varphi) = f(0) \approx u_z b^2.$$

Допустим, что и во всех точках верхней границы очага деформации перемещение u_ρ не зависит от φ, оставаясь равным $u_z b^2$*.

Тогда

$$u_\rho \rho^2 = u_z b^2$$

и, следовательно,

$$u_\rho = u_z b^2 \rho^{-2};$$

$$|\varepsilon_\rho| = \frac{du_\rho}{d\rho} = 2u_z b^2 \rho^{-3} = \varepsilon_i. \qquad (в)$$

Для определения dV выделим элементарный объем, ограниченный сферическими поверхностями с радиусами соответственно ρ и $\rho + d\rho$ и конической поверхностью матрицы (рис. 7.32).

Значение этого элементарного объема

$$dV = (\text{площадь } m_\rho f_\rho n_\rho)\, d\rho,$$

площадь $m_\rho f_\rho n_\rho$ представляет собой площадь шарового сегмента, т. е. $m_\rho f_\rho n_\rho = 2\pi\rho h$,

но

$$h = \rho - \rho\cos\gamma = \rho\,(1 - \cos\gamma),$$

следовательно,

$$dV = 2\pi\,(1 - \cos\gamma)\,\rho^2\, d\rho. \qquad (г)$$

Таким образом, после подстановки (в) и (г) в уравнение (6.41) получим

$$A_D = \sigma_{s2} 4\pi u_z b^2 (1 - \cos\gamma) \int_a^b \frac{d\rho}{\rho}. \qquad (д)$$

Работа трения, согласно уравнению (6.42), будет

$$A_T = \iint_F \tau_к u_{к\rho}\, dF,$$

где $\tau_к$ — элементарная сила трения (напряжение, численно равное касательному напряжению на контактной поверхности); $u_{к\rho}$ — перемещение u_ρ на контактной поверхности:

$$u_{к\rho} = u_\rho = u_z b^2 \rho^{-2},$$

и дифференциал площади (рис. 7.32)

$$dF = \pi D_\rho\, d\rho = 2\pi\rho \sin\gamma\, d\rho.$$

---

* Нахождение произвольной функции $f(\varphi)$ и последующее решение не представляют затруднений. Однако сделанное допущение компенсирует преуменьшение результатов, неизбежное при использовании уравнения (а), в котором для упрощения не учтены дополнительные сдвиги в результате разрыва скоростей на сферических поверхностях при входе и выходе из конического участка матрицы.

После подстановки получим

$$A_{\text{т}} = \tau_{\text{к}} 2\pi u_z b^2 \sin\gamma \int_a^b \frac{d\rho}{\rho}. \tag{е}$$

Напряжение $\tau_{\text{к}}$ считаем постоянным, поэтому и выносим его за знак интеграла.

Наконец, для работы сопротивлений со стороны цилиндрического участка *1* имеем

$$A_1 = p_1 \frac{\pi d^2}{4} u_1.$$

Перемещение u_1 равно перемещению u_ρ при $\rho = a$, т. е.

$$u_1 = u_z \frac{b^2}{a^2};$$

$$A_1 = p_1 \frac{\pi d^2}{4} u_z \frac{b^2}{a^2}. \tag{ж}$$

Теперь, подставляя уравнения (б), (д), (е) и (ж) в (а), получим

$$P_2 u_z = \sigma_{s2} 4\pi u_z b^2 (1 - \cos\gamma) \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} +$$

$$+ \tau_{\text{к}} \cdot 2\pi u_z b^2 \sin\gamma \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} + p_1 \frac{\pi d^2}{4} \frac{b^2}{a^2} u_z,$$

откуда после интегрирования и деления на u_z и учитывая, что $2 \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b^2}{a^2}$, имеем

$$P_2 = [\tau_{\text{к}} \pi b^2 \sin\gamma + \sigma_{s2} \cdot 2\pi b^2 (1 - \cos\gamma)] \ln \frac{b^2}{a^2} + p_1 \frac{\pi d^2}{4} \frac{b^2}{a^2},$$

но (рис. 7.32)

$$b^2 = \frac{D^2}{4 \sin^2\gamma} = \frac{D^2}{4 (1 - \cos^2\gamma)}$$

и

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{D^2}{d^2} = \frac{F}{f},$$

поэтому после деления на площадь приемника $F = \frac{\pi D^2}{4}$ (которую считаем равной площади пуансона) получим удельное усилие

$$p_2 = \left(\frac{\tau_{\text{к}}}{\sin\gamma} + \frac{2\sigma_{s2}}{1 + \cos\gamma} \right) \ln \frac{F}{f} + p_1. \tag{7.54}$$

Эту формулу ранее вывел И. Л. Перлин, использовав другой метод [66].

Для практического использования формулы (7.54) необходимо задаться тем или иным значением $\tau_к$.

Так как напряжение σ_φ больше напряжения σ_ρ (см. схему *I*, *7* на рис. 5.12 — максимальной деформации растяжения соответствует минимальное по абсолютной величине напряжение), то его величина не может быть меньше σ_{s2} даже на выходной кромке конического участка матрицы, не имеющей калибрующего пояска. Сказанное дает основание принять для подстановки в формулу (7.54) некоторое среднее значение $\tau_к$ в виде

$$\tau_к = \mu_{s2}\sigma_{s2}. \tag{7.55}$$

Подставляя (7.55) в (7.54), получим

$$p_2 = \sigma_{s2}\left(\frac{\mu_{s2}}{\sin\gamma} + \frac{2}{1+\cos\gamma}\right)\ln\frac{F}{f} + p_1. \tag{7.56}$$

Из вывода формулы (7.56) [учитывая формулы (7.54) и (7.55)] следует, что в раскрытом виде член

$$\sigma_{s2}\left(\frac{\mu_{s2}}{\sin\gamma}\right)\ln\frac{F}{f} = p_{2\,тр} \tag{7.56а}$$

учитывает трение в матричной воронке.

В свою очередь, член

$$\sigma_{s2}\frac{2}{1+\cos\gamma}\ln\frac{F}{f} = p_{2д} \tag{7.56б}$$

определяет удельное усилие, необходимое непосредственно для деформации выдавливания, но с учетом дополнительных сдвигов. И. Л. Перлин считает, что зависимость удельного усилия $p_{2д}$ от угла γ, определяемая коэффициентом $\frac{2}{1+\cos\gamma} = \frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}$, отражает существующие представления о течении процесса выдавливания через коническую матрицу и о росте дополнительных сдвигов с увеличением угла γ [66].

При штамповке выдавливанием центральный угол 2γ не должен превышать так называемого угла естественного течения. При углах 2γ бо̀льших, чем последний, образуются «мертвые углы» или жесткие зоны недеформируемого металла. Отсутствие жестких зон обеспечивается при $2\gamma < 110°$, хотя в некоторых случаях они могут отсутствовать и при значениях 2γ, достигающих 130°.

При прессовании же прутков, профилей, труб, когда остаток металла в приемнике (контейнере) удаляют в отход («пресс-остаток»), угол 2γ можно делать больше угла естественного течения, так как возможный скол уйдет в отход.

Для малых углов γ (при $\gamma \leqslant 30°$), допуская отклонение меньше 6%, формулу (7.56) можно упростить, принимая $\sin\gamma \approx \gamma$ и $\cos\gamma \approx 1$:

$$p_2 = \sigma_{s2}\left(1 + \frac{\mu_{s2}}{\gamma}\right)\ln\frac{F}{f} + p_1. \tag{7.57}$$

Если в формуле (7.57) не учитывать трения по стенкам матрицы и в калибрующем пояске, то она примет вид

$$p_2 = \sigma_{s2} \ln \frac{F}{f}; \qquad (7.57а)$$

это будет идеальный случай, когда деформация протекает вполне равномерно.

7.4.4. Цилиндрический участок-приемник

Условия течения металла в приемнике отличаются большой сложностью.

Как показывают опыты на образцах с нанесенной координатной сеткой, если коэффициент контактного трения относительно невелик, а пластические свойства однородны по всему объему металла, то металл проталкивается пуансоном по приемнику и в нем практически не образуется очаг пластической деформации. Координатная сетка остается почти не искаженной (рис. 7.33, *а*).

При увеличении контактного трения, а также при некоторой неоднородности пластических свойств металла наблюдается ясно выраженная пластическая деформация, причем слои металла, расположенные в осевой части приемника, текут более интенсивно по сравнению со слоями, примыкающими к его стенкам, что ясно видно по искажению координатной сетки (рис. 7.33, *б*).

Наконец, при больших коэффициентах трения и значительной неоднородности пластических свойств металла в центральной и периферийной зонах, например в результате охлаждения последних за счет отвода теплоты стенками приемника, наблюдается резкое развитие пластической деформации металла по всему объему приемника при значительной неравномерности ее. Металл в зо-

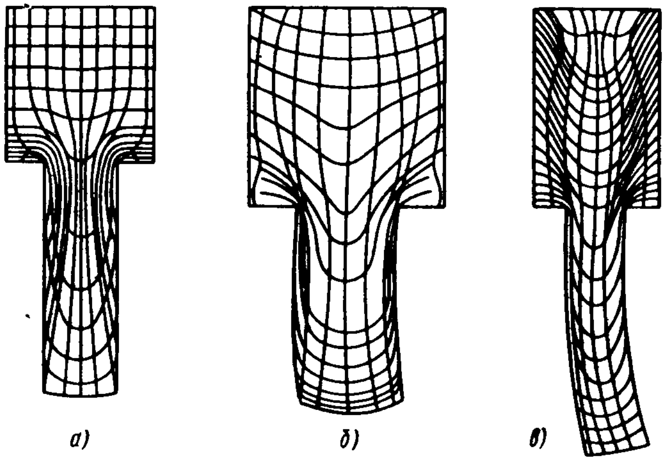


Рис. 7.33

нах, примыкающих к поверхности приемника, иногда течет в направлении, обратном движению пуансона, а затем меняет направление своего движения, питая центральную зону, где движение частиц металла совпадает с направлением движения пуансона. Искажения координатной сетки для такого случая представлены на рис. 7.33, *в*.

При очаге деформации данного вида деформированный металл, особенно цветной, отличается большой неоднородностью по величине зерен и наличием значительных остаточных напряжений.

На практике штамповки выдавливанием и прессования наблюдаются премущественно первый вид очага деформации в приемнике, что достигается применением современных смазок.

Поскольку пластическая деформация в приемнике в таком случае практически отсутствует, можно считать, что металл передвигается как одно целое, находясь в состоянии всестороннего упругого сжатия.

Некоторые исследователи раньше предполагали, что давление металла на боковые стенки приемника превышает осевое, т. е. что $\sigma_\rho > \sigma_z$. Это положение, однако, не соответствует действительности, что можно показать следующим образом.

Пусть к торцам некоторого цилиндра приложена равномерная нормальная нагрузка p, а по боковой поверхности равномерное давление p' и соотношение между p и p' таково, что происходит сжатие цилиндра, т. е.

$$\varepsilon_z < 0, \text{ а } \varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta > 0.$$

Из уравнений равновесия (3.39) явствует, что при такой нагрузке напряжения не зависят от координат:

$$\sigma_z = -p; \ \sigma_\rho = \sigma_\theta = -p'.$$

Определим деформацию $\varepsilon_\rho = \varepsilon_\theta$:

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{E}[\sigma_\rho - \mu_p(\sigma_z + \sigma_\theta)],$$

и так как $\sigma_\theta = \sigma_\rho$, то

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{E}[(1-\mu_p)\sigma_\rho - \mu_p\sigma_z]$$

(μ_p — коэффициент Пуассона).

Пусть деформация ε_ρ равна нулю. Это будет аналогично помещению образца в жесткий (недеформируемый) приемник. Тогда получим

$$(1-\mu_p)\sigma_\rho - \mu_p\sigma_z = 0,$$

откуда

$$\sigma_\rho = \frac{\mu_p}{1-\mu_p}\sigma_z.$$

Так как $\mu_p < 0{,}5$, то из последнего выражения ясно, что $\sigma_\rho < \sigma_z$, и лишь в предельном случае при $\mu_p = 0{,}5$ и значительном увеличении σ_z $\sigma_\rho \rightrightarrows \sigma_z$. При упругом приемнике всегда $\sigma_\rho < \sigma_z$.

Так, Л. В. Прозоров [75] указывает, что при благоприятных условиях трения давление на стенки приемника заметно меньше осевого и лишь при выдавливании без смазки приближается к осевому.

Что касается осевого давления p_3 на торец пуансона, то оно, естественно, больше давления p_2 вследствие трения металла о стенки приемника:

$$p_3 = p_2 + p_{\text{тр}}.$$

Усилие трения уменьшается по мере уменьшения длины L при движении пуансона (см. рис. 7.31) приблизительно по линейной зависимости, но [75] при хорошей смазке незначительно (при изменении вдвое длины L усилие трения изменяется на 3—5%).

Многочисленные эксперименты Л. В. Прозорова показывают, что элементарные силы контактного трения в приемнике *3* при нормальных условиях выдавливания не превышают $0{,}5\sigma_{s3}$. Сказанное позволяет принять напряжение трения $\tau_к$ постоянным и равным с некоторым преувеличением $0{,}5\sigma_{s3}$. Тогда усилие трения (см. рис. 7.31)

$$P_{\text{тр}} = 0{,}5\sigma_{s3}\pi DL,$$

откуда делением на $\pi D^2/4$ получим

$$p_{\text{тр}} = \sigma_{s3}\frac{2L}{D},$$

и, следовательно, удельное усилие на пуансоне

$$p_3 = p_2 + \sigma_{s3}\frac{2L}{D}. \qquad (7.58)$$

7.4.5. Удельное усилие деформирования при различных формах инструмента

Инструмент по рис 7.34, *а*. Эта форма инструмента является основной для штамповки выдавливанием поковок в виде цилиндрического стержня с утолщением на одном конце. В качестве расчетной используем формулу (7.58) с подстановкой значения p_2 из формулы (7.56) и учетом формулы (7.53):

$$p = \sigma_{s2}\left(\frac{\mu_{s2}}{\sin\gamma} + \frac{2}{1+\cos\gamma}\right)\ln\frac{F}{f} + \sigma_{s3}\frac{2L}{D} + \sigma_{s1}\frac{4\mu_1 l}{d}. \qquad (7.59)$$

Если заходной угол матрицы 2γ больше угла естественного течения, то в формулу (7.59) следует подставлять последний (100—130°).

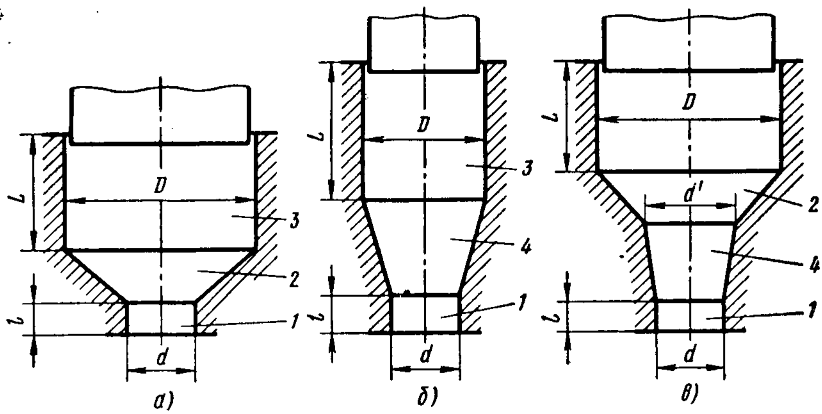


Рис. 7.34

Инструмент по рис 7.34, *б*. Эта форма отличается от предыдущей тем, что к цилиндрическому участку *3* (приемнику) примыкает участок *4* малой конусности. Такой инструмент может служить для получения поковок типа ступенчатых валиков с коническим переходом между участками. Расчетную формулу получим подстановкой в уравнения (7.58) значения p_2 из равенства (7.57) и p_1 из (7.53):

$$p = \sigma_{s2}\left(1 + \frac{\mu_{s2}}{\gamma}\right)\ln\frac{F}{f} + \sigma_{s3}\frac{2L}{D} + \sigma_{s1}\frac{4\mu_1 l}{d}. \tag{7.60}$$

При отсутствии цилиндрического участка *1* (для получения поковки валика с коническим концом) достаточно положить в формуле (7.60) $l = 0$.

Инструмент по рис 7.34, *в*. Такую форму инструмента применяют для получения поковок с коническим переходом от утолщения к цилиндрическому стержню. Инструмент отличается от изображенного на рис. 7.34, *а* тем, что между участками большой конусности *2* и цилиндрическим *1* введен дополнительно участок малой конусности *4*.

Для получения расчетной формулы необходимо использовать выражения (7.58), (7.56), (7.57) и (7.53):

$$p = \sigma_{s2}\left[\left(\frac{\mu_{s2}}{\sin\gamma} + \frac{2}{1+\cos\gamma}\right)\ln\frac{F}{f'} + \left(1 + \frac{\mu_{s2}}{\gamma'}\right)\ln\frac{f'}{f}\right] +$$

$$+ \sigma_{s3}\frac{2L}{D} + \sigma_{s1}\frac{4\mu_1 l}{d}; \tag{7.61}$$

здесь $2\gamma'$ — угол конусности промежуточного участка *4*; f' — площадь, соответствующая промежуточному диаметру d' (рис. 7.34, *в*).

Для получения поковки в форме утолщения с коническим стержнем без цилиндрического конца участок *1* не нужен, и для определения p в формуле (7.61) следует принять $l = 0$.

В выведенных формулах указаны коэффициент трения μ_1 и фактор трения μ_{s2}. Коэффициент μ_1 характеризует трение в цилиндрическом выходном участке *1*. Здесь пластическая деформация отсутствует, и, следовательно, μ_1 представляет собой обычный коэффициент трения при механическом скольжении. Наоборот, фактор трения μ_{s2} характеризует трение при пластической деформации (горячей или холодной) в конических участках инструмента.

Обозначение напряжения текучести σ_s также индексировано дополнительно цифрами 1, 2 и 3 в зависимости от участка, к которому оно относится; σ_{s3} относится к исходному металлу при той средней температуре, которую он имеет в приемнике. Практически при горячем выдавливании в качестве σ_{s3} можно взять предел прочности металла при температуре деформирования.

Наоборот, σ_{s1} относится к материалу деформированному. Поэтому при назначении σ_{s1} в случае выдавливания с упрочнением следует его учесть исходя из средней степени деформации удлинения $\frac{F-f}{f}$ или по средней логарифмической деформации $\ln\frac{F}{f}$.

На втором участке, т. е. в зоне деформации, значение σ_{s2} несколько изменяется по радиусу ρ в связи с ростом скорости и степени деформации при уменьшении ρ от b до a (см. рис. 7.32). Поэтому следует по существу брать среднее значение σ_{s2} между начальным σ'_{s2} и конечным σ''_{s2}. Наиболее правильным было бы принимать среднее взвешенное. Но, как показал Ю. П. Глебов, к среднему взвешенному весьма близко подходит среднее геометрическое

$$\sigma_{s2} = \sqrt{\sigma'_{s2}\sigma''_{s2}} \approx \sqrt{\sigma_{s3}\sigma_{s1}}.$$

При наличии упрочнения последнее учитывают при определении σ_{s2} по средней степени деформации.

Для возможности учета скорости деформации $\dot{\varepsilon}_\rho$ определим последнюю:

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{d\varepsilon_\rho}{dt},$$

где $\varepsilon_\rho = 2u_z b^2 \rho^{-3}$ [см. стр. 291, формулу (в)], поэтому

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{du_z}{dt} 2b^2\rho^{-3},$$

так как b и ρ от времени t не зависят. Но du_z/dt представляет собой не что иное, как скорость движения металла в приемнике, т. е. скорость выдавливания $\dot{u}_в$[1].

Таким образом,

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \dot{u}_в \frac{2b^2}{\rho^3}.$$

[1] Скорость металла в цилиндрическом выходном участке является скоростью истечения.

При входе в очаг деформации, когда $\rho = b$,

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{2\dot{u}_в}{b} = \frac{4\dot{u}_в \sin\gamma}{D}.$$

При выходе, когда $\rho = a$,

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{2\dot{u}_в b^2}{a^3} = \frac{4\dot{u}_в D^2 \sin\gamma}{d^3}.$$

Таким образом, отношение $\dot{\varepsilon}_{\rho a}/\dot{\varepsilon}_{\rho b} = D^3/d^3$ показывает, что влияние различия в скоростях деформации на величину σ_{s2} может быть достаточно заметным.

Как было сказано в начале параграфа, ряд исследователей применили для изучения процесса выдавливания метод линий скольжения, а также метод верхних оценок. Однако следует помнить, что метод линий скольжения и его варианты имеют в виду плоскую деформацию, и, как говорит В. Джонсон, «поле линий скольжения в осесимметричных задачах не удовлетворяет всем необходимым условиям, т. е. условиям равновесия, неразрывности, соотношениям между напряжениями и скоростями деформации и др.». Вообще «существующие методы, использующие данные полей линий скольжения плоской деформации для расчетов осесимметричных процессов, имеют ряд допущений, точность которых неизвестна» [20].

Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением примера решения плоской задачи на прессование прутка из шероховатого ($\tau_к = k$) контейнера через плоскую матрицу.

Возможное (хотя и не единственное) поле линий скольжения представлено на рис. 7.35. Поскольку трение принято максимальным, две ортогональные линии скольжения, граничные со стен-

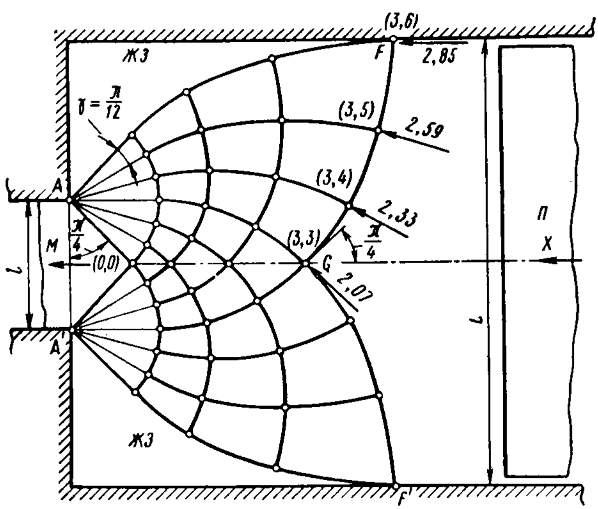


Рис. 7.35

ками контейнера, пересекают стенки под углами 0 и 90°. Построенное поле показывает наличие жестких зон (ЖЗ) в углах контейнера. Металл, на который воздействует пуансон *П*, также находится в «жестком» состоянии и отделен от деформируемого металла жесткопластической границей, представленной линиями скольжения $F'GF$. Поверхность AMA' выходящего прутка является свободной от напряжений (трением в калибрующем пояске пренебрегаем). Усилие выдавливания определяют нормальные напряжения, возникающие на жесткопластической границе $F'GF$.

Легко усмотреть, что поле, показанное на рис. 7.35, представляет собой поле, построенное на дугах двух окружностей равного радиуса и притом вполне аналогичное рассмотренному на стр. 206 по рис. 6.21.

Первоначально на свободной поверхности AMA' нормальное напряжение σ_x можно считать отсутствующим. Тогда в треугольнике AA' *(0, 0)* напряжение $\sigma_z = -2k$, а в точке *(0,0)* среднее напряжение $\sigma_{0,0} = -k$. Среднее напряжение в каждой точке жесткопластической границы GF является, в свою очередь, к ней нормальным, т. е. интегрирование напряжений вдоль линии GF даст возможность найти усилие прессования как полное, так и удельное.

Напряжения в узловых точках *(3, 3)*—*(3, 6)* легко определить по формуле (6.26), из них для точек *(3, 3)* и *(3, 4)* они уже вычислены в табл. 6.1 на стр. 209.

Нормальные напряжения на жесткопластической границе в ее узловых точках обозначены на рис. 7.35 в долях σ_s^* для $L/l \approx 3{,}5$.

Напряжение выдавливания, как правило, падает от краев контейнера к его оси. На нашем примере среднее давление составляет примерно $2{,}3\sigma_s^*$. Весьма точные данные для разных степеней вытяжки аналитически вычислил Е. М. Макушок [46].

Эту же плоскую задачу можно решить и методом верхней оценки. Кинематически возможное разрывное поле представлено на рис. 7.36, *а*. Предполагается, что пластическая область металла заключена в треугольнике 2. Годограф (рис. 7.36, *б*) построен обычным порядком (см. стр. 216) с учетом того, что скорость истечения больше скорости выдавливания (пуансона) в L/l раз, $\dot{u}_{03}/\dot{u}_{01} = L/l$. На годографе $\dot{u}_0$ принято за единицу. Степень обжатия взята та же, что на рис. 7.35.

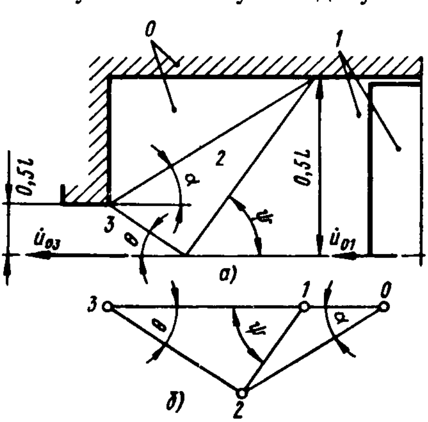


Рис. 7.36

Удельное усилие легко определить, используя выполненные в масштабе чертежи (рис. 7.36, *а* и *б*).

Пишем уравнение баланса мощностей (см. стр. 220)

$$p \frac{L}{2} \dot{u}_{01} = k\left(l_{20}\dot{u}_{20} + l_{21}\dot{u}_{21} + l_{23}\dot{u}_{23}\right),$$

откуда

$$p = 2k \frac{l_{20}\dot{u}_{20} + l_{21}\dot{u}_{21} + l_{23}\dot{u}_{23}}{L\dot{u}_{01}}.$$

Подставив в полученное выражение численные значения в миллиметрах отрезков и скоростей, взяв их с чертежа, определим

$$p \approx 2{,}8 \cdot 2k = 2{,}8\sigma_s^*.$$

Изменяя величины углов α и θ, результаты можно в какой-то мере минимизировать.

7.5. ПРОШИВКА

7.5.1. Общие положения

Прошивка представляет собой кузнечную операцию, при помощи которой получают в заготовках отверстия (полые заготовки).

Прошивку подразделяют на открытую (рис. 7.37, *а*) и закрытую (рис. 7.37, *б*). При открытой прошивке боковая поверхность заготовки является свободной, при закрытой заготовка заключена в матрицу, определяющую ее наружный диаметр после прошивки [1].

При открытой прошивке исходная форма заготовки искажается: высота h уменьшается (заготовка осаживается), наружный диаметр D неравномерно увеличивается. При закрытой прошивке происходит увеличение высоты заготовки.

Форма заготовки при открытой прошивке получает тем большее искажение, чем меньше отношение ее исходного диаметра к диаметру прошивня (D/d).

При отношениях $\frac{D}{d} < 2$

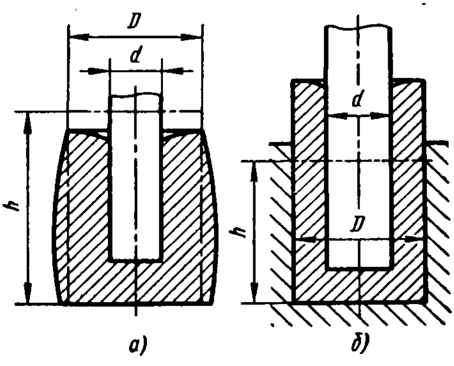


Рис. 7.37

[1] В настоящей книге рассмотрен только случай закрытой прошивки с течением металла навстречу пуансону, т. е. случай прошивки заготовки круглого сечения диаметром, приблизительно равным диаметру матрицы. Следует заметить, что закрытую прошивку теперь иногда называют «обратным выдавливанием» или «обратным прессованием», хотя эти термины имеют другой и притом давно известный смысл.

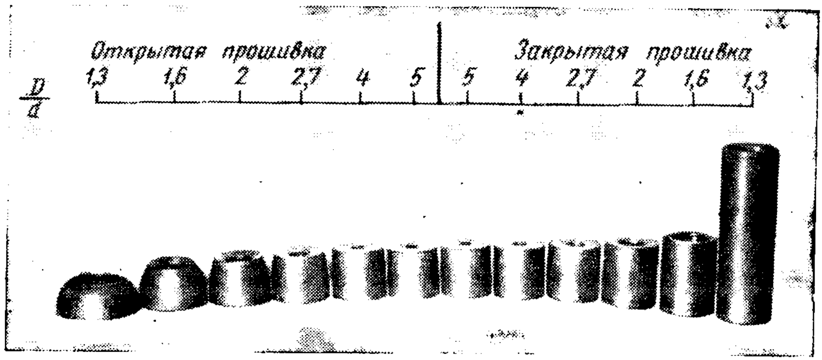


Рис. 7.38

искажение настолько значительно, что в практике открытую прошивку применяют обычно при больших отношениях D/d.

При закрытой прошивке высота заготовки увеличивается тем больше, чем меньше отношение D/d (в дальнейшем принимается равенство диаметра матрицы и исходной заготовки). Высоту заготовки после закрытой прошивки легко можно определить по условию постоянства объема. Закрытую прошивку применяют на практике обычно при отношениях $\frac{D}{d} < 2$.

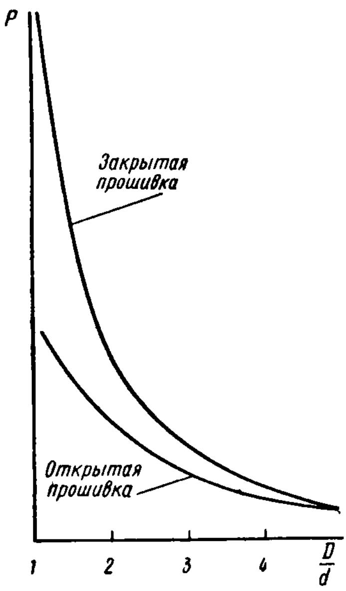


Рис. 7.39

Характер изменения формы исходных заготовок в результате прошивки показан на рис. 7.38 (С. Б. Кирсанова), на котором представлена серия одинаковых по диаметру и высоте исходных заготовок, прошитых открыто и в матрице пуансонами попарно равных диаметров. Легко видеть, что по мере увеличения D/d формы заготовок, прошитых открыто и в матрице, приближаются одна к другой, и при больших отношениях D/d (например, на рис. 7.38 $\frac{D}{d} = 5$) разница в форме становится неощутимой.

В обоих случаях при значительной величине отношения D/d процесс прошивки переходит в процесс вдавливания пуансона в бесконечное тело, ограниченное плоскостью (полупространство). Практически же этот момент можно считать наступающим уже при отношениях $\frac{D}{d} \approx 5 \div 6$.

Если прошивать заготовки одинакового диаметра пуансонами различных диаметров, то по мере уменьшения диаметра пуансона необходимое усилие P уменьшается (в связи с уменьшением площади пуансона). При этом усилие закрытой прошивки при равных диаметрах пуансонов больше усилия открытой прошивки. Однако по мере увеличения отношения D/d разница в усилиях все время уменьшается и практически станет неощутимой при отношениях $\frac{D}{d} \approx 5 \div 6$, как это показано на рис. 7.39 (С. Б. Кирсанова).

Что касается удельных усилий деформирования, то картина несколько иная: по мере увеличения D/d удельное усилие открытой прошивки увеличивается, а удельное усилие закрытой прошивки уменьшается до значений $\frac{D}{d} \approx 1{,}4 \div 1{,}5$, а затем вновь незначительно увеличивается.

7.5.2. Удельное усилие деформирования при внедрении пуансона в полупространство

В гл. 6 дано уравнение (6.24), определяющее удельное усилие для внедрения плоского пуансона в полупространство,

$$p = 2k\,(1 + \omega_{АБ}).$$

Это решение относилось к случаю плоской деформации (пуансон имеет неограниченную длину в направлении оси y, перпендикулярной к чертежу). Однако приближенно его можно распространить и на осесимметричную задачу для цилиндрического пуансона:

$$p = \sigma_s\,(1 + \omega_{АБ}). \tag{7.62}$$

Для начала внедрения угол $\omega_{АБ} = \pi/2$, поэтому

$$p = \sigma_s\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \approx 2{,}6\sigma_s. \tag{7.63}$$

По мере внедрения пуансона удельное усилие увеличивается вплоть до тех пор, когда поле линий скольжения примет вид, показанный на рис. 7.40 [105]. Угол поворота линий скольжения здесь на 90° больше, чем в начале внедрения: $\omega = \pi$.

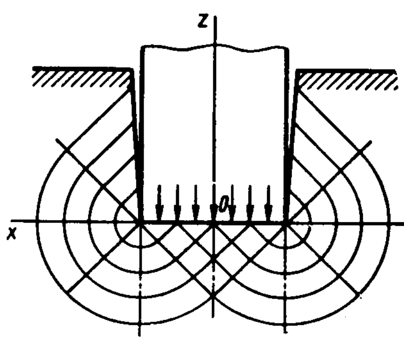


Рис. 7.40

Так как все рассуждения, касающиеся соотношений напряжений на торцовой поверхности пуансона и на свободной поверхности, останутся без изменения, то можно определить удельное усилие сразу по формуле (7.62), подставив $\omega_{АБ} = \pi$:

$$p = \sigma_s (1 + \pi) \approx 4\sigma_s; \tag{7.64}$$

этот случай является предельным, т. е. прошиваемая заготовка представляет собой полупространство.

7.5.3. Удельное усилие деформирования при открытой прошивке

Для приближенного определения удельного усилия процесс открытой прошивки представим (рис. 7.41) как осадку цилиндра *1* диаметром d и высотой h, заключенного в кольцо *2* с наружным диаметром D и внутренним d. Напряженное состояние в зоне *1* соответствует схеме *V*,*7*, а в зоне *2* — схеме *II*,*4* (см. рис. 5.12). Касательные напряжения на поверхности контакта торца прошивня с металлом будем считать постоянными и максимальными по абсолютной величине, т. е.

$$\tau_к = -0{,}5\sigma_s.$$

Аналогично уравнению (7.8) можно написать

$$\sigma_z = \sigma_s \frac{\rho}{h} + C.$$

При свободной осадке принимали, что на краю заготовки ($\rho = 0{,}5d$) $\sigma_z = -\sigma_s$. В настоящем случае на боковую поверхность осаживаемого цилиндра действует со стороны растягиваемого кольца дополнительное давление [формула (7.42)]

$$\sigma_\rho = -1{,}1\sigma_s \ln\frac{D}{d}.$$

Поэтому сжимающее напряжение σ_z при $\rho = 0{,}5d$ будет на эту величину больше. Таким образом, при $\rho = 0{,}5d$

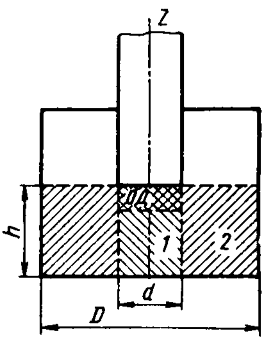


Рис. 7.41

$$\sigma_z = -\sigma_s - 1{,}1\sigma_s \ln\frac{D}{d}.$$

Следовательно,

$$\sigma_s \frac{d}{2h} + C = -\sigma_s \left(1 + 1{,}1 \ln\frac{D}{d}\right),$$

откуда

$$C = -\sigma_s \left(1 + 1{,}1 \ln\frac{D}{d} + \frac{0{,}5d}{h}\right).$$

Подставив найденное значение постоянной интегрирования, получим

$$\sigma_z = -\sigma_s \left(1 + 1{,}1 \ln\frac{D}{d} + \frac{0{,}5d - \rho}{h}\right).$$

Используя уравнение (6.1) и учитывая, что σ_z зависит только от ρ, можно написать

$$P = 2\pi\sigma_s \int_0^{0,5d} \left(1 + 1,1 \ln \frac{D}{d} + \frac{0,5d - \rho}{h}\right) \rho \, d\rho,$$

откуда после интегрирования и деления на $\pi d^2/4$ найдем

$$p = \sigma_s \left(1 + 1,1 \ln \frac{D}{d} + \frac{1}{6} \frac{d}{h}\right). \qquad (7.65)$$

Эту формулу предложил Е. П. Унксов [108].

Учитывая характер предпосылки, положенной в основу вывода формулы (7.65), необходимо внести в нее некоторые коррективы.

Фактически зоны *1* и *2* не являются разделенными, и потому следует учесть, хотя бы приближенно, сдвиг металла, возникающий на цилиндрической поверхности раздела зон *1* и *2*. Это можно выполнить, пользуясь методом баланса работ.

Пусть u_0 некоторое весьма малое перемещение пуансона. Так как основание заготовки неподвижно, а смещение точек поверхности цилиндрической зоны *1* следует считать уменьшающимся линейно от u_0 до нуля, то средняя величина смещения составляет $0,5u_0$. Касательное напряжение сдвига принимаем равным $0,5\sigma_s$. Работа сдвига

$$A_{сд} = \pi \, dh \frac{\sigma_s}{2} \frac{u_0}{2}.$$

Работа, которую должен выполнить пуансон,

$$A_п = p_c \frac{\pi d^2}{4} u_0.$$

Здесь p_c — доля удельного усилия по пуансону, необходимая для преодоления сдвига. Так как $A_{сд} = A_п$, то после подстановки значений определим

$$p_c = \sigma_s \frac{h}{d}.$$

Эту долю удельного усилия добавляем в правую часть уравнения (7.65).

$$p = \sigma_s \left(1 + 1,1 \ln \frac{D}{d} + \frac{1}{6} \frac{d}{h} + \frac{h}{d}\right). \qquad (7.65а)$$

Вместе с тем опыт показывает, что в пластическом состоянии находится не весь объем металла под прошивнем высотой h, а только его сравнительно небольшая часть, примыкающая к торцу прошивня (очаг деформации од, рис. 7.41). Теоретически высоту очага деформации, или, что то же, отношение d/h можно определить следующим образом.

Формула (7.65а) показывает, что при увеличении d/h третий член в скобках растет, увеличивая тем самым значение p. Влияние же четвертого члена противоположно. В соответствии с принципом минимума энергии деформации в данном случае необходимо, чтобы величина d/h была такой, которая обеспечивала бы минимум функции

$$f\left(\frac{d}{h}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{d}{h}\right) + \frac{1}{\left(\frac{d}{h}\right)}.$$

Дифференцируя его по d/h и приравнивая производную нулю, получим

$$\frac{d}{h} = \sqrt{6}.$$

Подставляя это значение d/h в формулу (7.65а), имеем

$$p = \sigma_s\left(1 + 1{,}1 \ln\frac{D}{d} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Принимая с округлением $\frac{2}{\sqrt{6}} \approx 1$, окончательно получим

$$p = \sigma_s\left(2{,}0 + 1{,}1 \ln\frac{D}{d}\right); \tag{7.66}$$

этой формулой и можно пользоваться как расчетной до отношений $\frac{d}{h} \leqslant \sqrt{6}$, что отвечает обычным случаям практики.

Формула (7.66) лучше отражает действительный характер процесса, так как не показывает непрерывного роста удельного усилия по мере движения пуансона.

При отношениях $\frac{d}{h} > \sqrt{6}$ начнет резко сказываться влияние толщины «донышка», удельное усилие будет значительно возрастать, и тогда вступит в силу формула (7.65).

На основании экспериментальных данных Е. П. Унксова формула (7.65), а следовательно, и (7.66) действительны до значений $\frac{D}{d} \approx 5 \div 6$. При больших отношениях процесс прошивки переходит в процесс вдавливания пуансона в пластическое полупространство.

7.5.4. Удельное усилие деформирования при закрытой прошивке

Вопрос определения удельного усилия прошивки в закрытой матрице цилиндрическим пуансоном отличается исключительной сложностью. До сих пор по существу нет удовлетворительного решения, вполне надежного для практического применения и достаточно строгого в отношении выполнения формальных требований теории пластических деформаций и математического аппарата.

Как говорит Г. Шмитт, при закрытой прошивке радиальные и тангенциальные деформации заметно отличаются одна от друной, наблюдается также весьма неравномерное деформированное состояние и направления главных деформаций в значительной степени отклоняются от радиальных и тангенциальных направлений [129]. Эти обстоятельства затрудняют решения задачи и делают различные решения весьма мало совместимыми одно с другим.

При выдавливании металл течет в отверстие матрицы, при прошивке (рис. 7.42) происходит течение его в кольцевой зазор между торцом пуансона *1* и матрицей *3*. При этом в образовавшейся трубчатой части заготовки *2* деформации не происходит, и эта часть лишь передвигается под воздействием деформируемого металла *4*, непрерывно поступающего в трубчатую часть на уровне *5* торца пуансона. Только при коническом пуансоне деформация будет охватывать также и объем образующейся трубчатой части заготовки.

При цилиндрическом пуансоне металл не обтекает края его торца по направлению к оси пуансона, и форма последнего может быть такой, какая представлена на рис. 7.42. В равной мере глубина матрицы должна быть лишь такой, чтобы вместить исходную заготовку.

Удельное усилие на пуансоне, необходимое для прошивки, определим методом баланса работ, взяв за основу схему процесса, представленную на рис. 7.43, *а*. Для какого-то момента процесса цилиндрическая зона *1* диаметром $d = 2r$ и высотой h осаживается пуансоном, а кольцевая зона *2* с наружным диаметром $D = 2R$ и той же высотой h подвергается внутреннему давлению, и некоторое количество металла из этой зоны вытесняется вверх в жесткую зону *3* деформированного металла, увеличивая объем последней. Зона *4* в этот момент рассматривается как жесткая. При этом

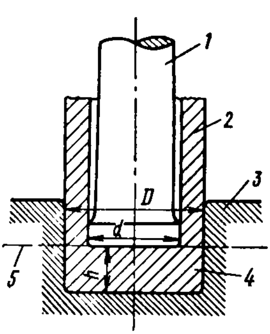


Рис. 7.42

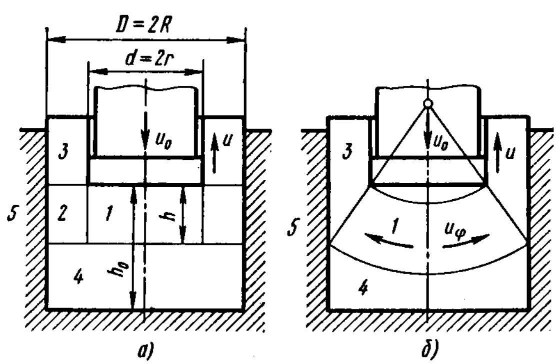


Рис. 7.43

в течение определенного периода процесса высота деформируемых зон *1* и *2* считается постоянной, равной h, и, следовательно, высота $(h_0 - h)$ «жесткой» зоны *4* непрерывно уменьшается в результате каждого такого элементарного акта деформации, как бы дискретно следующего один за другим.

Если принять, что элементарные весьма малые перемещения пуансона вниз равны u_0, а перемещения прошитой части вверх u, то, очевидно,

$$u\,(R^2 - r^2) = u_0 r^2,$$

откуда

$$u = \frac{u_0}{\frac{R^2}{r^2} - 1}. \tag{а}$$

Это выражение показывает, что при $\frac{R}{r} > \sqrt{2}$ перемещение $u < u_0$, а при $\frac{R}{r} < \sqrt{2}$ $u > u_0$.

Удельное усилие p на пуансоне можно представить как сумму

$$p = \frac{P}{\pi r^2} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6, \tag{б}$$

где буквой p с цифровыми индексами обозначены доли удельного усилия, необходимые для:

p_1 — деформирования осадкой зоны *1*;

p_2 — деформации кольцевой зоны *2*;

p_3 — преодоления трения по цилиндрической контактной поверхности между зоной *2* и матрицей *5*;

p_4 — осуществления сдвига по цилиндрической поверхности разрыва между зонами *2* и *1*;

p_5 — преодоления трения между торцом пуансона и зоной *1* и сдвига по поверхности разрыва между зоной *1* и зоной *4*;

p_6 — осуществления сдвига по кольцевым поверхностям разрыва между зоной *2* и зонами *3* и *4*.

Трением между металлом зоны *3* и поверхностями матрицы и пояска пуансона пренебрегаем ввиду его незначительности.

Во всех дальнейших расчетах примем, что напряжения трения $\tau_к$ и напряжения сдвига $\tau_с$ одинаковы и равны

$$\tau_к = \tau_с = 0{,}5\beta\sigma_s.$$

О п р е д е л е н и я   у д е л ь н ы х   у с и л и й p_1 и p_5 не требуется, поскольку исходя из формул (6.43) и (7.24) и вводя коэффициент β, можно написать

$$p_1 = \beta\sigma_s;$$

$$p_5 = \beta\sigma_s \frac{1}{6}\,\frac{d}{h} = \beta\sigma_s \frac{1}{6}\,\frac{2r}{h}.$$

О п р е д е л е н и е   у д е л ь н о г о   у с и л и я p_2. Поскольку деформация осесимметричная, для определения деформаций и перемещений можно использовать уравнения (4.4). Принимая деформацию ε_{z2} постоянной, имеем

$$\varepsilon_{z2} = \frac{u}{h}; \quad \varepsilon_{\rho 2} = \frac{du_{\rho 2}}{d\rho}; \quad \varepsilon_{\theta 2} = \frac{u_{\rho 2}}{\rho}.$$

По условию постоянства объема

$$\frac{du_{\rho 2}}{d\rho} + \frac{u_{\rho 2}}{\rho} + \frac{u}{h} = 0,$$

откуда

$$\frac{d(\rho u_{\rho 2})}{d\rho} = -\frac{u\rho}{h}.$$

После интегрирования получим

$$u_{\rho 2}\rho = -\frac{u}{h}\frac{\rho^2}{2} + C.$$

У стенки матрицы при $\rho = R$ перемещение $u_{\rho 2} = 0$, следовательно,

$$C = \frac{u}{h}\frac{R^2}{2}; \quad u_{\rho 2} = \frac{u}{2h}\frac{R^2 - \rho^2}{\rho},$$

и после подстановки u из уравнения (а)

$$u_{\rho 2} = \frac{u_0}{2h}\frac{1}{\frac{R^2}{r^2} - 1}\frac{R^2 - \rho^2}{\rho}.$$

Далее получаем

$$\varepsilon_{\rho 2} = \frac{du_{\rho 2}}{d\rho} = -\frac{u_0}{2h}\frac{1}{\frac{R^2}{r^2} - 1}\left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right); \tag{в}$$

$$\varepsilon_{\theta 2} = \frac{u_{\rho 2}}{\rho} = -\frac{u_0}{2h}\frac{1}{\frac{R^2}{r^2} - 1}\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right); \tag{г}$$

$$\varepsilon_{z2} = \frac{u_0}{h}\frac{1}{\frac{R^2}{r^2} - 1}.$$

Так как $\frac{R^2}{\rho^2} \geqslant 1$, то легко усмотреть, что деформации ε_{z2} и $\varepsilon_{\theta 2}$ положительны, а деформация $\varepsilon_{\rho 2}$ отрицательна и является по абсолютной величине максимальной (см. стр. 65).

На основании формул (6.39) и (6.41) уравнение баланса работ можно написать в следующем виде:

$$p_2 \pi r^2 u_0 = \sigma_s \int_V \varepsilon_i \, dV,$$

где $dV = 2\pi h\rho \, d\rho$.

Учитывая, что интенсивность деформаций ε_i мало отличается от максимальной по абсолютной величине главной деформации, в данном случае от $\varepsilon_{\rho 2}$, подставим в уравнение баланса работ значение последней из системы (г), учитывая, что на основании формулы (4.14) $\varepsilon_i = \beta |\varepsilon|_{\max}$. Тогда

$$p_2 r^2 = \beta\sigma_s \frac{1}{\frac{R^2}{r^2} - 1} \int_r^R \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right) \rho\, d\rho.$$

После интегрирования, подстановки пределов и элементарных преобразований

$$p_2 = \beta\sigma_s \left(0{,}5 + \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \ln \frac{R}{r}\right),$$

и, заменяя радиусы диаметрами, имеем окончательно

$$p_2 = \beta\sigma_s \left(0{,}5 + \frac{1}{1 - \frac{d^2}{D^2}} \ln \frac{D}{d}\right).$$

Определение удельных усилий p_3 и p_4. Перемещение верхней границы зоны *2* относительно матрицы равняется u, т. е. перемещению зоны *3*. Нижняя граница зоны *2* неподвижна. Поскольку осевая деформация зоны *2* принята постоянной (независимой от координат), постольку величина перемещений по поверхности матрицы точек зоны *2*, расположенных на разных уровнях, изменяется линейно. Поэтому для расчета работы трения можно взять среднее значение перемещения, т. е.

$$0{,}5u = \frac{0{,}5u_0}{\frac{R^2}{r^2} - 1}.$$

Уравнение баланса работ получит следующий вид:

$$p_3 \pi r^2 u_0 = 0{,}5\beta\sigma_s 2\pi R h \frac{0{,}5u_0}{\frac{R^2}{r^2} - 1}.$$

Откуда

$$p_3 = \beta\sigma_s \frac{h}{2r} \frac{\frac{R}{r}}{\frac{R^2}{r^2} - 1} = \beta\sigma_s \frac{h}{d} \frac{\frac{D}{d}}{\frac{D^2}{d^2} - 1}.$$

Относительное перемещение точек зон *2* и *1* на поверхности разрыва слагается из двух встречных перемещений, так как осевая деформация зоны *2* — растяжение, а зоны *1* — сжатие. У основания (нижней границы) обеих зон перемещения отсутствуют и линейно увеличиваются до величин u (зона *2*) и u_0 (зона *1*) у верхней границы.

На основании изложенного для вычисления работы сдвига p_4 в качестве среднего перемещения в уравнение баланса работ следует подставить полусумму перемещений u и u_0:

$$p_4 \pi r^2 u_0 = 0{,}5\beta\sigma_s 2\pi r h 0{,}5 u_0 \left(\frac{1}{\frac{R^2}{r^2} - 1} + 1 \right).$$

Откуда

$$p_4 = \beta\sigma_s \frac{h}{2r} \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} = \beta\sigma_s \frac{h}{d} \frac{1}{1 - \frac{d^2}{D^2}}.$$

Определим сумму p_{34} удельных усилий p_3 и p_4, которая отражает потери на трение и сдвиг по вертикальным поверхностям трения и разрыва:

$$p_{34} = p_3 + p_4 = \beta\sigma_s \frac{h}{2r} \left(\frac{\frac{R}{r}}{\frac{R^2}{r^2} - 1} + \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right).$$

Откуда окончательно

$$p_{34} = \beta\sigma_s \frac{h}{2r} \frac{1}{1 - \frac{r}{R}} = \beta\sigma_s \frac{h}{d} \frac{1}{1 - \frac{d}{D}}.$$

Определение удельного усилия p_6. Сдвиг по кольцевым поверхностям разрыва между зоной *2* и зонами *3* и *4* происходит в результате перемещения $u_{\rho 2}$ [уравнение (в)]. Как видно, это перемещение не является линейной функцией координат, и, следовательно, необходимо интегрировать по площадям разрыва. Уравнение баланса работ (с учетом наличия двух поверхностей) в данном случае получает вид

$$p_6 \pi r^2 u_0 = \beta\sigma_s 2\pi \frac{u_0}{2h} \frac{1}{\frac{R^2}{r^2} - 1} \int\limits_r^R \frac{R^2 - \rho^2}{\rho} \rho \, d\rho.$$

После интегрирования и простейших преобразований получим

$$p_6 = \beta\sigma_s \frac{2r}{h} \frac{\frac{1}{3}\frac{r^3}{R^3} - \frac{r}{R} + \frac{2}{3}}{2\frac{r}{R}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

или

$$p_6 = \beta\sigma_s \frac{d}{h} \frac{\frac{1}{3}\frac{d^3}{D^3} - \frac{d}{D} + \frac{2}{3}}{2\frac{d}{D}\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)}.$$

Сумму $p_5 + p_6 = p_{56}$ внесем сразу в следующую далее формулу.

Соберем теперь в соответствии с уравнением (б) результаты определения отдельных составляющих удельного усилия p:

$$p = \beta\sigma_s \left\{1{,}5 + \frac{1}{1 - \frac{d^2}{D^2}} \ln \frac{D}{d} + \frac{h}{d} \frac{1}{1 - \frac{d}{D}} + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{h} \left[\frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{3} \frac{d^3}{D^3} - \frac{d}{D} + \frac{2}{3}}{2 \frac{d}{D} \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)} \right] \right\}. \qquad (7.67)$$

На основании предыдущего ясно, что первые два слагаемых в фигурных скобках определяют долю удельного усилия, необходимую на осуществление «чистой» деформации ($p_1 + p_2$), а вторые два слагаемых выражают долю удельного усилия, расходуемую на преодоление контактного трения и сдвигов по поверхностям разрыва ($p_{34} + p_{56}$).

Эта доля зависит не только от основных параметров процесса (диаметров d и D), но и от изменения величины h, представляющей глубину очага деформации.

Обозначим

$$\frac{p_{34} + p_{56}}{\beta\sigma_s} = p_{\text{тс}}$$

в упрощенной форме

$$p_{\text{тс}} = \frac{h}{d} a + \frac{d}{h} b. \qquad (д)$$

Значения величин a и b ясны из сопоставления с предыдущей формулой (7.67). На основании принципа минимума энергии деформации следует, что величина h должна быть такой, которая обеспечивала бы при данном d/D минимальное значение $p_{\text{тс}}$. Дифференцируя правую часть уравнения (д) по h/d и приравнивая производную нулю, найдем искомое значение h/d:

$$a - \frac{b}{\left(\frac{h}{d}\right)^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{h}{d} = \sqrt{\frac{b}{a}}. \qquad (е)$$

Выразим p_{34} и p_{56} через оптимальное значение h/d:

$$p_{34} = \beta\sigma_s a \sqrt{\frac{b}{a}} = \beta\sigma_s \sqrt{ab}; \quad p_{56} = \beta\sigma_s b \sqrt{\frac{a}{b}} = \beta\sigma_s \sqrt{ab}.$$

Таким образом, для получения оптимального результата необходимо

$$p_{34} = p_{56} = \beta\sigma_s \sqrt{ab} \quad \text{и} \quad p_{\text{тс}} = 2\sqrt{ab}.$$

Подставляя значения a и b, соответствующие уравнению (7.67), получим

$$p_{\text{тс}} = 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{d}{D}}\left[\frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{3}\frac{d^3}{D^3} - \frac{d}{D} + \frac{2}{3}}{2\frac{d}{D}\left(1-\frac{d^2}{D^2}\right)}\right]}$$

и после элементарных преобразований

$$p_{\text{тс}} = \frac{2}{\sqrt{3\frac{d}{D}\left(1-\frac{d^2}{D^2}\right)}}.$$

Заменяя через полученное значение $p_{\text{тс}}$ последние два члена в уравнении (7.67), получим окончательную формулу для определения удельного усилия прошивки

$$p = \beta\sigma_s\left[1{,}5 + \frac{1}{1-\frac{d^2}{D^2}}\ln\frac{D}{d} + \frac{2}{\sqrt{3\frac{d}{D}\left(1-\frac{d^2}{D^2}\right)}}\right]. \qquad (7.67\text{a})$$

Наконец, подставляя значения a и b в формулу (е) в соответствии с уравнением (7.67), получим формулу для определения глубины очага деформации под пуансоном

$$\frac{h}{d} = \sqrt{\frac{1-\frac{d}{D}}{3\frac{d}{D}\left(1+\frac{d}{D}\right)}}. \qquad (7.68)$$

Определение удельного усилия прошивки на базе кинематической схемы «параллельного» поля (рис. 7.43) методом баланса работ, насколько нам известно, осуществлено впервые О. А. Ганаго совместно с В. И. Степаненко [102]. Изложенное здесь решение не имеет принципиальных отличий, но допущение равенств $\varepsilon_i = \beta\,|\,\varepsilon\,|_{\max}$ и $\tau_{\text{к}} = \tau_{\text{с}} = 0{,}5\beta\sigma_s$ позволило значительно упростить конечные формулы. Решение по существу является верхней оценкой, поскольку кинематическая схема не удовлетворяет статическим условиям, в чем можно убедиться, используя формулу (7.40).

По принятой кинематической схеме при $\rho = R$ деформация $\varepsilon_\theta = 0$, т. е. деформированное состояние плоское, которому соответствует $\beta = 1{,}155$. С уменьшением ρ деформация все более удаляется от плоской. Поэтому в формулу (7.67а) уместно подставить некоторое среднее значение $\beta = 1{,}1$.

При этом значении β по формуле (7.67а) вычислен график значений удельных усилий p (рис. 7.44, кривая *1*). В масштабе чертежа кривая *1* практически совпадает с кривой, приведенной О. А. Ганаго для фактора трения $\mu_s = 0{,}5$ [102], поэтому для сравнения показана кривая *2*, приведенная по тому же источнику, но для $\mu_s = 0{,}3$.

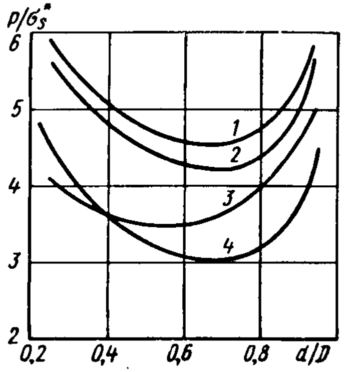


Рис. 7.44

В зоне значений $\frac{d}{D} \approx 0{,}7$ кривые имеют минимум. Этот факт давно обнаружил экспериментально Ф. Гофман [123]. Однако увеличение удельного усилия после $\frac{d}{D} < 0{,}5$, по опытным данным, не так интенсивно. При малых отношениях d/D физический смысл процесса изменяется — прошивка становится внедрением пуансона в полупространство и формула (7.67а) теряет смысл $\left(\text{примерно при } \frac{d}{D} < 0{,}3\right)$. На практике, как сказано ранее, закрытую прошивку применяют обычно при $\frac{d}{D} > 0{,}5$.

Формула (7.67а) действительна, как следует из ее вывода, при отношениях h/d, определяемых формулой (7.68). При обычно применяемой на практике закрытой прошивке с отношением d/D примерно от 0,5 до 0,95 формула (7.68) дает отношение d/h соответственно $\approx$(0,5—0,1), что соответствует в общем экспериментальным данным Ф. Гофмана [123], Э. Зибеля [28], а также Л. В. Прозорова [74] и др.

Если требуется более глубокая прошивка, то удельное усилие следует определять по исходной формуле (7.67), подставляя требуемые значения d/h.

Существует ряд других решений, выполненных элементарными приближенными методами. К числу их относятся старые решения С. И Губкина, Г. Закса, Э. Зибеля, Е. П. Унксова и др. Методом баланса работ, на основе поля перемещений, аналогичного показанному на рис. 7.43, *а*, решил задачу Э. Штэк [138]. Д. Тирош применил «сферическое» поле перемещений (см. рис. 7.43, *б*). Его решение [138] характеризует кривая *3* (см. рис. 7.44). Сферическое поле лучше отражает действительную картину течения и учитывает наличие тонкой жесткой зоны непосредственно под пуансоном. Однако решения получаются весьма громоздкие в тригонометрических функциях.

Наконец, В. Хан, Б. Авитцур и Е. Бишоп [137] применили для установившейся стадии процесса сферическое поле, а для конечной стадии при малой толщине донышка параллельное поле.

Решения методом линий скольжения и методом верхней оценки применимы лишь к плоской деформации, и нет пока никаких доказательств возможности распространения их на осесимметричную прошивку. Допуская, что эти решения с соответствующей коррекцией можно применить как первое приближение к осесимметричной задаче, Э. Томсен с соавторами указывает, что такими решениями можно пользоваться только для руководства, но их не следует применять для исследования влияния степени обжатия на величину удельного усилия [106]. Для примера на рис. 7.44 (кривая *4*) приведено решение X. Кудо, выполненное методом верхней оценки [106].

7.6. ОБЪЕМНАЯ ШТАМПОВКА В ОТКРЫТЫХ ШТАМПАХ

7.6.1. Общие положения

В процессе наиболее распространенной штамповки в открытых штампах можно рассматривать два основных периода. В первый период происходит заполнение полости штампа с одновременным вытеканием заусенца, обусловленным условиями процесса; во втором периоде вытекает в заусенец излишек металла, имеющийся в заготовке, и происходит доштамповка поковки и по высоте.

В первый период заусенец играет положительную роль, замыкая штамп по поверхности разъема и создавая сопротивление, обеспечивающее заполнение формы. При этом по мере движения верхнего штампа толщина заусенца уменьшается, а сопротивление течению в заусенец увеличивается, и, следовательно, в конечный момент этого периода заполняются входящие углы полостей штампа, т. е. участки, требующие максимального удельного усилия.

Теоретически этот момент должен совпадать с концом всего процесса штамповки. Однако практически пока невозможно получить заготовку с точно необходимым объемом металла; поскольку исходный материал изготовляют с определенными допусками, длина заготовки колеблется в зависимости от неточности резки, несколько меняется угар от заготовки к заготовке, колеблется длина ее при закладке в заготовительные ручьи, не вполне постоянна температура штамповки, происходит износ штампа и т. п.

В связи с этим необходим некоторый небольшой гарантийный излишек металла, который и будет дополнительно вытекать в заусенец во второй период штамповки при уже заполненной полости штампа.

Сопротивление течению металла в заусенец при равных прочих условиях зависит от конструкции штампа в зоне течения заусенца, грубо говоря, от формы и размеров канавки для заусенца. Изменяя размеры этой канавки, можно достичь заполнения формы при меньшем или большем количестве металла, вытекающего в заусенец в первый период штамповки. В любой момент штамповки заполнение формы будет происходить лишь в том случае, если сопротивление заполнению формы равно или меньше сопротивления вытеканию металла в заусенец. Процесс, максимально приближающийся к идеальному, т. е. требующему минимальной затраты энергии и металла, мы могли бы построить в том случае, если бы умели сколько-нибудь точно определять удельное усилие для любого момента штамповки и соответственно определять форму и размеры канавки для заусенца.

Пока это не представляется возможным, хотя уже есть попытки в этом направлении. Поэтому размеры канавки для заусенца обычно выбирают по нормалям, разработанным на основании данных опыта с учетом теоретических соображений.

Поскольку же в процессе штамповки во второй его период, как сказано ранее, происходит только вытекание излишка металла в заусенец, постольку и необходимая конечная деформирующая сила будет определяться исключительно тем удельным усилием, которое необходимо для вытекания излишка в конечный момент всего процесса при выбранной канавке для заусенца.

Это обстоятельство дает возможность сравнительно просто подойти теоретически к определению деформирующей силы и удельного усилия при штамповке в открытых штампах.

Деформирующую силу P, необходимую для осуществления деформации, в конечный момент штамповки можно представить как состоящую из двух слагаемых

$$P = P_з + P_п,$$

где $P_з$ — усилие, необходимое для деформации металла в заусенце, а $P_п$ — усилие, необходимое для деформации металла в штампе.

7.6.2. Удельное усилие деформирования заусенца

В открытых штампах делают по периметру полости в плоскости разъема канавку для заусенца, состоящую из двух участков: «мостика» и «магазина». При правильно сконструированной канавке сжатие заусенца происходит только в зоне мостика шириной s и глубиной $h_з$, определяющей толщину заусенца, как показано на рис. 7.45. В скобках на рисунке даны обозначения для поковки формы тела вращения. Величина $h_з$ в процессе штамповки является переменной, но минимальное ее значение в конечный момент штамповки определяется нормалями. Магазин предназначен для приема излишка металла, и его глубину следует выполнять достаточно большой с тем, чтобы в зоне магазина не происходило значительного сжатия (осадки) заусенца.

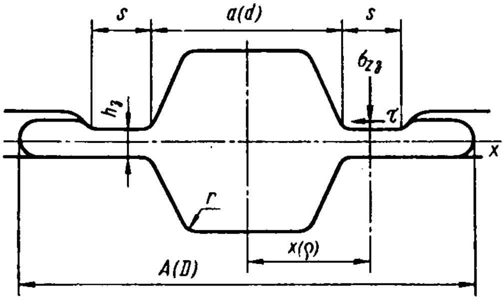


Рис. 7.45

Процесс деформации заусенца в зоне мостика представляет собой осадку, а потому и уравнения, определяющие распределение и величину напряжений σ_{z3}, можно написать, заменив обозначения в ранее полученных уравнениях для процесса осадки. При этом, учитывая, что удельное усилие большое, контактные касательные напряжения будем считать постоянными и $\tau_к = -\mu_s\sigma_s$.

Для поковок удлиненной формы, имеющих в плане форму прямоугольника (или приближающуюся к ней), действительно уравнение (7.1а)

$$\sigma_{z3} = \sigma_s^* \frac{2\mu_s x}{h} + C, \tag{а}$$

а для поковок круглых в плане, заменяя координату x координатой ρ и σ_s^* на σ_s, получим

$$\sigma_{z3} = \sigma_s \frac{2\mu_s \rho}{h_3} + C. \tag{б}$$

В поковках прямоугольной формы металл, находящийся в магазине, не препятствует течению металла в зоне мостика (если пренебречь незначительным влиянием торцов поковки), и для определения постоянной C можно принять, как и в случае осадки, что при $x = 0{,}5a + s$ напряжение $\sigma_{z3} = -\sigma_s^*$, и тогда

$$C = -\sigma_s^* \left[1 + \frac{2\mu_s(0{,}5a + s)}{h_3}\right],$$

а напряжение

$$\sigma_{z3} = -\sigma_s^* \left[1 + \frac{2\mu_s(0{,}5a + s - x)}{h_3}\right]. \tag{7.69}$$

Максимальное напряжение σ_{z3} будет в сечении, граничном с телом поковки, т. е. при $x = 0{,}5a$:

$$\sigma_{z3\,max} = -\sigma_s^* \left(1 + \frac{2\mu_s s}{h_3}\right). \tag{7.70}$$

Деформирующую силу P_3 определим по объему эпюры напряжений (рис. 7.46):

$$P_3 = l\left(\sigma_s^* \cdot 2s + \sigma_s^* \frac{2\mu_s s}{h_3}\, s\right),$$

где l — длина поковки, откуда

$$P_3 = 2\sigma_s^* ls\left(1 + \mu_s \frac{s}{h_3}\right).$$

Площадь заусенца $F_3 \approx 2sl$, и, следовательно, удельное усилие

$$p_3 = \sigma_s^* \left(1 + \mu_s \frac{s}{h_3}\right), \tag{7.71}$$

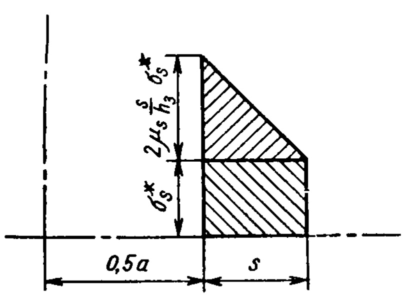


Рис. 7.46

При определении постоянной C к уравнению (б) учтем, что в поковках, имеющих форму тела вращения, участок заусенца, деформируемый мостиком, окружен кольцом металла, находящегося в магазине. Это кольцо будет затруднять вытекание металла из зоны мостика и деформироваться под давлением со стороны последнего. Напряжение на пограничной поверхности мостика и магазина определится формулой (7.42), которая применительно к данному случаю получит вид

$$\sigma_\rho = -1,1\sigma_s \ln \frac{D}{d + 2s}.$$

В практике максимальное отношение $\frac{D}{d+2s}$ составляет до $\sim 1,6$. Тогда $\sigma_\rho \approx -0,5\sigma_s$ (по рис. 7.20).

В связи с этим граничное значение $\sigma_{zз}$ при $\rho = 0,5d + s$ для поковок, имеющих форму тела вращения, следует принять не $-\sigma_s$, а $-\sigma_s - 0,5\sigma_s$, т. е. $-1,5\sigma_s$. Постоянная C при этом условии

$$C = -\sigma_s \left[1,5 + \frac{2\mu_s (0,5d + s)}{h_з}\right]$$

и

$$\sigma_{zs} = -\sigma_s \left[1,5 + \frac{2\mu_s (0,5d + s - \rho)}{h_з}\right].$$

Максимальное значение $\sigma_{zз}$ при $\rho = 0,5d$:

$$\sigma_{zз\,\max} = -\sigma_s \left(1,5 + \frac{2\mu_s s}{h_з}\right). \tag{7.72}$$

Деформирующее усилие можно получить, используя интеграл (6.1). Дифференциал площади для данного случая

$$dF = 2\pi\rho\, d\rho,$$

и, следовательно,

$$P = \int_{0,5d}^{0,5d+s} |\sigma_{zз}|\, 2\pi\rho\, d\rho.$$

Чтобы избежать хотя и простых, но утомительных алгебраических вычислений после подстановки пределов, опять воспользуемся тем, что написанный интеграл равен объему эпюры напряжений (рис. 7.47). Полный объем определим как сумму двух объемов *1* и *2*, используя теорему Гульдена:

$$P_з = 1,5\sigma_s s\pi (d + s) + 2\mu_s\sigma_s \frac{s}{h_з} \frac{s}{2} \pi \left(d + \frac{2}{3} s\right),$$

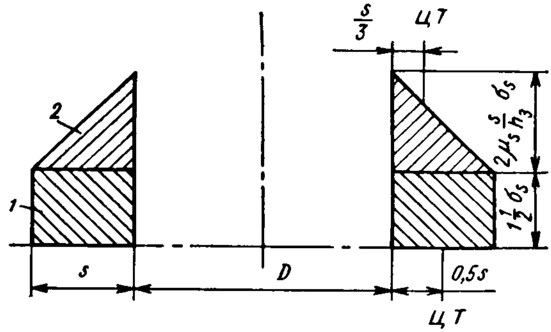


Рис. 7.47

откуда

$$P_з = \sigma_s \pi (d + s) s \left(1{,}5 + \frac{\mu_s s}{h_з} \frac{d + \frac{2}{3} s}{d + s}\right).$$

Так как $\pi (d + s) s = F_з$ — площади заусенца, то удельное усилие

$$P_з = \sigma_s \left(1{,}5 + \frac{\mu_s s}{h_з} \frac{d + \frac{2}{3} s}{d + s}\right).$$

В практике штамповки $d \gg s$, вследствие чего значение дроби $\frac{d + \frac{2}{3} s}{d + s}$ с ошибкой менее 10% можно принять за единицу, и окончательное выражение удельного усилия деформирования заусенца в поковках круглых в плане примет весьма простой вид

$$p_з = \sigma_s \left(1{,}5 + \mu_s \frac{s}{h_з}\right). \tag{7.73}$$

7.6.3. Удельное усилие деформирования металла в штампе

Рассматривая условия деформации в объеме металла, находящегося в полости фигуры штампа, автор в свое время утверждал [96], что во второй период штамповки (когда фигура полностью заполнена металлом и происходит только вытекание излишка его в заусенец) пластическая деформация не охватывает всего этого объема. Например, заштрихованный в клетку объем металла (рис. 7.48) в плоскостях бобышек во всяком случае не охвачен пластической деформацией, а лишь находится в условиях всестороннего сжатия. Так как процесс истечения металла в заусенец во второй период штамповки аналогичен процессу выдавливания, автор предположил, что пластической деформацией будет охвачен относительно небольшой объем металла по обе стороны от плоскости разъема штампа высотой h_0.

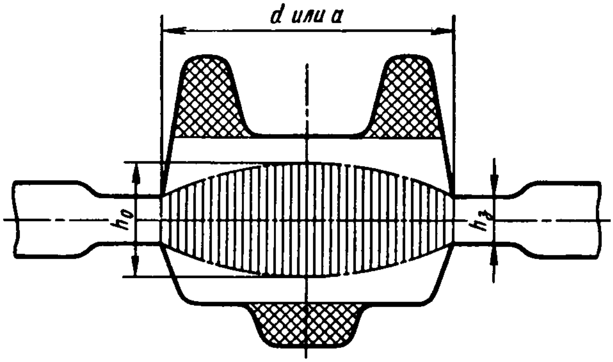


Рис. 7.48

Предыдущее утверждение и данное предположение в дальнейшем были подтверждены С. И. Губкиным при помощи оптического метода изучения пластических напряжений, а также результатами экспериментов на образцах с нанесенной координатной сеткой.

С. И. Губкин писал [15]: «Весь объем поковки в последний момент штамповки может быть разделен на три зоны. Первая зона концентрированного неоднородного напряженного состояния находится вблизи выхода металла в облойный мостик. Вторая зона занимает центральную часть поковки и по внешнему виду имеет линзообразную форму. Третья зона представляет как бы оболочку, в которую заключена линзообразная зона напряженного состояния. В этой зоне пластическая деформация отсутствует и имеет место однородное напряженное состояние (гидростатическое давление). Для третьей зоны девиаторная часть напряженного состояния равна нулю. Правильность этого предположения была проверена как на самом веществе, привлеченном для оптического анализа напряженного состояния, так и на металлических моделях».

Аналогичные результаты получил Е. И. Семенов при опытах штамповки образцов с нанесенной координатной сеткой [85, 100], а также И. П. Молосаев [50]. Наконец, Л. А. Шофман, используя метод линий скольжения, в 1956 г. теоретически показал, что пластическая деформация при доштамповке охватывает ограниченную зону, примыкающую к плоскости разъема, в то время как остальная масса металла остается «жесткой», т. е. пластически не деформируется.

Рассмотренная особенность напряженно-деформированного состояния металла заготовки, при доштамповке отвечающая жесткопластической схеме, облегчает определение деформирующих усилий, резко снижая в ряде случаев влияние формы поковки на удельное усилие.

Как сказано выше, эксперименты показывают, что очаг интенсивной деформации во второй период штамповки имеет линзообразную форму. Величина отношения толщины линзы h_0 к толщине заусенца $h_з$ (см. рис. 7.48) увеличивается с увеличением $a/h_з$ (или $d/h_з$). При $\frac{a}{h_з} \approx 20$ значение $h_0/h_з$ достигает примерно 5.

При изменении отношения $a/h_з$ происходит также и качественное изменение формы очага интенсивной деформации. Примерно до отношений $\frac{a}{h_з} \approx 3$ очаг интенсивной деформации имеет форму двояковогнутой линзы, а при больших отношениях $a/h_з$ «линза» становится двояковыпуклой. При малых отношениях $a/h_з$ по существу происходит не выдавливание заусенца и доштамповка, а высадка участка заготовки, т. е. осадка в кольцах [100].

Следует отметить, что экспериментальное определение величины $h_0/h_з$ при значениях $a/h_з$ бо̀льших 20—30 встречает значительные трудности.

Были сделаны попытки определить относительную толщину очага деформации теоретически, которые дали, однако, резко расходящиеся результаты. Тем не менее результаты, полученные И. Я. Тарновским, О. А. Ганаго и Р. А. Вайсбурдом [102], достаточно хорошо совпадают при $\frac{a}{h_з} = 20$ с экспериментами и отражают происходящее изменение формы очага деформации в зоне отношений $\frac{a}{h_з} \approx 3$.

Удельное усилие деформирования определим сначала для поковок (удлиненных) стержневого типа, имеющих в плоскости разъема форму, приближающуюся к прямоугольнику, считая деформацию плоской, т. е. равной нулю в направлении оси y.

Воспользуемся при этом методом линий скольжения. Как уже было сказано, для изучения процесса штамповки в открытом штампе можно применить поле линий скольжения, образованное двумя дугами окружностей равного радиуса. Подробное рассмотрение этого поля было выполнено на стр. 205. На рис. 6.21 центральной узловой точкой, в которой соприкасаются верхняя и нижняя жесткие зоны, а также левая и правая пластические зоны, является точка (*4*, *4*) с координатой $x_{(4,\,4)} = 0{,}5h_з \cdot 5{,}41$, и, следовательно, для данного примера $0{,}5a = 5{,}41 \cdot 0{,}5h_з$, т. е. $\frac{a}{h_з} = 5{,}41$. В реальных случаях штамповки отношение $a/h_з$ всегда больше (обычно 15—65).

Легко усмотреть, что построение поля, изображенного на рис. 6.21, можно продолжать, проводя из точки A радиусы-лучи (*0,5*), (*0,6*) и т. д., пока центральный угол кругового сектора станет равным 135° и последний луч совпадет со стенкой штампа. При принятой на чертеже рис. 6.22 величине угла $\gamma = \pi/12$ можно провести еще пять радиусов, и тогда, по выполнении построения, последней узловой точкой, расположенной на оси x, будет, точка (*9*,*9*).

Вычислив по формуле (6.26б) значения σ_z^1 для узловых то-

[1] При $\sigma_{0,\,0} = -k$, как и в табл. 6.1.

чек (5,5)—(9,9) и определив по таблицам [106] их абсциссы, получим, учтя табл. 6.1, корреспондирующие значения нормальных напряжений σ_z и координаты узловых точек, расположенных на оси x:

Точка	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
$\frac{x}{0,5h_з}$	1	1,61	2,44	3,64	5,41
$\frac{-\sigma_z}{2k}$	1	1,52	2,05	2,57	3,09
Точка	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)
$\frac{x}{0,5h_з}$	8,12	12,24	18,85	29,2	45,67
$\frac{-\sigma_z}{2k}$	3,62	4,14	4,67	5,19	5,71

Эпюра нормальных напряжений σ_z точек, расположенных на оси x (оси симметрии поля), представлена на рис. 7.49. Изображенную кривую с достаточной точностью можно аппроксимировать уравнением [1]

$$\sigma_z = -\sigma_s^* \left(1 + 1,25 \ln \frac{x}{0,5h_з}\right). \tag{7.74}$$

Как видно, рассматриваемое поле справедливо для значений $\frac{x}{0,5h_з} \leqslant 45,67$, т. е. для штампов, относительная ширина которых $a \leqslant 45,67h_з$ $\left(\text{т. е. } \frac{0,5a}{0,5h_з} \leqslant 45,67\right)$. В практике штамповки, как сказано ранее, отношение $a/h_з$ доходит до 60—65.

Таким образом, поле линий скольжения, образованное двумя дугами равного радиуса, строго говоря, не удовлетворяет полному диапазону значений $a/h_з$, возможных при штамповке.

Дальнейшее расширение построения поля в сторону увеличения значений $a/h_з$ вполне возможно, но характер построения новых областей самого поля несколько изменится, в частности, очаг деформации распространится вдоль стенки штампа [2]. Тем не менее уравнение (7.74) дает вполне удовлетворительную точность и для значений $x/0,5h_з$ в интервале 46—65.

Уравнение (7.74) позволяет определить удель-

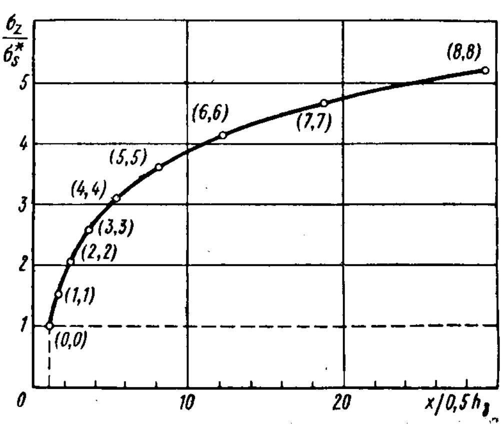


Рис. 7.49

[1] Уравнение этого типа предложил Е. М. Макушок [46]. Уравнение (7.74) отличается только постоянными.

[2] Подробнее см. в работе [46].

ное усилие $p'_п$ деформирования металла в штампе при отсутствии подпора со стороны заусенца, деформируемого в мостике канавки, так как при вычислении σ_z подпор не учитывался, а принималось $\sigma_{0,0} = -k$.

На основании уравнения (7.74) и рис. 7.49 можно написать

$$p'_п = \sigma_s^* \left[1 + \frac{1}{\frac{a}{h_з}} 1{,}25 \int_1^{\frac{a}{h_з}} \ln\left(\frac{x}{0{,}5h_з}\right) d\left(\frac{x}{0{,}5h_з}\right) \right].$$

После интегрирования, подстановки пределов $\frac{x}{0{,}5h_з} = 1$ и $\frac{x}{0{,}5h_з} = \frac{a}{h_з}$ получим

$$p'_п = \sigma_s^* \left[1{,}25 \left(\ln\frac{a}{h_з} + \frac{h_з}{a} \right) - 0{,}25 \right].$$

При размерах высоты заусенца, обычно применяемых на практике $\left(\frac{a}{h_з} > 15\right)$, отношение $h_з/a$ практического значения не имеет и им можно пренебречь (например, при $\frac{a}{h_з} = 15$ ошибка меньше 3%). Тогда расчетная формула принимает вид

$$p'_п = \sigma_s^* \left(1{,}25 \ln\frac{a}{h_з} - 0{,}25 \right). \qquad (7.75)$$

Влияние подпора со стороны металла, деформируемого в мостике заусенца, можно учесть следующим образом. При отсутствии подпора напряжение σ_z на участке графика (рис. 7.49) от $\frac{x}{h_з} = 0$ до $\frac{x}{h_з} = 1$ определяется величиной σ_s^*. В то же время максимальное напряжение σ_z в точке 0 согласно формуле (7.70) должно быть равно $\sigma_s^* + \sigma_s^* \frac{2\mu_s s}{h_з}$, т. е. на величину $\sigma_s^* \frac{2\mu_s s}{h_з}$ больше. Следовательно, на эту величину увеличатся значения напряжений и по всему диапазону значений координаты x, а также и удельное усилие p.

Поэтому, прибавляя к правой части уравнения (7.75) $\sigma_s^* \frac{2\mu_s s}{h_з}$, получим окончательную формулу удельного усилия деформирования металла поковки в полости штампа для случая плоской деформации (стержневые поковки)

$$p_п = \sigma_s^* \left(\frac{2\mu_s s}{h_з} - 0{,}25 + 1{,}25 \ln\frac{a}{h_з} \right). \qquad (7.76)$$

Для поковок, осесимметричных, круглых в плане или приближающихся к ним, достаточно обоснованно предположение, что распределение напряжений σ_z по оси ρ в этом случае будет таким же, как их распределение по оси x при плоской деформации, но вместо σ_s^* в уравнении (7.74) следует писать σ_s. Кроме того, для получения возможности интегрирования по площади круга ось следует совместить с осью симметрии. Тогда уравнение (7.74) видоизменится следующим образом:

$$\sigma_z = -\sigma_s\left[1 + 1{,}25\ln\left(\frac{d}{h_з} - \frac{\rho}{0{,}5h_з}\right)\right].$$

Удельное усилие без учета подпора со стороны металла, деформируемого в мостике заусенца, выразится следующим образом:

$$p'_п = \sigma_s\left[1 + \frac{1}{\pi\left(\frac{d}{h_з}\right)^2}\int\limits_0^{\frac{d}{h_з}-1} 1{,}25\ln\left(\frac{d}{h_з} - \frac{\rho}{0{,}5h_з}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, 2\pi\frac{\rho}{0{,}5h_з}\, d\left(\frac{\rho}{0{,}5h_з}\right)\right].$$

После интегрирования и подстановки пределов получим

$$p'_п = \sigma_s\left[1{,}25\left(\ln\frac{d}{h_з} + 2\frac{h_з}{d} - 0{,}5\frac{h_з^2}{d^2}\right) - 0{,}875\right].$$

Разность $2\frac{h_з}{d} - 0{,}5\frac{h_з^2}{d^2}$ при принятых размерах канавок для заусенца, особенно для круглых в плане поковок, у которых $d/h_з$ обычно больше, чем $a/h_з$ для поковок удлиненной формы, практического значения не имеет и ее можно отбросить. Например, при $\frac{d}{h_з} = 20$ ошибка меньше 2%. Тогда формула принимает вид

$$p'_п = \sigma_s\left(1{,}25\ln\frac{d}{h_з} - 0{,}875\right). \qquad (7.77)$$

Подпор учтем так же, как и при выводе формулы (7.76), но с использованием уравнения (7.72). В результате получим окончательную формулу удельного усилия $p_п$ деформирования металла поковки в полости штампа для случая о с е с и м м е т р и ч н о й д е ф о р м а ц и и (к р у г л ы е в п л а н е п о к о в к и)

$$p_п = \sigma_s\left[\frac{2\mu_s s}{h_з} - 0{,}375 + 1{,}25\ln\frac{d}{h_з}\right]. \qquad (7.78)$$

Определим удельное усилие деформирования металла в штампе $p'_п$ также и методом верхней оценки, следуя А. И. Сконечному [86]. Эта задача решается аналогично задаче, решение которой показано на примере внедрения пуансона в полупространство (см. стр. 220).

Примем дополнительно следующие обозначения:

$$\bar{h}_з = 0{,}5h_з;\quad \bar{h}_0 = 0{,}5h_0;\quad \bar{a} = 0{,}5a. \qquad (а)$$

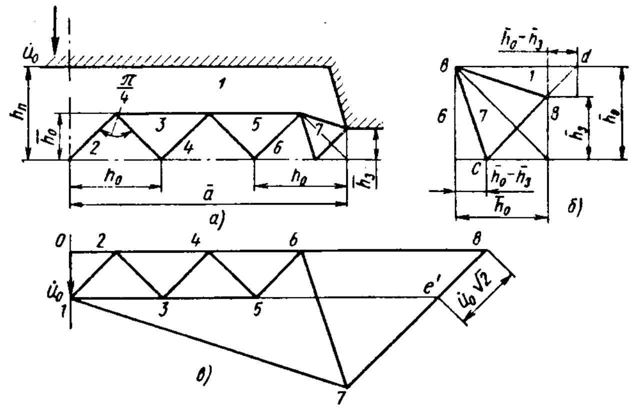


Рис. 7.50

В силу симметрии рассмотрим только один правый верхний квадрант.

Разделим половину ширины поковки $\bar{a}$ на n равных частей длиной $h_0 = 2\bar{h}_0$ и построим разрывное поле в виде треугольных блоков, как показано на рис. 7.50, *а*. Для большей ясности построения блоков 6 и 7 приведен рис. 7.50, *б*. На основании принятого поля строим годограф скоростей $\dot{u}$ (рис. 7.50, *в*).

Удельное усилие определяется в соответствии с выражением (6.32)

$$p'_{\text{п}} = \frac{\tau_c \sum \dot{u}_n l_n}{\bar{a}\dot{u}_0} \quad \text{или} \quad p'_{\text{п}} = \frac{\sigma_s \sum \dot{u}_n l_n}{2\bar{a}\dot{u}_0}. \tag{б}$$

Напряжение сдвига τ_c везде одинаково и равно $k = 0{,}5\sigma_s^*$.

Напишем составляющие общей суммы $\sum \dot{u}_n l_n$, пользуясь рис. 7.50, *а* и *в*:

$$\sum\nolimits_1 = \dot{u}_{12}l_{12} + \dot{u}_{23}l_{23} + \dot{u}_{34}l_{34} + \dot{u}_{45}l_{45} + \dot{u}_{56}l_{56} = 2\bar{h}_0\dot{u}_0\cdot 5.$$

В этой сумме все слагаемые равны между собой, так как $l_n = \bar{h}_0\sqrt{2}$ и $\dot{u}_n = \dot{u}_0\sqrt{2}$.

В общем случае, учитывая, что $\bar{a} = 2n\bar{h}_0$,

$$\sum\nolimits_1 = 2\bar{h}_0\dot{u}_0(2n-1).$$

Далее

$$\sum\nolimits_2 = \dot{u}_{13}l_{13} + \dot{u}_{15}l_{15}.$$

Здесь

$$l_n = 2\bar{h}_0,\ \dot{u}_{13} = 2\dot{u}_0,\quad \dot{u}_{15} = 4\dot{u}_0,$$

и далее, если бы число делений было больше, каждое последующее $\dot{u}$ увеличивалось бы в арифметической прогрессии на величину $2\dot{u}_0$, а число блоков на единицу меньше числа делений n. Поэтому, пользуясь правилом о сумме арифметической прогрессии, для произвольного n в общем виде можно написать

$$\sum\nolimits_2 = 2\bar{h}_0\dot{u}_0 \cdot n(n-1).$$

Наконец, последняя составляющая

$$\sum\nolimits_3 = l_{67}\dot{u}_{67} + l_{78}\dot{u}_{78} + l_{17}\dot{u}_{17}.$$

Пользуясь рис. 7.50, *а* и *б*, легко установить, что

$$l_{67} = l_{17} = \sqrt{\bar{h}_0^2 + (\bar{h}_0 - \bar{h}_з)^2};\ l_{78} = \bar{h}_з\sqrt{2}.$$

Скорости $\dot{u}_{67}$ и $\dot{u}_{78}$ определим из подобия треугольников $6\ 7\ 8$ на годографе (рис. 7.50, *в*) и bcd на рис. 7.50, *б*, а скорость $\dot{u}_{17}$ — из подобия треугольников $1\ 7e'$ (рис. 7.50, *в*) на годографе и bed на рис. 7.50 *б*:

$$\dot{u}_{67} = \dot{u}_{68}\frac{bc}{bd};\quad \dot{u}_{78} = \dot{u}_{68}\frac{cd}{bd}.$$

Скорость $\dot{u}_{68}$ представляет собой разность скоростей $\dot{u}_{08}-\dot{u}_{06}$. Величина скорости $\dot{u}_{06}$ очевидна: $\dot{u}_{06} = 2\dot{u}_0(n-0{,}5)$.

Скорость $\dot{u}_{08}$ является скоростью металла на входе в канавку для заусенца, и по условию сплошности обязательно равенство

$$\dot{u}_0\bar{a} = \dot{u}_{08}\bar{h}_з,$$

которое удовлетворяется автоматически при отсутствии ошибки в построении годографа, что легко проверить по чертежу. На основании приведенного равенства и учитывая, что $\bar{a} = 2\bar{h}_0 n$, получим

$$\dot{u}_{68} = 2\dot{u}_0\frac{n(\bar{h}_0 - \bar{h}_з) - 0{,}5\bar{h}_з}{\bar{h}_з}.$$

По рис. 7.50, *б* легко получить длину отрезков

$$bc = l_{67} = \sqrt{\bar{h}_0^2 + (\bar{h}_0 - \bar{h}_з)^2};\ bd = 2\bar{h}_0 - \bar{h}_з;$$

$$dc = \bar{h}_0\sqrt{2};\ be = bc \text{ и } ed = (\bar{h}_0 - \bar{h}_з)\sqrt{2}.$$

Осуществив подстановки полученных значений l и $\dot{u}$ в сумму $\sum_3$ и произведя необходимые преобразования, получим

$$\sum\nolimits_3 = 2\bar{h}_0\dot{u}_0 n\left[\frac{\bar{h}_0^2 + (\bar{h}_0 - \bar{h}_з)^2}{\bar{h}_0\bar{h}_з} + \frac{\bar{h}_0 - \bar{h}_з + 0{,}5\frac{\bar{h}_з}{n}}{\bar{h}_0 - 0{,}5\bar{h}_з}\right].$$

Собирая слагаемые $\sum_{i23}$ и произведя деление на $2\bar{a}\dot{u}_0$ согласно выражению (б), после элементарных преобразований получим

$$p'_п = \sigma_s^* \left[0,5 + \frac{\bar{a}}{4\bar{h}_0} + \frac{\bar{h}_0^2 + (\bar{h}_0 - \bar{h}_з)^2}{2\bar{h}_0\bar{h}_з} + \frac{\bar{h}_0 - \bar{h}_з + \frac{0.5\bar{h}_з}{n}}{\bar{h}_0 - 0{,}5\bar{h}_з} \right].$$

Последним членом в квадратных скобках можно пренебречь, поскольку его величина не превышает (0,2—0,3). Тогда

$$p'_п = \sigma_s^* \left[0,5 + \frac{\bar{a}}{4\bar{h}_0} + \frac{\bar{h}_0^2 + (\bar{h}_0 - \bar{h}_з)^2}{2\bar{h}_0\bar{h}_з} \right]. \qquad (в)$$

Теперь находим значение параметра $\bar{h}_0$, определяющее минимальную величину $p'_п$, дифференцируя правую часть полученного уравнения по $d\bar{h}_0$ и приравнивая производную нулю. В результате получим

$$\frac{\bar{h}_0}{\bar{h}_з} = 0,5 \sqrt{2 + \frac{\bar{a}}{\bar{h}_з}}\,.$$

Подставляя это значение $\bar{h}_0$ в формулу (в) и учитывая соотношения (а), окончательно получим

$$p'_п = \sigma_s^* \sqrt{2 + \frac{a}{h_з}} - 0,5. \qquad (7.79)$$

Данное выражение, как и выражение (7.75), полученное методом линий скольжения, не учитывает подпора со стороны заусенца. Учесть его можно так же, как это сделано для выражения (7.75) на стр. 323.

На рис. 7.51 показаны графики, вычисленные по формулам (7.75) — кривая *1* и (7.79) — кривая *2*. Естественно, что значения удельных усилий, полученных методом верхней оценки, больше найденных методом линий скольжения. Следует заметить, что при учете подпора со стороны заусенца и удельного усилия деформирования самого заусенца разница в результатах, полученных обоими методами, значительно сглаживается.

Решение, весьма близкое к приведенному (7.79), на основе разрывного поля другого вида дали Е. С. Романов и А. М. Меркулов [80]:

$$p'_п = \sqrt{\frac{a}{h_з}}\,.$$

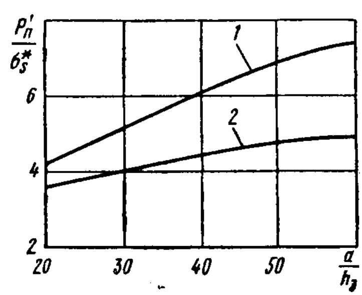


Рис. 7.51

7.6.4. Полное усилие штамповки

Полное усилие доштамповки $P = P_з + P_п$ (стр. 316) определяется формулами:

а) для поковок удлиненного типа, имеющих в плане форму прямоугольника или приближающихся к ней [используются уравнения (7.71) и (7.76)],

$$P = \sigma_s^*\left\{\left(1 + \mu_s \frac{s}{h_з}\right) F_з + \left(\frac{2\mu_s s}{h_з} - 0{,}25 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 1{,}25 \ln \frac{a}{h_з}\right) F_п\right\}; \qquad (7.80)$$

б) для поковок, круглых в плане или приближающихся к ним [используются уравнения (7.73) и (7.78)],

$$P = \sigma_s \left\{\left(1{,}5 + \mu_s \frac{s}{h_з}\right) F_з + \left(\frac{2\mu_s s}{h_з} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 0{,}375 + 1{,}25 \ln \frac{d}{h_з}\right) F_п\right\}. \qquad (7.81)$$

В формулах (7.80) и (7.81) $F_п$ — площадь проекции поковки (или рассматриваемой части ее при расчленении сложной поковки на элементарные участки) в плоскости разъема; $F_з$ — площадь проекции мостика заусенца.

Формально было бы правильнее в формулах (7.80) и (7.81) не выносить σ_s за общую скобку, так как средние значения напряжения текучести металла в заусенце и в самой поковке будут несколько различны. Однако доля усилия, необходимого для деформирования заусенца на мостике, относительно мала по сравнению с долей усилия, необходимого для деформирования металла в полости штампа. Поэтому возможная разница в значениях σ_s мало повлияет на общую величину деформирующего усилия.

Вместе с тем резкое остывание заусенца происходит лишь после окончания деформирования, а в процессе деформирования в заусенец непрерывно поступает горячий металл из полости штампа, а значительная скорость деформации заусенца способствует сохранению температуры.

Формулы (7.80) и (7.81) получены комбинированным методом: напряжения в металле, деформируемом в мостике заусенца, вычислены путем решения приближенных уравнений равновесия совместно с условием пластичности, а напряжения в металле, вытесняемом из полости штампа, определены методом линий скольжения.

Возможно также построить непрерывное поле линий скольжения, включая и объем металла, деформируемого в мостике заусенца. Однако это повело бы к некоторому усложнению конечных выводов, не давая каких-либо практических преимуществ.

Формулы (7.80) и (7.81), равно как и формулы (7.74)—(7.78), действительны в диапазоне $\frac{h_з}{a} = 15 \div 65$ *и только в тех случаях, когда глубина полостей верхнего и нижнего штампов по выступам*

($h_{пв}$ и $h_{пн}$, *рис. 7.52*) *больше половины высоты пластической зоны* h_0, т. е. при соблюдении неравенства

$$\frac{h_{пв}}{h_з} > \frac{h_0}{0{,}5h_з} < \frac{h_{пн}}{h_з}.$$

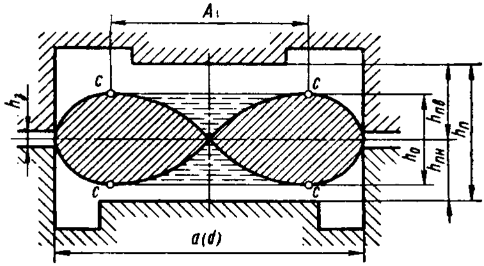


Рис. 7.52

Изучение поля линий скольжения, образованного дугами двух окружностей равного радиуса, показывает, что максимальная высота пластической зоны h_0, определяемой этим полем, и расстояние A по горизонтали между крайними точками C для обычно встречающихся в практике штамповки соотношений $a/h_з$ (равных 15—65) определяются достаточно точно следующими соотношениями:

$$\frac{h_0}{h_з} = (0{,}28 \div 0{,}29)\frac{a}{h_з}; \tag{7,82а}$$

$$\frac{A}{h_з} = (0{,}67 \div 0{,}64)\frac{a}{h_з}. \tag{7.82б}$$

Формулы для определения усилия штамповки методом линий скольжения впервые получил Л. А. Шофман [17], пользуясь графическим построением поля. Предложенные им формулы несколько сложнее. Они дают значения удельных усилий, близкие к получаемым по формулам (7.80) и (7.81).

Если глубина полостей штампа мала и пластическая зона входит в соприкосновение с дном верхней и нижней полостей штампа, то при $h_{пв} = h_{пн} = \frac{1}{2} h_п$ (рис. 7.52) поле линий скольжения (μ = = 0,5) примет вид, показанный на рис. 7.53, *а* [121]. Область

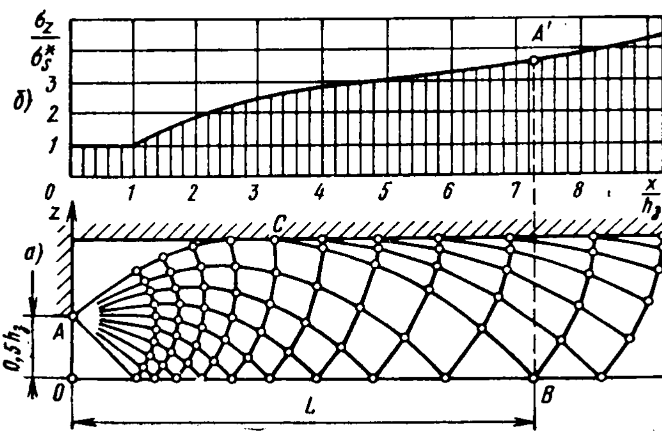


Рис. 7.53

OACB представляет собой участок поля, образованный дугами двух окружностей равного радиуса, и не отличается от рассмотренного по рис. 6.21. Далее следует второй участок поля, соответствующий случаю осадки полосы между шероховатыми плитами, как на рис. 6.19. Поэтому на основе уравнений (7.74) и (7.8) для второго участка можно написать

$$\sigma_z = -\sigma_s^* \left(1 + 1{,}25 \ln \frac{L}{0{,}5h_з} + \frac{x - L}{0{,}5h_п}\right). \tag{7.83}$$

Длину L начального участка можно определить из (7.82а):

$$\frac{L}{0{,}5h_з} = (3{,}58 \div 3{,}44)\frac{h_п}{h_з} \lessdot \frac{a}{h_з}. \tag{7.84}$$

Бо́льшие значения коэффициента для меньших значений $h_п/h_з$ в пределах примерно 3—16. Эпюры напряжений σ_z представлены на рис. 7.53, *б*.

Чем меньше относительная высота заусенца $h_п/h_з$ и чем больше относительная ширина поковки $a/h_з$, тем бо́льшую протяженность и значение получает второй участок поля и тем больше удельное усилие штамповки. Предельной величины оно достигает при $\frac{h_п}{h_з} = 1$, т. е. когда штамповка в открытом штампе по существу превращается в осадку весьма тонкой полосы. Поэтому предельное усилие штамповки ограничивается значениями, которые можно получить, применяя формулу осадки, принимая за высоту поковки высоту заусенца:

$$P_{пред} = 1{,}15\sigma_s \left(1 + 0{,}25 \frac{a + 2s}{h_з}\right);$$

$$P_{пред} = \sigma_s \left(1 + 0{,}17 \frac{d + 2s}{h_з}\right)$$

соответственно для случая плоской и осесимметричной деформации.

Вместе с тем, пользуясь формулами (7.74), (7.82) и (7.83), можно получить общие выражения усилия штамповки как для плоской, так и для осесимметричной деформации. Для плоской деформации (пользуясь приведенным выше материалом) это будет достаточно просто, для осесимметричной — несколько сложнее.

Для поковок сложной формы, в частности таких, у которых выступы штампа пересекают плоскость разъема, также возможно, как показал Л. А. Шофман, в конкретных случаях графическое построение поля линий скольжения и определение по этому полю усилия штамповки [17, 121].

7.6.5. Элементы штамповки в закрытых штампах[1]

Усилие штамповки в открытых штампах определено выше для периода доштамповки, когда излишек металла вытекает в заусенец при уже полностью оформленной поковке. При штамповке в обыч-

[1] Текст данного параграфа любезно предоставил А. З. Журавлев.

ных закрытых штампах доштамповка отсутствует, и процесс заканчивается, как только заполнена полость ручья, причем в последнюю очередь углы. Отсюда следует, что необходимое усилие для осуществления н о р м а л ь н о г о процесса при штамповке в закрытых штампах меньше, чем при штамповке в открытых штампах.

Большое влияние на величину усилия оказывают радиусы закругления r в углах (рис. 7.54) и несоответствие объемов деформируемого металла и ручья (избыток металла в заготовке). Как теоретически и экспериментально доказали Л. И. Живов и А. З. Журавлев, с уменьшением величины радиуса r значительно растет необходимое удельное усилие, обеспечивающее заполнение углов. Это усилие зависит также от сложности формы поковки, от характера заполнения полости (осаживанием или вдавливанием), от количества полостей с наличием входящих углов. Начало изучению этих вопросов положил А. В. Ребельский [76].

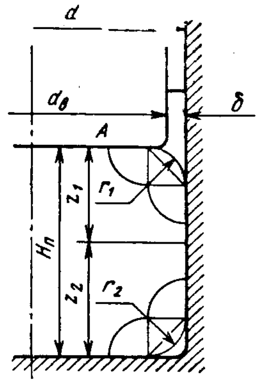


Рис. 7.54

Силовые условия штамповки осаживанием в закрытых осесимметричных штампах оптимальны, если после оформления закругления в углу наиболее труднодоступного участка действие внешней силы прекращается.

Для этого случая величина удельного усилия следующая:

$$p_п = \psi\sigma_s\left(1-\frac{2r_1}{d}\right)^2 + \sigma_s\left(1,5\ln\frac{1,5H_п}{2r_1} + \right.$$
$$\left. + 12\frac{r_1}{d} - 12\frac{r_1^2}{d^2} - 4,5\frac{H_п}{d} + 1,91\frac{H_п^2}{d^2} + \frac{d}{6H_п} - 1,5\right), \qquad (7.85)$$

где r_1 — радиус закругления поковки у пуансона; d — диаметр поковки; $H_п$ — высота поковки; $\psi\sigma_s = 2,07\sigma_s$ — контактное напряжение в точке A при максимальном трении.

В процессе заполнения угла в зоне пуансона обычно заполняется и угол у дна матрицы. В результате сдвига деформируемого металла относительно стенок матрицы возникает трение, и удельное усилие на подвижном пуансоне увеличивается

$$p_п = \psi\sigma_s\left(1-\frac{2r_2}{d}\right) + \sigma_s\left[1,5\ln\frac{1,5H_п}{2r_2} + \right.$$
$$+ 12\frac{r_2}{d} - 12\frac{r_2^2}{d^2} - 4,5\frac{H_п}{d} + 1,92\frac{H_п^2}{d^2} +$$
$$\left. + \frac{d}{6H_п} + \frac{2}{d}(H_п - r_1 - r_2) - 1,5\right], \qquad (7.86)$$

где r_2 — естественный радиус закругления угла у дна матрицы.

Нормальные напряжения на стенках ручья при максимальном трении и заполнении углов опишутся следующими уравнениями:

при построении от угла у пуансона

$$\frac{\sigma_\rho}{\sigma_s} = 1,48 \ln \frac{z_1}{2r_1} + 2,07; \tag{7.87а}$$

при построении от угла у дна матрицы

$$\frac{\sigma_\rho}{\sigma_s} = 1,48 \ln \frac{z_2}{2r_2} + 2,07, \tag{7.87б}$$

здесь z — расстояние вдоль стенки от соответствующего угла до рассматриваемой точки.

На стенках существует раздел течения металла в углы. В точке раздела трение равно нулю, а нормальное напряжение максимально. Формулы (7.87) позволят построить эпюру нормальных напряжений на стенке закрытого ручья при заполнении углов и определить боковое усилие.

Усилие штамповки в закрытых штампах начинает резко возрастать, если действие внешней силы продолжается после заполнения полости штампа, и металл начинает затекать в узкий зазор между пуансоном и матрицей, образуя быстро охлаждающийся торцовый заусенец.

С целью уменьшения трения в торцовой щели иногда на пуансоне делают узкий поясок. В этом случае можно считать, что трение в зазоре между пуансоном и матрицей близко к нулю. Тогда удельное усилие при штамповке высоких поковок $\frac{H_п}{d} > 0,2$ равно

$$p_п = \psi\sigma_s + \sigma_s\eta^2 \left[1,48 \ln \frac{\eta}{1,71(\eta - 1)} + \right.$$
$$\left. + 5,06 \frac{\eta - 1}{\eta} - 2,16 \frac{(\eta - 1)^2}{\eta^2} - 2,22\right], \tag{7.88а}$$

где $\eta = d/d_в$; d — диаметр полости ручья; $d_в$ — диаметр пуансона; $\delta = (d - d_в)/2$ — зазор; $\psi = 2,85$.

Из формулы (7.88а) видно, что удельное усилие постоянно и зависит только от величины зазора.

Если область пластической деформации распространяется на всю высоту поковки $\left(\frac{H_п}{d_в} < 0,2\right)$, то удельное усилие равно

$$p_п = \psi\sigma_s + \eta^2\sigma_s \left[1,50 \ln \frac{1,5H_п}{1,71(\eta - 1)} + \right.$$
$$+ 5,06 \frac{\eta - 1}{\eta} - 2,16 \frac{(\eta - 1)^2}{\eta^2} - 4,5 \frac{H_п}{d_в} +$$
$$\left. + 1,91 \frac{H_п^2}{d_в^2} + \frac{d_в}{6H_п} - 1,5\right]. \tag{7.88б}$$

В этом случае шестой член в скобках показывает рост усилия с уменьшением высоты поковки.

Если ручей имеет уклоны, то в процессе штамповки боковые поверхности в зазоре сближаются. Тогда кроме увеличения длины торцового заусенца происходит уменьшение его толщины. Образующийся тонкий торцовый заусенец, преодолевающий трение в зазоре, и приводит к быстрому разрушению штампов.

При штамповке на гидравлическом прессе возможно установить регулировочный предохранительный клапан на усилие, требуемое для штамповки данной поковки.

Кривошипный пресс в случае преувеличенного объема заготовки будет работать «в распор», и возможна даже его поломка. Для обеспечения безопасной работы кривошипного пресса применяют два способа. Первый заключается в том, что в штампе предусматривают магазин (компенсатор) для принятия излишнего материала в заготовке. Другой способ состоит в применении пресса такой жесткости (податливости), чтобы колебание высоты поковки находилось в пределах безопасно допустимых упругих деформаций пресса. Однако в этом случае требуется кривошипный пресс с повышенным номинальным усилием [23].

При штамповке в закрытых штампах на молоте трудно установить момент заполнения полости и возможно нанесение лишних ударов, что сопровождается резким увеличением усилий и напряжений в металле штампа в тем большей степени, чем больше масса падающих частей молота. Поэтому А. З. Журавлев рекомендует ограничивать последнюю пределами

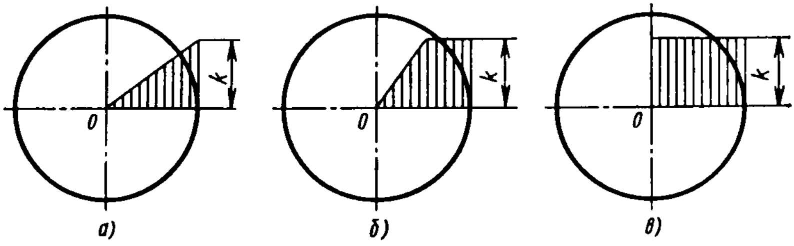
$$G = (3{,}5—5{,}0)\ F_п,$$

где G — масса падающих частей молота, кг; $F_п$ — площадь проекции поковки, см^2 [23].

7.7. СКРУЧИВАНИЕ

Скручиванием называется кузнечная операция, посредством которой одну часть заготовки поворачивают по отношению к другой на определенный угол вокруг общей оси.

От ранее рассмотренных кузнечных операций скручивание отличается тем, что очаг деформации при этой операции не находится под непосредственным воздействием давящего инструмента,



а) б) в)

Рис. 7.55

а пластическое состояние по мере увеличения угла закручивания постепенно распространяется от периферии заготовки к ее оси, пока все сечение не будет охвачено пластической деформацией.

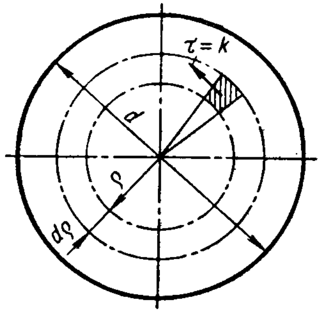


Рис. 7.56

На рис. 7.55, *а* представлено известное распределение касательных напряжений при кручении в поперечном сечении круглого стержня при упругой деформации. Напряжение максимально на периферии и по линейному закону падает, обращаясь в нуль в центре сечения. При увеличении угла закручивания касательное напряжение на поверхности достигнет предельного значения k, при котором начнется пластическая деформация. В случае отсутствия упрочнения и дальнейшего увеличения угла закручивания напряжение k охватит и более глубокие слои заготовки. Часть ее (периферийная) будет находиться в пластическом состоянии, а часть (центральная) — в упругом (рис. 7.55, *б*). Наконец, при дальнейшем увеличении угла закручивания пластическая деформация охватит все сечение (рис. 7.55, *в*).

Необходимый для этого крутящий момент M легко найти, приравняв его моменту внутренних сил (рис. 7.56):

$$M = \int_0^{0,5d} k d\rho \cdot \rho \cdot 2\pi\rho = 2\pi k \int_0^{0,5d} \rho^2 d\rho,$$

откуда

$$M = \frac{\pi d^3}{12} k = \frac{\pi d^3}{24} \sigma_s^*. \tag{7.89}$$

Из формулы видно, что модуль сопротивления при пластическом кручении больше, чем при упругом.

Глава 8
ОПЕРАЦИИ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ

8.1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ПО МЕТОДИКЕ АНАЛИЗА

Операции листовой штамповки можно разделить на две группы — разделительные и формоизменяющие.

Разделительные операции характеризуются отделением одной части заготовки от другой путем разрушения материала по заданной границе (вырубка, пробивка, отрезка, зачистка и т. п.).

Формоизменяющие операции (гибка, вытяжка, обжим, отбортовка и т. п.) характеризуются тем, что заготовка получает пластические деформации и деформирование протекает без разрушения или потери устойчивости.

При формоизменяющих операциях пластической деформации обычно подвергается только часть заготовки — очаг деформации. Очаг деформации может быть заключен между частями заготовки, деформирующимися упруго, или же между свободным контуром заготовки и частью ее, деформирующейся упруго. Толщина заготовки в очаге деформации в формоизменяющих операциях обычно значительно меньше двух других ее размеров. При рассмотрении формоизменяющих операций целесообразно ввести понятие срединной поверхности, делящей толщину заготовки пополам.

На рис. 8.1 схематично показаны характер формоизменения заготовки при выполнении основных формоизменяющих операций листовой штамповки, расположение очага деформации в заготовке и действующие внешние силы.

При гибке происходит изменение кривизны срединной поверхности заготовки, причем линейные деформации на срединной поверхности близки к нулю.

При вытяжке производится протягивание заготовки через отверстие матрицы, при котором плоская заготовка превращается в полое изделие, а пространственная заготовка (в последующих переходах вытяжки) получает уменьшение поперечных размеров.

При обжиме поперечные размеры краевой части полой тонкостенной заготовки уменьшаются путем заталкивания заготовки в отверстие матрицы.

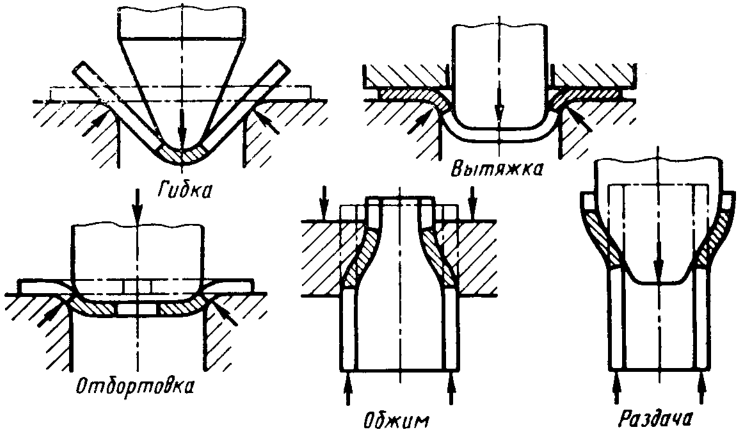


Рис. 8.1

При раздаче внедрение пуансона в полую тонкостенную заготовку приводит к увеличению поперечных размеров заготовки в очаге деформации.

При отбортовке производится вдавливание участка заготовки, граничащего с предварительно пробитым отверстием, в матрицу, при котором размеры отверстия увеличиваются с образованием борта.

Заготовка в очаге деформации обычно имеет контакт с поверхностью одного рабочего инструмента, и лишь при деформировании с принудительным утонением в очаге деформации имеются две контактные поверхности. Как правило, при деформировании поверхность заготовки в зоне очага деформации перемещается относительно поверхности инструмента.

На контактную поверхность заготовки со стороны инструмента действуют нормальные $\sigma_н$ и касательные $\tau_к$ напряжения. Последние возникают вследствие контактного трения.

Так как радиусы кривизны срединной поверхности в очаге деформации обычно значительно больше толщины заготовки, то нормальные напряжения на контактных поверхностях при деформировании без принудительного утонения значительно меньше напряжения текучести.

При одной контактной поверхности напряжения, перпендикулярные к срединной поверхности, убывают по толщине заготовки от максимального значения, равного $\sigma_н$, на контактной поверхности до нуля на противоположной, свободной поверхности.

Относительно малая величина напряжений, действующих нормально контактной поверхности, позволяет считать, что схема напряженного состояния близка к плоской, а касательные напряжения на контактной поверхности согласно выражению (5.44) можно определять по соотношению

$$\tau_к = \mu\sigma_н,$$

где μ — коэффициент трения.

В процессе перемещения элементов заготовки в очаге деформации относительно поверхностей рабочего инструмента кривизна их срединной поверхности может изменяться.

Изменение кривизны создается действием моментов и перерезывающих сил и сопровождается неравномерным по толщине распределением деформаций и напряжений.

Воздействие моментов на деформирующийся элемент заготовки приводит к изменению величин продольных сил, а следовательно, и нормальных напряжений по сравнению со значениями, необходимыми для пластической деформации элемента без изменения его кривизны.

При осесимметричной деформации тонкостенной заготовки в операциях листовой штамповки радиусы кривизны в широтных сечениях обычно больше, а величина изменения кривизны в процессе деформирования меньше, чем для меридиональных сечений заготовки. В этих случаях величины изгибающих моментов, действующих в широтных сечениях, меньше моментов, действующих в меридиональных сечениях.

Если же учесть, что на величине меридиональных напряжений действие широтных моментов скажется через проекцию широтных напряжений на касательную к образующей заготовки, можно полагать, что незначительное изменение широтных напряжений, вызванное действием широтных моментов, скажется на величине и распределении меридиональных напряжений в весьма малой степени.

Основываясь на сказанном, допустимо принять, что при отыскании распределения меридиональных напряжений в условиях осевой симметрии деформирования влиянием изменения кривизны в широтных сечениях можно пренебречь.

В большинстве случаев очаг деформации при осесимметричном деформировании можно разделить на участки, в каждом из которых кривизна срединной поверхности в меридиональных сечениях постоянна.

Перемещение элементов заготовки относительно рабочих поверхностей инструмента в таких участках очага деформации не сопровождается изменением кривизны срединной поверхности в меридиональных сечениях. Однако переход элементов заготовки из одного участка постоянной кривизны в другой (например, из плоской части фланца на скругленную кромку матрицы при вытяжке) вызывает изменение кривизны срединной поверхности в меридиональном сечении. Поэтому в первом приближении, решая задачу по отысканию распределения напряжений в очаге деформации, можно считать для каждого участка постоянной кривизны в меридиональном сечении справедливыми уравнения равновесия, полученные по безмоментной теории. Влияние же изгибающих моментов, действующих в меридиональном направлении, можно учесть граничными условиями между участками постоянной кривизны.

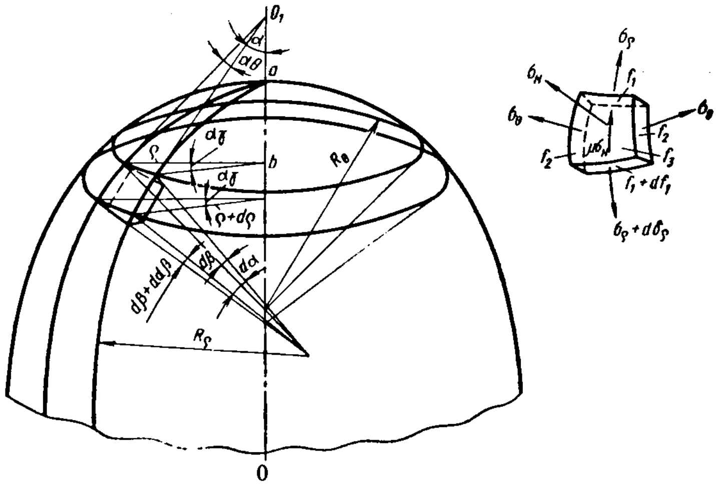


Рис. 8.2

В общем случае при анализе операций листовой штамповки можно пользоваться уравнениями равновесия, пластичности, связи, неразрывности деформации и условиями на контуре, приведенными в гл. 3—5.

Однако для формоизменяющих операций с осевой симметрией деформирования при наличии одной контактной поверхности можно получить приближенное уравнение равновесия элемента (рис. 8.2), выделенного в участке очага деформации, имеющего постоянную кривизну в меридиональном сечении. Элемент выделен двумя плоскостями, проходящими через ось симметрии заготовки OO_1 (меридиональные сечения), составляющими между собой угол $d\gamma$, и двумя круговыми коническими поверхностями, образующие каждой из которых перпендикулярны срединной поверхности заготовки (широтные сечения) и составляют между собой угол $d\alpha$, а вершины этих конусов лежат на оси симметрии. При $R_\rho = \text{const}$ положение рассматриваемого элемента можно задать его расстоянием ρ от оси симметрии и координатами центра кривизны, причем каждому значению радиуса ρ соответствует определенное значение угла α между касательной к образующей поверхности в точке с координатой ρ и осью симметрии.

Изменение радиуса ρ на величину $d\rho$ вызывает изменение угла α на величину $d\alpha$. Так как радиусы R_ρ перпендикулярны касательной к образующей, то изменение угла $d\alpha$ представляет собой угол между радиусами R_ρ, проведенными из точек ρ и $\rho + d\rho$. Примем, что толщина заготовки постоянна и значительно меньше радиусов кривизны в меридиональном R_ρ и широтном R_θ сечениях. С учетом сказанного ранее считаем, что меридиональные напряжения σ_ρ и широтные напряжения σ_θ равномерно распределены по толщине заготовки и являются главными нормальными напряжениями.

Примем, что все нормальные напряжения (рис. 8.2) положительны, а касательные напряжения $\mu\sigma_н$ совпадают по направлению с проекцией напряжений σ_θ на касательную к образующей. Это допущение основано на том, что обычно в формоизменяющих операциях листовой штамповки с осевой симметрией деформирования интенсивность увеличения напряжений σ_ρ при изменении радиуса ρ возрастает за счет действия сил трения по сравнению с идеальным (без трения) процессом, при котором увеличение σ_ρ обусловлено только действием проекций напряжений σ_θ на касательную.

При составлении уравнений равновесия рассматриваемого элемента все элементарные силы (в том числе и силу трения) будем относить к срединной поверхности.

Уравнения равновесия рассматриваемого элемента (пренебрегая бесконечно малыми высших порядков) следующие:

а) при проецировании на нормаль к поверхности (рис. 8.2)

$$\sigma_н f_3 - 2\sigma_\rho f_1 \frac{d\alpha}{2} - 2\sigma_\theta f_2 \frac{d\beta}{2} = 0; \tag{8.1}$$

б) при проецировании сил на касательную к поверхности заготовки в меридиональном сечении

$$\sigma_\rho f_1 + d(\sigma_\rho f_1) - \sigma_\rho f_1 - 2\sigma_\theta f_2 \frac{d\theta}{2} - \mu\sigma_н f_3 = 0. \tag{8.2}$$

Соотношение между углами $d\alpha$, $d\beta$ и $d\gamma$ можно найти из условий, что длина элемента l в широтном сечении

$$l = \rho d\gamma = \frac{\rho}{\cos\alpha} d\beta = \frac{\rho}{\sin\alpha} d\theta;$$

отсюда следует

$$d\gamma = \frac{d\beta}{\cos\alpha} = \frac{d\theta}{\sin\alpha}. \tag{8.3}$$

Величины площадей f_1, f_2 и f_3 определяются следующими очевидными соотношениями:

$$f_1 = sR_\theta\, d\beta = s\rho\, d\gamma;\quad f_2 = sR_\rho\, d\alpha = s\frac{d\rho}{\sin\alpha};$$

$$f_3 = R_\rho R_\theta\, d\alpha\, d\beta = \rho\, d\gamma \frac{d\rho}{\sin\alpha},$$

где s — толщина заготовки.

Дифференцируя первое уравнение, находим

$$df_1 = s\, d\rho\, d\gamma.$$

Подставим полученные соотношения в уравнение равновесия (8.1):

$$\sigma_н R_\rho R_\theta\, d\alpha\, d\beta - \sigma_\rho s R_\theta\, d\beta\, d\alpha - \sigma_\theta s R_\rho\, d\alpha\, d\beta = 0.$$

После сокращения и несложных преобразований получим известное из безмоментной теории оболочек уравнение Лапласа

$$\frac{\sigma_н}{s}-\frac{\sigma_\rho}{R_\rho}-\frac{\sigma_\theta}{R_\theta}=0. \tag{8.4}$$

Подставим значения площадей f_1, f_2 и f_3 в уравнение (8.2) и выразим углы $d\beta$ и $d\theta$ через $d\gamma$ по соотношению (8.3), учитывая, что $d(\sigma_\rho f_1)=\sigma_\rho\,df_1+f_1\,d\sigma_\rho$:

$$\sigma_\rho s\,d\rho\,d\gamma+s\rho\,d\gamma\,d\sigma_\rho-\sigma_\theta s\frac{d\rho}{\sin\alpha}\sin\alpha\,d\gamma-$$

$$-\mu\sigma_н\rho\,d\gamma\frac{d\rho}{\sin\alpha}=0.$$

Произведем сокращения и поделим почленно на $s\,d\rho$:

$$\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\sigma_\rho-\sigma_\theta-\mu\sigma_н\frac{\rho}{s\sin\alpha}=0. \tag{8.5}$$

Подставим значение $\sigma_н$ из (8.4) в (8.5):

$$\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\sigma_\rho-\sigma_\theta-\frac{\mu\rho}{\sin\alpha}\left(\frac{\sigma_\rho}{R_\rho}+\frac{\sigma_\theta}{R_\theta}\right)=0. \tag{8.6}$$

Уравнение (8.6) является общим уравнением равновесия элемента заготовки постоянной толщины выделенного в пространственном участке очага деформации при осесимметричном деформировании заготовки с наличием трения на контактной поверхности. Аналогичные уравнения равновесия были получены для частных случаев в работах [1, 113, 120 и др.].

Если рассматриваемая осесимметричная оболочка имеет переменную толщину вдоль образующей $s=f(\rho)=\Phi(\alpha)$, то аналогичным путем можно найти общее уравнение равновесия для $s=\text{var}$, несколько отличающееся от уравнений (8.6). В этом случае общее уравнение равновесия имеет вид

$$\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\sigma_\rho\left(1+\frac{\rho\,ds}{s\,d\rho}\right)-\sigma_\theta-\frac{\mu\rho}{\sin\alpha}\left(\frac{\sigma_\rho}{R_\rho}+\frac{\sigma_\theta}{R_\theta}\right)=0. \tag{8.7}$$

Для отыскания распределения напряжений в участке очага деформации постоянной кривизны в меридиональном сечении необходимо применительно к заданной форме и размерам очага деформации установить связь между ρ, α, R_ρ и R_θ с тем, чтобы в уравнении (8.6) была одна переменная, характеризующая координаты элемента, а также выразить одно из неизвестных напряжений (σ_θ) через другое (σ_ρ), используя условие пластичности.

Так как при относительно малой толщине заготовки $\left(\frac{s}{R_\rho}<\right.$ $\left.<0{,}2\right)$ и при $R_\rho=\text{const}$ схему напряженного состояния приближенно можно считать плоской, а напряжения σ_ρ и σ_θ — главными, то и условие пластичности должно быть принято соответствующим плоскому напряженному состоянию.

В зависимости от условий нагружения заготовки в различных операциях листовой штамповки схема напряженного состояния

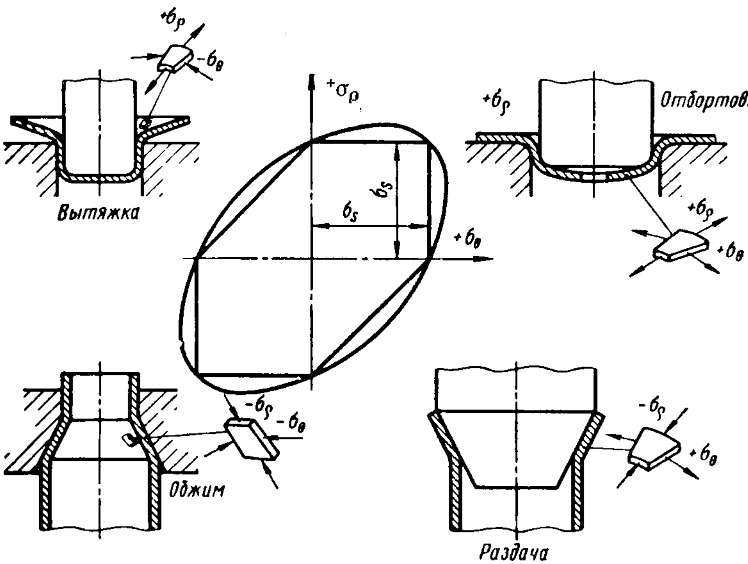


Рис. 8.3

и знаки напряжений σ_ρ и σ_θ в очаге деформации могут быть различными. В операциях вытяжки и отбортовки напряжения σ_ρ — растягивающие, а в операциях обжима и раздачи — сжимающие. Напряжения σ_θ являются сжимающими в операциях вытяжки и обжима, а в операциях раздачи и отбортовки — растягивающими. Таким образом, в операциях вытяжки и раздачи схема напряженного состояния разноименная (крайние главные напряжения σ_ρ и σ_θ), а в операциях обжима и отбортовки — одноименная (крайние напряжения σ_θ и $\sigma_н \approx 0$, где $\sigma_н$ — напряжение, перпендикулярное к срединной поверхности).

На рис. 8.3 представлен контур пластичности для плоского напряженного состояния по условию постоянства максимальных касательных напряжений и по условию постоянства интенсивности напряжений, а в каждом квадранте даны схемы операций, деформирование которых осуществляется при знаках напряжений, соответствующих определенным квадрантам.

Из схемы следует, что отрезки контура пластичности, заключенные в каком-либо квадранте, характеризуют возможные соотношения между напряжениями σ_ρ и σ_θ в определенной операции листовой штамповки.

Пользуясь приближенным уравнением равновесия (8.6) и условием пластичности с учетом схемы напряженного состояния в данной операции, можно выяснить распределение напряжений в участке очага деформации с постоянной кривизной в меридиональном сечении. При резких изменениях кривизны в меридиональных сечениях должно быть учтено влияние изгибающих моментов, что будет сделано после изучения операции гибки (пластического изгиба).

8.2. ГИБКА

Пластический изгиб исследовали Н. И. Безухов [3], А. А. Ильюшин [33], Е. Н. Мошнин [51], И. П. Ренне [77], Н. Н. Малинин [47], А. Надаи [56], Р. Хилл [113] и др.

В общем случае изгиб заготовки осуществляется одновременным действием внешних изгибающих моментов, а также продольных и поперечных сил.

Рассмотрим чистый изгиб заготовки в виде широкой полосы.

Под действием изгибающих моментов, приложенных к двум противоположным краям прямоугольной заготовки, радиус срединной поверхности уменьшается. Начиная с определенного радиуса кривизны в поверхностных слоях заготовки появляются пластические деформации, причем по мере дальнейшего деформирования толщина зон пластических деформаций увеличивается. Пластическая деформация распространяется вглубь от поверхностей заготовки, а толщина упругодеформированного слоя уменьшается по мере увеличения кривизны срединной поверхности. Нетрудно показать, что при $\frac{\rho_c}{s} < 25$, где ρ_c — радиус срединной поверхности и s — толщина заготовки, толщина упругодеформированного слоя составляет менее $0{,}1s$ ($\varepsilon_s = 0{,}2\%$).

Опытами показано, что даже при значительных пластических деформациях при гибке в штампах (гибка усилием, а не только моментом) параллельные риски, нанесенные на боковой поверхности заготовки, принимают веерообразное расположение, причем почти не искривляются (рис. 8.4). Это показывает, что гипотеза плоских сечений остается в достаточной мере справедливой и при конечных пластических деформациях изгиба.

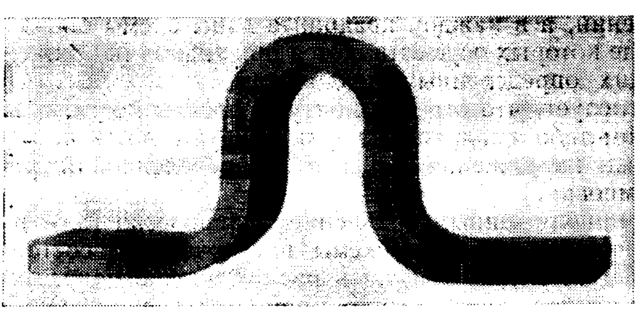


Рис. 8.4

При изгибе моментом M (рис. 8.5) часть слоев заготовки получает удлинение в тангенциальном направлении, а другая часть — сжатие (зона растяжения и зона сжатия). В любой данный момент деформирования (при данной кривизне заготовки) должна быть поверхность, разделяющая зоны растяжения и сжатия. Эту поверхность называют **нейтральной поверхностью напряжений**. Учитывая допустимость использования гипотезы плоских сечений, можно полагать, что приращения деформаций при изменении кривизны линейно возрастают по мере удаления от нейтральной поверхности напряжений.

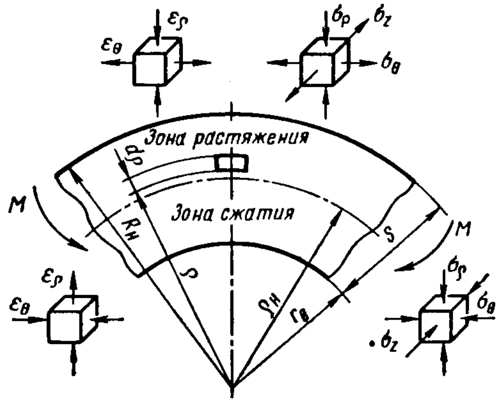


Рис. 8.5

Нейтральная поверхность представляет собой геометрическую поверхность, смещающуюся в процессе изгиба по материальным слоям, составляющим заготовку. Это смещение нейтральной поверхности приводит к возникновению зоны немонотонной деформации, в которой слои, испытывающие сжатие в тангенциальном направлении, при дальнейшем увеличении кривизны начинают растягиваться в том же направлении.

Оценим приближенно размеры зоны немонотонной деформации при изгибе широкой полосы. Деформации в направлении ширины при изгибе широкой полосы можно принять равными нулю. В этих условиях $\varepsilon_\theta = -\varepsilon_\rho$, и площадь сечения заготовки в плоскости изгиба должна оставаться неизменной. Примем, что в любой момент деформирования нейтральная поверхность совпадает со срединной поверхностью заготовки $\rho_н = \rho_с$, где $\rho_н$ — радиус нейтральной поверхности (рис. 8.5); $\rho_с$ — радиус срединной поверхности.

Рассмотрим случай, когда плоская полоса изогнута на внутренний радиус $r_в$ (рис. 8.5). Найдем радиус ρ_1 материального слоя, с которым совпадала срединная поверхность перед изгибом плоской заготовки, когда эта поверхность делила площадь сечения заготовки на две равные части. Этот материальный слой в любой момент деформирования делит площадь сечения заготовки на две равные части ($\varepsilon_z = 0$), откуда следует

$$\frac{R_н^2 - \rho_1^2}{2}\,\alpha = \frac{\rho_1^2 - r_в^2}{2}\,\alpha; \tag{8.8}$$

из соотношения (8.8) получаем

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{R_н^2 + r_в^2}{2}}. \tag{8.9}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\rho_1 > \rho_c = \frac{R_н + r_в}{2} \left(\rho_c^2 = \rho_1^2 - \frac{(R_н - r_в)^2}{4}\right)$$

и, в частности, при $R_н = 2r_в = 2s$ толщина зоны немонотонной деформации

$$\Delta = \rho_1 - \rho_c = 0{,}08s.$$

Таким образом, толщина зоны немонотонной деформации хотя и невелика, но конечна, и при точных расчетах следует учитывать возникновение этой зоны.

Однако при изгибе на малые радиусы кривизны толщина зоны немонотонной деформации значительно возрастает благодаря тому, что в этом случае, как будет показано далее, нейтральная поверхность напряжений существенно смещается от срединной к внутренней поверхности заготовки.

Рассмотрим распределение напряжений в широкой полосе при *пластическом изгибе моментом*.

При пластическом изгибе зависимость величины нормальных напряжений σ_θ от расстояния до нейтральной поверхности не является линейной, как при упругом изгибе, а имеет довольно сложный характер вследствие наличия пластических зон, а также вследствие влияния кривизны на распределение напряжений и схему напряженного состояния. При значительной кривизне изгибаемой заготовки в процессе деформирования наблюдается нажатие продольных слоев заготовки одного на другой, в результате которого возникают напряжения σ_ρ, перпендикулярные к срединной поверхности заготовки. Величина их возрастает от нуля на поверхности заготовки до максимального значения на нейтральной поверхности напряжений.

При рассмотрении условия равновесия элементов в очаге деформации при изгибе целесообразно воспользоваться полярной системой координат с полюсом, совпадающим с центром кривизны заготовки в данный момент деформирования.

При изгибе моментом касательные напряжения $\tau_{\theta\rho}$ отсутствуют, и уравнение равновесия (3.51) в принятых обозначениях напряжений получит вид

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \tag{8.10}$$

Энергетическое условие пластичности, записанное в упрощенной форме без учета влияния упрочнения, имеет вид

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \pm \beta\sigma_s, \tag{8.11}$$

где знак + относится к зоне растяжения ($\rho > \rho_н$), а знак — относится к зоне сжатия ($\rho < \rho_н$). Коэффициент $\beta = 1,15$ для плоско-деформированного состояния.

Распределение напряжений в заготовке при изгибе найдем для случая $\frac{\rho}{s} < 25$, когда толщиной упругодеформированного слоя заготовки можно пренебречь и считать, что по всей толщине заготовка получает только пластические деформации.

Пренебрегаем также эффектом Баушингера в зоне немонотонной деформации и поле напряжений отыскиваем при нагружении для данного момента деформирования (при данных значениях $R_н$ и $r_в$).

Решая совместно уравнения (8.10) и (8.11) и используя для отыскания произвольной постоянной интегрирования граничные условия, по которым для зоны растяжения напряжение $\sigma_\rho = 0$ на наружной поверхности заготовки (при $\rho = R_н$), а для зоны сжатия $\sigma_\rho = 0$ на внутренней поверхности (при $\rho = r_в$), находим формулы, позволяющие установить распределение напряжения в зоне растяжения (8.12), (8.13) и в зоне сжатия (8.14), (8.15).

Зона растяжения

$$\sigma_\rho = -\beta\sigma_s \ln \frac{R_н}{\rho}; \tag{8.12}$$

$$\sigma_\theta = \beta\sigma_s \left(1 - \ln \frac{R_н}{\rho}\right). \tag{8.13}$$

Зона сжатия

$$\sigma_\rho = -\beta\sigma_s \ln \frac{\rho}{r_в}; \tag{8.14}$$

$$\sigma_\theta = -\beta\sigma_s \left(1 + \ln \frac{\rho}{r_в}\right). \tag{8.15}$$

Из условия равенства напряжений σ_ρ для границы зон сжатия и растяжения (при $\rho = \rho_н$), определяемых по формулам (8.12) и (8.14), получаем формулу (8.16), полученную И. П. Ренне [77] и Р. Хиллом [113] для определения величины радиуса кривизны нейтральной поверхности напряжений:

$$\rho_н = \sqrt{R_н r_в}. \tag{8.16}$$

Из формул (8.12) и (8.14) следует, что при значениях $\frac{r_в}{s} > 5$ максимальное значение напряжения σ_ρ на нейтральной поверхности напряжений $\sigma_{\rho_н} < 0,1\sigma_s$, откуда вытекает, что при $r_в >$ $> 5s$ схема напряженного состояния близка к линейной. С погрешностью, в среднем не превышающей 5%, можно считать также, что нейтральная поверхность напряжений совпадает со срединной поверхностью заготовки ($\rho_н \approx r_в + 0,5s$).

При $s_в < 5s$ влияние σ_ρ на величину и распределение напряжений σ_θ по толщине заготовки становится значительным, а нейтральная поверхность напряжений смещается от срединной поверхности к центру кривизны.

Учитывая, что $R_н = r_в + s$, и принимая радиус кривизны срединной поверхности $\rho_с = \frac{R_н + r_в}{s}$, а $\rho_н$ из формулы (8.16), легко получить относительную величину смещения η нейтральной поверхности напряжений от срединной поверхности:

$$\eta = \frac{\rho_с - \rho_н}{s} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{r_в}{s}} - \sqrt{\frac{r_в}{s}}\right)^2. \tag{8.17}$$

Как видно из соотношения (8.17), при $\frac{r_в}{s} \gg 1$ относительное смещение нейтральной поверхности напряжений $\eta \approx 0$ и увеличивается по мере уменьшения отношения $\frac{r_в}{s}$, достигая значения $\eta \approx \frac{1}{2}$ при $\frac{r_в}{s} = 0$. В последнем случае нейтральная поверхность переходит на внутреннюю поверхность заготовки.

Заметим, что как нейтральная, так и срединная поверхности являются геометрическими поверхностями, смещающимися в процессе изгиба по материальным слоям, составляющим заготовку.

Так как нейтральная поверхность напряжений разграничивает зону растяжения и зону сжатия, то смещение ее от срединной поверхности к внутренней поверхности заготовки должно увеличивать толщину зоны немонотонной деформации. Так как в зоне немонотонной деформации каждый материальный слой получал деформации тангенциального сжатия с последующим растяжением, то среди этих слоев должен быть слой, в котором абсолютные деформации сжатия и растяжения за предыдущие этапы деформирования равны. Длина этого слоя равна длине исходной заготовки, а поверхность, совпадающая с этим слоем в данный момент деформирования, называют нейтральной поверхностью деформаций.

Естественно, что радиус нейтральной поверхности деформаций $\rho_{нд}$ больше радиуса нейтральной поверхности напряжений $\rho_н$, но в то же время меньше радиуса срединной поверхности. В последнем можно убедиться, если принять, что нейтральная поверхность деформаций расположена посередине зоны немонотонной деформации. Так, например, при $r_в = 0$ $R_н = s$; $\rho_1 = 0{,}71s$ [по формуле (8.9)]; $\rho_н = 0$ по формуле (8.16); $\rho_{ср} = 0{,}5s$ и $\rho_{нд} = \frac{\rho_1 - \rho_н}{2} = 0{,}355s$. Из этого же крайнего случая ($r_в = 0$) можно заметить, что срединная поверхность существенно удалена от нейтральной поверхности напряжений и находится в зоне тангенциального растяжения, что до некоторой степени поясняет причину утонения заготовки при гибке по малому радиусу (рис. 8.6), которое можно оценить отношением конечной толщины s_1 к начальной s_0 [52].

Представляет интерес оценка максимальной величины напряжения $\sigma_{\rho\,max}$, действующего при изгибе. Подставив значение $\rho_н$ из (8.16) в (8.12) или (8.14), получаем

$$\sigma_{\rho\,max} = -\beta\sigma_s \ln\sqrt{\frac{R_н}{r_в}}. \qquad (8.18)$$

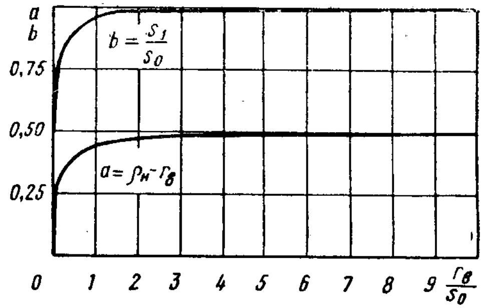


Рис. 8.6

Из формулы (8.18) следует, что $\sigma_{\rho\,max}$ возрастает с увеличением кривизны заготовки и при $\frac{R_н}{r_в} = e^2 \approx 7,4$ достигает значения, равного напряжению текучести. Дальнейшее увеличение кривизны (уменьшение $r_в$) приводит к тому, что $\sigma_{\rho\,max}$ становится больше напряжения текучести, а из условия пластичности следует, что в этом случае на нейтральной поверхности действует отрицательное напряжение $\sigma_\theta = -(\sigma_{\rho\,max} - \sigma_s)$. Таким образом, при $\frac{R_н}{r_в} > 7,4$ нейтральная поверхность напряжений перестает быть поверхностью, на которой напряжение σ_θ изменяет знак ($\sigma_\theta = 0$).

На это обстоятельство обратил внимание И. П. Ренне [77]. Заметим, что указанные изменения схемы напряженного состояния вблизи нейтральной поверхности напряжений возникают при весьма малых значениях $r_в$. Действительно, приняв $R_н = r_в + s$, получаем, что указанное изменение схемы напряженного состояния возникает при $r_в < 0,156s$.

Анализ процесса изгиба был выполнен без учета упрочнения, а следовательно, полученные зависимости справедливы для горячего деформирования.

В условиях холодного деформирования упрочнение приводит к увеличению напряжения текучести, а так как величины деформаций переменны по толщине, то и увеличение напряжения текучести от исходного значения также будет переменным по толщине.

Анализ распределения напряжений при гибке с учетом упрочнения проведем с использованием следующих допущений:

1) поворот сечений, перпендикулярных к срединной поверхности, происходит относительно точек, расположенных на нейтральной поверхности напряжений, в конечный момент деформации (пренебрегаем зоной немонотонной деформации);

2) материал заготовки одинаково упрочняется при сжатии и при растяжении;

3) по упрочняющему эффекту тангенциальная деформация при гибке эквивалентна линейной деформации при одноосном сжатии или растяжении.

Для удобства анализа используем кривую упрочнения в координатах напряжение — истинная деформация (логарифмическая), причем кривую приближенно заменим прямой линией по уравнению (1.20).

Приведем некоторые пояснения к принятым допущениям.

Как было показано ранее, нейтральная поверхность напряжений смещается в процессе увеличения кривизны заготовки при гибке. При этом смещаются и точки, относительно которых в каждый момент деформирования происходит поворот сечений и возникает зона немонотонной деформации.

Однако, так как толщина зоны немонотонной деформации при $\frac{r_в}{s} > 1$ сравнительно невелика, то в первом приближении можно использовать первое из приведенных допущений. Второе допущение в комментариях не нуждается.

Применительно к третьему допущению следует отметить, что при гибке широкой полосы принимается схема плоской деформации, и соотношения между главными линейными деформациями при гибке и при одноосном растяжении или сжатии будут различными. Разное соотношение между деформациями приведет к различию в формоизменении (а следовательно, и в упрочнении) элементов при одинаковых значениях одной из линейных деформаций. Одинаковое упрочнение в разных процессах деформирования будет при условии равенства интенсивности деформации [33]. Однако погрешность, вносимая третьим допущением, применительно к условиям гибки не очень велика, так как при одинаковой линейной деформации отношение интенсивностей деформации для схемы плоской деформации и для линейной схемы напряженного состояния составляет примерно 0,865.

Заметим, что при необходимости точность решения можно повысить, если указанный коэффициент ввести множителем перед модулем пластичности в уравнении прямой упрочнения.

Относительно использования кривой упрочнения в координатах напряжение—логарифмическая деформация заметим, что в случае кривой упрочнения в координатах напряжение текучести — относительная линейная деформация пришлось бы пользоваться одновременно кривыми упрочнения 1-го и 2-го рода или вводить пересчет деформаций с помощью условия постоянства объема, так как при гибке часть толщины получает сжатие в тангенциальном направлении, а часть — растяжение.

При этих допущениях условие пластичности (8.11) при подстановке в него напряжения текучести с учетом упрочнения получит вид

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \pm \beta [\sigma_{т0} \pm П\delta], \tag{8.19}$$

где $\delta = \ln \frac{\rho}{\rho_н}$ — истинная деформация, имеющая знак + при $\rho > \rho_н$ и знак — при $\rho < \rho_н$. В уравнении (8.19) знак + перед квадратной скобкой и в скобках относится к зоне тангенциального растяжения, а знак — к зоне тангенциального сжатия.

Решая уравнение равновесия (8.10) совместно с уравнением (8.19) после интегрирования и отыскания значения произвольной постоянной интегрирования из условия, что на поверхностях заготовки (при $\rho = R_н$ и при $\rho = r_в$) напряжение $\sigma_\rho = 0$, находим формулы, характеризующие распределение напряжений при гибке моментом с учетом упрочнения.

Для зоны растяжения

$$\sigma_\rho = -\beta\left(\sigma_{т0} + \frac{П}{2}\ln\frac{\rho R_н}{\rho_н^2}\right)\ln\frac{R_н}{\rho}; \tag{8.20}$$

$$\sigma_\theta = \beta\left[\sigma_{т0}\left(1 - \ln\frac{R_н}{\rho}\right) + \frac{П}{2}\left(2\ln\frac{\rho}{\rho_н} - \ln\frac{R_н\rho}{\rho_н^2}\ln\frac{R_н}{\rho}\right)\right]. \tag{8.21}$$

Для зоны сжатия

$$\sigma_\rho = -\beta\left(\sigma_{т0} + \frac{П}{2}\ln\frac{\rho_н^2}{\rho r_в}\right)\ln\frac{\rho}{r_в}; \tag{8.22}$$

$$\sigma_\theta = -\beta\left[\sigma_{т0}\left(1 + \ln\frac{\rho}{r_в}\right) + \frac{П}{2}\left(2\ln\frac{\rho_н}{\rho} + \ln\frac{\rho_н^2}{\rho r_в}\ln\frac{\rho}{r_в}\right)\right]. \tag{8.23}$$

Радиус нейтральной поверхности напряжений и в этом случае можно найти, приравняв σ_ρ для зон растяжения и сжатия при $\rho = \rho_н$. После несложных преобразований получим

$$\left(\sigma_{т0} + \frac{П}{2}\ln\frac{R_н}{r_в}\right)\ln\frac{R_н r_в}{\rho_н^2} = 0,$$

откуда следует, что при учете упрочнения с использованием линейной зависимости напряжения текучести от логарифмической деформации радиус нейтральной поверхности напряжений определяется по формуле (8.16), полученной для гибки без упрочнения.

Заметим, что И. П. Ренне [77] установил независимость радиуса нейтральной поверхности напряжений от упрочнения и для случая учета упрочнения линейной зависимостью напряжения текучести от относительной деформации (кривая 2-го рода).

На рис. 8.7 схематично показаны (с учетом и без учета упрочнения) эпюры распределения напряжений σ_ρ и σ_θ по толщине заготовки для случаев $r_в > 10s$ (линейное напряженное состояние) и $r_в = s$ (объемное напряженное состояние).

Величину внешнего изгибающего момента, необходимого для осуществления пластического изгиба, можно определить как

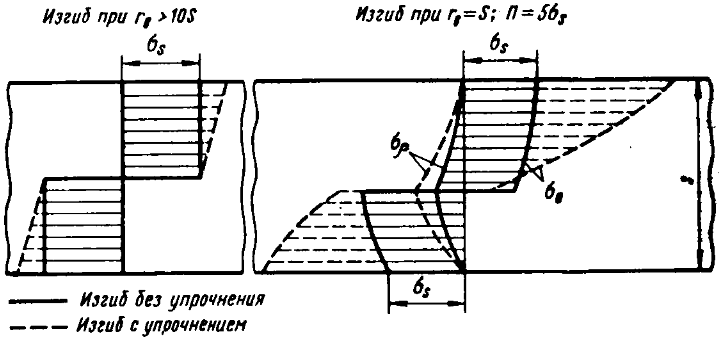


Рис. 8.7

сумму моментов, создаваемых напряжениями σ_θ и определяемых интегралами вида $\int \sigma_\theta \rho \, d\rho$ для участков по толщине заготовки, в которых знак напряжений σ_θ и характер функциональной зависимости $\sigma_\theta = f(\rho)$ постоянны.

Для случая, когда радиус нейтральной поверхности напряжений совпадает с радиусом срединной поверхности $\left(\rho_н = r_в + \frac{s}{2} = R_н - \frac{s}{2}\right)$, деформирование идет без упрочнения, а толщина упругодеформируемого слоя относительно мала, величина изгибающего момента $M_и$ для единицы ширины заготовки определяется следующим образом:

$$M_и = \beta \int_{\rho_н}^{R_н} \sigma_s \rho \, d\rho + \beta \int_{r_в}^{\rho_н} (-\sigma_s) \rho \, d\rho =$$

$$= \beta\sigma_s \frac{R_н^2 - \rho_н^2 - \rho_н^2 + r_в^2}{2} =$$

$$= \beta\sigma_s \frac{s}{4} (R_н + \rho_н - \rho_н - r_в) = \beta\sigma_s \frac{s^2}{4}. \qquad (8.24)$$

При изгибе без упрочнения по внутреннему радиусу $r_в < 5s$ (см. стр. 345) величина изгибающего момента определится аналогично. Однако значения σ_θ для зон сжатия и растяжения следует подставлять из формул (8.13) и (8.15):

$$M_и = \beta\sigma_s \left[\int_{\rho_н}^{R_н} \left(1 - \ln \frac{R_н}{\rho}\right) \rho \, d\rho - \int_{r_в}^{\rho_н} \left(1 + \ln \frac{\rho}{r_в}\right) \rho \, d\rho \right] = \beta\sigma_s \left(\frac{\rho_н^2}{2} \ln \frac{R_н r_в}{\rho_н^2} + \frac{R_н^2 - 2\rho_н^2 + r_в^2}{4} \right). \qquad (8.25)$$

Подставляя в полученную формулу (8.25) значение $\rho_н$ из формулы (8.16), находим, что при изгибе без упрочнения при малых значениях отношения $\frac{r_в}{s}$ величина изгибающего момента также равна величине, определяемой по формуле (8.24). Отсюда следует, что момент, необходимый для пластического изгиба без упрочнения, не изменяется в процессе деформирования, дающего увеличение кривизны, начиная от значений, при которых упруго-деформированная часть заготовки пренебрежимо мала.

Приведенное решение получено в предположении постоянства толщины заготовки. В действительности вследствие смещения нейтральной поверхности напряжений относительно срединной поверхности заготовки при малых значениях $\frac{r_в}{s} \lessdot 2$ толщина заготовки несколько уменьшается. Это уменьшение толщины при изгибе без упрочнения должно привести к некоторому уменьшению величины изгибающего момента по сравнению со значением, определяемым по формуле (8.24).

Аналогично можно получить формулу для определения величины изгибающего момента при изгибе с упрочнением (без учета изменения толщины заготовки в процессе деформирования). Для этого при отыскании значения интеграла $\int \sigma_\theta \rho \, d\rho$ необходимо подставить σ_θ из формул (8.21) и (8.23), по которым определяются значения тангенциального напряжения с учетом влияния упрочнения. Ввиду аналогии в подходе к решению задачи вывод формулы изгибающего момента с учетом влияния упрочнения опускаем. Заметим только, что упрочнение приводит к значительному увеличению изгибающего момента, что наглядно видно, в частности, из рис. 8.7.

Рассмотрим некоторые случаи изгиба при одновременном действии изгибающих моментов $M_и$ и продольных сил N*. Имея целью выяснить физическую сущность особенностей изгиба, а также получить приближенные формулы для расчета параметров такого процесса гибки, проведем анализ, принимая ряд допущений.

При изгибе моментом без упрочнения интегральная сумма по толщине заготовки элементарных сил, вызванных напряжениями σ_θ, равна нулю $\left(\int\limits_{r_в}^{R_н} \sigma_\theta \, d\rho = 0\right)$. При одновременном действии момента и продольной силы эта интегральная сумма должна быть равна продольной силе:

$$N = \int\limits_{r_в}^{R_н} \sigma_\theta \, d\rho. \tag{8.26}$$

* Такую задачу решал Н. И. Безухов [3].

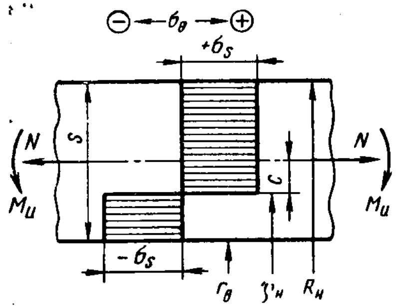


Рис. 8.8

Поэтому доля толщины заготовки, в которой напряжения имеют тот же знак, что и напряжения, вызываемые действием продольной силы, больше половины толщины заготовки, и нейтральная поверхность напряжений смещена относительно срединной поверхности заготовки. На рис. 8.8 схематично показано распределение напряжений по толщине заготовки при изгибе полосы моментом $M_и$ и продольной растягивающей силой N без учета влияния надавливания слоев заготовки друг на друга, упрочнения и влияния перерезывающих сил и контактных напряжений.

С целью упрощения написания формул примем, что $\beta = 1$ (решение с использованием условия постоянства максимального касательного напряжения).

Обозначим расстояние между нейтральной поверхностью напряжений и срединной поверхностью заготовки через C, тогда можно написать

$$r_в = R_н - s; \quad \rho_н = R_н - \frac{s}{2} - C. \tag{8.27}$$

Величину продольной силы можно выразить через размер C следующим образом:

$$N = \int_{\rho_н}^{R_н} \sigma_s \, d\rho + \int_{r_в}^{\rho_н} (-\sigma_s) \, d\rho = \sigma_s (R_н - 2\rho_н + $$
$$+ r_в) = 2\sigma_s C. \tag{8.28}$$

Напомним, что все выводы относятся к единице ширины заготовки. Из выражения (8.28), приняв $N = \sigma_{\theta ср} s$, легко получаем

$$\rho_н = \frac{R_н + r_в}{2} - \frac{\sigma_{\theta ср} s}{2\sigma_s}. \tag{8.29}$$

Из условия равенства нулю суммы моментов, действующих на заготовку в рассматриваемом сечении, можно записать

$$M_и + M_N = M_\sigma. \tag{8.30}$$

В этом равенстве принято, что $M_и$ — внешний изгибающий момент; M_N — момент, создаваемый продольной силой N, приложенной к заготовке; M_σ — момент, создаваемый напряжениями σ_θ. Величину момента M_σ можно найти аналогично предыдущему:

$$M_\sigma = \int\limits_{\rho_н}^{R_н} \sigma_s \rho \, d\rho + \int\limits_{r_в}^{\rho_н} (-\sigma_s) \rho \, d\rho = \frac{\sigma_s}{2} \left[R_н^2 - 2\rho_н^2 + r_в^2\right] =$$

$$= \frac{\sigma_s}{4} \left[s^2 + 4C \left(R_н + r_в - C\right)\right]. \quad (8.31)$$

Величина момента M_N относительно центра кривизны срединной поверхности заготовки равна:

$$M_N = N \frac{R_н + r_в}{2} = \sigma_s C \left(R_н + r_в\right). \quad (8.32)$$

Подставляя значения M_σ и M_N в равенство (8.30), находим формулу для определения величины внешнего момента:

$$M_и = \sigma_s \left(\frac{s^2}{4} - C^2\right) = \sigma_s \left(\frac{s^2}{4} - \frac{N^2}{4\sigma_s^2}\right). \quad (8.33)$$

Из формулы (8.33) можно установить, что при $N = 0$ формула (8.33) переходит в формулу (8.24), а при $N = \sigma_s s$ внешний изгибающий момент $M_и$ равен нулю. Таким образом, с увеличением продольной силы изгибающий момент, необходимый для пластического изгиба заготовки, уменьшается. Из формулы (8.28) можно установить, что по мере увеличения продольной силы N величина смещения C нейтральной поверхности напряжений от срединной поверхности увеличивается и при $N = \sigma_s s$ становится равной $C = \frac{s}{2}$, т. е. нейтральная поверхность напряжений смещается на внутреннюю поверхность заготовки.

Формулы (8.31)—(8.33) справедливы (с достаточной точностью) для горячей деформации при гибке по большому радиусу, когда напряженное состояние можно принять линейным.

Подобные зависимости могут быть получены и для объемной схемы напряженного состояния.

Приведем решение по определению радиуса нейтральной поверхности напряжений для гибки моментом и продольной силой для объемной схемы напряженного состояния.

Как показано на рис. 8.9, для соблюдения условий равновесия при наличии растягивающих продольных сил, действующих на изгибаемую заготовку, необходимо, чтобы на

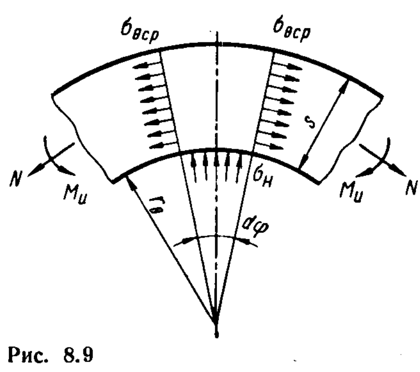


Рис. 8.9

внутренней поверхности заготовки были приложены сжимающие напряжения $\sigma_н$ (контактные напряжения на пуансоне). Связь между растягивающими напряжениями $\sigma_{\theta ср}$, вызванными действием продольной силы N, и напряжениями $\sigma_н$ получается из условия равновесия

$$2\sigma_{\theta ср} s \frac{d\varphi}{2} = \sigma_н r_в \, d\varphi,$$

откуда следует, что

$$\sigma_н = \sigma_{\theta ср} \frac{s}{r_в}. \qquad (8.34)$$

Используя уравнение равновесия (8.10) и условие пластичности (8.11), получаем уравнение (8.12) для зоны растяжения, а в зоне сжатия надо принять иное граничное условие, а именно при $\rho = r_в$ $\sigma_\rho = -\sigma_н$. Использование этого граничного условия позволяет получить следующее уравнение, характеризующее распределение напряжений σ_ρ в зоне сжатия для этого случая гибки:

$$\sigma_\rho = -\left(\beta\sigma_s \ln \frac{\rho}{r_в} + \sigma_н\right). \qquad (8.35)$$

Приравнивая значения σ_ρ для зон растяжения и сжатия при $\rho = \rho_н$, находим, что

$$\rho_н = \sqrt{\frac{R_н r_в}{\exp\left(\frac{\sigma_н}{\beta\sigma_s}\right)}} = \sqrt{\frac{R_н r_в}{\exp\left(\frac{\sigma_{\theta ср} s}{\beta\sigma_s r_в}\right)}}. \qquad (8.36)$$

Если же принять, что $\ln \frac{R_н r_в}{\rho_н^2} \approx \frac{R_н r_в}{\rho_н^2} - 1$, то легко получим формулу (8.36а), по которой радиус $\rho_н$ определяется более приближенно:

$$\rho_н = \sqrt{\frac{R_н r_в}{1 + \frac{\sigma_{\theta ср} s}{\beta\sigma_s r_в}}}. \qquad (8.36а)$$

Из рассмотрения формул (8.36) и (8.36а) можно видеть, что они преобразуются в формулу (8.16) при значениях $\sigma_н = \sigma_{\theta ср} = 0$ и что по мере увеличения этих напряжений нейтральная поверхность напряжений все более смещается к внутренней поверхности заготовки от положения, соответствующего гибке моментом (без продольных сил).

Представляет интерес то обстоятельство, что при относительно малых радиусах кривизны, когда нельзя пренебречь влиянием напряжений σ_ρ, радиус нейтральной поверхности напряжений зависит не только от величины продольных сил, но и от относительного радиуса кривизны внутренней поверхности $\frac{r_в}{s}$.

Рассмотрим теперь изгиб заготовки двойной кривизны при одновременном действии продольных сил и моментов. Это понадобится в дальнейшем для рассмотрения процесса осесимметричного деформирования в некоторых других формоизменяющих операциях.

Схема деформирования представлена на рис. 8.10.

Примем, что в сечении $O—O$ изгибающий момент отсутствует, а в сечении $a—a$ действует изгибающий момент, величина которого определяется по формуле (8.24) при $\beta = 1$.

Уравнение равенства моментов относительно сечения $O—O$ можно записать в виде

$$\sigma_\rho R_з s\, d\gamma (1 - \cos\alpha) R_\rho + \sigma_\theta s R_\rho \sin\alpha\, d\gamma R_\rho \frac{\sin\alpha}{2} = \frac{1}{4}\sigma_s s^2 R_з d\gamma. \tag{8.37}$$

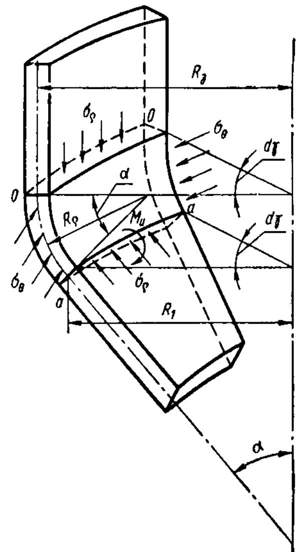


Рис. 8.10

После сокращения подобных членов полученное уравнение преобразуется в квадратное уравнение относительно радиуса кривизны в меридиональном сечении

$$\sigma_\theta R_\rho^2 \sin^2\alpha + 2\sigma_\rho R_з (1 - \cos\alpha) R_\rho - 0{,}5\sigma_s s R_з = 0.$$

Решение квадратного уравнения с использованием знака + перед корнем дает формулу

$$R_\rho = \frac{\sqrt{4\sigma_\rho^2 R_з^2 (1-\cos\alpha)^2 + 2\sigma_\theta\sigma_s s R_з \sin^2\alpha} - 2\sigma_\rho R_з (1-\cos\alpha)}{2\sigma_\theta \sin^2\alpha}. \tag{8.38}$$

В том случае, если $\sigma_\rho \approx 0$, а $\sigma_\theta \approx \sigma_s$, формула (8.38) примет вид

$$R_\rho = \frac{\sqrt{R_з s}}{\sqrt{2}\sin\alpha}. \tag{8.39}$$

При достаточно больших величинах напряжения σ_ρ, когда в формуле (8.38) первое слагаемое под корнем больше второго, ее можно преобразовать, заменив корень приближенным его значением $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$.

После такой замены получим

$$R_\rho = \frac{\sigma_s s}{4\sigma_\rho (1 - \cos\alpha)}. \tag{8.40}$$

Формулы (8.38)—(8.40) для определения радиуса R_ρ дают значения радиуса, при котором уравнения статического равновесия соблюдаются без действия нормальных контактных напряжений на поверхности заготовки. Радиус участка заготовки, в котором кривизна в меридиональном направлении при деформировании продольными силами и моментами устанавливается без воздействия контактных напряжений, условимся называть радиусом свободного изгиба.

Формулы для определения R_ρ являются весьма приближенными. При выводе их были приняты допущения. Пренебрегали действием моментов в широтном сечении. Это, однако, не вносит большой погрешности, так как в операциях с осевой симметрией деформирования изменение кривизны в широтном сечении обычно значительно меньше, чем изменение кривизны в меридиональном направлении. Кроме того, в выводе не учитывалось действие перерезывающих сил и переменность величины изгибающего момента в очаге деформации, а величина момента, действующего в сечении a—a, была принята не зависящей от нормальных напряжений σ_ρ. Последнее допущение может быть несколько оправдано тем, что увеличение изгибающего момента вследствие упрочнения частично компенсирует уменьшение момента вследствие действия продольных сил, и в среднем изгибающий момент можно определять по формуле (8.24). Заметим, что вывод был сделан для случая, когда напряжения σ_ρ и σ_θ сжимающие. Если напряжение σ_ρ будет растягивающим, то при определении R_ρ по формуле (8.38) следует изменить знак перед напряжением σ_ρ.

Более точное решение задачи по определению величины радиусов свободного изгиба было дано В. И. Вершининым с использованием приближенных уравнений моментной теории оболочек [72].

Рассмотрим вопрос об упругом пружинении при гибке. Неравномерность распределения деформаций по толщине заготовки приводит при разгрузке к изменению кривизны и угла изгиба (упругому пружинению). Разгрузка изогнутой заготовки сопровождается также возникновением в ней остаточных напряжений.

Определить величины остаточных напряжений и упругого пружинения можно на основании теоремы о разгрузке [33], согласно которой связь между напряжениями и деформациями при разгрузке подчиняется закону Гука, и если тело при нагружении испытывало неоднородную деформацию, то при разгрузке в нем возникнут остаточные напряжения, величина которых определяется разностью между напряжениями, действующими в нагруженном теле, и фиктивными напряжениями, которые возникли бы в теле при том же внешнем силовом воздействии, но при условии только упругого деформирования (закон Гука справедлив для любых деформаций).

При изгибе полосы моментом без упрочнения, если зоной упругих деформаций и смещением нейтральной поверхности относительно срединной можно пренебречь и принять в формуле (8.24) $\beta = 1$, величина изгибающего момента определится как $M = {}^1/_4\sigma_s s b$ (где b — ширина полосы). При условии только упругого деформирования тот же момент определится как $M = {}^1/_6\sigma' s^2 b$ (где σ' — фиктивное напряжение, действующее в поверхностных слоях заготовки при $y = \frac{s}{2}$, если $y = \rho - \rho_c$ — расстояние от срединной поверхности до рассматриваемого слоя).

Из условия равенства моментов получаем, что $\sigma' = \frac{3}{2}\sigma_s$, а величина остаточных напряжений

$$\sigma_{ост} = \sigma_s - \sigma_y = \sigma_s - \sigma' \frac{2y}{s} = \sigma_s\left(1 - 3\frac{y}{s}\right);$$

здесь σ_y — фиктивное напряжение, действующее на расстоянии y от срединной поверхности.

Так как разгрузка происходит в условиях упругого деформирования, то изменение кривизны, возникающее при разгрузке, может быть определено по известной формуле

$$\frac{1}{\rho_{разгр}} = \frac{M}{EI},$$

где E — модуль упругости, а I — момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной поверхности.

В рассматриваемом случае $\rho_н = \rho_c$, $I = \frac{bs^3}{12}$, и тогда $\frac{1}{\rho_{разгр}} = 3\frac{\sigma_s}{Es}$. Конечная кривизна срединной поверхности заготовки определится как разность между кривизной под нагрузкой и изменением кривизны при разгрузке:

$$\frac{1}{\rho_{ост}} = \frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_{разгр}}.$$

Изменение угла изгиба при разгрузке является следствием изменения кривизны, и если принять, что при разгрузке длина срединной поверхности не изменяется, то для элемента срединной поверхности длиной dl можно записать, что $dl = \rho_c\, d\alpha = \rho_{ост}\, d\alpha_1$. Отсюда следует, что $d\alpha_1 = \frac{\rho_c}{\rho_{ост}} d\alpha$. Тогда элементарный угол пружинения $d\,\Delta\alpha = d\alpha - d\alpha_1 = \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_{ост}}\right) d\alpha$. Суммарный угол пружинения можно найти как $\int_0^\alpha \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_{ост}}\right) d\alpha$. При изгибе моментом, когда величина изгибающего момента и кривизна постоянны по углу, $\Delta\alpha = \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_{ост}}\right)\alpha = \frac{\rho_c}{\rho_{разгр}}\alpha$.

Так как при изгибе полосы моментом $\frac{1}{\rho_{разгр}} = 3\frac{\sigma_s}{Es}$, то после несложных преобразований можно получить формулу для определения угла пружинения в виде $\Delta\alpha = 3\frac{\sigma_s}{E}\frac{\rho_c}{s}\alpha$.

Изложенная методика может быть использована при оценке величины пружинения в случае изгиба с учетом влияния упрочнения, а также в случае изгиба при изменяющейся по длине заготовки величине изгибающего момента.

8.3. ВЫТЯЖКА БЕЗ УТОНЕНИЯ СТЕНКИ

Вытяжка является одной из наиболее распространенных и изученных операций листовой штамповки. Процесс вытяжки рассмотрен в работах С. И. Губкина [12], И. А. Норицына [17, 58], Л. А. Шофмана [120], Г. Закса [24], Р. Хилла [113] и др. Ниже с учетом имеющихся работ дано рассмотрение операции вытяжки цилиндрического стакана в первом и последующих переходах.

8.3.1. Вытяжка плоской заготовки (1-й переход)

При вытяжке плоской круглой заготовки (рис. 8.11) пластическую деформацию получает часть заготовки (фланец), находящаяся на плоском торце матрицы и на ее скругленной кромке, а остальная часть заготовки деформируется упруго или получает небольшие пластические деформации.

Под действием пуансона средняя часть заготовки вдавливается в отверстие матрицы. Вследствие сплошности заготовки перемещение средней части вызывает появление во фланце растягивающих напряжений σ_ρ, действующих в радиальных направлениях. Одновременно возникают сжимающие напряжения σ_θ, действующие в тангенциальных направлениях. Если принять, что деформирование фланца происходит при отсутствии нормальных и касательных напряжений на его поверхности, т. е. без прижима, то напряженное состояние в очаге деформации будет плоским и деформирование фланца будет аналогично деформированию круглой пластинки с круглым отверстием, по контуру которого приложены растягивающие напряжения (вследствие осевой симметрии деформирования касательные напряжения $\tau_{\rho\theta} = 0$, а напряжения σ_ρ и σ_θ являются главными нормальными напряжениями). Таким образом, схема напряженного состояния во фланце близка к плоской разноименной.

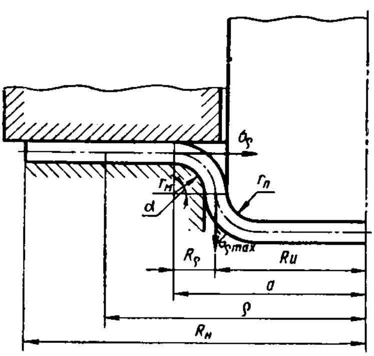


Рис. 8.11

Донная часть заготовки (под торцом пуансона), которую можно рассматривать как круговую пластину, нагруженную радиальными растягивающими напряжениями, также имеет схему плоского напряженного состояния, близкую к схеме двухосного растяжения.

В вертикальных стенках образующегося стакана напряженное состояние близко к линейному растяжению. Если внутренний диаметр стакана равен диаметру пуансона, то в стенках напряженное состояние может быть близким к плоскому растяжению, а напряжения σ_ρ и σ_θ являются растягивающими, причем $\sigma_\theta \approx \approx \frac{\sigma_\rho}{2}$.

Различие видов напряженного состояния в тех или иных участках заготовки создает возможность сосредоточения пластических деформаций во фланце заготовки. Действительно, по условию пластичности (5.22) пластическая деформация в стенках и донышке вытягиваемой заготовки может возникнуть в случае, если $\sigma_\rho = \sigma_s$ (линейная или плоская одноименная схема напряженного состояния). В то же время фланец заготовки может деформироваться при $\sigma_\rho = \sigma_s - |\sigma_\theta| < \sigma_s$. Таким образом, для успешной вытяжки необходимо, чтобы напряжение $\sigma_{\rho\,max}$, действующее на границе между фланцем и донной частью, не превосходило напряжение текучести. Отсюда следует, что основной задачей при рассмотрении процесса вытяжки должно быть отыскание величины $\sigma_{\rho\,max}$.

Решение этой задачи можно получить, установив зависимости, характеризующие закон распределения напряжений во фланце заготовки. Поле напряжений во фланце можно установить, используя уравнения равновесия и пластичности. Так как напряжения σ_ρ и σ_θ имеют различный знак, то изменение толщины заготовки невелико (особенно в начальном периоде вытяжки). Отсюда следует, что с достаточной точностью при отыскании поля напряжений во фланце можно использовать уравнение равновесия для оболочки постоянной толщины. В этом случае можно воспользоваться уравнением равновесия для плоской задачи в полярной системе координат (3.52) или, что то же, общим уравнением равновесия (8.6), в котором следует принять $\mu = 0$. Решение этого уравнения совместно с уравнением (5.22) ($\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s$), без учета влияния упрочнения, приводит к следующему уравнению:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = -\sigma_s. \tag{8.41}$$

Интегрируя уравнение (8.41) и используя для отыскания произвольной постоянной интегрирования граничное условие при $\rho = R_н$, $\sigma_\rho = 0$, получим

$$\sigma_\rho = \sigma_s \ln \frac{R_н}{\rho}. \tag{8.42}$$

*

Подставляя выражение для величины σ_ρ в условие пластичности, определяем величину напряжения σ_θ:

$$\sigma_\theta = -\sigma_s \left(1 - \ln \frac{R_н}{\rho}\right); \tag{8.43}$$

эти же формулы можно получить также методом характеристик (см. стр. 198).

Так как на переходе от фланца к донышку (при $\rho = R_и$) напряжение σ_ρ при вытяжке не должно превышать напряжения текучести, то можно, пользуясь формулой (8.42), найти теоретическую величину предельного коэффициента вытяжки $k_в = \frac{R_н}{R_и} = \frac{D_з}{d_и}$, определяемого как отношение диаметра заготовки к диаметру вытягиваемого стакана. Подставляя в формулу (8.42) $\sigma_\rho = \sigma_s$, находим, что в этом случае $\ln \frac{R_н}{R_и} = 1$, а предельный коэффициент вытяжки $k_{в\,пред} = 2{,}72$.

Однако приведенный анализ распределения напряжений в очаге деформации не полностью отражает реальные условия деформации заготовки при вытяжке. На распределение напряжений дополнительно оказывает влияние ряд факторов. В числе этих факторов основными являются трение под прижимом, трение на скругленной кромке матрицы, явления изгиба при переходе элементов заготовки на скругленную кромку матрицы и при сходе с нее, упрочнение металла в процессе холодной деформации. Рассмотрим характер влияния каждого из указанных факторов.

При определенных соотношениях размеров заготовки и вытягиваемого стакана фланец заготовки под действием сжимающих напряжений может потерять устойчивость. Для предотвращения появления складок (гофров) фланец заготовки специальным устройством (прижимом) прижимают к плоской части матрицы. В этом случае фланец заготовки со стороны прижима и матрицы будет подвергаться действию нормальных и касательных напряжений.

Величина касательного напряжения $\tau_к$ пропорциональна нормальному напряжению

$$\tau_к = \mu\sigma_н.$$

С тем чтобы установить вероятный характер распределения нормальных контактных напряжений по фланцу заготовки, рассмотрим изменение толщины отдельных его элементов в процессе вытяжки.

Из уравнения связи напряжений и деформаций (5.24), учитывая, что при отсутствии прижима напряжения в направлениях, нормальных к плоскости фланца, равны нулю, и заменяя индексы напряжений, получим

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_\rho} = \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_n}{\varepsilon_\rho - \varepsilon_n}, \tag{8.44}$$

где ε_n — относительная деформация по направлению толщины фланца.

Используя условие постоянства объема ($\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_n = 0$), можно в уравнении (8.44) исключить деформацию ε_ρ. Заменяя, кроме того, напряжения σ_ρ и σ_θ их значениями, определяемыми формулами (8.42) и (8.43), находим

$$\varepsilon_n = -\frac{1 - 2\ln\frac{R_н}{\rho}}{2 - \ln\frac{R_н}{\rho}}\varepsilon_\theta. \qquad (8.45)$$

Из формулы (8.45) можно установить, что при $2\ln\frac{R_н}{\rho} < 1$ ($\rho > 0{,}607R_н$) деформация ε_n имеет обратный знак по сравнению с деформацией ε_θ, а так как последняя является деформацией сжатия, то, следовательно, при указанных соотношениях $\frac{R_н}{\rho}$ деформация ε_n является деформацией растяжения (толщина заготовки увеличивается). При $\ln\frac{R_н}{\rho} = \frac{1}{2}$ (или, что то же, при $\rho = 0{,}607R_н$) деформация $\varepsilon_n = 0$, а при $2\ln\frac{R_н}{\rho} > 1$ деформация ε_n становится деформацией сжатия, т. е. толщина заготовки в этой части фланца уменьшается.

Таким образом, краевая часть фланца в процессе вытяжки получает увеличение толщины, причем наиболее интенсивно это увеличение происходит вблизи края заготовки при $\rho \approx R_н$, где деформация $\varepsilon_n = -\frac{1}{2}\varepsilon_0$.

Отсюда можно заключить, что усилие прижима при вытяжке будет распределяться по сравнительно узкой кольцевой части фланца, граничащей с наружным краем заготовки.

Обозначим усилие прижима Q, тогда суммарные силы трения, затрудняющие перемещение фланца к отверстию матрицы, будут равны $2\mu Q$ (силы трения действуют между заготовкой и торцом матрицы, а также между заготовкой и прижимом). Заменяя приближенно действие сил трения на заготовку действием нормальных напряжений $\sigma_\rho^н$, приложенных в радиальном направлении по контуру заготовки и равномерно распределенных по ее толщине, можно получить

$$\sigma_\rho^н = \frac{\mu Q}{\pi R_н s}. \qquad (8.46)$$

Значение $\sigma_\rho^н$ можно использовать в граничных условиях для определения произвольной постоянной после интегрирования уравнения (8.41). Принимая, что при $\rho = R_н$ $\sigma_\rho = \sigma_\rho^н$, получим

$$\sigma_\rho = \sigma_s \ln\frac{R_н}{\rho} + \frac{\mu Q}{\pi R_н s}; \qquad (8.47)$$

$$\sigma_\theta = -\sigma_s\left(1 - \ln\frac{R_н}{\rho}\right) + \frac{\mu Q}{\pi R_н s}. \tag{8.48}$$

Формулы (8.47) и (8.48) характеризуют распределение напряжений в плоской части фланца при вытяжке с учетом влияния сил трения, вызванных действием прижима.

Если не учитывать влияния трения на кромке матрицы и влияния изгиба, происходящего в каждом элементе заготовки, который переходит с фланца на скругленную кромку матрицы и с последней в цилиндрическую часть образующегося стакана, то наибольшую величину растягивающего напряжения σ'_ρ можно получить из формулы (8.47) при подстановке в нее значения $\rho = R_и$:

$$\sigma'_\rho = \sigma_s \ln\frac{R_н}{R_и} + \frac{\mu Q}{\pi R_н s}. \tag{8.49}$$

Однако при определении максимальной величины растягивающего меридионального напряжения пренебрегать действием изгиба и трения на кромке матрицы нельзя, так как они оказывают существенное влияние. Попытаемся приближенно учесть влияние этих факторов.

Рассмотрим вначале влияние изгиба и спрямления на величину растягивающего напряжения σ_ρ. Каждый элемент фланца, перемещаясь в процессе вытяжки из плоской части на скругленную кромку матрицы, получает уменьшение радиуса кривизны срединной поверхности от ∞ до R_ρ. Такое резкое изменение радиуса кривизны срединной поверхности осуществляется действием продольных сил и моментов. Можно принять, что деформирование элементов заготовки, перемещающихся из плоской части фланца на скругленную кромку матрицы, аналогично деформированию полосы при изгибе с растяжением. Тогда величину момента, необходимого для изгиба, можно определить по формуле (8.33). Значение продольной силы (на единицу длины в тангенциальном направлении) находят как произведение напряжения σ_ρ, определяемого по формуле (8.47) при $\rho = a$, на толщину s:

$$N = \left(\sigma_s \ln\frac{R_н}{a} + \frac{\mu Q}{\pi R_н s}\right) s. \tag{8.50}$$

Как видно из формулы (8.33), увеличение силы N приводит к уменьшению величины изгибающего момента, однако эта формула не учитывает влияния упрочнения при изгибе, которое способствует увеличению изгибающего момента.

Для приближенных расчетов напряжения в опасном сечении можно принять, что величина изгибающего момента, действующего на переходе от плоской части фланца к скругленной, равна моменту, необходимому для пластического изгиба полосы без упрочнения и при отсутствии продольных сил. В этом случае изгибающий момент, отнесенный к единице длины в тангенциальном направлении, определяется из выражения (8.24). Возможность такого допущения была проверена экспериментально [69] путем определения величины угла подъема фланца при вытяжке без прижима под действием изгибающего момента, действующего в участке резкого изменения кривизны и приводящего к тому, что плоский фланец принимает воронкообразную форму.

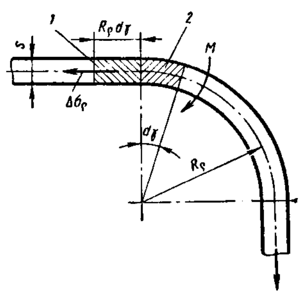


Рис. 8.12

Резкое изменение кривизны в меридиональном направлении при изгибе и спрямлении требует затраты дополнительной работы деформирования, которую можно приближенно учитывать условным увеличением продольных напряжений, необходимых для деформирования заготовки.

Величину приращения $\Delta\sigma_\rho$, вызванного изгибом заготовки, можно найти из условия равенства работ, согласно которому работа изгибающего момента M на угле поворота сечения при изгибе должна быть равна работе силы, равной произведению $\Delta\sigma_\rho$ на площадь сечения заготовки на соответствующем пути перемещения элемента заготовки.

В соответствии с обозначениями, приведенными на рис. 8.12, условие равенства работ при перемещении элемента заготовки из положения *1* в положение *2* (считая, что длина элемента в меридиональном направлении не изменяется, так как учитывается только работа изгиба) напишем в виде

$$\Delta\sigma_\rho s R_\rho \, d\gamma = \frac{\sigma_s s^2}{4} \, d\gamma, \tag{8.51}$$

откуда

$$\Delta\sigma_\rho = \frac{\sigma_s s}{4R_\rho}. \tag{8.52}$$

Таким образом, можно считать, что изменение радиуса кривизны в меридиональном направлении от бесконечности до определенного радиуса R_ρ или, наоборот, от радиуса R_ρ до бесконечности приводит к увеличению меридионального напряжения, действующего в участке изгиба или спрямления, на величину, определяемую по формуле (8.52).

При вытяжке элементы заготовки, перемещаясь относительно матрицы, испытывают изгиб при входе на скругленную кромку матрицы и спрямление при сходе с нее. Влияние изгиба и спрямления на величину σ_ρ было бы точнее учесть в граничных условиях раздельно для изгиба (при $\rho = a$) и спрямления (при $\rho = R_и$), определяя величины напряжений раздельно для плоской и скругленной части фланца. Однако без большой погрешности можно принять, что влияние изгиба и спрямления на величину меридионального напряжения, действующего на переходе от скругленной части фланца к цилиндрическим стенкам образующегося стакана, учитывается увеличением σ_ρ [по сравнению со значением, определенным по формуле (8.49)] на удвоенное значение $\Delta\sigma_\rho$, определенное по формуле (8.52).

Тогда величина напряжения σ_ρ, действующая в опасном сечении и определенная без учета влияния трения на кромке матрицы, выразится формулой

$$\sigma_\rho'' = \sigma_s \ln \frac{R_н}{R_и} + \frac{\mu Q}{\pi R_н s} + \frac{1}{2}\sigma_s \frac{s}{R_\rho}, \tag{8.53}$$

в которой $R_\rho = r_м + \frac{s}{2}$.

Влияние трения на кромке матрицы на величину напряжения, действующего в опасном сечении, более точно было бы определять на основе совместного решения уравнения равновесия выделенного в торообразном участке заготовки элемента, противостоящего скругленной кромке матрицы (относя силы трения к срединной поверхности), с условием пластичности. Такое решение было получено ранее [98], однако оно довольно сложное. В то же время, поскольку участок трения на кромке матрицы обычно мал по сравнению с размерами всего очага деформации, то и нет особого смысла стремиться к максимально точному учету влияния сил трения на кромке матрицы. Приближенно влияние их можно учесть аналогично тому, как это сделано в известном решении Эйлера о трении ремня по шкиву. Таким путем влияние трения учитывали многие исследователи [12, 24, 120 и др.].

Как известно, по Эйлеру, увеличение напряжений вследствие действия сил трения учитывается введением множителя $e^{\mu\alpha}$, где e — основание натуральных логарифмов; μ — коэффициент трения и α — угол охвата шкива ремнем.

Приняв, что при вытяжке влияние трения на кромке матрицы можно учесть введением такого множителя, и считая, что угол охвата $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (наибольшее растягивающее напряжение обычно достигается после полного охвата заготовкой кромки матрицы), получаем

$$\sigma_{\rho\,\max} = \sigma_s \left(\ln \frac{R_н}{R_и} + \frac{\mu Q}{\pi R_н s \sigma_s} + \frac{s}{2r_м + s} \right) e^{\mu \frac{\pi}{2}}; \tag{8.54}$$

эта формула позволяет определить наибольшую величину растягивающего напряжения в опасном сечении. Без большой погрешности, с целью дальнейшего упрощения формулы, можно принять, что

$$e^{\mu \frac{\pi}{2}} \approx 1 + \mu \frac{\pi}{2} \approx 1 + 1{,}6\mu.$$

Тогда формула (8.54) примет вид

$$\sigma_{\rho\,\max} = \sigma_s \left(\ln \frac{R_н}{R_и} + \frac{\mu Q}{\pi R_н s \sigma_s} + \frac{s}{2r_м + s} \right) (1 + 1{,}6\mu). \tag{8.55}$$

В формулу (8.55) входит усилие прижима Q, величину которого можно определить по приводимым в справочной литературе данным.

Кроме того, на основании обработки экспериментальных данных некоторых исследователей можно предложить эмпирическую формулу (8.56), позволяющую определить минимальную величину усилия прижима, необходимого для предотвращения складкообразования при вытяжке цилиндрических стаканов:

$$Q = 0{,}1\left(1 - \frac{18k_\text{в}}{k_\text{в} - 1}\,\frac{s}{D_\text{н0}}\right) k_\text{в}^2 P_{\max}; \tag{8.56}$$

в этой формуле $D_\text{н0} = 2R_\text{н0}$ — диаметр исходной заготовки; $k_\text{в} = \frac{D_\text{н0}}{d_\text{и}} = \frac{R_\text{н0}}{R_\text{и}}$ — коэффициент вытяжки, определяемый как отношение исходного диаметра (радиуса) заготовки к диаметру (радиусу) вытягиваемого стакана; $P_{\max}$ — наибольшее усилие вытяжки.

Формулой (8.56) можно воспользоваться для исключения величины Q из формулы (8.55). В этом случае необходимо учесть, что

$$P_{\max} = \pi d_\text{и} s \sigma_{\rho\,\max}.$$

Заменим в формуле (8.56) $P_{\max}$ приведенным соотношением и подставим полученное выражение для Q в формулу (8.55). Решая уравнение относительно $\sigma_{\rho\,\max}$, после несложных преобразований находим

$$\sigma_{\rho\,\max} = \frac{\sigma_s\left(\ln\frac{R_\text{н}}{R_\text{и}} + \frac{s}{2r_\text{м} + s}\right)(1 + 1{,}6\mu)}{1 - 0{,}2\mu\,(1 + 1{,}6\mu)\left(1 - \frac{18k_\text{в}s}{(k_\text{в} - 1)\,D_\text{н0}}\right)k_\text{в}}. \tag{8.57}$$

Формулы (8.55) и (8.57) позволяют определить значение напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$, действующего в опасном сечении заготовки при вытяжке цилиндрического стакана без учета влияния упрочнения, при сравнительно больших габаритных размерах изделия, когда $\frac{R_\text{н}}{r_\text{м}} > 10$. Последнее ограничение связано с тем, что при ширине фланца, немного отличающейся от радиуса скругления кромки матрицы, уменьшение диаметра заготовки к моменту полного охвата ею кромки матрицы будет значительным, и в формулах (8.55) и (8.57) необходимо вместо начального диаметра заготовки подставлять значение диаметра, который получит заготовка к моменту завершения охвата кромки матрицы.

Эти формулы учитывают также влияние на величину $\sigma_{\rho\,\max}$ трения под прижимом и на скругленной кромке матрицы, изгиба и спрямления элементов заготовки при их перемещении относительно матрицы. Формула (8.57) справедлива при оптимальном усилии прижима, величина которого определяется по формуле (8.56). Заметим, что по формуле (8.56) при определенных значениях $k_в$ и $\frac{s}{D_{н0}}$ усилие прижима равно нулю и даже может получить отрицательные значения. Это указывает на то, что при данных значениях $k_в$ и $\frac{s}{D_{н0}}$ прижим не нужен, и, следовательно, формула (8.56) справедлива до значения $Q = 0$.

По формуле (8.56) $Q = 0$ при $D - d = 18s$, что примерно соответствует соотношению, разграничивающему вытяжку с прижимом и вытяжку без прижима, по Л. А. Шофману [121].

В тех случаях, когда вытяжка идет без прижима, формулы (8.55) и (8.57) приводятся к виду

$$\sigma_{\rho\,\max} = \sigma_s\left(\ln\frac{R_н}{R_и} + \frac{s}{2r_м + s}\right)(1 + 1{,}6\mu). \tag{8.58}$$

Пользуясь формулами (8.55)—(8.57) для определения $\sigma_{\rho\,\max}$, было бы более правильно в качестве $R_н$ и $D_{н0}$ подставлять не исходные значения радиуса или диаметра заготовки, а значения этих размеров в момент вытяжки, когда завершен охват заготовкой скругленной кромки матрицы. В первом приближении это уточнение можно реализовать, используя условия постоянства толщины заготовки при вытяжке (или, что одно и то же, условия постоянства площади поверхности при вытяжке). Из условия равенства площади поверхности исходного кружка $\left(\frac{\pi D_{н0}^2}{4}\right)$ и площади заготовки в момент, когда завершен охват заготовкой скругленных кромок пуансона и матрицы, для случая, когда радиусы скругления пуансона и матрицы равны, получим

$$k_{вт} = \frac{D_н}{d_и} = \frac{R_н}{R_и} = \sqrt{\left(\frac{D_{н0}}{d_и}\right)^2 - 4{,}6\frac{r_м}{d_и}} = \sqrt{k_{в0}^2 - 2{,}3\frac{r_м}{R_и}}. \tag{8.59}$$

Из формулы (8.59) видно, что при малых значениях $\frac{r_м}{R_и} < 0{,}1$ текущее значение коэффициента вытяжки $k_{вт}$ мало отличается от исходного значения $k_{в0} = \frac{D_{н0}}{d_и}$, определяемого по диаметру исходного недеформированного кружка $D_{н0}$. Однако в тех случаях, когда $r_м$ относительно велик, формула (8.59) позволяет по исходным размерам заготовки и матрицы определить значение $D_н = 2R_н$, которое следует подставить в формулы (8.55)—(8.57). В случае необходимости можно приближенно учесть влияние упрочнения на величину $\sigma_{\rho\,\max}$, пользуясь формулами (1.13), (1.19) или (1.20). При вытяжке можно принять, что деформацией, эквивалентной по упрочняющему эффекту относительному сужению образца при растяжении, является относительная деформация в тангенциальном направлении ε_θ.

Величина тангенциальной деформации при вытяжке ε_θ является функцией радиуса ρ. Ее можно найти для любого момента деформирования из условия постоянства толщины заготовки (постоянства площади поверхности заготовки). В процессе вытяжки радиус наружной кромки заготовки уменьшается от исходного значения $R_{н0}$ до значения $R_н$ в данный момент деформирования (рис. 8.13). В процессе деформирования исходный радиус любого выделенного элемента также уменьшается от исходного значения $\rho_н$ до текущего значения ρ в данный момент деформирования.

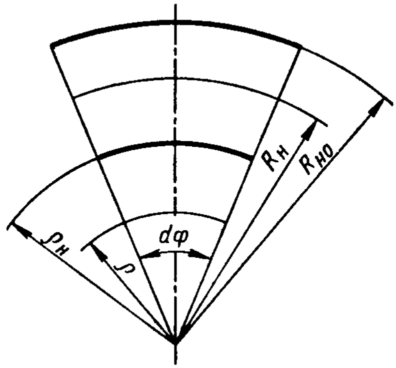


Рис. 8.13

Из условия постоянства площади поверхности заготовки при вытяжке следует, что

$$\frac{R_{н0}\,d\varphi + \rho_н\,d\varphi}{2}(R_{н0} - \rho_н) = \frac{R_н\,d\varphi + \rho\,d\varphi}{2}(R_н - \rho);$$

отсюда получаем

$$\rho_н = \sqrt{R_{н0}^2 + \rho^2 - R_н^2}. \tag{8.60}$$

Подставляя значения для $\rho_н$ в формулу, определяющую относительную деформацию в тангенциальном направлении, получаем

$$\varepsilon_\theta = 1 - \frac{\rho}{\rho_н} = 1 - \frac{\rho}{\sqrt{R_{н0}^2 + \rho^2 - R_н^2}}. \tag{8.61}$$

Подставляя значение ε_θ вместо ψ в формулу (1.13), (1.19) или (1.20) и заменяя значение σ_s в уравнении (8.41) найденным выражением напряжения текучести в функции координаты ρ, можно найти распределение напряжений во фланце заготовки при заданном уменьшении его диаметра в процессе вытяжки с учетом влияния упрочнения.

Точное решение этой задачи связано с математическими трудностями и приводит к необходимости численного интегрирования [120]. В предыдущих изданиях учебника, а также в работе [70] даны некоторые варианты приближенных решений этой задачи с использованием различных аппроксимаций кривой упрочнения, позволяющие получить решение в виде аналитических функций.

Ниже предлагается новый вариант решения, использующий степенную аппроксимацию кривой упрочнения (более точно отражающей характер изменения $\sigma_s = f(\psi)$ по сравнению с линейной аппроксимацией) без осреднения значения напряжений текучести во фланце. С этой целью упростим формулу (8.61) с помощью разложения в ряд функции вида $\frac{1}{\sqrt{1+y}} \approx 1 - \frac{y}{2} + \frac{3y^2}{8} - \dots$ и заменим функцию двумя первыми членами разложения в ряд. Такая замена не внесет большой погрешности, если $\frac{R_{н0}^2 - R_н^2}{\rho^2} \ll 1$, и приемлема для рассмотрения начальной стадии вытяжки, когда $\sigma_{\rho\, max}$ может достигать своего экстремального значения.

В этом случае формула (8.61) преобразуется к виду

$$\varepsilon_\theta = \frac{R_{н0}^2 - R_н^2}{2\rho^2}. \tag{8.61a}$$

Подставляя найденное значение $\varepsilon_\theta = \psi$ в формулу (1.19) и заменяя в уравнении (8.41) значение σ_s найденным выражением, получим

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = - \frac{\sigma_в}{1-\psi_ш} \left(\frac{R_{н0}^2 - R_н^2}{2\psi_ш \rho^2} \right)^{\frac{\psi_ш}{1-\psi_ш}}.$$

Интегрирование данного дифференциального уравнения с использованием граничного условия $\left(\rho = R_н;\ \sigma_\rho = \frac{\mu Q}{\pi R_н s}\right)$ для отыскания произвольной постоянной интегрирования приводит к формуле

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_в}{2\psi_ш} \left(\frac{R_{н0}^2 - R_н^2}{2\psi_ш} \right)^{\frac{\psi_ш}{1-\psi_ш}} \left(\rho^{-\frac{2\psi_ш}{1-\psi_ш}} - R_н^{-\frac{2\psi_ш}{1-\psi_ш}} \right) + \frac{\mu Q}{\pi R_н s}. \tag{8.62}$$

Максимальное значение σ_ρ имеет место на входе в отверстие матрицы при $\rho = R_и$, а если обозначить $X = \frac{R_{н0}}{R_н}$, то формула для определения $\sigma_{\rho\, max}$ может быть представлена в виде

$$\sigma_{\rho\, max} = \frac{\sigma_в}{2\psi_ш} \left(\frac{1 - X^{-2}}{2\psi_ш} \right)^{\frac{\psi_ш}{1-\psi_ш}} \left[\left(\frac{R_{н0}}{R_и} \right)^{\frac{2\psi_ш}{1-\psi_ш}} - X^{\frac{2\psi_ш}{1-\psi_ш}} \right] + \frac{\mu Q}{\pi R_н s}. \tag{8.62a}$$

Как видно из формулы (8.62a), напряжение $\sigma_{\rho\, max}$ равно нулю при $X = 1$ (в начале вытяжки) и при $X = \frac{R_{н0}}{R_и}$ (в конце вытяжки). Отсюда следует, что при промежуточных значениях радиуса фланца $R_и < R_н < R_{н0}$ должен иметь место экстремум напряжения $\sigma_{\rho\, max}$. Величина $X_э$, соответствующая экстремальному значению $\sigma_{\rho\, max}$, может быть найдена из условия $\frac{d\sigma_{\rho\, max}}{dX} = 0$. После дифференцирования и некоторых преобразований формула для определения $X_э$ получает вид

$$X_э = \left(\frac{R_{н0}}{R_и} \right)^{\psi_ш}. \tag{8.63}$$

Из формулы (8.63) следует, что при вытяжке без упрочнения ($\psi_ш = 0$) экстремальное значение $\sigma_{\rho\,\max}$ имеет место в начале вытяжки (при $R_н = R_{н0}$), а при вытяжке с упрочнением чем больше интенсивность упрочнения (чем больше $\psi_ш$), тем большее уменьшение диаметра фланца заготовки соответствует возникновению экстремального значения напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$.

Экстремальное значение $\sigma_{\rho\,\max\,э}$ может быть найдено по формуле (8.62а) при подстановке в нее значения $X = X_э$ из формулы (8.63) (без учета влияния трения и изгиба на кромке матрицы). После некоторых преобразований конечная формула может быть представлена в виде

$$\sigma_{\rho\,\max\,э} = \sigma_в \left(\frac{k_в^{2\psi_ш} - 1}{2\psi_ш}\right)^{\frac{1}{1-\psi_ш}} + \frac{\mu Q}{\pi R_н s}. \qquad (8.62б)$$

Здесь обозначено $k_в = \frac{R_{н0}}{R_н}$ — коэффициент вытяжки.

Влияние изгиба и трения на кромке матрицы может быть учтено аналогично тому, как это было сделано при выводе формулы (8.55). Если же, кроме того, принять, что в слагаемом, учитывающем влияние изгиба и спрямления на кромке матрицы, можно принять, что $\sigma_s \approx \sigma_в$, а в слагаемом, учитывающем трение под прижимом, $R_н = R_{н0}$, то конечная формула (8.64) получает сравнительно простое написание

$$\sigma_{\rho\,\max\,э} = \sigma_в \left[\left(\frac{k_в^{2\psi_ш} - 1}{2\psi_ш}\right)^{\frac{1}{1-\psi_ш}} + \frac{\mu Q}{\pi R_{н0} s \sigma_в} + \frac{s}{2r_м + s}\right](1 + 1{,}6\mu). \qquad (8.64)$$

Формула (8.64) позволяет оценить влияние основных факторов на величину экстремального растягивающего напряжения, возникающего в опасном сечении (у донышка) при вытяжке.

Представляет интерес оценка влияния интенсивности упрочнения (характеризуемой величиной $\psi_ш$), по которому до настоящего времени в научно-технической литературе нет достаточно определенного суждения.

Пренебрегая влиянием изгиба и трения и считая, что напряжение $\sigma_{\rho\,\max\,э} \leqslant \sigma_в$ обеспечивает условия вытяжки без разрушения заготовки, из формулы (8.64) может быть получено выражение для определения предельного коэффициента вытяжки в следующем виде:

$$k_{в\,пред} = (1 + 2\psi_ш)^{\frac{1}{2\psi_ш}}.$$

Из полученного выражения следует, что предельный коэффициент вытяжки монотонно, хотя и не резко, уменьшается с увеличением $\psi_ш$, т. е. с увеличением интенсивности упрочнения. Таким образом, с увеличением интенсивности упрочнения рост напряжений в опасном сечении вследствие упрочнения перекрывает влияние уменьшения диаметра заготовки, которое к моменту возникновения $\sigma_{\rho\,\max\,э}$ также повышается с увеличением $\psi_ш$.

Заметим, что более точное изучение влияния интенсивности упрочнения на предельный коэффициент вытяжки могло бы быть выполнено при использовании аппроксимации кривой упрочнения функций вида (1.20), используя допущения, принятые при выводе формулы (8.64). Расчеты по формулам (8.62а) и (8.64) показывают, что упрочнение способствует увеличению растягивающего напряжения, действующего в опасном сечении в течение всего процесса вытяжки по сравнению с вытяжкой без упрочнения.

Анализируя формулу (8.64), можно установить, что величина $\sigma_{\rho\,\max\,э}$ возрастает с увеличением коэффициента трения и тем интенсивнее, чем меньше относительная толщина заготовки $\frac{s}{D_н} = \frac{s}{2R_н}$. С уменьшением толщины заготовки увеличивается опасность потери устойчивости фланца заготовки, а силы трения, отнесенные к меньшей площади поперечного сечения заготовки $2\pi R_н s$, дают большее значение растягивающего напряжения, действующего по краю заготовки, а следовательно, и увеличивают напряжение $\sigma_{\rho\,\max\,э}$.

Из формулы (8.64) следует, что величина $\sigma_{\rho\,\max\,э}$ при прочих равных условиях увеличивается по мере уменьшения радиуса скругления рабочей кромки матрицы при постоянной толщине заготовки. Характер зависимости $\sigma_{\rho\,\max} = f\left(\frac{r_м}{s}\right)$ иллюстрируют приведенные на рис. 8.14 графики, полученные расчетом по формуле (8.64) при $\mu = 0{,}1$; $\frac{s}{R_н} \approx \frac{2s}{D} = 0{,}02$; $\psi_ш = 0{,}15$ и начальных коэффициентах вытяжки $k_в = \frac{R_{н0}}{R_н} = 1{,}8$ и $1{,}9$. Как видно из графиков, увеличение $\sigma_{\rho\,\max\,э}$ по мере уменьшения отношения $\frac{r_м}{s}$ происходит сравнительно медленно при значении $\frac{r_м}{s} > 8$, а особенно интенсивное увеличение наблюдается при $\frac{r_м}{s} < 5$, причем при $\frac{r_м}{s} \to 0$ (острая кромка матрицы) напряжение $\sigma_{\rho\,\max\,э}$ значительно превышает $\sigma_в$, что указывает на невозможность осуществления вытяжки в этих условиях (заготовка будет обрываться, и вытяжка по существу переходит в пробивку). Характер функциональных зависимостей величины $\sigma_{\rho\,\max\,э}$ от основных

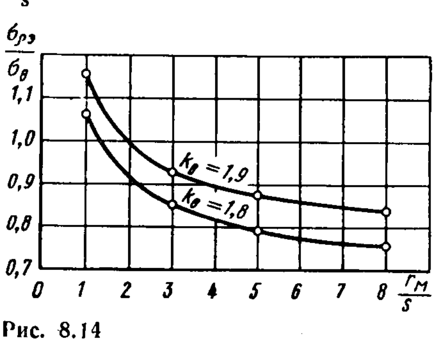


Рис. 8.14

факторов, устанавливаемый из формул (8.55) и (8.64), совпадает с характером тех же зависимостей, полученных экспериментально. Это свидетельствует о том, что принятые в анализе операции вытяжки допущения не искажают реальных функциональных зависимостей, существующих в условиях вытяжки.

Пользуясь полученными формулами, можно попытаться установить график изменения усилия вытяжки по пути пуансона, а также найти работу деформирования при вытяжке. Усилие вытяжки в любой момент деформирования, начиная с того момента, когда заготовка завершает охват скругленной кромки матрицы, можно определить по соотношению

$$P = 2\pi R_н s \sigma_{\rho\,max},$$

где $\sigma_{\rho\,max}$ определяется при значении $R_н$, соответствующем данному положению пуансона.

До опускания пуансона на величину, равную сумме радиусов скругления рабочих кромок пуансона и матрицы, когда заготовка еще не охватила полностью скругленные кромки пуансона и матрицы, $\sigma_{\rho\,max}$ на границе очага деформации наклонено под углом к оси пуансона, отличным от 0°.

На первом этапе вытяжки, когда величина рабочего хода пуансона изменяется от $x = 0$ до $x = r_м + r_п \approx 2r_м$, усилие вытяжки возрастает от 0 до значения, определяемого по формуле (8.64), при $R_н$, полученном по формуле (8.59).

В тех случаях, когда $r_м$ и $r_п$ малы по сравнению с размерами заготовки, наружный радиус заготовки в промежуточных стадиях деформирования из условия постоянства площади ее поверхности приближенно определяется формулой

$$R_н = \sqrt{R_{н0}^2 - 2R_н h}, \tag{8.65}$$

где h — текущая высота втянутой в матрицу части заготовки (рабочий ход пуансона).

Подставляя это значение $R_н$ в формулу (8.62а), можно получить зависимость, характеризующую изменение $\sigma_{\rho\,max}$ по пути пуансона, интегрируя которую найдем работу деформирования.

Для упрощения выкладок дадим решение без учета влияния упрочнения на напряжение текучести. Заметим, что решение с учетом влияния упрочнения в несколько ином варианте дано в работе А. Г. Овчинникова [60]. Используя формулы (8.55), (8.65), получаем формулу (8.66), характеризующую зависимость усилия вытяжки без упрочнения от пути пуансона при малых по сравнению с размерами заготовки значениях $r_м$ и $r_п$:

$$P = 2\pi R_н s \sigma_s \left(\ln \frac{\sqrt{R_{н0}^2 - 2R_н h}}{R_н} + \frac{\mu Q}{\pi s \sigma_s \sqrt{R_{н0}^2 - 2R_н h}} + \right.$$

$$\left. + \frac{s}{2r_м + s} \right) (1 + 1{,}6\mu). \tag{8.66}$$

Логарифмическую функцию преобразуем по соотношению

$$\ln\frac{\sqrt{R_{\text{н}0}^2-2R_{\text{и}}h}}{R_{\text{и}}}=\ln\frac{R_{\text{н}0}}{R_{\text{и}}}+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2R_{\text{и}}h}{R_{\text{н}0}^2}\right)\approx$$

$$\approx\ln\frac{R_{\text{н}0}}{R_{\text{и}}}-\frac{R_{\text{и}}h}{R_{\text{н}0}^2}.$$

С учетом данного преобразования находим работу деформирования

$$A=\int\limits_0^H 2\pi R_{\text{и}}s\sigma_s\left(\ln\frac{R_{\text{н}0}}{R_{\text{и}}}-\frac{R_{\text{и}}h}{R_{\text{н}0}^2}+\frac{\mu Q}{\pi s\sigma_s\sqrt{R_{\text{н}0}^2-2R_{\text{и}}h}}+\right.$$

$$\left.+\frac{s}{2r_{\text{м}}+s}\right)(1+1{,}6\mu)\,dh=2\pi R_{\text{и}}s\sigma_s(1+1{,}6\mu)\left|h\ln\frac{R_{\text{н}0}}{R_{\text{и}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{R_{\text{и}}h^2}{2R_{\text{н}0}^2}-\frac{\mu Q}{\pi s\sigma_s R_{\text{и}}}\sqrt{R_{\text{н}0}^2-2R_{\text{и}}h}+\frac{sh}{2r_{\text{м}}+s}\right|_0^H=$$

$$=2\pi R_{\text{и}}Hs\sigma_s\left[\ln\frac{R_{\text{н}0}}{R_{\text{и}}}-\frac{R_{\text{и}}H}{2R_{\text{н}0}^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu Q}{\pi R_{\text{и}}sH\sigma_s}\left(R_{\text{н}0}-\sqrt{R_{\text{н}0}^2-2R_{\text{и}}H}\right)+\frac{s}{2r_{\text{м}}+s}\right](1+1{,}6\mu). \quad (8.67)$$

При интегрировании было принято, что усилие прижима постоянно по ходу пуансона, что приближенно соответствует условиям вытяжки с пневматической подушкой.

Формулу (8.67) можно написать более просто, если конечную высоту H вытянутого стакана выразить по условию постоянства площади поверхности заготовки через диаметральные размеры заготовки и вытянутого стакана:

$$H=\frac{R_{\text{н}0}^2-R_{\text{и}}^2}{2R_{\text{и}}},$$

а также обозначить $k_{\text{в}}=\dfrac{R_{\text{н}0}}{R_{\text{и}}}$,

$$A=\pi R_{\text{и}}^2(k_{\text{в}}^2-1)s\sigma_s\left[\ln k_{\text{в}}-\frac{k_{\text{в}}^2-1}{4k_{\text{в}}^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\mu Q}{\pi sR_{\text{и}}(k_{\text{в}}+1)\sigma_s}+\frac{s}{2r_{\text{м}}+s}\right](1+1{,}6\mu). \quad (8.68)$$

Согласно формуле (8.68) работа вытяжки $A=0$ при $k_{\text{в}}=1$ и увеличивается с увеличением коэффициента вытяжки, коэффициента трения, усилия прижима, относительной толщины заготовки и габаритных размеров вытягиваемого стакана.

В заключение рассмотрения первого перехода вытяжки дадим приближенное решение для вытяжки с подогревом фланца. Особенность вытяжки с подогревом фланца состоит в том, что уменьшение величины напряжения текучести во фланце по сравнению с напряжением текучести в опасном сечении позволяет втягивать в матрицу без опасности разрушения ($\sigma_{\rho\,\max} \leqslant \sigma_s'$, где σ_s' — напряжение текучести в опасном сечении заготовки) значительно более широкий фланец (коэффициент вытяжки $k_в = \frac{R_{но}}{R_н}$ увеличивается). Однако равномерный нагрев фланца, при котором величина напряжения текучести по всему фланцу будет постоянной, не может дать существенного увеличения коэффициента вытяжки. Действительно, в этом случае значения $\sigma_\rho = \sigma_s$; $\sigma_\theta = 0$ будут достигнуты во фланце при $\frac{R_н}{\rho}$, определяемых из формулы (8.47), и опасное сечение переместится от кромки матрицы (где напряжение текучести при охлажденном пуансоне может быть выше, чем напряжение текучести во фланце) на плоскую часть фланца, где начнется повышенное утонение с последующим разрывом заготовки. Поэтому для существенного увеличения коэффициента вытяжки при подогреве фланца нужно создавать неравномерное температурное поле, при котором значение напряжения текучести будет монотонно увеличиваться от наружного контура заготовки к рабочей кромке матрицы [10].

Предположим, что температурное поле таково, что зависимость напряжения текучести от координаты ρ определяется соотношением

$$\sigma_s = \sigma_s' \frac{R_н}{\rho}, \tag{8.69}$$

где σ_s' — значение напряжения текучести у кромки матрицы.

Подставляя значение σ_s из (8.69) в (8.41) и интегрируя полученное дифференциальное уравнение с использованием граничного условия при $\rho = R_н$; $\sigma_\rho = \frac{\mu Q}{\pi R_н s}$, получаем

$$\sigma_\rho = \sigma_s' \left(\frac{R_н}{\rho} - \frac{R_н}{R_н} + \frac{\mu Q}{\pi R_н s \sigma_s'} \right). \tag{8.70}$$

Формула (8.70) характеризует распределение напряжения σ_ρ во фланце при принятой зависимости напряжения текучести от координаты. Используя условия пластичности, легко получить формулу, характеризующую распределение напряжений σ_θ во фланце. Максимальное значение σ_ρ будет на границе между очагом деформации и стенками образующегося при вытяжке стакана при $\rho = R_н$. Учитывая влияние изгиба и трения на кромке матрицы аналогично тому, как это было сделано в предыдущих решениях, можно получить формулу (8.71), позволяющую определить максимальную величину напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$ в опасном сечении с учетом трения под прижимом, изгиба и трения на кромке матрицы при принятой зависимости напряжения текучести от координаты:

$$\sigma_{\rho\,\max} = \sigma_s' \left(1 - \frac{R_и}{R_н} + \frac{\mu Q}{\pi R_н s \sigma_s'} + \frac{s}{2r_м + s}\right)(1 + 1{,}6\mu). \qquad (8.71)$$

Из формулы (8.71) можно видеть, что при заданном изменении напряжения текучести от координаты ρ предельный коэффициент вытяжки, определяемый из условия $\sigma_{\rho\,\max} = \sigma_s'$, значительно превышает коэффициент вытяжки при постоянном по фланцу значении напряжения текучести, и без учета влияния сил трения и изгиба этот коэффициент стремится к бесконечности. Проведенный анализ показывает, что созданием такого температурного поля во фланце вытягиваемой заготовки, при котором напряжение текучести убывает по мере удаления от рабочей кромки матрицы обратно пропорционально текущему, координирующему данную точку радиусу, коэффициент вытяжки может быть резко увеличен по сравнению со значениями, достижимыми при вытяжке без подогрева фланца.

8.3.2. Вытяжка цилиндрической заготовки (последующие переходы)

Рассмотрим теперь последующий переход вытяжки, осуществляемой в конической матрице. В этом случае деформируется полученная в предыдущем переходе заготовка в форме стакана, который в процессе деформирования уменьшается в диаметре.

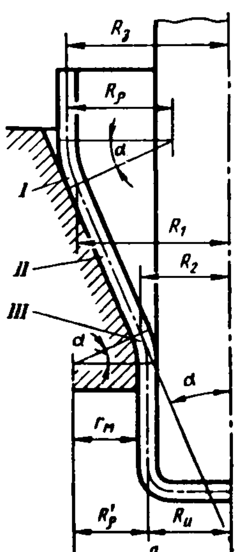


Рис. 8.15

Усилие вытяжки возрастает, пока рабочий торец пуансона не пройдет цилиндрический поясок матрицы на расстояние, несколько превышающее величину радиуса скругления рабочей кромки пуансона, а потом остается примерно постоянным. Этому же моменту соответствует и наибольшая величина растягивающего напряжения σ_ρ, действующего в зоне перехода от очага деформации к стенкам образующегося в процессе вытяжки стакана.

Очаг деформации в этом случае (рис. 8.15) можно разделить на три участка. Участок *I*, граничащий со стенками исходной заготовки, в котором срединная поверхность заготовки в меридиональном сечении имеет радиус R_ρ, а сама заготовка не соприкасается с поверхностями рабочего инструмента; участок *II* — заготовка соприкасается с конической частью, и участок III — заготовка соприкасается со скругленной кромкой матрицы.

Рассмотрим распределение напряжений в каждом из участков очага деформации без учета изменения толщины заготовки и упрочнения.

Участок I имеет криволинейную образующую, и для этого участка справедливо уравнение равновесия (8.6). Однако так как в этом участке заготовка не соприкасается с поверхностями рабочего инструмента, то нормальные и касательные напряжения на поверхности заготовки отсутствуют. Для этого участка в уравнении (8.6) следует принять $\mu = 0$, и тогда по написанию оно становится аналогичным уравнению равновесия (3.52), а при использовании условия пластичности по постоянству максимальных касательных напряжений приводится к уравнению (8.41). Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$\sigma_\rho = -\sigma_s \ln \rho + C. \tag{8.72}$$

Так как переход элементов заготовки из недеформируемой части заготовки с радиусом $R_з$ в очаг деформации сопровождается уменьшением радиуса кривизны срединной поверхности от бесконечности до значения, равного R_ρ, то в качестве граничного условия можно принять условие, по которому при $\rho = R_з$ (на границе очага деформации) величина σ_ρ должна быть равна $\Delta\sigma_\rho$, т. е. приращению напряжения σ_ρ, вызываемому изгибом элементов заготовки. Величина $\Delta\sigma_\rho$ определяется из выражения (8.52). Используя это граничное условие, находим

$$C = \sigma_s \ln R_з + \frac{\sigma_s s}{4R_\rho}.$$

Подставляя это значение C в уравнение (8.72), получаем

$$\sigma_\rho = \sigma_s \ln \frac{R_з}{\rho} + \frac{\sigma_s s}{4R_\rho}. \tag{8.73}$$

Формула (8.73) позволяет установить распределение напряжений в участке I очага деформации.

Распределение напряжений в участке II (коническом) очага деформации можно определить также решением уравнения равновесия совместно с условием пластичности.

В этом случае при $R_\rho = \infty$ и $R_\theta = \frac{\rho}{\cos\alpha}$ уравнение равновесия (8.6) преобразуется:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta - \frac{\mu\sigma_\theta}{\operatorname{tg}\alpha} = 0. \tag{8.74}$$

Используя условие пластичности, которое для вытяжки имеет вид $\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s$, можно исключить в уравнении (8.74) напряжение σ_θ:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_s (1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha) - \sigma_\rho \mu \operatorname{ctg}\alpha = 0, \tag{8.75}$$

где α — угол конусности матрицы (угол между образующей и осью симметрии).

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\ln\left[\sigma_\rho \mu \operatorname{ctg}\alpha - \sigma_s(1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha)\right] = \ln \rho^{\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}} + C_1. \tag{8.76}$$

Произвольную постоянную интегрирования находим из условия, что при $\rho = R_1$ (на границе первого и второго участков очага деформации) величина напряжения σ_ρ должна быть равна напряжению σ_ρ, определяемому по формуле (8.73) при подстановке в нее значения $\rho = R_1$ в сумме с приращением напряжения $\Delta\sigma_\rho$, определяемым по формуле (8.52) (необходимость учета величины $\Delta\sigma_\rho$ определяется тем, что при переходе элементов заготовки из участка I очага деформации в участок II имеет место спрямление, при котором срединная поверхность получает увеличение радиуса кривизны в меридиональном сечении от значения R_ρ до бесконечности).

Определяя произвольную постоянную интегрирования и подставляя значение C_1 в (8.76), после преобразований получим

$$\sigma_\rho = \sigma_s \left\{ \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}\right) \left[1 - \left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}}\right] + \right.$$

$$\left. + \left(\ln \frac{R_3}{R_1} + \frac{s}{2R_\rho}\right) \left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}} \right\}. \tag{8.77}$$

Формула (8.77) позволяет установить распределение напряжений σ_ρ в коническом участке очага деформации [в участке от R_1 до R_2 (рис. 8.15)].

Распределение напряжений σ_ρ в третьем участке очага деформации (на скругленной кромке матрицы) можно найти на основе интегрирования уравнения равновесия (8.6), в котором $R_\rho = \mathrm{const}$, $R_\theta = \mathrm{var}$, $\alpha = \mathrm{var}$, с использованием условия пластичности. Такое решение, в частности, дано в работе [99]. Однако без большой погрешности влияние изгиба и трения на кромке матрицы можно учесть аналогично тому, как это было сделано при анализе процесса деформирования заготовки в первом переходе вытяжки. На скругленной кромке матрицы происходит изгиб и спрямление каждого элемента, проходящего через кромку матрицы, с изменением радиуса кривизны от ∞ до $R'_\rho = r_м + \frac{s}{2}$ и обратно.

Влияние изгиба и спрямления на величину максимального напряжения, возникающего на границе очага деформации со стенками образующегося стакана, можно учесть путем увеличения напряжений σ_ρ в этой точке, определенного без учета изгиба, на

$$2\,\Delta\sigma_\rho = \frac{s\sigma_s}{2r_м + s}.$$

Влияние трения на кромке матрицы приближенно учитываем множителем $e^{\mu\alpha} \approx (1+1\mu\alpha)$. С учетом сказанного формулу для определения $\sigma_{\rho\,max}$, действующего при $\rho = R_и$, получим в виде

$$\sigma_{\rho\,max} = \sigma_s \left\{ \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}\right)\left[1 - \left(\frac{R_и}{R_1}\right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}}\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\ln\frac{R_з}{R_1} + \frac{s}{2R_\rho}\right)\left(\frac{R_и}{R_1}\right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}} + \frac{s}{2r_м + s} \right\}(1 + \mu\alpha). \tag{8.78}$$

Для приближенных расчетов формула (8.78) может быть значительно упрощена следующим образом. Так как $\frac{R_з}{R_1} \approx 1$, то в формуле (8.78) можно принять $R_1 = R_з$. Эта замена увеличивает первое слагаемое в фигурных скобках и уменьшает второе. Кроме того, так как $\frac{s}{2R_\rho} < 1$, то без большой погрешности в оценке величины $\sigma_{\rho\,max}$ можно принять, что

$$\frac{s}{2R_\rho}\left(\frac{R_и}{R_1}\right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}} \approx \frac{s}{2R_\rho}.$$

При таких допущениях формула (8.78) получает вид

$$\sigma_{\rho\,max} = \sigma_s \left\{ \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}\right)\left[1 - \left(\frac{R_и}{R_з}\right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{s}{2R_\rho} + \frac{s}{2r_м + s} \right\}(1 + \mu\alpha). \tag{8.79}$$

В формулы (8.78) и (8.79) входит радиус R_ρ участка свободного изгиба (см. участок *I* очага деформации), который не определяется однозначно размерными характеристиками инструмента. Так как величина σ_ρ в участке *I* сравнительно мала, то радиус свободного изгиба может быть определен по формуле (8.39). Подставив это значение R_ρ в формулу (8.79), получаем

$$\sigma_{\rho\,max} = \sigma_s \left\{ \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}\right)\left[1 - \left(\frac{R_и}{R_з}\right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}}\right] + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{s}{2R_з}}\sin\alpha + \frac{s}{2r_м + s} \right\}(1 + \mu\alpha). \tag{8.80}$$

Учитывая некоторые неудобства, связанные с возведением в дробную степень, формулу (8.80) можно упростить заменой степенной и логарифмической функции первыми членами разложения в ряд по соотношению

$$\left(\frac{R_и}{R_з}\right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}} \approx 1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\ln\frac{R_и}{R_з} \approx 1 - \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\left(1 - \frac{R_и}{R_з}\right).$$

Произведя указанную замену в формуле (8.80), получим

$$\sigma_{\rho\,\max} = \sigma_s \left[\left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\left(1 - \frac{R_и}{R_з}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{s}{2R_з}\sin\alpha + \frac{s}{2r_м + s}} \right](1 + \mu\alpha). \tag{8.81}$$

Другие варианты упрощения формулы (8.78) даны в работах [17, 99]. Формулу (8.80) можно также получить, если принять, что конический участок распространяется на весь очаг деформации, а влияние изгиба, спрямления и трения на кромке матрицы учесть аналогично тому, как это сделано при анализе первого перехода вытяжки.

Формулы (8.78), (8.80) и (8.81) позволяют определять величину наибольшего растягивающего напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$, действующего на границе очага деформации с учетом влияния сил трения, изгиба и размеров рабочего инструмента $\left(\alpha;\ \frac{r_м}{s}\right)$, но без учета влияния упрочнения.

Решение с учетом влияния упрочнения на величину $\sigma_{\rho\,\max}$ можно получить аналогично приведенному ранее решению для первого перехода вытяжки. Приближенно влияние упрочнения может быть учтено заменой напряжения текучести σ_s в формулах (8.78) — (8.81) средним значением напряжения текучести для очага деформации.

Принимая линейную зависимость $\sigma_s = f(\psi)$ и учитывая, что при вытяжке тангенциальная деформация $\varepsilon_\theta = \frac{R_з - \rho}{R_з}$ является максимальной, в основном определяющей увеличение напряжения текучести вследствие упрочнения, можно установить, пользуясь формулой (1.13), значение напряжения текучести по границам очага деформации. Если заготовка до вытяжки была отожжена и напряжение текучести было одинаково по всему объему, то на границе очага деформации с недеформируемой частью исходной заготовки (при $\rho = R_з$) напряжение текучести равно $\sigma_{s\,\min} = \sigma_{т0}$, а на границе очага деформации со стенками вытягиваемого стакана (при $\rho = R_и$) напряжение текучести равно

$$\sigma_{s\,\max} = \sigma_{т0} + П\,\frac{R_з - R_и}{R_з}.$$

Среднее значение напряжения текучести для очага деформации, равное полусумме $\sigma_{s\,\min}$ и $\sigma_{s\,\max}$, определится по формуле

$$\sigma_{s\,ср} = \sigma_{т0} + П\,\frac{R_з - R_и}{2R_з}.$$

Подставляя это значение $\sigma_{s\,ср}$ вместо σ_s в формулы (8.78) — (8.81), можно получить расчетные формулы, приближенно учитывающие влияние упрочнения на $\sigma_{\rho\,\max}$, действующее в опасном сечении заготовки на последующих переходах вытяжки в конической матрице.

Из формул (8.78) — (8.81) видно, что $\sigma_{\rho\,\max}$ увеличивается при прочих равных условиях с увеличением коэффициента трения, с уменьшением относительного радиуса скругления рабочей кромки матрицы $\frac{r_м}{s}$ и с увеличением отношения $\frac{s}{R_з}$. Особый интерес представляет характер влияния угла конусности матрицы α на величину напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$. На рис. 8.16 приведены графики зависимости

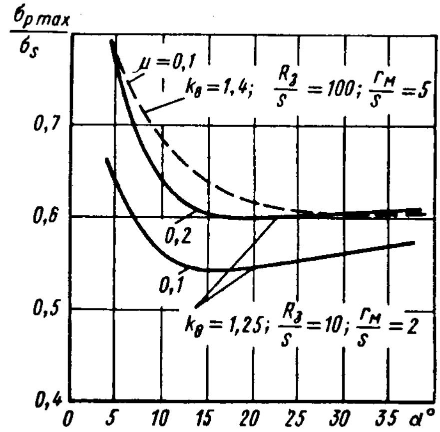


Рис. 8.16

$\frac{\sigma_{\rho\,\max}}{\sigma_s} = f(\alpha)$ для последующих переходов вытяжки, полученные расчетом по формуле (8.78) при $\mu = 0{,}1$ и $0{,}2$; $\frac{s}{R_з} = 0{,}01$ и $0{,}1$; коэффициент вытяжки $k_в = 1{,}25$ и $1{,}4$ и $\frac{r_м}{s} = 2$ и 5.

По графикам можно установить, что существуют оптимальные значения угла конусности матрицы α, при которых при прочих равных условиях напряжение $\sigma_{\rho\,\max}$ имеет минимальную величину. Значения оптимальных углов увеличивают с увеличением коэффициента трения, габаритных размеров вытягиваемых стаканов $\left(\text{с уменьшением отношения } \frac{s}{R_з}\right)$ и коэффициента вытяжки $k_в = \frac{R_з}{R_и}$. При значениях $\mu > 0{,}2$ увеличение угла конусности матрицы сверх оптимальных значений дает незначительное увеличение напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$. Также незначительно увеличивается $\sigma_{\rho\,\max}$ при увеличении α сверх оптимальных значений в случае вытяжки стаканов, когда $\frac{s}{R_з} < 0{,}01$.

Указанный характер зависимости напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$ от основных факторов удовлетворительно согласуется с характером зависимостей, полученных экспериментально.

Приближенное значение оптимальных углов конусности матриц $\alpha_{опт}$ можно найти аналитически, если в формуле (8.81) принять $1 + \mu\alpha \approx 1$ и $\frac{d\sigma_{\rho\,\max}}{d\alpha} = 0$. В этом случае

$$\frac{d\sigma_{\rho\,\max}}{d\alpha} = \sigma_s\left[-\left(1 - \frac{R_и}{R_з}\right)\frac{\mu}{\sin^2\alpha} + \sqrt{\frac{s}{2R_з}}\cos\alpha\right] = 0.$$

Из этого равенства следует, что

$$\sin^2\alpha_{\text{опт}}\cos\alpha_{\text{опт}} = \mu\left(1-\frac{R_{\text{и}}}{R_{\text{з}}}\right)\sqrt{\frac{2R_{\text{з}}}{s}}. \tag{8.82}$$

Значение $\alpha_{\text{опт}}$ по формуле (8.82) можно получить методом последовательных приближений.

Чтобы получить $\alpha_{\text{опт}}$ в явном виде, можно в формуле (8.82) принять $\cos\alpha \approx 1$, и тогда

$$\sin\alpha_{\text{опт}} \approx \sqrt{\mu\left(1-\frac{R_{\text{и}}}{R_{\text{з}}}\right)\sqrt{\frac{2R_{\text{з}}}{s}}}. \tag{8.83}$$

Нетрудно заметить, что формула (8.83) достаточно правильно отражает влияние основных факторов на величину оптимального угла конусности матрицы, хотя и является весьма приближенной.

Проведенный анализ был выполнен в предположении, что изменение толщины заготовки в очаге деформации пренебрежимо мало. В действительности толщина стенки уменьшается к донышку от края. Это приводит к тому, что в процессе вытяжки в очаг деформации поступают участки заготовки, имеющие все большую толщину, при этом к концу вытяжки $\sigma_{\rho\,\max}$ увеличивается. Это же обстоятельство является причиной того, что даже отожженные заготовки при вытяжке с предельными коэффициентами разрушаются в конце вытяжки.

Следовательно, при аналитическом выводе предельного коэффициента вытяжки необходимо дополнительно учесть переменность толщины стенки заготовки вдоль образующей.

При вытяжке без промежуточного отжига необходимо также учесть переменность напряжения текучести вдоль образующей заготовки, вызванную различием тангенциальных деформаций, полученных элементами заготовки при предыдущих переходах вытяжки.

8.4. ОТБОРТОВКА

Схема деформирования заготовки при отбортовке пуансоном с плоским торцом, а также принятые обозначения размеров показаны на рис. 8.17.

Рассмотрим отбортовку заготовки с круглым отверстием цилиндрическим пуансоном.

При отбортовке пластическую деформацию получает часть заготовки, расположенная над отверстием матрицы. В процессе деформирования по мере опускания пуансона деформируемые элементы заготовки изгибаются на кромках пуансона и матрицы, диаметр отверстия увеличивается, а элементы заготовки перемещаются относительно пуансона в меридиональном направлении,

Глава 15.

ОТДЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ И АВТОМАТИЗАЦИИ КОНСТРУИРОВАНИЯ ГРУЗОПОДЪЕМНЫХ МАШИН. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ГРУЗОПОДЪЕМНОЙ ТЕХНИКИ

15.1. Общие замечания

Конструирование грузоподъемных машин всегда сопровождалось поиском оптимальных научных решений. Этот поиск до недавнего времени осуществлялся путем сопоставления различных вариантов деталей, сварочных единиц и машин в целом, использования специальных методик оптимальных расчетов по искомому (оптимальному) параметру. Так, известной является методика определения минимальной суммарной мощности двигателей крановой тележки, разработанная А. И. Дукельским. Широкое распространение получил способ определения оптимальной высоты балки мостового крана по условию ее минимальной массы, разработанный Н. С. Стрелецким и М. М. Гохбергом. Получили известность способы определения оптимальной скорости механизма подъема с учетом ограничения эксплуатационных расходов. Успешно применяют на практике способ определения оптимального передаточного числа механизма. Во всех этих и других подобных случаях поиск оптимального решения связывался с одним искомым параметром и сопровождался небольшим количеством вариантных решений. В последнее время в связи с широким применением ЭВМ в практике инженерных расчетов при разработке новых математических методов в области теории вероятностей, вариационного исчисления, линейного программирования и т. д. появилась возможность применения этих достижений науки и техники для оптимального и в дальнейшем автоматического проектирования грузоподъемных машин.

15.2. Цели, задачи и методы оптимизации

Задача оптимального проектирования грузоподъемной машины сводится к тому, чтобы из ряда ее конструктивных вариантов выбрать такой, которому соответствует экстремальное значение критерия оптимальности. В качестве критерия могут быть приняты: производительность, стоимость изготовления, масса машины, приведенные затраты, долговечность и т. д.

В ряде случаев в качестве общего критерия оптимизации могут быть приняты приведенные затраты, представляющие собой сумму текущих годовых расходов на эксплуатацию машины и первоначальных капитальных затрат, отнесенных к одному нормативному сроку эксплуатации.

В простейших случаях задачи оптимизации решаются путем несложных математических операций. Однако в случаях, когда целевая функция зависит от ряда переменных, используются более сложные методы, которые можно разделить на две группы: классические — дифференциального исчисления, множителей Лагранжа, вариационного исчисления; математического программирования — линейного, нелинейного, динамического, принцип максимума Понтрягина и др. Процесс поиска оптимального решения задачи сводится к следующему: создают математическую модель процесса или конструируемого объекта; назначают критерий оптимизации и определяют его связь с основными параметрами, характеризующими объект; определяют систему конструктивных, технологических, эксплуатационных, экономических ограничений; используя один из приведенных выше методов, решают задачу экстремального конструирования.

Пусть выбрана система обобщенных параметров, характеризующих исследуемую конструкцию.

Условие оптимальности целевой функции S можно представить в виде [11]

$$S = \varphi (k_1, k_2, \ldots, k_n) = \min. \tag{15.1}$$

Поставленная задача в общем виде может быть сформулирована так: требуется найти значения переменных $k_1 \ldots k_n$, которые минимизируют целевую функцию S и удовлетворяют условиям

$$f (k_1, k_2, \ldots, k_n) = 0. \tag{15.2}$$

При двух переменных k_1 и k_2 следует найти их значения, которые минимизируют функцию

$$S = \varphi (k_1, k_2) \tag{15.3}$$

и удовлетворяют условиям

$$f (k_1, k_2) = 0. \tag{15.4}$$

Математический смысл задачи заключается в определении места расположения точки на линии пересечения этих двух поверхностей, которой соответствует минимум функции S. Поскольку сложно образовать функцию для нескольких параметров качества ввиду неясности сопоставимых достоинств конструкции, рассматривают условный минимум целевой функции S по одному из параметров k_i, полагая другие параметры качества k_j находящимися в допустимой области. Для нахождения безусловного экстремума задачу преобразуют с помощью множителей Лагранжа. Полагая, что k_2 зависит от k_1, продифференцируем выражение (15.4). В результате получим

$$df/dk_1 = f_{k_1} + f_{k_2} (dk_2/dk_1) = 0, \tag{15.5}$$

где f_{k_1} и f_{k_2} — частные производные функции $f(k_1, k_2)$. Из уравнения (15.5) находим

$$dk_2/dk_1 = -f_{k_1}/f_{k_2}. \tag{15.6}$$

Первая производная φ по k_1

$$d\varphi/dk_1 = \varphi_{k_1} + \varphi_{k_2}(dk_2/dk_1) = 0 \quad (15.7)$$

С учетом (15.6) находим

$$\varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}(f_{k_1}/f_{k_2}) = 0, \quad (15.8)$$

откуда следует, что

$$\varphi_{k_1}/f_{k_1} = \varphi_{k_2}/\varphi_{k_2} = \mathrm{const} = -\lambda. \quad (15.9)$$

Выражение (15.9) может быть представлено в форме системы уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_{k_1} + \lambda f_{k_1} &= 0; \\ \varphi_{k_2} + \lambda f_{k_2} &= 0. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Эти уравнения представляют собой необходимые условия условного экстремума функции (15.3).

Полная система необходимых условий выглядит так:

$$\varphi_{k_1} + \lambda f_{k_1} = 0;\ \varphi_{k_2} + \lambda f_{k_2} = 0;\ f(x_1,\ x_2) = 0. \quad (15.11)$$

Уравнения выражают необходимое условие безусловного экстремума функции Лагранжа

$$L(k_1, k_2, \lambda) = \varphi(k_1, k_2) + \lambda f(k_1, k_2). \quad (15.12)$$

В результате выполненных преобразований первоначальное решение задачи по определению условного минимума функции S свелось к решению задачи нахождения безусловного минимума функции Лагранжа L.

15.3. Примеры оптимизации крановых конструкций и механизмов

Определение оптимальной высоты балки мостового крана. Определим оптимальную высоту h одностенчатой балки мостового крана таким образом, чтобы наибольшая высота h_{max} ограничивалась условием получения балки минимальной массы, а наименьшая h_{min} — условием ограничения прогиба от полезной нагрузки.

Вес единицы длины балки может быть выражен формулой

$$q = (q_п + q_с)\beta = 2\gamma(B\delta_п + 0{,}5h_1\delta_с), \quad (15.13)$$

где $q_п$, $q_с$ — погонный вес поясов и стенки; β — конструктивный коэффициент, зависящий от веса ребер жесткости; B, $\delta_п$ — ширина и толщина пояса; h_1, $\delta_с$ — высота и толщина стенки; γ — удельный вес стали.

Прогиб балки в вертикальной плоскости от полезной нагрузки

$$f = PL^3/48Ej_x \leqslant [f], \quad (15.14)$$

где P — полезная нагрузка, расположенная посредине пролета L балки; E — модуль упругости материала; j_x — момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной оси, проходящей через центр его тяжести.

Момент инерции

$$J_x = 2B\delta_п \left(\frac{h_1 + \delta_п}{2}\right)^2 + 2\,\frac{h_1}{2}\,\delta_с \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 =$$
$$= 0{,}5\,B\delta_п\,(h_1 + \delta_п)^2 + 0{,}25\delta_с h_1^3. \qquad (15.15)$$

Следовательно,

$$f = \frac{PL^3}{48E[0{,}5B\delta_п(h_1+\delta_п)^2+0{,}25\delta_с H_1{}^3]} \leqslant [f]. \qquad (15.16)$$

Не учитывая влияния стенки и принимая $h_1 + \delta_п = h$, находим

$$f = A/B\delta_п h^2 \leqslant [f], \qquad (15.17)$$

где $A = PL^3/24E$.

Таким образом, целевая функция имеет вид

$$\varphi(B,\ h) = 2\gamma(B\delta_п + 0{,}5\,h\delta_с). \qquad (15.18)$$

Функция ограничения

$$f(B,\ h) = A/B\delta_п h - [f] \geqslant 0. \qquad (15.19)$$

Функция Лагранжа

$$L = \varphi + \lambda f(B,\ h) = 2\gamma(B\delta_п + 0{,}5\,h\delta_с) + \lambda\,\{A/B\delta_п h - [f]\}. \qquad (15.20)$$

Необходимые условия экстремума

$$\partial L/\partial h = \gamma\delta_с - \lambda A/B\delta_п h_2 = 0; \qquad (15.21)$$
$$\partial L/\partial B = 2\gamma\delta_п - \lambda A/h\delta_п B^2 = 0; \qquad (15.22)$$
$$\partial L/\partial\lambda = A/Bh\delta_п - [f] \geqslant 0. \qquad (15.23)$$

Из уравнений (15.22) и (15.21) следует, что

$$\delta_с h = 2\delta_п B, \qquad (15.24)$$

откуда находим

$$h/B = 2\,\delta_п/\delta_с. \qquad (15.25)$$

Следовательно, оптимальное отношение высоты балки к ширине поясов пропорционально удвоенному отношению толщины поясных листов и вертикального. Если $\delta_п = 2\delta_с$, что возможно, то в данном частном случае $h/B = 4$, или $B \approx 0{,}25$Н, что, как правило, и принимается из практических соображений.

Подставляя значение B из формулы (15.24) в формулу (15.17), получаем возможность определить оптимальную высоту балки по формуле

$$h_0 \leqslant \sqrt[3]{PL^3/12E\delta_с\,[f]}. \qquad (15.26)$$

Пусть $P = 100000$ Н; $L = 20$ м; $\delta_с = 0{,}01$ м; $[f] = 0{,}03$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. В этом случае $h_0 \leqslant 103$ см, т. е. меньше рекомендуемых данных, согласно которым

$$h = (1/15\ \ldots\ 1/17)\ L = (134\ \ldots\ 124)\ \text{см}.$$

Выбор оптимальных скоростей крановых механизмов с учетом ограничения мощностей двигателей. Как известно, существует проблема выбора двигателя, при котором обеспечивалось бы необходимое число рабочих циклов в час при минимальной суммарной мощности. Рассмотрим работу тележки перегрузочного крана. Продолжительность рабочего цикла тележки

$$T = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + t_n, \tag{15.27}$$

где s_1 и s_2 — пути вертикального и горизонтального перемещений груза; v_1 и v_2 — соответствующие скорости. Если $k = v_2 v_1$, то $T - t_п = (s_2 + s_1 k)/v_2$, откуда

$$v_2 = (s_2 + s_1 k)/(T - t_п). \tag{15.28}$$

Суммарная мощность двигателей, кВт,

$$P = P_1 + P_2 = \frac{v_2}{1000}\left(\frac{W_1}{k} + W_2\right) \tag{15.29}$$

где W_1, W_2 — сопротивления движению механизмов подъема и передвижения соответственно, Н.

Минимальная мощность P_{min} определяется из условия

$$\frac{dP}{dk} = \frac{1}{1000\,(T - t_п)}\left(W_2 s_1 - W_1 \frac{s_2}{k_2}\right) = 0, \tag{15.30}$$

т. е. при

$$k = k_0 = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{W_1 s_2 / W_2 s_1}. \tag{15.31}$$

Исследования А. И. Дукельского показывают, что при необходимости без существенного влияния на P можно отступить от условия $k = k_0$, если скорости v_1 и v_2, найденные при полученном k_0, неприемлемы по конструктивным или эксплуатационным соображениям. Действительно, при $k = 0{,}4...2{,}5$ суммарная мощность двух двигателей увеличивается не более чем на 20% по сравнению с P_{min}, соответствующей k_0. Определить суммарную минимальную мощность двух двигателей можно также, используя метод неопределенных множителей Лагранжа. Поставленная задача в общем виде формулируется так: требуется найти значения двух переменных x_1 и x_2, которые минимизируют целевую функцию

$$F_0 = f\,(x_1, x_2) \tag{15.32}$$

и удовлетворяют условию

$$F\,(x_1, x_2) = 0. \tag{15.33}$$

Уравнение (15.32) характеризует некоторую поверхность в трехмерном пространстве x_1, x_2, F_0, а уравнение (15.33) — цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси F_0. Математический смысл задачи сводится к нахождению такой точки на линии пересечения этих двух поверхностей, которой соответствует наименьшее значение функции $f\,(x_1, x_2)$. В данном случае задача формулируется так: требуется найти значения мощностей двигателя подъема груза P_1 и передвижения тележки P_2, при которых обеспечивается наименьшая суммарная мощность механизмов подъема и передвижения $P = P_{\min}$.

В качестве критерия оптимизации скоростей принимают функцию [2]

$$f(P_1 + P_2) = (P_1 + P_2) \to \min. \tag{15.34}$$

В качестве уравнения связи принимают условие

$$F(P_1, P_2) = \frac{P_1 P_2}{k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_1 P_2} - n = 0, \tag{15.35}$$

где количество циклов

$$n = \frac{3600}{T} = \frac{3600}{s_1/v_1 + s_2/v_2 + t_п} = \frac{3600}{s_1 W_1/P_1 + s_2 W_2/P_2 + t_п} = \frac{P_1 P_2}{k_1 P_2 + k_2 P_1 + k_3 P_1 P_2}.$$

Здесь

$$k_1 = s_1 W_1/3600;\ k_2 = s_2 W_2/3600;\ k_3 = t_п/3600.$$

Поиск локального экстремума функции (15.34) осуществляется при условии (15.35). В соответствии с методом неопределенных множителей Лагранжа точки безусловного экстремума новой целевой функции находим с помощью уравнения

$$f_1(P_1, P_2) = f(P_1, P_2) + \lambda F(P_1, P_2), \tag{15.36}$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Продифференцировав функцию $f_1(P_1, P_2)$ и приравняв к нулю частные производные этой функции по переменным P_1 и P_2, находим точки экстремума функции f из уравнений

$$\frac{\partial f_1}{\partial P_1} = 1 + \lambda k_1 / \left(k_1 + k_2 \frac{P_1^2}{P_2^2} + k_3 P_2\right) = 0; \tag{15.37}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial P_2} = 1 + \lambda k_2 / \left(k_1 \frac{P_2^2}{P_1^2} + k_2 + k_3 P_2\right) = 0. \tag{15.38}$$

Из уравнений (15.37) и (15.38) можно найти, что

$$P_1 = P_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = P_2 \sqrt{\frac{s_1 W_1}{s_2 W_2}}. \tag{15.39}$$

Подставив значение P_1 в уравнение (15.35), находим оптимальную мощность двигателя механизма передвижения по формуле

$$P_2 = (k_2 + \sqrt{k_1 k_2})\, n/(1 - k_3 n). \tag{15.40}$$

Оптимальная мощность двигателя механизма подъема

$$P_1 = (k_1 + \sqrt{k_1 k_2}/n/(1 - k_2 n). \tag{15.41}$$

Из уравнения связи (15.35) находим

$$P_2 = k_2 n P_1 / [(1 - k_3 n) P_1 - k_1 n]. \tag{15.42}$$

Подставив P_2 в уравнение (15.34), получим

$$f(P_1 + P_2) = P_1 + P_2 = P_1 \frac{k_2 n P_1}{(1 - n k_3) - k_1 n}. \tag{15.43}$$

Вторая производная по P_1

$$f''(P) = 2(1 - nk_3)/n\sqrt{k_1 k_2}. \qquad (15.44)$$

Если $z > 0$, то в точках экстремума функция f будет иметь минимальное значение. Поскольку $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, и $k_3 > 0$, то $z > 0$ при $n < 1/k_3 = 3600/t_п$. Это значит, что верхняя граница допустимого числа рабочих циклов в час должна быть меньше $3600/t_п$.

Определение наилучшего значения установочной скорости передвижения крана (тележки крана). Количество дополнительных включений двигателя механизма передвижения крана (тележки крана), осуществляемых в заключительный период торможения механизма с целью правильной ориентировки положения машины относительно места установки груза, зависит от требующейся точности установки последнего и может быть найдено по формуле ошибок Гаусса. Сформулированная задача принадлежит к числу задач о нахождении вероятности попадания в полосу заданной ширины при производстве одного выстрела в случае, если рассеивание подчиняется нормальному закону и прицеливание производить на среднюю линию полосы. В рассматриваемом случае вероятность установки груза в центре рассеивания находится по формуле

$$p(-\Delta < x < \Delta) = \hat{\Phi}\left(\frac{\Delta}{E}\right), \qquad (15.45)$$

где $\hat{\Phi}\left(\frac{\Delta}{E}\right)$ — приведенная функция Лапласа; Δ — половина области установки груза шириной 2Δ; E — вероятное срединное отклонение или точность остановки движущейся конструкции.

Теоретическое число включений механизма n для установки груза с необходимой точностью Δ определяется по формуле

$$n = 1/\Phi\left(\frac{\Delta}{E}\right). \qquad (15.46)$$

При жестком подвесе груза или небольшой высоте подъема срединное отклонение при остановке крана (тележки крана), характеризующее точность остановки, можно найти по формуле

$$E = \frac{1}{2}(S_{тQ} - S_{тр}), \qquad (15.47)$$

где $S_{тQ}$, $S_{тр}$ — путь торможения нагруженного и соответственно разгруженного крана.

Полагая движение крана (тележки крана) при торможении равнозамедленным, а замедления одинаковыми, легко найти, что

$$E = v^2/4a, \qquad (15.48)$$

где v — скорость передвижения при установившемся движении; a — замедление.

Требующуюся установочную скорость передвижения крана (тележки крана), обеспечивающую необходимую точность наводки груза при первом же торможении, можно получить из выражения

$$n = 1/\hat{\Phi}\left(\frac{\Delta}{E}\right) = 1/\hat{\Phi}\left(\frac{4a\Delta}{v^2}\right) = 1, \qquad (15.49)$$

откуда следует, что

$$\hat{\Phi}(4\Delta a/v^2) = 1. \qquad (15.50)$$

Пользуясь таблицей приведенной функции Лапласа и принимая $\hat{\Phi} = 0{,}9848 \approx 1$, находим, что

$$4a\Delta/v^2 = 3{,}6, \qquad (15.51)$$

откуда получим формулу для определения установочной скорости передвижения тележки крана:

$$v = 1{,}05\sqrt{\Delta a}. \qquad (15.52)$$

Пример. Мостовой кран имеет скорость передвижения 2 м/с. Необходимая точность установки монтажных блоков на железнодорожную платформу $\Delta = \pm 1$ см (0,01 м). Необходимая установочная скорость $v = 1{,}05\sqrt{0{,}01 \cdot 2} = 0{,}147$ м/с (8,5 м/мин). Необходимый диапазон регулирования 120/8,5 = 14.

15.4. Перспективы развития грузоподъемной техники

Перспективным планом народного хозяйства СССР до 2000 г. намечено развитие ряда направлений подъемно-транспортной техники, в том числе грузоподъемной. В первую очередь — это создание комплекса оборудования для гибких автоматизированных производственных участков, линий и цехов, работающих с ограниченным участием обслуживающего персонала. Чрезвычайно важным будет создание оборудования для транспортно-складских систем: кранов-штабелеров, стеллажей, тары, грузораспределительного оборудования и т. д. На крупных складах управление работой этой системы грузотранспортирующих машин будет осуществляться средствами микропроцессорной и вычислительной техники, объединенными общей системой АСУ.

Предполагается, что к 2000 г. будет налажен массовый выпуск кранов-штабелеров грузоподъемностью 0,5...12,5 т (стеллажных для тарно-штучных грузов, стеллажных комплектовочных, мостовых опорных и т. д.) для автоматизированных складов, управляемых ЭВМ, которые освободят от тяжелого физического труда несколько тысяч рабочих, существенно сократят расход металла.

Будет также расширена номенклатура грузоподъемных машин общего назначения — мостовых, козловых, стреловых, поворотных кранов, освоены новые конструкции этих машин. Так, на заводах отрасли начнут выпускаться мостовые краны облегченной конструкции грузоподъемностью 16/3,2 т, 50/12,5 т. Будут созданы новые краны для работы во взрывоопасных, химически агрессивных и радиоактивных средах, а для работы в условиях низких температур и в труднодоступных местах — специальные конструкции грузоподъемных машин, в том числе и на воздушной подушке. Для обеспечения строительно-монтажных работ во всех отраслях народного хозяйства увеличится выпуск стреловых поворотных кранов (в том числе башенных). Будут созданы новые конструкции этих кранов грузоподъемностью 250...300 т. Для нужд энергетического строительства продолжат создание и изготовление мощных козловых кранов грузоподъемностью до 1500 т, пролетом до 100 м, башенных строительных кранов большой грузоподъемности. С целью обеспечения комплексной механизации погрузочно-разгрузочных работ в океанских, морских и речных портах будут созданы новые конструкции портальных кранов грузоподъемностью до 160 т, судовых — грузоподъемностью до 500 т и т. д. Будут созданы новые виды кранов для перегрузки контейнеров, береговых консольных перегружателей, кранов для обслуживания ГЭС и АЭС, судовых кранов для подъема лихтеров и контейнеров.

Ведется интенсивная работа в области создания крановых роботов и манипуляторов и на их основе — работа в области автоматизации управления подъемно-транспортными машинами и комплексами этих машин. Так, в период до 2000 г. намечается организовать производство мостовых и козловых кранов-манипуляторов грузоподъемностью до 50 т (в том числе козловых кранов внутрицехового назначения) для применения в промышленности, строительстве, на транспорте и в системе материально-технического снабжения. Планируется также создание и освоение в производстве манипуляторов, в том числе автоматизированных, для загрузки-разгрузки автомобилей, железнодорожных вагонов тарно-штучными грузами.

Повысятся технико-экономические показатели грузоподъемных машин благодаря повышению грузоподъемности, скоростей механизмов, долговечности крановых конструкций при одновременном уменьшении их весовых показателей за счет применения новых методов расчета, новых материалов, новых профилей металла, прогрессивных производственных технологий, внедрения новых конструктивных решений, новых типов двигателей, тормозных устройств и т. д. Следовательно, технический прогресс в области производства средств грузоподъемной техники будет направлен на создание новых машин и их комплексов, на совершенствование и модернизацию существующих машин, необходимых народному хозяйству нашей страны.

15.5. Применение мини-, микроЭВМ и микропроцессорного оборудования в грузоподъемной технике

Значительное количество грузоподъемных машин будет производиться на базе использования мини-, микроЭВМ и микропроцессоров. Высоконадежные, дешевые и малогабаритные микропроцессоры и микроЭВМ обеспечивают возможность создания сравнительно

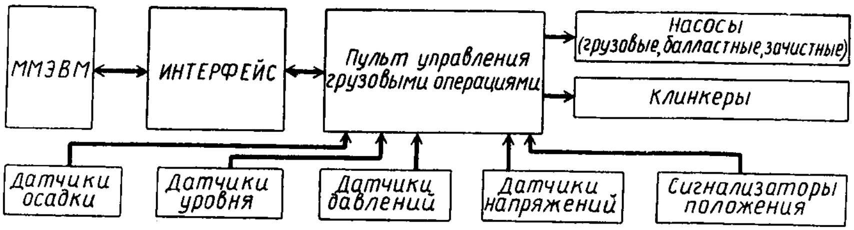


Рис. 15.1. Структурная схема системы автоматизации грузовых операций

простого машинного оборудования с высокими технико-экономическими показателями [14].

Наиболее широко микроЭВМ применяются в АСУ с непрерывными и полунепрерывными технологическими процессами в области металлургической, нефтехимической промышленности, в энергетике и т. д. Однако в последние годы наблюдается существенное увеличение количества микроЭВМ в АСУ с дискретными производственными процессами, осуществляемыми роботами, станочным оборудованием, средствами грузоподъемной техники и т. д. Так, в металлургической промышленности такие ЭВМ используются для получения информации о химических, металлургических и тепловых процессах в доменных печах. С их помощью для прокатных станов задается программа прокатки, определяются колодцы для нагрева слитков, регулируются режимы работы кранового оборудования. С успехом микроЭВМ используются для автоматизации процессов загрузки доменных печей с помощью скиповых подъемников, на морском транспорте с целью автоматизации судового оборудования. Здесь они используются для управления и обслуживания агрегатов машинного отделения, обработки грузов, управления движением судна, административного управления. Задача обработки грузов предусматривает оптимальное их распределение в целях минимизации времени погрузки и разгрузки и возникновения недопустимых напряжений в корпусе.

Рассмотрим кратко задачу автоматического управления процессов обработки грузов на примере грузовых систем танкеров. Объем автоматизации этих операций определяется их структурой и составом. Рациональное их выполнение обеспечивает минимальное время стоянки танкера, экономию электроэнергии и безопасность плавания. Особенность грузовых операций состоит в правильном выборе последовательности таких операций, при которой обеспечиваются устойчивость судна и прочность корпуса.

МикроЭВМ производит программирование грузовых операций и управление последними. Программа может изменяться в ходе ее выполнения в соответствии с текущими условиями работы. Структурная схема автоматизации этих операций показана на рис. 15.1. На схеме рядом с микроЭВМ расположено устройство интерфейс, предназначенное для организации логической связи между отдельными блоками ЭВМ. Отметим, что подобная схема может быть применена для организации работы погрузочно-разгрузочных кранов в морских и речных портах, на железнодорожных станциях, на материально-технических складах и т. д.

15.6. Понятие о системах автоматизированного проектирования (САПР)

САПР применяют для решения следующих возможных задач проектирования объекта:

скомпонованного из готовых элементов или блоков;

не имеющего полного набора блоков (при наличии аналогичных);

не имеющего аналогичных блоков, но для которого известны принципы их создания;

не имеющего предыдущего опыта проектирования [17].

Во всех случаях с целью автоматизации проектирования используются ЭВМ. В первом случае масштаб использования ЭВМ наибольший. Во втором случае ЭВМ используется только для анализа и оценки вариантов решений и выбора оптимальных параметров, компоновки и т. д. Использование ЭВМ в третьем случае возможно при анализе математических моделей. В последнем случае ЭВМ применяется для моделирования различных явлений и физических процессов, для обработки данных эксперимента и т. д.

Различают четыре вида САПР:

уникальные, применяющиеся для решения крупных народнохозяйственных задач;

универсальные, обеспечивающие проектирование всей номенклатуры изделий отрасли с помощью крупной ЭВМ;

специализированные, обслуживающие проектные организации и ориентированные с помощью средних ЭВМ на выполнение массовых проектных работ по конкретному виду изделия;

индивидуальные, предназначающиеся для выполнения отдельных видов инженерных расчетов, проектных работ и выполняющиеся с помощью ЭВМ.

Типовая логическая схема процесса проектирования (рис. 15.2) состоит из следующих этапов: постановки задачи проектирования, ограниченной исходной формулировкой; определения направления поиска, так как поиск в случайном направлении может привести к ложному результату; предварительного проектирования, включающего выбор структуры объекта и материально-энергетических средств его реализации, определение характеристик объекта и его составляющих элементов; эскизного проектирования, инженерного синтеза и анализа, где производится уточнение и конкретизация структурной схемы объекта, анализ характеристик применяющихся технических средств и их оптимизация на основе математической или реальной модели (прототипа конструируемого объекта); оценки проекта и принятия компромиссного решения; технического проектирования, в процессе которого производится конструкторская и технологическая документация, необходимая для изготовления опытного изделия; оценки технического проекта, завершающейся уточнением задачи, коррекцией технической документации

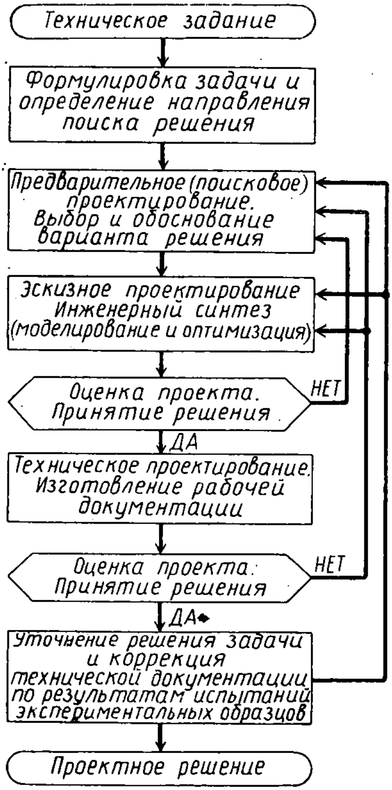


Рис. 15.2. Типовая логическая схема процесса проектирования

по результатам испытаний экспериментальных образцов и принятием окончательного решения.

Основными структурными элементами САПР являются подсистемы, которые обеспечивают выполнение определенной законченной проектной процедуры с получением необходимых проектных документов и решений. К числу подсистем относятся: информационная, обеспечивающая сбор, хранение, поиск, упорядочение, пополнение и выдачу всей информации; поиска решений технической задачи, ведущая отбор альтернативных вариантов перспективных технических решений; инженерного анализа, осуществляющая выполнение всех вычислительных работ, связанных с уточнением принятого варианта решения проектной задачи; ведения и изготовления проектно-конструкторской документации (чертежей, графиков, таблиц, технических описаний и т. д.), осуществляющаяся с помощью современных технических средств (графопостроителей, устройств репродуцирования, микрофильтрирования и т. д.).

Одной из главных целей автоматизированного проектирования является оптимизация проектных решений, суть которой сводится к получению заданных показателей проектируемого объекта при наименьших материальных затратах или наилучших технико-экономических характеристиках последнего. Сущность оптимизации сводится, как правило, к нахождению (при принятых ограничениях) таких значений технических характеристик объекта, при которых имеет место минимум (максимум) определенной целевой функции, характеризующий его механическую или технико-экономическую эффективность.

Возможности автоматизированного проектирования грузоподъемных машин можно иллюстрировать структурными схемами алгоритмов оптимизации механизмов подъема и металлоконструкций мостовых кранов.

На рис. 15.3 показана укрупненная структурная схема алгоритма оптимизации механизмов подъема [15], реализованного на базе ЭВМ ЕС-1030 на языке ПЛ/1: $n_{нi}$ — частота вращения двигателя; a_{min}, a_{max} — диапазон изменения кратности полиспаста; $D_б$, $D_{бл}$ —

постепенно приближаясь к стенкам отверстия матрицы. В процессе такого перемещения элементы заготовки получают изгиб в меридиональной плоскости при переходе от плоской части заготовки под пуансоном на его скругленную кромку, а затем спрямление при сходе со скругленной кромки пуансона.

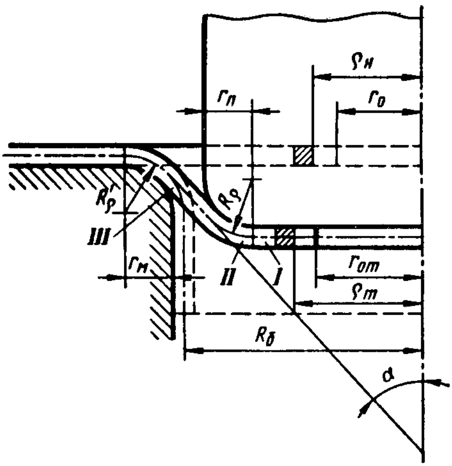


Рис. 8.17

В тангенциальном направлении у каждого элемента заготовки в процессе его перемещения относительно пуансона увеличивается радиус ρ от исходного значения $\rho_н$ через промежуточное $\rho_т$ до конечного значения $R_б$, равного половине диаметра получаемой горловины (по среднему диаметру).

В соответствии с характером приложения внешних сил и характером деформации заготовки каждый элемент в очаге деформации находится под воздействием растягивающих напряжений σ_ρ и σ_θ.

Напряжение σ_ρ изменяется от нуля вблизи кромки отверстия до максимального значения на границе очага деформации с недеформируемой частью заготовки. Вследствие наличия осевой симметрии деформирования, а также пренебрежимо малых нормальных и касательных напряжений на поверхности заготовки в очаге деформации, схема напряженного состояния близка к плоской, а напряжения σ_ρ и σ_θ можно считать главными нормальными напряжениями.

Так как напряжения σ_ρ и σ_θ имеют одинаковый знак (оба растягивающие), то согласно условию пластичности по постоянству максимальных касательных напряжений одно из действующих напряжений равно напряжению текучести σ_s. Вследствие того, что σ_ρ изменяется от нуля до наибольшего значения, крайним главным нормальным напряжением должно быть σ_θ, и условие пластичности для отбортовки запишется в виде

$$\sigma_\theta = \sigma_s. \tag{8.84}$$

В общем случае (рис. 8.17) очаг деформации можно разделить на три участка: участок *I* расположен под плоским торцом пуансона; участок *II* расположен на скругленной рабочей кромке пуансона; участок *III* находится в зазоре между пуансоном и матрицей. На границах между участками *I* и *II*, между *II* и *III* и между *III* и недеформируемой частью элементы заготовки в процессе деформирования получают резкое изменение радиуса кривизны срединной поверхности в меридиональном сечении.

Вследствие действия изгибающего момента на границе между участками I и II очага деформации заготовка в участке I несколько отходит от плоского торца пуансона. Таким образом, в участке I очага деформации на поверхностях заготовки нормальные и касательные напряжения отсутствуют.

Распределение напряжений σ_ρ в участке I очага деформаций находим совместным решением уравнения равновесия (8.6), в котором следует принять $\mu = 0$, с условием пластичности (8.84). В результате получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\rho_т \frac{d\sigma_\rho}{d\rho_т} + \sigma_\rho - \sigma_s = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln(\sigma_\rho - \sigma_s) = -\ln \rho_т + \ln C$$

или

$$\sigma_\rho = \sigma_s + \frac{C}{\rho_т}. \tag{8.85}$$

Произвольная постоянная интегрирования определяется из граничного условия, согласно которому при $\rho = r_{от}$, где $r_{от}$ — радиус отверстия в данный момент деформирования, напряжение $\sigma_\rho = 0$:

$$C = -\sigma_s r_{от}.$$

Подставляя значение произвольной постоянной интегрирования, получаем

$$\sigma_\rho = \sigma_s \left(1 - \frac{r_{от}}{\rho_т}\right). \tag{8.86}$$

Формула (8.86) позволяет установить распределение напряжений σ_ρ в участке I очага деформации. Такую же формулу для плоского участка получили несколько другим способом и другие исследователи [33, 105].

Если пренебречь влиянием трения и изгиба во втором участке очага деформации, а также влиянием изгиба на кромке матрицы, то величину наибольшего напряжения $\sigma_{\rho\,max}$, действующего на границе очага деформации, можно найти из формулы (8.86) при подстановке в нее значения $\rho_т \approx R_б$:

$$\sigma_{\rho\,max} = \sigma_s \left(1 - \frac{r_{от}}{R_б}\right). \tag{8.87}$$

Если принять, что усилие отбортовки равно $P = \sigma_{\rho\,max} \times \times 2\pi R_б s$, то, пользуясь формулой (8.87), можно получить простую формулу (8.88) для приближенного определения максимального усилия отбортовки:

$$P = 2\pi s\sigma_s (R_б - r_{от}). \tag{8.88}$$

Однако эта формула не точна. Более правильно было бы определить усилие отбортовки по следующей формуле:

$$P = 2\pi s\sigma_s (R_б - r_{от}) \cos \alpha, \tag{8.89}$$

так как вертикальное усилие отбортовки представляет собой сумму проекций напряжений $\sigma_{\rho\, max}$ на ось пуансона, умноженную на площадь сечения, отделяющего очаг деформации от недеформируемой части заготовки.

Из формулы (8.89) видно, что усилие отбортовки переменно по ходу пуансона, причем вследствие увеличения $r_{от}$ по мере опускания пуансона усилие отбортовки должно уменьшаться, а вследствие уменьшения угла α увеличиваться. Таким образом, можно считать, что наибольшее растягивающее напряжение $\sigma_{\rho\, max}$ будет действовать на границе очага деформации в начале деформирования заготовки (при α, близком к 90°), а усилие отбортовки будет иметь максимум при внедрении пуансона в матрицу на некоторую глубину, когда $\sigma_{\rho\, max}$ будет уже меньше начального.

Однако приведенные рассуждения не совсем точны, так как в них не учтено влияние трения на кромке пуансона, а также влияние изгиба на кромках матрицы и пуансона. Так как контактная площадь по кромке пуансона увеличивается по мере опускания пуансона (по мере увеличения угла охвата заготовкой кромки пуансона), то с опусканием пуансона увеличится действие сил трения. Кроме того, при некотором опускании пуансона появление участков изгиба и спрямления, в свою очередь, приведет к увеличению $\sigma_{\rho\, max}$. Таким образом, с учетом указанных факторов можно полагать, что наибольшую величину получит напряжение $\sigma_{\rho\, max}$ не в самом начале деформирования, а при некотором опускании пуансона.

Однако для определения значения $\sigma_{\rho\, max}$ в промежуточных стадиях деформирования необходимо определять текущее значение диаметра отверстия, увеличивающегося по мере опускания пуансона. Решение этой задачи можно найти на основе рассмотрения распределения деформаций при отбортовке и отыскании интегрированием значения конечной или промежуточной ширины очага деформации или высоты борта.

Точное решение этой задачи может быть получено с использованием уравнений теории течения. Однако в этом случае решение приводит к численному интегрированию, исключающему возможность получения решения в аналитических функциях. В первом приближении можно принять, что при отбортовке имеет место простое нагружение (соотношение между напряжениями в любой точке очага деформации не изменяется в процессе деформирования), что позволяет использовать для решения уравнения деформационной теории.

Используя уравнение связи, а также формулу (8.86), характеризующую величину σ_ρ в функции координаты $\rho = \rho_н$ и постоянство $\sigma_\theta = \sigma_s$ для всего очага деформации, после несложных преобразований получаем

$$\delta_\rho = -\frac{2r_0 - \rho}{\rho + r_0}\,\delta_\theta, \tag{8.90}$$

где $\delta_\rho = \ln\frac{\Delta l_н}{\Delta l_к}$ — логарифмическая деформация в радиальном направлении; $\Delta l_н$ и $\Delta l_к$ — начальное и конечное значения ширины элемента в радиальном направлении; $\delta_\theta = \ln\frac{\rho}{R_б}$ — тангенциальная логарифмическая деформация, соответствующая перемещению рассматриваемого элемента в борт, образующийся в результате отбортовки (конечная стадия деформирования).

Из рассмотрения уравнения (8.90) можно заметить, что при $\rho < 2r_0$ радиальная деформация обратна по знаку тангенциальной деформации и, следовательно, является деформацией сжатия (укорочения), а при $\rho > 2r_0$ имеет тот же знак, что и тангенциальная деформация, и, следовательно, является деформацией растяжения.

Уравнение (8.90) можно преобразовать

$$dl_к = \left(\frac{\rho}{R_б}\right)^{\frac{2r_0-\rho}{\rho+r_0}} d\rho, \tag{8.91}$$

где $\Delta l_к = dl_к$, а $\Delta l_н = d\rho$ при переходе к бесконечно малым размерам элемента.

Интеграл вида $\int\limits_{r_0}^{R_б} dl_к$ должен определить конечное значение ширины отбортовываемого участка при условии постоянства от отношения $\frac{\sigma_\rho}{\sigma_\theta}$ в процессе деформирования в любой точке. Однако выполнить интегрирование уравнения (8.91) в замкнутом виде не представляется возможным. Решение можно найти численным интегрированием, что и было выполнено в работе [17].

Однако без большой погрешности уравнение (8.90) можно упростить разложением логарифмических функций в ряд и использованием первых членов разложения

$$\ln\frac{d\rho}{dl_к} \approx \frac{d\rho}{dl_к} - 1; \quad \ln\frac{\rho}{R_б} \approx \frac{\rho}{R_б} - 1. \tag{8.92}$$

Подставив значения первых членов разложения вместо логарифмических функций в уравнение (8.90), после несложных преобразований получаем

$$dl_к = \frac{R_б(\rho + r_0)\,d\rho}{\rho^2 - 2r_0\rho + 3R_б r_0}. \tag{8.93}$$

Интегрирование этого уравнения трудностей не представляет:

$$L = \int\limits_{r_0}^{R_б} dl_к = R_б \int\limits_{r_0}^{R_б} \frac{\rho + r_0}{\rho^2 - 2r_0\rho + 3R_б r_0}\, d\rho =$$

$$= \frac{R_б}{2} \left| \ln(\rho^2 - 2r_0\rho + 3R_б r_0) + \frac{4r_0}{\sqrt{3R_б r_0 - r_0^2}} \operatorname{arctg} \frac{\rho - r_0}{\sqrt{3R_б r_0 - r_0^2}} \right|_{r_0}^{R_б} =$$

$$= \frac{R_б}{2} \left(\ln \frac{R_б^2 + R_б r_0}{3R_б r_0 - r_0^2} + \frac{4r_0}{\sqrt{3R_б r_0 - r_0^2}} \operatorname{arctg} \frac{R_б - r_0}{\sqrt{3R_б r_0 - r_0^2}} \right). \qquad (8.94)$$

По формуле (8.94) можно найти конечную величину ширины отбортовываемого участка по его исходному значению ($R_б - r_0$), где r_0 — радиус исходного отверстия и $R_б$ — радиус борта, получающегося в результате отбортовки.

Без особого влияния на точность формулу (8.94) можно упростить заменой $\ln x \approx x - 1$ и $\operatorname{arctg} y \approx y$. После несложных преобразований получим

$$L = \frac{R_б (R_б - r_0)(R_б + 3r_0)}{2r_0 (3R_б - r_0)}. \qquad (8.95)$$

Значение конечной ширины отбортовываемого участка сопоставим с исходным ее значением с помощью коэффициента a:

$$a = \frac{L}{R_б - r_0} = \frac{R_б (R_б + 3r_0)}{2r_0 (3R_б - r_0)}. \qquad (8.96)$$

При рассмотрении формулы (8.96) можно заметить, что при $R_б = r_0$ (ширина отбортовываемой части равна нулю) и $R_б = 2r_0$ (значение ширины отбортовываемой части, выше которого в практике отбортовку обычно не ведут) коэффициент $a = 1$.

Отсюда следует, что в промежутке этих значений $R_б = f(r_0)$ должен быть экстремум. Обозначив $k_0 = \frac{R_б}{r_0}$ и приравняв нулю $\frac{da}{dk_0} = 0$, находим, что экстремуму соответствует $k_0 = 1{,}39$. Подставив значение $R_б = 1{,}39 r_0$ в формулу (8.96), находим, что в точке экстремума $a = 0{,}97$.

Проведенный анализ показал, что при обычно применяющихся коэффициентах отбортовки $k_0 = \frac{R_б}{r_0}$ ширина отбортовываемой части заготовки изменяется весьма незначительно, и в первом приближении, при определении текущего диаметра отверстия или конечной высоты борта, расчеты можно вести по условию неизменности ширины отбортовываемой части заготовки, в процессе деформирования.

В тех случаях, когда радиусы скругления кромок матрицы $r_м$ и пуансона $r_п$ существенно меньше ширины отбортовываемой части заготовки, можно полагать, что максимальное усилие отбортовки будет соответствовать внедрению пуансона в матрицу на глубину, равную сумме $r_м + r_п$, когда угол α становится равным нулю.

Используя условие постоянства ширины отбортовываемой части заготовки в процессе деформирования, нетрудно получить формулу, позволяющую определить радиус отверстия $r_{от}$, соответствующий моменту, когда α становится равным нулю:

$$r_{от} = r_0 + 0{,}57\,(r_м + r_п + s). \qquad (8.97)$$

Для определения $\sigma_{\rho\,max}$, соответствующего этому моменту деформирования, служит формула (8.87). Однако для повышения точности расчетов следовало бы учесть влияние изгиба и сил трения на величину $\sigma_{\rho\,max}$. Учет влияния этих факторов приближенно можно выполнить аналогично тому, как это было сделано при анализе 1-го перехода вытяжки. При этом следует иметь в в виду наличие трех участков резкого изменения кривизны срединной поверхности элементов заготовки в процессе деформирования: двух на кромке пуансона ($R_\rho = r_п + s/2$) (изгиб и спрямление) и одного — на кромке матрицы ($R'_\rho = r_м + s/2$). Угол охвата заготовкой кромки пуансона в интересующий нас момент равен 90°. С учетом сказанного формула для определения $\sigma_{\rho\,max}$ в момент, когда угол α становится равным нулю, получит вид

$$\sigma_{\rho\,max} = \sigma_s\left(1 - \frac{r_{от}}{R_б} + \frac{s}{2r_п + s} + \frac{s}{4r_м + 2s}\right)(1 + 1{,}6\mu). \qquad (8.98)$$

Значение $r_{от}$ надо определять по формуле (8.97). Величина $\sigma_{\rho\,max}$, умноженная на площадь поперечного сечения получаемого борта ($2\pi R_б s$), позволяет определить максимальное значение усилия отбортовки. Величина $\sigma_{\rho\,max}$, соответствующая полному охвату заготовкой скругленной кромки пуансона при относительно малых радиусах скругления пуансона и матрицы, может быть больше, чем $\sigma_{\rho\,max}$, соответствующее началу деформирования, когда радиус отверстия минимален (за счет влияния изгиба и трения).

В проведенном анализе операции отбортовки не учтено влияние упрочнения и изменения толщины заготовки в процессе деформирования на величину напряжения $\sigma_{\rho\,max}$. Тем не менее полученные формулы с достаточной точностью можно применять в расчетах при отбортовке в условиях холодной деформации. Это утверждение основано на том, что упрочнение и изменение толщины заготовки оказывают противоположное влияние на величину $\sigma_{\rho\,max}$ и до некоторой степени компенсируют одно другое. Действительно, при отбортовке толщина заготовки в процессе деформирования уменьшается, что приводит к уменьшению $\sigma_{\rho\,max}$, а упрочнение в процессе деформирования увеличивает напряжение текучести, что приводит к увеличению $\sigma_{\rho\,max}$.

8.5. ОБЖИМ

Анализ распределения напряжений в заготовке при обжиме приведен в работах [1, 33, 113]. Рассмотрим обжим цилиндрической тонкостенной заготовки матрицей, образующая рабочей полости которой имеет постоянный радиус кривизны. На рис. 8.18 представлены схема деформирования заготовки в такой матрице и принятые обозначения размеров.

Очаг деформации состоит из одного участка с постоянным радиусом кривизны срединной поверхности заготовки R_ρ — в меридиональном сечении. В процессе деформирования заготовки край ее получает уменьшение радиуса r_0 от $r_0 = R_з$ в начале деформирования до заданного r_0. В соответствии с этим угол α_0 между касательной к срединной поверхности в меридиональном сечении на крае заготовки и осью симметрии увеличивается от $\alpha_0 = 0$ до значения, которое может быть выражено через $R_з$, a и r_0 достаточно очевидным соотношением

$$\cos\alpha_0 = \frac{a + r_0}{R_\rho} = \frac{a + r_0}{R_з + a}. \tag{8.99}$$

Одновременно с этим в процессе деформирования заготовки радиус ρ любого ее элемента вследствие перемещения относительно рабочей поверхности матрицы уменьшается, т. е. тангенциальная деформация элемента является деформацией сжатия.

Так как заготовка в процессе деформирования заталкивается в матрицу силой $P_{обж}$, то в стенках исходной заготовки возникают сжимающие напряжения σ_ρ, которые в очаге деформации по мере уменьшения радиуса ρ рассматриваемого элемента уменьшаются до нуля на крае заготовки при $\rho = r_0$. Учитывая то, что напряжения σ_ρ являются сжимающими, а тангенциальная деформация ε_θ является деформацией сжатия, можно заключить, что напряжения σ_θ также являются сжимающими.

Как было отмечено ранее, при значениях $\frac{R_\rho}{s} > 10$ напряженное состояние в очаге деформации с достаточной точностью может быть принято плоским. Поэтому, учитывая, что напряжение σ_ρ в очаге деформации изменяется от нуля до некоторого наибольшего значения $\sigma_{\rho\,max}$, можно заключить, что крайними главными нормальными напряжениями будут σ_θ и $\sigma_н$, причем $\sigma_н \approx 0$. Условие пластичности по постоянству максимального касательного напряжения (5.22) для этого случая имеет вид

$$\sigma_\theta = -\sigma_s. \tag{8.100}$$

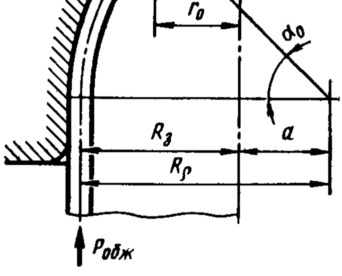


Рис. 8.18

Распределение напряжений σ_ρ в очаге деформации при обжиме в матрице с криволинейной образующей ($R_\rho = \text{const}$) может быть получено путем совместного решения уравнения равновесия (8.6) и уравнения (8.100).

Рассмотрим вначале решение без учета влияния упрочнения и изменения толщины заготовки в процессе деформирования на величину напряжений σ_ρ, действующих в очаге деформации.

Для заданной формы очага деформации ($R_\rho = \text{const}$) справедливы следующие очевидные соотношения: $\rho = R_\rho \cos\alpha - a$; $d\rho = -R_\rho \sin\alpha d\alpha$; $R_\theta = R_\rho - \frac{a}{\cos\alpha}$. Подставляя их в уравнение (8.6) и решая его совместно с уравнением (8.100), после несложных преобразований получаем

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\alpha} - \sigma_\rho\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - b} - \mu\right) - \sigma_s\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - b} = 0. \qquad (8.101)$$

В уравнении (8.101) принято, что $b = \frac{a}{R_\rho}$. Уравнение (8.101) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, решение которого имеет следующий вид:

$$\sigma_\rho = \left[C + \sigma_s\int\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - b}\,e^{-\int\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - b} - \mu\right)d\alpha}d\alpha\right]\times$$
$$\times\, e^{\int\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - b} - \mu\right)d\alpha}. \qquad (8.102)$$

Выполняя интегрирование функций, входящих в показатель степени, получаем

$$\sigma_\rho = \left[C + \sigma_s\int\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - b}\,e^{\ln(\cos\alpha - b) + \mu\alpha}\,d\alpha\right]e^{-\ln(\cos\alpha - b) - \mu\alpha} =$$
$$= \left[C + \sigma_s\int(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,e^{\mu\alpha}d\alpha\right]\frac{e^{-\mu\alpha}}{\cos\alpha - b}.$$

Для значений коэффициента трения $\mu < 0{,}2$ без большой погрешности можно экспоненциальные функции $e^{\mu\alpha}$ и $e^{-\mu\alpha}$ заменить первыми двумя членами разложения их в ряд. Производя указанную замену, раскрывая скобки в подынтегральном выражении и пренебрегая слагаемым, содержащим множитель μ^2, получаем

$$\sigma_\rho = \left[C + \sigma_s\int(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + \mu\alpha\sin\alpha)\,d\alpha\right]\frac{1 - \mu\alpha}{\cos\alpha - b},$$

а после интегрирования получаем

$$\sigma_\rho = \{C + \sigma_s[2\mu\sin\alpha - (1 + \mu\alpha)\cos\alpha]\}\frac{1 - \mu\alpha}{\cos\alpha - b}.$$

Произвольную постоянную интегрирования C находим из граничных условий, согласно которым при $\alpha = \alpha_0$ (на крае заготовки) напряжение $\sigma_\rho = 0$. Пользуясь этим граничным условием, определяем значение произвольной постоянной C:

$$C = -\sigma_s\,[2\mu \sin\alpha_0 - (1 + \mu\alpha_0)\cos\alpha_0],$$

и, наконец,

$$\sigma_\rho = -\sigma_s\,[(1+\mu\alpha)\cos\alpha - (1+\mu\alpha_0)\cos\alpha_0 + \\ + 2\mu(\sin\alpha_0 - \sin\alpha)]\,\frac{1-\mu\alpha}{\cos\alpha - b}. \qquad (8.103)$$

Формула (8.103) позволяет установить распределение напряжений $\sigma_\rho = f(\alpha)$ в очаге деформации при обжиме в матрице с криволинейной образующей при $R_\rho = \mathrm{const}$. Из формулы видно, что напряжение $\sigma_\rho = 0$ при $\alpha = \alpha_0$ (на крае изделия); увеличивается по мере уменьшения угла α и достигает наибольшего значения σ'_ρ при $\alpha = 0$ (на границе между очагом деформации и недеформируемой частью исходной заготовки).

Подставляя в формулу (8.103) значение $\alpha = 0$, получаем формулу (8.104) для определения величины напряжения σ'_ρ, действующего на границе очага деформации:

$$\sigma'_\rho = -\frac{\sigma_s}{1-b}\,[1 - (1+\mu\alpha_0)\cos\alpha_0 + 2\mu\sin\alpha_0]. \qquad (8.104)$$

В формуле (8.104) напряжение σ'_ρ дано в функции угла α_0. Это же напряжение можно выразить в функции радиуса r_0, для чего в формуле (8.104) тригонометрические функции необходимо заменить следующими очевидными выражениями:

$$\cos\alpha_0 = \frac{a + r_0}{R_\rho}; \quad \sin\alpha_0 = \frac{\sqrt{R_\rho^2 - (a + r_0)^2}}{R_\rho};$$

$$\alpha_0 = \arccos\frac{a + r_0}{R_\rho}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (8.104), а также учитывая, что $b = \frac{a}{R_\rho} = \frac{R_\rho - R_з}{R_\rho}$, получаем

$$\sigma'_\rho = -\sigma_s\left(1 - \frac{r_0}{R_з} + 2\mu\,\frac{\sqrt{R_\rho^2 - (r_0 + R_\rho - R_з)^2}}{R_з} - \right. \\ \left. - \mu\,\frac{r_0 + R_\rho - R_з}{R_з}\arccos\frac{r_0 + R_\rho - R_з}{R_\rho}\right). \qquad (8.105)$$

В тех случаях, когда угол α_0 сравнительно мал, $\alpha_0 \leqslant 40°$, без большого ущерба для точности можно принять, что $\alpha_0\cos\alpha_0 = \sin\alpha_0$, и тогда формула (8.104) получит более простой вид

$$\sigma'_\rho = -\frac{\sigma_s}{1-b}\,(1 - \cos\alpha_0 + \mu\sin\alpha_0). \qquad (8.106)$$

Эту же формулу с помощью приведенных ранее выражений, связывающих тригонометрические функции с радиусами $R_з$, R_ρ, r_0, можно написать аналогично формуле (8.105)

$$\sigma'_\rho = -\sigma_s\left(1 - \frac{r_0}{R_з} + \frac{\mu}{R_з}\sqrt{R_\rho^2 - (r_0 + R_\rho - R_з)^2}\right). \qquad (8.107)$$

Напряжение $\sigma_{\rho\,\max}$, действующее в станках обжимаемой заготовки, следует определять с учетом того, что у элементов заготовки при перемещении из недеформируемого участка в очаг деформации уменьшается радиус кривизны срединной поверхности в меридиональном сечении от бесконечности до величины R_ρ. Таким образом, на входе в очаг деформации элементы заготовки получают изгиб, что должно оказывать влияние на величину напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$. В первом приближении можно принять, что изгиб элементов заготовки при их перемещении относительно матрицы обжима при резком изменении радиуса R_ρ вызовет увеличение напряжения σ'_ρ на $\Delta\sigma_\rho$, величина которого приближенно определяется по формуле (8.52). Тогда напряжение $\sigma_{\rho\,\max}$ будет равно сумме напряжения σ'_ρ и приращения напряжения $\Delta\sigma_\rho$. Если величину σ'_ρ определить по формуле (8.107), то получим

$$\sigma_{\rho\,\max} = -\sigma_s\left[1 - \frac{r_0}{R_з} + \frac{\mu}{R_з}\sqrt{R_\rho^2 - (r_0 + R_\rho - R_з)^2} + \frac{s}{4R_\rho}\right]. \qquad (8.108)$$

Если обозначить отношение $\frac{r_0}{R_з} = m_{об}$, то формулу (8.108) можно записать несколько иначе:

$$\sigma_{\rho\,\max} = -\sigma_s\left[1 - m_{об} + \mu\sqrt{2(1 - m_{об})\frac{R_\rho}{R_з} - (1 - m_{об})^2} + \frac{s}{4R_\rho}\right]. \qquad (8.108а)$$

Из формулы (8.108а) следует, что при постоянном значении $m_{об}$ и $\frac{s}{R_з}$ с увеличением отношения $\frac{R_\rho}{R_з}$ слагаемое, учитывающее влияние трения на $\sigma_{\rho\,\max}$, увеличивается, а слагаемое, учитывающее влияние изгиба, уменьшается. Отсюда можно заключить, что при малых значениях коэффициента трения ($\mu < 0,1$) увеличение отношения $\frac{R_\rho}{R_з}$ может привести к незначительному уменьшению отношения $\frac{\sigma_{\rho\,\max}}{\sigma_s}$, в то время как при относительно больших значениях коэффициента трения ($\mu \gg 0,2$) увеличение $\frac{R_\rho}{R_з}$ приводит к увеличению отношения $\frac{\sigma_{\rho\,\max}}{\sigma_s}$.

Аналогичным образом можно получить расчетные формулы для случая обжима в конической матрице (рис. 8.19). Очаг деформации в этом случае состоит из двух участков: *I*, в котором заготовка соприкасается с конической полостью матрицы, и участка II свободного изгиба с радиусом R_ρ срединной поверхности, в котором заготовка не соприкасается с матрицей.

Распределение напряжений в основном, коническом, участке очага деформации можно установить, подставляя значение $\sigma_\theta = -\sigma_s$ из условия пластичности в уравнение (8.6) и учитывая, что $\alpha = \text{const} = \alpha_к$; $R_\rho = \infty$ и $R_\theta = \frac{\rho}{\cos \alpha_к}$:

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho + \sigma_s (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) = 0.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение с разделимыми переменными, находим

$$\sigma_\rho = -\sigma_s (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) + \frac{C}{\rho}.$$

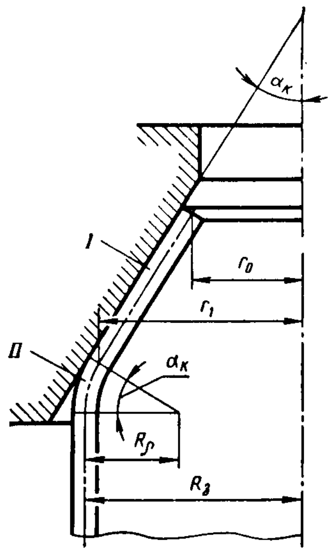


Рис. 8.19

Произвольную постоянную интегрирования C можно найти из граничного условия, согласно которому при $\rho = r_0$ (на крае заготовки) напряжение $\sigma_\rho = 0$:

$$C = r_0 \sigma_s (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к).$$

Подставляя значение C в предыдущее уравнение, получаем формулу (8.109), которая позволяет установить распределение напряжений в коническом участке очага деформации:

$$\sigma_\rho = -\sigma_s (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) \left(1 - \frac{r_0}{\rho}\right). \tag{8.109}$$

Напряжение σ'_ρ, действующее в коническом участке очага деформации на границе его с участком свободного изгиба, можно получить из формулы (8.109) при подстановке в нее значения $\rho = r_1$ (рис. 8.19):

$$\sigma'_\rho = -\sigma_s (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right). \tag{8.110}$$

Распределение напряжений на участке II очага деформации находим, решая уравнение (8.6), в котором принято $\mu = 0$ (контакт заготовки с инструментом отсутствует). Получающееся дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d\sigma_\rho}{\sigma_\rho + \sigma_s} = -\frac{d\rho}{\rho}.$$

Интегрирование его дает уравнение

$$\sigma_\rho = -\sigma_s + \frac{C}{\rho}.$$

При переходе элементов заготовки в процессе ее деформирования из участка *II* очага деформации в участок *I* радиус срединной поверхности в меридиональном сечении увеличивается от R_ρ до бесконечности (спрямление), а при переходе из недеформируемой части заготовки в очаг деформации уменьшается от бесконечности до значения R_ρ (изгиб). Считая, что изгиб и спрямление вызывают увеличение напряжения σ_ρ на $\Delta\sigma_\rho$, величина которого определяется по формуле (8.52), заключаем, что в качестве граничного условия для участка *II* очага деформации можно принять, что при $\rho = r_1$ $\sigma_\rho = \sigma'_\rho + \Delta\sigma_\rho$.

Используя это граничное условие, находим

$$-\sigma_s\left[(1+\mu \operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)+\frac{s}{4R_\rho}\right] = - \qquad + \frac{C}{r_1};$$

отсюда произвольная постоянная интегриров

$$C = \sigma_s r_1\left[1-(1+\mu \operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)-\frac{s}{4R_\rho}\right].$$

Подставляя значение C в уравнение для определения величины σ_ρ в участке *II* очага деформации, получаем

$$\sigma_\rho = -\sigma_s\left[1-\frac{r_1}{\rho}+(1+\mu \operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)\frac{r_1}{\rho}+\frac{s}{4R_\rho}\frac{r_1}{\rho}\right]. \tag{8.111}$$

Значение напряжения σ''_ρ, действующего в участке *II* очага деформации на его границе с недеформируемой частью заготовки, определим по формуле (8.111) при подстановке в нее значения $\rho = R_з$. Для упрощения в третьем и четвертом слагаемом примем $\frac{r_1}{\rho} = 1$:

$$\sigma''_\rho = -\sigma_s\left[1-\frac{r_1}{R_з}+(1+\mu \operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)+\frac{s}{4R_\rho}\right]. \tag{8.112}$$

Напряжение $\sigma_{\rho\,max}$, действующее в стенках обжимаемой заготовки, с учетом влияния изгиба определим как сумму напряжения σ''_ρ и приращения напряжения $\Delta\sigma_\rho$:

$$\sigma_{\rho\,max} = -\sigma_s\left[1-\frac{r_1}{R_з}+(1+\mu \operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)+\frac{s}{2R_\rho}\right]. \tag{8.113}$$

Для определения $\sigma_{\rho\,max}$ по формуле (8.113) при обжиме в конической матрице необходимо знать величину радиуса участка свободного изгиба. В первом приближении можно принять, что величина R_ρ в участке *II* очага деформации определяется по формуле (8.40), как в случае, когда меридиональное напряжение сравнительно велико:

$$R_\rho = \frac{s\sigma_s}{4\sigma'_\rho\,(1-\cos\alpha_к)}. \tag{8.114}$$

Подставляя значение R_ρ из выражения (8.114) в (8.113), получаем

$$\sigma_{\rho\,max} = -\sigma_s\left[1-\frac{r_1}{R_з}+(1+\mu\operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\sigma'_\rho}{\sigma_s}(1-\cos\alpha_к)\right]. \tag{8.115}$$

Подставляя значение σ'_ρ из (8.110) в (8.115), после несложных преобразований получаем

$$\sigma_{\rho\,max} = -\sigma_s\left[1-\frac{r_1}{R_з}+(1+\mu\operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)(3-2\cos\alpha_к)\right]. \tag{8.116}$$

Так как при обжиме радиусы r_1 и $R_з$ незначительно отличаются по величине один от другого, то без большого ущерба для точности формулу (8.116) можно записать в несколько ином виде

$$\sigma_{\rho\,max} = -\sigma_s(1+\mu\operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{R_з}\right)(3-2\cos\alpha_к). \tag{8.117}$$

Формула (8.117) позволяет определить величину напряжения $\sigma_{\rho\,max}$, действующего в стенках заготовки при обжиме в конической матрице.

Заметим, что этой формулой нельзя пользоваться для определения величины $\sigma_{\rho\,max}$ при обжиме в конической матрице, когда обжатая часть заготовки выходит в цилиндрическое отверстие матрицы, так как в этом случае появится новый участок очага деформации (на скругленной кромке матрицы), на границах которого элементы заготовки будут получать изгиб и спрямление [70].

Проведенный анализ обжима в конической матрице и в матрице с криволинейной образующей был выполнен без учета влияния упрочнения и изменения толщины заготовки в процессе деформирования на величину $\sigma_{\rho\,max}$. Учтем, хотя бы приближенно, влияние упрочнения на величину $\sigma_{\rho\,max}$ при обжиме в конической матрице, принимая, что напряжение текучести σ_s связано с относительным сужением при испытании на растяжение линейной зависимостью, и учитывая, что при обжиме тангенциальная деформация $\varepsilon_\theta = \frac{R_з-\rho}{R_з}$ эквивалентна относительному сужению. Из формулы (1.13) получаем уравнение для определения величины σ_s:

$$\sigma_s = \sigma_{т0} + П\left(1-\frac{\rho}{R_з}\right). \tag{8.118}$$

Заменяя в дифференциальном уравнении для конического участка очага деформации напряжение текучести σ_s его значением из уравнения (8.118), получаем

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho + \left(\sigma_{т0} + П - П \frac{\rho}{R_з}\right)(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) = 0;$$

это уравнение можно записать в несколько ином виде:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho}{\rho} + \frac{\left(\sigma_{т0} + П - П \frac{\rho}{R_з}\right)(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к)}{\rho} = 0.$$

Уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, решение которого можно написать в виде

$$\sigma_\rho = \frac{C}{\rho} - (\sigma_{т0} + П)(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) + П(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) \frac{\rho}{2R_з}.$$

Произвольную постоянную интегрирования находим из граничного условия, согласно которому при $\rho = r_0$; $\sigma_\rho = 0$

$$C = r_0(\sigma_{т0} + П)(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) - П(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) \frac{r_0^2}{2R_з}.$$

Подставляя значение C после преобразований, получаем

$$\sigma_\rho = -\left[\sigma_{т0} + П\left(1 - \frac{\rho + r_0}{2R_з}\right)\right](1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к)\left(1 - \frac{r_0}{\rho}\right). \quad (8.119)$$

Подставляя в формулу (8.119) значение $\rho = R_з$ и учитывая влияние изгиба на входе в матрицу множителем $(3-2\cos\alpha_к)$ аналогично тому, как это сделано в формуле (8.117), получаем значение $\sigma_{\rho\,max}$, действующего в стенках обжимаемой заготовки с учетом влияния упрочнения:

$$\sigma_{\rho\,max} = -\left[\sigma_{т0} + \frac{П}{2}\left(1 - \frac{r_0}{R_з}\right)\right](1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к) \times$$
$$\times \left(1 - \frac{r_0}{R_з}\right)(3 - 2\cos\alpha_к). \quad (8.120)$$

Легко убедиться, что множитель $\left[\sigma_{т0} + \frac{П}{2}\left(1 - \frac{r_0}{R_з}\right)\right]$ является по существу средним арифметическим максимального и минимального значений напряжения текучести в очаге деформации. Действительно, минимальное значение напряжения текучести $\sigma_{s\,min} = \sigma_{т0}$ $\left(при\ \varepsilon_\theta = \frac{R_з - R_з}{R_з} = 0\right)$ и максимальное значение напряжения текучести $\sigma_{s\,max} = \sigma_{т0} + П\frac{R_з - r_0}{R_з}$ (на кромке обжимаемой заготовки при $\rho = r_0$). Среднее арифметическое этих двух значений

$$\sigma_{s\,ср} = \frac{\sigma_{s\,min} + \sigma_{s\,max}}{2} = \sigma_{т0} + \frac{П}{2}\left(1 - \frac{r_0}{R_з}\right).$$

Таким образом, влияние упрочнения на величину $\sigma_{\rho\,\max}$, действующего в стенках обжимаемой заготовки, приближенно можно учесть заменой в установленных ранее формулах напряжения текучести σ_s средним для очага деформации напряжением текучести, определяемым в предположении справедливости линейной зависимости напряжения текучести от относительного сужения.

Рассмотрим теперь, каким образом можно учесть влияние изменения толщины заготовки в процессе деформирования на величину напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$, действующего в стенках обжимаемой заготовки. Рассмотрим прежде всего характер изменения толщины заготовки при обжиме. Соотношение между скоростями деформации в любой точке очага деформации в данный момент деформирования можно установить по известным значениям напряжений. Уравнение связи напряжений и скоростей деформаций для плоского напряженного состояния ($\sigma_н = 0$) в принятых обозначениях можно написать

$$\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\sigma_\theta} = \frac{\dot{\varepsilon}_\rho - \dot{\varepsilon}_\theta}{\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_n}.$$

Выражая скорость деформации $\dot{\varepsilon}_\rho = f(\dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\varepsilon}_n)$ по условию постоянства объема $\dot{\varepsilon}_\rho = -\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_n$ и подставляя это значение $\dot{\varepsilon}_\rho$ в полученное уравнение, после преобразований находим

$$\frac{\sigma_\rho}{\sigma_\theta} = \frac{2\dot{\varepsilon}_n + \dot{\varepsilon}_\theta}{\dot{\varepsilon}_n - \dot{\varepsilon}_\theta}.$$

Для конической части очага деформации напряжения σ_ρ в функции координаты ρ (без учета упрочнения) выражаются формулой (8.109); $\sigma_\theta = -\sigma_s$ (по условию пластичности). Подставляя значения σ_θ и σ_ρ в уравнение связи, после преобразований получаем

$$\dot{\varepsilon}_n = -\frac{1 + (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к)\left(1 - \frac{r_0}{\rho}\right)}{2 - (1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha_к)\left(1 - \frac{r_0}{\rho}\right)}\,\dot{\varepsilon}_\theta. \quad (8.121)$$

Из формулы (8.121) видно, что скорости деформации $\dot{\varepsilon}_n$ и $\dot{\varepsilon}_\theta$ имеют обратные знаки, а так как скорость деформации $\dot{\varepsilon}_\theta$ отрицательна, то скорость деформации $\dot{\varepsilon}_п$ положительна. Другими словами, при обжиме толщина заготовки в любой точке очага деформации увеличивается.

Если принять в первом приближении, что соотношение между величинами напряжений σ_ρ и σ_θ для любого элемента заготовки остается постоянным на протяжении всего процесса деформирования, то формулу (8.121) при замене скоростей деформации на деформации можно использовать для определения конечной толщины стенки в обжатой части очага деформации. Так как при обжиме деформации значительны, то более правильные значения будет давать формула (8.121), если в ней использовать не относительные деформации, а логарифмические

$$\delta_n = \ln \frac{s}{s_н} \text{ и } \delta_\theta = \ln \frac{\rho}{R_з}.$$

Выполняя эти замены, получаем

$$s = s_н \left(\frac{R_з}{\rho} \right)^{\frac{1+(1+\mu \operatorname{ctg} \alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{\rho}\right)}{2-(1+\mu \operatorname{ctg} \alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{\rho}\right)}}. \qquad (8.122)$$

Эта формула позволяет определить значение конечной толщины в любой точке обжатой части заготовки, отстоящей на расстоянии ρ от оси симметрии.

Конечное значение толщины стенки по краю обжатой части заготовки (при $\rho = r_0$) определяется более простой формулой

$$s = s_н \sqrt{\frac{R_з}{r_0}}. \qquad (8.123)$$

Конечная толщина стенки в обжатой части заготовки имеет наибольшее значение вблизи края заготовки и убывает по мере увеличения радиуса ρ, достигая минимального значения ($s = s_н$) при $\rho = R_з$.

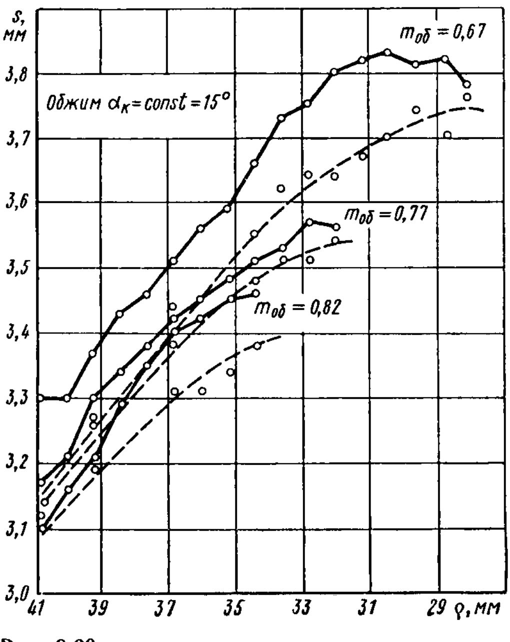


Рис. 8.20

На рис. 8.20 приведены графики изменения толщины s вдоль образующей конической, обжатой части заготовки, полученные расчетом по формуле (8.122) и в опытах. Сопоставление графиков показывает, что формула (8.122) правильно отражает характер изменения толщины заготовки при обжиме и дает вполне удовлетворительную точность расчетных значений. Некоторая разница между экспериментальными и расчетными графиками, очевидно, объясняется тем, что расчетное значение толщины определялось без учета влияния упрочнения и изгиба, которые способствуют более интенсивному изменению толщины стенок заготовки при деформировании.

Приведенные графики показывают также, что без большой погрешности можно принять, что конечная толщина в обжатой части заготовки находится в линейной зависимости от радиуса ρ.

Выражение $s = f(\rho)$ и изменения толщины ds в этом случае можно записать

$$s = s_{н}(A\rho + A_0);\; ds = s_{н} A\,d\rho. \tag{8.124}$$

Дифференциальное уравнение равновесия (8.7) для обжима в конической матрице с учетом изменения толщины заготовки в очаге деформации после использования условия пластичности имеет вид

$$\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho\left(1 + \frac{\rho\, ds}{s\, d\rho}\right) + \sigma_s(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha_к) = 0. \tag{8.125}$$

Подставляя значения s и ds из (8.124) в (8.125), после несложных преобразований находим

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho\left(\frac{1}{\rho} + \frac{A}{A\rho + A_0}\right) + \sigma_s\frac{1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha_к}{\rho} = 0. \tag{8.126}$$

Решение этого дифференциального уравнения первого порядка с использованием граничного условия при $\rho = r_0$, $\sigma_\rho = 0$ приводит к формуле

$$\sigma_\rho = -\frac{\sigma_s}{2}(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha_к)\left[1 + \frac{A}{A\rho + A_0} - \frac{r_0}{\rho}\,\frac{Ar_0 + 2A_0}{A\rho + A_0}\right]. \tag{8.127}$$

Наибольшее значение $\sigma_\rho = \sigma'_{\rho\,\max}$ получает при $\rho = R_з$ на переходе от очага деформации к недеформируемой части заготовки (без учета влияния изгиба):

$$\sigma'_{\rho\,\max} = -\frac{\sigma_s}{2}(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1 + \frac{A}{AR_з + A_0} - \frac{r_0}{R_з}\,\frac{Ar_0 - 2A_0}{AR_з + A_0}\right). \tag{8.128}$$

Используя формулы (8.122) и (8.123) для отыскания значения s на границах очага деформации, находим, что при $\rho = R_з$ $s = s_н$ и $AR_з + A_0 = 1$, а при $\rho = r_0$ $s = s_н\sqrt{\frac{R_з}{r_0}}$ и $Ar_0 + A_0 = \sqrt{\frac{R_з}{r_0}}$.

Подставляя приведенные соотношения в формулу (8.128), а также определяя из них значения A и A_0, после некоторых преобразований находим

$$\sigma'_{\rho\,\max} = -\frac{\sigma_s}{2}(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{R_з}} + \sqrt{\frac{R_з}{r_0}} - \frac{r_0}{R_з}\right). \tag{8.129}$$

Эта же формула может быть представлена в несколько ином виде:

$$\sigma'_{\rho\,\max} = -\frac{\sigma_s}{2}(1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{R_з}\right)\left(1+\sqrt{\frac{R_з}{r_0}}\right). \quad (8.129а)$$

Из формулы (8.129а) можно заметить, что множитель $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{R_з}{r_0}}\right)$ по существу является отношением средней для очага деформации толщины заготовки $s_{ср} = \frac{1}{2}\left(s_н + s_н\sqrt{\frac{R_з}{r_0}}\right)$. к ее исходной толщине $s_н$.

Таким образом, влияние изменения толщины заготовки в процессе деформирования при обжиме на величину напряжения $\sigma_{\rho\,\max}$, действующего в стенках обжимаемой заготовки, можно приближенно учесть введением в расчетные формулы, полученные без учета изменения толщины, множителя $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{R_з}{r_0}}\right)$.

Учет влияния упрочнения и изменения толщины заготовки в процессе обжима на величину $\sigma_{\rho\,\max}$ позволяет установить расчетные формулы, отражающие влияние всех основных факторов.

Например, для обжима в конической матрице без образования цилиндрического участка меньшего диаметра (см. рис. 8.19) такую расчетную формулу можно получить на основе формулы (8.120):

$$\sigma_{\rho\,\max} = -\frac{1}{2}\left[\sigma_{т0}+\frac{П}{2}\left(1-\frac{r_0}{R_з}\right)\right]\left(1+\sqrt{\frac{R_з}{r_0}}\right)\times$$

$$\times(1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha_к)\left(1-\frac{r_0}{R_з}\right)(3-2\cos\alpha_к). \quad (8.130)$$

Формула (8.130) позволяет определить величину $\sigma_{\rho\,\max}$ с учетом влияния трения, изгиба, упрочнения и увеличения толщины заготовки в процессе деформирования. Анализируя формулу (8.130), можно заметить, что напряжение $\sigma_{\rho\,\max}$ увеличивается с уменьшением отношения $\frac{r_0}{R_з}$, а также с увеличением коэффициента трения, экстраполированного предела текучести $\sigma_{т0}$ и модуля упрочнения $П$, а кроме того, зависит от угла конусности матрицы. Зависимость $\sigma_{\rho\,\max} = f(\alpha_к)$ имеет сложный характер. Действительно, с увеличением угла конусности матрицы $\alpha_к$ множитель, учитывающий влияние трения $(1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha_к)$, уменьшается, в то время как множитель, учитывающий влияние изгиба $(3-2\cos\alpha_к)$, увеличивается.

На рис. 8.21 показаны типовые графики зависимости $P_{обж} = f(\alpha_к)$ для обжима в конической матрице[1]. Из графиков видно, что существуют оптимальные значения углов конусности матрицы, при которых при прочих равных условиях $\left(\frac{r_0}{R_з};\ \mu;\ \sigma_{т0}\ и\ П\right)$

---

[1] Экспериментальные графики (штриховые) построены по данным Ю. А. Аверкиева.

напряжение $\sigma_{\rho\,max}$ имеет минимальную величину. Из тех же графиков можно заметить, что значение оптимального угла конусности матрицы увеличивается с увеличением коэффициента трения.

Аналогичным образом введением соответствующих множителей в полученные ранее расчетные формулы можно учесть влияние упрочнения и увеличения толщины заготовки в процессе деформирования при обжиме в матрице с криволинейной образующей.

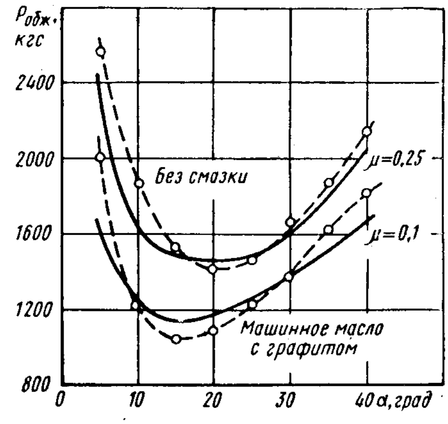


Рис. 8.21

Рассмотрим еще некоторые задачи, связанные с анализом операции обжима. Интересное решение может быть получено при допущении о том, что изменение толщины при обжиме может быть принято аналогичным изменению толщины в случае линейной схемы сжатия (допущение, приемлемое при обжиме с малыми обжатиями или для краевой части очага деформации, в котором напряжения σ_ρ сравнительно невелики).

В этом случае из формулы (8.122) следует, что $s = s_н \sqrt{\frac{R_з}{\rho}}$, а $ds = -\frac{s_н \sqrt{R_з}}{2\rho\sqrt{\rho}} d\rho$. Подставим найденные значения s и ds в уравнение (8.125), которое при этом преобразуется к виду

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{1}{2}\sigma_\rho + \sigma_s(1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha_к) = 0.$$

Интегрирование этого уравнения с использованием граничного условия при $\rho = r_0$, $\sigma_\rho = 0$ приводит к формуле

$$\sigma_\rho = -2\sigma_s(1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha_к)\left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{\rho}}\right).$$

Сопоставление полученной формулы с формулой (8.109) показывает, что изменение толщины заготовки при обжиме способствует увеличению абсолютных значений меридионального сжимающего напряжения.

В действительности увеличение толщины заготовки при обжиме происходит более интенсивно, чем при допущении о равенстве меридиональной деформации и деформации изменения толщины (линейная схема), особенно в участках очага, где σ_ρ сравнительно велико.

8.6. ВЫТЯЖКА С УТОНЕНИЕМ СТЕНКИ

Вытяжка с утонением стенки характеризуется тем, что зазор между пуансоном и матрицей берут заведомо меньше толщины стенки заготовки, которая в процессе вытяжки получает преднамеренное утонение. Обычно вытяжка с утонением стенки является последующим переходом вытяжки, когда заготовкой является полученная в предыдущих переходах полая тонкостенная цилиндрическая заготовка (стаканчик), причем внутренний диаметр заготовки в этой операции изменяется обычно незначительно.

Особенностью этой операции (рис. 8.22) является наличие значительных нормальных напряжений, действующих на контактных поверхностях, а также разное направление сил трения, действующих по наружной и внутренней поверхностям заготовки. Различие в направлении сил трения следует из того, что при вытяжке заготовка протягивается через матрицу, а следовательно, силы трения по наружной поверхности ориентированы противоположно направлению вытяжки; в то же время за счет утонения заготовка удлиняется, и в очаге деформации заготовка скользит по пуансону противоположно вытяжке, а следовательно, силы трения по внутренней поверхности заготовки ориентированы по направлению вытяжки.

При вытяжке с утонением стенки очаг деформации обычно мал по сравнению с размерами заготовки и на протяжении почти всего процесса деформирования ограничен в осевом направлении с обеих сторон недеформируемыми участками стенок заготовки.

Вытяжка с утонением стенки происходит в условиях объемной схемы деформации, причем все три главные деформации в общем случае не равны нулю. Однако без большой погрешности можно принять, что вытяжка с утонением стенки происходит в условиях плоского деформированного состояния.

При вытяжке с утонением стенки не происходит изменения внутреннего диаметра заготовки и наибольшее изменение диаметральных размеров претерпевает ее наружная поверхность.

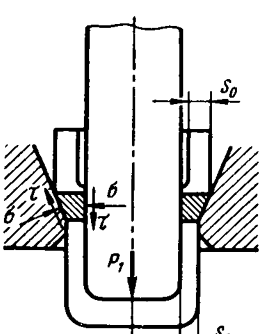


Рис. 8.22

Величина относительной тангенциальной деформации наружной поверхности может быть определена как

$$\varepsilon_d = \frac{2\,\Delta s}{d_1},$$

где $\Delta s = s_0 - s_1$ — уменьшение толщины при вытяжке, а d_1 — исходный наружный диаметр заготовки. В обычных условиях вытяжки с утонением стенки $\varepsilon_d < 0{,}1$, а средняя (по толщине) деформация изменения диаметра $\varepsilon_{d\,\text{ср}} < 0{,}05$. Это обстоятельство и позволяет в первом приближении считать деформированное состояние плоским. Экстремальными линейными деформациями являются деформации уменьшения толщины и увеличения длины заготовки.

Исходя из схемы внешних сил, приложенных к очагу деформации, можно заключить, что схема напряженного состояния разноименна. Действительно, сила P_1 (см. рис. 8.22), приложенная к донной части заготовки, вызывает появление растягивающих напряжений, действующих вдоль образующей заготовки, как в ее протянутой части, так и в очаге деформации. Эти растягивающие напряжения максимальны на границе между очагом деформации и стенкой заготовки, получившей заданное утонение, и убывают до нуля на входе в очаг деформации. В то же время нормальные напряжения на контактных поверхностях вызывают сжимающие напряжения в направлениях, перпендикулярных к контактным поверхностям.

Так как вытяжка с утонением стенки ведется обычно в условиях хорошей смазки ($\mu < 0{,}2$) и нормальные напряжения на контактных поверхностях не превышают напряжения текучести, то касательные напряжения на контактных поверхностях должны быть значительно меньше τ_s. В этих условиях нетрудно показать, что нормальное напряжение на контактной поверхности незначительно отличается по величине от главного, а главная ось отклонена от нормали к контактной поверхности на угол, не превышающий 6°. Разные направления сил трения на контактных поверхностях пуансона и матрицы позволяют принять, что касательные напряжения вдоль дуги радиуса ρ почти не изменяются (рис. 8.23).

С учетом высказанных соображений можно представить предположительное поле напряжений в очаге деформации и возможные его изменения в зависимости от условий трения на контактных поверхностях при вытяжке в конической матрице. При отсутствии трения на контактных поверхностях главные напряжения перпендикулярны контактным поверхностям, траектории *1* главных напряжений в этом случае будут представлять собой сетку, составленную из радиусов и дуг окружностей, проведенных из точки пересечения образующей конуса матрицы и образующей пуансона (рис. 8.23). Линии *2* скольжения в этом случае будут представлять собой логарифмические спирали, пересекающие радиусы и дуги окружностей под углом 45° (линии *2* на рис. 8.23).

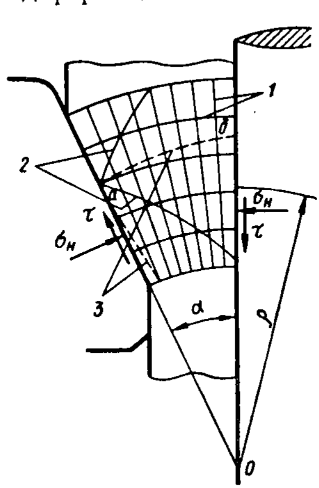


Рис. 8.23

В реальных условиях деформирования, когда $\tau = \mu\sigma_н$, т. е. при наличии скольжения поверхности заготовки по поверхностям рабочего инструмента и при малых значениях коэффициента трения, траектории главных напряжений незначительно отличаются от линий, соответствующих вытяжке без трения. На рис. 8.23 (линия *3*) намечена одна пара траекторий главных напряжений при $\mu = 0,1$. Построение это основывалось на том соображении, что угол пересечения поперечной (*а—б*) траектории главных напряжений с текущими радиусами является постоянной величиной для данной траектории главных напряжений (τ постоянно по углу). Траектории главных напряжений (поперечные) в этом случае являются логарифмическими спиралями, причем угол подъема этих спиралей различен для разных участков очага деформации, соответствующих той или иной точке в зависимости от значения μ и величины нормального напряжения.

Приведенные построения показывают, что при вытяжке с с утонением очаг деформации приближенно можно ограничить дугами окружностей, проведенными через крайние точки контакта заготовки с коническим участком матрицы в зоне утонения.

Рассмотрение условий деформирования при вытяжке с утонением стенки показывает, что этот процесс весьма сложен и точное решение задачи по отысканию поля напряжений затруднительно. Для приближенного решения задачи можно использовать различные методы, рассмотренные ранее.

Анализ полей напряжений при вытяжке с утонением был выполнен методом решения приближенных уравнений равновесия и условия пластичности [99], методом характеристик [121], методом баланса работ [78]. Решения были получены при значительной схематизации реальных условий деформирования с учетом различного числа факторов, влияющих на процесс деформирования.

Рассматривая возможности различных методов применительно к вытяжке с утонением стенки, можно прийти к заключению, что наиболее подходящим является метод баланса работ. Основания к такому суждению следующие. При вытяжке с утонением стенки смещения элементов заготовки на противоположных контактных поверхностях (по матрице и по пуансону) существенно различны. Влияние различия смещений на силовые условия деформирования в методе баланса работ учитывается через работы сил трения. В то же время ни метод характеристик, ни инженерный метод, которые основаны на уравнениях статистического равновесия, не могут учесть влияния этого различия смещений.

Проведем анализ вытяжки с утонением стенки, основываясь на методе баланса работ. Особый интерес представляет отыскание напряжений σ_z, действующих в стенках протянутой части заготовки на этапе установившегося процесса деформирования, когда размеры очага деформации остаются постоянными.

Для приближенного определения величины этих напряжений используем уравнение равенства работ внешних и внутренних сил для всего объема очага деформации. Заметим, что при решении задачи по отысканию поля напряжений в очаге деформации уравнение равенства работ необходимо относить к бесконечно малым элементам очага деформации [78].

Схема очага и принятые обозначения приведены на рис. 8.24. Для решения целесообразно использовать полярную систему координат.

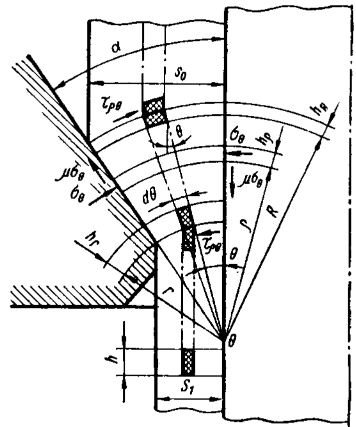


Рис. 8.24

Решения по методу баланса работ применительно к вытяжке с утонением, сходные с изложенными ниже, даны в работе [70], а для ряда других операций с локальным очагом деформации в работе [122].

Приближенное определение величины σ_z по методу баланса работ основано на равенстве

$$A_в = A_д,$$

где $A_д$ — работа внутренних сил или же работа деформации; $A_в$ — работа внешних сил, включающая работу активных сил, вызывающих пластическую деформацию (в данном случае силы, приложенной к стенкам протянутой части заготовки), и работу сил трения, которая противоположна по знаку работе активных сил

$$A_в = A_а - A_т.$$

Так как очаг деформации имеет две контактные поверхности (по пуансону и по матрице), работу сил трения целесообразно разделить на две составляющие

$$A_т = A_{тм} + A_{тп},$$

где $A_{тм}$ — работа сил трения на поверхности контакта с матрицей; $A_{тп}$ — работа сил трения на поверхности контакта с пуансоном.

Работу деформации также можно разделить на составляющие

$$A_д = A_{\tau R} + A_{\tau r} + A_\sigma,$$

где $A_{\tau R}$ — работа деформации на верхней границе очага деформации; $A_{\tau r}$ — работа деформации на нижней границе очага деформации; A_σ — работа деформации в самом очаге деформации.

Основанием к такому разделению является разный характер деформирования элементов заготовки в самом очаге деформации и вблизи его границ. В очаге деформации, как было показано ранее, касательные напряжения $\tau_{\rho\theta}$ невелики, напряжения σ_ρ и σ_θ незначительно отличаются от главных напряжений, а смещение элементов происходит по траекториям, с достаточной точностью совпадающим с направлением радиусов. В то же время на верхней и нижней границах очага деформации происходит значительное изменение траекторий движения элементарных частиц, и это изменение должно соответствовать возникновению значительных сдвиговых деформаций $\gamma_{\rho\theta} = \gamma$. Таким образом, вблизи границ очага деформации сдвиговая деформация преобладает над линейными деформациями ε_ρ и ε_θ, а следовательно, и касательные напряжения $\tau_{\rho\theta}$ здесь значительные.

С некоторым преувеличением можно принять, что на границах очага деформации с недеформируемыми частями заготовки касательное напряжение по гипотезе максимальных касательных напряжений $\tau_{\rho\theta} = \tau_s = \frac{\sigma_s}{2}$.

Из приведенных соотношений можно получить выражение искомой работы активных сил через составляющие работы внешних и внутренних сил

$$A_{\text{а}} = A_{\tau R} + A_{\tau r} + A_{\sigma} + A_{\text{тм}} + A_{\text{тп}}. \tag{8.131}$$

Найдем выражения этих составляющих через элементарное перемещение пуансона относительно матрицы h. Из условия постоянства объема величина соответствующего перемещения материальных точек в радиальном направлении на нижней границе очага деформации определится соотношением

$$s_1 h = r\alpha h_r, \tag{а}$$

где s_1 — толщина стенки после утонения.

Из очевидного геометрического соотношения (см. рис. 8.24) имеем $s_1 = r \sin\alpha$. Подставим это значение s_1 в ранее полученное соотношение (а):

$$h = \frac{\alpha}{\sin\alpha} h_r \tag{8.132}$$

(при $\alpha < 20°$ можно принять, что $\alpha \approx \sin\alpha$, и тогда $h \approx h_r$).

Радиальное смещение любого элемента h_ρ, выраженное через h_r, определится также из условия постоянства объема (пренебрегая сдвигами в очаге деформации):

$$h_\rho = \frac{r}{\rho} h_r. \tag{8.133}$$

Из формулы (8.133) радиальное смещение на наружной границе очага деформации (при $\rho = R$) имеет величину

$$h_R = \frac{r}{R} h_r. \tag{8.134}$$

Полученные выражения (8.132) — (8.134) для смещения точек в очаге деформации позволяют определить отдельные составляющие работ внешних и внутренних сил. Так как все элементарные перемещения соответствуют одному и тому же промежутку времени, то вместо уравнения баланса работ можно использовать уравнение равенства мощностей деформаций, в котором вместо деформаций следует подставлять скорости деформации [102].

Уравнение равенства мощностей имеет вид:

$$N_{\text{а}} = N_\sigma + N_{\tau R} + N_{\tau r} + N_{\text{тм}} + N_{\text{тп}}. \qquad (8.135)$$

Как известно, работа деформации определяется уравнением

$$A_\sigma = \iiint\limits_V \sigma_i \, d\varepsilon_i \, dV. \qquad (8.136)$$

Применительно к очагу деформации при вытяжке с утонением стенки в случае деформирования без упрочнения $\sigma_i = \sigma_s$; $d\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} d\varepsilon_\theta$ (для плоской деформации $d\varepsilon_\rho = -d\varepsilon_\theta$; $d\gamma_{\rho\theta}$, как отмечено ранее, близко к нулю). Учитывая малую разницу между $d\varepsilon_i$ и $d\varepsilon_\theta$, а также приближенность данного решения, примем, что $d\varepsilon_i = d\varepsilon_\theta$. В то же время $d\varepsilon_\theta = \frac{h_\rho}{\rho} = \frac{r}{\rho^2} h_r$; $dV = \rho\alpha d\rho$.

Подставляя значения σ_i, $d\varepsilon_i$, dV в формулу (8.136) и заменяя пределы интегрирования ($\alpha = \text{const}$; размер очага деформации в направлении, перпендикулярном к чертежу, равен единице), получаем

$$A_\sigma = \sigma_s \alpha r h_r \int\limits_r^R \frac{d\rho}{\rho} = \sigma_s \alpha r h_r \ln \frac{R}{r}. \qquad (8.137)$$

Перейдем к определению составляющих работы, вызванных действием касательных напряжений на внешней и внутренней границах очага деформации.

Элементарная сила, вызванная действием касательных напряжений на границах очага деформации:

для наружной границы очага деформации ($\rho = R$)

$$\tau_s R \, d\theta = \frac{1}{2} \sigma_s R \, d\theta;$$

для внутренней границы очага деформации

$$\tau_s r \, d\theta = \frac{1}{2} \sigma_s r \, d\theta.$$

Путь, на котором работает эта сила (рис. 8.24):

для наружной границы

$$h_R \operatorname{tg} \theta = h_r \frac{r}{R} \operatorname{tg} \theta;$$

для внутренней границы

$h_r \operatorname{tg} \theta$.

С учетом изложенного элементарная работа касательных сил на наружной границе очага деформации

$$A_{\tau R} = \int_0^\alpha \frac{1}{2} \sigma_s h_r \frac{r}{R} \operatorname{tg} \theta \cdot R \, d\theta = -\frac{\sigma_s}{2} r h_r \left| \ln \cos \theta \right|_0^\alpha =$$

$$= -\frac{\sigma_s}{2} r h_r \ln \cos \alpha = -\frac{\sigma_s}{2} r h_r \ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \approx$$

$$\approx \sigma_s r h_r \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (8.138)$$

Замена логарифмической функции первым членом разложения ее в ряд по приведенной схеме не может привести к значительным погрешностям, так как при вытяжке с утонением обычно угол $\alpha < 20°$.

Проводя интегрирование на нижней границе очага деформации, а также заменяя логарифмическую функцию первым членом разложения ее в ряд, получаем

$$A_{\tau r} = \int_0^\alpha \frac{\sigma_s}{2} r h_r \operatorname{tg} \theta \, d\theta \approx \sigma_s r h_r \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (8.139)$$

Как видно из формул (8.138) и (8.139), при принятых допущениях работы сдвига на границах очага деформации одинаковы.

Определим далее составляющие работы, вызванные действием сил трения на контактных поверхностях.

Нормальные напряжения на контактных поверхностях приближенно определим без учета влияния касательных напряжений на контактных и граничных поверхностях на поле напряжений в очаге деформаций. В этом случае σ_ρ и σ_θ являются главными нормальными напряжениями и интегрирования уравнения равновесия $\left(\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta = 0\right)$ с условием пластичности $(\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s)$ при граничном условии, когда $\rho = R$, $\sigma_\rho = 0$, дает

$$\sigma_\rho = \sigma_s \ln \frac{R}{\rho}; \quad \sigma_\theta = -\sigma_s \left(1 - \ln \frac{R}{\rho}\right).$$

В этом случае элементарная сила трения на контактных поверхностях определится выражением

$$\mu \sigma_\theta \, d\rho = \mu \sigma_s \left(1 - \ln \frac{R}{\rho}\right) d\rho. \qquad (8.140)$$

Знак напряжения σ_θ учитывать не следует, так как в данном случае это напряжение рассматривается как внешнее контактное напряжение, а знак сил трения определяется направлением смещения элементов заготовки относительно поверхности инструмента.

Силы трения являются реактивными, что учтено знаком в в уравнении (8.135): силы трения положительны, если они затрудняют деформирование, и отрицательны, если они способствуют деформированию, уменьшают активную силу.

При перемещениях пуансона на h элементы заготовки смещаются по поверхности матрицы в направлении вытяжки на величину $h_\rho = \frac{r}{\rho} h_r$ и силы трения ориентированы противоположно направлению вытяжки. В этих условиях элементарная работа сил трения на конической поверхности матрицы определится как

$$A_{\text{тм}} = \int_r^R \mu\sigma_s \left(1 - \ln\frac{R}{\rho}\right) \frac{r}{\rho} h_r \, d\rho = \mu\sigma_s r h_r \int_r^R \left(1 - \ln\frac{R}{\rho}\right) \frac{d\rho}{\rho} =$$
$$= \mu\sigma_s r h_r \left[(1 - \ln R) \ln\frac{R}{r} + \frac{1}{2} \ln\frac{R}{r} \ln Rr\right] =$$
$$= \mu\sigma_s r h_r \left(1 - \frac{1}{2} \ln\frac{R}{r}\right) \ln\frac{R}{r}. \qquad (8.141)$$

Определим работу сил трения по пуансону. Элементарная сила трения, как и на поверхности матрицы, определяется по выражению (8.140), однако выражение для элементарного перемещения должно быть иным.

При перемещении пуансона относительно матрицы на h элементы заготовки в очаге деформации перемещаются в радиальных направлениях на h_ρ. Такие же смещения в радиальном направлении (которое в данном случае совпадает с осевым) получают элементы заготовки, контактирующие в очаге деформации с цилиндрической поверхностью пуансона. Одновременно пуансон как жесткое тело получает смещение в осевом направлении на h. Поэтому величина относительного смещения элементов заготовки по пуансону может быть определена как разность между смещениями элементов заготовки в осевом направлении и смещением пуансона в том же направлении ($h \approx h_r$)

$$h_{\rho\text{п}} = h_\rho - h = \left(\frac{r}{\rho} - 1\right) h_r. \qquad (8.142)$$

Элементарная работа сил трения на контактной поверхности по пуансону в этом случае

$$A_{\text{тп}} = \int_r^R \mu\sigma_\theta h_{\rho\text{п}} \, d\rho = \mu\sigma_s h_r \left[\int_r^R \left(1 - \ln\frac{R}{\rho}\right) \frac{r}{\rho} \, d\rho - \right.$$
$$\left. - \int_r^R \left(1 - \ln\frac{R}{\rho}\right) d\rho\right].$$

Первый интеграл, находящийся в квадратных скобках, аналогичен интегралу в выражении для работы сил трения по матрице, решение которого получено уравнением (8.141), тогда

$$A_{\text{тп}} = \mu\sigma_s h_r \left[r\left(1 - \frac{1}{2}\ln\frac{R}{r}\right)\ln\frac{R}{r} - |(1 - \ln R)\rho + \right.$$
$$\left. + \rho(\ln\rho - 1)\Big|_r^R \right] = -\frac{1}{2}\mu\sigma_s r h_r \left(\ln\frac{R}{r}\right)^2. \qquad (8.143)$$

Как видно из формулы (8.143), работа сил трения по пуансону имеет знак, обратный знаку работы сил трения по матрице. Это указывает на то, что силы трения по пуансону являются активными, способствуют деформированию, уменьшают напряжения в стенках протянутой части заготовки.

Таким образом, найдены все составляющие работы и их можно подставить в уравнение (8.131). После подстановки этих составляющих и проведения некоторых упрощений получаем

$$A_{\text{а}} = \sigma_s r h_r \left[\alpha\ln\frac{R}{r} + 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \mu\left(1 - \ln\frac{R}{r}\right)\ln\frac{R}{r}\right]. \qquad (8.144)$$

Обозначим осевое напряжение, действующее в стенках протянутой части заготовки, σ_z, тогда элементарная работа активных сил, созданных напряжениями σ_z на перемещении пуансона h,

$$A_{\text{а}} = \sigma_z r \sin\alpha \frac{\alpha}{\sin\alpha} h_r = \sigma_z r\alpha h_r. \qquad (8.145)$$

Подставляя значение $A_{\text{а}}$ из уравнения (8.145) в уравнение (8.144), после несложных преобразований находим

$$\sigma_z = \sigma_s\left[\ln\frac{R}{r} + 2\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha}\left(1 - \ln\frac{R}{r}\right)\ln\frac{R}{r}\right]. \qquad (8.146)$$

Некоторое неудобство формулы (8.146) заключается в том, что в нее входят угол α и его тригонометрические функции. Так как при вытяжке с утонением угол α невелик, то можно произвести замену $\alpha \approx \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \approx 2\sin\frac{\alpha}{2}$. Подставив это выражение в формулу (8.146), получим

$$\sigma_z = \sigma_s\left[\ln\frac{R}{r} + \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{\mu}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(1 - \ln\frac{R}{r}\right)\ln\frac{R}{r}\right]. \qquad (8.147)$$

Почти с той же погрешностью в формуле (8.147) можно произвести и такую замену: $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$. Тогда формула (8.147) примет вид

$$\sigma_z = \sigma_s\left[\ln\frac{R}{r} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\mu}{\alpha}\left(1 - \ln\frac{R}{r}\right)\ln\frac{R}{r}\right]. \qquad (8.148)$$

Отношение радиусов равно отношению толщин

$$\frac{R}{r}=\frac{s_0}{s_1},$$

где s_0 и s_1 — соответственно исходная и конечная толщина стенки заготовки.

Подставив вместо отношения радиусов отношение толщин в формулу (8.148), получим

$$\sigma_z=\sigma_s\left[\ln\frac{s_0}{s_1}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\mu}{\alpha}\left(1-\ln\frac{s_0}{s_1}\right)\ln\frac{s_0}{s_1}\right]. \tag{8.149}$$

Рассматривая формулу (8.147) и 8.149), можно заметить, что с увеличением угла α отдельные составляющие σ_z увеличиваются, а другие уменьшаются. Можно полагать, что при некоторых значениях угла α напряжение σ_z будет минимальным при прочих равных условиях. Отыскать оптимальные значения $\alpha_{опт}$ можно, приравняв $\frac{d\sigma_z}{d\alpha}=0$. Дифференцируя формулу (8.149), после преобразований получим

$$\alpha_{опт}=\sqrt{2\mu\left(1-\ln\frac{s_0}{s_1}\right)\ln\frac{s_0}{s_1}}. \tag{8.150}$$

Из формулы (8.150) видно, что величина оптимального угла конусности матриц при вытяжке с утонением стенки увеличивается с увеличением коэффициента трения и с увеличением отношения толщин до $\frac{s_0}{s_1}\approx 1{,}65$. Дальнейшее увеличение отношения $\frac{s_0}{s_1}$ приводит к некоторому уменьшению величины оптимального угла конусности. Заметим, что так как анализ процесса деформирования при вытяжке с утонением был проведен в предположении наличия плоскодеформированного состояния, то формула (8.150) не вскрывает зависимости $\alpha_{опт}$ от отношения толщины s_0 стенки заготовки к ее диаметру d. Анализ, проведенный в работе [99] на основе решения приближенных уравнений равновесия и пластичности, показал, что оптимальный угол конусности матрицы увеличивается с увеличением отношения $\frac{s_0}{d}$.

Изложенный анализ был проведен без учета влияния упрочнения для случая, когда коэффициенты трения по пуансону и матрице равны между собой. Решения с учетом влияния этих факторов также даны в работе [99] и там же рассмотрен вопрос определения усилия вытяжки, которое нельзя находить как произведение σ_z на площадь поперечного сечения протянутой части заготовки.

8.7. ВЫРУБКА И ПРОБИВКА

Вырубка и пробивка, являясь разделительными операциями, завершаются разрушением металла в очаге деформации.

Процесс же пластической деформации заготовки, происходящий в начальных стадиях деформирования, является сопутствующим, обычно нежелательным, но неизбежным для пластичных материалов. Разделение заготовки в операциях вырубки и пробивки осуществляется путем относительного смещения смежных частей заготовки в направлении толщины заготовки. Чтобы локализировать пластическую деформацию вблизи поверхности раздела, кромки пуансона и матрицы делают острыми, а зазор между пуансоном и матрицей небольшим (значительно меньшим толщины заготовки).

Распределение напряжений и деформаций в очаге деформации характеризуется значительной неравномерностью как в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности, так и вдоль поверхности, что делает задачу трудной, и замкнутые решения могут быть получены лишь при значительных допущениях. Характер допущений и принимаемая модель деформирования должны определяться в связи с задачами исследования. Так, например, отыскание поля напряжений в очаге деформации может быть осуществлено решением плоской задачи с привлечением метода характеристик при принятых условиях на контуре [20,91].

Ставя же, например, ограниченную задачу обоснования формы графика изменения условия по пути пуансона, можно пытаться искать решение при более грубых допущениях.

График изменения усилия деформирования по пути пуансона при вырубке и пробивке имеет вид, показанный на рис. 8.25, и характеризуется сравнительно плавным увеличением усилия до максимального значения, после которого для малопластичных материалов следует резкое снижение усилия, а для пластичных материалов после P_{max} наблюдается небольшой участок плавного снижения усилия с последующим его резким падением. Резкое снижение усилия соответствует разрушению заготовки, а изменение усилия до этой точке обусловлено сопротивлением деформированию в области пластических деформаций.

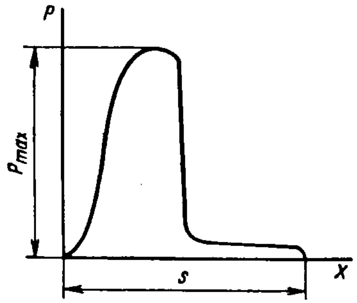


Рис. 8.25

Выясним, чем может объясняться плавное увеличение усилия вырубки до P_{max}, в то время как от начала деформирования площадь сечения, активно сопоставляющегося смещению одной части заготовки относительно другой, монотонно уменьшается.

Можно предположить, что причиной, определяющей указанный характер изменения усилия по пути пуансона, является упрочнение. Так как при вырубке происходит относительное смещение частей заготовки в направлении, перпендикулярном к поверхности заготовки при относительно малой ширине очага деформации, то можно предположить, что основной деформацией является сдвиговая деформация и что на поверхности, проходящей через режущие кромки пуансона и матрицы, действуют максимальные касательные напряжения, равные τ_s в условиях пластических деформаций.

Учитывая малый угол наклона образующих этой поверхности к оси пуансона, можно записать

$$P = L(s - x)\tau_s, \tag{8.151}$$

где L — длина линии разделения; s — толщина заготовки; x — величина внедрения пуансона в заготовку (рабочий ход пуансона).

Если принять для плоской деформации согласно уравнению (5.18б), что $\tau_s \approx 0{,}58\sigma_s$, а величина напряжения текучести σ_s с учетом упрочнения определяется по формуле (1.19), то выражение (8.151) получит вид

$$P = 0{,}58L(s - x)\frac{\sigma_в}{1 - \psi_ш}\left(\frac{\psi}{\psi_ш}\right)^{\frac{\psi_ш}{1-\psi_ш}}. \tag{8.152}$$

Приняв затем, что уменьшение площади поперечного сечения при линейном растяжении эквивалентно по упрочняющему эффекту уменьшению площади сдвига при вырубке, имеем

$$\psi = \frac{s - (s - x)}{s} = \frac{x}{s}.$$

Формулу (8.152) можем преобразовать

$$P = \frac{0{,}58L(s - x)\sigma_в}{1 - \psi_ш}\left(\frac{x}{s\psi_ш}\right)^{\frac{\psi_ш}{1-\psi_ш}}. \tag{8.153}$$

Из формулы (8.153) видно, что $P = 0$ при $x = s$ (в конце деформирования) и при $x = 0$ (в начале деформирования). Приравняв нулю первую производную $\frac{dP}{dx} = 0$, можно найти, что P_{max} соответствует $\frac{x}{s} = \psi_ш$, а величина $P_{max} = 0{,}58sL\sigma_в$ (несколько меньше фактического). Проведенный элементарный анализ показал, что явление упрочнения способствует возрастанию усилия вырубки в начальных стадиях деформирования, причем рост интенсивности упрочнения (увеличение $\psi_ш$) способствует увеличению пути пуансона, соответствующего появлению P_{max}. Однако упрочнение не является единственным фактором, определяющим появление максимума на графике измене-

Рис. 8.26

ния усилия по пути пуансона. Даже в условиях горячего деформирования этот график характеризуется плавным увеличением усилия до максимального значения с последующим постепенным уменьшением его почти до нуля. Можно полагать, что такой характер графика объясняется тем, что по мере внедрения пуансона в заготовку главные оси в очаге деформации поворачиваются, а не остаются постоянными, как было принято ранее. Если принять, что главные оси совпадают по направлению с касательными и нормалями к волокнам металла, видимым на макрошлифе, то можно анализировать процесс деформирования несколько иначе.

Возможность такого допущения наглядно подтверждается макрошлифом (рис. 8.26): расслоившаяся вследствие повышенного содержания неметаллических включений на отдельные слои заготовка деформируется так, что длина отдельных слоев по мере внедрения пуансона увеличивается, а ширина трещин увеличивается вследствие утонения слоев при растяжении.

Далее примем для получения приближенных качественных зависимостей, что это нормальное напряжение постоянно по толщине заготовки и равно напряжению текучести (линейное растяжение). Это допущение весьма грубо, так как в действительности схема напряженного состояния при вырубке объемна, а величины напряжений переменны по толщине. При этих допущениях, принимая, что угол наклона касательной к волокнам α также постоянен по высоте и определяется соотношением

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}},$$

где x — рабочий ход пуансона; Δ — ширина очага деформации, получим, что усилие деформирования

$$P = \sigma_s L\,(s - x)\sin\alpha = \frac{\sigma_s L\,(s - x)\,x}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}}. \qquad (8.154)$$

Из формулы (8.154) видно, что $P = 0$ при $x = 0$ и $x = s$, а следовательно, усилие имеет максимальное значение при некотором значении рабочего хода пуансона.

Таким образом, наличие максимума на графике усилие — путь (пуансона) может объясняться не только упрочнением, но и поворотом главных осей в процессе деформирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аверкиев Ю. А.** Анализ обжима полых цилиндрических заготовок.— В кн.: Машины и технология обработки металлов давлением, вып. 42. М., Машгиз, 1955, с. 21—37 (МВТУ).

2. **Алексеев Ю. Н.** Введение в теорию обработки металлов давлением, прокаткой и резанием. Харьков, изд. ХГУ, 1969. 106 с.

3. **Безухов Н. И.** Теория упругости, пластичности и ползучести. М., «Высшая школа», 1961. 536 с.

4. **Березкин В. Г.** Формоизменение металлов при обработке давлением. М., «Машиностроение», 1973. 154 с.

5. **Булат С. И., Тихонов А. С., Дубровин А. К.** Деформируемость структуры неоднородных сталей. М., «Металлургия», 1975. 352 с.

6. **Бочвар А. А.** О разных механизмах пластичности в металлических сплавах. — «Изв. АН СССР. ОТН», 1948, № 5, 649—653.

7. **Бочвар А. А.** Металловедение. М., Металлургиздат, 1956. 495 с.

8. **Головин А. Ф.** Прокатка, ч. 1, М., ОНТИ, 1933. 222 с.

9. **Горбунов М. Н., Катков В. Ф., Попов О. В.** Глубокая вытяжка листовых металлов с применением подогрева. — «Труды МАТИ», 1956, вып. 29, с. 5—27.

10. **Горбунов М. Н.** Технология заготовительных штамповочных работ в производстве летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1970. 351 с.

11. **Гоффман О. и Закс Г.** Введение в теорию пластичности. М., Машгиз, 1957. 280 с.

12. **Губкин С. И.** Теория обработки металлов давлением. М., Металлургиздат, 1947. 532 с.

13. **Губкин С. И.** Пластическая деформация металлов. В 3-х т. М., Металлургиздат, 1960, т. I, 376 с., т. II, 416 с., т. III, 306 с.

14. **Губкин С. И., Мицкевич Н. И.** Распределение контактных напряжений при свободном осаживании металла. — В кн.: Сб. научных трудов. Вып. 2. Минск, Изд-во АН БССР, 1955, с. 37—53. (АН БССР, ФТИ).

15. **Губкин С. И., Юшков А. В. и Добровольский С. И.** Выяснение причин расслоения металла в плоскости облойного мостика при штамповке. — В кн.: Сб. научных трудов. Вып. 2. Минск, Изд-во АН БССР, 1955, с. 16—22 (АН БССР, ФТИ).

16. **Губкин С. И., Добровольский С. И., Бойко Б. Б.** Фотопластичность. Минск, Изд-во АН БССР, 1957. 165 с.

17. **Губкин С. И., Звороно Б. П., Катков В. Ф., Норицын И. А. Попов Е. А., Смирнов-Аляев Г. А., Томленов А. Д., Унксов Е. П., Шофман Л. А.** Основы теории обработки металлов давлением. Под ред. М. В. Сторожева. М., Машгиз, 1959, 540 с.

18. **Губкин С. И.** Деформируемость металлов. М., Металлургиздат, 1953. 199 с.

19. **Гун Г. Я., Полухин П. И., Полухин В. П., Прудковский Б. Л.** Пластическое формоизменение металлов. М., Металлургия, 1968. 416 с.

20. **Джонсон В., Кудо Х.** Механика процесса выдавливания металлов. М., «Металлургия», 1965. 174 с.

21. **Довнар С. А.** О моделировании горячего процесса пластической деформации металлического тела. — В кн.: Сб. научных трудов. Вып. 4. Минск, Изд-во АН БССР, 1958, с. 124—132. (АН БССР, ФТИ).

22. **Дзугутов М. Я.** Напряжения и деформации при обработке металлов давлением. М., «Металлургия», 1974, 280 с.

23. **Журавлев А. З.** Основы теории штамповки в закрытых штампах. М., «Машиностроение», 1973. 222 с.

24. **Закс Г.** Практическое металловедение. М., ОНТИ, 1938. 244 с.

25. **Зайков М. А.** Влияние скорости деформации на прочность углеродистой стали при высоких температурах. — «ЖТФ», 1949, т. 19, вып. 6, с. 684—695.

26. **Зайков М. А., Перетятько В. Н.** Критерий пластичности при обработке металлов давлением. — «Известия вузов. Черная металлургия», 1959, № 8, с. 75—86.

27. **Зейтц Ф.** Физика металлов. М., Гостехиздат, 1947. 364 с.
28. **Зибель Э.** Обработка металлов в пластическом состоянии. М.—Л., ОНТИ, 1934. 194 с.
29. **Золотухин Н. М.** О подобии процессов горячего деформирования металлов. — «Кузнечно-штамповочное производство», 1960, № 3, с. 1—3.
30. **Золотухин Н. М.** Моделирование процессов горячего деформирования металлов. — «Вестник машиностроения», 1958, № 9, с. 36—39.
31. **Иванушкин П. В.** Уширение при вытяжке. — «Вестник машиностроения», 1950, № 7, с. 44—45.
32. **Ильюшин А. А.** Моделирование горячих и скоростных процессов обработки металлов давлением. — В кн.: Прогрессивная технология кузнечно-штамповочного производства. М., Машгиз, 1952, с. 31—47.
33. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Ч. I. М.—Л., ГТИ, 1948. 346 с.
34. **Качанов А. М.** Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969. 420 с.
35. **Кишкин С. Т.** Изв. АН СССР. ОТН, 1948, № 1, с. 87—96.
36. **Конобеевский С. Т.** К теории фазовых превращений. — «ЖЭТФ», 1943, т. 13, вып. 6, с. 185—214.
37. **Конторова Т. А. и Френкель Я. И.** К теории пластической деформации и двойникования. — «ЖЭТФ», 1938, т. 8, вып. 1, с. 89—91.
38. **Корнеев Н. И.** Пластическая деформация металлов и термический режим обработки давлением сталей и сплавов. М., Машгиз, 1949. 52 с.
39. **Корнеев Н. И , Скугарев И. Г.** Основы физико-химической теории обработки металлов давлением. Термомеханические факторы обработки металлов и сплавов. М., Машгиз, 1960. 316 с.
40. **Коттрелл А. Х.** Дислокация и пластическое течение в кристаллах. М., Металлургиздат, 1958. 267 с.
41. **Коттрел А. Х.** Строение металлов и сплавов. М., Металлургиздат, 1961. 288 с.
42. **Кузнецов Д. П.** Напряженно-деформированное состояние заготовок при обратном выдавливании полых цилиндрических заготовок. — «Вестник машиностроения», 1959, № 2, с. 40—44.
43. **Курнаков Н. С. и Жумчужный С. Ф.** Давление истечения и твердость пластических тел. — «ЖРМО», 1913, № 3, с. 256—310.
44. **Лашко Н. Ф.** Упрочнение и разрушение металлов. М., Оборонгиз, 1951. 187 с.
45. **Макушок Е. М.** Механика трения. Минск, «Наука и техника», 1974. 252 с. (АН БССР, ФТИ).
46. **Макушок Е. М., Матусевич А. С., Северденко В. П., Сегал В. М.** Теоретические основы ковки и горячей штамповки. Минск, «Наука и техника», 1968. 406 с. (АН БССР, ФТИ).
47. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести, М., «Машиностроение», 1975. 399 с.
48. **Манасевич А. Д.** Физические основы напряженного состояния и прочность металлов. М., Машгиз, 1962. 200 с.
49. **Миркин Л. И.** Физические основы прочности и пластичности. Изд. МГУ, 1968. 538 с.
50. **Молосаев И. П.** Изучение процесса формоизменения металла в полости штампа. — В кн.: Сборник научных трудов БПИ, вып. 57. Минск, Изд-во АН БССР, 1957, с. 69—80.
51. **Мошнин Е. Н.** Гибка и правка на ротационных машинах. М., «Машиностроение», 1967. 271 с.
52. **Мошнин Е. Н.** Гибочные и правильные машины. М., Машгиз, 1956. 252 с.
53. **Мошнин Е. Н.** Моделирование горячих процессов пластического деформирования. — «Кузнечно-штамповочное производство», 1959, № 3, с. 1—8.
54. **Мошнин Е. Н., Золотухин Н. М.** Определение усилия осадки поковок. — «Кузнечно-штамповочное производство», 1960, № 6, с. 1—5.
55. **Мошнин Е. Н., Золотухин Н. М.** Уточнение методики определения усилия осадки поковок. — «Кузнечно-штамповочное производство», 1961, № 3, с. 18—19.

56. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954. 647 с.

57. **Новиков И. И.** Дефекты кристаллической решетки металлов. М., «Металлургия», 1975. 208 с.

58. **Норицын И. А.** Основы теории многооперационной вытяжки листового металла. — «Труды Моск. вечерн. машиностроит. ин-та», М., 1955, вып. II, с. 61—99.

59. **Носырева С. С. и Буракова М. В.** Влияние пластической деформации на превращение аустенита в мартенсит. — «Труды Уральского филиала АН СССР», 1941, вып. 10, с. 23—43.

60. **Овчинников А. Г.** О выборе кривошипного пресса для вытяжки. — «Кузнечно-штамповочное производство», 1961, № 1, с. 30—33.

61. **Одинг И. А.** Релаксация и ползучесть металлов с учетом неоднородного распределения напряжений. — «Изв. АН СССР. ОТН», 1948. № 10, с. 1561—1575.

62. **Охрименко Я. М.** Технология кузнечно-штамповочного производства. М., «Машиностроение», 1976. 560 с.

63. **Охрименко Я. М., Тюрин В. А.** Неравномерность деформации при ковке. М., «Машиностроение». 1969. 184 с.

64. **Павлов И. М.** Теория прокатки. М., Металлургиздат, 1950. 610 с.

65. **Павлов И. М.** О физической природе тензорных представлений в теории пластичности. — «Известия вузов. Черная металлургия», 1965, № 6, с. 100—104.

66. **Перлин И. Л., Рейтберг Л. X.** Теория прессования металлов. М., «Металлургия», 1975. 447 с.

67. **Перлин И. Л.** К выводу формулы Зибеля при осаживании круглого цилиндра. — «Вестник машиностроения», 1958, № 2, с. 44—45.

68. **Петров С. Н.** Сопротивление ковкого металла сжатию между двумя параллельными плоскостями. — «Записки Горного института». СПБ, 1914, с. 178—181.

69. **Попов Е. А.** Величина изгибающего момента при вытяжке. — В кн.: Машины и технология обработки металлов давлением. М., Машгиз, 1953, с. 95—99. (МВТУ).

70. **Попов Е. А.** Основы теории листовой штамповки. М., «Машиностроение», 1968. 284 с.

71. **Попов Е. А.** Распределение напряжений и деформаций при отбортовке круглых отверстий. — В кн.: Машины и технология обработки металлов давлением, вып. 40, Машгиз, 1955, с. 59—72. (МВТУ).

72. **Попов Е. А., Вершинин В. И.** Определение кривизны участка свободного изгиба при последующей вытяжке. — В кн.: Машины и технология обработки металлов давлением. М., «Машиностроение», 1976, с. 106—122. (МВТУ).

73. **Прагер В. и Ходж Ф. Г.** Теория идеально пластических тел. М., Изд-во иностр. лит., 1956. 398 с.

74. **Прозоров Л. В.** Холодное выдавливание тонкостенных изделий. — В кн.: Новые исследования в области кузнечной технологии. М., Машгиз, 1950, с. 111—148. (ЦНИИТМАШ).

75. **Прозоров Л. В.** Прессование стали и тугоплавких сплавов. М., «Машиностроение», 1969. 244 с.

76. **Ребельский А. В.** Основы проектирования процессов горячей объемной штамповки. М., «Машиностроение», 1965. 248 с.

77. **Ренне И. П.** Пластический изгиб листовой заготовки. — «Труды Тульск. мех. ин-та». М., 1950, вып. 4, с. 146—162.

78. **Ренне И. П.** Анализ процесса вытяжки цилиндрических полых тел с утонением стенок. — «Труды Тульск. мех. ин-та». М., 1951, вып. 5, с. 111—151.

79. **Рентгенография** в применении к исследованию материалов. Под общ. ред. С. Т. Конобеевского. М., ОНТИ, 1936. 568 с.

80. **Романов Е. С., Меркулов А. М.** Верхняя оценка плоской открытой штамповки. — В кн.: Технология машиностроения. Вып. 22. Тула, Изд. Тульск. политехн. ин-та, 1972, с. 49—55.

81. **Романовский В. П.** Справочник по холодной штамповке. М., «Машиностроение», 1965. 788 с.

82. **Рид В. Т.** Дислокация в кристаллах. М., Металлургиздат, 1957. 279 с.

83. **Северденко В. П.** Теория обработки металлов давлением. Минск, «Высшая школа», 1966. 223 с.

84. **Северденко В. П., Клубович В. В., Степаненко А. В.** Обработка металлов давлением с ультразвуком. Минск, «Наука и техника», 1973. 70 с.

85. **Семенов Е. И.** Об очаге деформации при штамповке в открытых штампах. — В кн.: Машины и технология обработки металлов давлением, вып. 40. М., Машгиз, 1955, с. 130—135. (МВТУ).

86. **Сконечный А. И.** Определение удельных усилий штамповки методом верхней оценки. — «Вестник машиностроения», 1973, № 12, с. 62—65.

87. **Смирнов-Аляев Г. А.** Сопротивление материалов пластическому деформированию. М., Машгиз, 1961. 464 с.

88. **Смирнов-Аляев Г. А. и Розенберг В. М.** Технологические задачи теории пластичности, ч. I, Л., Лениздат, 1951. 215 с.

89. **Смирнов-Аляев Г. А.** Механические основы пластической обработки металлов. М., «Машиностроение», 1968. 272 с.

90. **Соколов Л. Д.** Сопротивление металлов пластической деформации. М., Металлургиздат, 1963. 284 с.

91. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969. 608 с.

92. **Спроул Р.** Современная физика. М., Физматгиз, 1961.

93. **Степанский Л. Г.** Определение усилий осадки труб в контейнере. — «Вестник машиностроения», 1958, № 3, с. 42—43.

94. **Степанский Л. Г.** Решение некоторых задач теории обработки металлов давлением. — В кн.: Исследования в области оборудования и технологии штамповки. М., Машгиз, 1958, с. 18—44. (Мосстанкин).

95. **Степанский Л. Г.** К расчету усилий и деформаций при обработке металлов давлением. — «Кузнечно-штамповочное производство», 1959, № 3, с. 13—18.

96. **Сторожев М. В.** К элементарной теории пластической деформации. — «Вестник машиностроения», 1948, № 5, с. 43—49.

97. **Сторожев М. В.** Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. — «Вестник машиностроения», 1956, № 9, с. 83—85.

98. **Сторожев М. В. и Попов Е. А.** Теория обработки металлов давлением. М., Машгиз, 1957. 323 с.

99. **Сторожев М. В. и Попов Е. А.** Теория обработки металлов давлением. М., «Машиностроение», 1971. 323 с.

100. **Сторожев М. В., Семенов Е. И., Кирсанова С. Б.** Уточнение формы очага деформации и определение усилия при штамповке. — «Вестник машиностроения», 1959, № 4, с. 55—61.

101. **Тарновский И. Я., Поздеев А. А., Ганаго О. А.** Деформации и усилия при обработке металлов давлением. М., Машгиз, 1953. 304 с.

102. **Тарновский И. Я., Поздеев А. А., Ганаго О. А., Колмогоров В. Л., Трубин В. Н., Вайсбурд Р. А., Тарновский В. И.** Теория обработки металлов давлением. М., «Металлургиздат», 1963. 672 с.

103. **Теория** пластичности. М., ГИИЛ, 1948. 452 с.

104. **Тимошенко С. П.** Теория упругости. Гостехиздат, 1934. 451 с.

105. **Томленов А. Д.** Теория пластического деформирования металлов. М., «Металлургия», 1972. 408 с.

106. **Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш.** Механика пластической деформации при обработке металлов. М., «Машиностроение», 1969. 504 с.

107. **Унксов Е. П.** Пластическая деформация при ковке и штамповке. М., Машгиз, 1939. 192 с.

108. **Унксов Е. П.** Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. М., Машгиз, 1955. 230 с.

109. **Унксов Е. П.** Инженерная теория пластичности. Методы расчета усилий деформирования. М., Машгиз, 1959. 328 с.

110. **Унксов Е. П.** Методы линеаризации основных уравнений теории пластичности. — «Кузнечно-штамповочное производство», 1961, № 5, с. 1—3.

111. **Фридель Ж.** Дислокации. Пер. с франц. М., «Мир», 1967. 643 с.

112. **Френкель Я. М.** Собрание избранных трудов. Т. 2. М.—Л., Изд-во АН ССР, 1959. 470 с.

113. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М., ГИТТЛ, 1956. 407 с.
114. **Целиков А. И.** Теория расчета усилий в прокатных станах. М., Металлургиздат, 1962. 494 с.
115. **Чижиков Ю. М.** Теория подобия и моделирования процессов обработки металлов давлением. М., «Металлургия», 1970. 295 с.
116. **Чертавских А. К.** Трение и смазка при обработке металлов давлением. М., Металлургиздат, 1955. 176 с.
117. **Шарапин Е. Ф.** Элементы теории обработки металлов давлением. М., Металлургиздат, 1964. 208 с.
118. **Шмидт Е. и Боас В.** Пластичность кристаллов, в особенности металлических. М., Гостехиздат, 1938. 316 с.
119. **Шофман Л. А.** Основы расчета процесса штамповки и прессования. М., Машгиз, 1961. 340 с.
120. **Шофман Л. А.** Элементы теории холодной штамповки. М., Оборонгиз, 1952. 335 с.
121. **Шофман Л. А.** Теория и расчеты процессов холодной штамповки. М., «Машиностроение», 1964. 375 с.
122. **Avitzur B.** Metal Forming: Processes and Analysis, Mc. Graw-Hill Book Co. N. Y., 1968, 500 p.
123. **Hofman F.** Die Hydrauliche Schmiedepressen. Berlin., Verl Springer, 1912. 80 S.
124. **Jonson W., Mellor P. B.** Plasticiti for Mechanical Engineers. London,— «Van Nostrand», 1962. 412 p.
125. **Ludwik R.** Elemente der Technologischen Mechanik. Berlin, Verl Springer, 1903. 307 S.
126. **Riedel F.** Über die Grundlagen zur Ermittlung des Arbeitsbedarfes beim Schmieden unter der Presse, 1913. 155 S.
127. **Sachs G. und Eisbein.** Kraftbedarf und Fliessworgange beim Stangpressen. Berlin., Verl Springer, 1931. 78 S.
128. **Sauer R.** Über die Gleitkurvennetze der ebenen plastischen Spannungsverteiling bei beliebiegen Fliesgesetz ZAMM, bd, 29, 1949. 36 S.
129. **Schmitt G.** Die Ermittung der Formänderungen beim Hapf-Fliesspressen Industrie + Anzeiger, 90, 1968, N 55, S. 1241—1246.
130. **Sobbe S.** Beiträge zur Technologie des Schmiedepressen, — Werksattstechnik, N 9, 1908, S 61—65.
131. **Unckel.** Über die Fliessbewging plastischen Materials. Berlin., Verl Springer, 1928. 150 S.
132. **Al-Naib T. Y. M. and Duncan J. L.** Superplastic metal Forming. — «Journ. of Mechanical Sciences». 1970, V 12, N 6, p 463—477
133. **Wanheim T.** Friction at hight normale pressures. Wear, 1973, N 25, S 225—244.
134. **Löwen Y.** Untersuchungen über Art und Grösse der Reibung Beim Schmieden, Industrie-Anzeiger 1972, Bd. 94, N 11, S. 238—240.
135. **Klaus A.** Blochstauchen zwiscen ebenen parallelen Bachnen. Arch. Eisenhüttenwesen, 1973, Bd. 44, N 8, S. 95—98.
136. **Kanacri F., Lee C., Beck L., Kabayashy S.** Plastic compression of rectangular blocks two parallel platens. Proc. 13th. Int. Machine Tool Des. and hcs. Conf., Birmingam, 1972, London, e. c., 1973, S 481—490.
137. **Hahn W., Avitzur B., Bishop F.** Impact extrusion. Upper Bound analysis of the stroke. Trans. ASME, Bd. 95, N 3, 1973, S. 349—357.
138. **Weber W.** Bestimmung der bezogenen Umforkraft beim Rückwärts Napffließpressen. Ferigungstechnik und Betrieb, Bd. 31, N 1, 1971, S. 49—53.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 873

Михаил Васильевич СТОРОЖЕВ,
Евгений Александрович ПОПОВ

ТЕОРИЯ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Редактор издательства *Н. Г. Сальникова*

Технический редактор *Е. П. Смирнова*

Корректор *Л. Я. Шабашова*

Графики: *Н. И. Корытцев, А. С. Остриков*

Переплет художника *В. В. Воронина*

Сдано в набор 15/IX 1976 г.
Подписано к печати 27/IV 1977 г. Т-09215
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1
Усл. печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 27,9. Тираж 35 000 экз.
Зак. № 1319. Цена 1 р. 24 к.
Цена с с/обложкой 1 р. 29 к.

Издательство «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 107885,
Москва, Б-78,
1-й Басманный пер., дом 3

Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10