

И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

Теория механизмов. Артоболевский И. И.

Книга является учебником по теории механизмов и машин для студентов высших технических учебных заведений и пособием для аспирантов, инженеров и конструкторов машиностроительных специальностей. Книга состоит из трех частей. Первая часть посвящена структурному и кинематическому анализу механизмов. Рассмотрены методы структурного анализа и общие принципы классификации механизмов. Излагаются основы кинематической геометрии и общие методы кинематического анализа механизмов различных видов. Вторая часть книги посвящена динамическому анализу механизмов. Рассмотрены вопросы силового расчета механизмов, трение в механизмах и роль массовых сил при динамическом расчете механизмов. Излагаются вопросы теории уравнивания механизмов на фундаменте. Далее излагаются задачи исследования и регулирования движения механизмов. Кратко излагается общая теория регулирования. Третья часть книги посвящена синтезу механизмов. Рассмотрены вопросы синтеза простых и сложных зубчатых передач, мальтийских крестов, кулачковых и рычажных механизмов. Кратко изложена теория точности механизмов.

Книга содержит список дополнительной литературы по теории механизмов и машин, рекомендуемой читателям.

Таблиц 11, рисунков 794, библиографических ссылок 32.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Из предисловия к первому изданию .	9
Предисловие ко второму изданию .	12
Введение	13
§ 1. Механика машин и ее основные разделы	13
§ 2. Основные понятия и определения в теории механизмов . .	19

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СТРУКТУРНЫЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Отдел первый

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Глава I. Некоторые общие сведения о современных механизмах	21
§ 3. Рычажные механизмы .	21
§ 4. Кулачковые механизмы .	31
§ 5. Зубчатые механизмы	34
§ 6. Клиновые и винтовые механизмы	39
§ 7. Фрикционные механизмы .	41
§ 8. Механизмы с гибкими звеньями	42
§ 9. Механизмы с гидравлическими и пневматическими устройствами	44
§ 10. Механизмы с электрическими устройствами	46
Глава II. Структура кинематических цепей .	48
§ 11. Кинематические пары и их классификация	43
§ 12. Условные изображения кинематических пар	57
§ 13. Кинематические цепи	59
§ 14. Структурная формула кинематической цепи общего вида	60
Глава III. Структура и классификация механизмов	62
§ 15. Степени подвижности механизма .	62
§ 16. Структурная формула плоских механизмов	64
§ 17. Структура плоских механизмов	67
§ 18. Заменяющие механизмы	70
§ 19. Структура пространственных механизмов	74
§ 20. Семейства механизмов	77

Глава IV. Классификация механизмов	83
§ 21. Основной принцип образования механизмов и системы их классификации	83
§ 22. Структурная классификация плоских механизмов.	85
§ 23. Некоторые сведения по структурной классификации пространственных механизмов.	99

Отдел второй

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Глава V. Введение в кинематику плоских механизмов	103
§ 24. Центроиды в абсолютном и относительном движениях.	103
§ 25. Соотношения между скоростями звеньев механизма	107
§ 26. Определение скоростей и ускорений звеньев кинематических пар.	112
§ 27. Мгновенный центр ускорений и поворотный круг.	123
§ 28. Огибаемые и огибающие кривые	128
§ 29. Кривизна центроид и взаимоогibaемых кривых	131
Глава VI. Исследование плоских механизмов методом планов.	135
§ 30. Перманентное и начальное движение механизма.	135
§ 31. Определение положений звеньев групп и построение траекторий, описываемых точками звеньев механизмов	141
§ 32. Определение скоростей и ускорений групп II класса	150
§ 33. Определение скоростей и ускорений групп III класса	173
Глава VII. Исследование плоских механизмов методом кинематических диаграмм	178
§ 34. Построение кинематических диаграмм	178
§ 35. Кинематическое исследование механизмов методом диаграмм	182
Глава VIII. Кинематическое исследование четырехзвенных рычажных механизмов.	190
§ 36. Механизм шарнирного четырехзвенника	190
§ 37. Кривошипно-ползунный механизм	195
§ 38. Кулисные механизмы	200
Глава IX. Кинематическое исследование кулачковых механизмов	206
§ 39. Определение положений	206
§ 40. Определение скоростей и ускорений	213
Глава X. Кинематическое исследование механизмов передач	217
§ 41. Основные кинематические соотношения	217
§ 42. Механизмы фрикционных передач.	220
§ 43. Механизмы трехзвенных зубчатых передач	224
§ 44. Механизмы многозвенных зубчатых передач с неподвижными осями	230
§ 45. Механизмы планетарных зубчатых передач	234

§ 46. Механизмы некоторых типов редукторов и коробок скоростей	240
§ 47. Механизмы передач с гибкими звеньями	245
Глава XI. Кинематическое исследование некоторых видов пространственных и плоских механизмов . .	247
§ 48. Механизм универсального шарнира	247
§ 49. Механизм двойного универсального шарнира . . .	250
§ 50. Механизм пространственного шарнирного четырехзвенника . .	251
§ 51. Винтовые механизмы	253
§ 52. Зубчатые механизмы прерывистого и знакопеременного движения ведомого звена .	255
§ 53. Механизмы с гидравлическими и пневматическими устройствами	261

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Отдел третий

СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Глава XII. Введение в динамический анализ механизмов	268
§ 54. Основные задачи .	268
§ 55. Задачи силового расчета механизмов .	270
§ 56. Силы, действующие на звенья механизма	271
Глава XIII. Силы движущие и силы производственных сопротивлений	272
§ 57. Диаграммы сил, работ и мощностей .	272
§ 58. Механические характеристики машин . .	275
Глава XIV. Трение в механизмах	278
§ 59. Виды трения .	278
§ 60. Трение скольжения несмазанных тел	279
§ 61. Трение в поступательной кинематической паре	283
§ 62. Трение в винтовой кинематической паре	290
§ 63. Трение во вращательной кинематической паре . .	292
§ 64. Трение скольжения смазанных тел .	294
§ 65. Трение качения и трение скольжения в высших парах . .	296
§ 66. Трение в передачах с фрикционными колесами	302
§ 67. Трение в передачах с гибкими звеньями	303
Глава XV. Силы инерции звеньев плоских механизмов	306
§ 68. Определение сил инерции звеньев	306
§ 69. Метод замещающих точек	312

Глава XVI. Кинетостатический расчет плоских механизмов	320
§ 70. Условия статической определенности кинематических цепей	320
§ 71. Определение реакций в кинематических парах групп . . .	322
§ 72. Определение реакций в кинематических парах групп с учетом сил трения	333
§ 73. Кинетостатический расчет ведущего звена механизма	336
§ 74. Силовой расчет механизмов .	339
§ 75. Уравновешивание масс звеньев механизма на фундаменте	354
§ 76. Определение положения общего центра масс механизма . .	358
§ 77. Исследование движения общего центра масс механизма .	362
§ 78. Уравновешивание сил инерции звеньев механизма	367
§ 79. Уравновешивание вращающихся звеньев .	375
 Отдел четвертый	
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ	
Глава XVII. Энергетические характеристики механизмов .	384
§ 80. Режимы движения механизмов	384
§ 81. Механический коэффициент полезного действия .	388
§ 82. Определение коэффициентов полезного действия типовых механизмов	393
Глава XVIII. Приведение сил и масс к звену приведения	405
§ 83. Приведенные силы и моменты	405
§ 84. Рычаг Жуковского .	407
§ 85. Определение приведенных и уравновешивающих сил методом Жуковского	410
§ 86. Кинетическая энергия механизма	415
§ 87. Приведенная масса и приведенный момент инерции механизма	417
Глава XIX. Исследование движения механизмов машинного агрегата	421
§ 88. Основные формы уравнений движения .	421
§ 89. Интегрирование уравнений движения .	424
§ 90. Исследование движения с помощью уравнения кинетической энергии	429
§ 91. Уравнение движения механизма с двумя степенями подвижности	441
Глава XX. Неравномерность движения механизмов	453
§ 92. Общая постановка задачи	453
§ 93. Средняя скорость механизма и его коэффициент неравномерности движения .	455
§ 94. Связь между приведенным моментом инерции, приведенными силами и коэффициентом неравномерности движения механизма	459

§ 95. Основные данные, необходимые для определения момента инерции маховика	462
§ 96. Определение момента инерции махового колеса по диаграмме $T = T(J_n)$	466
§ 97. Определение момента инерции махового колеса по уравнению моментов	470
§ 98. Определение момента инерции махового колеса при движущем моменте, зависящем от скорости	473
Глава XXI. Введение в теорию регулирования	476
§ 99. Общая постановка задачи	476
§ 100. Кинестатика центробежного регулятора	480
§ 101. Устойчивость регулятора	485
§ 102. Нечувствительность регулятора	487
§ 103. Уравнения движения звеньев систем автоматического регулирования	489
§ 104. Динамическая устойчивость систем автоматического регулирования	501

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Отдел пятый

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТИПОВЫХ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

Глава XXII. Введение в синтез плоских трехзвенных механизмов	503
§ 105. Основные задачи проектирования механизмов	503
§ 106. Синтез трехзвенных механизмов с центроидной парой	505
§ 107. Синтез трехзвенных механизмов с парой качения и скольжения	517
§ 108. Условия, обеспечивающие передачу сил в механизмах	522
Глава XXIII. Синтез трехзвенных плоских зубчатых механизмов с круглыми цилиндрическими колесами	528
§ 109. Основные сведения из теории зацеплений	528
§ 110. Геометрические элементы зубчатых колес	533
§ 111. Геометрия эвольвентных профилей	538
§ 112. Проектирование эвольвентных профилей	543
§ 113. Дуга зацепления и коэффициент перекрытия	548
§ 114. Коэффициент скольжения зубьев	552
§ 115. Некоторые сведения по методам обработки эвольвентных профилей зубьев	555
§ 116. Подрезание профилей зубьев	559

§ 117. Определение основных размеров зубчатых колес, нарезанных методом обкатки . .	563
§ 118. Проектирование циклоидальных профилей	575
§ 119. Проектирование передач с косыми зубьями	582
Глава XXIV. Синтез трехзвенных пространственных зубчатых механизмов	589
§ 120. Проектирование конической зубчатой передачи .	589
§ 121. Проектирование винтовой и червячной передач.	598
Глава XXV. Синтез многозвенных зубчатых механизмов	608
§ 122. Проектирование зубчатых передач с неподвижными осями . .	608
§ 123. Проектирование зубчатых передач с подвижными осями	614
Глава XXVI. Синтез мальтийских механизмов .	621
§ 124. Проектирование механизмов с внешним зацеплением	621
§ 125. Проектирование механизмов с внутренним зацеплением .	626
Глава XXVII. Синтез кулачковых механизмов . .	631
§ 126. Основные типы плоских кулачковых механизмов .	630
§ 127. Исходные данные для проектирования кулачковых механизмов	632
§ 128. Законы движения ведомых звеньев	635
§ 129. Определение основных размеров кулачковых механизмов . .	648
§ 130. Проектирование профилей кулачков	659
§ 131. Некоторые сведения о проектировании пространственных кулачковых механизмов .	675
Глава XXVIII. Синтез плоских механизмов с низшими парами . .	678
§ 132. Основные задачи синтеза	678
§ 133. Проектирование механизмов по заданным положениям звеньев .	685
§ 134. Задача о приближенном воспроизведении заданного закона движения .	694
§ 135. Задача о воспроизведении заданной траектории .	700
§ 136. Условия существования кривошипа	703
§ 137. Определение ошибок механизмов	706
Основная и дополнительная литература на русском языке, рекомендуемая по курсу «Теория механизмов и машин»	712
Предметный указатель	714

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый учебник по курсу «Теория механизмов и машин» предназначен для машиностроительных и приборостроительных вузов и соответствует программе курса, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

Принятое автором сокращенное название «Теория механизмов» более соответствует действительному содержанию современных курсов по теории механизмов и машин, читаемых на машиностроительных и приборостроительных специальностях. В самом деле, вопросы, относящиеся непосредственно к теории машин, освещаются только в разделе, посвященном движению машин и механизмов под действием заданных сил, и в разделе теории регулирования. Все остальные разделы посвящены структуре, кинестатике, динамике и синтезу отдельных видов и типов механизмов. Теория машин в современном понимании охватывает многочисленные вопросы исследования и проектирования машин автоматического действия и автоматических систем машин, и потому курс теории машин целесообразно рассматривать как специальный курс, читаемый на старших курсах вуза, увязывая его содержание с профилем подготовляемого специалиста.

Курс «Теория механизмов» состоит из трех частей.

Часть первая посвящена структурному и кинематическому анализу механизмов. Она начинается с описания наиболее распространенных видов механизмов с целью ознакомления учащегося с объектами изучения. Далее следуют главы, посвященные теории структуры кинематических цепей и механизмов и их классификации. Этот раздел изложен по той системе, которая в основном принята сейчас в работах советской школы по теории механизмов. При изложении этих вопросов основное внимание уделяется структуре и классификации плоских механизмов. В качестве дополнительного материала, который является необязательным для студентов, излагается вопрос о структуре и классификации пространственных механизмов. Этот материал, напечатанный мелким шрифтом, рассчитан на тех учащихся, которые пожелают в порядке самостоятельного изучения углубить свои знания в теории механизмов.

Часть отдела второго, посвященная кинематическому анализу механизмов, начинается с изложения основ кинематической геометрии.

Автор считает, что изложение основ кинематической геометрии закладывает прочный фундамент не только для изучения вопросов кинематического анализа, но и вопросов синтеза механизмов. Дополнительным материалом в этой части является изложение методов построения мгновенного центра ускорений и поворотного круга, а также вопросы теории кривизны центроид и взаимноогibaемых кривых.

В главах, посвященных непосредственно кинематике групп и механизмов, материал излагается на основе рассмотрения не истинных скоростей и ускорений звеньев, а их аналогов. Это позволяет вести изложение методов кинематического анализа на чисто геометрической основе без введения параметра времени. В отдельном параграфе показан переход от аналогов скорости и ускорения к действительным скоростям и ускорениям, для чего применен метод Н. Е. Жуковского разделения движения механизмов на перманентное и начальное. При кинематическом исследовании механизмов в инженерных расчетах применяются графические, аналитические и графочисленные методы, поэтому автор излагает основы всех этих методов применительно к наиболее распространенным в практике видам механизмов, как правило, принадлежащих ко II и III классам.

Кинематическое исследование широко распространенных в технике четырехзвенных рычажных механизмов проведено комплексно графическими и аналитическими методами. Метод кинематических диаграмм изложен в том объеме, который необходим для последующих глав, посвященных динамике, анализу и синтезу механизмов.

Ввиду необходимости подготовить студентов к изучению курса деталей машин отдельно рассматриваются вопросы о кинематическом исследовании типовых механизмов передач, как плоских, так и пространственных. Значительное внимание уделено механизмам редукторов, коробок скоростей и вариаторов скоростей.

В главе, посвященной кинематическому исследованию простейших пространственных механизмов, обязательным для студентов является только параграф, излагающий кинематику универсального шарнира. Остальные параграфы являются дополнительными и необязательными. В эту главу включены вопросы кинематики типовых механизмов с гидро- и пневмоустройствами. В связи с широким применением этих механизмов в практике некоторых отраслей машиностроения возможно включение их в обязательную часть курса.

Часть вторая, посвященная динамическому анализу механизмов, начинается с изложения силового анализа механизмов. Рассматриваются силы, действующие на звенья механизма, их физическая природа и методы их определения и учета при силовом расчете механизмов. В этой же части рассматриваются и вопросы уравнивания механизмов на фундаменте и уравнивания вращающихся масс. Далее рассматриваются вопросы энергетических характеристик механизмов и определение коэффициентов полезного действия типовых механизмов. В главе, посвященной исследованию движения механизмов машинного

агрегата, рассмотрены графочисленные и приближенные методы решения уравнений движения при силах, зависящих от положения, скорости и времени. Отдельный параграф посвящен уравнениям движения механизмов с двумя степенями свободы. Значительное внимание уделено вопросу неравномерности движения механизмов и методам определения маховых масс для различных заданий движущих сил и сил сопротивления. В главе, посвященной введению в теорию регулирования, рассмотрена не только динамика регулятора, но и уравнения движения звеньев систем автоматического регулирования и для простейших случаев этих систем их динамическая устойчивость.

Часть третья посвящена изложению методов синтеза механизмов по заданным кинематическим характеристикам и с учетом некоторых динамических условий, связанных с передачей мощностей и законов передачи сил в механизмах. Эта часть по аналогии с частью, посвященной кинематическому анализу механизмов, начинается с изложения общих основ синтеза механизмов по заданным кинематическим и силовым условиям. Далее, подробно излагаются методы синтеза плоских и пространственных зубчатых механизмов с учетом некоторых условий технологического и производственного характера; при этом рассмотрены вопросы, касающиеся действия сил в плоских и пространственных зубчатых механизмах, так как этот вопрос является весьма существенным при прохождении курса деталей машин.

При изложении вопросов синтеза кулачковых механизмов существенное внимание уделено рассмотрению типовых законов движения ведомых звеньев как определяющих кинематические и динамические характеристики этих механизмов.

В современных машинах автоматического действия широко применяются мальтийские механизмы, и потому в дополнительной главе изложены методы их синтеза.

Значительное внимание уделено задачам синтеза схем зубчатых редукторов.

Вопросы синтеза механизмов с низшими парами изложены применительно к четырехзвенным рычажным механизмам. При этом излагаются методы решения только простейших задач, не требующие каких-либо дополнительных знаний студентов по теории геометрических мест синтеза и теории приближения функций.

Заканчивается учебник кратким введением в теорию ошибок механизмов.

В список рекомендуемой литературы вошло сравнительно небольшое число учебников, учебных пособий и монографий, вышедших за последние годы; поэтому этот список нельзя рассматривать как исчерпывающий и единственно рекомендуемый.

Как это следует из вышеизложенного, предлагаемый учебник содержит основной курс и большое число дополнительных глав, параграфов и пунктов. *Основной материал*, соответствующий программе курса теории механизмов и машин для машиностроительных

специальностей, напечатан крупным шрифтом, и составляет только около 65% всего объема книги, т. е. около 33 печатных листов. Все *дополнительные материалы*, необязательные для студентов, напечатаны петитом. Учебник построен так, что студент, изучающий курс, может читать и прорабатывать только напечатанное крупным шрифтом. Эта система изложения материала позволяет автору рекомендовать предлагаемый курс не только студентам, но и преподавателям, как пособие по курсу, а лицам, готовящимся к поступлению в аспирантуру, как экзаменационный минимум по спецкурсу.

Автор приносит свою глубокую благодарность коллективу кафедры теории механизмов и машин Всесоюзного заочного политехнического института и ее руководителю Н. И. Левитскому за внимательный просмотр рукописи и сделанные замечания, Ф. Л. Литвину и В. А. Зиновьеву, взявшим на себя труд прорецензировать и отредактировать рукопись.

В настоящем курсе сделана попытка не только обобщить многолетний педагогический опыт самого автора, но и опыт тех педагогических и научных коллективов, которыми руководил и руководит сам автор и его ученики. При его подготовке неоценимую помощь автору оказал в первую очередь коллектив кафедры теории механизмов и машин Московского ордена Ленина авиационного института им. С. Орджоникидзе, отдельные сотрудники лабораторий Института машиноведения, а также многие ученые и коллеги, занимающиеся преподаванием во вузах. После выхода в свет последнего издания учебника прошло более десяти лет. За этот период времени автор получил большое количество критических замечаний от студентов и от лиц, ведущих педагогическую работу, а также конструкторов и изобретателей. За все эти замечания и пожелания автор приносит указанным лицам свою глубокую благодарность.

Автор и впредь рассчитывает на дружескую критику нового издания читателями и специалистами.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание воспроизводится с первого в основном без изменений. Исправлены только замеченные опечатки, уточнены некоторые термины и улучшены отдельные чертежи.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Механика машин и ее основные разделы

1°. Развитие современной науки и техники неразрывно связано с созданием новых машин, имеющих целью повышение производительности и облегчение труда людей, а также обеспечение средств исследования законов природы и жизни человека.

Целью создания машины является увеличение производительности и облегчения физического труда человека путем замены человека машиной. В некоторых случаях машина может заменять человека не только в его физическом, но и в умственном труде. Так, например, счетно-решающие машины заменяют человека или помогают ему в проведении необходимых математических операций, информационные машины обрабатывают большое количество заложенных в них человеком сведений и дают человеку требуемую информацию и т. д. Созданные человеком машины могут управлять производственными и другими процессами по определенным, заранее составленным программам и в некоторых случаях автоматически обеспечивать процесс с оптимальными результатами.

Наконец, машины могут в некоторых случаях заменять отдельные органы человека, такие, например, как конечности рук (механизмы манипуляторов, протезы), почки (искусственная почка) и т. д.

Таким образом, понятием машины охватывается большое число самых различных объектов, применяемых человеком для своих трудовых и физиологических функций.

Таким образом, понятие «машина» может быть, в обобщенном виде, выражено следующим образом: *машина есть устройство, создаваемое человеком для использования законов природы с целью облегчения физического и умственного труда, увеличения его производительности и его облегчения путем частичной или полной замены человека в его трудовых и физиологических функциях.*

2°. С точки зрения выполняемых машинами функций машины можно разделить на следующие классы:

1. Энергетические машины.
2. Транспортные машины.
3. Технологические машины.

4. Контрольно-управляющие машины.

5. Логические машины.

6. Кибернетические машины.

Примерами энергетических машин являются: электрические двигатели, двигатели внутреннего сгорания, турбины и т. д. К транспортным машинам относятся: локомотивы, турбовозы, автомобили, тракторы, лифты, транспортеры и т. д.

Многообразен класс технологических машин. К ним принадлежат: станки, текстильные машины, машины сельского хозяйства, металлургические, полиграфические, пищевые и другие машины. В связи с повышением производительности машин и скоростей движения отдельных их органов, а также в связи с требованиями к высокому качеству изделий человек стал испытывать непреодолимые затруднения в управлении машинами, контроле технологических процессов, выполняемых машинами, измерении отдельных параметров выпускаемой продукции и т. д.

В прежних, более примитивных машинах реакция человека была достаточной для того, чтобы изменить режим движения и работы машины, если эти режимы и работа отклонялись от нормальных. Теперь, когда продолжительность многих рабочих процессов измеряется весьма малыми долями времени, когда многие процессы являются непрерывными, физиология человека лимитирует его непосредственную реакцию на отклонение рабочего процесса от нормального. Поэтому человек стал создавать искусственные средства управления, контроля и измерения. Такими средствами, хорошо известными в технике, являются различные регуляторы и системы автоматического регулирования рабочих процессов, приборы контроля и измерений параметров этих процессов и т. д. В некоторых случаях стало целесообразным создание специальных машин для управления и контроля процессами. Так, например, для автоматизации контроля размеров поршневых колец, пальцев, шариков для шарикоподшипников и многих других объектов стали создаваться контрольно-измерительные машины, которые производят не только обмер деталей, но и их сортировку по размерам и другим показателям. В современные автоматические линии встраиваются различные контрольно-измерительные машины и приборы, которые не только контролируют процесс, но и управляют им, сигнализируя и автоматически корректируя этот процесс в процессе работы автоматических линий и систем. Такие машины называются контрольно-управляющими.

Широкое развитие как для управления и контроля над процессами, так и для замены умственного труда человека получили логические машины. К этим машинам относятся счетно-решающие машины, машины, моделирующие различные процессы, информационные машины и др.

Распространенным в настоящее время классом машин являются кибернетические машины. Эти машины способны заменять некоторые

физиологические функции человека. Примерами таких машин являются: машины, опознающие тот или иной образ, например буквы, и, следовательно, способные как бы читать; машины, воспроизводящие человеческую речь по заданным акустическим спектрам; машины, выполняющие различные движения по устной команде человека; машины, заменяющие отдельные органы человека (сердце, почки, конечности и т. д.) в условиях медицинской, операционной или биологической, исследовательской практики или в случаях, связанных с органическими нарушениями нормальной физиологии человека.

3°. Развитые системы машин являются комплексом машин различных классов. Так, например, современные роторные и другие автоматические линии являются комплексом, в который входят энергетические машины в виде электроприводов, транспортные машины для перемещения обрабатываемого объекта в виде роторов или транспортеров, технологические машины, изменяющие форму, состав или структуру обрабатываемого объекта, контрольно-управляющие машины, контролирующее качество и размеры получаемых изделий и регулирующие режим движения двигателей и рабочих органов, и, наконец, логические машины в виде машин, производящих подсчет количества выпускаемой продукции. В некоторых развитых машинных устройствах функции контроля и управления, а также логические функции могут выполняться не специальными машинами, а соответствующими приборами и системами, органически входящими в состав машинного устройства. Так, например, автомат для шлифования изделий с помощью шлифовального круга, представляющий собою технологическую машину, имеет в своем составе электропривод, являющийся энергетической машиной, и управляющее устройство, автоматически компенсирующее износ шлифовального круга. Фрезерный станок-автомат, представляющий собою технологическую машину, имеет в своем составе электропривод, т. е. энергетическую машину, систему программного управления, являющуюся управляющим устройством, систему контроля точности изготовления изделия и, наконец, систему переработки информации в виде счетно-решающего устройства, корректирующего процесс. Даже простейшие машинные устройства, как, например, паровая машина, имеют систему автоматического регулирования и управления в форме, например, центробежного регулятора.

Развитое машинное устройство, состоящее из двигателя, передаточных механизмов и рабочей машины и в некоторых случаях контрольно-управляющих и счетно-решающих устройств, называется *машинным агрегатом*.

4°. При создании машины человек пользуется всеми достижениями современной науки и в первую очередь достижениями в области математики, механики, физики и химии, электротехники и электроники. Машины могут работать и осуществлять требуемые движения своих органов с помощью устройств, в основе которых лежат различные принципы воспроизведения движения, производства работы и

преобразования энергии. Современные наиболее развитые и совершенные машины обычно представляют собою совокупность многих устройств, в основу работы которых положены принципы механики, теплофизики, электротехники и электроники.

Наука, изучающая машины, в основе работы устройств которых положены принципы механики с точки зрения исследования законов движения отдельных устройств и действующих на них сил, носит название «*Механики машин*».

5°. *Механическая система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел, называется механизмом.* Механизмы, входящие в состав машины, весьма разнообразны. Одни из них представляют собою сочетания только твердых тел. Другие имеют в своем составе гидравлические, пневматические, электрические и другие устройства. С точки зрения их функционального назначения механизмы машины обыкновенно делятся на следующие виды:

- а) Механизмы двигателей и преобразователей.
- б) Передаточные механизмы.
- в) Исполнительные механизмы.
- г) Механизмы управления, контроля и регулирования.
- д) Механизмы подачи, транспортировки питания и сортировки обрабатываемых сред и объектов.
- е) Механизмы автоматического счета, взвешивания и упаковки готовой продукции.

Механизмы двигателей осуществляют преобразование различных видов энергии в механическую работу. Механизмы преобразователей осуществляют преобразование механической работы в другие виды энергии. К механизмам двигателей относятся механизмы двигателей внутреннего сгорания, паровых машин, электродвигателей, турбин и др. К механизмам преобразователей относятся механизмы насосов, компрессоров, гидроприводов и др.

Передаточные механизмы имеют своей задачей передачу движения от двигателя к технологической машине или исполнительным механизмам. Так как вал двигателя обычно имеет большее число оборотов в минуту, чем основной вал технологической машины, то задачей передаточных механизмов является понижение числа оборотов в минуту вала двигателя до уровня числа оборотов в минуту основного вала технологической машины.

Исполнительными механизмами называются те механизмы, которые непосредственно воздействуют на обрабатываемую среду или объект. В их задачу входит изменение формы, состояния, положения и свойств обрабатываемых среды или объекта. К исполнительным механизмам, например, относятся механизмы прессов, деформирующих обрабатываемый объект, механизмы грохотов в зерноочистительных машинах, разделяющих среду, состоящую из зерна и соломы, механизмы металлообрабатывающих станков, изменяющие форму заготовки

снятием стружки до той формы, которая требуется по технологическим условиям, механизмы проката слитков в блюмингах и т. д.

Механизмами управления, контроля и регулирования называются различные механизмы и устройства для контроля размеров обрабатываемых объектов, например механические щупы, следующие за фрезой, обрабатывающей криволинейную поверхность, и сигнализирующие об отклонениях фрезы от заданной программы обработки; регуляторы, реагирующие на отклонение угловой скорости главного вала машины и устанавливающие нормальную заданную угловую скорость этого вала; механизм, регулирующий постоянство расстояния между валами прокатного стана и т. п. К этим же механизмам относятся и измерительные механизмы по контролю размеров, давлений, уровней жидкостей и т. д.

К механизмам транспортировки, подачи, питания и сортировки обрабатываемых сред и объектов относятся: механизмы винтовых шнеков, скребковых и ковшевых элеваторов для транспортировки и подачи сыпучих материалов; механизмы загрузочных бункеров для штучных заготовок; механизмы подачи пруткового материала в высадочных автоматах; механизмы сортировки готовой продукции по размерам, весу и конфигурации и т. д.

Механизмы автоматического счета, взвешивания и упаковки готовой продукции применяются во многих машинах, в основном выпускающих массовую штучную продукцию. Необходимо иметь в виду, что такие механизмы, как механизмы счета, взвешивания и упаковки готовой продукции, могут быть и исполнительными механизмами, если они входят в специальные машины, предназначенные для этих операций. Так, например, в машинах для расфасовки чая механизмы взвешивания и упаковки являются исполнительными механизмами. В промышленности, изготавлиющей шарикоподшипники, имеются специальные машины для упаковки собранных шарикоподшипников, в которых механизмы упаковки являются исполнительными механизмами, и т. д.

Несмотря на разницу в функциональных назначениях механизмов отдельных видов, в их строении, кинематике и динамике много общего. Например, механизм поршневого двигателя, механизм кривошипного пресса и механизм привода ножа косилки имеют в своей основе один и тот же кривошипно-ползунный механизм. Механизм привода резца строгального станка, механизм ротативного насоса имеют в своей основе один и тот же кулисный механизм. Механизм редуктора, передающего движение от двигателя самолета к его винту, и механизм дифференциала автомобиля имеют в своей основе зубчатый механизм и т. д.

Поэтому можно к исследованию механизмов с различными функциональными назначениями применять общие методы, базирующиеся на основных принципах современной механики. В механике обычно рассматривается статика, кинематика и динамика как абсолютно

твердых, так и упругих тел. При исследовании движения машин и механизмов, как правило, мы можем считать жесткие тела, образующие механизм, абсолютно твердыми, так как перемещения, возникающие от упругих деформаций тел, малы по отношению к перемещениям самих тел и их точек. Если мы рассматриваем механизмы как устройства, в состав которых входят только твердые тела, то для исследования кинематики и динамики механизмов можно пользоваться методами, излагаемыми в теоретической механике. Если же требуется изучить кинематику и динамику механизмов с учетом упругости звеньев, то для этого, кроме методов теоретической механики, мы должны еще применять методы, излагаемые в сопротивлении материалов, теории упругости и теории колебаний. Если в состав механизма входят жидкие или газообразные тела, то необходимо привлекать к исследованию кинематики и динамики механизмов гидромеханику и аэромеханику.

6°. Механика машин представляет собой науку, состоящую из двух дисциплин. Первая носит название *«теория механизмов»*, а вторая носит название *«теория машин»*.

В теории механизмов мы рассматриваем кинематику и динамику механизмов и теорию строения механизмов, устанавливающую законы соединения тел, образующих механизм, и связь этих законов с геометрическими образами, по которым происходит соединение этих тел.

В теории машин мы рассматриваем кинематику и динамику машин как совокупность взаимосвязанных механизмов. Эта совокупность может образовывать отдельную машину или машинный агрегат или, наконец, машинное устройство, состоящее из системы машин, — автоматическую систему машин. В теории машин рассматриваются также вопросы теории строения машин, связанные с разработкой методов построения принципиальных схем машин, как совокупности механизмов, обеспечивающей оптимальную производительность машины при наивыгоднейших условиях ее работы. Далее в теории машин рассматриваются вопросы автоматического управления и регулирования машин и машинных агрегатов. В теорию машин обычно также включается раздел теории упругих колебаний в машинах. В этом разделе изучаются упругие колебания подвижных тел, составляющих механизмы машины, колебания опор и фундаментов машин, и излагаются методы локализации вредных колебаний.

Изучение механики машин начинается с курса теории механизмов, так как, только изучив свойства отдельных механизмов или их видов, можно переходить к изучению совокупности механизмов, образующих машину, т. е. к теории машин. В данном учебнике излагается теория механизмов в объеме, необходимом для студентов механических и машиностроительных специальностей. Теория механизмов является первой дисциплиной, вводящей студентов в круг общих и специальных дисциплин. В ее задачу входит подготовка студентов к слушанию курсов: деталей машин, технологии машиностроения и курсов по расчету и конструированию отдельных видов машин в зависимости от

специальности, по которой происходит подготовка студентов. Вместе с курсами теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин теория механизмов образует цикл предметов, обеспечивающих общинженерную подготовку студентов.

§ 2. Основные понятия и определения в теории механизмов

1°. *Теория механизмов есть наука, изучающая строение, кинематику и динамику механизмов в связи с их анализом и синтезом.*

Проблемы теории механизмов могут быть разделены на две группы. Первая группа проблем посвящена исследованию существующих механизмов — *анализу механизмов*. Вторая группа проблем посвящена проектированию новых механизмов для осуществления заданных движений — *синтезу механизмов*.

Движение механизмов зависит от их строения и сил, на них действующих. Поэтому удобно при изложении теории механизмов проблемы анализа механизмов разделить на две части:

- 1) структурный и кинематический анализ и
- 2) динамический анализ механизмов.

Структурный и кинематический анализы механизмов имеют своей целью изучение теории строения механизмов, исследование движения тел, их образующих, с геометрической точки зрения независимо от сил, вызывающих движение этих тел.

Динамический анализ механизмов имеет своей целью изучение методов определения сил, действующих на тела, образующие механизм, во время движения этих тел, и изучение взаимосвязи между движениями этих тел, силами, на них действующими, и массами, которыми обладают эти тела.

Проблемы синтеза механизмов удобно излагать по видам механизмов, потому что задачей синтеза является проектирование механизмов выбранной структуры по заданным кинематическим и динамическим условиям.

Таким образом, настоящий курс теории механизмов разделен на три следующие части:

- а) Структурный и кинематический анализ механизмов.
- б) Динамический анализ механизмов.
- в) Синтез механизмов.

2°. Всякий механизм состоит из отдельных деталей (тел). В стационарных механизмах одни детали являются неподвижными, другие детали движутся относительно них. В подвижных механизмах, как, например, в двигателе самолета или автомобиля, за неподвижные детали условно принимаются детали, неизменно связанные с корпусом самолета или автомобиля. Согласно этому в кривошипном двигателе во всех случаях к неподвижным деталям относятся корпус двигателя, подшипник коренного вала и другие детали; подвижными деталями

считаются: коренной вал, поршни, золотниковое или клапанное устройство и т. д. Каждая подвижная деталь или группа деталей, образующая одну жесткую подвижную систему тел, носит название *подвижного звена механизма*. Таким образом, например, шатун двигателя является одним подвижным звеном, хотя шатун может состоять из нескольких деталей: тела шатуна, крышек, шатунных подшипников, болтов, стягивающих эти крышки, и т. д. Но он все же будет одним подвижным звеном, ибо все детали, из которых шатун состоит, будучи соединены, образуют одну жесткую систему тел, не имеющих движения друг относительно друга. Детали, образующие одно звено, иногда не имеют жесткой связи между собою (например, лента конвейера с деталями, ею переносимыми); тогда признаком того, что они относятся к одному звену, служит отсутствие движения их относительно друг друга и, следовательно, возможность введения между ними жесткой связи без изменения кинематики.

Все неподвижные детали образуют одну жесткую неподвижную систему тел, называемую *неподвижным звеном или стойкой*. Так, например, корпус двигателя, подшипники коренного вала и т. п. образуют в совокупности одно неподвижное звено, или стойку.

Таким образом, в любом механизме мы имеем *одно неподвижное звено и одно или несколько подвижных звеньев*.

Следовательно, механизм можно рассматривать как совокупность неподвижного и подвижных звеньев. Подвижные звенья входят в соединения между собой или с неподвижным звеном так, что всегда имеет место возможность их движения одного звена относительно другого.

Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее относительное движение, называется кинематической парой.

Поверхности, линии, точки звена, по которым оно может соприкаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называются элементами звена.

Связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется кинематической цепью. Таким образом, коленчатый вал двигателя образует с неподвижным подшипником одну кинематическую пару. Шатун с коленчатым валом образует вторую кинематическую пару, поршень с шатуном третью, поршень и цилиндр четвертую, а совокупность этих кинематических пар составляет кинематическую цепь. Отсюда следует, что в основе всякого механизма лежит кинематическая цепь. Но не всякую кинематическую цепь можно назвать механизмом. Механизм предназначен для осуществления заранее заданных закономерных движений. Поэтому только та кинематическая цепь будет механизмом, звенья которой осуществляют целесообразные движения, вытекающие из инженерных производственных задач, для выполнения которых сконструирован механизм.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СТРУКТУРНЫЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СОВРЕМЕННЫХ МЕХАНИЗМАХ

§ 3. Рычажные механизмы

1°. С целью ознакомления с теми механизмами, теория которых будет в дальнейшем нами излагаться, в данной главе мы рассмотрим наиболее распространенные в практике машиностроения механизмы. При описании они разделены на отдельные группы по признаку их конструктивного оформления (рычажные, кулачковые, зубчатые и т. д.).

В современных машинах и приборах широкое применение получили так называемые *рычажные механизмы*. Простейшим видом

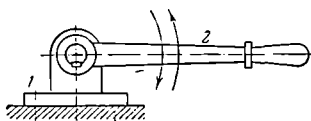


Рис. 1. Простейший двухзвенный рычажный механизм.

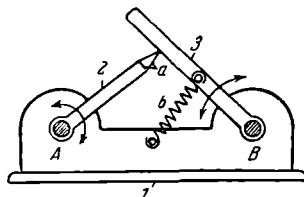


Рис. 2. Трехзвенный рычажный механизм.

рычажного механизма является двухзвенный механизм, состоящий из двух звеньев (рис. 1): подвижного рычага 2, имеющего возможность вращаться вокруг неподвижной оси, и неподвижного звена 1 (стойки). К двухзвенным механизмам относятся основные и в большинстве случаев единственные механизмы многих ротационных машин: электродвигателей, лопастных турбин и вентиляторов, молотильных барабанов и т. д., так как механизмы всех этих машин состоят из стойки и вращающегося в неподвижных подшипниках звена (ротора).

На рис. 2 показан трехзвенный рычажный механизм, состоящий из двух подвижных звеньев 2 и 3 и одного неподвижного звена 1.

Этот механизм носит название *механизма соприкасающихся рычагов*. Рычаг 2, вращаясь около неподвижной оси A , острием a касается рычага 3 и приводит его во вращательное движение вокруг неподвижной оси B . Постоянное соприкосновение рычагов 2 и 3 обеспечивается пружиной b .

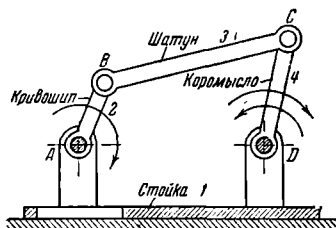


Рис. 3. Механизм шарнирного четырехзвенника.

2°. Более сложными рычажными механизмами являются механизмы, состоящие из четырех звеньев — так называемые *четырёхзвенные механизмы*.

На рис. 3 показан *механизм шарнирного четырехзвенника*. Механизм состоит из трех подвижных звеньев 2, 3 и 4 и одного неподвижного звена 1.

Все звенья соединены между собой шарнирно — образуют кинематические пары, допускающие только вращательные движения звеньев одного относительно другого (вращательные пары). Если звено, соединенное во вращательную пару со стойкой, может совершать вращение на полный оборот (на 360°), то такое звено называется *кривошипом*. Если звено, образующее вращательную пару со стойкой, не может совершать вращения на полный оборот (на 360°), то такое звено

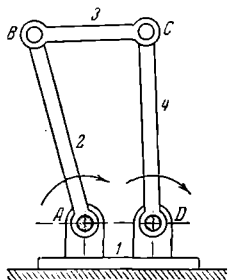


Рис. 4. Двухкривошипный шарнирный механизм.

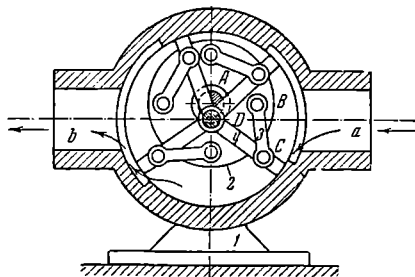


Рис. 5. Механизм насоса.

носит название *коромысла*. Звено, связанное вращательными парами с подвижными звеньями, но не связанное со стойкой, называется *шатун*ом. В шарнирном четырехзвеннике (рис. 3) кривошипом служит звено AB , коромыслом — звено CD , шатуном — звено BC и стойкой — звено AD .

Шарнирный четырехзвенник, у которого оба звена, соединенные в кинематические пары со стойкой, являются кривошипами и, таким образом, могут поворачиваться на полный оборот (на 360°), носит название *двухкривошипного шарнирного четырехзвенника* (рис. 4). Примером такого механизма может служить механизм насоса (рис. 5). Первый кривошип AB выполнен в виде круглого диска 2. Второй

кривошип представляет собой лопатку 4. Шатуном является звено 3, а стойкой — звено 1. Из чертежа видно, что за полный оборот диска 2 вокруг оси A звено 4 также делает полный оборот вокруг оси D . Указанным механизмом жидкость из канала a перекачивается

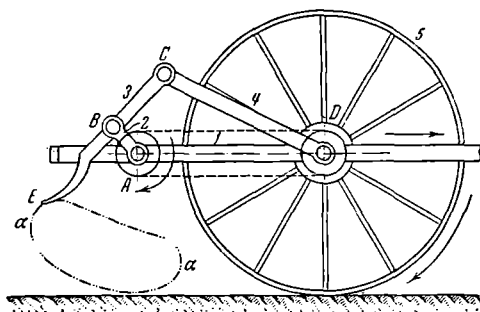


Рис. 6. Механизм сеноворошилки.

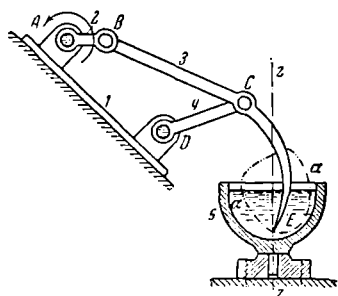


Рис. 7. Тестомесильная машина.

в канал b . Механизм рассматриваемого насоса состоит из четырех одинаковых двухкривошипных механизмов.

Если шарнирный четырехзвенник имеет один кривошип и одно коромысло, то он называется *кривошипно-коромысловым* (рис. 3). В качестве практического примера такого механизма рассмотрим механизм сеноворошилки (рис. 6). Из чертежа видно, что при полном обороте кривошипа AB коромысло CD только покачивается на некоторый угол. Точкой E звена 3 относительно звена 1 описывается траектория $\alpha - \alpha$. Можно себе представить, что при качении колеса 5 шатун CBE приподнимает сено и встряхивает его, что как раз необходимо для ускорения сушки.

Вторым примером может служить механизм тестомесильной машины (рис. 7). Здесь ведущее звено AB является кривошипом, а звено CD — коромыслом. Тестомесильная лапа CE , жестко скрепленная с шатуном BC , движется в деже 5 (сосуд с тестом); при этом точка E лапы описывает траекторию $\alpha - \alpha$.

Во время работы машины дежа 5 равномерно вращается вокруг своей вертикальной оси $z - z$, проходящей через центр дна дежи 5. Это вращение и движение лапы CE обеспечивает хорошее перемешивание всей массы теста.

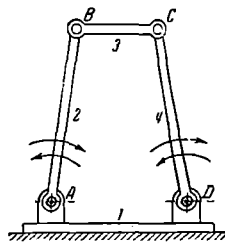


Рис. 8. Двукоромысловый механизм шарнирного четырехзвенника.

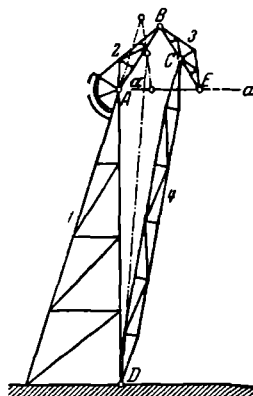


Рис. 9. Механизм подъемного крана.

Если оба звена шарнирного четырехзвенника, входящие в кинематическую пару со стойкой, будут коромыслами, т. е. оба эти звена не могут совершить вращения на полный оборот (360°), то мы получим так называемый *двухкоромысловый шарнирный четырехзвенник* (рис. 8). Примером этого механизма является механизм подъемного крана (рис. 9). Звенья AB и CD этого четырехзвенного механизма имеют только качательное движение вокруг точек A и D . К точке E

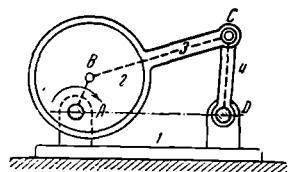


Рис. 10. Эксцентриковый механизм шарнирного четырехзвенника.

подвешивается крюк с тросом; на крюке висит поднимаемый груз. Как видно из чертежа, точка E на участке $\alpha - \alpha$ своей траектории движется почти прямолинейно.

3°. Путем особого конструктивного выполнения кинематических пар может быть получен так называемый *эксцентриковый шарнирный четырехзвенник*. Этот механизм образуется следующим образом. Пусть имеется четырехзвенный механизм $ABCD$ (рис. 10).

Пусть теперь кривошип AB выполнен в виде круглого диска (эксцентрика), вращающегося вокруг точки A и имеющего геометрический центр в точке B . Тогда кинематическую пару кривошип-шатун можно представить как полученную расширением цапфы B до таких размеров, при которых радиус цапфы становится больше кривошипа, вследствие чего последний заменяется эксцентриком. Движение описанного механизма идентично движению механизма $ABCD$ без эксцентрика. Механизмы с эксцентриками получили название *эксцентриковых механизмов*.

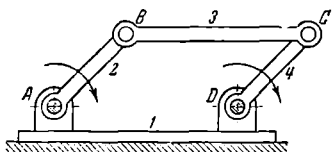


Рис. 11. Шарнирный параллелограмм.

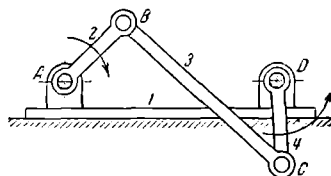


Рис. 12. Шарнирный антипараллелограмм.

4°. Из частных видов шарнирного четырехзвенника следует упомянуть о механизме *шарнирного параллелограмма* (рис. 11) — четырехзвенника, у которого длины противоположных звеньев попарно равны и параллельны. Этот механизм отличается тем, что его кривошипы 2 и 4 вращаются с одинаковой угловой скоростью, а шатун 3 движется поступательно, все его точки движутся по окружностям одинакового радиуса. В двух положениях, когда оси кривошипов 2 и 4 шатуна 3 совпадают и оси звеньев механизма располагаются на одной прямой, имеет место неопределенность в движении механизма. Кривошипы 2 и 4, проходя по инерции одно из этих положений, могут продолжать вращаться в одном общем направлении. В этом случае

остается тот же механизм шарнирного параллелограмма. Но один из кривошипов может начать вращаться в направлении, противоположном направлению вращения второго кривошипа. Тогда мы получаем механизм так называемого *шарнирного антипараллелограмма* (рис. 12).

Механизмы шарнирных параллелограммов и антипараллелограммов широко применяются в современных конструкциях механизмов. В качестве примера применения механизма шарнирного параллелограмма $ABCD$ можно указать на механизм муфты (рис. 13), соединяющий диски 2 и 4. Во избежание превращения этого механизма в неопределенных положениях в механизм шарнирного антипараллелограмма муфта имеет как бы шесть параллельно действующих шарнирных параллелограммов, находящихся в каждый данный момент в различных своих положениях.

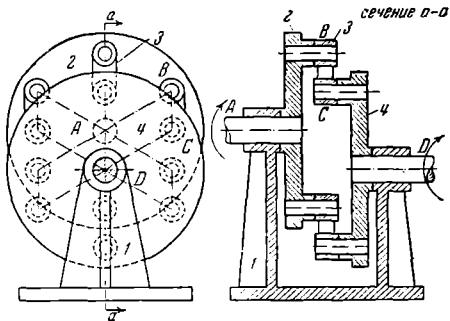


Рис. 13. Муфта для передачи вращения от одной оси к другой, ей параллельной.

На рис. 14 показан механизм $ABCD$ шарнирного антипараллелограмма, применяемый в строгальном станке. Этим механизмом осуществляется требуемый закон движения ползуна 6.

Двухкривошипный шарнирный четырехзвенник (рис. 15), у которого прилежащие друг к другу звенья равны $AB = AD$ и $BC = CD$,

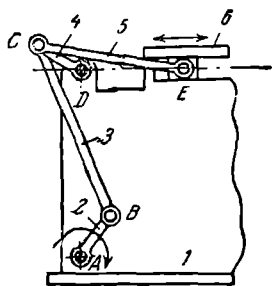


Рис. 14. Механизм шарнирного антипараллелограмма строгального станка.

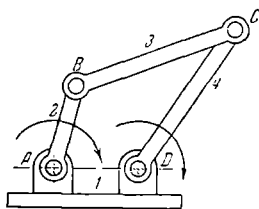


Рис. 15. Механизм шарнирного ромбоида.

отличается тем, что кривошип 2 может делать два оборота за один оборот кривошипа 4. Этот механизм называется механизмом *шарнирного ромбоида*.

5°. К шарнирным четырехзвенным механизмам относятся механизмы, предложенные П. Л. Чебышевым.

На рис. 16 показан четырехзвенный *приближенно-направляющий шарнирный механизм Чебышева*. Если в этом механизме удовлетворяются,

условия $AD = 2AB$ и $BC = CD = CE = 2,5AB$, то точка E описывает траекторию $\alpha - \alpha$, которая на участке a_1, b_1, c_1 весьма мало отличается от прямой. Этому участку соответствует движение точки B по дуге abc , равной

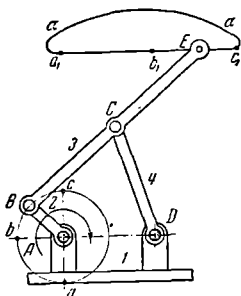


Рис. 16. Приближенно-направляющий шарнирный механизм Чебышева.

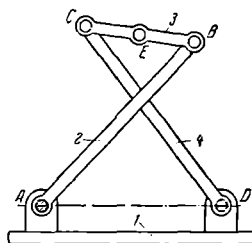


Рис. 17. Второй приближенно-направляющий шарнирный механизм Чебышева.

полуокружности. Механизм применяется в приборах, в которых требуется, чтобы одна из точек механизма на некотором участке двигалась приближенно прямолинейно.

Второй четырехзвенный приближенно-направляющий шарнирный механизм Чебышева показан на рис. 17. В этом механизме приближенно прямолинейен участок траектории средней точки E шатуна BC . Механизм, показанный на рис. 17, удовлетворяет условиям $AB = DC$, $BC = 0,5AB$ и $AD = 0,83 AB$.

П. Л. Чебышевым был разработан метод, позволяющий определять размеры звеньев механизмов так, чтобы одна из точек двигалась на некотором участке своей траектории прямолинейно или по дуге круга.

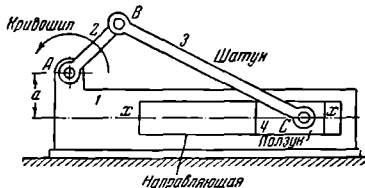


Рис. 18. Кривошипно-ползунный механизм.

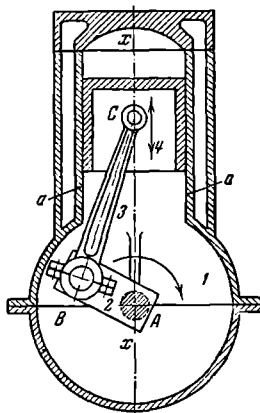


Рис. 19. Кривошипно-ползунный механизм двигателя.

Этот метод позволяет проектировать механизмы с различной длиной этих участков и с различной точностью отклонения от заданной формы (прямолинейной или круговой).

6°. Если в шарнирном четырехзвеннике вместо коромысла установить ползун, движущийся в неподвижных направляющих, то может быть получен *четырёхзвенный кривошипно-ползунный механизм* (рис. 18).

Подвижное звено 4, шарнирно соединенное с шатуном BC и скользящее в неподвижных направляющих, принадлежащих стойке, носит название *ползуна*.

Кривошипно-ползунные механизмы широко применяются в поршневых двигателях, компрессорах, прессах, насосах и т. д. На рис. 19 показан кривошипно-ползунный механизм двигателя. Звено AB может

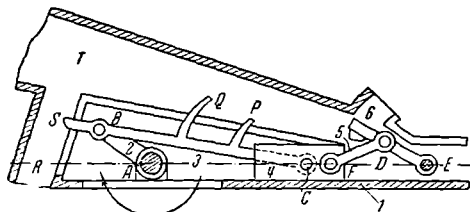


Рис. 20. Кривошипно-ползунный механизм сеного пресса.

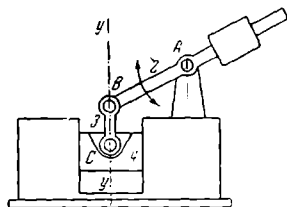


Рис. 21. Коромыслово-ползунный механизм заслонки.

совершать вращение на полный оборот вокруг точки A и, следовательно, является кривошипом, звено BC — шатун, звено 4 — ползун, а стенки a цилиндра являются направляющими.

Если прямая $x-x$, вдоль которой движется центр шарнира C , проходит через точку A (рис. 19), то такой кривошипно-ползунный механизм носит название *аксиального* или *центрального кривошипно-ползунного механизма*. В том случае, когда эта прямая не проходит через точку A , получается так называемый *дезаксиальный* или *нецентральный кривошипно-ползунный механизм* (рис. 18). Расстояние a называется *дезаксиалом*.

На рис. 20 показан кривошипно-ползунный механизм сеного пресса. Кривошип AB , вращаясь вокруг точки A , перемещает прессующий поршень 4. Сено подается по каналам R и T пальцами S , Q и P , жестко прикрепленными к шатуну BC . Для уплотнения сена служит коромысло 6, связанное со стойкой шарниром E , а со звеном 5 — шарниром D . Звено 5 шарнирно связано в точке F с ползуном 4.

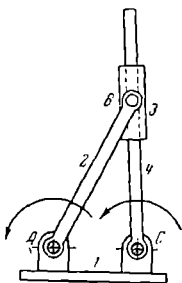


Рис. 22. Четырехзвенный кулисный механизм.

В кривошипно-ползунном механизме, как и в шарнирном четырехзвеннике, звено AB может быть или кривошипом, или коромыслом. На рис. 19 и 20 звенья AB являются кривошипами. На рис. 21 показан механизм заслонки, в котором звено AB является коромыслом. Коромысло AB , вращаясь вокруг точки A , приводит в движение заслонку 4.

7°. Если в четырехзвенном механизме ползун движется в подвижных направляющих, то получается так называемый *четырехзвенный кулисный механизм* (рис. 22). Ползун 3 движется по направляющей 4, которая вращается вокруг точки C ; кривошип 2 также вращается

на полный оборот вокруг оси A . Подвижные направляющие 4 называются *кулисами*. Примером кулисного механизма является механизм ротативного насоса, показанный на рис. 23. Звено 2, представляющее собой блок с цилиндрами, вращается вокруг неподвижной оси A . Шатуны 4 вращаются вокруг неподвижной оси C . При этом поршни 3 имеют относительное движение вдоль осей y — y цилиндров. На рис. 23 представлен механизм насоса с шестью цилиндрами.

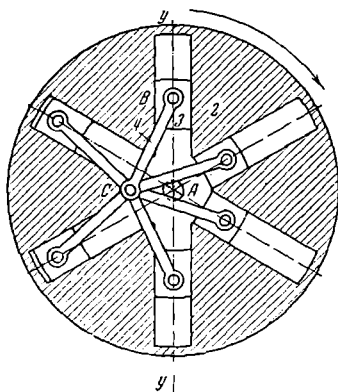


Рис. 23. Механизм ротативного насоса.

поршни 3 имеют относительное движение вдоль осей y — y цилиндров. На рис. 23 представлен механизм насоса с шестью цилиндрами.

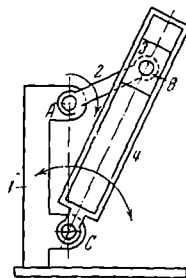


Рис. 24. Кулисный механизм строгального станка.

Примером четырехзвенного кулисного механизма может служить также кулисный механизм строгального станка (рис. 24). Кривошип AB , вращаясь вокруг оси A , перемещает ползун 3 в кулисе 4. Кулиса 4 имеет качательное движение вокруг оси, проходящей через точку C .

На рис. 25 показан *эксцентриковый кулисный механизм* насоса, работающий по следующему принципу. Эксцентрик 2 вращается вок-

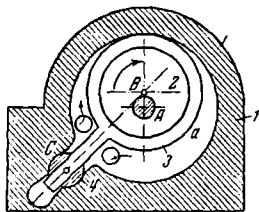


Рис. 25. Эксцентриковый кулисный механизм насоса.

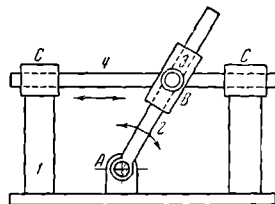


Рис. 26. Кулисный тангенсный механизм.

руг оси A . Звено 3 охватывает эксцентрик 2 хомутом a , палец звена 3 скользит в обойме 4, могущей поворачиваться вокруг оси C .

8°. Если в механизме шарнирного четырехзвенника коромысло и шатун выполнены в виде двух ползунков, 3 и 4, то получается *четырёхзвенный кулисный механизм с двумя ползунами*. На рис. 26 показан так называемый *кулисный тангенсный механизм*, находя-

ший применение в приборах для выполнения математических действий. Этот механизм позволяет вычислять значения тангенсов заданных углов, так как перемещения ползуна 4 пропорциональны тангенсам углов поворота звена 2.

Другим примером кулисного механизма с двумя ползунами является кулисный механизм компрессора с поступательно движущейся

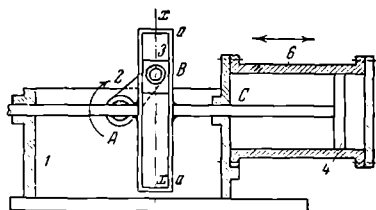


Рис. 27. Кулисный механизм компрессора.

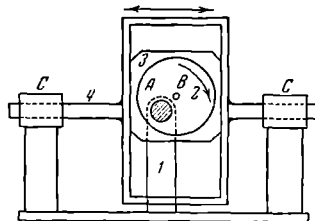


Рис. 28. Эксцентриковый кулисный механизм.

кулисой $a-a$, в направляющих которой скользит ползун 3 (рис. 27). Кулиса $a-a$ жестко связана с поршнем 4, перемещающимся в цилиндре 6. На рис. 28 показан аналогичный, но *эксцентриковый кулисный механизм*. На рис. 29 показан кулисный механизм муфты, служащий для передачи вращения между параллельными валами A и D . В нем передача осуществляется посредством промежуточной шайбы 3, имеющей два взаимно перпендикулярно расположенных выступа a и b ;

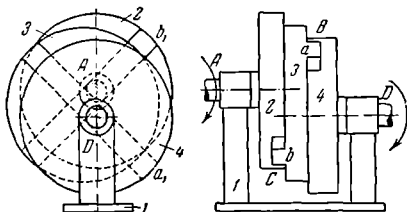


Рис. 29. Кулисный механизм муфты для передачи вращения от одной оси к другой, ей параллельной.

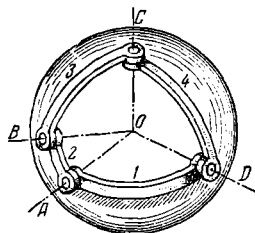


Рис. 30. Сферический шарнирный четырехзвенник.

последние входят в пазы b_1 и a_1 , принадлежащие звеньям 2 и 4, вращающимся вокруг осей A и B .

9°. Рассмотрим некоторые виды *пространственных четырехзвенных рычажных механизмов*. На рис. 30 показан так называемый *сферический шарнирный четырехзвенник*. Оси вращения всех звеньев пересекаются в одной точке O , благодаря чему движение всех звеньев происходит так, как если бы они находились на сферах с общим центром в точке O . Широкое практическое применение этот механизм получил в универсальном шарнире (рис. 31), служащем для передачи вращения между пересекающимися в точке O осями x и y .

Пространственный трехзвенный рычажный механизм показан на рис. 32. При одновременном вращении и поступательном перемещении звена 2 вокруг и вдоль оси $A-A$ звено 3 имеет сферическое движение вокруг центра B .

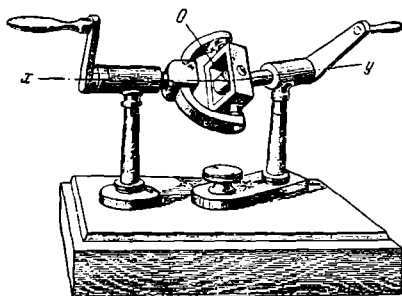


Рис. 31. Универсальный шарнир.

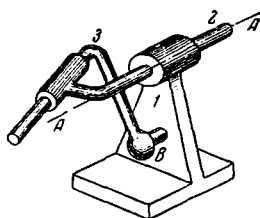


Рис. 32. Пространственный трехзвенный механизм.

10°. В технике широко применяются не только трехзвенные и четырехзвенные, но и различные многозвенные рычажные механизмы. На рис. 33 показан *шестизвенный кулисный механизм*, применяющийся в различных рабочих машинах. Звено 6 этого механизма имеет разные скорости прямого и обратного ходов.

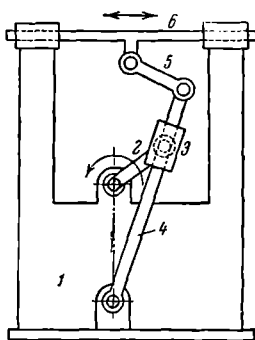


Рис. 33. Шестизвенный кулисный механизм.

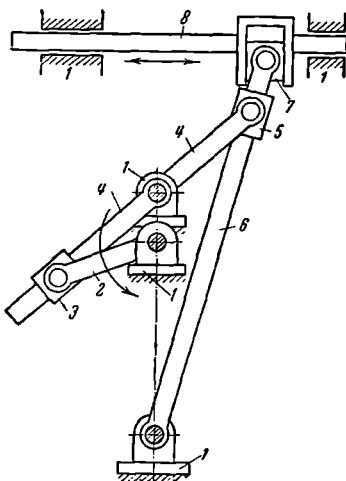


Рис. 34. Восьмизвенный кулисный механизм с четырьмя ползунами.

На рис. 34 показан *восьмизвенный кулисный механизм* с четырьмя ползунами, применяемый для получения различных скоростей прямого и обратного ходов звена 8.

На рис. 35 показан *точный направляющий восьмизвенный механизм*, предложенный одновременно и независимо друг от друга русским ученым

Липкиным и французским ученым Поселье. Механизм удовлетворяет условиям $AB = BC$, $AD = AF$, $CD = DE = EF = FC$. При этих условиях точка E механизма движется точно по прямой $q - q$, перпендикулярной к направлению AB .

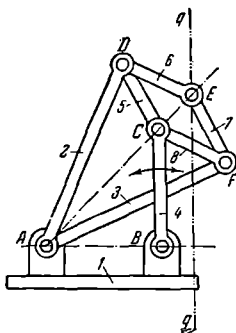


Рис. 35. Восьмизвенный направляющий механизм Липкина — Поселье.

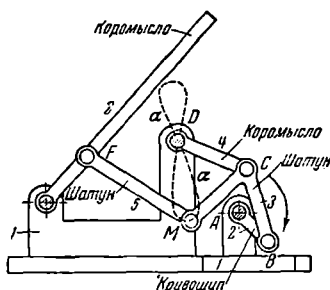


Рис. 36. Шестизвенный механизм Чебышева.

На рис. 36 показан *шестизвенный механизм Чебышева*. При определенных размерах звеньев точка M звена 3 описывает восьмеркообразную кривую $a - a$, самопересекающуюся в точке D . При этом коромысло 6 делает два полных качания за один полный оборот кривошипа 2. Звенья 3 и 5 этого механизма являются шатунами.

§ 4. Кулачковые механизмы

1°. Широкое применение в машинах и приборах получили *кулачковые механизмы*. На рис. 37 показан простейший кулачковый механизм, у которого звено 2, движущееся поступательно, относительно стойки 1, называется *кулачком*. Кривая $a - a$, по которой очерчен кулачок 2, носит название *профиля кулачка*. Звено 4 носит название *рычага, штанги или толкателя*. Обычно с целью уменьшения потерь на трение рычаг 4 снабжается круглым роликом 3.

На рис. 38 показан кулачковый механизм другого вида. Кулачок 2 вращается вокруг оси A и действует на ролик 3 поступательно движущегося толкателя 4. Если ось $x - x$ движения толкателя 4 не проходит через ось вращения A кулачка, то такой кулачковый механизм носит название *нецентрального кулачкового механизма* в отличие от *центрального*, у которого ось $x - x$ проходит через точку A .

На рис. 39 показан кулачковый механизм, у которого кулачок 2 и толкатель 4 оба вращаются. Чтобы ролик 3 был всегда прижат к кулачку 2, имеется пружина 5.

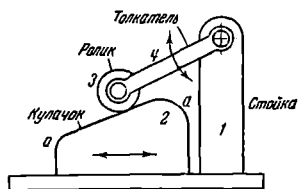


Рис. 37. Простой кулачковый механизм с поступательно движущимся кулачком.

В некоторых кулачковых механизмах толкатель оканчивается не роликом, а плоскостью (рис. 40). Такие кулачковые механизмы носят название *кулачковых механизмов с плоской тарелкой*.

На рис. 41 показан кулачковый механизм, у которого толкатель 3 имеет сложное движение.

2°. К кулачковым механизмам относятся также и так называемые *механизмы перекачивающихся рычагов*. Один из этих механизмов

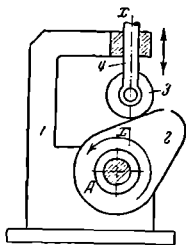


Рис. 38. Простой кулачковый механизм с вращающимся кулачком.

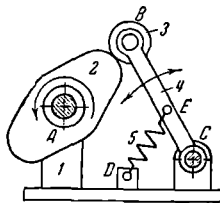


Рис. 39. Кулачковый механизм с поворачивающимся толкателем (коромыслом).

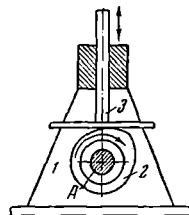


Рис. 40. Кулачковый механизм с плоским толкателем.

показан на рис. 42. Звено 4, приводимое в движение кривошипом 2 через шатун 3, перекачивается без скольжения или со скольжением по неподвижной плоскости $a-a$. Ползун 6, шарнирно присоединенный в точке F к рычагу 4, скользит в неподвижной направляющей, принадлежащей стойке 1. Ползун 6 находится под действием пружины 5.

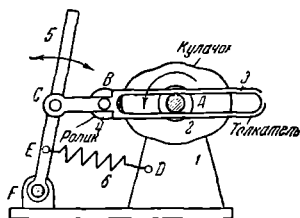


Рис. 41. Кулачковый механизм со сложным движущимся толкателем.

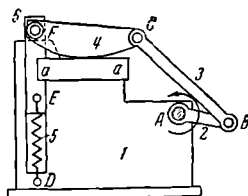


Рис. 42. Механизм перекачивающихся рычагов.

Если в каком-либо кулачковом механизме перекачивание профилей происходит без скольжения, то эти профили являются центроидами, и механизм называют *центроидным*. Очевидно, центроидные механизмы представляют частные виды кулачковых механизмов.

На рис. 43 показан пространственный кулачковый механизм для передачи вращения от кулачка 2 к толкателю 4 при взаимно перпендикулярных не пересекающихся осях A и B. При воздействии стенки паза $a-a$, принадлежащего звену 2, на ролик 3 толкателя 4, последний будет покачиваться вокруг оси B. Чтобы не нарушалось

соприкасание между звеньями, входящими в кинематическую пару, в кулачковых механизмах устанавливаются пружины (под номером 5 на рис. 39), которыми толкатель прижимается к кулачку. Такой

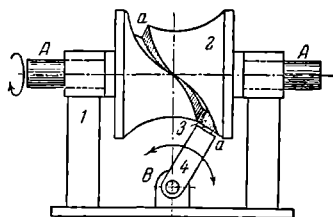


Рис. 43. Пространственный кулачковый механизм.

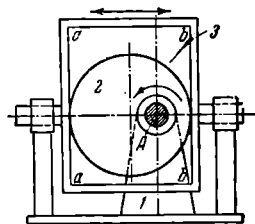


Рис. 44. Кулачковый механизм с геометрическим замыканием толкателя.

способ, обеспечивающий соприкасание между звеньями кулачкового механизма, носит название *силового замыкания*. Силовое замыкание может быть достигнуто и другими способами, например с помощью силы тяжести. Если силовое замыкание неэффективно, то может быть осуществлено так называемое *геометрическое замыкание* (рис. 43) посредством кулачка, выполненного с пазом. Такие кулачковые механизмы называются *пазовыми кулачковыми механизмами*. На рис. 44 показан кулачковый механизм, у которого геометрическое замыкание осуществляется тем, что профиль кулачка находится всегда между двумя параллельными плоскостями $a-a$ и $b-b$. В этих кулачковых механизмах должно удовлетворяться условие постоянства суммы противоположных радиусов-векторов профилей.

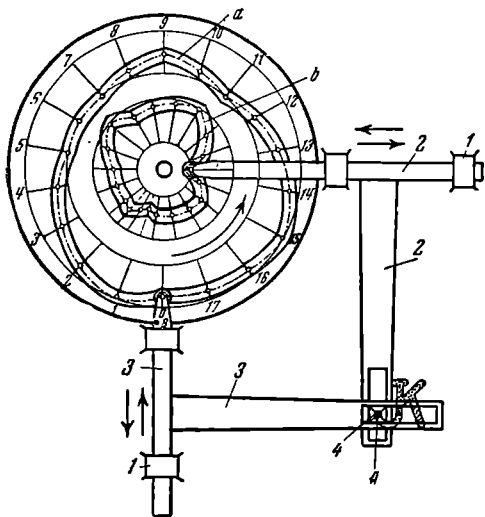


Рис. 45. Кулачковый механизм с двумя профилями для гравирования буквы «К».

Для воспроизведения сложных движений применяются кулачковые механизмы с несколькими профилями. В механизме на рис. 45 кулачок имеет два паза a и b , действующих на ролики, принадлежащие звеньям 2 и 3. Точка A ползуна 4 при этом гравировал буквы «К». Такие механизмы встречаются в гравировальных автоматах, металлообрабатывающих станках и других машинах.

§ 5. Зубчатые механизмы

1°. В различных машинах и приборах весьма часто ставится задача о воспроизведении вращательных движений с заданными угловыми скоростями вокруг различно расположенных осей. Эта задача обычно решается *зубчатыми механизмами*. Такой способ передачи движения осуществляется в технике *зубчатой передачи*.

Зубчатые механизмы представляют собой как бы сложные кулачковые механизмы, у которых некоторые звенья несут на себе целый ряд кулачков, называемых *зубьями*. Звенья, несущие зубья, называются *зубчатыми звеньями*. Они могут иметь различную форму. На рис. 46 показан плоский зубчатый механизм, у которого зубья расположены на поверхности круглых цилиндров. Такие зубчатые звенья называются *зубчатыми колесами*. Если радиус основания круглого цилиндра, на котором расположены зубья, бесконечно велик, то такое зубчатое звено называется *зубчатой рейкой*. Пример механизма с зубчатой рейкой 3 приведен на рис. 47.

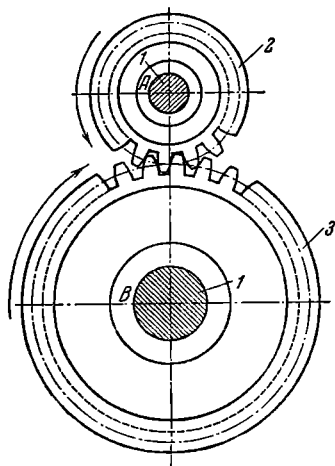


Рис. 46. Плоский зубчатый механизм с внешним зацеплением.

Два зубчатых звена, находящихся в соприкосновении своими зубьями, образуют *зубчатое зацепление*. Зубчатое зацепление, в котором зубья расположены по цилиндрической поверхности и образующие зубьев параллельны осям

цилиндров, называется *цилиндрическим зубчатым зацеплением с прямыми зубьями* (рис. 46).

Цилиндрическое зубчатое зацепление может быть *внешним* и *внутренним*. Во внешнем цилиндрическом зубчатом зацеплении зубья зубчатых колес расположены по внешним поверхностям цилиндров (рис. 46). Во внутреннем цилиндрическом зубчатом зацеплении зубья одного из колес расположены по внутренней поверхности цилиндра (рис. 48). Цилиндрическое зубчатое колесо, зубья которого расположены на поверхности круглого цилиндра, называется *круглым цилиндрическим колесом* (рис. 46 и 48). Цилиндрическое зацепление, в состав которого входит зубчатое колесо и зубчатая рейка, называется *реечным цилиндрическим зацеплением* (рис. 47).

Внешнее зубчатое зацепление (рис. 46) осуществляет передачу вращения с разными по знаку угловыми скоростями, а внутреннее зацепление — с одинаковыми по знаку угловыми скоростями (рис. 48).

Цилиндрическое зубчатое колесо, зубья которого расположены на поверхности некруглого цилиндра, называется *некруглым цилинд-*

рическим колесом. Примеры таких колес показаны на рис. 49 и 50.

2°. В зубчатых механизмах, показанных на рис. 46 и 48, оси A и B , вокруг которых происходит вращение колес, являются

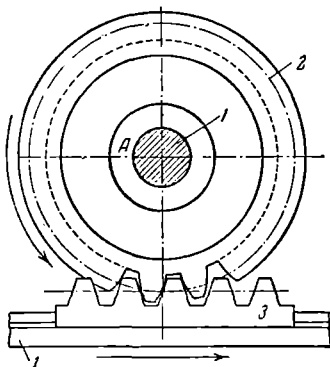


Рис. 47. Зубчатый механизм с реечным зацеплением.

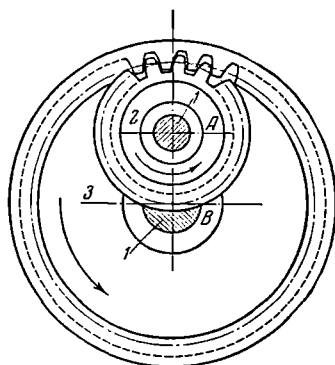


Рис. 48. Плоский зубчатый механизм с внутренним зацеплением.

неподвижными. Кроме таких зубчатых механизмов весьма часто встречаются механизмы, у которых оси некоторых колес сами являются

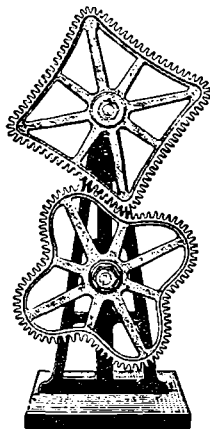


Рис. 49. Зубчатый механизм с некруглыми колесами.

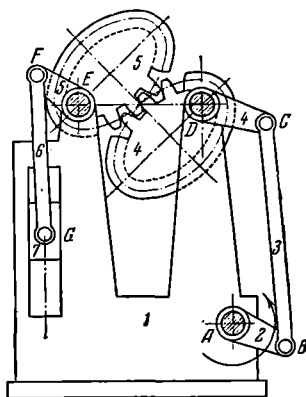


Рис. 50. Зубчато-рычажный механизм с некруглыми колесами.

подвижными. На рис. 51 показан зубчатый механизм, у которого подвижная ось B колеса 2, вращаясь вокруг оси A , описывает круглый цилиндр радиуса AB . При этом колесо 2, называемое *сателлитом*,

как бы обегает колесо 4, которое называется *центральной колесом*. Оси *A* и *B* колес 2 и 4 связаны звеном 3, называемым *водителем*.

Если оба колеса зубчатого механизма (рис. 51) подвижные, то такой зубчатый механизм называется *планетарным дифференциальным зубчатым механизмом*. Если одно из колес неподвижно, то механизм называется просто *планетарным зубчатым механизмом*.

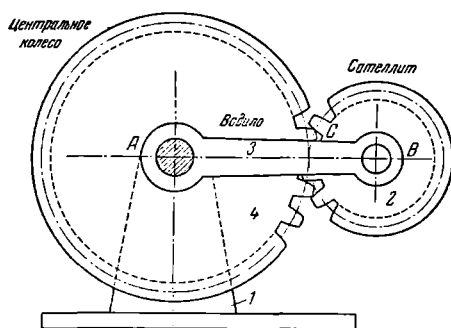


Рис. 51. Дифференциальный зубчатый механизм.

3°. Зубчатые механизмы из одной или нескольких пар зубчатых колес, заключенных в закрытые коробки, носят название *зубчатых редукторов*. На рис. 52 показан такой редуктор. Этот редуктор передает вращение от вала *A* к валу *C* с помощью зубчатых колес 2, 3, 4, 5 и 6. Колеса 4 и 5 жестко скреплены с валом *B*. Вращение вала *B* в том же направлении, как и вала *A*, осуществляется введением промежуточного колеса 3. Вал *C* имеет вращение в сторону, противоположную вращению вала *A*.

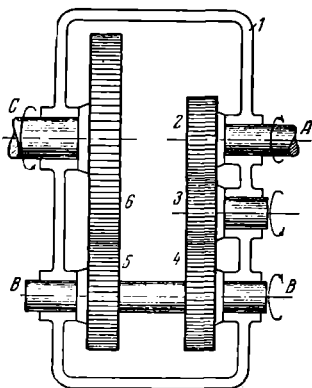


Рис. 52. Зубчатый редуктор.

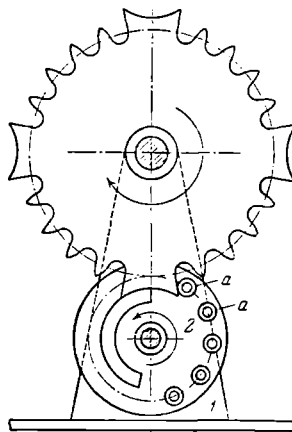


Рис. 53. Звездчатый механизм.

4°. К зубчатым механизмам относятся и так называемые *звездчатые механизмы*. В звездчатом механизме, показанном на рис. 53, колесо 2 несет на себе круглые ролики (*цевки*) *a*, которые входят в зацепление с зубьями колеса 3. Движение колеса 3 происходит только в тот период, когда ролики *a* находятся в зацеплении. Таким образом, этим механизмом осуществляется прерывистое движение ко-

леса 3. На рис. 54 показан вариант звездчатого механизма, у которого ведомое звено 3 выполнено в форме рейки.

К зубчатым механизмам с прерывистым движением относятся также механизмы так называемых *мальтийских крестов*. На рис. 55 показан механизм мальтийского креста, ведущее звено 2 которого несет на себе ролик a , который последовательно за время каждого полного оборота колеса 2 входит в соответствующий паз b

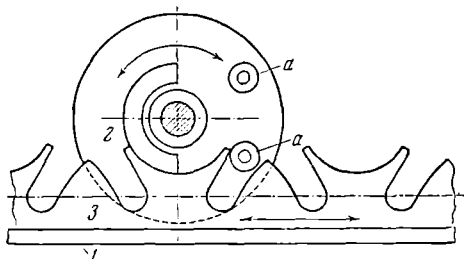


Рис. 54. Реечный звездчатый механизм.

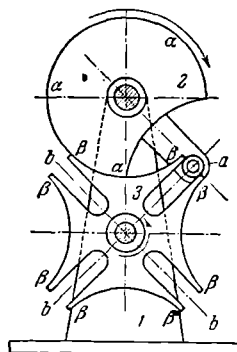


Рис. 55. Механизм мальтийского креста.

в звене 3. Таким образом, за один полный оборот звена 2 звено 3 поворачивается на 90° , после чего в соприкосание приходят дуги $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$, скользящие друг по другу и предохраняющие звено 3 от самопроизвольного поворота.

К числу зубчатых механизмов, осуществляющих прерывистое движение в одном каком-либо направлении, относятся также так называемые *храповые зубчатые механизмы*. На рис. 56 показана схема механизма шарнирного четырехзвенника $ABCD$, соединенного с храповым колесом 6 посредством собачки 5, сидящей на звене 4. Вращением звена 2 коромысло 4 приводится в колебательное движение. При ходе коромысла справа налево собачка 5 упирается в соответствующий зуб храпового колеса 6, поворачивая его на некоторый угол. Для предупреждения обратного самопроизвольного вращения колеса 6 установлена стопорная собачка 7.

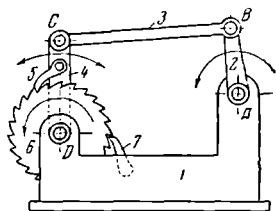


Рис. 56. Шарнирный четырехзвенник с храповым зубчатым механизмом.

5°. Переходим теперь к рассмотрению *пространственных зубчатых механизмов*. Пространственные зубчатые механизмы применяются в тех случаях, когда необходимо передать вращательное движение от одной оси другой, ей непараллельной. Возможны три вида расположения осей в пространстве. Первый вид — оси пересекаются, второй вид — оси не пересекаются, но взаимно перпендикулярны, и, наконец, третий вид — оси не перпендикулярны и не пересекаются.

В том случае, когда оси пересекаются, обычно применяются механизмы так называемых *конических зубчатых колес* (рис. 57). В данном частном случае оси *I* и *II* пересекаются в точке *O* и образуют угол, равный 45° . Вращая колесо 2 вокруг оси *I*, получаем вращение

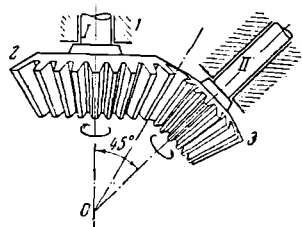


Рис. 57. Механизм конических зубчатых колес.

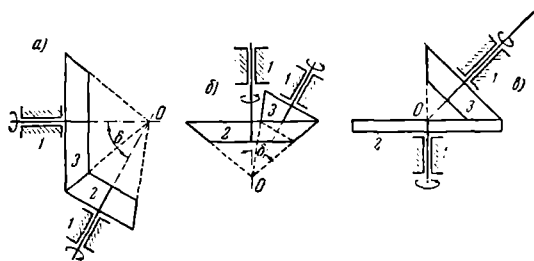


Рис. 58. Механизмы конических зубчатых колес.

колеса 3 вокруг оси *II*. Углы между осями конических колес могут быть разнообразными.

Подобно цилиндрическим колесам конические колеса могут быть с внешним и внутренним зацеплениями. На рис. 58 показаны схемы механизмов различного вида конических колес. На рис. 58, а показан механизм с *внешним коническим зацеплением*, на рис. 58, б — с *внутренним коническим зацеплением* и, наконец, на рис. 58, в показан механизм с зацеплением *конического колеса и зубчатой плоскости* («конической рейки»), представляющий собой аналогию с реечным зацеплением в круглых цилиндрических колесах. Чаще всего в машинах встречаются механизмы конических колес с внешним зацеплением и с углом между осями, равным 90° . Внутреннее зацепление встречается редко вследствие трудностей, связанных с нарезанием зубьев таких колес.

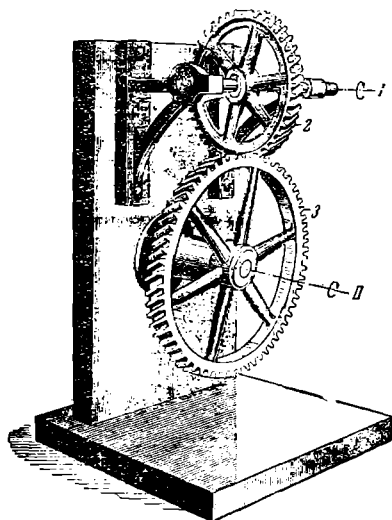


Рис. 59. Механизм винтовых колес.

В том случае, когда оси не пересекаются и не параллельны, применяют механизм так называемых *винтовых колес*. Винтовой механизм для передачи между двумя взаимно перпендикулярными осями показан на рис. 59. Вращая колесо 2 вокруг оси *I*, мы получаем вращение колеса 3 вокруг оси *II*, перпендикулярной к оси *I*.

При уменьшении числа зубьев на малом колесе зубья принимают вид винтовой резьбы (рис. 60). Такой частный вид механизма винтовых колес носит название *механизма червячной передачи* (или просто «*червячной передачи*»). Колесо 2 называется *червяком*, а колесо 3 — *червячным колесом*.

В том случае, когда оси не пересекаются и не перпендикулярны, т. е. в общем случае скрещивающихся осей, следовало бы применять механизм *гиперболоидных зубчатых колес*. Этот механизм показан на рис. 61. Два гиперболоида вращения на некоторой своей части снабжаются зубьями. Тогда при вращении колеса 2 вокруг оси I колесо 3 будет вращаться вокруг оси II. Однако вследствие трудностей изготовления гиперболоидные колеса часто заменяются винтовыми колесами, или *гипоидными зубчатыми колесами* (рис. 62.) Гипоидные колеса представляют собой

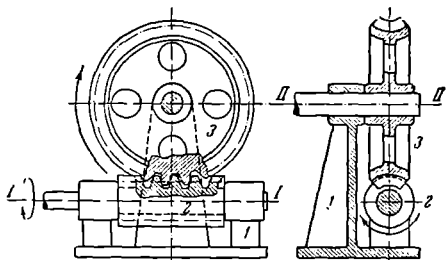


Рис. 60. Механизм червячной передачи.

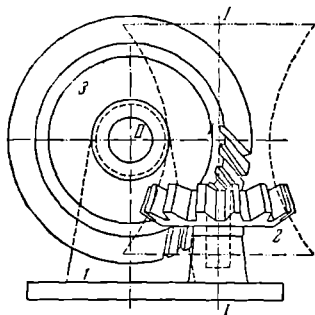


Рис. 61. Механизм гиперболоидных колес.

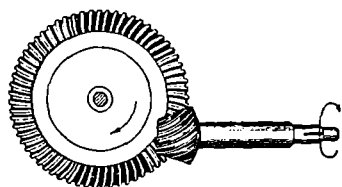


Рис. 62. Механизм гипоидных колес.

конические колеса с винтовыми поверхностями зубьев. Зубья этих колес располагаются на тех участках гиперболоида, которые приближенно могут быть заменены усеченными конусами.

§ 6. Клиновые и винтовые механизмы

1°. К *клиновым механизмам* относятся механизмы, в которых звенья обладают только поступательными движениями. Простейшим клиновым механизмом является трехзвенный механизм, показанный на рис. 63. Поступательное движение звена 2 в одном направлении вызывает поступательное движение звена 3 в другом направлении.

Клиновые механизмы применяются в основном для зажима деталей, подачи изделий и т. п. На рис. 64 показан клиновой механизм для зажима детали 6. Винт 5, вращаясь вокруг своей оси, действует на звено 4, которое своим скошенным торцом перемещает в горизон-

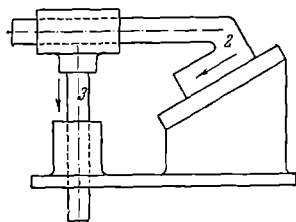


Рис. 63. Простой клиновой механизм.

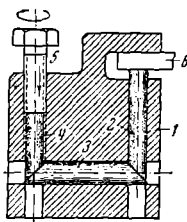


Рис. 64. Клиновой механизм прессы.

тальном направлении звено 3; звено 3 в свою очередь перемещает в вертикальном направлении звено 2, которое и зажимает деталь 6.

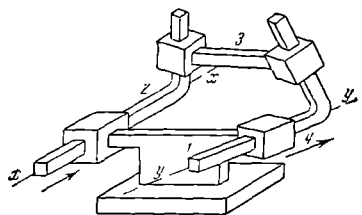


Рис. 65. Пространственный клиновой механизм.

На рис. 65 показан *пространственный четырехзвенный клиновой механизм*. При перемещении звена 2 вдоль оси $x-x$ звено 4 перемещается вдоль оси $y-y$, не параллельной оси $x-x$.

2°. К винтовым механизмам относятся механизмы, в которых некоторые звенья имеют винтовое движение, обусловленное вхождением соседних звеньев в винтовую пару. На рис. 66 показан *трехзвенный винтовой механизм*.

Вследствие различных шагов резьб винтовое движение звена 3 преобразуется в винтовое движение звена 2, от-

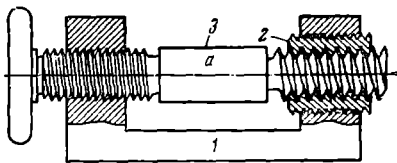


Рис. 66. Трехзвенный винтовой механизм.

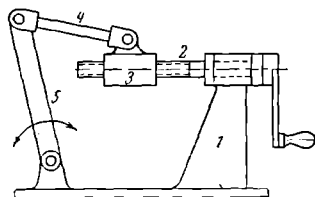


Рис. 67. Винто-рычажный механизм для перемещения коромысла.

личающееся от движения звена 3. На рис. 67 показан *винто-рычажный механизм* для перемещения коромысла 5. Перемещение достигается поворотом винта 2 в гайке 3. На рис. 68 показан *винто-рычажный механизм рулевого управления*. При вращении винта 2

гайка 3 движется поступательно вдоль оси винта и посредством тяги 4 передает движение звену 5, жестко связанному с дулом В. Стержень винта 2 может свободно вращаться и скользить в подшипнике 7.

§ 7. Фрикционные механизмы

1°. В целом ряде механизмов, применяемых в современной технике, используются силы трения в качестве сил, приводящих в движение звенья, или сил, тормозящих их движение. Механизмы, в которых используются силы трения, носят название *фрикционных механизмов*.

На рис. 69 показан простейший механизм *круглых фрикционных цилиндрических колес*.

Передача движения от колеса 2 к колесу 3 осуществляется силой трения между ободьями колес, создаваемой нажатием одного колеса на другое. На рис. 70 показан *фрикционный планетарный механизм*, состоящий из колес 2 и 3, водила 4

и неподвижного колеса 1. На рис. 71 показан механизм *конических фрикционных колес*.

2°. Фрикционные механизмы широко применяются и для плавного изменения угловых скоростей. На рис. 72 показан *лобовой фрикционный механизм* бесступенчатой передачи. На валу А жестко укреплен

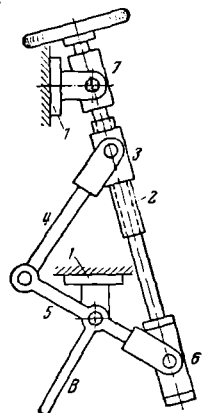


Рис. 68. Винто-рычажный механизм рулевого управления.

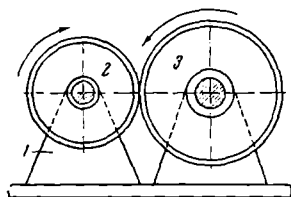


Рис. 69. Механизм круглых фрикционных цилиндрических колес.

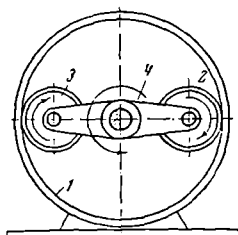


Рис. 70. Фрикционный планетарный механизм.

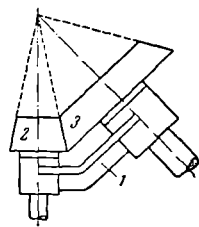


Рис. 71. Механизм конических фрикционных колес.

диск 3, который своим торцом передает движение ролику 2, связанному с валом В. Ролик 2 имеет возможность осевого перемещения вдоль оси $x-x$. Устанавливая ролик 2 в различных положениях вдоль оси $x-x$, можно при постоянной угловой скорости вала А получать различные угловые скорости вала В. На рис. 73 показан *фрикционный механизм двойной лобовой бесступенчатой передачи*. Ролик 3 расположен между двумя дисками 2 и 4. Перемещением ролика 3 можно воспроизводить различные угловые скорости ведомого вала при постоянной угловой скорости ведущего вала.

На рис. 74 показан *фрикционный механизм бесступенчатой передачи* между пересекающимися осями *A* и *B*. Для перемещения ролика *3* имеются винт *4* и гайка *5*, ось которых расположена параллельно образующей конического барабана *2*. На рис. 75 показан фрикционный механизм

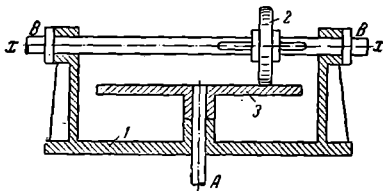


Рис. 72. Лобовая фрикционная передача.

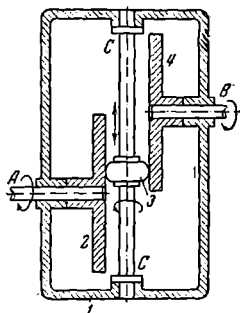


Рис. 73. Фрикционный механизм двойной лобовой передачи.

бесступенчатой передачи, у которой рабочие поверхности звеньев *2* и *4* представляют собою поверхности торов. Изменение угловой скорости

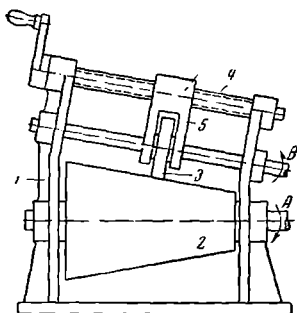


Рис. 74. Фрикционный механизм бесступенчатой передачи между пересекающимися осями барабана и ролика.

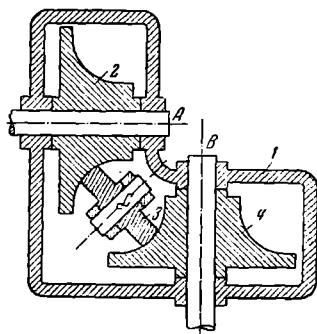


Рис. 75. Торový фрикционный механизм бесступенчатой передачи.

ведомого звена достигается поворотом ролика *3* вокруг оси *C*, перпендикулярной к плоскости, содержащей оси *A* и *B*.

Механизмы бесступенчатой передачи называются также *вариаторами скорости*.

§ 8. Механизмы с гибкими звеньями

1°. Кроме механизмов с твердыми звеньями, рассмотренных нами выше, в некоторых случаях в качестве промежуточных звеньев применяются *гибкие звенья* (тросы, канаты, ремни, ленты, цепи и т. д.).

На рис. 76 показан простейший механизм с *гибким звеном 4*, охватывающим шкивы *2* и *3*. Вращение шкивов *2* и *3* происходит

в одном и том же направлении. Если гибкое звено 4 охватывает шкивы 2 и 3 так, как это показано на рис. 77, то вращение шкивов 2 и 3

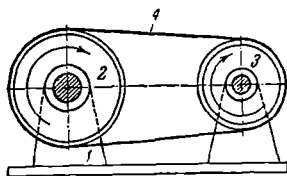


Рис. 76. Механизм с гибким звеном (открытая ременная передача).

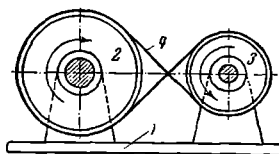


Рис. 77. Механизм с гибким звеном (перекрестная ременная передача).

происходит в разных направлениях. На рис. 78 показана передача движения гибким звеном от ведущего шкива 2 к ведомому шкиву 3

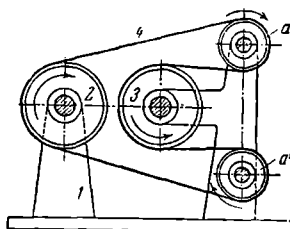


Рис. 78. Механизм с гибким звеном и направляющими роликами.

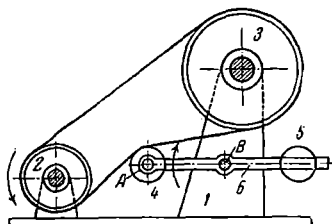


Рис. 79. Механизм с гибким звеном и натяжным роликом.

с противоположными направлениями вращения, осуществляемая посредством дополнительных роликов a и a' . Так как передача гибким звеном осуществляется за счет трения, возникающего между гибкими звеном и шкивами, то для создания

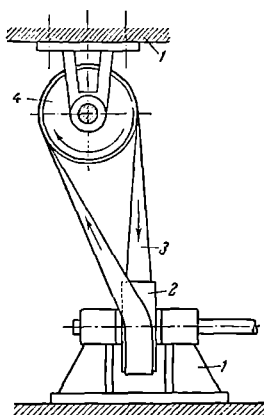


Рис. 80. Механизм с гибким звеном (полуперекрестная ременная передача).

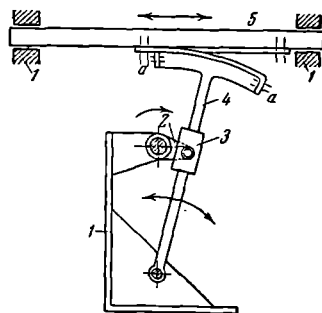


Рис. 81. Кулисный механизм с гибким стальным звеном.

необходимой силы трения применяются различные натяжные приспособления, создающие натяжение гибкого звена. Простейшее натяжное

приспособление показано на рис. 79. Натяжение достигается свободно вращающимся вокруг оси *A* натяжным роликом 4, установленным на рычаге 6, который вращается вокруг оси *B*. На противоположном плече рычага 6 устанавливается груз 5. Регулировка силы натяжения достигается перемещением груза 5 вдоль по рычагу 6.

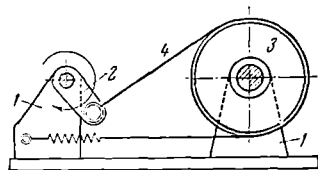


Рис. 82. Кривошипный механизм с гибким звеном.

2°. Механизмы с гибкими звеньями могут служить для передачи движения не только между параллельными осями, но и осями перекрещивающимися (рис. 80). В технике также встречаются комбинированные механизмы. На рис. 81 показан кулисный механизм, приводящий в возвратно-поступательное движение ползун 5 посредством двух стальных лент, поочередно наматывающихся на дугообразный сектор *a — a*. На рис. 82 показан механизм с гибким звеном 4. При вращении кривошипа 2 шкив 3 вращается попеременно в различных направлениях.

§ 9. Механизмы с гидравлическими и пневматическими устройствами

1°. В современных механизмах в качестве промежуточной среды, передающей движение, широко применяются жидкости и газы. Такие

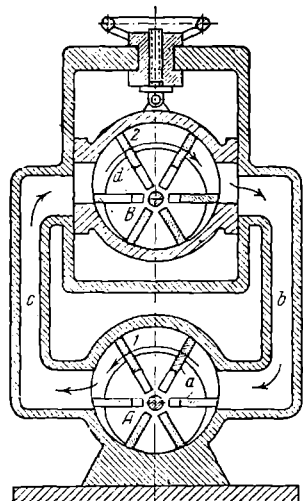


Рис. 83. Механизм с гидравлическими устройствами.

механизмы получили название *механизмов с гидравлическими или пневматическими устройствами*. На рис. 83 показан механизм с жидкой промежуточной средой. Колесо 1, вращающееся вокруг оси *A* и имеющее шесть лопастей *a*, перемещает жидкость из канала *b* в канал *c*. Перемещающаяся жидкость при этом действует на лопасть *d* колеса 2, поворачивая его вокруг оси *B*. Таким образом осуществляется передача вращательного движения от звена 1 с осью, проходящей через точку *A*, к звену 2 с осью, проходящей через точку *B*.

На рис. 84 показан механизм гидравлического привода параллельных ножей. Жидкость под постоянным давлением подается насосом через кран 7 в рабочий цилиндр 1, причем плунжер 2 с траверсой 3 и ножом 4 опускаются, производя разрезание. В это время жидкость из цилиндров 5 вытесняется в резервуар 6. Для обратного хода ножа 4

кран 7 поворачивают. Жидкость поступает в цилиндры 5, и плунже-ры 8 с траверсой 3 и ножом 4 поднимаются, а вытесняемая из рабо-чего цилиндра 1 жидкость поступает в резервуар 6.

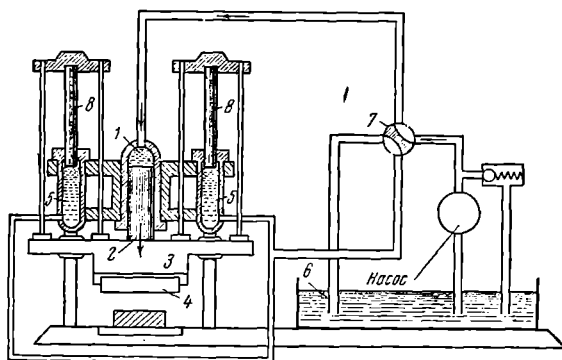


Рис. 84. Механизм гидравлического привода параллельных ножей.

2°. Механизмы с гидравлическими устройствами получили широ-кое распространение в станках для обработки металлов. На рис. 85 показан механизм гидравлического привода станка. Жидкость по-ступает из резервуара 1 через вса-сывающий трубопровод а в гид-ронасос 2, откуда перетекает в нагнетательный трубопровод б.

В правом положении конца е рычага 3, показанном на чертеже, жидкость из трубопровода посту-пает через золотник 4 в левую полость цилиндра 5, перемещая поршень 6, шток 7 и связанный с ними стол 8 станка направо. Из правой полости цилиндра 5 жид-кость удаляется через цилиндр золотника 4 в резервуар 1. В левом положении конца е рычага 3 жидкость подается в правую по-лость цилиндра 5, перемещая стол 8 влево. При этом жидкость из левой полости цилиндра 5 удаляется через золотник 4 в резервуар 1. Рычаг 3 золотника 4 поворачивается посредством упоров с, распо-ложенных на движущемся столе 8 станка. Зашелка d служит для устранения неопределенности положения рычага 3. Дроссельный кран 9 регулирует количество жидкости, подаваемой в цилиндр 5.

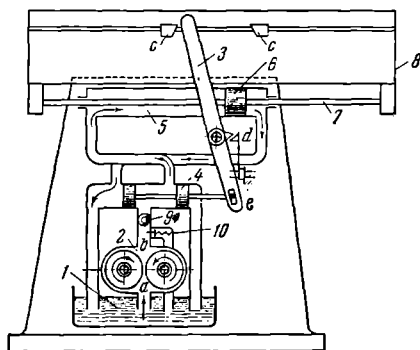


Рис. 85. Механизм гидравлического привода станка.

Лишнее количество жидкости удаляется через клапан 10 в резервуар 1.

В тех случаях, когда промежуточная среда является газом, механизм называется *механизмом с пневматическим устройством*.

§ 10. Механизмы с электрическими устройствами

1°. Во многих современных приборах, требующих быстрого включения или выключения, прерывистого движения ведомых звеньев и др., в качестве одного из элементов механизма вводятся различные электрические устройства. В качестве примера таких механизмов на рис. 86 показан *рычажно-храповой механизм*, предназначенный для протяжки ленты в телеграфных аппаратах.

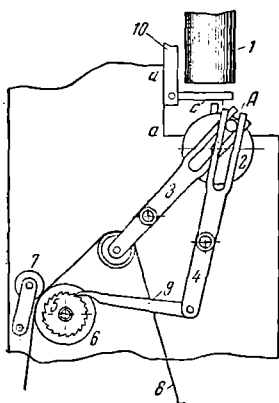


Рис. 86. Рычажно-храповой механизм.

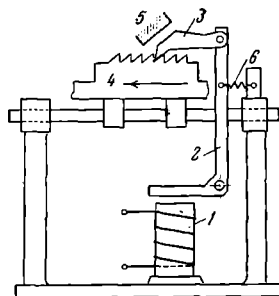


Рис. 87. Рычажно-храповой механизм.

Ползун 10 с острием с скользит по неподвижной направляющей а—а. Острие с соприкасается с пальцем диска 2 и тем самым его запирает.

При притяжении электромагнитом 1 ползуна 10 освобождается диск 2, находящийся под действием постоянного крутящего момента. При своем повороте диск 2 посредством штифта А приводит в движение рычаги 3, 4 и собачку 9. Собачка 9 поворачивает храповое колесо 5 и жестко скрепленный с ним валик 6, благодаря чему протягивается влево лента 8, зажатая между валиками 6 и 7. Длина протянутой ленты зависит от времени включения и выключения электрического тока в обмотке электромагнита.

На рис. 87 показан *рычажно-храповой механизм* с электромагнитным приводом искателя, применяемый в автоматических телефонных станциях. При включении электрического тока в обмотке электромагнита 1 угловой рычаг 2, служащий якорем электромагнита, притягивается к нему и при помощи собачки 3 передвигает звено 4 в

направлении, указанном стрелкой. Упор 5 делает невозможным продвижение звена 4 более чем на один зуб.

2°. Механизмы с электрическими устройствами широко применяются в приборах для контроля и регистрации различных процессов.

На рис. 88 показан механизм с электрической связью, контролирующей износ шлифовального круга. При вращении червячного колеса 1 и жестко укрепленного на нем кулачка 2 ролик 3 контрольного рычага 4 периодически попадает в выемку *a* кулачка 2. Контрольный рычаг 4, на конце которого находится алмазная пластинка *b*, через

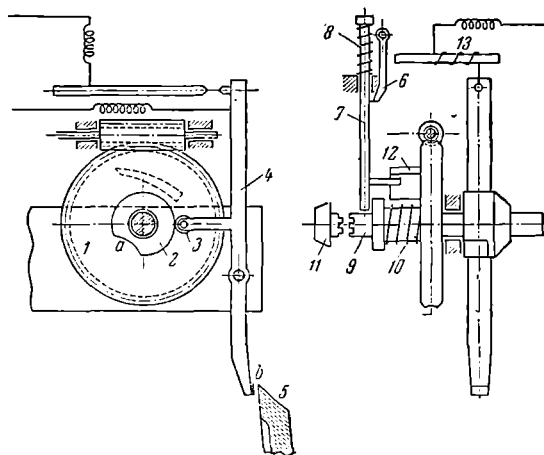


Рис. 88. Механизм контроля износа шлифовального круга.

определенные промежутки времени касается рабочей кромки шлифовального круга 5. При правильном расположении рабочих кромок круга 5 контрольный рычаг 4 не включает компенсирующее устройство. При наличии износа круга рычаг 4 отклоняется больше и замыкает электрическую цепь, вследствие чего электромагнит 13 притягивает к себе рычаг 6. Стержень 7 освобождается и под действием пружины 8 поднимается. Муфта 9 под действием пружины 10 включает коническое колесо 11. При этом шлифовальному кругу 5 с помощью механизма, не показанного на чертеже, сообщается осевое перемещение, компенсирующее износ круга. Кулачок 2, продолжая вращаться, выводит ролик 3 из выемки *a*, а рычаг 4 занимает исходное положение. Электрическая цепь размыкается, рычаг под действием силы тяжести возвращается в исходное положение. Рычаг 7 под действием планки 12 также возвращается в исходное положение, выключая при этом муфту 9.

ГЛАВА II

СТРУКТУРА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 11. Кинематические пары и их классификация

1°. *Кинематической парой называется подвижное соединение двух звеньев, находящихся в соприкосании.*

Разработкой теории кинематических пар занимались русский ученый Х. И. Гохман, опубликовавший свою работу в 1890 году, немецкий ученый Ф. Рёло и другие советские и зарубежные ученые.

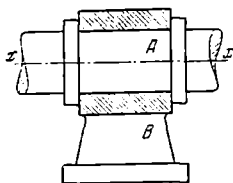


Рис. 89. Вращательная кинематическая пара.

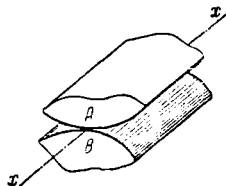


Рис. 90. Кинематическая пара в виде двух касающихся цилиндрических поверхностей.

Возможные соединения звеньев в кинематические пары весьма разнообразны. Например, на рис. 89 показана так называемая *вращательная кинематическая пара*, в которой соединение звеньев А и В образуется двумя цилиндрами, находящимися в постоянном соприкосании. Бурты внутреннего цилиндра препятствуют движению одного цилиндра относительно другого в направлении оси $x-x$, но не препятствуют вращению одного из них относительно другого.

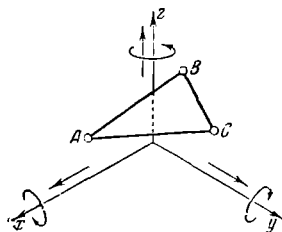


Рис. 91. К определению положения тела в пространстве.

На рис. 90 показан способ соединения, менее ограничивающий относительное движение двух звеньев А и В. Эта кинематическая пара допускает относительное перекатывание, скольжение и верчение.

Таким образом, на относительное движение каждого звена кинематической пары накладываются ограничения, зависящие от способа соединения звеньев пары. Эти ограничения, наложенные на относительное движение звеньев кинематической пары, будем называть *условиями связи* в кинематических парах.

Условия связи могут быть выражены в аналитической форме в виде заданной функциональной зависимости между координатами отдельных точек, принадлежащих элементам кинематических пар.

2°. Рассмотрим теперь, какие же связи и в каком количестве могут быть наложены на относительные движения звеньев кинематической пары.

Как известно, в общем случае всякое свободно движущееся в пространстве абсолютно твердое тело (рис. 91), положение которого определяется тремя произвольно выбранными точками A , B и C , обладает *шестью степенями свободы*. В самом деле, положение твердого тела в пространстве фиксируется координатами трех его точек A , B и C , т. е. девятью координатами: (x_A, y_A, z_A) , (x_B, y_B, z_B) и (x_C, y_C, z_C) . Между собою эти координаты связаны тремя условиями постоянства расстояний: AB , BC и CA . Таким образом, число независимых параметров, определяющих положение твердого тела, равно шести, и тело обладает *шестью степенями свободы*. Движение такого тела может быть всегда представлено как вращение вокруг и скольжение вдоль трех произвольно выбранных взаимно перпендикулярных осей x , y и z . Таким образом, твердое тело обладает шестью видами независимых возможных движений: *тремя вращениями вокруг осей x , y и z и тремя поступательными движениями вдоль тех же осей*. Поэтому если бы на движение первого звена кинематической пары, принятого за абсолютно твердое тело, не было наложено никаких условий связи, движение такого звена могло бы быть представлено как состоящее из шести вышеуказанных движений относительно выбранной системы координат xuz , связанной со вторым звеном. Как уже сказано выше, вхождение звена в кинематическую пару с другим звеном налагает на относительные движения этих звеньев условия связи. Очевидно, что число этих условий связи может быть только целым и должно быть меньше шести, так как уже в том случае, когда число условий связи равняется шести, звенья теряют относительную подвижность, и кинематическая пара переходит в жесткое соединение двух звеньев. Точно так же число условий связи не может быть меньшим единицы, ибо в том случае, когда число условий связи равно нулю, звенья не соприкасаются, и, следовательно, кинематическая пара перестает существовать; в таком случае мы имеем два тела, движущихся в пространстве одно независимо от другого.

Итак, число условий связи S , наложенных на относительное движение каждого звена кинематической пары, может располагаться в пределах от 1 до 5, т. е.

$$1 \leq S \leq 5.$$

Следовательно, число степеней свободы H звена кинематической пары в относительном движении может быть выражено зависимостью

$$H = 6 - S. \quad (2.1)$$

Из равенства (2.1) следует, что число степеней свободы звена кинематической пары в относительном движении может изменяться также от 1 до 5.

3°. Связи, наложенные на относительное движение звена кинематической пары, ограничивают те возможные относительные движения, которыми обладают звенья в свободном состоянии. В результате этих

ограничений некоторые из шести возможных относительных движений свободно движущегося звена становятся для него связанными. Например, соответствующим подбором соприкасающихся элементов звеньев можно устранить возможность одного из вращений вокруг какой-либо оси или одного из поступательных движений вдоль какой-либо оси, или одновременно одного из вращений и одного поступательного движения и т. д.

Оставшиеся возможные движения могут быть или *независимы* друг от друга, или же быть одно с другим *связаны* какими-нибудь дополнительными геометрическими условиями, устанавливающими функциональную связь между движениями. Например, в кинематической паре винта и гайки (*винтовой пары*) вращение винта вокруг его оси вызывает его поступательное движение, причем оба эти движения связаны пропорциональной зависимостью.

Оставшиеся независимыми возможные движения определяют число степеней свободы звеньев кинематической пары в их относительном движении.

Если между простейшими движениями звена вокруг и вдоль трех координатных осей x , y и z (рис. 91) отсутствуют какие-либо функциональные зависимости, то звено в зависимости от характера связей, налагаемых на его движение относительно другого звена кинематической пары, обладает числом простейших движений от 1 до 5. Число простейших движений может оказаться больше числа степеней свободы, если между простейшими движениями установлены функциональные зависимости, являющиеся дополнительными условиями связи, как, например, в винтовой паре.

4°. Рассмотрим сначала различные кинематические пары, для которых отдельные простейшие возможные движения их звеньев функционально между собой не связаны. Для этих пар числу условий связи, налагаемых на относительное движение их звеньев, соответствует такое же число исключенных простейших возможных движений этих звеньев.

Все кинематические пары делятся на *классы* в зависимости от числа условий связи, налагаемых ими на относительное движение их звеньев. Так как число условий связи изменяется от 1 до 5, то число классов пар равно пяти, в соответствии с чем мы имеем кинематические пары: I, II, III, IV и V классов. Определение класса кинематической пары может быть всегда сделано, если будет принято во внимание зависимость (2.1). Из этого уравнения находим:

$$S = 6 - H. \quad (2.2)$$

Из равенства (2.2) следует, что число условий связи S , налагаемых кинематической парой, будет всегда равняться разности между числом шесть и тем числом степеней свободы, которым обладает каждое звено пары в относительном движении. Но, как это было показано выше, в рассматриваемых парах числу степеней свободы соот-

ветствует такое же число возможных простейших движений. Следовательно, если подсчитать число простейших движений, которыми обладает звено кинематической пары в относительном движении, и вычесть полученное число из шести, то мы получим число связей, налагаемых данной кинематической парой на относительное движение ее звеньев, и этим самым определим класс пары. Рассмотрим несколько примеров.

5°. На рис. 92 показана кинематическая пара, представляющая собою шар A , перекатывающийся со скольжением по плоскости B . Движение шара относительно плоскости может быть разложено на три вращения вокруг осей x , y и z и скольжение по плоскости B , которое в свою очередь может быть разложено на скольжения вдоль осей x и y . Скольжение шара вдоль оси z невозможно, потому что движение в одну сторону ограничено плоскостью B , а при движении в обратную сторону нарушается соприкосновение звеньев, и, следовательно, кинематическая пара перестает существовать. Таким образом, движение шара может быть представлено как вращение вокруг трех осей и скольжение вдоль двух осей; таким образом, число простейших движений, которые может иметь шар, равно пяти. В этом случае число степеней свободы звеньев данной кинематической пары равно пяти и число условий связи равно

$$S = 6 - H = 6 - 5 = 1.$$

Поэтому пара, изображенная на рис. 92, должна быть отнесена к парам I класса (*пятиподвижная пара*).

Примером пары II класса может служить пара, показанная на рис. 93, представляющая собой цилиндр A , лежащий на плоскости B . Движение цилиндра A относительно плоскости B , или наоборот, сводится к вращению вокруг осей x и z и скольжению вдоль осей x и y . Таким образом, число простейших движений цилиндра равно четырем, и число степеней свободы H звена кинематической пары равно четырем. Следовательно, число условий связи S равно

$$S = 6 - H = 6 - 4 = 2.$$

Итак, данная кинематическая пара должна быть отнесена к парам II класса (*четыреподвижная пара*).

На рис. 94 показан пример пары III класса. Звено A оканчивается шаром, входящим в шаровую полость, принадлежащую звену B . Движение звена A относительно звена B , или наоборот, сводится к вра-

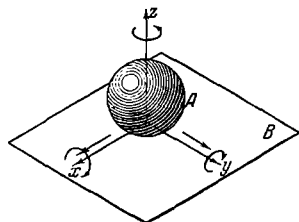


Рис. 92. Пятиподвижная кинематическая пара.

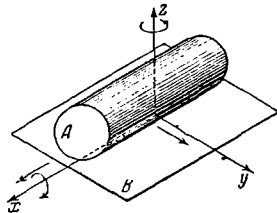


Рис. 93. Четыреподвижная кинематическая пара.

щению вокруг осей x , y и z . Следовательно, число степеней свободы H звена кинематической пары равно трем. Число условий связи S равно

$$S = 6 - H = 6 - 3 = 3,$$

т. е. пара должна быть отнесена к парам III класса (*трехподвижная пара*). Эта пара получила название *шаровой пары*.

Примером пары IV класса является пара, показанная на рис. 95. Цилиндр A находится в полем цилиндре B . Движение цилиндра A относительно цилиндра B сводится к вращению и скольжению вокруг

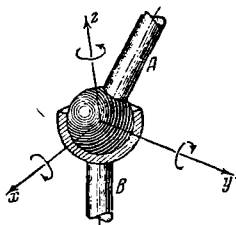


Рис. 94. Шаровая трехподвижная кинематическая пара.

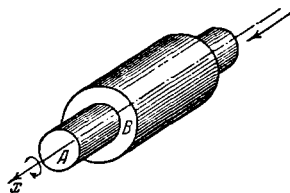


Рис. 95. Цилиндрическая двухподвижная кинематическая пара.

и вдоль оси x . Число степеней свободы H равно двум. Следовательно, число условий связи S равно

$$S = 6 - H = 6 - 2 = 4.$$

Таким образом, пара должна быть отнесена к парам IV класса (*двухподвижная пара*). Эта пара получила название *цилиндрической пары*.

На рис. 89 показана кинематическая пара V класса, каждое из звеньев которой обладает только одним возможным простейшим движением, а именно, вращением вокруг оси x . Поэтому число степеней свободы H равняется единице и, следовательно, число условий связи S в этой кинематической паре равно

$$S = 6 - H = 6 - 1 = 5.$$

Таким образом, эта пара должна быть отнесена к парам V класса (*одноподвижная пара*). Эта пара получила название *вращательной пары*.

Итак, кинематические пары в зависимости от числа условий связи, налагаемых на относительное движение ее звеньев, могут быть разделены на пять классов.

Отметим, что при рассмотрении возможных движений, которыми обладают звенья пар в их относительном движении, необходимо иметь в виду, что эти движения должны рассматриваться лишь как возможные для данного момента времени.

6°. Внутри каждого класса кинематические пары подразделяются на *виды*. Деление кинематических пар на виды может сделано по следующим признакам.

Пусть нам дана кинематическая пара I класса. Как это было указано выше, к I классу относятся те кинематические пары, в которых на относительное движение каждого звена наложено одно условие связи, и каждое из звеньев пары обладает пятью степенями свободы. Таким образом, в паре I класса этим пяти степеням свободы соответствуют пять простейших движений. Так как в пространстве в общем случае звено может иметь шесть простейших движений: три вращения и три поступательных движения, то при пяти движениях могут быть или три вращения или два поступательных движения, или три поступательных движения и два вращения и потому из шести возможных движений исключается какое-либо одно: или одно поступательное, или одно вращательное. Это ограничение в движении и является тем условием связи, которое налагается парой I класса.

Пары I класса можно было бы разбить на два вида: первый вид пар, в которых исключено одно поступательное движение, и второй вид пар, в которых исключено одно вращательное движение. Примером пары первого вида может служить пара, показанная на рис. 92. Однако *пары I класса второго вида не могут быть созданы*, ибо если мы будем иметь соприкосновение каких-либо двух геометрических элементов, то всегда относительное поступательное движение в направлении нормали к этим геометрическим элементам является уже невозможным. Например, при соприкосновении шара с плоскостью (рис. 92) невозможно поступательное движение в направлении оси z , которая служит общей нормалью к соприкасающимся поверхностям. Иначе говоря, нельзя подобрать такие формы элементов звеньев, которые при соприкосновении допускали бы три поступательных движения. *Всегда хотя бы одно поступательное движение будет исключено.*

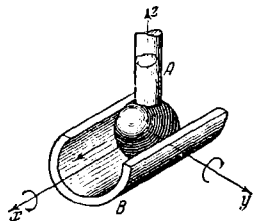


Рис. 96. Четырехподвижная кинематическая пара II класса первого вида.

Пары II класса налагают на относительное движение каждого из входящих в нее звеньев два ограничения. Эти ограничения могут быть следующими: исключаются два поступательных движения или исключаются одно поступательное и одно вращательное движения, или, наконец, исключаются два вращательных движения. Поэтому пары II класса могут быть разбиты на *три вида*: пары первого вида допускают три вращательных и одно поступательное движения каждого из звеньев; пары второго вида допускают два вращательных и два поступательных движения каждого из звеньев и, наконец, пары третьего вида допускают одно вращательное и три поступательных движения каждого из звеньев.

Пары II класса третьего вида воспроизведены быть не могут, потому что в них необходимо обеспечить три поступательных движения, что, как это было показано выше, является невозможным. Таким образом, остаются пары только *двух первых видов*.

На рис. 96 показан пример пары II класса первого вида. Шаровая поверхность, принадлежащая звену A , движется в полой трубке B . Движение звена A относительно звена B может быть представлено как вращение вокруг трех осей и поступательное движение вдоль одной оси. Пример пары II класса второго вида показан на рис. 93.

Пары III класса налагают на относительное движение каждого из входящих в нее звеньев три ограничения. Эти три ограничения могут быть следующими: исключаются три поступательных движения, исключаются два поступательных и одно вращательное движения и, наконец, исключаются три вращательных движения. Следовательно, пары III класса могут быть разбиты на четыре вида: пары первого вида, допускающие только три вращательных движения каждого из звеньев, пары второго вида, допускающие два вращательных и одно поступательное движения каждого из звеньев, пары

третьего вида, допускающие два поступательных и одно вращательное движение, и, наконец, пары четвертого вида, допускающие только три поступательных движения каждого из звеньев.

Пары III класса четвертого вида не могут быть осуществлены, так как в них необходимо обеспечить три поступательных движения. Таким образом, могут существовать пары только трех первых видов.

Пример пары первого вида показан на рис. 94. Пример пары III класса второго вида показан на рис. 97. В этой паре звено *A* оканчивается шаровой поверхностью. На шаровой поверхности имеется палец *a*, который входит в прямолинейный прорез *b*, имеющийся в полке цилиндра *B*. Движение звена *A* относительно звена *B* или звена *B* относительно звена *A* сводится к вращательному движению вокруг осей *y* и *z* и поступательному движению вдоль оси *x*.

Пример пары третьего вида показан на рис. 98. Она представляет собой параллелепипед *A*, лежащий на плоскости *B*. Движение звена *A* относительно звена *B* или звена *B* относительно звена *A* сводится к поступательному

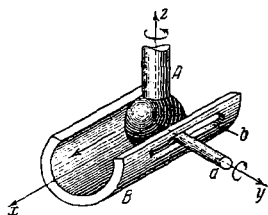


Рис. 97. Трехподвижная кинематическая пара III класса второго вида.

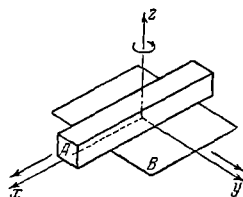


Рис. 98. Трехподвижная плоскостная кинематическая пара III класса третьего вида.

движению вдоль двух осей *x*, *y* и к одному вращательному движению вокруг оси *z*, перпендикулярной к плоскости *B*. Эта пара получила название *плоскостной пары*.

Пары IV класса налагают на относительное движение каждого из входящих в нее звеньев четыре ограничения. Исключаются три поступательных и одно вращательное движение, исключаются два вращательных и два поступательных движения и, наконец, исключаются одно поступательное и три вращательных движения. Таким образом, пары IV класса могут быть разбиты на *три вида*. Пары первого вида допускают только два вращательных движения. Примером пары этого вида может быть звено *A* (рис. 99), выполненное в виде кольца круглого сечения (в виде тора), на которое плотно надето второе кольцо *B*. Относительное движение звеньев такой пары может быть сведено к двум вращательным движениям: вокруг оси *a—a*, перпендикулярной к плоскости кольца *A*, и вокруг оси *b—b*, перпендикулярной к плоскости кольца *B*. Пары второго вида допускают одно вращательное и одно поступательное движения. Пример такой пары показан на рис. 95. Пары третьего вида допускают только два поступательных движения. *Пары IV класса третьего вида осуществлены быть не могут*.

Пары V класса налагают на относительное движение каждого звена пять ограничений. Исключаются три поступательных и два вращательных движения или три вращательных и два поступательных движения. Поэтому пары V класса могут быть разбиты на два вида: пары первого вида допускают только одно вращательное движение, а пары второго вида — только одно поступательное движение.

Примером пары первого вида может служить пара, показанная на рис. 89, которая допускает лишь относительное вращение звеньев *A* и *B* вокруг оси *x* и называется *вращательной парой*. Примером пары второго вида

является пара, изображенная на рис. 100. Звено A может двигаться поступательно относительно звена B вдоль оси x . Эта пара называется *поступательной парой*.

Из рассмотрения всех кинематических пар, для которых их отдельные возможные движения функционально не связаны, следует, что конструктивное оформление этих пар может быть весьма разнообразным. По допускаемым этими парами движениям они могут быть разбиты внутри классов на виды.

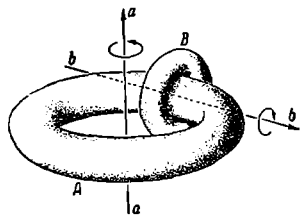


Рис. 99. Двухподвижная торовая кинематическая пара IV класса первого вида.

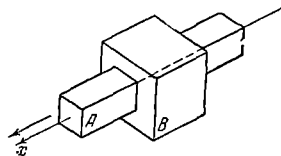


Рис. 100. Одноподвижная поступательная кинематическая пара V класса второго вида.

В практике машиностроения получило распространение относительно небольшое число видов кинематических пар. В основном применяются те виды кинематических пар, которые обеспечивают надежность работы механизмов, просты с точки зрения технологии обработки их элементов и удовлетворяют требуемым движениям звеньев механизмов. Поэтому мы ограничиваемся рассмотрением только наиболее широко распространенных в конструкциях механизмов кинематических пар.

7°. Рассмотренные выше кинематические пары относились к парам, для которых *мгновенные* возможные движения их звеньев не зависят друг от друга. Однако в технике встречаются кинематические пары, для которых относительные движения их звеньев связаны какой-либо дополнительной геометрической зависимостью. В качестве примера рассмотрим один вид такой пары, наиболее часто встречающейся в механизмах. Пусть, например, вращательное и поступательное относительные движения звеньев пары IV класса, показанной на рис. 95, связаны условием, что заданному углу φ поворота одного звена относительно другого вокруг оси x соответствует поступательное перемещение h вдоль той же оси. В этом случае, хотя звенья пары имеют и поступательное, и вращательное движения, но эти движения связаны условием

$$h = h(\varphi), \quad (2.3)$$

и таким образом, на относительное движение звеньев пары наложена еще одна дополнительная связь, выраженная соотношением (2.3). В этом случае пара должна быть отнесена не к IV, а уже к V классу. Подобные пары весьма часто встречаются в технике и носят название *винтовой пары* вследствие винтового характера относительного движения их звеньев.

Винтовая пара представляет собой два звена A и B (рис. 101). Цилиндр B имеет на себе внешнюю винтовую резьбу b ; соответственно

в звене A сделана внутренняя резьба a . При вращении звена A относительно B или звена B относительно звена A движущееся звено перемещается вдоль оси $x-x$. Ясно, что повороту какого-либо звена на некоторый угол φ соответствует связанное с поворотом перемещение h вдоль оси $x-x$, т. е. вращательное движение звена

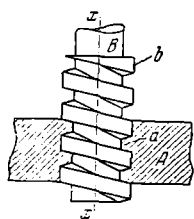


Рис. 101. Винтовая пара.

закономерно связано с поступательным его движением. Эта связь может быть легко получена. Для этого рассмотрим винтовую линию, принадлежащую какому-либо элементу звена данной пары. Пусть эта винтовая линия принадлежит цилиндру B радиуса r (рис. 102). Развернем поверхность цилиндра B на плоскость; тогда вместо винтовой линии получим некоторую прямую, наклоненную к горизонту под углом β , называемым *углом подъема резьбы*. Если звено B (рис. 101) повернуть на полный оборот, на угол, равный 2π , то это звено переместится вдоль оси $x-x$ на величину h , которая называется *шагом винта* (рис. 102). Если же повернуть звено B на произвольно заданный угол φ , то оно переместится вдоль оси на величину h' :

$$h' = \frac{h\varphi}{2\pi}. \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) налагает связь на движение звеньев винтовой пары вдоль и вокруг оси $x-x$. Так как из рис. 102 следует, что

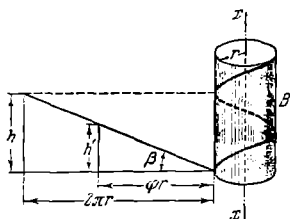


Рис. 102. Винтовая линия и ее развертка на плоскости.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2\pi r},$$

то

$$h' = r\varphi \operatorname{tg} \beta = C\varphi,$$

где через C обозначена постоянная, равная $r \operatorname{tg} \beta$.

Из последнего соотношения следует: если угол $\beta = 0$, то $h' = 0$, и мы получаем только вращение звена вокруг общей оси пары. Следовательно, винтовая пара переходит во вращательную пару, показанную на рис. 89. Если же $\beta = \pi/2$, т. е. резьба параллельна общей оси пары, то $\operatorname{tg} \beta = \infty$ и $r\varphi = 0$, откуда $\varphi = 0$, так как $r \neq 0$. В этом случае винтовая пара переходит в поступательную пару, показанную на рис. 100.

8°. Кинематические пары делятся на низшие и высшие.

Кинематическая пара, которая может быть выполнена соприкосновением ее звеньев только по поверхности, называется низшей. Кинематическая пара, которая может быть выполнена соприкосновением ее звеньев только по линии или в точках, называется высшей.

Примером низшей кинематической пары может служить пара, показанная на рис. 89. В этой паре звенья соприкасаются цилиндрическими поверхностями. Примеры высших пар приведены на рис. 93 и 92. В паре, изображенной на рис. 93, звенья соприкасаются по прямой линии. В паре, показанной на рис. 92, звенья соприкасаются в точке. Для того чтобы элементы кинематических пар находились в постоянном соприкосновении, они должны быть замкнуты. Замыкание может быть либо *геометрическим* либо *силовым*.

Геометрическое замыкание осуществляется соответствующими геометрическими формами элементов кинематической пары. Например, пары V класса, изображенные на рис. 94 — 101, являются замкнутыми геометрически, потому что соприкосновение элементов звеньев этих пар обеспечивается их формами.

Чтобы пара, показанная на рис. 92, была замкнутой, необходимо прижимать шар к плоскости какой-нибудь силой. *Силовое замыкание осуществляется силой веса, упругости пружин и т. п.*

§ 12. Условные изображения кинематических пар

1°. При схематическом изображении механизмов на чертежах удобнее вместо конструктивного изображения кинематических пар и звеньев ввести условные их изображения. Рассмотрим условные изображения некоторых наиболее употребительных кинематических пар.

На рис. 103 показаны два варианта схематического изображения вращательной пары V класса, состоящей из звеньев *A* и *B*. Первый вариант (рис. 103, *а*) дает изображение, более близкое к конструкции; второй вариант (рис. 103, *б*) представляет собой схематизированное изображение.

На рис. 104 даны схематические изображения вращательной пары V класса для тех случаев, когда одно из звеньев пары (звено *A*) неподвижно.

На рис. 105 даны схематические изображения поступательной пары V класса, а на рис. 106 показаны схематические изображения той же пары при неподвижном звене *B*.

На рис. 107 представлены схематические изображения винтовой пары V класса.

В некоторых случаях необходимо дать полное представление о виде тех элементов, которыми соприкасаются звенья пары. В этих случаях на схеме полностью и точно изображается очертание (*профиль*)

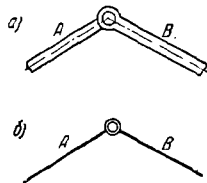


Рис. 103. Схематические изображения вращательной пары: а) изображение с схематизированными конструктивными формами; б) изображение, применяемое на кинематических схемах.

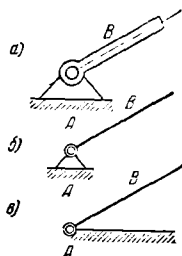


Рис. 104. Схематические изображения вращательной пары с одним неподвижным звеном: а) изображения с схематизированными конструктивными формами; б) изображение, применяемое на кинематических схемах; в) то же.

соприкасающихся элементов звеньев. Примеры изображения таких пар показаны на рис. 108. На рис. 108, а круглый ролик A соприкасается с профилем $a-a$ звена B ; на рис. 108, б зуб A одного зубчатого колеса соприкасается с зубом B другого зубчатого колеса.

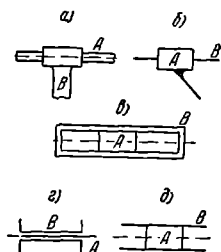


Рис. 105. Схематические изображения поступательной пары: а) изображение с схематизированными конструктивными формами; б) изображение, применяемое на кинематических схемах; в) изображение с направляющей в виде паза; г) и д) изображение, применяемое на кинематических схемах.

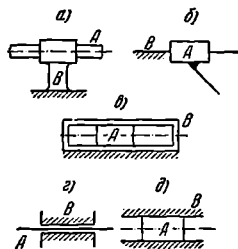


Рис. 106. Схематические изображения поступательной пары с одним неподвижным звеном: а) изображение с схематизированными конструктивными формами; б) изображение, применяемое на кинематических схемах; в) изображение с направляющей в виде паза; г) и д) изображения, применяемые на кинематических схемах.

Два зубчатых колеса, входящих в кинематическую пару, имеют условное изображение, показанное на рис. 109.

2°. Введем также условные обозначения для звеньев, входящих в кинематические пары.



Рис. 107. Схематические изображения винтовой пары: а) изображение с схематизированными конструктивными формами; б) и в) изображения, применяемые на кинематических схемах.



Рис. 108. Изображения высшей пары: а) пара с круглым роликом A и криволинейным профилем B ; б) пара в виде двух касающихся криволинейных зубьев A и B .

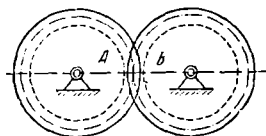


Рис. 109. Схематическое изображение зубчатого механизма из двух колес.

Если необходимо изучить движение только двух точек звена, то схематическое движение такого звена можно представить в виде,

показанном на рис. 110. На этом рисунке представлен тот случай, когда звено входит в две вращательные пары A и B . На рис. 111 показаны схематические изображения звена, входящего в три вращательные пары: A , B и C . Наконец, на рис. 112 показано схематическое изображение звена, входящего в три вращательные пары A ,

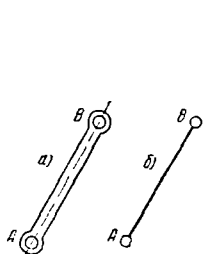


Рис. 110. Схематические изображения звена, входящего в две вращательные кинематические пары: а) изображение с конструктивными формами; б) изображение, применяемое на кинематических схемах.

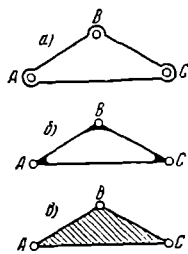


Рис. 111. а), б) и в). Различные изображения звена, входящего в три кинематические пары.

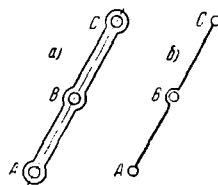


Рис. 112. Схематическое изображение звена, входящего в три вращательные пары: а) изображение с конструктивными формами; б) изображение, применяемое на кинематических схемах.

B и C с параллельными осями вращения, лежащими в одной плоскости.

На схематических изображениях других кинематических пар мы остановимся далее, по мере необходимости в их применении.

§ 13. Кинематические цепи

1°. *Кинематической цепью называется связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары.* На рис. 113 показана кинематическая цепь, состоящая из четырех звеньев, образующих три кинематические пары. Звенья 1 и 2 входят во вращательную пару A (V класса). Звенья 2 и 3 — в поступательную пару B (V класса) и, наконец, звенья 3 и 4 входят во вращательную пару C (V класса).

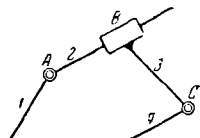


Рис. 113. Схема кинематической цепи из четырех звеньев.

Кинематические цепи делятся на простые и сложные. *Простой кинематической цепью называется такая цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары.* Пример простой цепи с вращательными парами A , B и C (V класса) показан на рис. 114.

Сложной кинематической цепью называется цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары.

матические пары. Пример такой цепи с вращательными парами A, B, C, D и E (V класса) дан на рис. 115.

2°. Простые и сложные кинематические цепи в свою очередь делятся на *замкнутые* и *открытые*. *Замкнутой кинематической*

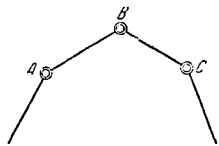


Рис. 114. Схема простой кинематической цепи из четырех звеньев.

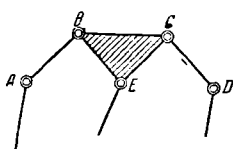


Рис. 115. Схема сложной открытой кинематической цепи из шести звеньев.

цепью называется кинематическая цепь, каждое звено которой входит по крайней мере в две кинематические пары. Примеры таких цепей с вращательными парами (V класса) показаны на рис. 116 и 117.

Незамкнутой кинематической цепью называется кинематическая цепь, в которой есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару. Примерами

таких цепей могут служить цепи, показанные на рис. 114 и 115.

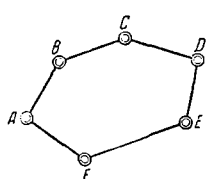


Рис. 116. Схема простой замкнутой кинематической цепи из шести звеньев.

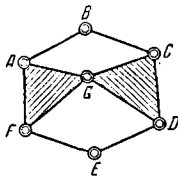


Рис. 117. Схема сложной замкнутой кинематической цепи из шести звеньев.

§ 14. Структурная формула кинематической цепи общего вида

1°. Основы теории структуры кинематических цепей заложены в работе П. И. Сомова, опубликованной в 1887 году, и развиты со-

ветскими и зарубежными учеными. Мы будем следовать в основном методам, разработанным отечественными учеными.

Если на движение звена в пространстве не наложено никаких условий связи, то оно, как известно, обладает шестью степенями свободы. Тогда если число звеньев кинематической цепи равно k , то общее число степеней свободы, которым обладают k звеньев до их соединения в кинематические пары, равно $6k$. Соединение звеньев в кинематические пары накладывает различное число связей на относительное движение звеньев, зависящее от класса пар (см. § 11). Если число пар I класса, в которые входят звенья рассматриваемой кинематической цепи, равно p_1 , число пар II класса — p_2 , число пар III класса — p_3 , число пар IV класса — p_4 и, наконец, число пар V класса — p_5 , то из $6k$ степеней свободы, которыми обладали звенья до их вхождения в кинематические пары, необходимо исключить те степени свободы, которые отнимаются вхождением звеньев в кинематические пары. Тогда число степеней свободы H , которым обладает кинематическая цепь, будет равно

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (2.5)$$

В машинах применяются обычно такие кинематические цепи, у которых одно из звеньев неподвижно, т. е. является стойкой. Например, в механизме (рис. 118) двигателя внутреннего сгорания кривошип, шатун, поршень и цилиндр с рамой образуют кинематическую цепь, у которой неподвижным звеном (стойкой) является цилиндр с рамой двигателя. Следовательно, при изучении движения всех звеньев кинематической цепи двигателя мы рассматриваем их абсолютные перемещения происходящими относительно одного из звеньев, принятого за неподвижное (стойку). Если одно из звеньев кинематической цепи будет неподвижным, то общее число степеней свободы цепи уменьшится на шесть и число степеней свободы ω относительно неподвижного звена будет равно

$$\omega = H - 6. \quad (2.6)$$

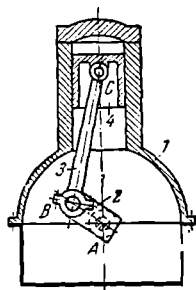


Рис. 118. Изображение механизма из четырех звеньев.

2°. Число ω степеней свободы кинематической цепи относительно звена, принятого за неподвижное, называется *числом степеней подвижности* кинематической цепи или кратко *степенью подвижности*.

Подставляя в (2.6) вместо H его выражение из соотношения (2.5), получаем:

$$\omega = 6(k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (2.7)$$

Если в равенстве (2.7) обозначить величину $k - 1$ через n , то получим:

$$\omega = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (2.8)$$

где n — число *подвижных* звеньев кинематической цепи. Равенство (2.8) носит название *формулы подвижности*, или *структурной формулы кинематической цепи общего вида*.

Формула (2.8) впервые в несколько ином виде, была дана П. И. Сомовым в 1887 году и развита А. П. Малышевым в 1923 году и носит название *формулы Сомова — Малышева*.

Если кинематическая цепь образована парами только V класса, то формула (2.8) принимает следующий вид:

$$\omega = 6n - 5p_5.$$

Пример. Рассмотрим пример на определение степени подвижности кинематической цепи. На рис. 144 (стр. 75) показана кинематическая цепь, у которой звенья 1 (стойка) и 2 входят в пару A (IV класса); звенья 2 и 3 — в пару B (V класса); звенья 3 и 4 — в пару C (III класса) и, наконец, звенья 4 и 1 (стойка) входят в пару D (V класса). Число подвижных звеньев n равно трем, число пар V класса p_5 равно двум, число пар IV класса p_4 равно единице и

число пар III класса p_3 также равно единице. Подставляя числа звеньев и пар в формулы (2.8), получаем:

$$\omega = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1,$$

т. е. рассматриваемая кинематическая цепь обладает одной степенью подвижности.

ГЛАВА III

СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

§ 15. Степени подвижности механизма

1°. В § 1, 5° было дано общее определение механизма. Для исследований различных подвижных систем с твердыми звеньями их можно рассматривать как кинематические цепи с твердыми звеньями. Для таких систем можно пользоваться следующим определением механизма.

Механизмом называется кинематическая цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев относительно любого из них все остальные звенья совершают однозначно определяемые движения.

Звенья механизма, законы движения которых считаются заданными, называются *ведущими*. Звенья механизма, законы движения которых однозначно определяются законами движения ведущих звеньев, называются *ведомыми*. Таким образом, основным признаком механизма является закономерная зависимость движения всех его ведомых звеньев от заданного движения звеньев ведущих.

Как это было указано выше (§ 2, 1°), при кинематическом исследовании механизмов изучается их движение вне зависимости от сил, вызывающих это движение. Поэтому при изучении структуры и кинематики механизмов необязательно в качестве ведущего звена выбирать то звено, к которому приложена внешняя сила, приводящая в движение механизм. Если термин «ведущее» применять только к звеньям, к которым приложены движущие силы, то те звенья, движение которых задано, можно также называть *«начальными звеньями»*.

Чтобы изучить движение механизма, недостаточно знать структуру его, т. е. число звеньев, число и классы кинематических пар. Необходимо также знать размеры отдельных звеньев, влияющие на движение их, взаимное положение звеньев и т. д. Поэтому при изучении движения звеньев механизма обычно составляют так называемую *кинематическую схему механизма*, которая является его кинематической моделью.

Кинематическая схема механизма строится в выбранном масштабе с точным соблюдением всех размеров и форм, от которых зависит движение того или другого звена или, другими словами, с соблюдением тех размеров и форм, при изменении которых изменяются поло-

жения, скорости и ускорения точек механизма. На кинематической схеме должно быть указано все, что необходимо для изучения движения. Все лишнее, не характерное для движения, должно быть исключено, чтобы не усложнять чертежа.

В качестве примера рассмотрим механизм двигателя, показанный на рис. 119, а. Так как все звенья этого механизма движутся параллельно одной общей плоскости (плоский механизм), то чтобы изучить движение любого звена, достаточно изучить движение каких-либо двух его точек. Например, для изучения движения кривошипа AB достаточно знать в каждый данный момент положение двух точек A и B ; для изучения движения шатуна BC достаточно знать в каждый данный момент положение двух его точек B и C . Тогда, пользуясь условными обозначениями, указанными на рис. 103—112, составляем кинематическую схему механизма (рис. 119, б). Все необходимые размеры звеньев отложены в некотором выбранном масштабе μ_1 м/мм, который означает, что один миллиметр чертежа соответствует μ_1 метрам натуре, т. е.

$$1 \text{ мм} \rightarrow \mu_1 \text{ м.}$$

Труднее составить кинематическую схему, если звенья механизма имеют пространственное движение. В этом случае кинематическая схема составляется в соответствующих проекциях на две или в некоторых случаях на три взаимно перпендикулярные плоскости.

2°. Так как механизм представляет собой кинематическую цепь со звеньями, имеющими вполне определенные движения, то необходимо выяснить вопрос о том, как связана определенность движения звеньев механизма с его степенью подвижности. Как это следует из формулы (2.8), степень подвижности характеризует число степеней свободы механизма относительно звена, принятого за неподвижное (стойку). Тогда если механизм обладает одной степенью подвижности, то одному из звеньев механизма мы можем предписать относительно стойки какой-либо вполне определенный закон движения (*одну обобщенную координату механизма*), например вращательное, поступательное или винтовое движение с заданными скоростями. При этом все остальные звенья механизма получат вполне определенные движения, являющиеся функциями заданного. Если механизм обладает двумя степенями подвижности, то необходимо задать одному из звеньев два независимых движения (*две обобщенные координаты механизма*) относительно стойки или двум звеньям по одному независимому движению относительно стойки и т. д. Например, механизм, показанный

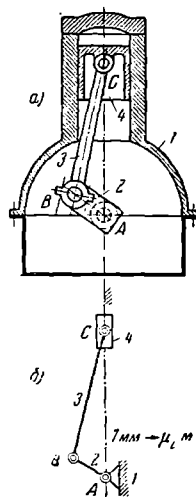


Рис. 119. Схема механизма поршневого двигателя: а) изображение с схематизированными конструктивными формами; б) изображение, применяемое на кинематических схемах.

на рис. 119, как это было выяснено, обладает одной степенью подвижности. Следовательно, сообщив одному из его звеньев движение по определенному закону, мы получаем вполне определенные движения всех остальных звеньев этого механизма.

Пусть будет, например, задан закон вращения звена 2 (рис. 119), выражаемый равенством $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, где φ_2 есть угол поворота звена 2, а t — время. Если задано движение звена 2, то все остальные звенья будут двигаться вполне определенным образом, причем их движения будут зависеть от выбранного закона $\varphi_2 = \varphi_2(t)$. Поэтому звено 2 механизма оказывается ведущим (начальным), а все остальные подвижные звенья (звенья 3 и 4) являются ведомыми.

Таким образом, значение φ_2 однозначно определяет соответствующие ему положения звеньев механизма относительно стойки, и потому угол φ_2 есть *обобщенная координата рассматриваемого механизма*.

Механизмы с несколькими степенями подвижности сравнительно редко встречаются на практике, поэтому здесь мы их рассматривать не будем, а несколько позже укажем лишь некоторые из них.

§ 16. Структурная формула плоских механизмов

1°. В § 14 и 15 мы показали, что в общем случае степень подвижности механизма ω равна числу его степеней свободы и может быть определена по структурной формуле (2.8)

$$\omega = 6n - 5p_3 - 4p_4 - 3p_5 - 2p_2 - p_1.$$

Применение этой формулы возможно только в том случае, если на движения звеньев, входящих в состав механизма, не наложено каких-либо общих дополнительных условий. Эти условия, общие для всего механизма в целом, могут быть весьма разнообразны. Так, например, можно потребовать, чтобы у механизма, состоящего из одних только вращательных пар V класса, оси всех

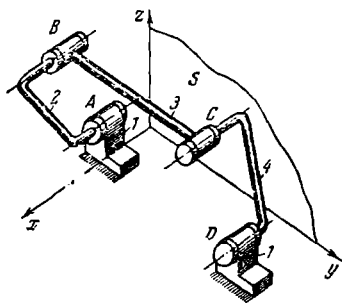


Рис. 120. Механизм шарнирного четырехзвенника.

этих пар были параллельны, пересекались в одной точке или пересекались в двух точках и т. д. Оказывается, что такие дополнительные требования существенно изменяют характер движения механизма и изменяют соответственно вид его структурной формулы.

Пусть, например, у механизма, который состоит из кинематических вращательных пар V класса, оси всех пар параллельны (рис. 120). Выберем неподвижную систему координат x, y, z так, чтобы направление оси x совпало с направлением осей пар, а оси y и z лежали в плоскости, перпендикулярной к осям пар. Можно тогда убедиться в

том, что в этом случае точки звеньев механизма $ABCD$ будут двигаться в плоскостях, параллельных одной общей неподвижной плоскости S , содержащей оси y и z , и мы будем иметь так называемый *плоский механизм*.

Рассмотрим, какие же общие ограничения наложены на движение всех звеньев механизма условием параллельности осей всех кинематических пар. Эти ограничения следующие. Звенья механизма не могут иметь вращательного движения вокруг осей y и z , поступательного движения вдоль оси x и из шести возможных движений *три не могут быть осуществлены*. Следовательно, возможными остаются следующие три движения: вращение вокруг оси x или осей, ей параллельных, и поступательные движения вдоль осей y и z . В самом деле, движение звеньев AB и CD сводится к вращению вокруг осей, параллельных оси x , а движение звена BC как сложное движение может быть представлено как вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости S , и поступательное движение, параллельное этой плоскости.

2°. Если на движение всех звеньев механизма в целом наложено три общих ограничения, то, очевидно, это обстоятельство должно быть учтено при подсчете степеней свободы отдельных звеньев и степени подвижности механизма в целом. Если в общем случае число степеней свободы подвижных звеньев механизма равнялось бы $6n$, где n — число подвижных звеньев, то для рассматриваемого механизма число степеней свободы подвижных звеньев будет $(6 - 3)n = 3n$. Соответственно вместо $5p_3$ связей, накладываемых парами V класса, в этом механизме пары V класса будут накладывать $(5 - 3)p_3 = 2p_3$ связей, так как три связи уже наложены условием параллельности осей пар, и т. д. Структурная формула механизма (2.8) переписывается тогда так:

$$w = (6 - 3)n - (5 - 3)p_3 - (4 - 3)p_4 - (3 - 3)p_3,$$

т. е. степень подвижности плоского механизма будет равна

$$w = 3n - 2p_3 - p_4. \quad (3.1)$$

Это есть *структурная формула для общего вида плоских механизмов*.

В формулу (3.1) пары I, II и III классов входить не могут, так как эти пары допускают три и более возможных относительных движений, входящих в них звеньев. Из рассмотренного примера следует, что если на движение всех звеньев механизма в целом наложено некоторое общее для всего механизма число связей, то необходимо число этих общих связей из структурной формулы механизма исключить путем вычитания числа этих связей из числа степеней свободы всех подвижных звеньев механизма и из числа условий связи всех входящих в механизм кинематических пар.

3°. При рассмотрении плоских механизмов и составлении их структурных формул мы имели в виду, что те степени свободы,

которыми обладают звенья механизмов, и те условия связи, которые налагаются на движения звеньев вхождением их в кинематические пары, решают в совокупности вопрос об определенности движения механизма.

Необходимо отметить, что кроме степеней свободы звеньев и связей, активно воздействующих на характер движения механизмов, в них могут встретиться степени свободы и условия связи, не оказывающие никакого влияния на характер движения механизма в целом. Удаление из механизмов звеньев и кинематических пар, которым эти степени свободы и условия связи принадлежат, может быть сделано без изменения общего характера движения механизма в целом. Такие

степени свободы называются *лишними степенями свободы*, а связи — *пассивными связями*.

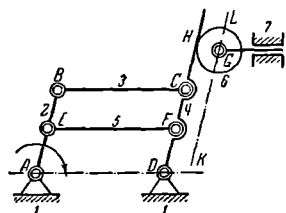


Рис. 121. Схема плоского механизма с пассивными связями и лишней степенью свободы.

В качестве примера рассмотрим плоский механизм, показанный на рис. 121. Размеры звеньев механизма удовлетворяют условиям: $AB = CD$, $AD = EF = BC$, $AE = BE$ и $DF = FC$. Таким образом, фигура $ABCD$ образует всегда параллелограмм, и следовательно, расстояние между точками F и E остается постоянным и равным расстоянию между точками A и D или B и C . Тогда без

всякого нарушения характера движения механизма можно звено EF (или BC) удалить, так как это звено, входящее в кинематические пары E и F , налагает на движение механизма условия связи, являющиеся *пассивными*.

Рассмотрим, далее, круглый ролик 6 (рис. 121), входящий во вращательную пару V класса со звеном 4, соприкасающимся с ним по прямолинейному профилю HC . Нетрудно видеть, что мы можем свободно поворачивать ролик 6 вокруг оси, проходящей через точку G , не оказывая при этом никакого влияния на характер движения механизма в целом. Свободно поворачивающийся ролик дает *лишнюю* степень свободы. Поэтому без всякого нарушения характера движения механизма в целом можно ролик удалить и звено 4 со звеном 7 соединить непосредственно в кинематическую пару IV класса (рис. 122). Элементом пары, принадлежащим звену 4, будет прямая KL , параллельная прямой DC , проходящая от нее на расстоянии, равном радиусу ролика 6, а элементом пары, принадлежащей звену 7, будет точка G .

Полученные таким способом механизмы будут воспроизводить движение ведомого звена по тому же закону, который осуществлялся первоначальным механизмом, но при этом преобразованные механизмы будут освобождены от лишних степеней свободы и пассивных условий связей.

При исследовании структуры механизма с помощью структурных формул необходимо учитывать возможное присутствие лишних степеней свободы и пассивных условий связей.

4°. Выявление пассивных связей и лишних степеней свободы в механизмах проще всего может быть сделано при изучении их кинематики, например при построении перемещений и скоростей звеньев. Если определение перемещений ведомых звеньев или их скоростей может быть сделано без участия одного или нескольких звеньев механизма, то эти звенья вносят или пассивные связи, или лишние степени свободы. Например, перемещение звена 7 (рис. 122) может быть получено перемещением звеньев 2, 3 и 4. Следовательно, звено 5 вносит пассивные связи и может быть из рассмотрения исключено. Можно было бы также показать, что и определение скорости звена 7 при заданной скорости ведущего звена может быть сделано без рассмотрения скоростей звена 5. В дальнейшем будем предполагать, что все лишние степени свободы и пассивные условия связи предварительно исключены из механизма удалением соответствующих звеньев, и будем учитывать в механизме только те связи и степени свободы, от которых зависит определенность его движения.

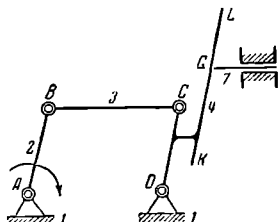


Рис. 122. Схема механизма, освобожденного от пассивных связей и лишней степени свободы.

§ 17. Структура плоских механизмов

1°. В § 16 мы рассмотрели тот случай, когда точки подвижных звеньев механизма движутся в плоскостях, параллельных одной неподвижной плоскости. Ввиду указанного характера движения точек звеньев эти механизмы, как это было указано выше, называются *плоскими механизмами*. Нами было показано, что структурная формула этих механизмов (3.1) в общем случае имеет следующий вид:

$$\omega = 3n - 2p_s - p_k.$$

Эта формула была впервые выведена П. Л. Чебышевым в 1869 году и носит название формулы Чебышева. В дальнейшем эта формула и вытекающая из нее теория структуры плоских механизмов получила свое развитие в работах многих русских и зарубежных ученых.

2°. Как это видно из формулы (3.1), плоские механизмы могут быть образованы звеньями, входящими только в кинематические пары IV и V классов. Пары IV класса в плоских механизмах налагают одно условие связи на относительное движение ее звеньев. Пары V класса в плоских механизмах налагают два условия связи на относительное движение ее звеньев. Примером пары IV класса в плоских кинематических цепях может служить пара, образованная звеньями α и β (рис. 123), перекатывающихся со скольжением друг по другу и постоянно соприкасающихся по прямолинейным образующим этих

поверхностей без скольжения вдоль образующих. Эта пара в сечении плоскостью, перпендикулярной к образующим цилиндров, дает две соприкасающиеся кривые $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$ (рис. 124), представляющие собою элементы звеньев пары. Вторым примером может служить пара, образованная кривой $\alpha - \alpha$, являющейся элементом, принадлежащим звену A , и острием $C - \beta$ — элементом, принадлежащим звену B (рис. 125). Во всех кинематических парах IV класса, как это было указано выше (§ 11, 8°), звенья соприкасаются или в *точке*, или по *прямой*; эти пары относятся к *высшим* парам.

Пара IV класса в плоском механизме исключает возможность одного какого-либо движения: например, пара, показанная на рис. 124,

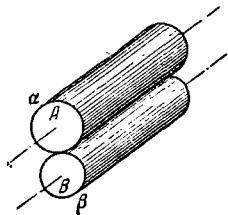


Рис. 123. Плоская кинематическая пара IV класса, состоящая из двух цилиндров.

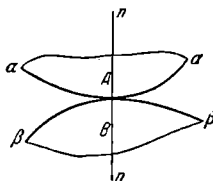


Рис. 124. Схема плоской кинематической пары IV класса, состоящей из двух криволинейных звеньев.

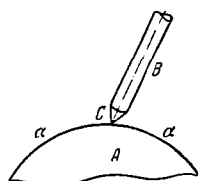


Рис. 125. Схема плоской кинематической пары IV класса, состоящей из криволинейного звена и звена с острием.

исключает относительное движение звеньев A и B в направлении нормали $n - n$ к кривым $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$, проведенной в точке их соприкосновения. Возможными двумя относительными движениями звеньев этой пары являются качение и скольжение одной кривой по другой.

Низшие пары V класса, т. е. пары, в которых соприкосновение звеньев происходит по поверхностям (см. § 11, 8°), в плоских механизмах являются либо вращательными (рис. 89), либо поступательными (рис. 100), так как другие низшие пары, в частности винтовые, не могут входить в состав плоского механизма в силу пространственного характера относительного движения из звеньев. Из трех возможных относительных движений звеньев пар плоских механизмов вращательные и поступательные пары исключают по два движения. Вращательная пара исключает возможность поступательных движений вдоль двух осей, лежащих в плоскости движения звеньев. Поступательная пара исключает одно поступательное движение и одно вращательное (вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения звеньев).

Кинематические пары V класса в плоских механизмах могут быть и высшими. На рис. 126, а, например, показана высшая пара V класса, элементы звеньев A и B которой представляют собой две жестко связанные между собой плоские кривые $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$, соприкасающиеся с двумя другими плоскими кривыми $\gamma - \gamma$ и $\delta - \delta$, также жестко связанными между собой. На рис. 126, б показана другая

высшая пара V класса, представляющая собой звено A , своими концами C и D скользящее в прорезях $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$ звена B . Элементами, принадлежащими звену A , являются точки C и D , а элементами, принадлежащими звену B — плоские кривые $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$. Такие пары получили название *траекторных пар*, так как при движении одного звена пары относительно другого точки звеньев описывают сложные, но вполне определенные траектории. Высшей парой V класса является также пара, показанная на рис. 126, в. Кривая $\alpha - \alpha$, являющаяся элементом звена A , перекачивается без скольжения по кривой $\beta - \beta$, являющейся элементом звена B . Эта пара получила название *центроидной пары*, так как элементы $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$ звеньев A и B являются всегда центроидами в относительном движении звеньев пары.

3°. В зависимости от числа w , стоящего в левой части формулы (3.1), мы имеем плоские механизмы с одной, двумя, тремя и т. д. степенями подвижности. Так, на рис. 127 показан механизм с одной степенью подвижности, на рис. 128 — механизм с двумя степенями подвижности и на рис. 129 — механизм с тремя степенями подвижности.

При нулевой степени подвижности кинематической цепи ни одно из звеньев не может двигаться относительно неподвижного звена, и

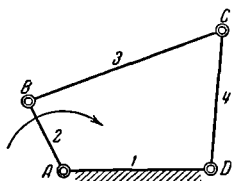


Рис. 127. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с обобщенной координатой φ_2 .

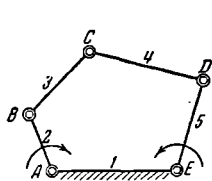


Рис. 128. Схема механизма шарнирного пятизвенника с обобщенными координатами φ_2 и φ_3 .

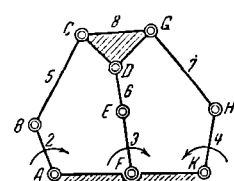


Рис. 129. Схема механизма шарнирного восьмизвенника с обобщенными координатами φ_2 , φ_3 , φ_4 .

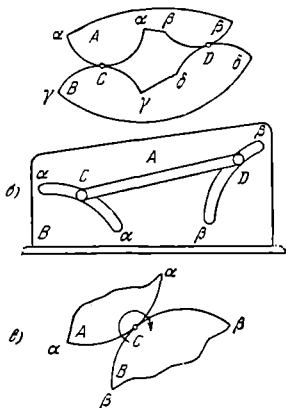


Рис. 126. Схематические изображения высшей кинематической пары V класса, состоящей из двух звеньев: а) каждое звено с двумя криволинейными поверхностями; б) траекторная пара; в) центроидная пара с принудительным чистым качением.

кинематическая цепь превращается в ферму, которую можно рассматривать в качестве звена (рис. 130). Нашему дальнейшему рассмотрению будут подлежать только те кинематические цепи, которые имеют степень подвижности или равную или большую единицы, причем из этих цепей мы будем рассматривать только те, которые образуют механизмы.

Для определенности движений всех звеньев механизма, образованного кинематической цепью с одной степенью подвижности, необходимо и достаточно иметь заданным закон движения одного из звеньев. Например, для механизма, показанного на рис. 127, достаточно иметь заданным закон $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ изменения угла φ_2 поворота звена 2 в функции времени t , т. е. одну обобщенную координату механизма. Таким образом, число степеней подвижности кинематической цепи, из которой образован механизм, одновременно является и числом независимых параметров или, что то же, обобщенных координат, которыми мы должны задаться, чтобы данная кинематическая цепь была механизмом.

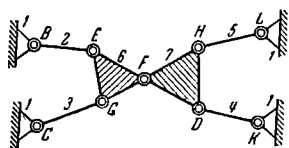


Рис. 130. Схема кинематической цепи с нулевой степенью подвижности.

Например, показанная на рис. 128 цепь будет механизмом, если будут заданы углы поворота φ_2 и φ_5 звеньев 2 и 5 в функции времени t . Для кинематической цепи, показанной на рис. 129, нужно задать углы поворота φ_3 , φ_4 и φ_5 звеньев 2, 3 и 4 в функции времени t и т. д.

Пользуясь указанной выше формулой Чебышева (3.1), всегда легко проанализировать структуру данного плоского механизма и определить степень его подвижности.

4°. К плоским механизмам относятся также механизмы с одними поступательными парами, оси движения которых параллельны одной общей плоскости. Простейшим механизмом этого вида является клиновой механизм (рис. 63).

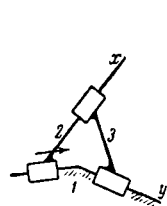


Рис. 131. Схема механизма с одними поступательными парами и одной степенью подвижности.

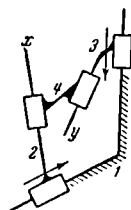


Рис. 132. Схема механизма с одними поступательными парами и двумя степенями подвижности.

Структурная формула этих механизмов имеет следующий вид:

$$w = 2n - p_5. \quad (3.2)$$

Эта формула была впервые выведена В. В. Добровольским в 1937 году и носит название *формулы Добровольского*.

Как это видно из формулы (3.2), плоские механизмы этого вида могут быть образованы только парами V класса, и так как в этих механизмах звенья могут иметь только поступательное движение, то пары V класса в этих механизмах могут быть только поступательными. На рис. 131 показан механизм с одной степенью подвижности, а на рис. 132 — механизм с двумя степенями подвижности.

§ 18. Заменяющие механизмы

1°. Как было показано выше, плоские механизмы могут иметь звенья, входящие как в низшие, так и в высшие пары. При изучении структуры и кинематики плоских механизмов во многих случаях удобно заменять высшие пары звеньями, входящими только в низшие пары —

в вращательные и поступательные пары V класса. При этом должно удовлетворяться условие, чтобы механизм, полученный после такой замены, обладал прежней степенью подвижности и чтобы сохранились *мгновенные* относительные движения всех его звеньев. Рассмотрим трехзвенный механизм, показанный на рис. 133. Механизм состоит из двух подвижных звеньев 2 и 3, входящих во вращательные пары V класса А и В со стойкой 1 и высшую пару С IV класса, элементы звеньев *a* и *b* которой представляют собою окружности радиусов O_2C и O_3C . Согласно формуле (3.1) степень подвижности механизма

$$\omega = 3n - 2p_v - p_k = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Можно показать, что рассматриваемый механизм может быть заменен эквивалентным ему механизмом шарнирного четырехзвенника AO_2O_3B . Высшая пара IV класса в точке С заменяется звеном 4, входящим в точках O_2 и O_3 во вращательные пары V класса. Полученный в результате замены механизм AO_2O_3B называется *заменяющим механизмом*.

Степень подвижности ω заменяющего механизма будет той же, как и заданного механизма. Имеем:

$$\omega = 3n - 2p_v = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Так как элементы *a* и *b* звеньев 2 и 3 являются окружностями с центрами в точках O_2 и O_3 , то длина O_2O_3 звена 4 оказывается постоянной. Точно так же будут постоянными и длины AO_2 и BO_3 звеньев 2 и 3. Заменяющий механизм AO_2O_3B эквивалентен заданному и с точки зрения законов движения звеньев 2 и 3.

2°. Рассмотренный способ получения заменяющего механизма можно обобщить. Пусть задан механизм с высшей парой, элементы звеньев которой представляют собой произвольно заданные кривые *a* и *b* (рис. 134). Для построения схемы заменяющего механизма проводим нормаль NN в точке С касания кривых и отмечаем на ней центры O_2 и O_3 кривизны кривых *a* и *b*. По-прежнему центры кривизны O_2 и O_3 мы считаем шарнирами, образующими вращательные пары, в которых входят условные звенья AO_2 и O_2O_3 , с одной стороны, и условные звенья BO_3 и O_3O_2 , с другой стороны.

Описанная замена правильна для заданного положения основного механизма. В другом положении схема заменяющего механизма останется той же, но размеры его звеньев изменятся, ибо центры кривизны O_2 и O_3 сместятся.

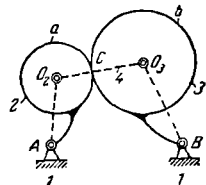


Рис. 133. Схемы механизма с высшей парой в виде двух окружностей и заменяющего его механизма шарнирного четырехзвенника.

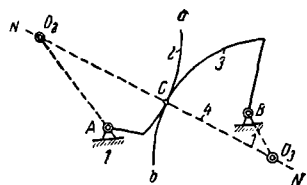


Рис. 134. Схемы механизма с высшей парой, элементы звеньев которой произвольно заданные кривые, и мгновенного заменяющего его механизма шарнирного четырехзвенника.

Из дифференциальной геометрии известно, что окружность кривизны в точке касания с кривой и сама кривая эквивалентны до производных второго порядка включительно, и потому заменяющий механизм эквивалентен основному в такой же степени, т. е. положения, скорости и ускорения одноименных точек того и другого механизма будут одинаковыми.

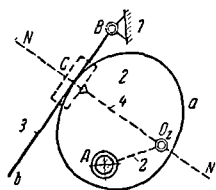


Рис. 135. Схемы механизма с высшей парой, элементы звеньев которой произвольно заданы кривая и прямая, и мгновенного заменяющего механизма с тремя вращательными и одной поступательной парами.

3°. Если один из соприкасающихся элементов будет представлять собой некоторую кривую a , а второй прямую b (рис. 135), то центр кривизны второго профиля будет бесконечно удален. Условное звено 4 в этом случае будет входить в центре кривизны O_2 элемента 2 во вращательную пару V класса. Вторая вращательная пара, в которую должно входить звено 3, имеет ось вращения бесконечно удаленной и переходит в поступательную пару также V класса.

4°. Далее, возможен случай, когда один из соприкасающихся элементов — кривая a , а другой — точка C (рис. 136). В этом случае центр кривизны O_3 элемента C совпадает с самой точкой C , и поэтому условное звено 4 должно входить в две вращательные пары V класса; во-первых, во вращательную пару с осью, проходящей через точку C , и, во-вторых, во вращательную

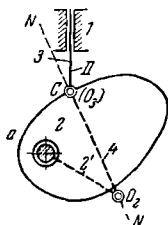


Рис. 136. Схемы механизма с высшей парой, элементы звеньев которой произвольно заданы кривая и точка, и мгновенного заменяющего кривошипно-ползунного механизма.

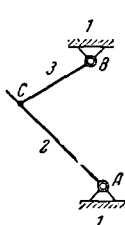


Рис. 137. Схема механизма с высшей парой, элементы звеньев которой произвольна прямая и точка.

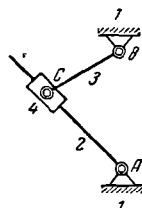


Рис. 138. Схема мгновенного заменяющего механизма, эквивалентного механизму, схема которого изображена на рис. 137.

пару с осью, проходящей через центр кривизны O_3 криволинейного элемента a .

В том случае, когда одним элементом является прямая AC , а другим — точка C (рис. 137), замена сводится к постановке условного звена 4, входящего в одну поступательную и одну вращательную пары. Ось вращательной пары и ось движения поступательной пары должны проходить через точку соприкосновения C . Заменяющий механизм показан на рис. 138.

Таким образом, любой плоский механизм с высшими парами IV класса может быть заменен механизмом, в состав которого входят только низшие кинематические пары V класса.

Если все высшие пары IV класса в плоском механизме заменены кинематическими цепями с низшими парами, то структурная формула Чебышева (3.1) для заменяющего механизма имеет вид

$$\omega = 3n - 2p_s. \quad (3.3)$$

5°. На рис. 139 показан четырехзвенный механизм, у которого звено 4 входит в траекторную пару V класса со стойкой I. Элементами звена 1 являются кривые a и d , а элементами звена 4 кривые b и c . Степень подвижности механизма определяется по формуле (3.1). Имеем:

$$\omega = 3n - 2p_s - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

В точках D и E соприкосновения элементов проводим нормали 5 и 6. Далее находим на этих нормалях центры кривизны O_a , O_b , O_c и O_d элементов a , b , c и d . В рассматриваемом механизме мы имеем два условных звена 5 и 6. Звено 5 входит во вращательные пары O_a и O_b , а звено 6 во вращательные пары O_c и O_d . Мгновенный заменяющий механизм получается шестизвенным. Если радиусы кривизны элементов a , b , c и d переменные, то длины звеньев 5 и 6 и стороны треугольника O_bCO_c , принадлежащего звену 4, также переменные. Степень подвижности заменяющего механизма определяется по формуле (3.3). Имеем:

$$\omega = 3n - 2p_s = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1,$$

т. е. заменяющий механизм имеет ту же степень подвижности, что и основной.

6°. Во всех рассмотренных примерах каждый два элемента высшей пары замещались одним условным звеном, входящим в две пары V класса. Этот

результат можно обобщить, если учесть следующие свойства соприкасающихся элементов высших пар. Если элементы звеньев, входящих в высшую пару, перекатываются друг по другу со скольжением, то на относительное движение звеньев накладываются одно условие связи. Кинематическая цепь, мгновенно заменяющая эти элементы, должна также накладывать одно условие связи. Следовательно, число n звеньев заменяющей цепи и число p_s низших кинематических пар V класса, в которые входят эти звенья, должно удовлетворять условию

$$3n - 2p_s = -1,$$

т. е. число условий связи должно быть на единицу больше числа степеней свободы. Из этого условия получаем:

$$p_s = \frac{3n + 1}{2}.$$

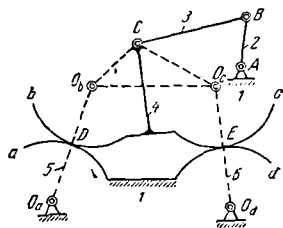


Рис. 139. Схема сложного механизма с траекторной парой.

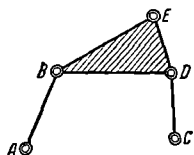


Рис. 140. Схема сложной заменяющей кинематической цепи, состоящей из трех звеньев.

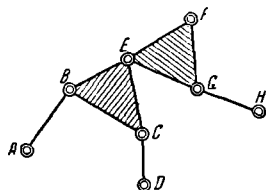


Рис. 141. Схема сложной заменяющей цепи с пятью звеньями, входящими в восемь кинематических пар.

Так как числа n и p_5 могут быть только целыми, то из этого соотношения следует, что наименьшее число p_5 пар V класса у заменяющей цепи равно двум, и следовательно, наименьшее число n звеньев равно единице. Таким образом, с точки зрения числа условий связи два соприкасающихся элемента звеньев, входящих в высшую пару в плоских механизмах, эквивалентны одному звену, входящему в две низшие кинематические пары V класса.

Кроме заменяющей кинематической цепи, состоящей из одного звена, входящего в две кинематические пары V класса, можно, удовлетворяя последнему соотношению, получить более сложные заменяющие кинематические цепи, например, цепь, состоящую из трех звеньев, входящих в пять кинематических пар (рис. 140), или цепь, состоящую из пяти звеньев, входящих в восемь кинематических пар (рис. 141), и т. д.

§ 19. Структура пространственных механизмов

1°. В современном машиностроении находят себе применение пространственные механизмы различных видов. Рассмотрим структуру некоторых наиболее широко применяемых в технике пространственных механизмов.

К числу таких механизмов относятся механизмы, структурное уравнение которых представляет собой формулу Сомова — Малышева (2.8) (§ 14, 2°)

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.4) следует, что механизмы могут быть образованы звеньями, входящими в кинематические пары всех пяти классов.

Из низших кинематических пар наиболее часто встречаются пары, схематические изображения которых показаны на рис. 142.

На рис. 142, а, б и в показаны пары V класса: вращательная, поступательная и винтовая. С этими парами мы уже ознакомились раньше (§ 11). Если эти пары входят в состав пространственных механизмов, то их условные обозначения должны иметь вид, показанный соответственно на рис. 142, а', б' и в'. Цилиндрическая пара IV класса и ее условное изображение показаны на рис. 142, г и г'. Шаровая пара III класса и ее условное изображение показаны на рис. 142, д и д'. Наконец, на рис. 142, е и е' показаны шаровая с пальцем пара IV класса и ее условное изображение. Так же, как для плоских механизмов, высшие пары различных классов изображаются с точными очертаниями тех элементов звеньев, с которыми они входят в пары.

Рис. 142. Схемы распространенных кинематических пар: а) изображение вращательной пары со схематизированными конструктивными формами; а') схематическое изображение вращательной пары, применяемое на кинематических схемах; б) и б') то же для поступательной пары; в) и в') то же для винтовой пары; г) и г') то же для цилиндрической пары; д) и д') то же для шаровой пары; е) и е') то же для шаровой с пальцем пары.

2°. Рассмотрим некоторые пространственные механизмы, применяемые в технике. На рис. 143, а показан четырехзвенный механизм ABCD выдвигающегося шасси самолета. Ползун 2 движется по неподвижной направляю-

щей 1 и шатуном 3 передает движение опоре 4 колеса, которая поворачивается вокруг оси D , принадлежащей неподвижному звену 1. Звенья 2 и 1 образуют поступательную пару, звенья 2 и 3 и 3 и 4 — шаровые пары и звенья 4 и 1 — вращательную пару. Кинематическая схема механизма показана на рис. 143, б. Из рассмотрения механизма видно, что звено 3 обладает лишней степенью свободы — возможностью свободно поворачиваться вокруг своей продольной оси. Поэтому одна из пар B или C могла бы быть заменена шаровой с пальцем парой (рис. 142, e и e'). Так как эта лишняя степень свободы не оказывает никакого влияния на движение механизма, то с точки зрения простоты конструкции проектируют механизм с двумя шаровыми парами. Если исключить из рассмотрения упомянутую лишнюю степень свободы, то структурная формула механизма представится так:

$$\begin{aligned} \omega &= 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = \\ &= 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, механизм шасси имеет одну степень подвижности.

3°. На рис. 144, а показан четырехзвенный механизм рулевого управления автопилота, в котором поршень 2 перемещается относительно неподвижного цилиндра 1 и шатуном 3 передает движение коромыслу 4, вращающемуся в подшипнике, принадлежащем неподвижному звену 1. Звенья 1 и 2 образуют цилиндрическую пару, звенья 2 и 3 и 3 и 4 — вращательные пары и звенья 3 и 4 — шаровую пару. Кинематическая схема механизма показана на рис. 144, б.

Структурная формула механизма такова:

$$\begin{aligned} \omega &= 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = \\ &= 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, механизм рулевого управления имеет одну степень подвижности.

4°. На рис. 145 показан пространственный кулачковый механизм. Кулачок 2, вращаясь вокруг оси, принадлежащей неподвижной стойке 1, действует на бочкообразный ролик 3, свободно вращающийся вокруг своей оси, которая жестко соединена с толкателем 4, движущимся поступательно в направляющих, принадлежащих неподвижной стойке 1. Исключая из рассмотрения вращение ролика вокруг своей оси как лишнюю степень свободы, можно сделать вывод, что звенья 1 и 2 входят во вращательную пару, а звенья 4 и 1 — в поступательную пару. Так как ролик 3 и профилированная поверхность кулачка 2 имеют соприкосновение в точке, то, следовательно, после условного закрепления ролика 3 со звеном 4 звенья 2 и 4 будут входить в пару I класса. Структурная формула механизма такая:

$$\omega = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Таким образом, рассмотренный кулачковый механизм обладает одной степенью подвижности.

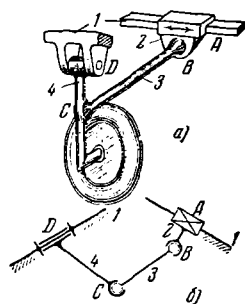


Рис. 143. Механизм шасси самолета: а) изображение с схематизированными конструктивными формами; б) изображение, применяемое на кинематических схемах.

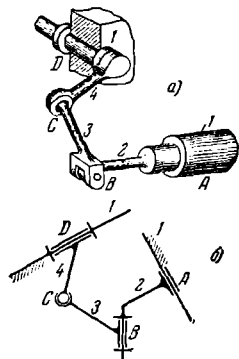


Рис. 144. Четырехзвенный механизм рулевого управления автопилота: а) изображение схематизированными конструктивными формами; б) изображение, применяемое на кинематических схемах.

5°. На рис. 146 показан зубчато-червячный механизм. Червяк 2, вращаясь в подшипниках, принадлежащих стойке 1, действует на ролик 3, принадлежащий колесу 4, которое вращается в подшипнике, принадлежащем стойке 1. Звенья 1 и 2 и 4 и 1 входят во вращательные пары. Так как ролики 3 соприкасаются с винтовой поверхностью червяка 2 в точке, то звенья 2 и 4 после

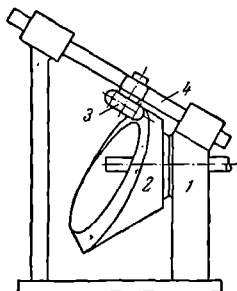


Рис. 145. Схема пространственного кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

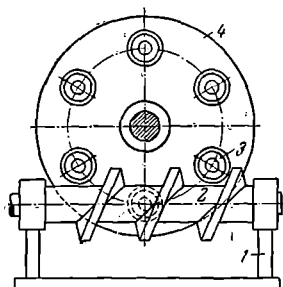


Рис. 146. Схема зубчато-червячного механизма.

условного скрепления роликов 3 с колесом 4 образуют пару I класса. Структурная формула механизма такая:

$$w = 6p - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Таким образом, этот зубчато-червячный механизм обладает одной степенью подвижности.

6°. Структурная формула сферических механизмов была указана впервые автором этой книги в 1936 году. Формула имеет следующий вид:

$$w = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (3.5)$$

Таким образом, для сферических механизмов применима формула Чебышева (3.1).

Из формулы (3.5) следует, что сферические механизмы могут быть образованы кинематическими парами только V и IV классов.

Применимость формулы (3.5) к сферическим механизмам определяется тем, что на движение звеньев этих механизмов наложено три общих ограничения.

Вследствие того, что движение точек звеньев сферических механизмов происходит в концентрически расположенных сферах, имеющих один общий центр, звенья этих механизмов имеют только вращательные движения и не могут иметь поступательных движений. Поэтому в этих механизмах звенья могут входить только во вращательные пары V класса и высшие пары IV класса, имеющие соприкосновение по прямым, проходящим через

общий центр концентрических сферических поверхностей. При этом должно быть исключено поступательное движение вдоль соприкасающихся прямых в направлении к общему центру сфер.

На рис. 147 показан четырехзвенный сферический механизм, у которого звенья 1, 2, 3, 4 входят в четыре вращательные пары. Оси всех пар пересекаются в общем центре O. При вращении звена 2 вокруг оси A—A в не-

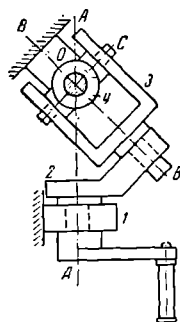


Рис. 147. Схема четырехзвенного сферического механизма.

подвижном подшипнике, принадлежащем стойке 1, коромысло 4 получает качательное движение в подшипниках, принадлежащих стойке 1, вокруг оси, проходящей через точку O и направленной перпендикулярно к плоскости чертежа.

Структурная формула механизма такова:

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Итак, механизм (рис. 147) обладает одной степенью подвижности.

7°. На рис. 148 показан механизм конических зубчатых колес (§ 5, 5°). Оси колес 2 и 3 пересекаются в общем центре. В этом же центре пересекаются все образующие поверхностей зубьев. Поэтому этот механизм относится также к сферическим механизмам. Звенья 1, 2 и 3 образуют вращательные пары. Звенья 2 и 3 образуют высшую пару IV класса, так как перемещение вдоль образующих поверхностей зубьев отсутствует.

Структурная формула механизма дает:

$$w = 3n - 2p_5 - p_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Таким образом, механизм обладает одной степенью подвижности.

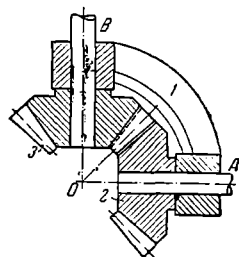


Рис. 148. Схема механизма конических зубчатых колес.

§ 20. Семейства механизмов

1°. Все механизмы удобно разделить на *пять семейств* — в зависимости от числа общих связей, наложенных на движение *всех* звеньев механизма. *Номер семейства* определяется числом этих общих связей.

Если на механизм не наложено никаких общих связей, то механизм относится к механизмам *нулевого* семейства. Структурная формула механизмов нулевого семейства имеет вид тот же, что и формула (2.8):

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

Если на механизм наложена *одна* общая связь, то такой механизм должен быть отнесен к механизмам *первого* семейства. Структурная формула механизмов первого семейства такая:

$$w = (6 - 1)n - (5 - 1)p_5 - (4 - 1)p_4 - (3 - 1)p_3 - (2 - 1)p_2 - (1 - 1)p_1$$

или

$$w = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2. \quad (3.6)$$

Из сравнения формул (2.8) и (3.6) следует, что структурная формула (3.6) механизмов первого семейства может быть получена путем уменьшения на единицу коэффициентов всех членов формулы (2.8).

Аналогично получаем структурную формулу для механизмов *второго* семейства

$$w = (6 - 2)n - (5 - 2)p_5 - (4 - 2)p_4 - (3 - 2)p_3 - (2 - 2)p_2$$

или

$$w = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3. \quad (3.7)$$

Для механизмов *третьего* семейства структурная формула имеет следующий вид:

$$w = (6 - 3)n - (5 - 3)p_5 - (4 - 3)p_4 - (3 - 3)p_3$$

или

$$w = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (3.8)$$

Для механизмов *четвертого* семейства структурная формула принимает вид

$$w = (6 - 4)n - (5 - 4)p_5 - (4 - 4)p_4$$

или

$$w = 2n - p_5. \quad (3.9)$$

Механизмы *пятого* семейства состоят каждый из одной кинематической пары V класса: вращательной, поступательной или винтовой.

Наконец, если на движение всех звеньев механизма наложено шесть условий связи, то механизм перестает существовать и превращается в *жесткую* систему (звено).

В. В. Добровольский в 1943 году вывел структурную формулу механизмов, из которой как частные могут быть получены формулы (3.1) — (3.4). Эта формула имеет следующий вид:

$$w = (6 - m)n - \sum_{k=m+1}^{k=5} (k - m)p_k, \quad (3.10)$$

где m — число общих связей, наложенных на движение звеньев механизма, принимающее последовательно значения $m = 0, 1, 2, 3$ и 4 ; k — номер класса

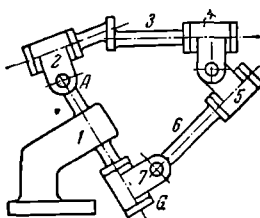


Рис. 149. Модель семизвездного пространственного механизма нулевого семейства.

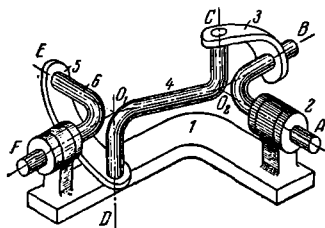


Рис. 150. Модель пространственного механизма двойного универсального шарнира.

кинематической пары, определяемый числом связей, наложенных на ее относительное движение, получающий соответственно значения $k = 5, 4, 3, 2, 1$.

2°. Рассмотрим некоторые примеры механизмов различных семейств. Структурная формула механизмов нулевого семейства, как уже было указано [см. формулу (2.8)], имеет следующий вид:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

На движение звеньев механизма нулевого семейства не накладывается никаких общих ограничений (связей). К этим механизмам относятся пространственные механизмы, звенья которых имеют движения самого общего характера.

На рис. 149 дано схематическое изображение одного из механизмов этого семейства, так называемого *шарнирного семизвездного пространственного механизма* с осями вращательных пар, произвольно расположенными в пространстве. Шесть подвижных звеньев и стойка этого механизма входят в семь кинематических пар V класса. Механизм позволяет воспроизводить вращательные движения ведущего звена 2 и ведомого звена 7 вокруг произвольно заданных в пространстве осей A и G.

Так как механизм состоит только из пар V класса, то формула (2.8) принимает следующий вид:

$$w = 6n - 5p_5.$$

После подстановки числа подвижных звеньев и кинематических пар получаем:

$$w = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 7 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

3°. Структурная формула механизмов первого семейства, формула (3.6), как это было указано выше, имеет следующий вид:

$$w = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2.$$

Примером механизма первого семейства может служить так называемый *механизм двойного универсального шарнира*. Схема механизма показана на рис. 150. Звенья этого механизма входят в шесть кинематических пар V класса. Оси всех пар левой стороны механизма пересекаются в точке O_1 , а оси пар правой стороны — в точке O_2 . Механизм позволяет воспроизводить вращательные движения ведущего звена 2 и ведомого звена 6 вокруг произвольно заданных в пространстве осей A и F .

Так как механизм состоит только из пар V класса, то его структурная формула принимает вид

$$w = 5n - 4p_5.$$

После подстановки числа подвижных звеньев в кинематических пар получаем:

$$w = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

Вторым примером четырехзвенного механизма первого семейства может служить *механизм уголкового передаточного*, показанный схематично на рис. 151. Диск 2, вращающийся вокруг оси K , имеет втулку E , в которой скользит и вращается уголкового рычаг 3. Рычаг 3 вторым своим концом скользит и вращается вокруг втулки D , принадлежащей диску 4, который вращается вокруг оси N . Число звеньев механизма вместе с неподвижным равно четырем. Звенья 1 и 2 и 4 и 1 входят во вращательные пары V класса. Звенья 2 и 3 и 3 и 4 входят в пары IV класса. Механизм позволяет воспроизводить вращательные движения ведущего звена 4 и ведомого звена 2 вокруг пересекающихся осей $N—N$ и $K—K$.

Так как механизм состоит из пар IV и V классов, то его структурная формула имеет следующий вид:

$$w = 5n - 4p_5 - 3p_4.$$

После подстановки числа звеньев и пар получаем:

$$w = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

4°. Структурная формула механизмов второго семейства [формула (3.7)]:

$$w = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3.$$

Примером механизма второго семейства может служить *рычажно-винтовой механизм*, показанный на рис. 152. Звенья 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 входят во вращательные пары V класса. Звенья 4 и 5 образуют винтовую пару V класса, а звенья 5 и 1 входят в поступательную пару V класса. Механизм позволяет трансформировать вращательное движение ведущего звена 2 вокруг оси C в поступательное движение ведомого звена 5 вдоль оси A .

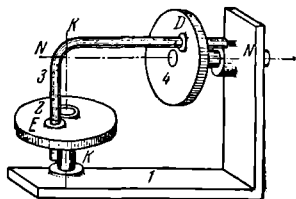


Рис. 151. Модель пространственного механизма уголкового передаточного первого семейства.

Так как механизм состоит только из пар V класса, то его структурная формула

$$w = 4n - 3p_5.$$

После подстановки числа подвижных звеньев и кинематических пар получаем:

$$w = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

Вторым примером механизма второго семейства может служить *рычажно-винтовой механизм*, показанный на рис. 153. Здесь звенья 1 и 2, 2 и 3 и

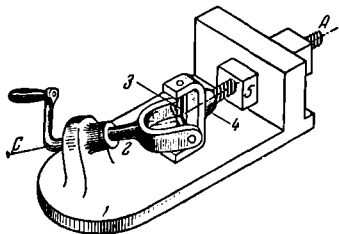


Рис. 152. Модель пространственного рычажно-винтового механизма второго семейства.

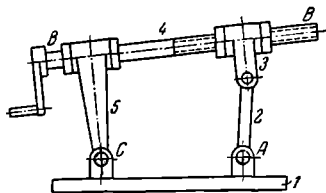


Рис. 153. Модель второго пространственного рычажно-винтового механизма второго семейства.

5 и 1 образуют вращательные пары V класса с параллельными осями. Звенья 3 и 4 образуют винтовую пару V класса. Звенья 4 и 5 образуют вращательную пару V класса. Этот механизм позволяет воспроизводить вращательное движение ведомых звеньев 2 и 5 вокруг осей A и C вращением ведущего звена 4 вокруг оси B, лежащей в плоскости, перпендикулярной к осям A и C. Структурная формула (3.7) механизма принимает вид

$$w = 4n - 3p_5,$$

откуда после подстановки числа подвижных звеньев и кинематических пар получаем:

$$w = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

Третьим примером механизма второго семейства может служить *рычажно-винтовой механизм*, показанный на рис. 154. Звенья 2 и 3 и 3 и 4 образуют вращательные пары V класса. Звенья 4 и 5 и 5 и 1 образуют поступательные пары V класса. Звенья 1 и 2 образуют винтовую пару V класса. Оси пар 1 и 2,

Рис. 154. Модель третьего пространственного рычажно-винтового механизма второго семейства.

2 и 3, 3 и 4 и 5 и 1 параллельны между собой. Механизм трансформирует винтовое движение ведущего звена 2 вокруг и вдоль оси A в поступательное движение звена 5 вдоль оси B, параллельной оси A. Механизм обладает одной степенью подвижности, и его структурная формула также имеет вид

$$w = 4n - 3p_5.$$

Подставляя число подвижных звеньев и кинематических пар, действительно получаем:

$$w = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1.$$

5°. Структурная формула механизмов третьего семейства [формула (3.8)] имеет следующий вид:

$$w = 3n - 2p_3 - p_4.$$

Примером механизма третьего семейства может служить *четырёхзвенный сферический механизм* с парами V класса (рис. 155).

В этом механизме оси всех кинематических пар пересекаются в одной точке O и, следовательно, движение всех звеньев сводится к вращению вокруг точки O .

Этот механизм позволяет воспроизводить вращательные движения ведущего звена 2 и ведомого звена 4 вокруг пересекающихся осей AO и DO .

Так как механизм состоит из пар V класса, то его структурная формула

$$w = 3n - 2p_5.$$

Подставляя числа подвижных звеньев и кинематических пар, получаем:

$$w = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

Примером механизма третьего семейства может служить также любой плоский механизм с парами IV и V классов и, в частности, *плоский шарнирный четырёхзвенник* (рис. 156). Механизм позволяет воспроизводить

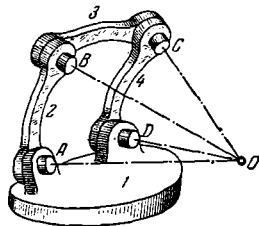


Рис. 155. Модель пространственного сферического механизма третьего семейства.

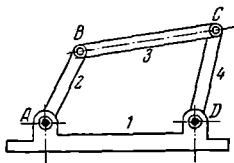


Рис. 156. Модель плоского механизма шарнирного четырёхзвенника третьего семейства.

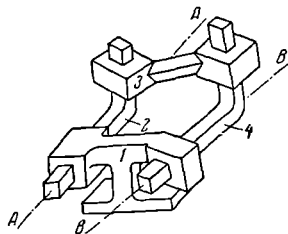


Рис. 157. Модель пространственного четырёхзвенного механизма третьего семейства с одними поступательными парами.

вращательные движения ведущего звена 2 и ведомого звена 4 вокруг параллельных осей A и D .

Структурная формула этого механизма

$$w = 3n - 2p_3.$$

После подстановки числа подвижных звеньев и кинематических пар получаем:

$$w = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

Третьим примером механизма третьего семейства может служить *пространственный четырехзвенный механизм* с одними поступательными парами V класса (рис. 157). Механизм позволяет производить поступательные движения ведущего звена 2 и ведомого звена 4 вдоль произвольно расположенных в пространстве осей A и B и носит название *четырёхзвенного пространственного клинового механизма*.

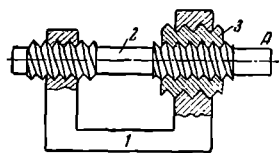


Рис. 157. Модель трехзвенного винтового механизма.

Структурная формула этого механизма

$$w = 3n - 2p_5.$$

После подстановки числа подвижных звеньев и кинематических пар получаем:

$$w = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

6°. Механизмы *четвертого* семейства, как было показано выше, имеют структурную формулу (3.9)

$$w = 2n - p_5.$$

Примером механизма четвертого семейства может служить *трехзвенный винтовой механизм* (рис. 158). Этот механизм позволяет производить винтовые движения вокруг одной общей оси с различными неодинаковыми, но связанными между собой законами движения ведущего звена 2 и ведомого звена 3. Структурная формула этого механизма такова:

$$w = 2n - p_5.$$

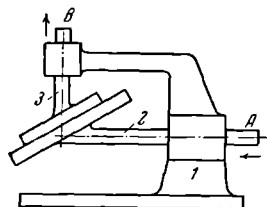


Рис. 158. Модель трехзвенного клинового механизма.

После подстановки числа подвижных звеньев и кинематических пар получаем:

$$w = 2 \cdot 2 - 3 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

Вторым примером механизма четвертого семейства может служить плоский *трехзвенный клиновой механизм* с одними поступательными парами, оси движения которых параллельны общей плоскости (рис. 159). Звенья 1 и 2, 2 и 3 и 3 и 1 входят в три поступательные пары V класса. Механизм позволяет производить поступательные движения ведущего звена 2 и ведомого звена 3 вдоль осей A и B, параллельных одной общей плоскости.

Структурная формула этого механизма такова:

$$w = 2n - p_5.$$

После подстановки числа подвижных звеньев и кинематических пар получаем:

$$w = 2 \cdot 2 - 3 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

В данном параграфе мы рассмотрели только некоторые механизмы различных семейств. В зависимости от общих условий связи, наложенных на движение звеньев механизмов, расположения осей кинематических пар, геометрических размеров звеньев, может быть получено большое разнообразие форм механизмов, но их степень подвижности всегда будет удовлетворять структурной формуле одного из семейств.

Г Л А В А IV

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

§ 21. Основной принцип образования механизмов и системы их классификации

1°. Основной принцип образования механизмов был впервые сформулирован в 1914 году русским ученым Л. В. Ассуром. Он состоит в следующем.

Схема любого механизма может быть составлена последовательным присоединением к ведущему звену (к ведущим звеньям) групп звеньев с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, к которым группа присоединяется.

Таким образом, степень относительной подвижности группы может быть выражена так:

$$\omega_{гр} = 0.$$

Последовательное присоединение групп должно выполняться в следующем порядке.

Первая группа присоединяется к ведущему звену и к стойке. Если желают образовать механизм с несколькими ведущими звеньями, то звенья первой группы можно присоединять и не к одному ведущему звену. Так как степень относительной подвижности группы равна нулю, то степень подвижности механизма с присоединенной первой группой окажется равной числу ведущих звеньев.

Для получения более сложного механизма к некоторым звеньям рассмотренного механизма можно присоединить вторую группу и т. д.

Если, например, группа имеет два звена, которые с другими звеньями могут образовать вращательные пары, то первую группу надо присоединить к ведущему звену и к стойке.

Если второй является такая же группа, то ее можно присоединить одним звеном, например, к звену предыдущей группы, а другим к стойке или к ведущему звену. Если же эту группу присоединить так же, как первую группу, к ведущему звену и к стойке, то получится механизм с двумя «равноправными» первыми группами.

Третью группу следует присоединить к звеньям ранее полученного механизма и т. д.

2°. Рассмотрим в качестве примера плоский механизм, схема которого показана на рис. 160. Степень подвижности этого механизма может быть определена по формуле Чебышева

$$\omega = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1,$$

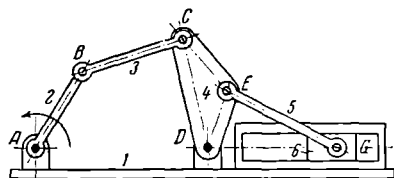


Рис. 160. Модель шестизвального плоского механизма.

ибо в этом механизме число подвижных звеньев $n=5$, число пар V класса $p_5=7$ и число пар IV класса $p_4=0$.

В рассматриваемом механизме звено 1 является стойкой. За ведущее звено примем звено 2. Тогда звенья 3, 4, 5 и 6 составят систему ведомых звеньев, обладающих нулевой степенью относительной подвижности. Так как ведомая часть механизма состоит из четырех звеньев и шести пар V класса, то степень ее относительной подвижности равна

$$3n - 2p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0.$$

Анализируя ведомую часть механизма, обнаруживаем, что к ведущему звену и к стойке присоединена группа, состоящая из двух звеньев 3 и 4. Следовательно, эта группа является первой присоединенной к ведущему звену. Вторая группа, состоящая также из двух звеньев, 5 и 6, звеном 5 присоединена к звену 4 первой группы и звеном 6 со стойкой образует поступательную кинематическую пару. Каждая из этих групп, состоящая из двух звеньев и трех кинематических пар V класса, обладает степенью относительной подвижности, равной нулю. Имеем для каждой из этих групп

$$\omega_{гр} = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Таким образом, плоский механизм, показанный на рис. 160, обладающий одной степенью подвижности, может рассматриваться как образованный последовательным присоединением к стойке 1 и к ведущему звену 2 двух групп, состоящих из звеньев 3 и 4 и 5 и 6.

3°. Структурные уравнения для групп различных семейств могут быть получены из условия

$$\omega_{гр} = 0. \quad (4.1)$$

Тогда для групп нулевого семейства структурная формула будет следующей:

$$6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 0; \quad (4.2)$$

для групп первого семейства

$$5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2 = 0; \quad (4.3)$$

для групп второго семейства

$$4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 = 0; \quad (4.4)$$

для групп третьего семейства

$$3n - 2p_5 - p_4 = 0; \quad (4.5)$$

и, наконец, для групп четвертого семейства

$$2n - p_5 = 0. \quad (4.5')$$

4°. Как было показано выше, в главах первой и третьей, в современной технике применяется огромное количество различных видов механизмов.

Основной задачей исследования механизмов является изучение различных свойств механизмов: воспроизводимых ими форм движения, законов изменения скоростей и ускорений, законов передачи сил и мощностей и т. д.

В силу многообразия существующих видов механизмов изучение этих свойств применительно к каждому отдельному механизму практически явилось бы невозможным и нецелесообразным, так как техника не только при-

меняет существующие виды механизмов, но постоянно их совершенствует и создает новые, более совершенные виды механизмов.

Поэтому на всех этапах развития теории механизмов и машин изучаемые механизмы обычно разбивались на отдельные достаточно крупные классы и создавались классификации механизмов.

В основу той или иной классификации обычно кладутся какие-либо общие свойства механизмов, присущие отдельным классам. Так, например, выше, в § 20, нами было дано деление механизмов на семейства по тем общим связям, которые накладываются на движение всех звеньев механизма. Каждое семейство имеет свою структурную формулу, т. е. в основу деления механизмов на семейства может быть положен *структурный признак*. Таким образом, деление механизмов на семейства представляет собой первый этап структурной классификации современных механизмов.

Как это будет показано далее, *структурная классификация механизмов должна быть увязана с методами их кинематического и силового исследования* и к механизмам одного и того же семейства приложимы общие методы их кинематического и силового анализа. Например, к сферическим и плоским механизмам, принадлежащим к третьему семейству (§ 20, 5°), могут быть приложены аналогичные методы их исследования. Точно так же аналогичными являются методы исследования механизмов винтовых и клиновых, принадлежащих к четвертому семейству (§ 20, 6°), и т. д.

Структурная классификация механизмов не заканчивается только делением механизмов на семейства. Внутри каждого семейства и вида механизмов может быть также проведена классификация, увязанная с методами кинематического и силового исследования механизмов.

Ниже будет изложена структурная классификация плоских механизмов третьего и четвертого семейств как механизмов, широко применяемых в современной технике, и будут даны некоторые сведения по структурной классификации наиболее распространенных пространственных механизмов.

5°. Кроме структурной классификации механизмов в практике конструирования механизмов и машин применяется *структурно-конструктивная классификация*, в основу которой положены признаки конструктивного оформления механизмов. Основные примеры механизмов по этой классификации были нами описаны в главе первой.

С точки зрения применения механизмов для решения различных задач практики в некоторых случаях удобно классифицировать механизмы по их назначению. Эта классификация может быть названа *классификацией механизмов по функциональному назначению*.

Эта классификация содержит разделы: механизмов передач движения, механизмов включения и выключения, механизмов блокировки, механизмов зажимов, механизмов стопоров, механизмов захватов, механизмов с остальными, механизмов для математических операций, механизмов подач, механизмов муфт, механизмов регуляторов, механизмов тормозов и т. д.

Такая классификация вместе с примерами механизмов может быть весьма полезна конструкторам и инженерам, проектирующим различные механизмы и устройства. В специальных инженерных справочниках можно ознакомиться с этой классификацией и большим количеством механизмов, с помощью которых могут быть спроектированы соответствующие конструкции и устройства машин.

§ 22. Структурная классификация плоских механизмов

1°. Как было указано выше, в современном машиностроении особенно широкое применение получили плоские механизмы, звенья которых входят в пары IV и V классов. Поэтому отдельно остановимся на рассмотрении принципов их структурной классификации.

В § 21 был установлен основной принцип образования механизмов, состоящий в последовательном присоединении к ведущим звеньям и стойке групп, структурная формула которых удовлетворяет условию

$$w_{гр} = 0.$$

Для плоских механизмов, звенья которых входят в пары IV и V классов, это условие можно выразить так:

$$3n - 2p_8 - p_4 = 0. \quad (4.6)$$

2°. Назовем условно ведущее звено и стойку, образующие кинематическую пару V класса, *механизмом I класса* (рис. 161).

Образование любого плоского механизма может быть представлено как *последовательное присоединение* групп, удовлетворяющих условию (4.6). Например, первая группа присоединяется к одному механизму I класса (ведущему звену и стойке), следующая группа — либо к звеньям первой группы, либо частично к звеньям первой группы и ведущему звену или к стойке и т. д.

На рис. 162 дана схема механизма, образованного присоединением к одному механизму I класса (ведущее звено 2 и стойка 1) следующих кинематических цепей: первой кинематической цепи из звеньев 3, 4, 5 и 6, второй — из звеньев 7 и 8 и третьей — из звеньев 9 и 10.

Можно проверить, что все эти кинематические цепи действительно удовлетворяют условию (4.6) и, следовательно, являются группами. Механизмы, образованные присоединением нескольких групп к одному механизму I класса, так же как и сам он, обладают степенью подвижности, равной единице, так как группы не изменяют степени подвижности механизма, к которому они присоединяются.

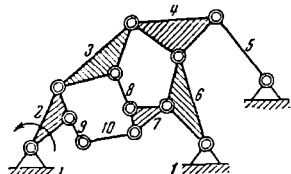


Рис. 162. Схема сложного механизма, состоящего из стойки 1, ведущего звена 2, из группы звеньев 3, 4, 5 и 6, группы звеньев 7 и 8 и группы звеньев 9 и 10.

Механизмы могут быть образованы также и присоединением групп одновременно к *нескольким* механизмам I класса. В этих случаях степень подвижности получаемых механизмов будет равна числу механизмов I класса, к которым производится такое присоединение групп, т. е. числу *ведущих* звеньев полученного механизма.

Например, на рис. 163 показан механизм, образованный присоединением группы, состоящей из звеньев 3 и 4, к одному механизму I класса, а на рис. 164 показан механизм, образованный присоединением такой же группы к двум механизмам I класса.

3°. Как было показано в § 18, все входящие в состав плоского механизма высшие кинематические пары IV и V классов могут быть

заменены кинематическими цепями, образованными только парами V класса. Получаемые указанным выше способом заменяющие механизмы будут совершать мгновенные движения того же характера, что и первоначальные, в состав которых входили высшие пары. Поэтому при рассмотрении вопросов о классификации механизмов можно ограничиться рассмотрением заменяющих механизмов, в которых все высшие пары предварительно заменены соответствующими цепями, образованными парами V класса.

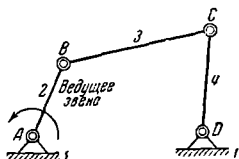


Рис. 163. Схема механизма, образованного присоединением группы звеньев 3 и 4 к ведущему звену 2 и к стойке 1.

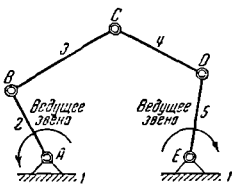


Рис. 164. Схема механизма, образованного присоединением группы звеньев 3 и 4 к двум механизмам I класса, состоящим из ведущих звеньев 2 и 5, соединенных со стойкой 1.

Из соотношения (4.6) следует, что условие, которому должны удовлетворять группы, в состав которых входят пары только V класса, можно написать так:

$$3n - 2p_v = 0,$$

откуда

$$p_v = \frac{3}{2} n, \quad (4.6')$$

т. е. число пар V класса, входящих в группу, должно равняться *трем вторым числа входящих в нее звеньев*.

Так как числа звеньев и пар могут быть только целыми, то, очевидно, условию (4.6') могут удовлетворять только следующие сочетания чисел звеньев и кинематических пар, входящих в группу:

$$\left. \begin{array}{l} n = 2, 4, 6, 8, \\ p_v = 3, 6, 9, 12, \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

Задаваясь различными сочетаниями этих чисел, удовлетворяющим условию (4.7), мы можем получать группы различного вида. Все получаемые таким способом группы можно разбить по *классам*. Как это будет показано далее, деление групп по классам обусловлено методами кинематического и силового анализов, свойственными группам каждого класса.

4°. Простейшее сочетание чисел звеньев и пар, удовлетворяющих условию (4.6'), $n = 2$ и $p_v = 3$. Так как любая группа после своего

присоединения к ведущему звену и стойке образует замкнутую кинематическую цепь, то можно сделать вывод, что число элементов, которыми группа к ним присоединяется, не может быть меньше двух. Тогда в рассматриваемой простейшей группе, состоящей из трех кинематических пар, элементы двух звеньев остаются свободными, и группа в общем виде может иметь вид, показанный на рис. 165. На

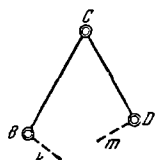


Рис. 165. Схема двухповодковой группы первого вида.

этом рисунке показана группа BCD , состоящая из двух звеньев и трех вращательных кинематических пар. Эта группа может быть присоединена элементами B и D к двум любым звеньям k и m механизма. Одним из условий присоединения группы является условие, чтобы концевыми элементами B и D группа не присоединялась к одному и тому же звену, так как в этом случае кинематическая цепь BCD становится фермой.

Группа может быть присоединена к одному механизму I класса, образованному ведущим звеном 2 и стойкой 1 (рис. 163), элементом B к ведущему звену 2 и элементом D к стойке 1. Полученный механизм должен иметь степень подвижности, равную единице, так как присоединение было сделано к одному механизму I класса. Та же группа может быть присоединена и к двум механизмам I класса (рис. 164), но в этом случае механизм обладает степенью подвижности, равной двум.

Группа, имеющая два звена и три пары V класса, называется группой II класса второго порядка или двухповодковой группой, ибо присоединение этой группы к основному механизму производится

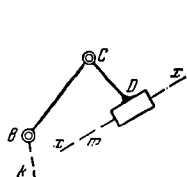


Рис. 166. Схема двухповодковой группы второго вида.

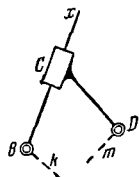


Рис. 167. Схема двухповодковой группы третьего вида.

двумя поводками BC и DC .

Порядок группы определяется числом элементов, которыми группа присоединяется к основному механизму.

Механизмы, в состав которых входят группы класса не выше второго, называются механизмами II класса.

5°. Группа, изображенная на рис. 165, содержит два звена и три

вращательные пары. Назовем такое сочетание звеньев и пар *первым видом* группы II класса.

Все последующие виды группы II класса могут быть получены путем замены отдельных вращательных пар парами поступательными.

Вторым видом является тот вид, при котором поступательной парой заменена одна из крайних вращательных пар (рис. 166).

Третий вид показан на рис. 167. Здесь поступательной парой заменена средняя вращательная пара.

Четвертый вид изображен на рис. 168. Здесь две крайние вращательные пары заменены двумя поступательными парами.

Пятый вид показан на рис. 169. Здесь поступательными парами заменены *крайняя* и *средняя* вращательные пары.

Казалось бы, что, следуя по пути замены вращательных пар поступательными, можно было бы заменить и все три вращательные пары поступательными, но можно убедиться (рис. 170), что в этом случае при присоединении к стойке группа будет иметь одну степень подвижности и, следовательно, сможет двигаться самостоятельно и окажется механизмом. На рис. 170 второе возможное положение группы показано пунктиром. Как было показано в § 17, 4°, такие плоские механизмы с одними поступательными парами относятся к клиновым механизмам. Таким образом, в плоских механизмах с вращательными, поступательными и высшими парами IV и V классов имеется только *пять видов групп II класса*.

Большинство современных механизмов, применяемых в технике, принадлежит к механизмам II класса.

6°. Рассмотрим теперь второе возможное сочетание чисел звеньев и кинематических пар, образующих группу. Согласно равенству (4.6') следующая по числу звеньев группа должна содержать *четыре* звена и *шесть* пар V класса. Для этого сочетания могут быть получены три типа кинематических цепей, структурные принципы образования которых различны.

Первая кинематическая цепь, показанная на рис. 171, состоит из звена EGF , от которого идут три поводка: EB , GC и FD . Эта цепь представляет собой сложную незамкнутую кинематическую цепь и является *группой III класса третьего порядка* и называется *трехповодковой группой*. Присоединение этой группы к основному механизму производится посредством трех поводков EB , GC и ED с элементами B , C и D , входящими, в общем случае, в пары со звеньями k , m и l , принадлежащими основному механизму.

Отличительной особенностью этой группы является звено EGF , входящее в три кинематические пары и образующее некоторый жесткий, треугольный замкнутый контур, состоящий как бы из трех звеньев EG , GF и FE , входящих в три кинематические пары. Звено EGF будем называть *базисным звеном*. К основному механизму группа

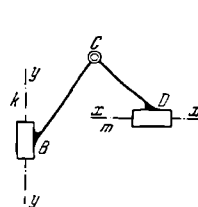


Рис. 168. Схема двухповодковой группы четвертого вида.

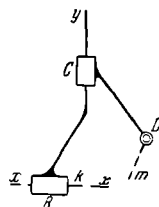


Рис. 169. Схема двухповодковой группы пятого вида.

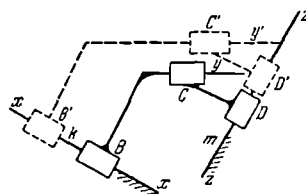


Рис. 170. Схема механизма с тремя поступательными парами.

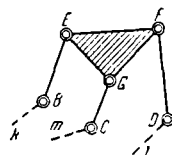


Рис. 171. Схема трехповодковой группы с одними вращательными парами.

присоединена элементами B , C и D поводков EB , GC и FD (рис. 172). Элементом B она присоединена к ведущему звену k , а элементами C и D — к стойке m .

Механизмы, в состав которых входят группы не выше групп III класса третьего порядка, называются *механизмами III класса*. Таким образом, механизм, показанный на рис. 172, является механизмом III класса.

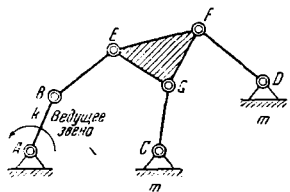


Рис. 172. Схема механизма III класса с присоединенной к механизму I класса трехповодковой группой.

7°. Вторая возможная кинематическая цепь из четырех звеньев и шести низших пар показана на рис. 173. Эта замкнутая кинематическая цепь присоединяется к звеньям k и m основного механизма не элементами поводков, а свободными элементами B и G , принадлежащими базисным звеньям EGF и CDB . В отличие от только что рассмотренной группы, данная группа, кроме двух базисных звеньев BCD и EGF , образующих два жестких замкнутых контура, имеет один подвижный четырехсторонний замкнутый контур $CEFD$.

Группы, в состав которых входят подвижные четырехсторонние замкнутые контуры, будем относить к *группам IV класса*. Вследствие

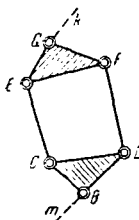


Рис. 173. Схема группы IV класса с замкнутым контуром.

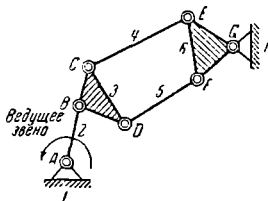


Рис. 174. Схема механизма IV класса с группой в виде замкнутого четырехстороннего контура.

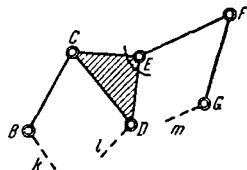


Рис. 175. Кинематическая цепь из четырех звеньев, распадающаяся на две двухповодковые группы.

этого группа, показанная на рис. 173, является *группой IV класса второго порядка*, так как присоединение группы к основному механизму I класса производится двумя элементами B и G (рис. 174); элементом B она присоединяется к ведущему звену 2, а элементом G — к стойке 1. Механизмы, в состав которых входят группы не выше IV класса второго порядка, называются *механизмами IV класса*. Таким образом, механизм, показанный на рис. 174, представляет собой механизм IV класса.

Третий возможный вид кинематической цепи из четырех звеньев и шести кинематических пар показан на рис. 175. Эта цепь распадается на две простейшие группы II класса — BCD и EFG — и потому относится к уже ранее рассмотренным и не представляет ничего принципиально нового.

8°. Обобщая результаты проведенного нами исследования групп II, III и IV классов, можно сделать вывод, что в состав группы II класса входит односторонний контур, в группу III класса — трехсторонний замкнутый контур, в группу IV класса — замкнутый четырехсторонний контур. Все рассмотренные группы получаются соответствующими изменениями структуры их контуров.

Можно получить группы из замкнутых контуров с числом сторон более четырех. На рис. 176 показаны контуры, начиная с одностороннего и кончая шестисторонним. Так как односторонний контур представляет собой звено, которое с другими звеньями может образовать две низшие пары, то степень его относительной подвижности равна —1.

Считая, что замкнутые контуры образуются построением на отрезке BC одностороннего контура соответственно треугольника, четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника и т. д. (рис. 176), степени подвижности построенных указанным способом замкнутых контуров относительно отрезка BC получаем такие:

для треугольного контура	$\omega_{отн} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$;
» четырехугольного »	$\omega_{отн} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$;
» пятиугольного »	$\omega_{отн} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$;
» шестиугольного »	$\omega_{отн} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 3$;

Для образования из контура группы надо иметь в виду следующее. Добавление к контуру одной кинематической пары вносит две связи. Добавление одного звена, присоединяемого к свободному элементу кинематической пары контура, вносит одну степень свободы, если на другом конце добавляемого звена предусматривается элемент кинематической пары, который сможет образовать кинематическую пару с основным механизмом.

Для получения из одностороннего контура группы надо к нему присоединить одно звено с элементом пары на конце. В таком случае лишняя связь будет погашена и получится *двухповодковая группа* (рис. 177).

Из трехстороннего контура группа получается присоединением к его вершинам трех звеньев с элементами пар на концах, и тогда получается *трехповодковая группа* (рис. 178).

Четырехсторонний контур в свободном состоянии (не относительно звена BC) (рис. 176) обладает четырьмя степенями свободы, и потому для получения из него группы к нему следует добавить минимум две кинематические пары, в которые могут входить с его звеньями звенья основного механизма (рис. 179).

В свободном состоянии *пятисторонний контур* имеет пять степеней свободы, и потому для получения группы к нему следует добавить пять

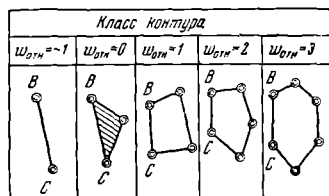


Рис. 176. Контуры с различными степенями относительной подвижности.

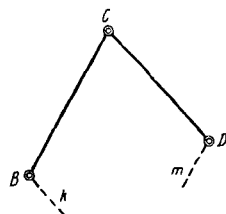


Рис. 177. Двухповодковая группа II класса первого вида.

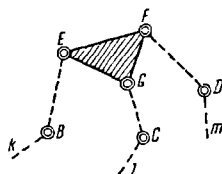


Рис. 178. Трехповодковая группа III класса.

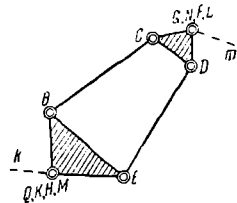


Рис. 179. Группа IV класса второго порядка.

связей — две кинематические пары и одно звено с элементом кинематической пары на конце (рис. 180).

Группу VI класса можно образовать добавлением к ее звеньям трех кинематических пар (рис. 181). Из сказанного ясно, как из контуров с большими числами сторон можно получить группы более высоких классов.

Теперь можно сделать вывод: *класс контура определяется числом пар, в которые входят образующие его звенья. Класс группы определяется классом наивысшего по классу контура, входящего в его состав.*

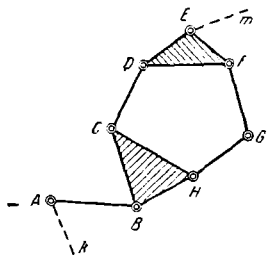


Рис. 180. Группа V класса второго порядка.

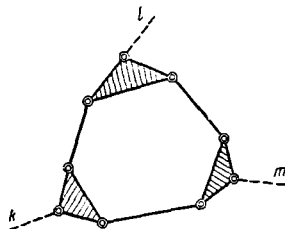


Рис. 181. Группа VI класса третьего порядка.

Порядок группы определяется числом элементов кинематических пар, которыми группа присоединяется к основному механизму.

9°. Описанным способом получаются наиболее простые группы различных классов. Однако в каждом классе, начиная с третьего, можно создавать более сложные группы.

Например, получая трехповодковую группу (рис. 178), к трехстороннему контуру мы добавили три звена с концевыми элементами пар. Однако на одном из поводков, например на FD , можно поместить дополнительный элемент пары L , к которому присоединить поводок LM , а к элементу D присоединить

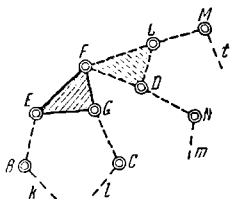


Рис. 182. Образование четырехповодковой группы из трехповодковой.

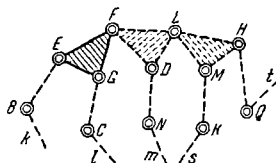


Рис. 183. Образование пятиповодковой группы из четырехповодковой.

также один поводок DN (рис. 182). Таким образом, к трехповодковой группе мы добавили два звена LM и DN и три кинематические пары L , M и N (пара D уже была в исходной группе). Присоединенные звенья не изменили равной нулю степени относительной подвижности группы. По числу свободных элементов, которыми полученную группу можно присоединить к звеньям k , l , m и t основного механизма, группа получает название *четыреповодковой* или может быть названа *группой III класса четвертого порядка*.

На рис. 183 показана пятиповодковая группа III класса пятого порядка, которая получена из четырехповодковой группы также добавлением двух звеньев и трех кинематических пар.

При создании сложных групп надо придерживаться описанного порядка, в противном случае может получиться кинематическая цепь, распадающаяся на более простые группы.

Например, если в пятиповодковой группе (рис. 183) поводок MK присоединить к базисному звену FDL (рис. 184), то мы будем иметь кинемати-

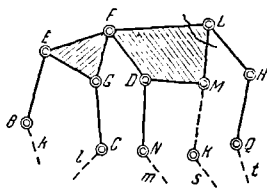


Рис. 184. Кинематическая цепь, распадающаяся на четырехповодковую группу и группу двухповодковую LHQ .

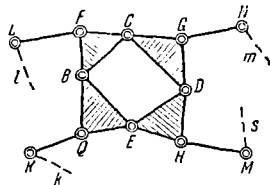


Рис. 185. Группа IV класса четвертого порядка.

ческую цепь, распадающуюся на четырехповодковую группу и группу двухповодковую LHQ .

10°. Выше мы показали, как из четырехстороннего замкнутого контура получается наиболее простая группа IV класса (рис. 179). Можно получить и более сложные группы IV класса. Например, на рис. 185 показана группа IV класса, образованная из группы, изображенной на рис. 179, добавлением четырех

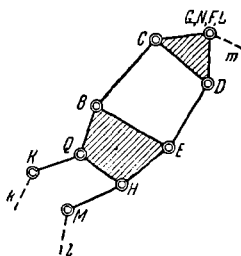


Рис. 186. Группа IV класса третьего порядка.

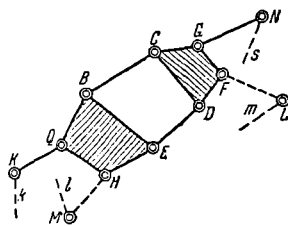


Рис. 187. Группа IV класса четвертого порядка.

поводков, входящих в восемь пар L, F, K, Q, M, H, N, G . Вследствие этого нулевая степень относительной подвижности остается без изменений.

На рис. 186 показана группа IV класса третьего порядка, полученная присоединением к группе, изображенной на рис. 179, двух поводков HM и QK и добавлением трех кинематических пар Q, K и M .

Из только что рассмотренной группы можно образовать группу, изображенную на рис. 187. Эта группа получается добавлением к базисному звену CDG двух поводков GN и FL и трех кинематических пар F, L и N .

Таким образом, описанным способом можно строить группы любой сложности. Мы не будем рассматривать сложные группы V и VI классов, которые можно получить аналогично группе IV класса — добавлением двух звеньев и трех кинематических пар.

Если в состав механизма входят группы различных классов, то класс механизма определяется по той группе, которая относится к наивысшему классу. Например, если механизм образован двумя

группами: группой IV класса и группой III класса, то он должен быть отнесен к механизмам IV класса.

При определении класса механизма необходимо указывать, какие из звеньев являются ведущими, ибо *в зависимости от выбора ведущих звеньев может изменяться класс механизма*. Например, если в механизме, показанном на рис. 172, за ведущее звено принять не звено AB , а звено DF , то весь механизм будет механизмом II класса, как образованный двумя группами II класса (группы FGC и EBA). Так как группы II класса могут быть группами только второго порядка (двухповодковыми), то в дальнейшем изложении мы не будем указывать порядок групп II класса.

11°. Если в составе механизма наряду с низшими кинематическими парами входят также и высшие, то, пользуясь методом замены элементов высших пар, изложенным в § 18, мы всегда сможем заменить

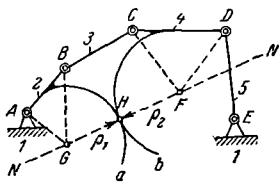


Рис. 188. Схема механизма с высшей парой.

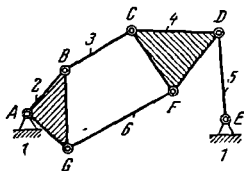


Рис. 189. Схема механизма IV класса, заменяющего механизм, схема которого показана на рис. 188.

все такие пары кинематическими цепями с низшими парами, после чего класс и порядок механизма могут быть определены.

Пусть, например, имеется механизм, звенья которого 2 и 4 входят в высшую пару H , которая является парой IV класса (рис. 188). Пара H в данном случае представляет собой совокупность двух соприкасающихся кривых a и b , из которых кривая a жестко связана со звеном 2, а кривая b — со звеном 4. Проведем через точку H общую нормаль $N-N$ к кривым a и b и отметим на этой нормали точки G и F — центры кривизны этих кривых. Условное звено GF , введенное для замены высшей пары H , имеет длину, равную $GF = \rho_1 + \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны кривых a и b в точке H , и входит со звеном 2 во вращательную пару G , а со звеном 4 во вращательную пару F .

Схема заменяющего механизма приведена на рис. 189. Звено 6 в общем случае имеет *переменную* длину, если ρ_1 и ρ_2 в различных точках кривых различны. В этом случае переменны и длины AG , BG , CF и DF звеньев 2 и 4.

Если ведущим будет звено 2, то механизм (рис. 189) будет III класса, так как в этом случае к основному механизму — механизму I класса (звено 2 и стойка 1) — присоединяется трехповодковая группа III класса, образованная звеньями 3, 4, 5 и 6. Если же ведущим звеном будет звено 5, то механизм будет IV класса, как образованный

группой IV класса второго порядка из звеньев 2, 3, 4 и 6. К основному механизму эта группа присоединена элементами двух пар A и D.

При расчленении механизмов на группы можно рекомендовать придерживаться такой последовательности.

Пусть дан механизм, состоящий из стойки, ведущего звена (или ведущих звеньев) и нескольких групп различных классов. Начинать надо с попытки отсоединить от механизма группы II класса. При этом необходимо каждый раз после отсоединения группы проверить, обладает ли оставшаяся кинематическая цепь той же степенью подвижности, что и первоначальный механизм, и чтобы не оставалось вообще элементов звеньев, не входящих в кинематические пары. Если попытки отсоединения групп II класса не дадут решения, то надо переходить к попыткам отсоединения групп III класса. После группы III класса следует переходить к группам IV класса и т. д.

После выделения всех групп должны остаться стойка и ведущее звено (ведущие звенья).

12°. Рассмотрим два примера на определение степени подвижности, класса механизмов и порядка присоединения групп.

Пример 1. На рис. 190 показан механизм двигателя. Требуется определить класс механизма и порядок присоединенных групп. Кривошип 2 входит во вращательную пару V класса со стойкой 1. Далее, шатун 3 входит во вращательную пару V класса с кривошипом 2 и во вращательную пару V класса с поршнем 4. Поршень 4 входит в поступательную пару V класса с цилиндром, жестко скрепленным со стойкой 1. С шатуном 3 во вращательную пару V класса входит звено 5, в свою очередь входящее во вращательную пару V класса со звеном 6. Звено 6 входит во вращательную пару V класса со стойкой 1 и во вращательную пару V класса с шатуном 7 компрессора. Шатун 7 входит во вращательную пару V класса с поршнем 8 компрессора, который в свою очередь входит в поступательную пару V класса с цилиндром, жестко скрепленным со стойкой 1. Механизм состоит из *восьми* вращательных пар V класса, *двух* поступательных пар V класса и семи подвижных звеньев.

Таким образом, имеем $n=7$ и $p_8=10$. Так как в механизме отсутствуют лишние степени свободы и пассивные связи, то степень подвижности механизма определяется по формуле Чебышева

$$\omega = 3n - 2p_8 - p_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 1,$$

т. е. механизм обладает *одной* степенью подвижности и, следовательно должен иметь *одно* ведущее звено.

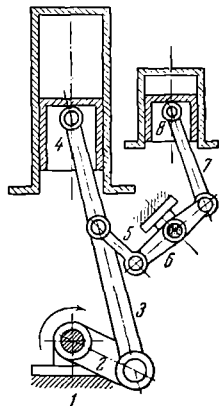


Рис. 190. Механизм двигателя со схематизированными конструктивными формами его звеньев.

Для определения класса механизма и порядка присоединенных групп составим кинематическую схему механизма (рис. 191).

Если за ведущее принять звено 2 (кривошип AB двигателя), то механизм должен быть отнесен к механизмам II класса, так как он образован тремя группами II класса, из которых первая группа образована звеньями 3 и 4, входящими в две вращательные пары 2, 3 и 3, 4 и одну поступательную пару 4, 1, и является группой II класса *второго* вида. Вторая группа образована звеньями 5 и 6, входящими в три вращательные пары 3, 5, 5, 6 и 6, 1, и является группой II класса *первого* вида. Наконец, третья группа образована звеньями 7 и 8, входящими в две вращательные пары 6, 7 и 7, 8 и в одну поступательную пару 8, 1, и является группой II класса *второго* вида.

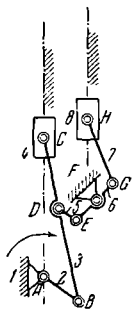


Рис. 191. Кинематическая схема механизма двигателя, изображенного на рис. 190.

При ведущем звене 8 (поршень компрессора) механизм должен быть отнесен к механизмам III класса, так как в этом случае ведомые звенья и пары, в которые они входят, образуют две группы, из которых одна — трехпроводковая группа III класса, а другая — II класса. Первая группа образована звеньями 2, 3, 4 и 5, входящими в пять вращательных пар 2, 1; 2, 3; 3, 4; 3, 5 и 5, 6 и одну поступательную пару 4, 1, а вторая группа II класса *первого* вида образована звеньями 6 и 7, входящими в три вращательные пары 6, 1; 6, 7 и 7, 8.

Наконец, при ведущем звене 4 (поршень двигателя) механизм должен быть отнесен к механизмам II класса, потому что так же, как и в первом случае, мы получаем три группы II класса.

Пример 2. На рис. 192, *а* показана кинематическая схема клапанного механизма двигателя. Кулачок 2, вращаясь вокруг оси A , действует на ролик 3, сидящий на качающемся рычаге 4. Рычаг 4 роликом 5 передает движение клапану 6, двигающемуся в направляющих F . Механизм состоит из пяти подвижных звеньев, четырех вращательных пар V класса, одной поступательной пары V класса и двух пар IV класса. По формуле Чебышева получаем:

$$\omega = 3n - 2p_8 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 2 = 3.$$

Механизм обладает лишними степенями свободы. Этим лишним степеням свободы соответствует возможность вращения роликов 3 и 5 вокруг осей C и E (рис. 192, *а*). В самом деле, устранив возможность такого вращения, например жестко скрепив для этого ролики 3 и 5 с рычагом 4, мы не изменим общего характера движения механизма в целом. Поэтому два звена — ролики 3 и 5 — могут быть устранены как особые звенья.

Кинематическая схема механизма после устранения роликов приведена на рис. 192, *б*. Для введения кулачка 2 в кинематическую

пару 2, 4 IV класса с рычагом 4 (в точке C) профиль кулачка *) I заменен геометрическим местом относительных положений центра ролика 3, а для введения рычага 4 в кинематическую пару 4, 6 IV класса с клапаном 6 (в точке E) плоскость a — a клапана 6 принята на расстояние, равное радиусу ролика 3.

Теперь после устранения роликов число подвижных звеньев стало равно трем ($n=3$), число пар V класса — также трем ($p_5=3$), а число пар IV класса — двум ($p_4=2$). Лишние степени свободы теперь отсутствуют, и поэтому структурная формула для рассматриваемого механизма принимает вид

$$m = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

и механизм обладает *одной* степенью подвижности.

Чтобы определить класс механизма и порядков присоединенных групп, необходимо предварительно произвести замену всех высших пар IV класса кинематическими цепями с низшими парами V класса. Для замены пары 2, 4 IV класса (рис. 192, б) через точку C соприкосновения звеньев 2 и 4 проводим нормаль $N-N$ к профилю кулачка 2 и соединяем точку B — центр кривизны этого профиля в точке C — с точкой A . Отрезок BC является условным звеном 3, входящим в две вращательные пары V класса 4, 3 и 2, 3.

Для замены пары 4, 6 IV класса вводим условное звено 5 (ползун), входящее в одну вращательную пару 4, 5 V класса и одну поступательную пару 5, 6 также V класса. После введения указанных выше условных звеньев, с помощью которых мы заменили высшие пары, мы получили *замещающий* механизм, кинематическая схема которого дана на рис. 192, в.

При ведущем звене 2 кинематическая цепь, образованная подвижными звеньями 3, 4, 5 и 6, распадается на две группы II класса: группу из звеньев 3 и 4, входящих в три вращательные пары 2, 3; 3, 4 и 4, 1, и группу из звеньев 5 и 6, входящих в одну вращательную пару 4, 5 и две поступательные пары 5, 6 и 6, 1. Первая из этих групп есть группа *первого* вида, а вторая — *пятого* вида.

При ведущем звене 6 кинематическая цепь, образованная ведомыми звеньями 5, 4, 3 и 2, распадается на две группы II класса, причем группа, образованная звеньями 3 и 2, — первого вида, а группа, образованная звеньями 4 и 5, — второго вида.

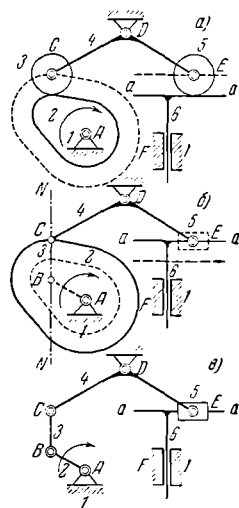


Рис. 192. Кулачковый механизм с двумя роликами: а) кинематическая схема; б) схема без роликов; в) схема замещающего механизма.

*) Профилем кулачка называется кривая, получаемая в сечении элемента кулачка плоского механизма плоскостью движения.

При ведущем звене 4 мы снова получаем две группы II класса: одну — *первого* вида (звенья 2 и 3) и вторую — *пятого* вида (звенья 5 и 6). Следовательно, при любом ведущем звене рассматриваемый механизм должен быть отнесен к механизмам II класса.

Для определения степени подвижности заменяющего механизма, в котором все высшие пары заменены кинематическими цепями с низшими парами (рис. 192, в), воспользуемся формулой Чебышева. Структурная формула механизма следующая:

$$\omega = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1,$$

так как из кинематической схемы (рис. 192, в) имеем $n = 5$, $p_5 = 7$ и $p_4 = 0$.

Таким образом, механизм обладает *одной* степенью подвижности и, следовательно, должен иметь *одно* ведущее звено.

13°. Переходим к структурной классификации плоских механизмов четвертого семейства с одними поступательными парами.

Для этих механизмов структурное уравнение группы $\omega_{гр} = 0$ имеет такой вид:

$$2n - p_5 = 0,$$

откуда

$$p_5 = 2n. \quad (4.8)$$

Итак, число поступательных пар V класса, входящих в группу, должно равняться удвоенному числу входящих в нее звеньев.

Так как число пар и звеньев могут быть только целыми, то условию (4.8) могут удовлетворять только следующие сочетания чисел звеньев и кинематических пар, входящих в группу:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \\ p_5 &= 2, 4, 6, \end{aligned}$$

Задаваясь различными сочетаниями чисел, удовлетворяющих условию (4.8), можно получить группы различного вида.

Простейшим из таких сочетаний является сочетание $n = 1$, $p_5 = 2$. Это дает группу *BC*, показанную на рис. 193. Это — *группа* II класса. Присоединяем ее к механизму I класса.

Эта группа представляет собой звено,

входящее в кинематические пары со стойкой *m* и с ведущим звеном *k*. Так получается механизм II класса (рис. 194), который является простейшим клиновым механизмом.

Следующее сочетание звеньев и пар, согласно равенству (4.8), содержит два звена и четыре поступательные пары. Оно дает кинематическую цепь, показанную на рис. 195. Эта цепь распадается на две группы II класса: группу *AB*, состоящую из звена 1 и пар *A* и *B*, и группу, состоящую из звена 2 и пар *C* и *D*.

Не останавливаясь подробно на рассмотрении групп высших классов, укажем только, что образование этих групп подчиняется тем же законам, что и образование групп плоских механизмов третьего семейства (§ 22,8°). В основе сложной группы с поступательными парами лежит замкнутый контур, например контур *ABC* (рис. 196). Контур может обладать различными

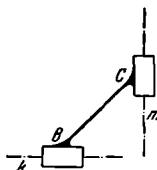


Рис. 193. Схема звена, входящего в поступательные пары со звеньями основного механизма.

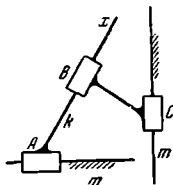


Рис. 194. Схема механизма с тремя поступательными парами.

степенями относительной подвижности. Контур ABC имеет $w_{\text{отн}} = 1$, так как по формуле для кинематических цепей четвертого семейства имеем:

$$w_{\text{отн}} = 2n - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Звенья контура присоединяются к звеньям k , m и l основного механизма непосредственно концевыми парами D , E и F , принадлежащими звеньям

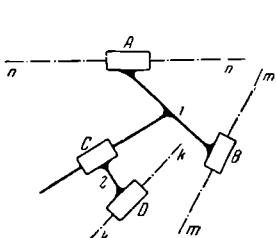


Рис. 195. Схема кинематической цепи с четырьмя поступательными парами.

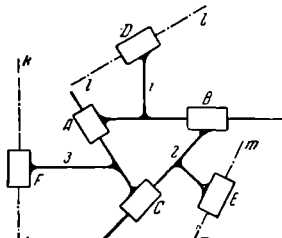


Рис. 196. Схема группы III класса третьего порядка с одними поступательными парами.

1, 2 и 3, т. е. в данном случае поводки как бы вырождаются в элементы поступательных кинематических пар. Группа, показанная на рис. 196, является *группой III класса третьего порядка*. Аналогично могут быть получены и группы более высоких классов.

§ 23. Некоторые сведения по структурной классификации пространственных механизмов

1°. Принципы структурной классификации плоских механизмов, рассмотренные нами в § 22, могут быть обобщены и на пространственные механизмы всех семейств.

Структурная классификация пространственных механизмов подчиняется тем же законам, что и классификация плоских механизмов. Так, если мы обратимся к механизмам четвертого семейства, то, как это было показано в § 20, 6°, кроме плоских клиновых механизмов, к этому же семейству относятся винтовые механизмы. Так как структурная формула Добровольского для плоских механизмов с поступательными парами

$$w = 2n - p_5$$

применима и к винтовым механизмам, то классификация винтовых механизмов совершенно аналогична классификации плоских клиновых механизмов, рассмотренной нами в § 22, 13°.

Точно так же, так как структурная формула Чебышева для плоских механизмов третьего семейства

$$w = 3n - 2p_3 - p_4$$

применима к сферическим механизмам и к пространственным клинчатым механизмам (§ 20, 5°), то классификация этих механизмов аналогична классификации плоских механизмов третьего семейства, рассмотренной нами в § 22.

Так как структурная классификация механизмов определяет методы кинематического и силового исследования механизмов, то указанная аналогия в классификации распространяется и на методы исследования механизмов, что и было показано в работах советских ученых, которые предложили ряд методов исследования сферических механизмов, аналогичных методам, применяемым при исследовании плоских механизмов третьего семейства.

2°. Структурная классификация механизмов высших семейств нулевого, первого и второго вытекает из анализа структурных формул для групп этих семейств (§ 20). Так, для групп нулевого семейства мы имеем формулу

$$6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 0. \quad (4.2)$$

Если все пары, входящие в группу, — пары V класса, то формула (4.2) принимает вид

$$6n - 5p_5 = 0, \quad (4.9)$$

откуда

$$p_5 = \frac{6}{5} n. \quad (4.10)$$

Простейшее сочетание звеньев и кинематических пар имеет место при $n = 5$ и $p_5 = 6$. Таким образом, простейшей группой в нулевом семействе

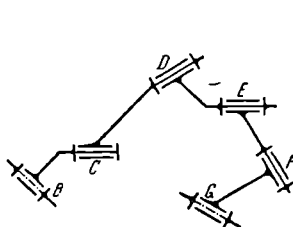


Рис. 197. Схема пятизвенной пространственной группы II класса второго порядка.

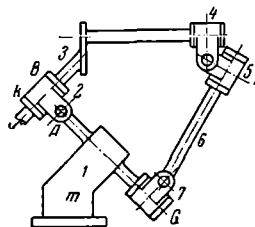


Рис. 198. Модель пространственного семизвездного механизма II класса второго порядка.

является группа, показанная на рис. 197. Эта группа II класса второго порядка. Присоединяя ее концевыми шарнирами B и G к ведущему звену k и стойке m получаем (рис. 198) *семизвездный пространственный механизм* нулевого семейства II класса.

Наиболее широкое применение в технике получили четырехзвенные пространственные механизмы II класса. Они образуются присоединением к веду-

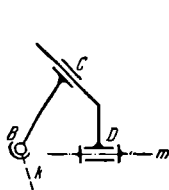


Рис. 199. Схема пространственной двухзвенной группы с шаровой, цилиндрической и вращательной парами.

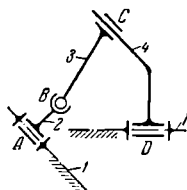


Рис. 200. Схема четырехзвенного пространственного механизма с двухзвенной группой.

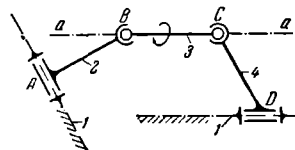


Рис. 201. Схема пространственного четырехзвенного механизма, шатун которого входит в две шаровые пары.

щему звену k и стойке m двухзвенной группы, звенья которой входят, например, в одну шаровую пару III класса — пара B, одну цилиндрическую пару IV класса — пара C и одну вращательную пару V класса — пара D (рис. 199). По формуле (4.2) получаем:

$$6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 0.$$

Пространственный четырехзвенный механизм, образованный этой группой, показан на рис. 200. В некоторых конструкциях четырехзвенных простран-

ственных механизмов шатун BC входит в две шаровые пары III класса (рис. 201). Шатун BC при этом имеет лишнюю степень свободы, соответствующую возможности свободного вращения шатуна вокруг оси $a-a$, но это вращение не оказывает влияния на закон движения всего механизма в целом. Такой шатун иногда называют *плавающим*.

3°. Структурная формула для групп первого семейства имеет следующий вид:

$$5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2 = 0. \quad (4.3)$$

Если в группу входят только пары V класса, то формула (4.3) принимает вид

$$5n - 4p_5 = 0, \quad (4.11)$$

откуда

$$p_5 = \frac{5}{4} n. \quad (4.12)$$

Простейшее сочетание чисел звеньев и кинематических пар получается при $n=4$ и $p_5=5$. Таким образом, простейшая группа в первом семействе содержит четыре звена и пять пар V класса. Это есть группа II класса второго порядка. Присоединяя ее концевыми шарнирами B и F к ведущему звену 2 и стойке 1, мы получаем шестизвенный меха-

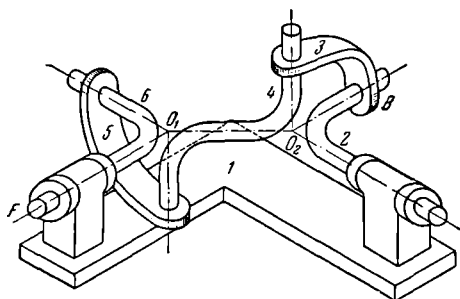


Рис. 202. Модель шестизвенного пространственного механизма двойного универсального шарнира.

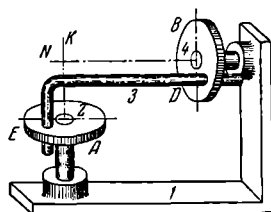


Рис. 203. Модель пространственного механизма уголкового передаточного.

низм двойного универсального шарнира (рис. 202), являющийся механизмом *первого семейства II класса*.

Четырехзвенный механизм первого семейства II класса может быть также получен, если в состав группы ввести, например, одну вращательную пару V класса и две цилиндрические пары IV класса. По формуле (4.3) имеем:

$$5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2 = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0.$$

Соответствующий этому условию механизм показан на рис. 203. Он представляет собой рассмотренный выше механизм уголкового передаточного, образованный присоединением группы к ведущему звену 2 и стойке 1.

4°. Структурная формула для групп второго семейства имеет следующий вид:

$$4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 = 0. \quad (4.4)$$

Если все пары, входящие в группу, — пары V класса, то формула (4.4) имеет вид

$$4n - 3p_5 = 0, \quad (4.13)$$

откуда

$$p_5 = \frac{4}{3} n. \quad (4.14)$$

Простейшее сочетание чисел звеньев и кинематических пар имеем при $n=3$ и $p_5=4$. Таким образом, простейшей группой во втором семействе является группа, содержащая три звена и четыре пары V класса. Это — *группа II класса второго порядка*. Присоединяя ее концевыми шарнирами к звену 2 и стойке 1, мы получаем пятизвенный механизм (рис. 204), в состав которого входит одна винтовая пара V класса.

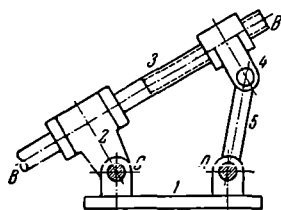


Рис. 204. Модель пространственного пятизвенного механизма с винтовой парой.

Четырехзвенный механизм второго семейства II класса получается также, если в состав группы входят, например, одна вращательная пара V класса, одна винтовая пара V класса и одна пара IV класса. По формуле (4.4) имеем:

$$4n - 3p_6 - 2p_4 - p_3 = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Такой механизм показан на рис. 205. В этом механизме группа присоединена к звену 2 и стойке 1. Пара IV класса выполнена в виде ролика a , свободно скользящего и вращающегося в прорези b .

Мы рассмотрели классификацию только простейших пространственных механизмов, относящихся ко II классу различных семейств. Пространственные механизмы более высоких классов могут быть получены теми общими методами, которые мы применяли при изложении классификации плоских механизмов. Естественно, что сложность классификации и многообразие возможных механизмов увеличиваются по мере перехода от механизмов более низких семейств (четвертого и третьего) к механизмам более высоких семейств (второго, первого и нулевого).

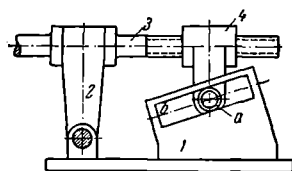


Рис. 205. Модель пространственного механизма с винтовой парой и роликом, движущимся в прорези.

Так как в основу классификации нами были положены общие принципы теории структуры механизмов, то классификации всех последующих семейств механизмов могут быть получены как частные случаи классификации механизмов нулевого семейства. Точно так же классификация, например, механизмов четвертого семейства может быть получена как частный случай классификации механизмов третьего семейства; классификация механизмов третьего семейства — как частный случай классификации механизмов второго семейства и т. д.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА V

ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 24. Центроиды в абсолютном и относительном движениях

1°. Основной задачей кинематики механизмов является изучение движения звеньев механизмов вне зависимости от сил, действующих на эти звенья.

Из теоретической механики известно, что при плоскопараллельном движении твердого тела (звена механизма) это движение в каждый момент времени может быть представлено как вращение вокруг некоторой точки называемой *мгновенным центром вращения*. В механизмах мы можем рассматривать движение звеньев относительно стойки и относительно любого из звеньев механизма. Если движение звена относительно стойки принять за абсолютное движение, то соответствующий мгновенный центр вращения будем называть *мгновенным центром вращения в абсолютном движении рассматриваемого звена*. Если же рассматривается движение звена относительно любого другого подвижного звена механизма, то соответствующий мгновенный центр вращения будем называть *мгновенным центром вращения в относительном движении рассматриваемых звеньев*.

На рис. 206 изображена схема механизма шарнирного четырехзвенника. Мгновенные центры вращения звеньев 2 и 4 относительно стойки 1 совпадают соответственно с точками A и D. Обозначим эти центры соответственно через P_{21} и P_{41} . Мгновенным центром вращения звена 3 относительно звена 2 является точка B, которую мы обозначим через P_{32} . Наконец, мгновенный центр вращения P_{43} звена 4 относительно звена 3 совпадает с точкой C.

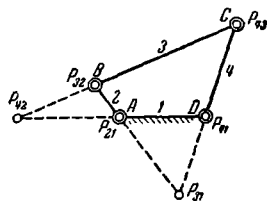


Рис. 206. Схема четырехзвенного шарнирного механизма с построенными на ней центрами мгновенного вращения.

2°. Чтобы найти мгновенный центр вращения звена 3 относительно стойки 1, следует продолжить линии BA и CD , точка пересечения которых P_{31} и оказывается центром *мгновенного* вращения звена 3 относительно стойки. Как известно из механики, мгновенный центр вращения располагается на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей точек звена. В изображенном на рис. 206 механизме линии AB и DC как раз являются перпендикулярами к векторам скоростей точек B и C .

Мгновенные центры P_{32} , P_{31} и P_{34} , имеющие индексы, представляющие собой сочетания из цифр 1, 2, 3 по два, лежат на одной прямой. Точно так же на одной прямой лежат мгновенные центры P_{43} , P_{41} и P_{42} , индексы которых представляют собой сочетание цифр 1, 3 и 4. Это следует из известной теоремы механики о сложении двух вращений вокруг параллельных осей. Результирующее вращение происходит вокруг оси, лежащей в их плоскости и параллельной первым двум. Этим свойством можно воспользоваться, например, для нахождения мгновенного центра вращения P_{42} в относительном движении звена 4 относительно звена 2. Мгновенный центр вращения P_{42} должен одновременно лежать на прямой, соединяющей мгновенные центры P_{32} и P_{43} , и на прямой, соединяющей центры P_{21} и P_{41} , т. е. мгновенный центр вращения P_{42} лежит на пересечении прямых CB и DA . Это свойство мгновенных центров вращения в механизмах впервые было указано английским ученым Кеннеди.

3°. Установленное свойство мгновенных центров вращения позволяет определить все мгновенные центры вращения заданного механизма. Пусть нам дан кривошипно-ползунный механизм (рис. 207). Обозначим в точках A , B и C мгновенные центры вращения P_{21} , P_{32} и P_{43} . Мгновенный центр P_{41} находится в бесконечности на прямой, перпендикулярной к оси $x-x$ движения ползуна 4. Соединяем мгновенные центры вращения P_{21} и P_{32} и продолжаем прямую $P_{21}P_{32}$ до пересечения в точке P_{13} с прямой $P_{43}P_{41}$, т. е. прямой, перпендикулярной к направляющей $x-x$ (точка P_{41} располагается в бесконечности), получаем мгновенный центр вращения P_{31} звена 3 относительно звена 1. Для нахождения мгновенного центра вращения P_{42} в движении звена 4 относительно звена 2 соединяем мгновенные центры вращения P_{43} и P_{32} и продолжаем эту прямую до пересечения в точке P_{42} с прямой, соединяющей мгновенные центры вращения P_{21} и P_{41} , т. е. с прямой, проведенной через точки P_{21} перпендикулярно к направляющей $x-x$.

На рис. 208 и 209 показаны мгновенные центры вращения двух кулисных механизмов. Мгновенный центр вращения P_{32} (рис. 209)

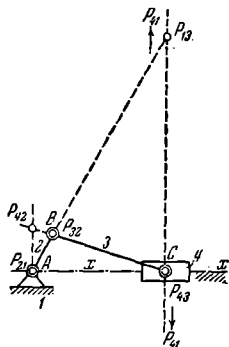


Рис. 207. Схема кривошипно-ползунного механизма с построенными на ней центрами мгновенного вращения.

находится в бесконечности и лежит на прямой, соединяющей центры P_{42} и P_{43} .

На рис. 210 показан кулачковый механизм. Мгновенный центр вращения P_{21} звена 2 относительно стойки 1 находится в точке А.

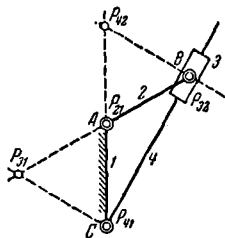


Рис. 208. Схема кулачкового механизма с одной поступательной парой и с показанными на ней центрами мгновенного вращения.

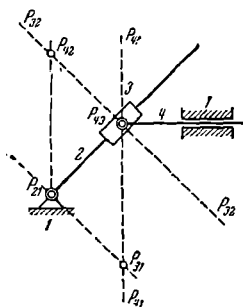


Рис. 209. Схема кулачкового механизма с двумя поступательными парами и показанными на ней центрами мгновенного вращения.

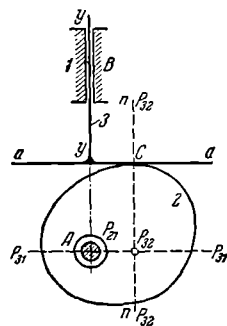


Рис. 210. Схема кулачкового механизма с показанными на ней центрами мгновенного вращения.

Мгновенный центр вращения P_{32} звена 3 относительно звена 2 лежит на нормали $n-n$, проведенной в точке C к профилю кулачка 2, — на прямой, перпендикулярной к прямой $a-a$. Мгновенный центр вращения P_{31} звена 3 относительно звена 1 лежит в бесконечности на прямой, перпендикулярной к оси $y-y$ движения звена 3. Поэтому мгновенный центр вращения P_{32} звена 3 относительно звена 2 может быть найден как точка пересечения прямой $P_{21}P_{31}$, соединяющей мгновенные центры P_{21} и P_{31} и нормали $n-n$, проведенной через точку C .

4°. Как известно из механики, геометрическое место мгновенных центров вращения образует так называемую *центроиду*.

На рис. 211 показан четырехзвенный шарнирный механизм антипараллелограмма, у которого противоположные звенья попарно равны. Пусть требуется построить центроиду в движении звена 2 относительно звена 4. Останавливаем звено 4 (условно принимаем его за стойку). Мгновенный центр вращения P_{24} находится в пересечении прямых AB и CD . Поворачиваем звено AB на полный оборот. Геометрическое место точек P_{24} образует центроиду $\mathcal{C}_{24}$, которая для данного

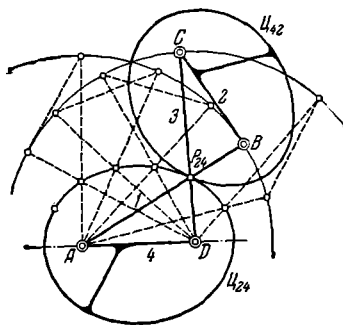


Рис. 211. Схема шарнирного антипараллелограмма с показанными на ней центроидами в относительном движении звеньев 2 и 4.

механизма является эллипсом с фокусами в точках A и D . Так как за стойку мы приняли звено 4, то центроида $Ц_{34}$ принадлежит этому звену и может быть с ним жестко соединена. Если требуется построить центроиду в движении звена 4 относительно звена 2, то надо условно принять за стойку звено 2 и построить все положения мгновенного центра P_{42} . Кривая $Ц_{42}$, представляющая собой эллипс с фокусами в точках C и B , является центроидой в движении звена 4 относительно звена 2. Центроиду $Ц_{42}$, принадлежащую звену 2, мы можем жестко соединить с ним. Теперь движения звена 2 относительно звена 4, или, наоборот, звена 4 относительно звена 2, могут быть осуществлены качением друг по другу без скольжения построенных центроид $Ц_{34}$ и $Ц_{42}$. В зависимости от того, какие из звеньев механизма $ABCD$ будут приняты за стойку, центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$ могут быть центроидами или в абсолютном движении звена или в относительном. Так, останавливая звено 4 и жестко связавшую с ним центроиду $Ц_{24}$, мы можем воспроизвести абсолютное движение звена 2 как качение без скольжения подвижной центроиды $Ц_{42}$ по неподвижной центроиде $Ц_{24}$.

Таким образом, в этом случае центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$ оказываются соответственно подвижной и неподвижной центроидами в абсолютном движении звена 2. Наоборот, если остановить звено 2, то центроида $Ц_{42}$ будет неподвижной центроидой, а центроида $Ц_{24}$ будет подвижной центроидой в абсолютном движении звена 4.

Если теперь остановить одно из звеньев 1 или 3, то обе центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$ станут подвижными и качение одной центроиды по другой будет воспроизводить относительное движение звеньев 2 и 4 и центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$ будут *центроидами в относительном движении*.

Если остановить звено 1, то центроида $Ц_{24}$ будет вращаться вокруг оси A , а центроида $Ц_{42}$ — вокруг оси B . Таким образом, вращение вокруг осей A и B звеньев 4 и 2 по закону шарнирного антипараллелограмма может быть воспроизведено также путем посадки на эти оси двух фрикционных эллиптических колес, профили которых представляют собой центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$, т. е. механизм шарнирного антипараллелограмма заменяется механизмом фрикционных эллиптических колес. Такое движение окажется возможным, если между центроидами установлена связь, обеспечивающая движение без скольжения.

5°. Центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$ принадлежат звеньям 2 и 4. Точно так же могут быть построены и центроиды $Ц_{31}$ и $Ц_{13}$, принадлежащие звеньям 1 и 3. Для этого надо найти геометрические места мгновенных центров P_{31} и P_{13} . Как было показано выше, эти мгновенные центры находятся на пересечении прямых AD и CB (рис. 212). Деля последовательно стойкой звенья 1 и 3, можно построить центроиды $Ц_{31}$ и $Ц_{13}$, представляющие собой гиперболы, каждая из которых состоит из двух ветвей. Ветви гиперболы $Ц_{31}$ жестко соединяем со звеном 1, а ветви гиперболы $Ц_{13}$ жестко соединяем со звеном 3. Если стойками счи-

тать звенья 1 или 3, то центроидами в абсолютном движении звеньев 1 или 3 будут центроиды $Ц_{31}$ и $Ц_{13}$. При этом одну из центроид надо принять за неподвижную, а другую — за подвижную в зависимости от того, какие из звеньев сделаны стойками. Если стойками будут звенья 2 или 4, то кривые $Ц_{31}$ и $Ц_{13}$ окажутся центроидами в относительном движении и обе будут подвижными.

Как было показано выше, для любого механизма в любом его положении могут быть определены все мгновенные центры вращения в абсолютном и в относительных движениях его звеньев. Следовательно, если имеется механизм, воспроизводящий то или иное движение, то такое же движение звеньев может быть осуществлено механизмом, представляющим собой две сопряженные центроиды. Так, например, передача движения между кривошипами AD и CB шарнирного антипараллелограмма может быть воспроизведена двумя эллиптическими фрикционными колесами (рис. 211), передача движения между звеньями AB и CD — двумя гиперболическими фрикционными колесами (рис. 212) с двойными профилями, соответствующими двум ветвям гиперболы. При этом законы движения звеньев остаются такими же, как и для механизма шарнирного антипараллелограмма. Механизмы, в которых передача движения осуществляется центроидами, носят название *центроидных механизмов*.

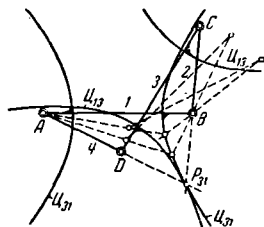


Рис. 212. Схема шарнирного антипараллелограмма с показанными на ней центроидами в относительном движении звеньев 1 и 3.

Практически редко можно пользоваться центроидными механизмами, так как в некоторых случаях центроидами служат кривые весьма сложного вида: самопересекающиеся, с бесконечно удаленными точками и т. д. Например, из рассмотрения рис. 211 и 212 видно: если движение эллиптическими фрикционными колесами (рис. 211) и может быть осуществлено, то воспроизведение движения гиперболическими фрикционными колесами не конструктивно, ибо эти колеса состоят каждое из двух ветвей, которые приближаются при удалении в бесконечность к своим асимптотам.

§ 25. Соотношения между скоростями звеньев механизма

1°. Как было показано в § 24, для каждого положения механизма могут быть найдены все мгновенные центры вращения его звеньев как в абсолютном, так и в относительных движениях. Как известно из механики, вращение каждого из звеньев механизма вокруг соответствующего мгновенного центра вращения происходит в рассматриваемый момент времени с некоторой *мгновенной угловой скоростью вращения*.

Так, если мы имеем механизм шарнирного четырехзвенника (рис. 213) с неподвижным звеном 1, то число его мгновенных центров

вращения получается равным шести. Это мгновенные центры P_{21} , P_{41} , P_{31} , P_{32} , P_{43} и P_{42} . Соответственно мы имеем три мгновенные угловые скорости в абсолютном движении ω_{21} , ω_{41} и ω_{31} и три мгновенные угловые скорости в относительном движении ω_{32} , ω_{43} и ω_{42} . Отношение двух любых из этих угловых скоростей всегда может быть определено.

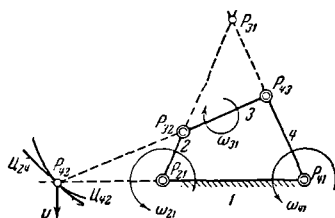


Рис. 213. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с показанными на ней центрами мгновенного вращения.

Пусть, например, требуется определить отношения ω_{21} и ω_{41} — угловых скоростей вращения звеньев 2 и 4 вокруг центров P_{21} и P_{41} , принадлежащих неподвижному звену 1. Мгновенным центром вращения звеньев 2 и 4 в относительном движении служит точка P_{42} . В этой точке соприкасаются centroиды относительного движения C_{42} и C_{24} , принадлежащие звеньям 2 и 4 и имеющие в качестве центров вращения неподвижные точки P_{21} и P_{41} . Так

как centroиды перекатываются одна по другой без скольжения, то в точке соприкасания они имеют одну общую скорость v , величина которой равна

$$v = \omega_{21} (P_{21}P_{42}) = \omega_{41} (P_{41}P_{42}), \quad (5.1)$$

откуда

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{41}} = \frac{P_{41}P_{42}}{P_{21}P_{42}}. \quad (5.2)$$

Из пропорции (5.2) следует: если стойкой является звено 1, то угловые скорости звеньев 2 и 4 относительно стойки 1 обратно пропорциональны расстояниям мгновенных центров вращения звеньев 2 и 4 в абсолютном движении до мгновенного центра вращения этих же звеньев в их относительном движении одного относительно другого.

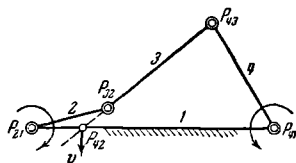


Рис. 214. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с показанными на ней центрами мгновенного вращения.

Из рис. 213 видно, что точка P_{42} представляет собой точку пересечения оси $P_{32}P_{43}$ шатуна 3 с осью $P_{21}P_{41}$ стойки 1. Если прямую $P_{21}P_{41}$ назвать *линией центров*, а прямую $P_{32}P_{43}$ *линией действия*, то условие (5.2) может быть сформулировано так: *линия действия делит линию центров на части, обратно пропорциональные угловым скоростям*

звеньев, вращающихся вокруг рассматриваемых центров. При этом если точка P_{42} делит прямую $P_{21}P_{41}$ внешним образом (рис. 213), то угловые скорости ω_{21} и ω_{41} имеют одно направление. Если же точка P_{42} делит прямую $P_{21}P_{41}$ внутренним образом, то угловые скорости ω_{21} и ω_{41} имеют разные направления (рис. 214), и тогда в правой части равенства (5.2) следует поставить знак минус.

2°. Для определения отношения угловых скоростей ω_{21} и ω_{31} имеем условие, что модуль скорости v (рис. 215) точки P_{32} , принадлежащей одновременно звеньям 2 и 3, равен

$$v = \omega_{21}(P_{21}P_{32}) = \omega_{31}(P_{31}P_{32}), \quad (5.3)$$

откуда, принимая во внимание, что ω_{21} и ω_{31} имеют разные знаки, получаем:

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{31}} = - \frac{(P_{31}P_{32})}{(P_{21}P_{32})}. \quad (5.4)$$

Аналогично можно найти отношение угловых скоростей ω_{41} и ω_{31} :

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{41}} = - \frac{(P_{41}P_{43})}{(P_{31}P_{43})}. \quad (5.5)$$

Отношение угловых скоростей ω_{32} и ω_{21} можно определить, рассматривая движение звена 3 относительно звена 2. Это движение есть вращение вокруг центра P_{32} в предположении, что звено 2 неподвижно. Но чтобы представить звено 2 неподвижным, достаточно ему и звену 3 сообщить угловую скорость, равную по величине и противоположную по направлению угловой скорости ω_{21} . Тогда звено 2 будет неподвижным, а звено 3 кроме угловой скорости ω_{31} , которой оно обладало ранее, получит дополнительную угловую скорость — ω_{21} , и угловая скорость ω_{32} будет равна

$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{21}. \quad (5.6)$$

Если в равенство (5.6) подставить выражение для ω_{31} из соотношения (5.4), то мы получим соотношение между угловыми скоростями ω_{32} и ω_{21} . Аналогично угловая скорость ω_{34} равна

$$\omega_{34} = \omega_{31} - \omega_{41}. \quad (5.7)$$

откуда с помощью соотношения (5.5) может быть найдено соотношение между угловыми скоростями ω_{34} и ω_{41} .

3°. Отношение между угловыми скоростями двух каких-либо звеньев механизма называется *передаточным отношением*. С помощью условия, полученного выше (§ 25, 2°), могут быть определены передаточные отношения для различных механизмов. Пусть требуется определить передаточное отношение между угловыми скоростями ω_{31} и ω_{41} звеньев 2 и 4 относительно стойки 1 кулисного механизма (рис. 216). Для этого необходимо определить положение мгновенного центра вращения P_{42} . Этот центр должен лежать на прямой, соединяющей

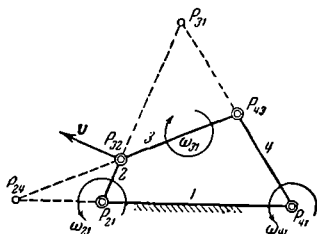


Рис. 215. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с показанными на ней центрами мгновенного вращения.

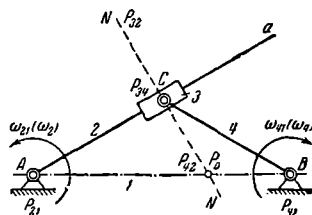


Рис. 216. Схема кулисного механизма с показанным на ней центром мгновенного вращения, необходимым для определения передаточного отношения от кривошипа к кулисе.

центры P_{21} (точка A) и P_{41} (точка B). Далее, центр P_{42} должен лежать также на прямой, соединяющей центры P_{32} и P_{34} . Так как ползун 3 относительно звена 2 имеет поступательное движение, то центр P_{32} лежит в бесконечности на прямой, перпендикулярной к оси Aa движения ползуна. Поэтому прямая NN , проходящая через центр P_{34} (точки C) и перпендикулярная к оси Aa движения ползуна, проходит также через центры P_{32} и P_{42} . В пересечении прямой NN (*линии действия*) и прямой AB (*линии центров*) находится мгновенный центр вращения P_{43} . Передаточное отношение угловых скоростей ω_{21} и ω_{41} равно

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{41}} = \pm \frac{(P_{41}P_{42})}{(P_{21}P_{42})}. \quad (5.8)$$

Условимся передаточное отношение обозначать буквой i . При этой букве будем ставить индексы, указывающие номера соответствующих звеньев. Так, в рассматриваемом случае мы определили отношение между угловыми скоростями звеньев 2 и 4; пользуясь установленным обозначением, мы можем написать:

$$i_{24} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{41}} = \pm \frac{(P_{41}P_{42})}{(P_{21}P_{42})}. \quad (5.9)$$

Условимся придавать передаточному отношению знак в зависимости от совпадения или несовпадения знаков угловых скоростей исследуемых звеньев. Так как угловые скорости ω_{21} и ω_{41} для механизма, показанного на рис. 216, имеют противоположные знаки, то передаточное отношение отрицательно. Далее, так как мы рассматриваем движение звеньев 2 и 4 относительно одного и того же звена (стойки 1), то для упрощения записи вторые индексы у угловых скоростей могут быть опущены. Тогда окончательно имеем:

$$i_{24} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = - \frac{BP_0}{AP_0}, \quad (5.10)$$

где P_0 — точка пересечения линии действия с линией центров.

Нетрудно видеть, что обратное передаточное отношение, или отношение угловой скорости ω_4 к угловой скорости ω_2 , т. е. передаточное отношение i_{42} равно

$$i_{42} = \frac{\omega_4}{\omega_2} = - \frac{AP_0}{BP_0} = \frac{1}{i_{24}}. \quad (5.11)$$

4°. Выше мы рассмотрели механизм, образованный одними низшими парами. При исследовании механизмов с высшими парами качения и скольжения задача решается аналогично. Пусть, например, требуется определить передаточное отношение i_{23} между звеньями 2 и 3 механизма мальтийского креста (рис. 217). Если заменить высшую пару в точке C звеном 4, входящим в пары со звеньями 2 и 3, то механизм мальтийского креста может быть заменен кулисным механизмом, показанным на рис. 218. Согласно § 24, 3° мгновенный центр враще-

ния $P_0(P_{32})$ лежит на прямой, соединяющей центры $A(P_{21})$ и $B(P_{31})$. С другой стороны, тот же центр должен находиться на прямой, соединяющей центры $P_{34}(C)$ и P_{42} . Так как центр P_{42} находится в бесконечности, то прямая, соединяющая центры $P_{34}(C)$ и P_{42} , является

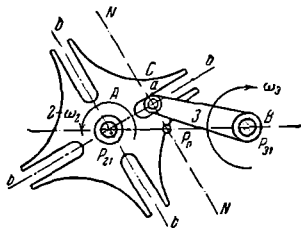


Рис. 217. Схема механизма мальтийского креста с показанным центром мгновенного вращения, необходимым для определения передаточного отношения i_{23} .

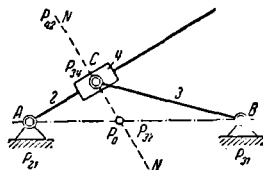


Рис. 218. Схема механизма, заменяющего механизм мальтийского креста.

нормалью NN , проходящей через точку C (центр ролика a). Таким образом, мгновенный центр $P_0(P_{32})$ находится на пересечении нормали NN , проведенной в точке C к элементам высшей пары (ролик и паз на рис. 217), с прямой, соединяющей центры вращения звеньев 2 и 3 (линия центров). Передаточное отношение i_{23} равно

$$i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{BP_0}{AP_0}. \quad (5.12)$$

На рис. 217 показано решение той же задачи непосредственно на схеме механизма мальтийского креста.

Из рассмотренного примера следует, что линией действия в высших парах является нормаль в точке соприкосновения элементов высшей пары качения и скольжения делит линию центров на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Это свойство высших пар можно считать условием связи, устанавливающим передаточное отношение между звеньями высшей пары. Этим свойством высших пар мы в дальнейшем будем пользоваться при исследовании зубчатых механизмов, зубья колес которых как раз образуют высшие пары.

На рис. 219 показан кулачковый механизм. Передаточное отношение i_{23} найдем, если в точке C провести нормаль NN к профилю кулачка 2 и найти точку P_0 пересечения этой нормали с прямой AB . Величина i_{23} равна

$$i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{BP_0}{AP_0}. \quad (5.13)$$

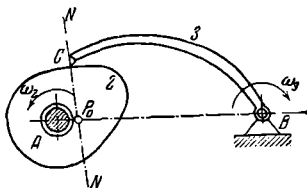


Рис. 219. Схема кулачкового механизма с коромыслом.

На рис. 220 показан кулачковый механизм с поступательно движущимся звеном 3. В этом механизме связь скорости v_3 звена 3 с угловой скоростью ω_2 кулачка 2 может быть определена, если через точку C провести нормаль NN и найти точку P_0 пересечения этой нормали с прямой AP_0 , проведенной через точку A перпендикулярно к направлению движения звена 3. Точка P_0 является мгновенным центром вращения P_{32} , что непосредственно следует из рис. 221, где показан механизм, полученный после замены высшей пары C звеном 4, входящим в кинематические пары C и O_3 со звеньями 3 и 2. Точка O_3

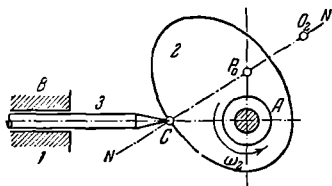


Рис. 220. Схема кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

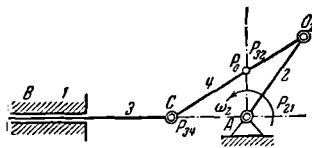


Рис. 221. Схема механизма, заменяющего кулачковый механизм, схема которого изображена на рис. 220.

является центром кривизны профиля кулачка 2 в точке C . Так как в точке P_0 звенья 2 и 3 имеют одну общую скорость, равную v_3 , то из рис. 220 следует:

$$v_3 = \omega_2 AP_0 \quad (5.14)$$

или

$$AP_0 = \frac{v_3}{\omega_2}. \quad (5.15)$$

Так могут быть определены соотношения между скоростями звеньев плоских механизмов с высшими парами.

§ 26. Определение скоростей и ускорений звеньев кинематических пар

1°. Изложенный в § 25 метод определения соотношения между скоростями отдельных звеньев может быть использован для кинематического исследования лишь простейших механизмов, так как для его применения мы должны знать мгновенные центры вращения всех звеньев механизма в абсолютных и относительных движениях этих звеньев. Если в четырехзвенном механизме число мгновенных центров вращения равно шести (см. § 24), то в многозвенных механизмах число этих центров значительно больше, так как число k центров вращения и число n всех звеньев механизма связаны условием

$$k = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (5.16)$$

т. е. h равно числу сочетаний из n по два. Так, например, для восьмизвенного механизма для определения соотношений между скоростями всех его звеньев надо определить 28 мгновенных центров вращения. Кроме того, в некоторых случаях мгновенные центры вращения при их построении могут оказаться вне пределов чертежа, что усложняет графическое решение задачи. Поэтому в практике инженерных расчетов большое распространение получили аналитические и графочисленные методы исследования, основанные на применении векторных уравнений, связывающих скорости отдельных точек звеньев механизма. После нахождения скоростей отдельных точек звеньев механизма легко определить и их ускорения.

2°. Рассмотрим основные уравнения, связывающие скорости отдельных точек звеньев.

Из теоретической механики известно, что любое движение неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости может быть составлено из переносного поступательного движения вместе с произвольно выбранной точкой плоской фигуры (полюсом) и относительного вращения вокруг полюса.

Поэтому скорость любой точки плоской фигуры может быть представлена как геометрическая сумма скорости полюса и скорости вращения вокруг полюса. Так, если принять за полюс точку B плоской фигуры, то скорость v_C любой другой точки C той же фигуры выразится так:

$$v_C = v_B + v_{вр},$$

где v_B есть скорость полюса B , а $v_{вр}$ — скорость вращения вокруг полюса, или, скорость точки C в движении относительно *неизменяемой плоской фигуры, движущейся поступательно со скоростью, равной скорости v_B полюса.* Условимся коротко называть эту скорость *скоростью точки C неизменяемой плоской фигуры относительно точки B* той же фигуры и обозначать эту скорость v_{CB} . Пользуясь этим обозначением, мы можем предыдущее геометрическое равенство написать так:

$$v_C = v_B + v_{CB}. \quad (5.17)$$

Так как v_{CB} есть скорость точки C во вращательном движении вокруг точки B , то по величине эта скорость равна произведению величины угловой скорости плоской фигуры на расстояние l_{BC} между точками B и C . Вектор скорости v_{CB} направлен перпендикулярно к BC в сторону, определяемую знаком угловой скорости.

Аналогично ускорение любой точки плоской фигуры может быть представлено как геометрическая сумма ускорения полюса и ускорения в движении относительно полюса или, точнее, по отношению к неизменяемой фигуре, движущейся поступательно вместе с полюсом. Имеем:

$$a_C = a_B + a_{CB}.$$

Так как вектор ускорения a_{CB} в относительном вращательном движении может быть разложен на нормальное и тангенциальное ускорения,

то окончательно ускорение любой точки плоской фигуры может быть представлено так:

$$a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t,$$

где a_{CB}^n — вектор нормального и a_{CB}^t — вектор тангенциального ускорения точки C в движении относительно полюса B .

Пусть звенья 1 и 2 (рис. 222) входят во вращательную пару B . Принимая точку B за полюс, мы можем для определения скорости v_C и ускорения a_C применить уравнение (5.17). Имеем:

$$v_C = v_B + v_{CB}.$$

В этом уравнении v_B — скорость точки B , одновременно принадлежащей звеньям 1 и 2, а v_{CB} — скорость в движении точки C относительно точки B , направленная перпендикулярно к оси звена BC . Величина этой скорости равна

$$v_{CB} = |\omega_2| l_{BC}, \quad (5.18)$$

где ω_2 — угловая скорость звена 2, а l_{BC} — расстояние от точки B до точки C .

Соответственно ускорение a_C точки C связано с ускорением a_B точки B уравнением

$$a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t. \quad (5.19)$$

В этом уравнении a_{CB}^n — нормальное ускорение в движении точки C относительно точки B , направленное по оси звена BC от точки C к точке B и равное по величине

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_{CB}} = \omega_2^2 l_{BC}, \quad (5.20)$$

a_{CB}^t — тангенциальное ускорение в движении точки C относительно точки B , направленное перпендикулярно к оси звена BC и равное по величине

$$a_{CB}^t = \left| \frac{dv_{CB}}{dt} \right| = |\varepsilon_2| l_{BC}, \quad (5.21)$$

где ε_2 — угловое ускорение звена 2.

Если звенья 1 и 2 (рис. 223) входят в поступательную пару B , то скорость точки C_2 , принадлежащей звену 2, связана со скоростью точки C_1 , принадлежащей звену 1, уравнением

$$v_{C_2} = v_{C_1} + v_{C_2 C_1}. \quad (5.22)$$

В этом уравнении v_{C_1} — скорость поступательного движения точки C_1 звена 1 (направляющей $x-x$), совпадающей в рассматриваемом положении с точкой C_2 звена 2, $v_{C_2 C_1}$ — скорость в движении звена 2

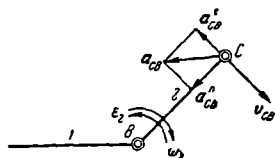


Рис. 222. Схема вращательной кинематической пары с показанными векторами скорости и ускорения точки C в движении относительно точки B .

относительно звена 1, направленная параллельно направляющей $x-x$.

Соответственно ускорение a_{C_2} точки C_2 связано с ускорением a_{C_1} точки C_1 уравнением

$$a_{C_2} = a_{C_1} + a_{C_2C_1}^k + a_{C_2C_1}^r. \quad (5.23)$$

В этом уравнении a_{C_1} — ускорение точки C_1 , $a_{C_2C_1}^k$ — поворотное ускорение (ускорение Кориолиса), направленное под углом 90° к направляющей $x-x$ и равное по величине

$$a_{C_2C_1}^k = 2|\omega_1|v_{C_2C_1}, \quad (5.24)$$

где ω_1 — угловая скорость звена 1, равная ω_2 — угловой скорости звена 2, потому что звенья 1 и 2 входят в поступательную пару, $a_{C_2C_1}^r$ — ускорение в движении звена 2 относительно звена 1, направленное параллельно направляющей $x-x$ (релятивное ускорение).

Для определения направления ускорения Кориолиса $a_{C_2C_1}^k$ необходимо вектор относительной скорости $v_{C_2C_1}$ (рис. 224) повернуть на 90°

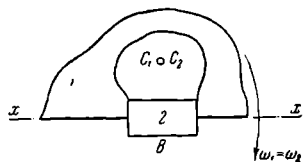


Рис. 223. Схема поступательной кинематической пары.

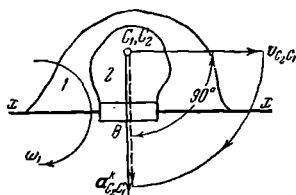


Рис. 224. К определению направления вектора ускорения Кориолиса для поступательной кинематической пары.

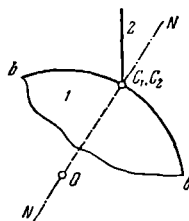


Рис. 225. Схема высшей кинематической пары.

в сторону вращения, обусловленного угловой скоростью ω_1 . Направление повернутого вектора скорости $v_{C_2C_1}$ совпадает с направлением вектора $a_{C_2C_1}^k$ ускорения Кориолиса.

Если звенья 1 и 2 входят в высшую кинематическую пару $C(C_1, C_2)$ (рис. 225), то, проведя нормаль NN в точке C и отметив центр O кривизны элемента пары, принадлежащего звену 1, мы можем свести задачу к уравнениям (5.17) и (5.19), если введем заменяющее высшую пару C звено OC , входящее в точках O и C во вращательные пары.

Если не пользоваться методом замены высшей пары C звеном OC , то можно обратиться к уравнению, которым скорость v_{C_2} точки C_2 , принадлежащей звену 2, связана со скоростью v_{C_1} точки C_1 , принадлежащей звену 1, а именно к уравнению

$$v_{C_2} = v_{C_1} + v_{C_2C_1}, \quad (5.25)$$

где $\mathbf{v}_{C_2 C_1}$ — скорость в движении звена 2 относительно звена 1, направленная по касательной к профилю элемента пары, принадлежащего звену 1, т. е. перпендикулярно к нормали NN .

Соответственно ускорение $\mathbf{a}_{C_2}$ точки C_2 будет связано с ускорением $\mathbf{a}_{C_1}$ точки C_1 уравнением

$$\mathbf{a}_{C_2} = \mathbf{a}_{C_1} + \mathbf{a}_{C_2 C_1}^n + \mathbf{a}_{C_2 C_1}^t + \mathbf{a}_{C_2 C_1}^k. \quad (5.26)$$

В этом уравнении $\mathbf{a}_{C_2 C_1}^n$ — нормальное ускорение, направленное от точки C к точке O по нормали NN и равное по величине

$$\mathbf{a}_{C_2 C_1}^n = \frac{v_{C_2 C_1}^2}{\rho}, \quad (5.27)$$

где ρ — радиус кривизны профиля $b-b$ звена 1 в точке C_1 , равный $\rho = OC_1$, $\mathbf{a}_{C_2 C_1}^t$ — тангенциальное ускорение, направленное по касательной к профилю $b-b$ в точке C , т. е. перпендикулярно к нормали NN , $\mathbf{a}_{C_2 C_1}^k$ — ускорение Кориолиса, определяемое по формуле (5.24). Направление вектора ускорения $\mathbf{a}_{C_2 C_1}^k$ определится по правилу, указанному на рис. 224.

3°. Рассмотренные выше уравнения (§ 26, 2°) могут быть решены численно или графически. При численном решении векторы, входящие в уравнения, проектируются на выбранные оси координат, и тогда каждому векторному уравнению будут соответствовать два скалярных уравнения, которые и подлежат совместному решению.

В инженерных расчетах более наглядными являются графические решения векторных уравнений для скоростей и ускорений. Для этого рассмотрим уравнения (5.17), (5.22) и (5.25) для определения скоростей $\mathbf{v}_C$ или $\mathbf{v}_{C_2}$ точек C и C_2 звеньев 2 (рис. 222, 223 и 225). Если известны скорости $\mathbf{v}_B$ или $\mathbf{v}_{C_1}$ полюсов, то для определения скоростей $\mathbf{v}_C$ или $\mathbf{v}_{C_2}$ достаточно знать только их направления.

Аналогично из рассмотренных уравнений (5.19), (5.23) и (5.26) следует, что если известны ускорения $\mathbf{a}_B$ или $\mathbf{a}_{C_1}$ точек B или C_1 , то для определения ускорения $\mathbf{a}_C$ или $\mathbf{a}_{C_2}$ достаточно иметь заданными только направления этих ускорений.

Пусть, например, задан (рис. 226, а) вектор скорости $\mathbf{v}_B$ полюса B и направление $q-q$ вектора $\mathbf{v}_C$ скорости точки C звена 2. Требуется определить скорости точек C , D и E звена 2 и его угловую скорость ω_2 .

Из произвольной точки p (рис. 226, б) откладываем вектор скорости $\mathbf{v}_B$ точки B . Через точку b — конец вектора $\mathbf{v}_B$ — проводим прямую в направлении вектора $\mathbf{v}_{CB}$ скорости точки C относительно полюса B перпендикулярно к отрезку BC звена 2 до пересечения в точке c с прямой, проведенной через точку p в направлении $q-q$ вектора $\mathbf{v}_C$ скорости точки C . Тогда получаем треугольник pbc , который называется *планом скоростей звена 2*, а точка p — *полюсом*

плана скоростей. Из рис. 226 следует, что для построения плана скоростей pbc достаточно знать скорость одной точки звена 2, например скорость v_B точки B , и направление скорости другой точки звена, например скорости v_C точки C , так как направление скорости v_{CB} нам всегда известно из условия ее перпендикулярности к прямой BC . Если план скоростей звена построен, то всегда может быть определена и скорость любой точки, принадлежащей этому звену, например точки E .

В самом деле, скорость точки E на основании уравнения (5.17) может быть найдена из условий

$$v_E = v_B + v_{EB}, \quad v_E = v_C + v_{EC}. \quad (5.28)$$

Из уравнений (5.28) следует, что на плане скоростей (рис. 226, б) конец e вектора v_E скорости точки E находится на пересечении двух прямых, проведенных через точки b и c перпендикулярно к направлениям BE и CE .

Отрезок плана, изображающий скорость v_E , получим, соединив полюс p плана с точкой e .

Рассматривая треугольник bce плана скоростей и треугольник BCE на звене, можно видеть, что отрезки bc , be и ce соответственно перпендикулярны к отрезкам BC , BE и CE .

Таким образом, треугольник bce на плане скоростей, изображающий относительные скорости v_{CB} , v_{EB} и v_{EC} , подобен треугольнику BCE и повернут относительно него на угол 90° . Это свойство подобия фигуры относительных скоростей на плане скоростей и фигуры звена позволяет определять скорости любых точек этого звена не из уравнений, а графическим построением подобных фигур. Отметим, что проверкой правильности графического построения подобных фигур на плане является порядок букв на схеме и на плане скоростей. Так, если порядок букв на схеме при обходе контура звена по часовой стрелке будет B , C и E , то на плане скоростей этот порядок должен сохраниться, т. е. буквы должны следовать в том же порядке: b , c и e .

Векторы всех абсолютных скоростей точек звеньев имеют своим началом точку p — полюс плана скоростей, а векторы всех относительных скоростей соединяют концы векторов абсолютных скоростей.

Полученным условием подобия фигур плана скоростей и звена можно воспользоваться и для определения вектора скорости любой точки, лежащей на отрезке BC звена 2. Так, для определения конца d вектора скорости v_D точки D (рис. 226, а) необходимо отрезок (bc) на плане

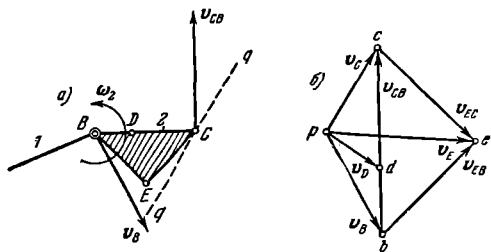


Рис. 226. К построению плана скоростей звена, входящего во вращательную пару: а) схема вращательной пары; б) план скоростей.

скоростей (рис. 226, б) разделить в том же отношении, в каком точка D делит отрезок BC на звене, т. е.

$$\frac{v_{DB}}{v_{CB}} = \frac{bd}{bc} = \frac{BD}{BC}. \quad (5.29)$$

Вектор v_D скорости точки D представляет собой отрезок (pd) плана скоростей.

Из построенного плана скоростей можно определить и угловую скорость ω_2 звена 2. Из формулы (5.18) имеем $|\omega_2| = v_{CB}/l_{BC}$. Вектор v_{CB} представлен на плане скоростей отрезком (bc), а отрезок l_{BC} дан на схеме звена. Направление угловой скорости ω_2 определится, если в точке C (рис. 216, а) приложить вектор v_{CB} . Нетрудно видеть, что вращение звена 2 с угловой скоростью ω_2 происходит в направлении, указанном на чертеже.

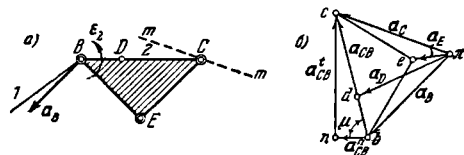


Рис. 227. К построению плана ускорений звена, входящего во вращательную пару: а) схема вращательной пары; б) план ускорений.

4°. Определение ускорений точек звена 2, входящего во вращательную кинематическую пару B (рис. 227, а), может быть выполнено графически, если воспользоваться уравнением (5.19). Пусть задан вектор ускорения a_B полюса B и направление $m-m$ вектора a_C ускорения точки C . Требуется определить ускорения точек C , D и E звена 2 и его угловое ускорение ϵ_2 .

Из произвольной точки π (рис. 227, б) откладываем вектор ускорения a_B точки B . К концу b вектора a_B прикладываем вектор a_{CB}^n нормального ускорения, который, как было показано выше, направлен от точки C к точке B . Величина этого вектора определяется по формуле (5.20). Вектор v_{CB} , входящий в уравнение (5.20), может быть определен из построенного ранее плана скоростей (рис. 226, б), где этот вектор представлен отрезком (bc). Отрезок l_{BC} звена дан на схеме звена (рис. 227, а). Пусть вектор a_{CB}^n отложен из точки b в виде отрезка (bn) (рис. 227, б). Согласно уравнению (5.19) из точки n проводим прямую в направлении вектора a_{CB}^t — тангенциального ускорения, которое перпендикулярно к отрезку BC , до пересечения в точке c с прямой, проведенной из точки π , параллельно прямой $m-m$, т. е. в направлении вектора a_C ускорения точки C . Построенная фигура πbnc называется *планом ускорений звена 2*, а точка π — *полюсом плана ускорений*.

Из построения следует, что для плана ускорений достаточно знать ускорение одной точки звена, например ускорение a_B точки B , и направление ускорения другой точки звена, например направление $m-m$ ускорения a_C точки C . Кроме того, должен быть предварительно

Из построения следует, что для плана ускорений достаточно знать ускорение одной точки звена, например ускорение a_B точки B , и направление ускорения другой точки звена, например направление $m-m$ ускорения a_C точки C . Кроме того, должен быть предварительно

построен план скоростей для данного звена. Если соединить точки b и c плана ускорений, то отрезок (bc) представит полное ускорение a_{CB} точки C относительно точки B , ибо на основании векторного уравнения

$$a_{CB} = a_{CB}^n + a_{CB}^t \quad (5.30)$$

Из построения видно, что вектор a_{CB} образует с направлением отрезка (BC) угол μ (рис. 227, б), тангенс которого может быть определен из прямоугольного треугольника bnc плана ускорений. Имеем:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{nc}{nb} = \frac{a_{CB}^t}{a_{CB}^n}. \quad (5.31)$$

Подставляя в равенство (5.31) значения a_{CB}^t и a_{CB}^n из формулы (5.20) и (5.21), получаем:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon_2 l_{BC}}{\omega_2^2 l_{BC}} = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2}. \quad (5.32)$$

Из формулы (5.32) следует, что вектор a_{CB} относительного ускорения в движении точки C вокруг точки B образует с направлением BC угол μ , вполне определяемый угловой скоростью ω_2 и угловым ускорением ε_2 звена 2.

Очевидно, что относительные ускорения всех точек звена 2 образуют с радиусами-векторами, проведенными из соответствующей точки в точку B , один и тот же угол μ , удовлетворяющий соотношению (5.32).

Следовательно, если требуется определить ускорение какой-либо точки D , лежащей на отрезке BC (рис. 227, а), то направление вектора a_{DB} на плане ускорения должно быть параллельным направлению вектора a_{CB} , т. е. направлению отрезка (bc) (рис. 227, б). Величина отрезка (bd), изображающего на плане ускорений ускорение a_{DB} , определяется из условия пропорциональности ускорений радиусам-векторам l_{BD} и l_{BC} , т. е.

$$\frac{a_{DB}}{a_{CB}} = \frac{l_{BD}}{l_{BC}}. \quad (5.33)$$

Подставляя в пропорцию (5.33) соответствующие отрезки плана ускорений и звена на схеме, получаем:

$$\frac{bd}{bc} = \frac{BD}{BC}. \quad (5.34)$$

Из пропорции (5.34) следует: чтобы определить отрезок (bd) плана ускорений, необходимо отрезок плана (bc), изображающий относительное ускорение a_{CB} , разделить в том же отношении, в каком точка D делит отрезок BC на схеме. Отложив полученный отрезок (bd) на плане и соединив точку d с точкой π , получим отрезок (πd), изображающий абсолютное ускорение a_D точки D .

Для определения ускорения произвольно заданной точки E , жестко связанной со звеном 2 (рис. 227, а), можно также воспользо-

ваться вышеизложенным правилом подобия. Для этого строим на отрезке (bc) плана ускорений треугольник bce , подобный треугольнику BCE на схеме, но повернутый относительно него на угол μ , определяемый по формуле (5.32). Так как все стороны треугольника bce повернуты относительно треугольника BCE на один и тот же угол μ , то построение подобного треугольника bce на плане ускорений удобно вести, например, измеряя углы между соседними сторонами треугольника BCE . При обходе контура bce в каком-либо направлении *порядок букв должен совпадать с порядком букв контура BCE при обходе в том же направлении.*

Подобно тому, как это имело место в задаче о скоростях, векторы абсолютных ускорений всех точек звеньев имеют своим началом точку π — полюс плана ускорений, а векторы всех относительных ускорений соединяют концы векторов абсолютных ускорений.

Из построенного плана ускорений может быть определено и угловое ускорение ϵ_2 звена 2. Согласно формуле (5.21) имеем:

$$|\epsilon_2| = \frac{a'_{CB}}{l_{BC}}.$$

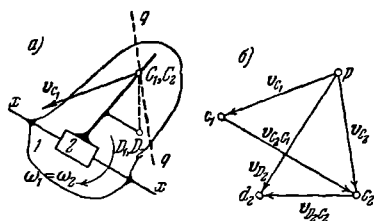


Рис. 228. К построению плана скоростей звена, входящего в поступательную пару: а) схема поступательной пары; б) план скоростей.

Вектор a'_{CB} представлен на плане ускорений в виде отрезка (nc), а отрезок l_{BC} дан на схеме звена. Направление углового ускорения ϵ_3 определяется, если в точке C приложить вектор a'_{CB} (рис. 227, а). Нетрудно видеть, что угловое ускорение ϵ_3 направлено так, как это показано на чертеже.

5°. Если звенья 1 и 2 входят в поступательную пару (рис. 228, а) и задана угловая скорость ω_1 звена 1, то для построения плана скоростей (рис. 228, б) можно воспользоваться уравнением (5.22).

Из полюса p плана (рис. 228, б) откладываем вектор v_{C_1} скорости точки C_1 . Через конец c_1 вектора v_{C_1} проводим прямую в направлении вектора $v_{C_2C_1}$ скорости точки C_2 относительно точки C_1 , параллельной оси $x-x$ направляющей (рис. 228, а), до пересечения в точке c_2 с прямой, параллельной вектору v_{C_2} скорости точки C_2 . Отсюда видно, что для построения плана скоростей pc_1c_2 достаточно иметь заданными скорость точки звена 1, например скорость v_{C_1} точки C_1 (рис. 228, а), и направление $q-q$ скорости v_{C_2} точки C_2 звена 2, совпадающей в рассматриваемом положении с точкой C_1 . Так как звенья 1 и 2 входят в поступательную пару, то их угловые скорости ω_1 и ω_2 равны

$$\omega_2 = \omega_1.$$

Скорость любой точки D_2 звена 2 может быть найдена из условия

$$\mathbf{v}_{D_2} = \mathbf{v}_{C_2} + \mathbf{v}_{D_2C_2}. \quad (5.35)$$

Вектор скорости $\mathbf{v}_{C_2}$ представлен на плане скоростей (рис. 228, б) отрезком (pc_2). Скорость $\mathbf{v}_{D_2C_2}$ равна по величине

$$v_{D_2C_2} = |\omega_2| l_{C_2D_2} \quad (5.36)$$

и перпендикулярна к отрезку C_2D_2 на схеме звена.

На рис. 228, б скорость $\mathbf{v}_{D_2C_2}$ представлена в виде отрезка (c_2d_2).

6°. Для построения плана ускорений звена 2, входящего в поступательную пару со звеном 1 (рис. 229, а), угловое ускорение ϵ_1 которого задано, можно воспользоваться уравнением (5.23).

Из полюса π плана (рис. 229, б) откладываем вектор $\mathbf{a}_{C_1}$ ускорения точки C_1 . В точке c_1 прикладываем вектор $\mathbf{a}_{C_2C_1}^k$ ускорения Кориолиса.

Величина ускорения $\mathbf{a}_{C_2C_1}^k$ может быть определена по формуле (5.24), если предварительно построен план скоростей звена 2 (рис. 228, б). Направление вектора $\mathbf{a}_{C_2C_1}^k$, перпендикулярного к оси $x-x$ направляющей, определяется по правилу, указанному в § 26, 2° на рис. 224. Из конца k вектора $\mathbf{a}_{C_2C_1}^k$ проводим прямую в направлении вектора $\mathbf{a}_{C_2C_1}^r$, релятивного ускорения, параллельного оси $x-x$ направляющей, до пересечения в точке c_2 с прямой, проведенной из точки π и параллельной заданному направлению $m-m$ ускорения $\mathbf{a}_{C_2}$.

Из сказанного видно, что для построения плана ускорений $\pi c_1 k c_2$ достаточно знать ускорение точки звена 1, например ускорение $\mathbf{a}_{C_1}$ точки C_1 (рис. 229, а), и направление $m-m$ ускорения $\mathbf{a}_{C_2}$ точки C_2 звена 2, совпадающей в рассматриваемом положении с точкой C_1 . Кроме того, должен быть предварительно построен план скоростей звена 2.

Так как звенья 2 и 1 входят в поступательную пару, то их угловые ускорения ϵ_1 и ϵ_2 равны

$$\epsilon_2 = \epsilon_1. \quad (5.37)$$

Ускорение любой точки D_2 звена 2 может быть найдено из условия

$$\mathbf{a}_{D_2} = \mathbf{a}_{C_2} + \mathbf{a}_{D_2C_2}^n + \mathbf{a}_{D_2C_2}^t. \quad (5.38)$$

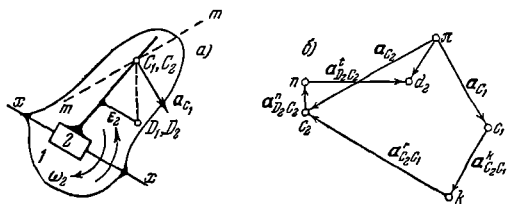


Рис. 229. К построению плана ускорений звена, входящего в поступательную пару: а) схема поступательной пары; б) план ускорений.

Вектор ускорения a_{C_2} представлен на плане ускорений отрезком (πc_2). Ускорение $a_{D_2C_2}^n$ равно по величине

$$a_{D_2C_2}^n = \omega_2^2 l_{C_2D_2} \quad (5.39)$$

и направлено от точки D_2 к точке C_2 .

Ускорение $a_{D_2C_2}^t$ равно по величине

$$a_{D_2C_2}^t = |\varepsilon_2| l_{C_2D_2} \quad (5.40)$$

и перпендикулярно к отрезку C_2D_2 .

Отметим, что скорость и ускорение точки D_2 могут быть также определены из уравнений

$$v_{D_2} = v_{D_1} + v_{D_2D_1}, \quad (5.41)$$

$$a_{D_2} = a_{D_1} + a_{D_2D_1}^k + a_{D_2D_1}^r, \quad (5.42)$$

где v_{D_1} и a_{D_1} — известные скорость и ускорения точки D_1 звена 1, совпадающей с точкой D_2 звена 2. Так как звено 2 имеет угловую скорость ω_2 , а скорости и ускорения движения точек звена 2 относительно звена 1 между собой соответственно равны, т. е.

$$v_{D_2D_1} = v_{C_2C_1}, \quad (5.43)$$

то

$$a_{D_2D_1}^k = 2|\omega_2| v_{D_2D_1} = 2|\omega_2| v_{C_2C_1} = a_{C_2C_1}^k, \quad a_{D_2D_1}^r = a_{C_2C_1}^r. \quad (5.44)$$

Тогда уравнения (5.41) и (5.42) можно написать так:

$$v_{D_2} = v_{D_1} + v_{C_2C_1}, \quad (5.45)$$

$$a_{D_2} = a_{D_1} + a_{C_2C_1}^k + a_{C_2C_1}^r, \quad (5.46)$$

т. е. в правых частях уравнений (5.45) и (5.46) мы имеем известные нам векторы.

7°. Если звенья 1 и 2 входят в высшую кинематическую пару качения и скольжения (рис. 230, а), то после замены высшей пары звеном, входящим в низшие кинематические пары, построение плана скоростей и ускорений может быть сделано, как это указано в § 26,5° и 26,6°.

Если построение планов вести без замены высшей пары звеном, входящим в низшие пары, то для построения можно воспользоваться уравнениями (5.25) и (5.26).

Пусть заданы скорость v_{C_1} и ускорение a_{C_1} полюса C_1 , угловая скорость ω_1 звена 1 и направления $q-q$ и $m-m$ скорости v_{C_2} и ускорения a_{C_2} точки C_2 звена 2.

Из полюса p плана скоростей (рис. 230, б) откладываем вектор $\mathbf{v}_{C_1}$ скорости точки C_1 . Через конец c_1 вектора $\mathbf{v}_{C_1}$ проводим прямую в направлении вектора $\mathbf{v}_{C_2C_1}$ скорости точки C_2 относительно точки C_1 , перпендикулярной к нормали NN , проведенной в точке C_1 к кривой $b-b$, принадлежащей звену 1, до пересечения в точке c_2 с прямой, параллельной прямой $q-q$. Вектор $\mathbf{v}_{C_2}$ является вектором скорости точки C_2 , треугольник pc_1c_2 — планом скоростей звена 2.

Для построения плана ускорений звена 2 из полюса π плана ускорения (рис. 230, в) откладываем вектор $\mathbf{a}_{C_1}$ ускорения точки C_1 . В точке c_1 прикладываем вектор $\mathbf{a}_{C_2C_1}^h$ ускорения Кориолиса. К точке k прикладываем вектор $\mathbf{a}_{C_2C_1}^n$. Величины ускорений $\mathbf{a}_{C_2C_1}^h$ и $\mathbf{a}_{C_2C_1}^n$ определяются по формулам (5.24) и (5.27). Ускорение $\mathbf{a}_{C_2C_1}^n$ направлено по нормали NN от точки C_1 к точке O , являющейся центром кривизны кривой $b-b$ в точке C_1 . Ускорение $\mathbf{a}_{C_2C_1}^h$ также направлено по нормали NN в направлении, определяемом по правилу, указанному на рис. 224. Затем через полюс π проводим прямую в направлении ускорения $\mathbf{a}_{C_2}$, т. е. параллельную прямой $m-m$, а через точку n — в направлении касательной $t-t$. Пересечение этих прямых дает точку c_2 . Фигура $\pi c_1 k n c_2$ и есть план ускорений звена 2.

Определение скоростей и ускорений любых других точек звена 2 аналогично ранее рассмотренным случаям.

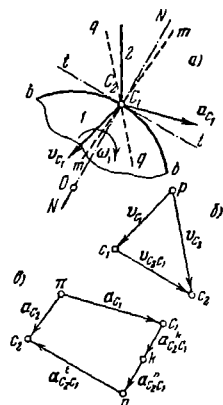


Рис. 230. К построению планов скоростей и ускорений звена, входящего в высшую пару: а) схема высшей пары; б) план скоростей; в) план ускорений.

§ 27. Мгновенный центр ускорений и поворотный круг

1°. В § 24 нами был рассмотрен вопрос об определении мгновенных центров вращения звеньев механизмов и было показано, что для многозвездных механизмов эта задача усложняется тем, что для определения мгновенного центра вращения одного из промежуточных звеньев механизма обычно приходится определять мгновенные центры и всех остальных звеньев. Поэтому в некоторых случаях удобно положение мгновенного центра вращения звена определять с помощью его плана скоростей, если таковой нами был построен.

Для этого можно воспользоваться условием, что точка звена, совпадающая в рассматриваемый момент времени с его мгновенным центром вращения, должна иметь скорость, равную нулю. Тогда задача определения мгновенного центра вращения звена сводится к отысканию точки звена, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Пусть задано звено BC и известны скорости $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_C$ точек B и C звена (рис. 231, а). Строим план скоростей звена (рис. 231, б). Определяем, далее, точку звена, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Очевидно, что на плане скоростей скорость этой точки изобразится вектором,

равным нулю, т. е. вектором, совпадающим с полюсом p плана скоростей. Как было показано выше, фигура, изображающая на плане скоростей относительные скорости отдельных точек звена, подобна фигуре самого звена и повернута относительно нее на угол 90° . Тогда на звене BC можно отыскать такую точку P , вектор скорости которой на плане скоростей совмещается с точкой p . Для этого достаточно на звене (рис. 231, а) построить треугольник BSP , подобный треугольнику bcp плана (рис. 231, б). Для этого из точки B проводим прямую, перпендикулярную к отрезку (bp) плана, а из точки C — прямую, перпендикулярную к отрезку (cp) плана. Точка P пересечения этих двух прямых и является той точкой звена, скорость которой в данный момент времени равна нулю, т. е. $v_P = 0$.

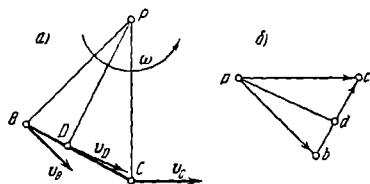


Рис. 231. К определению мгновенного центра вращения звена: а) схема звена с мгновенным центром вращения; б) план скоростей звена.

Так как полученная точка P совпадает с мгновенным центром вращения звена BC , то скорости v_B и v_C точек B и C этого звена могут быть представлены следующим образом:

$$v_B = |\omega| l_{PB} \quad \text{и} \quad v_C = |\omega| l_{PC},$$

где ω есть угловая скорость звена BC (рис. 231, а). Величина скорости любой точки D звена BC может быть определена по формуле

$$v_D = |\omega| l_{PD},$$

направление же ее перпендикулярно к отрезку PD .

2°. Аналогично мгновенному центру вращения звена для общего случая его движения может быть найдена точка звена, абсолютное ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Эта точка называется **мгновенным центром ускорений**. Положение этой точки на звене может быть всегда определено, если известен план ускорений звена. Пусть, например, дано звено BC (рис. 232, а) и его план ускорений πbc (рис. 232, б).

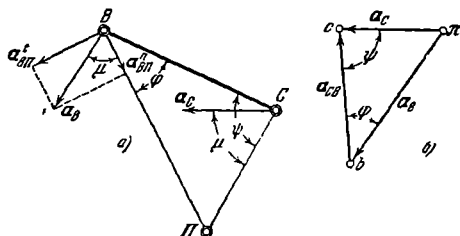


Рис. 232. К определению мгновенного центра ускорений звена: а) схема звена с мгновенным центром ускорений; б) план ускорений.

Из свойств плана ускорений следует, что точка звена Π , ускорение которой равно нулю, изображается на плане ускорений вектором, равным нулю и совпадающим с точкой π плана. Чтобы определить на звене BC точку, не имеющую ускорения, надо на нем построить фигуру $BC\Pi$, подобную фигуре bcp плана. Полученная точка Π (рис. 232, а) и является мгновенным центром ускорений, так как вследствие подобия треугольников $BC\Pi$ и bcp ускорение точки Π равно нулю, т. е. $a_\Pi = 0$.

Построение подобной фигуры $BC\Pi$ можно сделать по углам φ и ψ , измеренным на плане ускорений (рис. 232, б). Точка пересечения Π прямых $B\Pi$ и $C\Pi$ является мгновенным центром ускорений. При обходе контуров треугольников $BC\Pi$ и bcp в одном и том же направлении порядок букв должен быть одинаковым.

Как было показано выше (§ 26, 4°), вектор относительного ускорения a_{CB} повернут относительно звена BC на угол μ , определяемый по формуле

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (5.47)$$

где ε есть угловое ускорение звена BC , а ω — его угловая скорость. Таким образом, сторона bc треугольника bcp образует со стороной BC треугольника BCP угол μ . Вследствие подобия треугольников bcp и BCP стороны pb и pc образуют со сторонами PB и PC тот же угол μ , и вектор a_B образует угол μ со стороной $BП$, а вектор a_C — угол μ со стороной $CП$. Векторы абсолютных ускорений любых других точек звена наклонены под тем же углом μ к радиусам-векторам, соединяющим эти точки с точкой $П$.

Ускорение любой точки звена может быть всегда выражено через ускорение переносного поступательного движения с ускорением точки $П$ и ускорение относительного движения около этой точки. Например, вектор a_B ускорения точки B может быть представлен в виде следующей геометрической суммы:

$$a_B = a_{П} + a_{BП}^n + a_{BП}^t = a_{BП}^n + a_{BП}^t,$$

так как $a_{П} = 0$.

Вектор ускорения $a_{BП}^n$ направлен от точки B к точке $П$, а вектор ускорения $a_{BП}^t$ перпендикулярен к отрезку $BП$ (рис. 232, а). Так как

$$a_{BП}^n = \omega^2 l_{BП} \quad \text{и} \quad a_{BП}^t = \varepsilon l_{BП},$$

то величина полного ускорения точки B равна

$$a_B = \sqrt{(a_{BП}^n)^2 + (a_{BП}^t)^2} = l_{BП} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = m l_{BП}. \quad (5.48)$$

Точно так же величина ускорения точки C равна

$$a_C = l_{CП} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = m l_{CП}, \quad (5.49)$$

где постоянная m равна $m = \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.

Таким образом, полные ускорения всех точек звена пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра ускорений.

Очевидно, что движение точки звена, совпадающей с центром $П$, как не имеющей ускорения, может быть с точностью до бесконечно малых третьего порядка принято за равномерное прямолинейное.

3°. Пусть в рассматриваемом положении звена (рис. 233) его мгновенный центр вращения находится в точке P , а его мгновенный центр ускорений — в точке $П$. Соединяем точки P и $П$ прямой и при точке P откладываем угол μ , определяемый по формуле (5.47), в направлении, удовлетворяющем заданному направлению углового ускорения ε . Далее, в точке $П$ восстанавливаем перпендикуляр к отрезку $PП$ и продолжаем его до пересечения в точке K с прямой, проведенной через точку P под углом μ к отрезку $PП$. Тогда отрезок PK будет диаметром d окружности с центром в точке O , проходящей через точки P , $П$ и K . Рассмотрим теперь скорость v_M и ускорение a_M какой-либо точки M , произвольно выбранной на этой окружности. Скорость v_M имеет величину

$$v_M = |\omega| l_{PM} \quad (5.50)$$

и направлена по прямой, проходящей через точку K .

Ускорение a_M точки M должно составить угол μ с направлением $ПМ$. Из чертежа следует, что вектор a_M также направлен по прямой, проходя-

щей через точку K , т. е. линия действия полного ускорения a_M точки M совпадает с линией действия скорости v_M точки M , и потому оно есть ускорение тангенциальное. Так как точка M была выбрана на построенной нами окружности произвольно, то отсюда следует, что любая точка звена, лежащая на этой окружности, обладает *только тангенциальным ускорением*. Построенная окружность с диаметром $d = PK$ называется поворотной, а круг, ею ограниченный, — *поворотным кругом*.

Если какая-либо точка звена обладает только тангенциальным ускорением, то, очевидно, или она движется по участку прямой линии, или же находится на перегибе своей траектории. Вот почему поворотный круг называется также *кругом перегибов*. Точка K поворотного круга называется *полусом поворота*. Из построения (рис. 233) следует, что векторы скоростей всех точек, принадлежащих поворотной окружности, направлены по прямой, проходящей через полюс поворота K , например скорость v_R точки R .

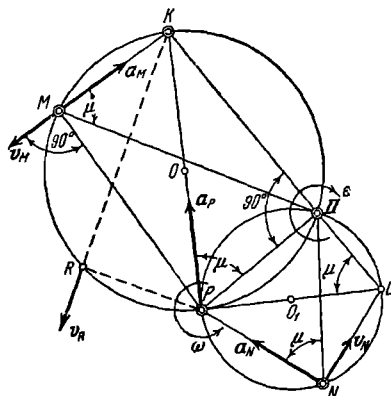


Рис. 233. Поворотный круг и круг перемены.

4°. Продолжим прямую $K\Pi$ до пересечения в точке L с перпендикуляром, восстановленным в точке P к диаметру PK поворотного круга, и на отрезке (PL) , как на диаметре, построим окружность с центром в точке O_1 . Нетрудно видеть, что угол ΠLP равен углу μ . Рассмотрим, далее, скорость v_N и ускорение a_N какой-либо точки N , произвольно выбранной на только что построенной окружности. Скорость v_N равна по величине

$$v_N = |\omega| l_{PN}, \quad (5.51)$$

а направлена по прямой, проходящей через точку L .

Ускорение a_N точки N образует угол μ с направлением NP . Из построения (рис. 233) видно, что вектор a_N направлен по прямой, проходящей через точку P . Таким образом, вектор полного ускорения a_N точки N направлен перпендикулярно к вектору скорости v_N . Следовательно, полное ускорение a_N точки N есть ускорение нормальное.

Так как точка N нами была выбрана на окружности с центром O_1 произвольно, то любая точка звена, лежащая на этой окружности, обладает *только нормальным ускорением*. Эта окружность называется *окружностью перемены*, а круг, ею ограниченный, — *кругом перемены*. Продолжения векторов скоростей всех точек звена, лежащих на окружности круга перемены, проходят через точку L . Так как для всех точек звена, лежащих на этой окружности, тангенциальные ускорения равны нулю, то, следовательно, в этих положениях скорости этих точек имеют максимум или минимум.

5°. Из рис. 233 видно, что поворотная окружность и окружность перемены пересекаются в двух точках: P и Π . Точка звена, находящаяся в данный момент в мгновенном центре ускорений Π , имеет ускорение a_{Π} равно нулю, и скорость v_{Π} , равную по величине (5.51): $v_{\Pi} = |\omega| l_{P\Pi}$.

Точка звена, находящаяся в данный момент в мгновенном центре скоростей P , имеет скорость v_P , равную нулю, и ускорение a_P , равное по величине согласно равенству (5.49):

$$a_P = l_{P\Pi} \sqrt{\omega^2 + \epsilon^2}. \quad (5.52)$$

Из рис. 233 имеем:

$$l_{P\Pi} = l_{PK} \cos \mu. \quad (5.53)$$

Далее, так как

$$\cos \mu = \frac{l}{\sqrt{l^2 + \varepsilon^2}} \quad (5.54)$$

и

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (5.55)$$

то

$$\cos \mu = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}. \quad (5.56)$$

Подставляя выражения из равенств (5.53) и (5.56) в формулу (5.52), получаем:

$$a_P = \omega^2 l_{PK} = \omega^2 d, \quad (5.57)$$

где d — диаметр поворотного круга.

Из построения и формулы (5.57) следует, что прямая PK является нормалью к подвижной и неподвижной центроидам звена в точке P .

6°. Пусть мгновенный центр вращения звена занимает последовательно положения $P_1, P_2, P_3, \dots$ на центроиде Π (рис. 234). Обозначим скорость его перемещения через u , в отличие от v_P — скорости точки звена, в которой в данный момент времени находится мгновенный центр вращения и которая равна нулю. Пусть за бесконечно малый промежуток времени dt мгновенный центр вращения P перемещается из положения P_1 в положение P_2 . Если обозначить путь, пройденный центром P , через ds , мгновенную угловую скорость вращения вокруг центра P_1 — через ω , а вокруг центра P_2 — через $\omega + d\omega$, то приращение $d v_P$ скорости v_P будет равно по величине



Рис. 234. Неподвижная центроида с показанными на ней отдельными положениями мгновенного центра вращения звена.

$$|d v_P| = ds |\omega + d\omega| \quad (5.58)$$

или с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$d v_P = |\omega| ds. \quad (5.59)$$

Ускорение мгновенного центра вращения равно по величине (5.57)

$$a_P = \frac{d v_P}{dt} = \omega^2 d. \quad (5.60)$$

Подставляя в равенство (5.60) значение из равенства (5.59) и имея в виду, что величина скорости u равна

$$u = \frac{ds}{dt}, \quad (5.61)$$

получаем:

$$u = \omega d. \quad (5.62)$$

Из равенств (5.60) и (5.62) следует, что диаметр d поворотного круга может быть всегда определен через величины ω , u и a_P . Имеем:

$$d = \frac{u}{\omega} = \frac{a_P}{\omega^2}. \quad (5.63)$$

§ 28. Огибаемые и огибающие кривые

1°. В § 25, 4° нами было показано, что в случае, когда звенья входят в высшую кинематическую пару, нормаль в точке соприкасания элементов высшей пары проходит через соответствующий мгновенный центр вращения. Рассмотрим высшую кинематическую пару, состоящую из двух соприкасающихся кривых K_1 и K_2 (рис. 235), принадлежащих звеньям 1 и 2 пары. При движении звеньев 1 и 2 кривые K_1 и K_2 перекатываются и скользят друг по другу, при этом нормали NN к этим кривым в точках их соприкасания проходят через соответствующие мгновенные центры вращения P , т. е. через точки соприкасания тех центроид $Ц_1$ и $Ц_2$, которыми определяется относительное движение звеньев 1 и 2.

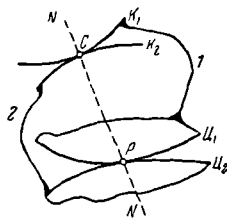


Рис. 235. Схема высшей кинематической пары из звеньев 1 и 2 с центроидами $Ц_1$ и $Ц_2$.

Рассмотрим движение звена 1 относительно звена 2. Для этого остановим звено 2, т. е. сделаем неподвижными центроиду $Ц_2$ и кривую K_2 (рис. 236) и будем рассматривать движение кривой K_1 . Тогда подвижная центроида $Ц_1$ будет перекатываться без скольжения по неподвижной центроиде $Ц_2$, а кривая K_1 будет перекатываться и скользить по неподвижной кривой K_2 , занимая последовательно положения K_1 , K'_1 , K''_1 , и т. д. Из рис. 236 следует, что кривая K_2 при этом будет огибать положения кривой K_1 . Как известно из дифференциальной геометрии, кривая K_1 называется *огибаемой кривой*, а K_2 — *огибающей кривой*. Если бы мы обратили движение и рассмотрели движение звена 2 относительно звена 1, то кривая K_1 была бы огибающей кривой, а K_2 — огибаемой кривой. Отсюда следует, что элементы высшей пары представляют собой *взаимоогигаемые кривые*.

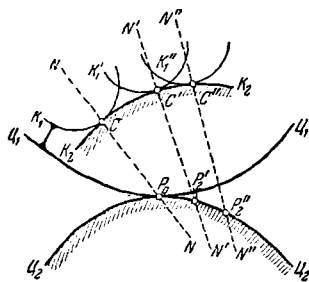


Рис. 236. Высшая пара с центроидами $Ц_1$ и $Ц_2$, с огибающей K_2 и отдельными положениями K_1 , K'_1 и K''_1 огибаемой.

Из рассмотренного также следует: если относительное движение двух звеньев задано качением их центроид и задан элемент, принадлежащий одному из звеньев, входящий в высшую пару, то сопряженный элемент, принадлежащий другому звену, может быть построен как огибающая всех положений первого элемента.

В частном случае один из элементов может быть точкой, например точкой K_1 (рис. 237). Тогда огибающая K_2 может быть получена как траектория точки K_1 в движении звена 1. Траектории, описываемые точками звена при качении одной центроиды по другой, носят название *рулетт*.

2°. Метод построения взаимоогигаемых кривых путем обращения движения является общим, но не всегда достаточно точным, так как он требует построения большого числа положений огигаемой кривой.

Более точное построение огигающей по заданной огигаемой может быть сделано следующим образом. Пусть задана огигаемая K_1 (рис. 238), принадлежащая звену 1, и требуется построить огигающую K_2 , принадлежащую звену 2. Наметим на кривой K_1 ряд точек $a, b, c, \dots$, достаточно близких друг к другу, и через эти точки проведем нормали к кривой K_1 . Пусть точками пересечения этих нормалей с центроидой $\mathcal{C}_1$ будут точки $P_0, P'_1, P''_1, P'''_1, \dots$. Откладываем, далее, на центроиде $\mathcal{C}_2$ дуги $\cup P_0P'_1, \cup P'_1P''_1, \cup P''_1P'''_1, \dots$, соответственно равные дугам $\cup P_0P'_1, \cup P'_1P''_1, \cup P''_1P'''_1, \dots$. Как было показано выше, нормаль к огигаемой и огигающей в точке их соприкосновения проходит через соответствующий мгновенный центр вращения. При перекатывании центроид $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ друг по другу соприкосновение будет происходить последовательно в точках P'_1 и P'_2, P''_1 и P''_2, P'''_1 и P'''_2 и т. д. и нормали $aP_0, bP'_1, cP''_1, dP'''_1, \dots$ будут проходить через точки $P_0, P'_2, P''_2, P'''_2, \dots$.

Расстояния от точек $P_0, P'_2, P''_2, P'''_2, \dots$ до огигающей будут, очевидно, равны отрезкам $aP_0, bP'_1, cP''_1, dP'''_1, \dots$. Из точек $P_0, P'_2, P''_2, P'''_2, \dots$ проводим окружности с радиусами, равными отрезкам $aP_0, bP'_1, cP''_1, dP'''_1, \dots$. Огибающая всех проведенных окружностей и будет искомой кривой K_2 , принадлежащей звену 2.

Если требуется построить кривую K_2 по точкам, то в точках $P'_1, P''_1, P'''_1, \dots$ проводим нормали к центроиде $\mathcal{C}_1$ (рис. 239). Эти нормали образуют с прямыми: $bP'_1, cP''_1, dP'''_1, \dots$ углы $\varphi', \varphi'', \varphi''', \dots$. Тогда, проведя в точках $P'_2, P''_2, P'''_2, \dots$ нормали к центроиде $\mathcal{C}_2$ и отложив при этих нормалях углы, равные $\varphi', \varphi'', \varphi''', \dots$, получим направления нормалей к искомой кривой K_2 . Отложив на этих нормалях отрезки, равные $bP'_1, cP''_1, dP'''_1, \dots$, получим точки $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, принадлежащие кривой K_2 .

3°. Рассмотрим еще один важный в теории высших кинематических пар метод образования двух взаимоогигаемых профилей. Пусть движение звеньев 1 и 2 задано качением центроид $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ (рис. 240). Пусть некоторая, произвольно выбранная нами кривая S катится без скольжения последовательно по центроидам $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$. При этом

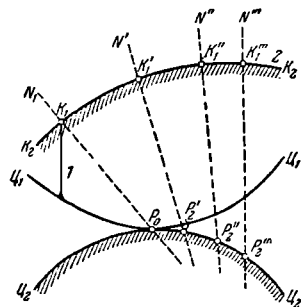


Рис. 237. Высшая пара с огигаемой в виде точки K .

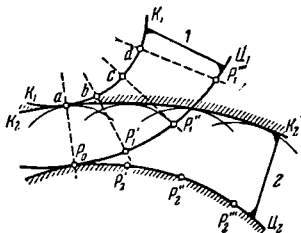


Рис. 238. Построение огигающей K_2 по заданным центроидам $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ и огигаемой K_1 .

точка A , жестко связанная с кривой S , описывает траектории K_1 и K_2 . Кривые K_1 и K_2 являются взаимноогibaемыми кривыми, потому что они могут быть образованы как огibaющие двух семейств окруж-

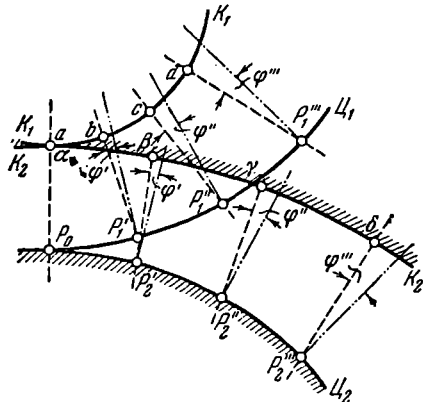


Рис. 239. Построение огibaющей K_2 по отдельным точкам и по заданным центроидам U_1 и U_2 и огibaемой K_1 .

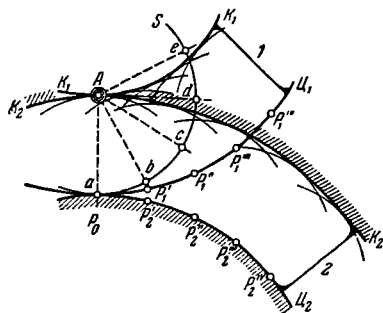


Рис. 240. Построение взаимно огibaемых кривых K_1 и K_2 по заданным центроидам U_1 и U_2 и произвольно заданной кривой S , перекатывающейся без скольжения по центроидам U_1 и U_2 .

ностей. Для этого на кривой S намечаем достаточно близкие точки a, b, c, d , и откладываем на центроидах U_1 и U_2 дуги, соответственно равные дугам $\cup ab, \cup bc, \cup cd$, т. е.

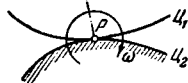
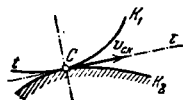


Рис. 241. К определению скорости скольжения в движении огibaемой K_1 по огibaющей K_2 .

$$\begin{aligned}\cup P_0 P'_1 &= \cup P_0 P'_2 = \cup ab, \\ \cup P'_1 P'_2 &= \cup P'_2 P'_3 = \cup bc, \\ \cup P'_2 P'_3 &= \cup P'_3 P'_4 = \cup cd.\end{aligned}$$

Соединяем точку A с точками $a, b, c, d, \dots$. Кривая K_1 может быть теперь получена как огibaющая семейства окружностей, проведенных из точек $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$ радиусами, равными $Ab, Ac, Ad, \dots$. Точно так же кривая K_2 может быть получена как огibaющая семейства окружностей, проведенных из точек $P_1, P_2, P_3, \dots$ теми же радиусами, равными $Ab, Ac, Ad, \dots$, и таким образом, образование кривых K_1 и K_2 сводится к рассмотренному в § 28, 2° построению.

Рассмотренные способы построения взаимноогibaемых кривых, служащих элементами звеньев, входящих в высшие пары, имеют существенно важное значение в проектировании кулачковых и зубчатых механизмов.

В заключение параграфа отметим, что вращение элементов звеньев K_1 и K_2 друг относительно друга (рис. 241) происходит с угло-

вой скоростью ω , равной угловой скорости ω вокруг мгновенного центра вращения, а скорость скольжения $v_{ск}$ этих элементов всегда направлена по касательной t — t к элементам соприкасания в точке C и равна по величине

$$v_{ск} = |\omega| l_{PC}. \quad (5.64)$$

Из равенства (5.64) следует, что чем дальше от соответствующего мгновенного центра вращения P находится точка C соприкасания элементов звеньев, входящих в высшую пару, тем больше скорость скольжения $v_{ск}$. Если соприкасание кривых K_1 и K_2 происходит в точке, совпадающей с точкой P , то скорость скольжения $v_{ск}$ равна нулю.

§ 29. Кривизна центроид и взаимоогibaемых кривых

1°. При решении многих задач, связанных с исследованием, проектированием и расчетом механизмов, весьма важно бывает определение кривизны сопряженных элементов высших пар и кривизны траекторий, описываемых отдельными точками механизмов.

Начнем с рассмотрения вопроса об определении радиуса кривизны траектории $K-K$ (рулетты), описываемой некоторой точкой M (рис. 242), неизменно связанной с центроидом Π_1 при ее качении по центроиде Π_2 . В точке P , являющейся мгновенным центром вращения, проводим нормаль NN к центроидам Π_1 и Π_2 . Центр кривизны O траектории $K-K$ в точке M должен лежать на прямой, проходящей через точку P , т. е. на нормали OM к траектории $K-K$ в точке M . Пусть эта нормаль образует с нормалью NN угол φ , а центр кривизны траектории $K-K$ лежит в точке O . Обозначим отрезки $PM=r$, $OP=r_1$; тогда радиус кривизны ρ в точке M будет равен

$$\rho = r + r_1. \quad (5.65)$$

В течение бесконечно малого промежутка времени dt точка M перейдет в положение M' , и мгновенный центр вращения будет находиться в точке P' . Так как центр кривизны есть пересечение бесконечно близких нормалей к кривой, то, очевидно, нормаль OM' будет проходить через центр P' . Из точки P опустим на прямую OM' перпендикуляр PQ . Тогда, учитывая, что угол между нормальми OM и OM' есть бесконечно малый угол $d\varphi$, из чертежа (рис. 242) получаем:

$$\frac{MM'}{PQ} = \frac{r + r_1}{r_1}. \quad (5.66)$$

Далее, учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, имеем:

$$MM' = r d\varphi = \omega r dt, \quad (5.67)$$

$$PQ = PP' \cos \varphi. \quad (5.68)$$

Так как $PP' = u dt$, где u — скорость перемещения мгновенного центра вращения (§ 27,6°), то

$$PQ = u \cos \varphi dt. \quad (5.69)$$

Подставляя величины из (5.67) и (5.69) в равенство (5.66), получаем:

$$\frac{\omega r dt}{u \cos \varphi dt} = \frac{r + r_1}{r_1} \quad (5.70)$$

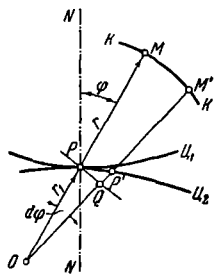


Рис. 242. К определению радиуса кривизны траектории рулетты.

и, далее,

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) \cos \varphi = \frac{\omega}{u} \quad (5.71)$$

или

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r}\right) \cos \varphi = \frac{\omega}{u}, \quad (5.72)$$

так как $r_1 = \rho - r$.

Мы рассмотрели тот случай, когда точка M и центр кривизны O расположены по разным сторонам от мгновенного центра P . В случае их расположения по одну сторону от центра P знаки величин r и r_1 в формуле (5.71) получаются разными.

Из формулы (5.62) следует, что

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{d}, \quad (5.73)$$

где d — диаметр поворотного круга. Тогда уравнение (5.72) принимает вид

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r}\right) \cos \varphi = \frac{1}{d}. \quad (5.74)$$

Из уравнения (5.74) может быть определен радиус кривизны ρ траектории точки M , если известны диаметр поворотного круга d , длина r радиус-вектора точки M относительно мгновенного центра вращения P и угол φ , который этот радиус-вектор образует с нормалью к центроидам.

2°. Переходим теперь к выводу условия, связывающего радиусы кривизны ρ_1 и ρ_2 взаимногибаемых кривых K_1 и K_2 (рис. 243). Пусть центры кривизны этих кривых находятся соответственно в точках O_1 и O_2 . При своем перемещении центр кривизны O_1 описы-

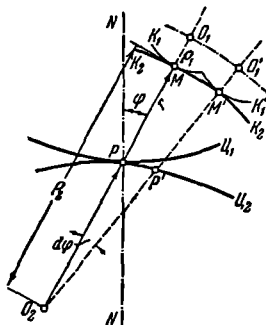


Рис. 243. К определению условия связи радиусов кривизны взаимногибаемых кривых.

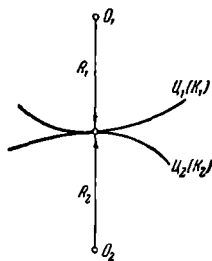


Рис. 244. К определению условия связи между радиусами кривизны центроид.

вает траекторию O_1O_1' , которую можно рассматривать как рулетку этой точки. Так как прямые PM и $P'M'$ одновременно направлены по нормальям к кривым K_1 и K_2 в точках M и M' и к траектории O_1O_1' точки O_1 , то центром кривизны рулетки O_1O_1' является точка O_2 . Для нахождения этого центра кривизны воспользуемся уравнением (5.71) и соотношением (5.73). Получаем:

$$\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1}\right) \cos \varphi = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{d}, \quad (5.75)$$

где $\rho = PO_1$ и $\rho_1 = PO_2$.

Если обозначить расстояние от точки M до центра P через r (рис. 243), то получим: $\rho = \rho_1 + r$ и $\rho_1 = \rho_2 - r$. Тогда уравнение (5.75) перепишем так:

$$\left(\frac{1}{\rho_1 + r} + \frac{1}{\rho_2 - r} \right) \cos \varphi = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{d}. \quad (5.76)$$

Сопряженные центроиды Π_1 и Π_2 (рис. 244) можно рассматривать как частный вид двух взаимогогибаемых кривых K_1 и K_2 , у которых угол φ и расстояние r равны нулю. Обозначая радиусы кривизны центроид соответственно через R_1 и R_2 и применяя к ним уравнение (5.76), получаем:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{d}. \quad (5.77)$$

Уравнение (5.77) дает связь между радиусами кривизны центроид R_1 и R_2 , угловой скоростью ω , скоростью u и диаметром d поворотного круга.

Из сравнения уравнений (5.77) и (5.76) получаем:

$$\left(\frac{1}{\rho_1 + r} + \frac{1}{\rho_2 - r} \right) \cos \varphi = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (5.78)$$

Это уравнение, связывающее радиусы кривизны взаимогогибаемых кривых и центроид, было впервые получено Л. Эйлером в 1765 году и развито Савари. Поэтому уравнение (5.78) носит название *уравнения Эйлера — Савари*.

3°. Центр кривизны траектории любой точки движущегося звена может быть также определен, если построен поворотный круг диаметром $PK = d$ (рис. 245). Пусть требуется определить радиус кривизны ρ какой-либо точки A звена. Соединяем точку A с мгновенным центром вращения P . Пусть точкой пересечения прямой PA с поворотной окружностью будет точка M . Ускорение a_A точки A может быть всегда представлено так:

$$a_A = a_M + a_{AM}^n + a_{AM}^t. \quad (5.79)$$

Точка M как лежащая на поворотной окружности имеет только тангенциальное ускорение a_M^t , т. е. $a_M = a_M^t$. Следовательно,

$$a_A = a_M^t + a_{AM}^n + a_{AM}^t. \quad (5.80)$$

Параллельные векторы a_M^t и a_{AM}^t , очевидно, в сумме дают тангенциальное ускорение a_A^t точки A , равное $a_A^t = a_M^t + a_{AM}^t$. Поэтому уравнение (5.80) принимает вид

$$a_A = a_A^t + a_{AM}^n.$$

С другой стороны, ускорение a_A может быть представлено так:

$$a_A = a_A^n + a_A^t.$$

Сравнивая между собой два последних выражения для a_A , получаем:

$$a_A^t + a_{AM}^n = a_A^n + a_A^t. \quad (5.81)$$

Из уравнения (5.81) следует, что нормальные ускорения a_A^n и a_{AM}^n равны между собой. Тогда, так как

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{\rho},$$

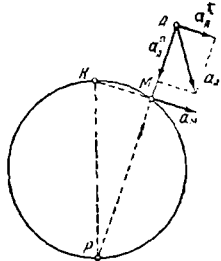


Рис. 245. К определению радиусов кривизны траектории точки.

где v_A — скорость точки A и ρ — радиус кривизны траектории этой точки, и

$$a_{AM}^n = \omega^2 l_{MA},$$

где ω — мгновенная угловая скорость звена и l_{MA} — расстояние от точки M до точки A , получаем:

$$\frac{v_A^2}{\rho} = \omega^2 l_{MA}. \quad (5.82)$$

Но так как $v_A = |\omega| l_{PA}$, то

$$\rho = \frac{l_{PA}^2}{l_{MA}}. \quad (5.83)$$

Так определяется величина ρ радиуса кривизны траектории точки M .
4°. Формула (5.83) позволяет построить поворотный круг, если известны радиусы кривизны траекторий каких-либо двух точек звена.

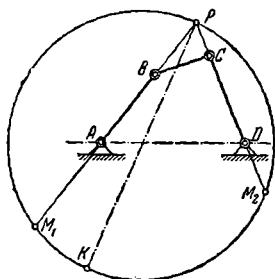


Рис. 246. Построение поворотного круга шатуна механизма шарнирного четырехзвенника.

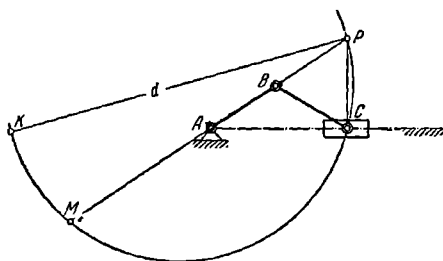


Рис. 247. Построение поворотного круга шатуна кривошипно-ползунного механизма.

Например, пусть требуется построить поворотный круг звена BC механизма $ABCD$ шарнирного четырехзвенника (рис. 246). Находим мгновенный центр вращения P . Так как радиус кривизны траектории точки B равен AB , а радиус кривизны траектории точки C равен DC , то на основании формулы (5.83) имеем:

$$AB = \frac{(PB)^2}{BM_1} \quad \text{и} \quad DC = \frac{(PC)^2}{CM_2},$$

откуда получаем

$$BM_1 = \frac{(PB)^2}{AB} \quad (5.84)$$

и

$$CM_2 = \frac{(PC)^2}{DC}. \quad (5.85)$$

Из формул (5.84) и (5.85) определяются положения точек M_1 и M_2 , лежащих на поворотной окружности, которая пройдет через точки M_1 , M_2 и P .

Пусть требуется построить поворотный круг звена BC кривошипно-ползунного механизма (рис. 247). Так как точка C имеет только тангенциальное ускорение, то окружность поворотного круга пройдет через точку C . Эта

окружность проходит и через мгновенный центр P . Остается определить третью точку — точку M , для чего имеем соотношение

$$BM = \frac{(PB)^2}{AB}.$$

Окружность поворотного круга проходит через точки M , P и C . На рис. 246 и 247 диаметры d поворотных кругов изображаются отрезками PK .

5°. В заключение параграфа покажем, как определить центр кривизны ρ какой-либо точки D звена BC (рис. 248, a), если построены его план скоростей (рис. 248, b) и план ускорений (рис. 248, $в$). Центр кривизны лежит на прямой Dn , проведенной через точку D (рис. 248, a) перпендикулярно к скорости v_D , т. е. перпендикулярно к отрезку (pd) плана скоростей (рис. 248, b). Вектор полного ускорения a_D точки D представлен на плане ускорений в виде отрезка (πd) (рис. 248, $в$). Разложим вектор a_D по направлениям Dn и перпендикулярному к нему. Составляющая, направленная по Dn , будет нормальным ускорением a_D^n точки D . Имеем:

$$a_D^n = \frac{v_D^2}{\rho}, \quad (5.86)$$

откуда и определится величина радиуса кривизны ρ . Получаем:

$$\rho = \frac{v_D^2}{a_D^n}. \quad (5.87)$$

Зная ρ , можно найти положение центра кривизны O траектории точки D .

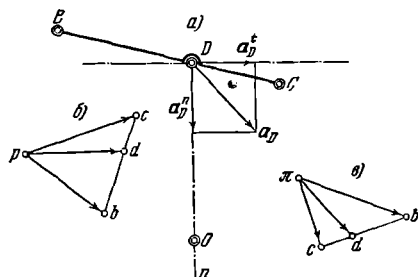


Рис. 248. К определению радиуса кривизны траектории точки D : a) схема звена; b) план скоростей звена; $в$) план ускорений звена.

ГЛАВА VI

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПЛАНОВ

§ 30. Перманентное и начальное движения механизма

1°. Кинематическое исследование механизма, т. е. *изучение движения звеньев механизма без учета сил, обуславливающих это движение*, состоит в основном в решении трех следующих задач:

- определение перемещений звеньев и траекторий, описываемых точками звеньев,
- определение скоростей отдельных точек звеньев и угловых скоростей звеньев,
- определение ускорений отдельных точек звеньев и угловых ускорений звеньев.

Если механизм имеет одну степень подвижности, то перемещения, скорости и ускорения звеньев и точек механизма являются функциями перемещений, скоростей и ускорений одного из звеньев механизма, принятого за ведущее. Если механизм обладает несколькими степенями подвижности, то перемещения, скорости и ускорения звеньев и точек механизма суть функции соответствующих перемещений, скоростей и ускорений звеньев механизма, принятых за ведущие. При этом число ведущих звеньев должно быть равно числу степеней подвижности механизма или, что то же, числу обобщенных координат механизма.

2°. Рассмотрим прежде всего вопрос о том, в какой форме могут быть заданы законы движения ведущих звеньев. В дальнейшем эти

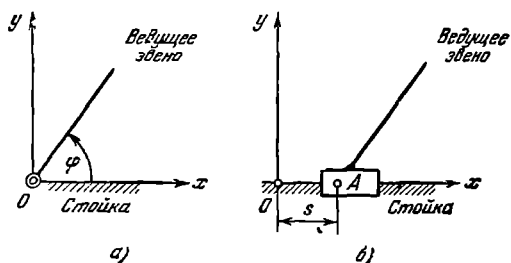


Рис. 249. Схемы ведущих звеньев: а) звено, входящее во вращательную пару со стойкой; б) звено, входящее в поступательную пару со стойкой.

законы мы будем называть *функциями перемещений, скоростей или ускорений*.

Функция перемещений может быть задана в аналитической форме в виде соответствующей функции, связывающей перемещение ведущего звена со временем.

Если ведущее звено входит во вращательную пару со стойкой (рис.

249, а), то задается функция $\varphi = \varphi(t)$, где φ — угол поворота ведущего звена относительно неподвижной системы координат xOy , связанной со стойкой, а t — время. Если ведущее звено входит в поступательную пару (рис. 249, б), то задается функция $s = s(t)$, где s — перемещение произвольно выбранной точки А ведущего звена относительно неподвижной системы координат, связанной со стойкой, а t — время.

Функции $\varphi = \varphi(t)$ и $s = s(t)$ могут быть также заданы графически в виде кривых (рис. 250), где по осям ординат отложены углы поворота φ (рис. 250, а) или перемещения s (рис. 250, б) в некоторых выбранных масштабах μ_φ и μ_s , а по осям абсцисс время t в выбранном масштабе μ_t .

Пользуясь графиками (рис. 250), легко определять численное значение углов поворота φ или перемещений s за любой выбранный отрезок времени. Например, если взять на кривой (рис. 250, а) некоторую точку i , то угол поворота φ_i ведущего звена от начального положения, когда φ равно $\varphi_0 = 0$, определится так:

$$\varphi_i - \varphi_0 = \mu_\varphi b,$$

где b — отрезок, взятый в *мм*.

Соответственно время t_i , за которое ведущее звено повернулось на угол φ_i , равно

$$t_i - t_0 = \mu_1 a,$$

где a — отрезок, взятый в мм.

3°. В некоторых инженерных задачах закон движения ведущего звена может быть задан в виде функций скоростей $\omega = \omega(t)$ или $v = v(t)$.

Тогда переход от функций скоростей к функциям перемещений может быть осуществлен путем вычисления интегралов

$$\varphi_i - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t_i} \omega(t) dt \quad \text{и} \quad s_i - s_0 = \int_{t_0}^{t_i} v(t) dt, \quad (6.1)$$

где φ_0 , s_0 и t_0 — угол, перемещение и время, соответствующие начальному положению ведущего звена.

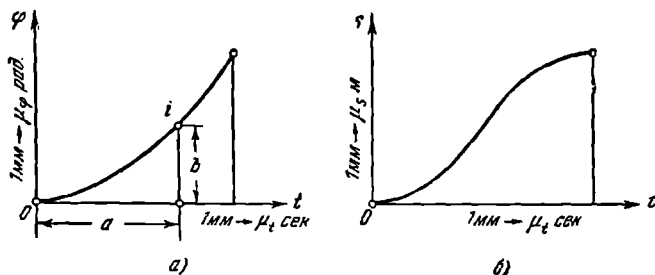


Рис. 250. Графики заданных перемещений ведущего звена: а) график угловых перемещений; б) график линейных перемещений.

Если, наконец, закон движения ведущего звена задан в виде функций ускорений $\epsilon = \epsilon(t)$ или $a = a(t)$, то переход к функциям скоростей осуществляется путем вычисления интегралов

$$\omega_i - \omega_0 = \int_{t_0}^{t_i} \epsilon(t) dt \quad \text{и} \quad v_i - v_0 = \int_{t_0}^{t_i} a(t) dt, \quad (6.2)$$

где ω_0 , v_0 и t_0 — угловая скорость, линейная скорость и время, соответствующие начальному положению ведущего звена. Определив функции скоростей по равенствам (6.2), можно определить и функции положений, пользуясь равенствами (6.1). Таким образом, определение функций перемещений по заданным функциям скоростей сводится к вычислению одного из интегралов (6.1), а в случае задания функций ускорений — к последовательному вычислению двух интегралов (6.2) и (6.1). Следовательно, если закон движения ведущего звена задан функциями скоростей или ускорений, то мы можем перейти к функциям перемещений.

4°. Углы поворота и перемещения отдельных звеньев и точек этих звеньев могут быть заданы в функции угла поворота φ или перемещения s ведущего звена. Так, угол поворота φ_k звена номер k может быть задан в форме $\varphi_k = \varphi_k(\varphi)$ или $\varphi_k = \varphi_k(s)$, а перемещение s_M какой-либо точки M в форме $s_M = s_M(s)$ или $s_M = s_M(\varphi)$.

Скорости и ускорения отдельных звеньев и точек этих звеньев можно также выразить в функциях скоростей и ускорений ведущего звена. Например, угловая скорость ω_k звена номер k равна

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \omega_{k\varphi} = \omega i_{k\varphi}, \quad (6.3)$$

где ω — угловая скорость ведущего звена, имеющая размерность *рад/сек*, а $\omega_{k\varphi}$ — безразмерная угловая скорость звена номер k , представляющая собой отношение дифференциалов угла поворота φ_k звена k и обобщенной координаты φ ; $i_{k\varphi}$ — равная $\omega_{k\varphi}$ величина передаточного отношения от звена k к ведущему звену.

Следующим дифференцированием по времени получаем выражение углового ускорения ϵ_k звена номер k :

$$\begin{aligned} \epsilon_k = \frac{d\omega_k}{dt} &= \frac{d}{dt} (\omega \omega_{k\varphi}) = \omega \frac{d\omega_{k\varphi}}{dt} + \omega_{k\varphi} \frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega_{k\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \omega_{k\varphi} \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \omega^2 \frac{d\omega_{k\varphi}}{d\varphi} + \omega_{k\varphi} \epsilon = \omega^2 \epsilon_{k\varphi} + \epsilon \omega_{k\varphi} = \omega^2 i'_{k\varphi} + \epsilon i_{k\varphi}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $i'_{k\varphi} = di_{k\varphi}/d\varphi = d\omega_{k\varphi}/d\varphi = \epsilon_{k\varphi}$.

5°. Можно получить выражения для скорости и ускорения какой-либо точки M , принадлежащей звену номер k , представленные в функциях обобщенной координаты φ . Такие выражения получаются в результате дифференцирования радиуса-вектора $\mathbf{r}_M$ точки M по времени. Надо иметь в виду, что радиус-вектор $\mathbf{r}_M$ в общем случае может изменять и свою величину и свое направление, так что скорость точки M может быть представлена в виде двух составляющих $\mathbf{v}_M^a$ и $\mathbf{v}_M^n$, из которых первая составляющая $\mathbf{v}_M^a$, направленная вдоль радиуса-вектора $\mathbf{r}_M$, характеризует изменение длины радиуса-вектора, а вторая $\mathbf{v}_M^n$, направленная перпендикулярно к радиусу-вектору $\mathbf{r}_M$, определяет скорость его поворота. При втором дифференцировании по времени получается ускорение $\mathbf{a}_M$ точки M . Если производить дифференцирование до конца, то можно убедиться, что ускорение $\mathbf{a}_M$ точки M состоит из четырех составляющих: *нормального ускорения*, направленного к центру, из которого начинается радиус-вектор $\mathbf{r}_M$, *тангенциального ускорения*, направленного перпендикулярно к радиусу-вектору, *относительного (релятивного) ускорения* с направлением вдоль радиуса-вектора и *ускорения Кориолиса*, перпендикулярного к радиусу-вектору.

Дифференцируя радиус-вектор $\mathbf{r}_M$ по времени, получаем:

$$\mathbf{v}_M = \frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_M}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \mathbf{v}_{M\varphi}. \quad (6.3')$$

Здесь вектор $\mathbf{v}_{M\varphi}$ представляет собой геометрическую сумму векторов $\mathbf{v}_{M\varphi}^n$ и $\mathbf{v}_{M\varphi}^t$, определяющих изменение длины радиуса-вектора $\mathbf{r}_M$ и изменение его угла поворота. Так как эти векторы получаются дифференцированием по углу φ , то они имеют размерность длины и называются *аналогами скоростей* *).

Дифференцированием вектора $\mathbf{v}_M$ по времени получаем ускорение $\mathbf{a}_M$ точки M :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_M &= \frac{d\mathbf{v}_M}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \mathbf{v}_{M\varphi}) = \omega \frac{d\mathbf{v}_{M\varphi}}{dt} + \mathbf{v}_{M\varphi} \frac{d\omega}{dt} = \\ &= \omega \frac{d\mathbf{v}_{M\varphi}^n}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \mathbf{v}_{M\varphi} \frac{d\omega}{dt} = \omega^2 \mathbf{a}_{M\varphi} + \varepsilon \mathbf{v}_{M\varphi}, \end{aligned} \quad (6.4')$$

Здесь также надо иметь в виду, что вектор $\mathbf{a}_{M\varphi}$, являющийся вектором *аналога ускорения* точки M и имеющий размерность длины, представляет собой геометрическую сумму аналогов нормального, тангенциального, относительного (релятивного) и поворотного ускорений.

Если ведущее звено входит в поступательную пару, то обобщенной координатой является его перемещение s . Определение аналогов ω_{ks} , ε_{ks} , $\mathbf{v}_{ks}$ и $\mathbf{a}_{ks}$ производится в данном случае аналогично.

6°. Так как аналоги скоростей и ускорений зависят только от обобщенной координаты и не зависят от времени, то кинематическое исследование механизмов можно вести чисто геометрическим путем. Для этого, если ведущее звено входит во вращательную пару, поворачивают его на углы φ и определяют перемещения всех остальных звеньев. Далее, если требуется определить скорости и ускорения звена номер k и его точки M , то находят аналоги скоростей и ускорений $\omega_{k\varphi}$, $\varepsilon_{k\varphi}$, $\mathbf{v}_{M\varphi}$ и $\mathbf{a}_{M\varphi}$ и подставляют их значения в уравнения (6.3), (6.4) и (6.3'), (6.4'). Истинные скорости и ускорения определяются по формулам:

$$\omega_k = \omega \omega_{k\varphi} = i_{k\varphi} \omega, \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_k = \omega^2 \varepsilon_{k\varphi} + \varepsilon \omega_{k\varphi} = \varepsilon_{k\varphi} \omega^2 + i_{k\varphi} \varepsilon, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{v}_M = \omega \mathbf{v}_{M\varphi}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{a}_M = \omega^2 \mathbf{a}_{M\varphi} + \varepsilon \mathbf{v}_{M\varphi}, \quad (6.8)$$

где ω и ε — заданные угловая скорость и угловое ускорение ведущего звена.

Если ведущее звено вращается с постоянной угловой скоростью ω , то его угловое ускорение ε равно нулю, и мы получаем следующие

*) Величины аналогов скоростей и ускорений впервые были использованы Л. В. Ассуром при кинематическом исследовании механизмов.

формулы для скоростей и ускорений звена номер k и его точки M :

$$\omega_k^0 = \omega \omega_{k\varphi} = i_{k\varphi} \omega, \quad (6.9)$$

$$\epsilon_k^0 = \omega^2 \epsilon_{k\varphi}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{v}_M^0 = \omega \mathbf{v}_{M\varphi}, \quad (6.11)$$

$$\mathbf{a}_M^0 = \omega^2 \mathbf{a}_{M\varphi}. \quad (6.12)$$

Движение ведущего звена механизма с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ и $\epsilon = 0$ носит название *перманентного* или *основного движения механизма*.

Если в равенствах (6.5) — (6.8) принять угловую скорость $\omega = 0$, то скорости ω_k и $\mathbf{v}_M$ будут также равны нулю, а равенства (6.6) и (6.8) примут вид

$$\epsilon_k^{\text{II}} = \epsilon \omega_{k\varphi}, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{a}_M^{\text{II}} = \epsilon \mathbf{v}_{M\varphi}. \quad (6.14)$$

Движение ведущего звена, описываемого равенствами (6.13) и (6.14), носит название *начального движения*.

В начальном движении механизма угловая скорость ω ведущего звена равна нулю, и потому его нормальные, относительные и кориолисовы ускорения также равны нулю. Таким образом, в начальном движении звенья и точки механизма имеют только угловые и тангенциальные ускорения, линии действия которых совпадают с линиями действия скоростей соответствующих точек звеньев.

Таким образом, истинное движение каждого механизма может рассматриваться в общем случае состоящим из перманентного и начального движений, и равенства (6.5) — (6.8) можно представить так:

$$\omega_k = \omega_k^0, \quad (6.15)$$

$$\epsilon_k = \epsilon_k^0 + \epsilon_k^{\text{II}}, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_M^0, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_M^0 + \mathbf{a}_M^{\text{II}}. \quad (6.18)$$

Производя исследование механизма в перманентном движении и пользуясь полученными величинами аналогов $\omega_{k\varphi}$ и $\mathbf{v}_{M\varphi}$ с помощью соотношений (6.13) и (6.14) можно определить значения ϵ_k^{II} и $\mathbf{a}_M^{\text{II}}$ подставив их в равенства (6.15) — (6.18), определить истинные скорости и ускорения звеньев механизма.

Рассмотрение движения механизма как состоящего из перманентного и начального движений было предложено Н. Е. Жуковским.

Возможность раздельного рассмотрения перманентного и начального движений механизма имеет важное значение при исследовании кинематики и динамики механизмов. Оно позволяет при кинема-

тическом исследовании определять положение, скорости и ускорения звеньев в функции обобщенной координаты механизма, а не в функции времени. Истинный закон изменения обобщенной координаты от времени зависит от сил, действующих и возникающих в механизме, и может быть определен только после динамического исследования механизма. Определив в результате этого исследования закон изменения обобщенной координаты, например угла поворота φ ведущего звена от времени t , т. е. $\varphi = \varphi(t)$, мы определим угловую скорость этого звена $\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi}(t)$ и его угловое ускорение $\epsilon = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi}(t)$. После этого, пользуясь формулами (6.5) и (6.6) и определенными при кинематическом исследовании аналогами скоростей и ускорений, найдем истинные скорости и ускорения всех звеньев механизма.

§ 31. Определение положений звеньев групп и построение траекторий, описываемых точками звеньев механизмов

1°. Для решения задачи о положениях звеньев механизма должны быть заданы кинематическая схема механизма и функция перемещений ведущего звена для механизма с одной степенью подвижности, или функции перемещений ведущих звеньев для механизма с несколькими степенями подвижности.

Для определения положений звеньев механизма строят его кинематическую схему, которая при графическом исследовании должна быть построена в масштабе. Условимся масштаб построения схемы механизма обозначать через μ_r , что означает число метров натуры, соответствующее одному миллиметру схемы, т. е. $1 \text{ мм} \rightarrow \mu_r \text{ м}$. Таким образом, если необходимо определить истинную длину какого-либо отрезка, изображенного на схеме, надо измерить отрезок в миллиметрах и результат измерения помножить на выбранную величину μ_r .

Как было показано в § 30, для кинематического исследования механизма достаточно рассмотреть только перманентное движение и считать движение ведущего звена происходящим с постоянной скоростью. Поэтому в дальнейшем при кинематическом исследовании механизма мы будем всегда предполагать движение его ведущего звена равномерным, а если ведущее звено в действительности движется неравномерно, то после перманентного движения следует рассматривать и начальное движение механизма.

2°. Решение задачи о положениях механизма можно производить либо численным, либо графическим методом. В обоих случаях приходится решать векторные треугольники или многоугольники численно или графически. Перед решением этой задачи надо произвести структурный анализ механизма — наметить стойку, ведущее звено и затем группы ведомой части механизма. Задача решается просто, если заданный механизм относится ко II классу.

На рис. 251 показана схема шестизвенного механизма II класса. Пусть ведущим звеном будет звено 2, присоединенной к нему первой группой является двухповодковая группа 3—4; и к ней присоединена также двухповодковая группа 5—6. Все размеры звеньев следует считать заданными, заданным должно быть и положение ведущего звена, определяемое углом φ_2 .

При численном решении надо задать направление, относительно которого следует определять углы наклона звеньев. Это направление является базой, относительно которой отсчет углов будем вести против часовой стрелки от выбранного направления. В данном случае в качестве базы намечаем направление AF .

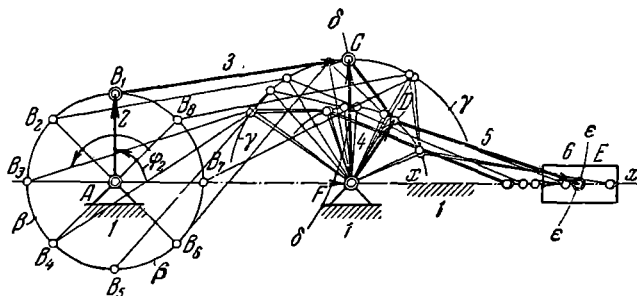


Рис. 251. Схема шестизвенного механизма, состоящего из ведущего звена 2, стойки 1 и двухповодковых групп 3—4 и 5—6.

Так как стороны многоугольников схемы меняют свои положения, то их следует рассматривать в качестве векторов, и потому их направлениями следует задаться. Вообще говоря, можно произвольно намечать направления сторон, но вектор стороны многоугольника, имеющей неподвижную точку, целесообразно считать выходящим из этой точки. Направления остальных векторов можно выбирать произвольно. На рис. 251 направления векторов обозначены стрелками.

Схема механизма представляет собой систему замкнутых многоугольников, вследствие чего для каждого такого многоугольника можно написать уравнение замкнутости.

В соответствии со структурным анализом, произведенным нами выше, мы имеем четырехугольник $ABCF$ и треугольник FDE . При составлении уравнения замкнутости следует обходить многоугольник в произвольно выбранном направлении, причем векторы, направления которых совпадают с направлением обхода, считаются положительными, противоположно направленные векторы считаются отрицательными.

Для четырехугольника $ABCF$ имеем такое уравнение замкнутости:

$$\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{FC} - \overline{AF} = 0$$

или

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{FC} + \overline{AF}. \quad (6.19)$$

Для численного решения задачи о положениях механизма следует спроектировать это уравнение на выбранное направление AF и на направление, ему перпендикулярное. Обозначим углы наклона сторон буквами φ с соответствующими индексами. В соответствии с изложенными соображениями получаем:

$$\left. \begin{aligned} AB \cos \varphi_{AB} + BC \cos \varphi_{BC} &= FC \cos \varphi_{FC} + AF \cos \varphi_{AF}, \\ AB \sin \varphi_{AB} + BC \sin \varphi_{BC} &= FC \sin \varphi_{FC} + AF \sin \varphi_{AF}. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Эти уравнения, называемые уравнениями проекций, мы написали в общем виде, но в данном случае следует иметь в виду, что $\varphi_{AF} = 0$.

В уравнениях (6.20) неизвестными являются углы φ_{BC} и φ_{FC} наклона сторон BC и FC , определяющие положения звеньев BC и FC . Для определения искомого угла φ_{BC} следует в обоих уравнениях изолировать в правой части член, содержащий FC , после чего надо возвести оба уравнения в квадрат и сложить. Угол φ_{FC} после этого можно определить по косинусу или синусу из первого или второго уравнения системы (6.20).

Дальнейшее решение задачи о положениях рассматриваемого механизма сводится к составлению и решению уравнения замкнутости треугольника FDE . Уравнение замкнутости этого треугольника имеет следующий вид:

$$\overline{FD} + \overline{DE} - \overline{FE} = 0$$

или

$$\overline{FD} + \overline{DE} = \overline{FE}. \quad (6.21)$$

Для численного решения составляем уравнения проекций

$$\left. \begin{aligned} FD \cos \varphi_{FD} + DE \cos \varphi_{DE} &= FE \cos \varphi_{FE}, \\ FD \sin \varphi_{FD} + DE \sin \varphi_{DE} &= FE \sin \varphi_{FE}. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

В этих уравнениях углы наклона сторон обозначены так же, как и в предыдущем случае.

Неизвестными в рассматриваемом треугольнике являются угол φ_{DE} и длина стороны FE , так как угол $\varphi_{FE} = 0$.

Так как угол φ_{FE} равен нулю, то угол φ_{DE} можно сразу определить из второго уравнения системы (6.22) по синусу, после чего определяется и сторона FE из первого уравнения.

Графическое решение тех же задач о положениях звеньев никакой трудности не представляет и сводится к построению четырехугольника и треугольника.

Наносим сначала на чертеже (рис. 251) неподвижные точки A и F и ось $x-x$ неподвижной направляющей. Далее, радиусом, равным длине звена AB , проводим окружность β , представляющую собой геометрическое место точек B . На этой окружности наносим

жении к основному механизму, а если она все же будет присоединена в другом положении, то механизм с такой группой не сможет занять рассматриваемого положения.

4°. Если одна из крайних вращательных пар группы, например пара D , заменена парой поступательной (рис. 253) и группа будет группой второго вида, то известными по положению будут точка B и ось $x-x$ направляющей, принадлежащей звену 4. Определению будет подлежать положение точки C . Расстояние точки C от прямой $x-x$ постоянно и равно h . Для определения положения точки C проводим из точки B окружность $\lambda-\lambda$ радиуса BC (рис. 253), а на расстоянии h от прямой $x-x$ проводим прямую $\eta-\eta$. Точка пересечения окружности $\lambda-\lambda$ с прямой $\eta-\eta$ и даст положение точки C .

Для разобранного случая мы получаем в общем случае четыре возможных решения, потому что отрезок h может быть отложен по обе стороны от прямой $x-x$ и, следовательно, в общем случае прямые $\eta-\eta$ могут пересечь окружность $\lambda-\lambda$ в четырех точках. Из полученных положений точки C выбираем то, которое удовлетворяет условию последовательности положений этой точки.

Если средняя пара группы (пара C) будет поступательной (рис. 254) и группа будет группой третьего вида, то известными по положению будут точки B и D , а определению будет подлежать положение оси $x-x$ направляющей. Так как кратчайшие расстояния от точек B и D до прямой $x-x$, равные соответственно h_1 и h_2 , являются известными, то положение прямой $x-x$ определится как положение касательной, проведенной к двум окружностям радиусов h_1 и h_2 (рис. 255). Задача может иметь в общем случае также четыре возможных решения.

Если обе крайние пары группы (пары B и D) поступательные (рис. 256) и группа четвертого вида, то заданными оказываются положения осей $x-x$

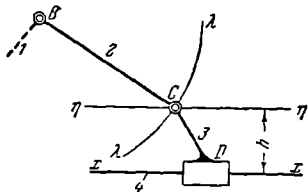


Рис. 253. Схема двухповодковой группы второго вида.

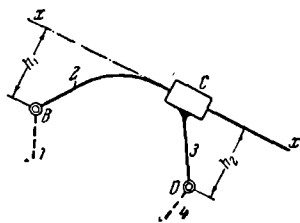


Рис. 254. Схема двухповодковой группы третьего вида.

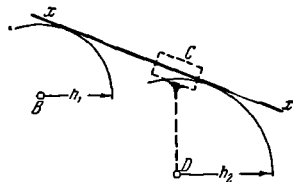


Рис. 255. К определению положения направляющей двухповодковой группы третьего вида.

и $y-y$ направляющих, принадлежащих звеньям 1 и 4. Определению подлежит положение точки C , кратчайшие расстояния которой h_1 и h_2 от прямых $x-x$ и $y-y$ постоянны. Наносим тогда заданные положения прямых $x-x$ и $y-y$ и на кратчайших от них расстояниях h_1 и h_2 проводим прямые $\lambda-\lambda$ и $\eta-\eta$. Точка пересечения этих прямых и определяет положение точки C . Отметим, что рассматриваемая задача может иметь в общем случае также четыре возможных решения.

Если одна из крайних пар группы и одна средняя поступательные (рис. 257) и группа пятого вида, то заданными являются положения точки B и оси $y-y$ — направляющей, принадлежащей звену 4. Определению подлежит положение оси $x-x$ — направляющей, принадлежащей звену 3. Для определения ее положения опускаем из точки B на прямую $x-x$ перпендикуляр h . Далее, продолжаем прямую $y-y$ до пересечения с прямой $x-x$. Имеем тогда неизменяемый отрезок h и постоянный угол φ между прямыми $x-x$ и

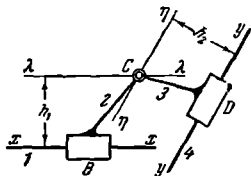


Рис. 256. Схема двухповодковой группы четвертого вида.

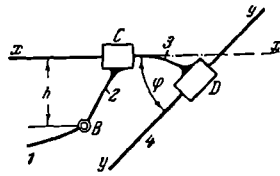


Рис. 257. Схема двухповодковой группы пятого вида.

$y-y$. Для определения положения прямой $x-x$ наносим положение заданной прямой $y-y$ и проводим произвольную прямую $\lambda-\lambda$ под углом φ (рис. 258). Далее, проводим вокруг центра B окружность $\eta-\eta$ радиусом h и опускаем из точки B на прямую $\lambda-\lambda$ перпендикуляр BK . Пусть точкой пересечения этого перпендикуляра с окружностью $\eta-\eta$ есть точка N . Через полученную точку N проводим прямую, перпендикулярную к отрезку BK . Эта прямая и определяет положение прямой $x-x$. В общем случае могут быть получены четыре различных положения прямой.

При рассмотрении групп с поступательными парами (рис. 253, 254, и 256) удобно вводить условные направляющие, оси которых проходят через центры шарниров. Так, например, группу BCD , показанную на рис. 259,

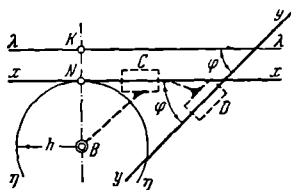


Рис. 258. К определению направляющей $x-x$ группы пятого вида.

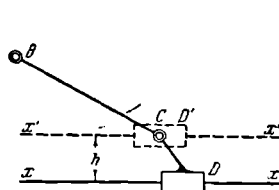


Рис. 259. Условное смещение направляющей $x-x$ в положение $x'-x'$ для определения положения двухповодковой группы.

можно заменить группой BCD' , т. е. перенести ось $x-x$ движения ползуна D параллельно самой себе в положение $x'-x'$. Определив положение ползуна D' на направляющей $x'-x'$, можно по заданным размерам звена CD найти положение ползуна D на оси $x-x$ направляющей.

5°. Для нахождения положений плоских механизмов III класса можно также пользоваться методом геометрических мест, которым мы пользовались для решения такой же задачи в предыдущих случаях. В отличие от механизмов II класса в механизмах III класса этими геометрическими местами могут быть не только окружности или прямые, но и кривые высших порядков.

Пусть, например, дана трехповодковая группа III класса $BCDEFG$ (рис. 260). Положения точек B , E и G заданы, так как группа концевыми элементами B , E и G входит в кинематические пары с звеньями 1, 5 и 7 основного механизма. Требуется определить положение остальных точек. Как и для механизмов II класса, разделим один из шарниров базисного звена 3, например шарнир в точке F . Тогда системы звеньев $BCDE$ и GF приобретают каждая одну степень подвижности, и обе эти системы, если сделать непо-

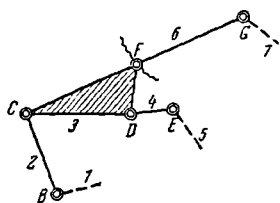


Рис. 260. Схема трехповодковой группы.

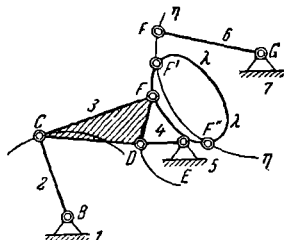


Рис. 261. К определению положений звеньев трехповодковой группы.

движными звенья 1, 5 и 7, как бы превращаются в самостоятельные механизмы с одной степенью подвижности. Система $BCDE$ (рис. 261) становится механизмом II класса, а система GF — механизмом I класса. Находим траекторию λ — λ точки F , принадлежащей шатуну CD четырехзвенного шарнирного механизма $BCDE$, которая носит название *шатунной кривой*. Находим, далее, траекторию η — η точки F звена GF . Это — дуга окружности радиуса GF . Таким образом, геометрическими местами возможных точек F являются кривая λ — λ и дуга окружности η — η . Точки пересечения F' и F'' этих двух геометрических мест и дадут возможные положения точки F . Так как шатунные кривые являются кривыми высших порядков, то в общем случае мы можем получить несколько точек пересечения этих кривых с окружностью. Очевидно, для выбора среди этих точек истинной надо пользоваться условием последовательности положений точки F при движении группы. Определив истинное положение точки F , можно построить истинные положения всех остальных звеньев механизма.

6°. Покажем, что методом разьединения шарнира можно определить положения всех точек любого механизма III класса. Пусть, например, мы имеем семиповодковую группу III класса (рис. 262). Достаточно разьединить шарнир в любой из точек K , L , N или M и сделать неподвижными звенья 1, 5, 8, 11, 14, 17, 19 для того, чтобы получить два самостоятельных механизма II класса. Например, разьединяя шарнир в точке L , мы получаем механизмы $BPKRCSD$ и $ETNQFMUGH$. Оба эти механизма, если ведущими являются звенья BP или CR и HU или GO , оказываются механизмами II класса (при ведущих звеньях DS , ET и FQ механизмы будут III класса). Для полученных механизмов можно указанным выше способом построить траекторию точки, принадлежащей одновременно первому и второму механизмам, и тем самым получить геометрические места возможных положений точки L . Пересечение этих геометрических мест и дает истинное положение

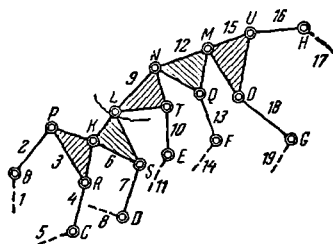


Рис. 262. Схема семиповодковой группы.

точки L . Зная положение точки L для какого-либо положения звеньев механизма, можно определить положения всех остальных звеньев механизма.

Так как получение шатунных кривых по точкам требует кропотливых построений, то для решения этой задачи можно применять так называемые шаблоны. Для этого из плотной бумаги вырезается фигура, представляющая собой одно из базисных звеньев. Установив эту фигуру двумя вершинами на заданных траекториях, перемещают по ним обе вершины. Кривая, описываемая третьей вершиной, является ее истинной траекторией. Например, для

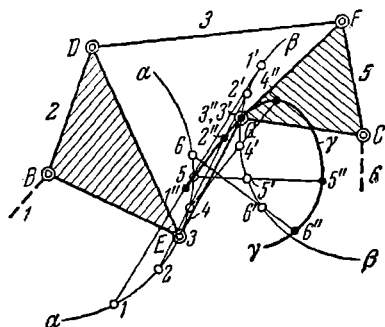


Рис. 263. К определению положений звеньев группы IV класса второго порядка.

определения траектории $\lambda - \lambda$, описываемой точкой F звена 3 (рис. 261), изготавливается треугольный шаблон звена CDF . Точками C и D этот треугольный шаблон перемещается по дугам, описываемым точками C и D . Третья точка F при этом описывает требуемую траекторию $\lambda - \lambda$. В случае более сложной группы надо иметь несколько шаблонов по числу базисных звеньев.

7°. Для определения положений групп IV класса необходимо применять метод, основанный также на построении геометрических мест, но иной, чем метод, применяемый к группам III класса. На рис. 263 показана группа IV класса. Сделаем неподвижными звенья 1 и 6 и разделим шарниры E и G , тем самым выключим из группы звено 4. Тогда при заданных положениях точек B и C группа превращается в механизм $BDFC$ II класса. Точка E в этом случае занимает на окружности $\alpha - \alpha$ радиуса BE последовательно положения, обозначенные цифрами 1, 2, 3, ... Соответственно точка G занимает на окружности $\beta - \beta$ положения, обозначенные цифрами 1', 2', 3', ... Соединяем полученные точки 1 и 1', 2 и 2', 3 и 3', ... и на полученных отрезках из точек 1, 2, 3, ... откладываем длину EG звена 4. Получаем точки 1'', 2'', 3'', ..., образующие кривую $\gamma - \gamma$. Точка G пересечения кривой $\gamma - \gamma$ с кривой $\beta - \beta$ и определяет истинное положение звена 4, а следовательно, и положения всех остальных звеньев группы.

8°. Если найдены положения звеньев механизма для достаточно большого числа заданных положений ведущего звена, то можно построить траектории, описываемые отдельными точками механизма. Пусть требуется построить траекторию точки E механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 264). Разбиваем траекторию точки B на двенадцать равных частей и находим соответствующие положения точки C . Соединяя в каждом положении точки B и C , находим на звене BC положение точки E . Обводя последовательные положения точки E плавной кривой, получаем траекторию точки E .

Кроме траектории точки E на рис. 264 показаны траектории, описываемые различными точками, жестко скрепленными с шатуном BC .

Как было указано выше, траектории точек, принадлежащих шатуну, носят название *шатунных кривых*.

Шатунными кривыми в настоящее время широко пользуются в технике, например в механизме сеноворошилки (рис. 6), в тесто-

месильной машине (рис. 7), в подъемном кране (рис. 9), в сенном прессе (рис. 20) и т. д. Широкое применение шатунные кривые нашли в механизмах Чебышева (рис. 16, 17).

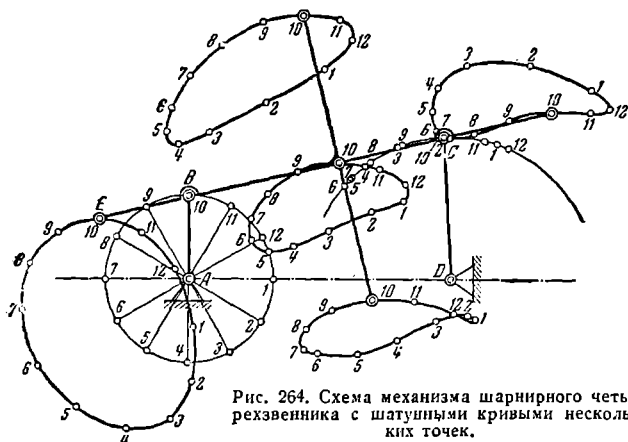


Рис. 264. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с шатунными кривыми несколькими точками.

9°. В общем виде уравнение шатунных кривых четырехзвенных механизмов можно представить так:

$$U^2 + V^2 = W^2. \quad (6.23)$$

Для механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 265), у которого произвольно выбранная точка M шатуна описывает шатунную кривую, величины U , V и W соответственно равны

$$U = a[(x - k) \cos \gamma + y \sin \gamma] (x^2 + y^2 + b^2 - r^2) - bx[(x - k)^2 + y^2 + a^2 - R^2], \quad (6.24)$$

$$V = a[(x - k) \sin \gamma - y \cos \gamma] (x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + by[(x - k)^2 + y^2 + a^2 - R^2], \quad (6.25)$$

$$W = 2ab \sin \gamma [x(x - k) + y^2 - ky \operatorname{ctg} \gamma], \quad (6.26)$$

где a , b , k , r , R и γ — постоянные размеры, показанные на рис. 265.

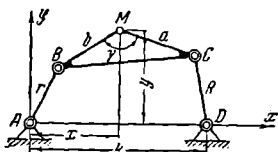


Рис. 265. К уравнению шатунной кривой точки M механизма шарнирного четырехзвенника.

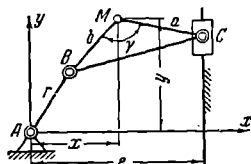


Рис. 266. К уравнению шатунной кривой точки M кривошипно-ползунного механизма.

В результате исследования можно показать, что уравнение шатунной кривой, описываемой точкой M шатуна шарнирного четырехзвенника, есть уравнение шестой степени.

Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 266), у которого произвольно выбрана точка M шатуна описывает шатунную кривую, величины U , V и W уравнения (6.23) соответственно равны

$$U = a(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) \sin \gamma + 2by(x - e), \quad (6.27)$$

$$V = a(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) \cos \gamma + 2bx(e - x), \quad (6.28)$$

$$W = 2ab(x \sin \gamma + y \cos \gamma), \quad (6.29)$$

где a , b , r , e и γ — постоянные размеры, показанные на рис. 266. Уравнение шатунной кривой, описываемой точкой M шатуна кривошипно-ползунного механизма, есть уравнение четвертой степени.

Для кулисного механизма (рис. 267), у которого произвольно выбранная

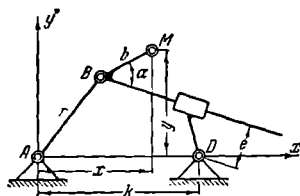


Рис. 267. К уравнению шатунной кривой точки M кулисного механизма.

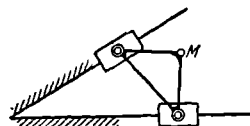


Рис. 268. Схема механизма с двумя поступательными парами и шатунной точкой M .

точка M шатуна описывает шатунную кривую, величины U , V и W уравнения (6.23) соответственно равны

$$U = (k - x)(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) + 2b(e + b \sin \alpha)(x \sin \alpha - y \cos \alpha), \quad (6.30)$$

$$V = y(x^2 + y^2 + b^2 - r^2) - 2b(e + b \sin \alpha)(x \cos \alpha + y \sin \alpha), \quad (6.31)$$

$$W = 2b \cos \alpha [x(x - k) + y^2 + ky \tan \alpha]. \quad (6.32)$$

Уравнение шатунной кривой, описываемой точкой шатуна кулисного механизма, есть уравнение шестой степени.

Для механизма с двумя поступательными парами, показанного на рис. 268, шатунной кривой, описываемой точкой M шатуна, является кривая второго порядка (эллипс).

§ 32. Определение скоростей и ускорений групп II класса

1°. Определение скоростей и ускорений групп II класса может быть сделано одним из методов, изложенных в пятой главе. Наиболее распространенным методом исследования является метод планов скоростей и ускорений (§ 26). Так как механизмы II класса образованы последовательным присоединением групп, то изложение метода планов удобно вести применительно к различным видам групп II класса. Аналогично задаче о положениях механизма известными будут скорости и ускорения тех элементов звеньев, входящих в кинематические пары, которыми группа присоединяется к основному механизму. Определению будут подлежать скорости и ускорения отдельных точек группы и угловые скорости и ускорения звеньев.

2°. В состав группы II класса первого вида входят три вращательные пары и два звена (рис. 269, а).

Аналогично задаче о положениях групп известными являются векторы скоростей точек B и D концевых элементов группы, которыми звенья 2 и 3 входят в кинематические пары со звеньями 1 и 4 основного механизма, т. е. скорости $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_D$. Требуется определить вектор $\mathbf{v}_C$ скорости точки C .

Векторные уравнения для скорости точки C имеют следующий вид (см. § 26, 2°):

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}, \quad \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{CD}, \quad (6.33)$$

где $\mathbf{v}_C$, $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_D$ суть соответственно векторы абсолютных скоростей точек C , B и D , в $\mathbf{v}_{CB}$ и $\mathbf{v}_{CD}$ — векторы скоростей точки C относительно точек B и D . Из уравнений (6.33) получаем:

$$\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB} = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{CD}. \quad (6.34)$$

В уравнении (6.34) известны по величине и направлению векторы скоростей $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_D$. Векторы же скоростей $\mathbf{v}_{CB}$ и $\mathbf{v}_{CD}$ известны только

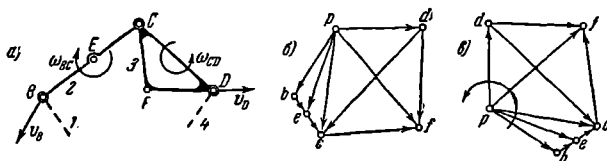


Рис. 269. Двухповодковая группа первого вида: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) повернутый план скоростей.

по направлению. Вектор $\mathbf{v}_{CB}$ скорости точки C относительно точки B направлен перпендикулярно к направлению BC , а вектор $\mathbf{v}_{CD}$ скорости точки C относительно D направлен перпендикулярно к направлению DC . Таким образом, в уравнении (6.34) неизвестны только величины векторов скоростей $\mathbf{v}_{CB}$ и $\mathbf{v}_{CD}$, которые могут быть определены построением плана скоростей (рис. 269, б).

Выбираем в качестве полюса плана скоростей точку p , откладываем от нее отрезки (pb) и (pd) , представляющие собой скорости $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_D$ точек B и D в каком-либо произвольно выбранном масштабе μ_v , дающем соответственно в 1 мм $\rightarrow \mu_v$ м/сек. При выборе величины масштаба μ_v руководствуются удобством вычислений и построений векторов скоростей.

Для определения истинных величин скоростей точек B и D отрезки (pb) и (pd) , измеренные в миллиметрах, умножим на выбранный масштаб μ_v , показывающий, сколько единиц скорости приходится на 1 мм соответствующего отрезка. Получим:

$$v_B = \mu_v (pb), \quad v_D = \mu_v (pd).$$

Отложив отрезки (pb) и (pd) , проведем через точки b и d прямые, имеющие направление векторов относительных скоростей $\mathbf{v}_{CB}$ и $\mathbf{v}_{CD}$, перпендикулярные к направлениям BC и DC (рис. 269, а). Точка c определит конец вектора $\mathbf{v}_C$ абсолютной скорости точки C группы.

Скорость v_C согласно уравнениям (6.33) выражается отрезком (pc), соединяющим точку p с полученной точкой c . Величина этой скорости равна

$$v_C = \mu_v(pc).$$

Отрезки (bc) и (dc) представляют собой относительные скорости v_{CB} и v_{CD} в том же масштабе, т. е.

$$v_{CB} = \mu_v(bc), \quad v_{CD} = \mu_v(dc).$$

Стрелки у векторов на рис. 269, б должны быть поставлены так, чтобы удовлетворялись уравнения (6.33).

Для удобства графического построения план скоростей всех звеньев группы иногда условно повертывают в одном и том же направлении на угол в 90° . Тогда векторы относительных скоростей v_{CB} и v_{CD} будут параллельны направлениям BC и DC . Такой план скоростей называется *повернутым планом скоростей*. На рис. 269, в изображен повернутый план скоростей, причем направления всех скоростей повернуты на угол 90° против движения часовой стрелки.

Пользуясь планом скоростей, можно определить угловые скорости ω_2 и ω_3 звеньев 2 и 3. Величины этих скоростей определяются из равенств

$$|\omega_2| = \frac{v_{CB}}{l_2}, \quad |\omega_3| = \frac{v_{CD}}{l_3}, \quad (6.35)$$

где l_2 и l_3 суть длины BC и DC звеньев 2 и 3.

Пусть группа BCD построена в некотором произвольно выбранном масштабе μ_l , представляющем собой число метров натуры, приходящихся на 1 мм отрезка на схеме. Подставляя в уравнения (6.35) модули скоростей v_{CB} и v_{CD} , выраженные в масштабе μ_v через соответствующие отрезки плана скоростей, и длины звеньев BC и DC , выраженные в масштабе μ_l , получаем:

$$|\omega_2| = \frac{\mu_v(bc)}{\mu_l(BC)}, \quad |\omega_3| = \frac{\mu_v(dc)}{\mu_l(DC)}.$$

Отношение масштабов μ_v/μ_l имеет размерность сек^{-1} . Направления угловых скоростей ω_2 и ω_3 могут быть определены следующим образом. Прикладывая векторы v_{CB} и v_{CD} в точке C , видим, что вращение звена 2 происходит в направлении вращения часовой стрелки, а вращение звена 3 — в направлении, обратном вращению часовой стрелки (рис. 269, а).

Для определения скорости какой-либо точки E , лежащей на линии BC звена 2 (рис. 269, а), пользуемся равенством (5.29), из которого следует, что скорости точек E и C относительно точки B прямо пропорциональны расстояниям этих точек до точки B :

$$(be) = (bc) \frac{l_{BE}}{l_{BC}}. \quad (6.36)$$

Соотношение (6.36) показывает, что для определения отрезка плана скоростей, изображающего относительную скорость $\mathbf{v}_{EB}$, необходимо отрезок (bc) , изображающий на плане скоростей относительную скорость $\mathbf{v}_{CB}$, разделить в том же отношении, в каком точка E делит отрезок BC на схеме группы (рис. 269, а).

Отложив полученный отрезок (be) на плане скоростей (рис. 269, б) и соединив полученную точку с полюсом плана p , получаем отрезок (pe) , изображающий в масштабе μ_v абсолютную скорость $\mathbf{v}_E$ точки E :

$$v_E = \mu_v(pe).$$

Для определения скорости какой-либо точки F звена 3 (рис. 269, а) пользуемся условием подобия фигур плана скоростей и схемы звена (§ 26,3°). Из точки d плана скоростей проводим прямую, перпендикулярную к FD , а через точку c — прямую, перпендикулярную к FC . Точка пересечения f проведенных прямых (рис. 269, б) и определит конец вектора $\mathbf{v}_F$ абсолютной скорости точки F . При построении подобных фигур на повернутых планах скоростей стороны подобных фигур соответственно параллельны (рис. 269, в).

3°. При определении ускорений группы II класса первого вида известны векторы $\mathbf{a}_B$ и $\mathbf{a}_D$ полных ускорений точек B и D (рис. 270, а). Кроме того, план скоростей группы предполагается построенным, и следовательно, можно считать известными скорости всех звеньев группы.

Векторные уравнения для определения ускорения $\mathbf{a}_C$ точки C имеют вид (см. § 26, 2°)

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t, \quad \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t, \quad (6.37)$$

где $\mathbf{a}_{CB}^n$ и $\mathbf{a}_{CD}^n$ — нормальные ускорения в относительном движении, а $\mathbf{a}_{CB}^t$ и $\mathbf{a}_{CD}^t$ — тангенциальные ускорения в том же движении. Решая совместно уравнения (6.37), получаем:

$$\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t. \quad (6.38)$$

В уравнении (6.38) известны по величине и направлению векторы ускорений $\mathbf{a}_B$ и $\mathbf{a}_D$ точек B и D . Векторы нормальных ускорений $\mathbf{a}_{CB}^n$ и $\mathbf{a}_{CD}^n$ в относительном движении могут быть определены. Величины этих ускорений равны

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_2} = \omega_2^2 l_2, \quad a_{CD}^n = \frac{v_{CD}^2}{l_3} = \omega_3^2 l_3.$$

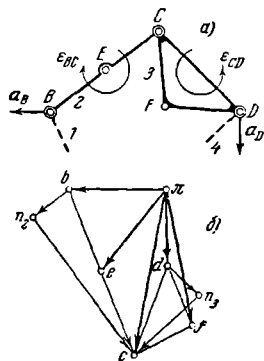


Рис. 270. Двухпроводковая группа первого вида: а) кинематическая схема; б) план ускорений.

Скорости v_{CB} и v_{CD} и угловые скорости ω_2 и ω_3 могут быть определены по построенному плану скоростей, длины l_2 и l_3 звеньев 2 и 3 определяются по схеме. Подставляя в полученные равенства длины соответствующих отрезков, взятые из плана скоростей, построенного в масштабе μ_v , и со схемы в масштабе μ_l , получаем:

$$a_{CB}^n = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn_2), \quad a_{CD}^n = \frac{\mu_v^2 (dc)^2}{\mu_l (DC)} = \mu_a (dn_3), \quad (6.39)$$

где отрезки (bc) и (dc) должны быть взяты из плана скоростей, а μ_a есть масштаб плана ускорений, дающий соответственно $1 \text{ мм} \rightarrow \mu_a \text{ м/сек}^2$.

Так же как и для скоростей, при выборе масштаба μ_a плана ускорений руководствуются удобством вычислений и графических построений. Таким образом, если необходимо определить истинную величину какого-либо ускорения, надо соответствующий отрезок в миллиметрах, взятый из плана ускорений, умножить на выбранный масштаб μ_a , показывающий, сколько единиц ускорения приходится на один мм отложенного отрезка.

Вектор ускорения a_{CB}^n направлен от точки C к точке B параллельно направлению BC , а вектор ускорения a_{CD}^n направлен от точки C к точке D параллельно направлению CD . Таким образом, нормальные ускорения a_{CB}^n и a_{CD}^n известны по величине и направлению. Векторы a_{CB}' и a_{CD}' известны только по направлению. Первый направлен перпендикулярно к направлению BC , второй — перпендикулярно к направлению DC . Таким образом, в уравнении (6.38) неизвестными остаются только величины векторов ускорений a_{CB}' и a_{CD}' , которые могут быть определены следующим графическим построением.

Выбираем в качестве полюса плана ускорений точку π (рис. 270, б) и откладываем отрезки (πb) и (πd) , представляющие в масштабе μ_a ускорения точек B и D . Далее, пользуясь уравнениями (6.39), вычисляем величины ускорений a_{CB}^n и a_{CD}^n и откладываем из точек b и d отрезки (bn_2) и (dn_3) , представляющие в масштабе μ_a эти ускорения. Из полученных точек n_2 и n_3 проводим прямые в направлениях векторов тангенциальных ускорений a_{CB}' и a_{CD}' , перпендикулярно к направлениям BC и DC . Точка пересечения c этих прямых и даст конец вектора a_C полного ускорения точки C ; т. е.

$$a_C = \mu_a (\pi c).$$

Соединив точки b и d плана с точкой c , получим векторы полных относительных ускорений a_{CB} и a_{CD} . Имеем:

$$a_{CB} = \mu_a (bc), \quad a_{CD} = \mu_a (dc).$$

Модули угловых ускорений ε_2 и ε_3 звеньев BC и DC равны

$$|\varepsilon_2| = \frac{a_{CB}'}{l_2}, \quad |\varepsilon_3| = \frac{a_{CD}'}{l_3}. \quad (6.40)$$

Подставляя в равенства (6.40) соответствующие отрезки, взятые из плана ускорений и со схемы, получаем:

$$|\varepsilon_2| = \frac{\mu_a(n_{sc})}{\mu_t(BC)}, \quad |\varepsilon_3| = \frac{\mu_a(n_{sc})}{\mu_t(DC)}.$$

Отношение масштабов μ_a/μ_t имеет размерность сек^{-2} . Направления угловых ускорений ε_2 и ε_3 могут быть определены следующим образом. Прикладывая векторы $\mathbf{a}'_{CB}$ и $\mathbf{a}'_{CD}$ в точке C (рис. 270, а), видим, что направление ε_2 совпадает с направлением вращения часовой стрелки, а направление ε_3 противоположно направлению вращения часовой стрелки.

Для определения ускорения точки E , лежащей на направлении BC звена 2 (рис. 270, а), имеем пропорцию (5.34). Из пропорции (5.34) следует, что для определения конца вектора ускорения $\mathbf{a}_E$ точки E следует отрезок (bc) плана ускорений (рис. 270, б) разделить в том же отношении, как делит точка E отрезок (BC) на схеме группы (рис. 270, а). Отрезок (πe) в масштабе μ_a и будет представлять собой полное ускорение $\mathbf{a}_E$ точки E :

$$\mathbf{a}_E = \mu_a(\pi e).$$

Для определения вектора ускорения $\mathbf{a}_F$ произвольной точки F звена 3 (рис. 270, а) пользуемся подобием фигур плана ускорений и схемы звена (§ 26,4°). На отрезке (dc) (рис. 270, б) плана ускорений строим треугольник dcf , подобный треугольнику DCF (рис. 270, а) на схеме группы, но повернутый на угол μ , определяемый по формуле (5.32). Построение треугольника dcf ведем, измеряя углы между соседними сторонами треугольника DCF и откладывая их при точках D и C . При обходе контура dcf в каком-либо направлении порядок букв должен совпадать с порядком букв контура DCF . Соединив точку f плана ускорений с точкой π , получим величину ускорения $\mathbf{a}_F$ точки F в виде отрезка (πf) , помноженного на масштаб μ_a :

$$\mathbf{a}_F = \mu_a(\pi f).$$

4°. В состав группы II класса второго вида (рис. 271, а) входит одна поступательная пара и две последовательно расположенные вращательные пары B и C . Звено 2 входит во вращательную пару B со звеном 1, принадлежащим основному механизму, а звено 3 входит в поступательную пару D со звеном 4, принадлежащим основному механизму. Известными являются вектор скорости $\mathbf{v}_B$ точки B и векторы скоростей всех точек, принадлежащих звену 4. Следовательно, известна и угловая скорость ω_4 этого звена. Звено 3 скользит по оси $x-x$ направляющей, принадлежащей звену 4. Представим звено 4 в виде плоскости S и обозначим точку плоскости S , совпадающую для заданного положения с точкой C , через C_4 . Вектор скорости $\mathbf{v}_{C_4}$ точки C_4 , как принадлежащей звену 4, известен. Тогда для опреде-

ления $\mathbf{v}_C$ — вектора скорости точки C — необходимо совместно решить два векторных уравнения (см. § 26,2°):

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}, \quad \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{C_4} + \mathbf{v}_{CC_4}, \quad (6.41)$$

откуда

$$\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB} = \mathbf{v}_{C_4} + \mathbf{v}_{CC_4}. \quad (6.42)$$

В уравнениях (6.41) и (6.42) $\mathbf{v}_{CC_4}$ есть вектор скорости точки C относительно звена 4, а $\mathbf{v}_{CB}$ — вектор скорости точки C относительно точки B .

В уравнении (6.42) векторы $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_{C_4}$ скоростей точек B и C_4 известны по величине и направлению. Векторы относительных скоростей $\mathbf{v}_{CB}$ и $\mathbf{v}_{CC_4}$ известны только по направлению. Величины скоростей $\mathbf{v}_{CB}$, $\mathbf{v}_{CC_4}$ и скорость $\mathbf{v}_C$ точки C определяются из построенного плана скоростей. Для этого выбираем (рис. 271, б) произвольную точку p за полюс плана скоростей и откладываем от нее известные нам векторы $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_{C_4}$ скоростей точек B и C_4 в виде отрезков (pb) и (pc_4) , изображающих в выбранном масштабе μ_v эти скорости. Далее, через точку b проводим прямую в направлении вектора скорости $\mathbf{v}_{CB}$, перпендикулярную к направлению BC (рис. 271, а), а через точку c_4 проводим прямую в направлении вектора $\mathbf{v}_{CC_4}$ относительной скорости, параллельную оси $x-x$ поступательной пары D . Точка c пересечения

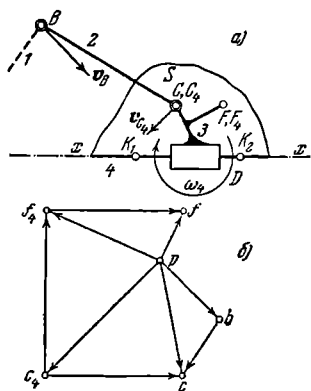


Рис. 271. Двухповодковая группа второго вида: а) кинематическая схема; б) план скоростей.

этих направлений и даст конец вектора $\mathbf{v}_C$ скорости точки C . Величина скорости $\mathbf{v}_C$ определяется по формуле

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Скорости остальных точек звена определяются так же, как в ранее рассмотренном случае. Угловую скорость ω_3 звена 2 можно найти аналогично ранее рассмотренному случаю. Угловая скорость ω_3 звена 3, входящего со звеном 4 в поступательную пару, имеет ту же угловую скорость ω_4 , как и звено 4:

$$\omega_3 = \omega_4.$$

Для определения скорости какой-либо произвольной точки F звена 3 (рис. 271, а) можно воспользоваться векторным уравнением

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_{F_4} + \mathbf{v}_{FF_4}. \quad (6.43)$$

Вектор скорости $\mathbf{v}_{F_4}$ точки F_4 , принадлежащей плоскости S , т. е. звену 4, нам известен. Скорость $\mathbf{v}_{FF_4}$ равна скорости $\mathbf{v}_{CC_4}$, так как

звено 3 относительно звена 4 движется поступательно, и следовательно, скорости всех точек звена 3 относительно звена 4 равны между собой. Поэтому уравнение (6.43) может быть переписано так:

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_{F_4} + \mathbf{v}_{CC_4}. \quad (6.44)$$

Согласно уравнению (6.44) из точки f_4 (рис. 271, б) откладываем отрезок (f_4f) , равный и параллельный отрезку (c_4c) . Результирующий отрезок (pf) и представляет собой в масштабе μ_v абсолютную скорость точки F , т. е.

$$\mathbf{v}_F = \mu_v (pf).$$

5°. Для определения ускорений группы II класса второго вида поступаем аналогично решению задачи о скоростях, т. е. предполагаем, что известны ускорение $\mathbf{a}_B$ точки B (рис. 272, а) и ускорения всех точек звена 4, а следовательно, и его угловое ускорение ϵ_4 . Со звеном 4 скрепляем плоскость S и находим на этой плоскости точку C_4 , совпадающую в данном положении с точкой C (рис. 272, а). Известными являются векторы $\mathbf{a}_B$ и $\mathbf{a}_{C_4}$ ускорений точек B и C_4 .

Ускорение точки C определяется из уравнений (см. § 26,2°)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t, \\ \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_{C_4} + \mathbf{a}_{CC_4}^k + \mathbf{a}_{CC_4}^r. \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

Относительное (релятивное) ускорение $\mathbf{a}_{CC_4}^r$ представляет собой ускорение точки C относительно плоскости S , принадлежащей звену 4. Так как ось $x-x$ направляющей вместе с плоскостью S имеет сложное вращательно-поступательное движение, то кроме относительного ускорения $\mathbf{a}_{CC_4}^r$ во второе уравнение (6.45) должно войти и кориолисово ускорение $\mathbf{a}_{CC_4}^k$. Решая совместно уравнения (6.45), получаем:

$$\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t = \mathbf{a}_{C_4} + \mathbf{a}_{CC_4}^k + \mathbf{a}_{CC_4}^r. \quad (6.46)$$

В уравнении (6.46) векторы ускорений $\mathbf{a}_B$ и $\mathbf{a}_{C_4}$ известны. Величина ускорения $\mathbf{a}_{CB}^n$ определяется по формуле

$$\mathbf{a}_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_3} = \omega_2^2 l_3 = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn),$$

где (bc) и (BC) суть отрезки, взятые из плана скоростей и со схемы механизма, а μ_l , μ_v и μ_a — масштабы длин, скоростей и ускорений. Вектор $\mathbf{a}_{CB}$ направлен параллельно направлению BC от точки C к точке B .

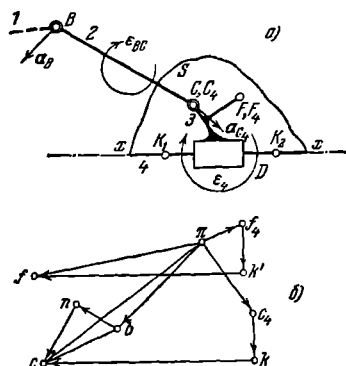


Рис. 272. Двухповодковая группа второго вида: а) кинематическая схема; б) план ускорений.

Кориолисово ускорение $a_{CC_4}^k$ по величине равно

$$a_{CC_4}^k = 2 |\omega_4| v_{CC_4} = 2 |\omega_4| \mu_v (c_4 c), \quad (6.47)$$

где отрезок $(c_4 c)$ должен быть взят из плана скоростей (рис. 271, б). Направление вектора кориолисова ускорения может быть найдено общими приемами векторной алгебры или по правилу, указанному в § 26,2°. Имеем:

$$a_{CC_4}^k = 2 \omega_4 \times v_{CC_4}. \quad (6.48)$$

Из равенства (6.48) следует, что вектор $a_{CC_4}^k$ лежит в плоскости движения механизма, и для определения его направления достаточно v_{CC_4} — вектор скорости точки C относительно плоскости S — повернуть на угол 90° в сторону вращения, обусловленного угловой скоростью ω_4 . Таким образом, вектор $a_{CC_4}^k$ перпендикулярен к оси x — x направляющей, а величина его определится по формуле (6.47) подстановкой в эту формулу заданной угловой скорости ω_4 и длины известного из плана скоростей отрезка $(c_4 c)$, изображающего в масштабе μ_v скорость v_{CC_4} .

Векторы ускорений a_{CB}^t и $a_{CC_4}^t$, входящие в уравнение (6.46), известны только по направлению. Первый вектор a_{CB}^t перпендикулярен к направлению BC , а второй вектор $a_{CC_4}^t$ параллелен оси x — x направляющей поступательной пары D . Таким образом, в уравнении (6.46) неизвестны только величины ускорений a_{CB}^t и $a_{CC_4}^t$. Для их определения строим план ускорений. Для этого (рис. 272, б) выбираем произвольную точку π за полюс плана ускорений и откладываем от нее известные ускорения точек B и C_4 в виде отрезков (πb) и (πc_4) , изображающих в выбранном масштабе μ_a ускорения a_B и a_{C_4} . Далее, определяем ускорения a_{CB}^n и $a_{CC_4}^k$ и откладываем их в масштабе μ_a в виде отрезков (bn) и $(c_4 k)$. Из точек n и k проводим прямые, имеющие направления ускорений a_{CB}^t и $a_{CC_4}^t$. Ускорение $a_{CC_4}^t$ параллельно оси x — x направляющей поступательной пары D , а ускорение a_{CB}^t перпендикулярно к направлению BC . Точка c пересечения этих двух направлений и даст конец вектора a_C полного ускорения точки C . Величина полного ускорения точки a_C равна

$$a_C = \mu_a (\pi c).$$

Величина углового ускорения ϵ_2 звена 2 равна

$$|\epsilon_2| = \frac{a_{CB}^t}{l_2} = \frac{\mu_a (nc)}{\mu_l (BC)}.$$

Направление этого ускорения определится так же, как и в ранее рассмотренной группе. Угловое ускорение ϵ_3 звена 3 равно $\epsilon_3 = \epsilon_4$, так как звено 3 входит со звеном 4 в поступательную пару.

Ускорение любой точки, лежащей на линии BC звена 2, определяется построениями, аналогичными тем, которые мы применяли при исследовании группы первого вида, т. е. применением принципа подобия фигур на плане ускорений и на схеме механизма.

Ускорение произвольной точки F , принадлежащей звену 3, может быть определено из уравнения

$$a_F = a_{F_4} + a_{FF_4}^k + a_{FF_4}^r. \quad (6.49)$$

Ускорение a_{F_4} точки F_4 , принадлежащей плоскости S , известно, ибо ускорения всех точек звена 4 являются заданными. Ускорение $a_{FF_4}^k$ равно по величине

$$a_{FF_4}^k = 2|\omega_4|v_{FF_4} = 2|\omega_4|v_{CC_4} = a_{CC_4}^k,$$

потому что $v_{FF_4} = v_{CC_4}$. Точно так же величина ускорения $a_{FF_4}^r$ равна

$$a_{FF_4}^r = a_{CC_4}^r,$$

так как движение звена 3 относительно звена 4 есть движение поступательное. Тогда уравнение (6.49) напомним так:

$$a_F = a_{F_4} + a_{CC_4}^k + a_{CC_4}^r. \quad (6.50)$$

Векторы, стоящие в правой части уравнения (6.50), известны, и следовательно, вектор a_F определится как их геометрическая сумма. Для определения этого вектора из точки f_4 (рис. 272, б) откладываем отрезок (f_4k') , равный и параллельный отрезку (c_4k) . Далее, из точки k' откладываем отрезок $(k'f)$, равный и параллельный отрезку (kc) . Результирующий отрезок (πf) и представляет собой в масштабе μ_a полное ускорение точки F :

$$a_F = \mu_a(\pi f).$$

6°. Переходим к рассмотрению группы II класса третьего вида. В состав этой группы входит одна поступательная пара C , расположенная между двумя вращательными парами B и D . Звенья 2 и 3 входят в пары B и D со звеньями 1 и 4, принадлежащими основному механизму (рис. 273, а). Заданными являются векторы скоростей v_B и v_D точек B и D . Звено 3 скользит вдоль оси $x-x$ направляющей, принадлежащей звену 2 плоскости S . Отмечаем на плоскости S точку D_2 , совпадающую с точкой D звена 3. Вектор скорости v_{D_2} точки D_2 равен (см. § 26,2°)

$$v_{D_2} = v_B + v_{D_2B}, \quad v_{D_2} = v_D + v_{D_2D}. \quad (6.51)$$

Из уравнений (6.51), получаем:

$$v_B + v_{D_2B} = v_D + v_{D_2D}. \quad (6.52)$$

В уравнении (6.52) известны скорости v_B и v_D точек B и D . Скорости v_{D_2B} и v_{D_2D} известны только по направлению: первая из них перпендикулярна к линии BD , а вторая параллельна оси $x-x$ направляющей поступательной пары C . Величины этих скоростей и вектор скорости v_{D_2} точки D_2 могут быть определены из уравнения (6.52) построением плана скоростей. Выберем произвольную точку p за начало плана (рис. 273, б) и откладываем

от нее заданные скорости v_B и v_D в виде отрезков (pb) и (pd) в выбранном масштабе μ_v . Далее через точку b проводим прямую в направлении скорости v_{D_2B} , т. е. перпендикулярную к направлению BD_2 , а через точку d — прямую в направлении скорости v_{D_2D} , т. е. параллельную оси $x-x$ направляющей. Точка пересечения d_2 этих двух прямых и даст конец вектора скорости v_{D_2} точки D_2 . Величина скорости v_{D_2} равна

$$v_{D_2} = \mu_v (pd_2).$$

Величина угловой скорости ω_2 звена 2 равна

$$|\omega_2| = \frac{v_{D_2B}}{l_2} = \frac{\mu_v (bd_2)}{\mu_l (BD_2)},$$

где l_2 — расстояние BD_2 .

Определение направления угловой скорости аналогично определению направлений угловых скоростей в ранее рассмотренных группах. Угловая скорость ω_3 звена 3 равна угловой скорости ω_2 звена 2 вследствие вхождения этих звеньев в поступательную пару, т. е.

$$\omega_3 = \omega_2. \quad (6.53)$$

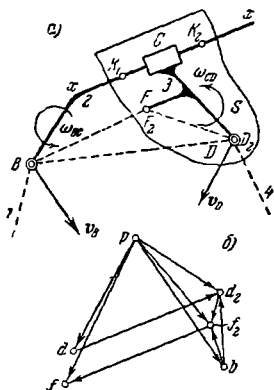


Рис. 273. Двухповодковая группа третьего вида: а) кинематическая схема; б) план скоростей.

Для нахождения вектора скорости произвольной точки F звена 3 определяем вектор скорости v_{F_2} точки F_2 звена 2, для чего строим на отрезке (bd_2) плана скоростей (рис. 273, б) треугольник bf_2d_2 , подобный треугольнику BF_2D_2 (рис. 273, а). Отрезок (pf_2) изображает в масштабе μ_v скорость точки F_2 звена 2.

Далее, составляем следующее векторное уравнение:

$$v_F = v_{F_2} + v_{FF_2},$$

или так как $v_{FF_2} = v_{DD_2}$, то

$$v_F = v_{F_2} + v_{DD_2}.$$

Откладываем из точки f_2 отрезок (f_2f) , равный отрезку (dd_2) и направленный в обратную сторону вектора скорости v_{DD_2} , так как $v_{DD_2} = -v_{D_2D}$.

Соединив точку f с точкой p , получаем вектор скорости v_F точки F в виде отрезка (pf) , т. е.

$$v_F = \mu_v (pf).$$

7°. Аналогично задаче об определении скоростей группы II класса третьего вида при определении ускорений этой группы заданными являются векторы ускорений a_B и a_D , точек B и D (рис. 274, а). Находим на плоскости S , принадлежащей звену 2, точку D_2 , совпадающую в данный момент с точкой D звена 3. Тогда для определения ускорения a_{D_2} точки D_2 имеем уравнение

$$a_{D_2} = a_B + a_{D_2B}^n + a_{D_2B}^t. \quad (6.54)$$

В свою очередь ускорение a_{D_2} точки D_2 , принадлежащей звену 2, может быть представлено в следующем виде:

$$a_{D_2} = a_D + a_{D_2D}^k + a_{D_2D}^r. \quad (6.55)$$

Решая совместно уравнения (6.54) и (6.55), получаем:

$$a_B + a_{D_2B}^n + a_{D_2B}^t = a_D + a_{D_2D}^k + a_{D_2D}^r. \quad (6.56)$$

В уравнении (6.56) ускорения a_B и a_D известны. Величины ускорений $a_{D_2B}^n$ и $a_{D_2D}^k$ определяются из уравнений, аналогичных ранее рассмотренным. Имеем:

$$a_{D_2B}^n = \frac{v_{D_2B}^2}{l_2} = \omega_2^2 l_2 = \frac{\mu_v^2 (bd_2)^2}{\mu_l (BD_2)}$$

и

$$a_{D_2D}^k = 2 | \omega_2 | v_{D_2D} = 2 | \omega_2 | \mu_v (dd_2),$$

где l_2 — расстояние BD_2 , а (bd_2) и (dd_2) — отрезки, взятые из плана скоростей. Ускорение $a_{D_2B}^n$ направлено по прямой BD_2 от точки D_2 к точке B . Ускорение $a_{D_2D}^k$ направлено перпендикулярно к оси $x-x$ направляющей

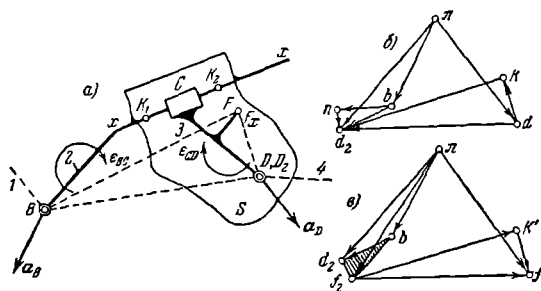


Рис. 274. Двухповодковая группа третьего вида: а) кинематическая схема; б) план ускорений для определения ускорения точки d_2 ; в) план ускорений для определения ускорения точки f .

в сторону, определяемую направлениями угловой скорости ω_2 и относительной скорости v_{D_2D} .

Ускорения $a_{D_2B}^t$ и $a_{D_2D}^t$ известны по направлению. Первый вектор перпендикулярен к направлению BD_2 , а второй вектор параллелен оси $x-x$ направляющей. Таким образом, в уравнении (6.56) неизвестными являются только величины ускорений $a_{D_2B}^t$ и $a_{D_2D}^t$. Для их определения строим план ускорений. Выбираем за полюс плана ускорений точку π (рис. 274, б) и откладываем из этой точки заданные ускорения a_B и a_D в выбранном масштабе μ_a в виде отрезков (πb) и (πd) . Далее, откладываем ускорение $a_{D_2B}^n$ в масштабе μ_a в виде отрезка (bn) в направлении, параллельном BD_2 от точки D_2 к точке B . Ускорение $a_{D_2D}^k$ откладываем в виде отрезка (dk) в том же масштабе μ_a . Далее, из точки π проводим прямую в направлении тангенциального ускорения $a_{D_2B}^t$, а через точку k прямую в направлении относительного ускорения $a_{D_2D}^t$. Точка d_2 пересечения этих двух прямых и даст конец вектора полного ускорения a_{D_2} точки D_2 звена 2.

Величина углового ускорения ε_2 звена 2 равна

$$|\varepsilon_2| = \frac{a_{D_2B}^t}{l_2} = \frac{\mu_a (nd_2)}{\mu_l (BD_2)},$$

где l_2 — расстояние BD_2 .

Направление ускорения ϵ_2 определится аналогично ранее рассмотренным случаям. Угловое ускорение ϵ_3 звена 3 равно угловому ускорению ϵ_2 , так как звенья 3 и 2 входят в поступательную пару. Имеем:

$$\epsilon_3 = \epsilon_2.$$

Для определения ускорения произвольной точки F звена 3 поступаем следующим образом. По известным ускорениям точек B и D_3 находим ускорение a_{F_2} точки F_2 , для чего строим на отрезке (bd_2) треугольник bf_2d_2 (рис. 274, в), подобный треугольнику BF_2D_2 (рис. 274, а). Точка f_2 является концом вектора ускорения a_{F_2} точки F_2 звена 2. Ускорение точки F звена 3 определится из уравнения

$$a_F = a_{F_2} + a_{FF_2}^k + a_{FF_2}^r. \quad (6.57)$$

Относительное ускорение $a_{FF_2}^r$ точки F относительно точки F_2 равно относительному ускорению $a_{DD_2}^r$ точки D относительно точки D_2 . Точно так же равны кориолисовы ускорения, т. е.

$$a_{FF_2}^k = a_{DD_2}^k.$$

Принимая это во внимание, уравнение (6.57) напомним так:

$$a_F = a_{F_2} + a_{DD_2}^k + a_{DD_2}^r.$$

Отложив (рис. 274, в) из точки f_2 отрезок (f_2k') и из точки k' отрезок $(k'f)$, соответственно равные и параллельные отрезки (d_2k) и (kd) (рис. 274, б),

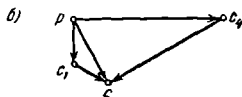
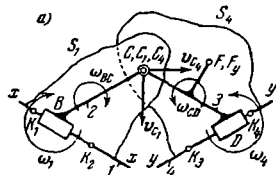


Рис. 275. Двухповодковая группа четвертого вида: а) кинематическая схема; б) план скоростей.

но обратные по знаку, так как $a_{DD_2}^r = -a_{D_2D}^r$ и $a_{DD_2}^k = -a_{D_2D}^k$, или сразу их геометрическую сумму в виде отрезка $(f_2f) = (d_2d)$, получим точку f , которую соединяем с точкой π . Отрезок (πf) представляет в масштабе μ_a полное ускорение точки F звена 3, т. е.

$$a_F = \mu_a (\pi f).$$

8°. Переходим к рассмотрению группы II класса четвертого вида. В состав группы входят две поступательные пары B и D и одна вращательная пара C , расположенная между ними (рис. 275, а).

Звенья 2 и 3 входят в пары B и D со звеньями 1 и 4, принадлежащими основному механизму. Звенья 2 и 3 скользят вдоль осей $x-x$ и $y-y$ направляющих, принадлежащих звеньям 1 и 4.

Заданными являются скорости всех точек звеньев 1 и 4, следовательно, известны угловые скорости ω_1 и ω_4 этих звеньев.

Плоскость S_1 принадлежит звену 1, а плоскость S_4 звену 4. Отмечаем на этих плоскостях точки C_1 и C_4 , совпадающие в данный момент с точкой C группы. Векторы v_{C_1} и v_{C_4} скоростей точек C_1 и C_4 являются известными. Тогда уравнения для определения скорости v_C будут

$$v_C = v_{C_1} + v_{CC_1}, \quad v_C = v_{C_4} + v_{CC_4}. \quad (6.58)$$

Решая их совместно, получаем:

$$v_{C_1} + v_{CC_1} = v_{C_4} + v_{CC_4}. \quad (6.59)$$

В равенстве (6.59) известны по величине и направлению векторы v_{C_1} и v_{C_4} . Далее, известны направления векторов v_{CC_1} и v_{CC_4} . Скорость v_{CC_1} точки C относительно плоскости S_1 параллельна оси $x-x'$ направляющей, принадлежащей звену 1, а скорость v_{CC_4} точки C относительно плоскости S_4 параллельна оси $y-y'$ направляющей, принадлежащей звену 4. Векторы v_{CC_1} , v_{CC_4} и вектор скорости v_C точки C могут быть определены построением плана скоростей (рис. 275, б) аналогично ранее рассмотренным группам.

Угловая скорость ω_2 звена 2 определится из условия, что это звено входит со звеном 1 в поступательную пару, и следовательно, угловая скорость ω_2 этого звена равна известной угловой скорости ω_1 звена 1, т. е. $\omega_2 = \omega_1$. Точно так же $\omega_3 = \omega_4$, так как звено 3 входит в поступательную пару со звеном 4.

Скорость произвольной точки F звена 3 (рис. 275, а) определится из уравнения

$$v_F = v_{F_4} + v_{FF_4} = v_{F_4} + v_{CC_4},$$

так как скорости всех точек звена 3 относительно звена 4 равны между собой, т. е.

$$v_{FF_4} = v_{CC_4}.$$

Нахождение скорости точки F на плане скоростей может быть сделано по способу, указанному для группы второго вида.

9°. В группе II класса четвертого вида (рис. 276, а) известны ускорения всех точек звеньев 1 и 4 и, следовательно, известны угловые ускорения ϵ_1 и ϵ_2 этих звеньев. Кроме того, так как план скоростей группы построен (рис. 275, б), то известны и скорости всех звеньев группы. Со звеном 1 соединяем плоскость S_1 и находим на ней точку C_1 , совпадающую в данный момент с точкой C . Точно так же со звеном 4 соединяем плоскость S_4 и находим на ней точку C_4 , совпадающую в данный момент с точкой C . Ускорение a_C точки C может быть определено совместным решением уравнений

$$a_C = a_{C_1} + a_{CC_1}^k + a_{CC_1}^r, \quad a_C = a_{C_4} + a_{CC_4}^k + a_{CC_4}^r. \quad (6.60)$$

Из этих уравнений получаем:

$$a_{C_1} + a_{CC_1}^k + a_{CC_1}^r = a_{C_4} + a_{CC_4}^k + a_{CC_4}^r. \quad (6.61)$$

В уравнении (6.61) ускорения a_{C_1} и a_{C_4} точек C_1 и C_4 известны. Величины ускорений $a_{CC_1}^k$ и $a_{CC_4}^k$ определяются из уравнений

$$a_{CC_1}^k = 2|\omega_1|v_{CC_1} = 2|\omega_1|\mu_v(c_1c), \quad a_{CC_4}^k = 2|\omega_4|v_{CC_4} = 2|\omega_4|\mu_v(c_4c),$$

где (c_1c) и (c_4c) — отрезки, взятые из плана скоростей (рис. 275, б).

Направления векторов ускорений Кориолиса определяются по вышеизложенному правилу (см. § 26,2°). Направления ускорений $a_{CC_1}^r$ и $a_{CC_4}^r$ также известны. Первое из них параллельно оси $x-x'$, а второе оси $y-y'$. Таким образом, в уравнении (6.61) неизвестны только величины ускорений $a_{CC_1}^r$ и $a_{CC_4}^r$. Ускорения $a_{CC_1}^r$, $a_{CC_4}^r$ и ускорение a_C могут быть найдены построением плана ускорений (рис. 276, б).

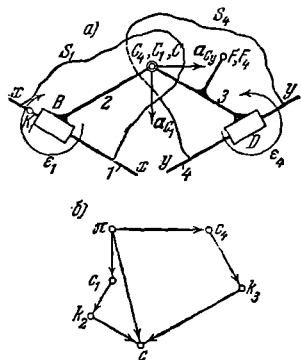


Рис. 276. Двухповодковая группа четвертого вида: а) кинематическая схема; б) план ускорений.

Угловое ускорение ϵ_2 звена 2 равно $\epsilon_2 = \epsilon_1$, так как звено 2 входит со звеном 1 в поступательную пару. Точно так же угловое ускорение ϵ_3 звена 3 равно $\epsilon_3 = \epsilon_4$.

Для определения ускорения a_F произвольной точки F звена 3 (рис. 276, а) можно воспользоваться уравнением

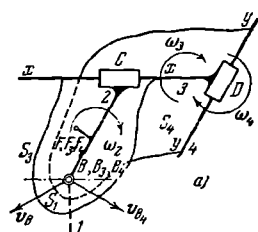
$$a_F = a_{F_4} + a_{FF_4}^k + a_{FF_4}^r = a_{F_4} + a_{CC_4}^k + a_{CC_4}^r, \quad (6.62)$$

потому что $a_{FF_4}^k = a_{CC_4}^k$ и $a_{FF_4}^r = a_{CC_4}^r$.

Графическое решение уравнения (6.62) может быть проведено методом, указанным для группы второго вида (§ 32,5°).

10°. Переходим к рассмотрению группы II класса пятого вида. В состав группы входят две последовательно расположенные поступательные пары C и D и одна вращательная пара B (рис. 277, а).

Звенья 2 и 3 входят в пары со звеньями 1 и 4 основного механизма. Известны скорость v_B точки B и скорость всех точек звена 4, следовательно,



известна и угловая скорость ω_4 этого звена. Соединим жестко со звеном 4 плоскость S_4 , а с осью $x-x$ направляющей, принадлежащей звену 3, плоскость S_3 . Находим, далее, на этих плоскостях точки B_3 и B_4 , совпадающие в данном положении с точкой B группы. Уравнения для определения скорости v_{B_3} точки B_3 имеют вид

$$v_{B_3} = v_B + v_{B_3B}, \quad v_{B_3} = v_{B_4} + v_{B_3B_4}. \quad (6.63)$$

Решая их совместно, получаем:

$$v_B + v_{B_3B} = v_{B_4} + v_{B_3B_4}. \quad (6.64)$$

В уравнении (6.64) известны по величине и направлению векторы v_B и v_{B_4} скоростей точек B и B_4 .

Далее, известны направления скоростей v_{B_3B} и $v_{B_3B_4}$. Первая параллельна оси $x-x$ направляющей, принадлежащей звену 3, а вторая параллельна оси $y-y$ направляющей, принадлежащей звену 4. Величины этих скоростей и скорость v_{B_3} точки B_3 могут быть определены построением плана скоростей (рис. 277, б).

Рис. 277. Двухповодковая группа пятого вида: а) кинематическая схема; б) план скоростей.

Выбираем произвольную точку p за полюс плана скоростей (рис. 277, б) и откладываем от нее в выбранном масштабе μ_v отрезки (pb) и (pb_4) , изображающие скорости v_B и v_{B_4} . Через точку b_4 проводим прямую в направлении относительной скорости $v_{B_3B_4}$, параллельную оси $y-y$, а через точку b — в направлении относительной скорости v_{B_3B} , параллельную оси $x-x$. Точка b_3 пересечения этих двух прямых и даст конец вектора скорости v_{B_3} точки B_3 .

Угловая скорость ω_3 звена 3 равна известной угловой скорости ω_4 звена 4, так как звено 3 входит с этим звеном в поступательную пару, т. е.

$$\omega_3 = \omega_4.$$

Точно так же угловая скорость ω_2 звена 2 равна угловой скорости ω_3 звена 3, так как звено 2 входит со звеном 3 в поступательную пару. Следовательно,

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4.$$

Для определения скорости произвольной точки F , принадлежащей звену 2 (рис. 277, а), составляем уравнение

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_{F_3} + \mathbf{v}_{FF_3} = \mathbf{v}_{F_4} + \mathbf{v}_{F_3F_4} + \mathbf{v}_{FF_3} = \mathbf{v}_{F_4} + \mathbf{v}_{B_3B_4} + \mathbf{v}_{BB_3}, \quad (6.65)$$

так как $\mathbf{v}_{F_3} = \mathbf{v}_{F_4} + \mathbf{v}_{F_3F_4}$, $\mathbf{v}_{F_3F_4} = \mathbf{v}_{B_3B_4}$ и $\mathbf{v}_{FF_3} = -\mathbf{v}_{B_3B} = \mathbf{v}_{BB_3}$.

Скорость $\mathbf{v}_{F_4}$ нам известна, ибо известны скорости всех точек звена 4, а скорости $\mathbf{v}_{B_3B_4}$ и $\mathbf{v}_{B_3B}$ могут быть определены из ранее построенного плана скоростей (рис. 277, б). Складывая геометрически эти скорости, получаем результирующую скорость $\mathbf{v}_F$ точки F (на рис. 277, б это построение не показано).

11°. Переходим к задаче об ускорениях звеньев группы II класса пятого вида (рис. 278, а). Известны ускорения всех точек звена 4, а следовательно, и угловое ускорение ϵ_4 этого звена, и ускорение $\mathbf{a}_B$ точки B звена 2. Кроме того, так как построен план скоростей группы (рис. 277, б), то известны скорости всех звеньев группы. На плоскости S_3 отмечаем точку B_3 , совпадающую в данный момент с точкой B . Далее, на плоскости S_4 отмечаем и точку B_4 , совпадающую в данный момент с точкой B .

Для определения ускорений группы составляем уравнения

$$\mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{B_3B}^k + \mathbf{a}_{B_3B}^r, \quad (6.66)$$

$$\mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{a}_{B_4} + \mathbf{a}_{B_3B_4}^k + \mathbf{a}_{B_3B_4}^r. \quad (6.67)$$

Решая их совместно, получаем:

$$\mathbf{a}_{B_3B_4}^k + \mathbf{a}_{B_3B}^r = \mathbf{a}_{B_4} + \mathbf{a}_{B_3B_4}^k + \mathbf{a}_{B_3B}^r. \quad (6.68)$$

В уравнении (6.68) ускорения $\mathbf{a}_B$ и $\mathbf{a}_{B_4}$ известны. Величины ускорений $\mathbf{a}_{B_3B}^k$ и $\mathbf{a}_{B_3B_4}^k$ определяются из уравнений

$$\mathbf{a}_{B_3B}^k = 2|\omega_4|v_{B_3B} = 2|\omega_4|\mu_v(bb_3)$$

и

$$\mathbf{a}_{B_3B_4}^k = 2|\omega_4|v_{B_3B_4} = 2|\omega_4|\mu_v(b_4b_3),$$

где (bb_3) и (b_4b_3) суть отрезки, взятые из плана скоростей (рис. 277, б). Направления этих ускорений определяются обычными приемами. Направления

ускорений $\mathbf{a}_{B_3B}^r$ и $\mathbf{a}_{B_3B_4}^r$ также известны. Первое из них параллельно оси $x-x$, а второе параллельно оси $y-y$. Таким образом, в уравнении (6.68) неизвестными являются только величины ускорений $\mathbf{a}_{B_3B}^r$ и $\mathbf{a}_{B_3B_4}^r$. Эти величины могут быть определены построением плана ускорений (рис. 278, б).

Выбираем произвольную точку π за полюс плана ускорений (рис. 278, б) и откладываем из нее отрезки (πb) и (πb_4) , представляющие в выбранном масштабе μ_a ускорения $\mathbf{a}_B$ и $\mathbf{a}_{B_4}$. Далее, определяем ускорения $\mathbf{a}_{B_3B}^k$ и $\mathbf{a}_{B_3B_4}^k$ и откладываем первое из точки b в виде отрезка (bk_2) , а второе из точки b_4 в виде отрезка (b_4k_3) в том же масштабе μ_a . Из точек k_2 и k_3 проводим прямые в направлениях ускорений $\mathbf{a}_{B_3B}^r$ и $\mathbf{a}_{B_3B_4}^r$, параллельно осям $x-x$ и $y-y$. Точка b_3 пересечения этих прямых и даст конец вектора полного ускорения $\mathbf{a}_{B_3}$ точки B_3 звена 3, равного

$$\mathbf{a}_{B_3} = \mu_a(\pi b_3).$$

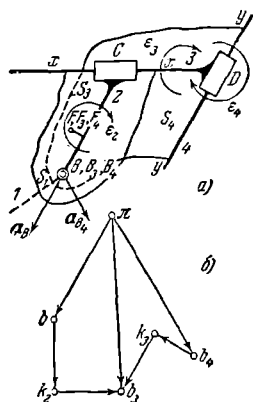


Рис. 278. Двухповодковая группа пятого вида: а) кинематическая схема; б) план ускорений.

Угловое ускорение ϵ_3 звена 3 равно $\epsilon_3 = \epsilon_4$, так как звено 3 входит со звеном 4 в поступательную пару. Точно так же угловое ускорение ϵ_3 равно ϵ_3 , так как звенья 2 и 3 также входят в поступательную пару, т. е.

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4. \quad (6.69)$$

Для определения ускорения a_F произвольной точки F звена 2 (рис. 278, б) составляем уравнение

$$a_F = a_{F_3} + a_{FF_3}^k + a_{FF_3}^r = a_{F_4} + a_{F_3F_4}^k + a_{F_3F_4}^r + a_{FF_3}^k + a_{FF_3}^r. \quad (6.70)$$

Так как

$$a_{F_3} = a_{F_4} + a_{F_3F_4}^k + a_{F_3F_4}^r, \quad a_{FF_3}^k = -a_{B_3B}^k = a_{BB_3}^k, \quad a_{FF_3}^r = -a_{B_3B}^r = a_{BB_3}^r,$$

то уравнение (6.70) будет иметь вид

$$a_F = a_{F_4} + a_{B_3B_4}^k + a_{B_3B_4}^r + a_{BB_3}^k + a_{BB_3}^r. \quad (6.71)$$

В уравнении (6.71) ускорение a_{F_4} точки F_4 известно. Ускорения $a_{B_3B_4}^k$, $a_{B_3B_4}^r$, $a_{BB_3}^k$ и $a_{BB_3}^r$ могут быть определены из построенного плана ускорений (рис. 278, б). Таким образом, все члены правой части уравнения (6.71) известны, и вектор полного ускорения a_F точки F определяется их геометрическим сложением. (На рис. 278, б это построение не показано.)

12°. **Пример.** На рис. 279, а показан шестизвенный механизм II класса, кинематическая схема которого построена в масштабе

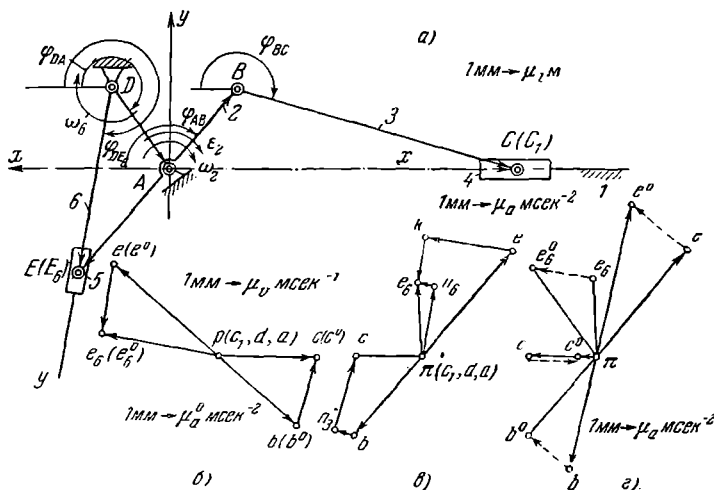


Рис. 279. Шестизвенный механизм: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) план ускорений в перманентном движении; г) то же в начальном движении.

1 м.м. $\rightarrow$ 0,1 м. Требуется определить скорости и ускорения звеньев механизма, если кривошип 2 вращается с угловой скоростью ω_2 и с угловым ускорением ϵ_2 . Механизм образован присоединением к кривошипу 2 двух групп II класса: группы BC второго вида, состоящей

из звеньев 3 и 4, и группы ED третьего вида, состоящей из звеньев 5 и 6. Точки звена I и звена 6, совпадающие в рассматриваемом положении с точками C и E , обозначим через C_1 и E_6 .

Для группы BC согласно уравнениям (6.41) и (6.42) имеем следующую систему уравнений для определения скоростей звеньев группы:

$$v_C = v_B + v_{CB}, \quad v_C = v_{C_1} + v_{CC_1}$$

или

$$v_B + v_{CB} = v_{C_1} + v_{CC_1}.$$

Так как $v_{C_1} = 0$, то

$$v_C = v_B + v_{CB} = v_{CC_1}.$$

Для определения ускорений звеньев группы BC согласно уравнениям (6.45) и (6.46) имеем систему уравнений:

$$a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t, \quad a_C = a_{C_1} + a_{CC_1}^k + a_{CC_1}^r$$

или

$$a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t = a_{C_1} + a_{CC_1}^k + a_{CC_1}^r.$$

Так как ось $x - x$ направляющей неподвижна, то и кориолисово ускорение $a_{CC_1}^k = 0$. Тогда окончательное уравнение для определения ускорений звеньев группы BC будет иметь вид

$$a_C = a_{CC_1}^r = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t.$$

Для группы ED согласно уравнениям (6.51), (6.52) и (6.53) будем иметь следующую систему уравнений для определения скоростей звеньев группы:

$$v_{E_6} = v_D + v_{E_6D}, \quad v_{E_6} = v_E + v_{E_6E},$$

или

$$v_D + v_{E_6D} = v_E + v_{E_6E}.$$

Так как $v_D = 0$, то

$$v_{E_6} = v_{E_6D} = v_E + v_{E_6E}.$$

Для определения ускорений звеньев группы ED согласно уравнениям (6.54), (6.55) и (6.56) будем иметь систему уравнений:

$$a_{E_6} = a_D + a_{E_6D}^n + a_{E_6D}^t, \quad a_{E_6} = a_E + a_{E_6E}^k + a_{E_6E}^r$$

или

$$a_D + a_{E_6D}^n + a_{E_6D}^t = a_E + a_{E_6E}^k + a_{E_6E}^r.$$

Так как $a_D = 0$, то

$$a_{E_6} = a_{E_6D}^n + a_{E_6D}^t = a_E + a_{E_6E}^k + a_{E_6E}^r.$$

Рассмотрим *перманентное движение* механизма (§ 30), т. е. движение, при котором угловая скорость ω_2 кривошипа 2 постоянна, т. е. $\omega_2 = \text{const}$.

Для построения плана скоростей в перманентном движении из произвольной точки p (рис. 279, б) откладываем в масштабе μ_v отрезки (pb) и (pe) , представляющие собой скорости v_B и v_E точек B и E . Величины этих скоростей соответственно равны

$$v_B = |\omega_2| l_{AB} = |\omega_2| \mu_l (AB) = \mu_v (pb),$$

$$v_E = |\omega_2| l_{AE} = |\omega_2| \mu_l (AE) = \mu_v (pe),$$

где μ_l — масштаб длин звеньев механизма. Если отрезки (pb) и (pe) выбрать так, чтобы имели место равенства $(pb) = (AB)$ и $(pe) = (AE)$, то масштаб μ_v скоростей будет равен

$$\mu_v = \omega_2 \mu_l.$$

Отрезки (pb) и (pe) откладываем в направлении, перпендикулярном к направлению BE звена 2. Далее, через точку b проводим прямую в направлении скорости v_{CB} , перпендикулярную к направлению BC звена 3, а через точку p — прямую в направлении скорости v_C , параллельную оси $x-x$ направляющей. Точка c пересечения двух проведенных прямых даст конец вектора скорости v_C точки C . Величина скорости v_C будет равна

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Так как скорости v_A и v_D равны нулю, то точки a и d , их изображающие, совпадают с началом плана скоростей. Далее, через точку e проводим прямую в направлении скорости v_{E_6E} , параллельную оси Dy направляющей, принадлежащей звену 6, а через точку p — в направлении скорости v_{E_6D} , перпендикулярную к Dy . Точка e_6 пересечения двух проведенных прямых дает конец вектора скорости v_{E_6} точки E_6 , принадлежащей звену 6.

Величина скорости v_{E_6} равна

$$v_{E_6} = \mu_v (pe_6).$$

Для построения плана ускорений в перманентном движении от произвольной точки π (рис. 279, в) откладываем в масштабе μ_a отрезки (πb) и (πe) , представляющие собой ускорения a_B и a_E . Так как мы рассматриваем перманентное движение механизма, то ускорения a_B и a_E точек B и E являются только нормальными и равными

$$a_B = \omega_2^2 l_{AB} = \omega_2^2 \mu_l (AB) = \mu_a (\pi b),$$

$$a_E = \omega_2^2 l_{AE} = \omega_2^2 \mu_l (AE) = \mu_a (\pi e).$$

Выбирая отрезки (πb) и (πe) , соответственно равными отрезкам (AB) и (AE) , получаем масштаб μ_a ускорений равным $\mu_a = \omega_2^2 \mu_l$.

Так как ускорения a_B и a_E точек B и E в перманентном движении суть нормальные ускорения, то отрезки (πb) и (πe) откладываем параллельно направлению BE оси звена 2. Ускорение a_B направлено

от точки B к точке A , а ускорение a_E от точки E к точке A . Далее, через точку b проводим прямую, параллельную направлению BC звена 3, и откладываем на ней отрезок (bn_3) , представляющий ускорение a_{CB}^n . Вектор a_{CB}^n направлен от точки C к точке B и равен

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_{CB}} = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \omega_3^2 \mu_l \frac{(bc)^2}{BC} = \mu_a (bn_3).$$

Так как, по предыдущему, $\mu_a = \omega_3 \mu_v = \omega_3^2 \mu_l$, то отрезок (bn_3) равен

$$(bn_3) = \frac{(bc)^2}{BC}.$$

Через точку n_3 проводим прямую, имеющую направление ускорения a_{CB}^t , перпендикулярную к направлению BC . Далее, через точку π проводим прямую в направлении ускорения $a_{CC_1}^r$, параллельную оси $x-x$. Точка c пересечения двух проведенных прямых дает конец вектора ускорения a_C точки C . Величина ускорения a_C равна

$$a_C = \mu_a (\pi c) = \omega_3^2 \mu_l (\pi c).$$

Далее, через точку e проводим прямую в направлении кориолисова ускорения $a_{E_6E}^k$, перпендикулярную к оси Dy . Величина ускорения $a_{E_6E}^k$ определится из уравнения

$$a_{E_6E}^k = 2 |\omega_6| v_{E_6E} = 2 \frac{v_{E_6}}{l_{DE}} v_{E_6E} = 2 \frac{\mu_v^2}{\mu_l} \frac{(pe_6)(ee_6)}{(DE_6)} = \mu_a (ek).$$

Полученный отрезок (ek) откладываем на проведенной прямой в направлении, определяемом правилом, указанным в § 26, 2°.

Через точку k проводим прямую в направлении ускорения $a_{E_6E}^r$, параллельную оси Dy . Далее, из точки π параллельно оси Dy откладываем отрезок (πn_6) , представляющий нормальное ускорение $a_{E_6D}^n$, равное по величине

$$a_{E_6D}^n = \frac{v_{E_6D}^2}{l_{ED}} = \frac{\mu_v^2 (pe_6)^2}{\mu_l (E_6D)} = \omega_3^2 \mu_l \frac{(pe_6)^2}{E_6D} = \mu_a (\pi n_6).$$

Вектор $a_{E_6D}^n$ направлен от точки E_6 к точке D .

Через полученную точку n_6 проводим прямую в направлении ускорения $a_{E_6D}^t$, которое перпендикулярно к оси Dy . Точка e_6 пересечения прямых, проведенных в направлениях ускорений $a_{E_6E}^r$ и $a_{E_6D}^t$, определит конец вектора полного ускорения a_{E_6} .

Величина ускорения a_{E_6} будет равна

$$a_{E_6} = \mu_a (\pi e_6) = \omega_3^2 \mu_l (\pi e_6).$$

Для учета влияния углового ускорения ϵ_3 на кинематику механизма рассмотрим *начальное движение* механизма. Как это было показано

в § 30, в этом движении скорости всех звеньев механизма равны нулю. Следовательно, для изучения начального движения механизма надо построить только план ускорений в начальном движении. Так как в начальном движении все нормальные и кориолисовы ускорения равны нулю, то уравнения для построения плана ускорений будут иметь следующий вид.

Для группы BC

$$a_C^n = a_{CC_1}^n = a_B^n + a_{CB}^{tn}$$

и для группы DE

$$a_{E_0}^n = a_{E_0D}^n = a_E^n + a_{E_0E}^{tn}.$$

Индексом «н» обозначены векторы ускорений в начальном движении.

Для определения ускорений звеньев механизма в начальном движении можно воспользоваться уже построенным планом скоростей (рис. 279, б), так как векторы тангенциальных и релятивных ускорений параллельны соответствующим векторам скоростей. Имеем:

$$a_B^{tn} \parallel v_B, \quad a_{CB}^{tn} \parallel v_{CB}, \quad a_{CC_1}^{tn} \parallel v_{CC_1}, \\ a_{E_0}^n \parallel v_{E_0}, \quad a_{E_0D}^{tn} \parallel v_{E_0D}, \quad a_E^n \parallel v_E \quad \text{и} \quad a_{E_0E}^{tn} \parallel v_{E_0E}.$$

Если точку p (рис. 279, б) выбрать за начало плана ускорений в начальном движении, а отрезок, изображающий вектор ускорения a_B^n , принять равным $(pb^0) = (pb)$, то будем иметь:

$$a_B^n = \mu_a^0 (pb^0) = \mu_a^0 (pb),$$

где μ_a^0 — масштаб плана ускорений в начальном движении. Соответственно получим:

$$a_C^n = a_{CC_1}^n = \mu_a^0 (pc^0) = \mu_a^0 (pc), \quad a_{CB}^n = \mu_a^0 (b^0c^0) = \mu_a^0 (bc), \\ a_{E_0}^n = a_{E_0D}^n = \mu_a^0 (pe_0^0) = \mu_a^0 (pe_0), \quad a_E^n = \mu_a^0 (pe^0) = \mu_a^0 (pe), \\ a_{E_0E}^{tn} = \mu_a^0 (e^0e_0^0) = \mu_a^0 (ee_0).$$

Таким образом, при определении ускорений звеньев механизма в начальном движении не требуется построения еще одного плана ускорений, а можно пользоваться построенным ранее планом скоростей. Из условий

$$a_B^n = a_B^t = \varepsilon_2 \mu_l (AB) = \mu_a^0 (pb^0), \quad (pb^0) = (pb) = (AB)$$

следует, что масштаб μ_a^0 равен

$$\mu_a^0 = \varepsilon_2 \mu_l = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} \mu_a.$$

так как $\mu_a = \omega_2^2 \mu_l$

На рис. 279, з показаны в масштабе μ_a сплошными линиями отрезки (πc) , (πb) , (πe) и (πe_6) ускорений точек C , B , E и E_6 в перманентном движении. К ним прибавлены отрезки (cc^0) , (bb^0) , (ee^0) и $(e_6e_6^0)$, показанные штриховыми линиями, представляющие собою в масштабе μ_a ускорения a_C^H , a_B^H , a_E^H , $a_{E_6}^H$. Истинные ускорения точек C , B , E и E_6 с учетом неравномерности вращения ведущего звена равны (рис. 279, з)

$$a_C = \mu_a (\pi c^0), \quad a_B = \mu_a (\pi b^0), \quad a_E = \mu_a (\pi e^0), \quad a_{E_6} = \mu_a (\pi e_6^0).$$

При инженерных исследованиях кинематики механизмов удобно принимать угловую скорость ω_2 ведущего звена в перманентном движении равной $\omega_2 = 1 \text{ сек}^{-1}$. Тогда масштабы μ_l , μ_v и μ_a будут удовлетворять условию

$$\mu_l = \mu_v = \mu_a.$$

После построения планов скоростей и ускорений в предположении $\omega_2 = 1 \text{ сек}^{-1}$ легко определить истинные скорости и ускорения по заданным ω_2 и ϵ_2 (см. § 30). Построенные на рис. 279, б и в планы скоростей и ускорений можно рассматривать как планы аналогов скоростей и ускорений.

13°. Покажем теперь, как тот же пример решить численным методом.

Наметим сначала неподвижную систему координат. Так как вращение ведущего звена AB задано по движению часовой стрелки, то надо воспользоваться левой системой координат. Начало координат совместим с точкой A (рис. 279, а), ось Ax направим влево, ось Ay — вертикально вверх.

Схема заданного механизма состоит из замкнутых треугольников $ABCA$ и $AEDA$. Задаемся направлениями сторон как векторов (рис. 279, а). В треугольнике $ABCA$ известны длины сторон AB и BC , угол φ_{AB} наклона ведущего звена AB задан, угол φ_{BC} наклона шатуна BC и длину стороны AC_1 следует определить, угол $\varphi_{AC_1} = 180^\circ$.

В треугольнике $AEDA$ известна длина стороны AE , угол $\varphi_{AE} = 180^\circ + \varphi_{AB}$, известны длина стороны DA и угол φ_{DA} . Следует определить длину стороны DE_6 и угол φ_{DE_6} .

Составляем уравнения замкнутости и уравнения их проекций. Обходим контур треугольников по движению часовой стрелки. Имеем:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC_1}, \quad \overline{AE} = \overline{AD_6} - \overline{DA}. \quad (A)$$

Спроектируем теперь векторы замкнутых треугольников на оси координат

$$\left. \begin{aligned} AB \cos \varphi_{AB} + BC \cos \varphi_{BC} &= AC_1 \cos \varphi_{AC_1} \\ AB \sin \varphi_{AB} + BC \sin \varphi_{BC} &= AC_1 \sin \varphi_{AC_1} \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

$$\left. \begin{aligned} AE \cos \varphi_{AE} &= DE_6 \cos \varphi_{DE_6} - DA \cos \varphi_{DA} \\ AE \sin \varphi_{AE} &= DE_6 \sin \varphi_{DE_6} - DA \sin \varphi_{DA} \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Воспользовавшись заданными величинами, подставим их в написанные уравнения проекций

$$\left. \begin{aligned} AB \cos \varphi_{AB} + BC \cos \varphi_{BC} &= AC_1 \cos 180^\circ = -AC_1, \\ AB \sin \varphi_{AB} + BC \sin \varphi_{BC} &= AC_1 \sin 180^\circ = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma)$$

$$\left. \begin{aligned} AE \cos (180^\circ + \varphi_{AB}) &= -AE \cos \varphi_{AB} = \\ &= DE_6 \cos \varphi_{DE_6} - DA \cos \varphi_{DA}, \\ AE \sin (180^\circ + \varphi_{AB}) &= -AE \sin \varphi_{AB} = \\ &= DE_6 \sin \varphi_{DE_6} + DA \sin \varphi_{DA}. \end{aligned} \right\} \quad (\Delta)$$

Из уравнений (Г) получаем

$$\sin \varphi_{BC} = -\frac{AB}{BC} \sin \varphi_{AB}. \quad (\text{Е})$$

Длина стороны AC_1 после этого определяется из первого уравнения (Г).

Для определения угла φ_{DE_6} воспользуемся уравнениями (Д)

$$\operatorname{tg} \varphi_{DE_6} = \frac{-AE \sin \varphi_{AB} + DA \sin \varphi_{DA}}{-AE \cos \varphi_{AB} + DA \cos \varphi_{DA}}. \quad (\text{Ж})$$

Длину стороны DE_6 можно теперь определить из любого уравнения (Д).

Рассматривая перманентное движение, будем определять аналоги скоростей и ускорений, дифференцируя уравнения (Г) и (Д) по обобщенной координате φ_{AB} :

$$\left. \begin{aligned} -AB \sin \varphi_{AB} - BC \sin \varphi_{BC} i_{32} &= -\tilde{v}_{CC_1}, \\ AB \cos \varphi_{AB} + BC \cos \varphi_{BC} i_{32} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma')$$

$$\left. \begin{aligned} AE \sin \varphi_{AB} &= \tilde{v}_{EE_6} \cos \varphi_{DE_6} - DE_6 \sin \varphi_{DE_6} i_{62}, \\ -AE \cos \varphi_{AB} &= \tilde{v}_{EE_6} \sin \varphi_{DE_6} + DE_6 \cos \varphi_{DE_6} i_{62}. \end{aligned} \right\} \quad (\Delta')$$

Здесь $i_{32} = \omega_{BC}/\omega_{AB}$, $i_{62} = \omega_{DE_6}/\omega_{AB}$, $\tilde{v}_{CC_1}$ и $\tilde{v}_{EE_6}$ — аналоги скорости точки C в движении относительно точки C_1 и в движении точки E относительно точки E_6 .

Уравнения (Г') и (Д') являются системами линейных уравнений с неизвестными i_{32} и $\tilde{v}_{CC_1}$ в первой системе и с неизвестными i_{62} и $\tilde{v}_{EE_6}$ во второй. Решение этих уравнений никаких трудностей не представляет.

Для определения аналогов ускорения дифференцируем по обобщенной координате φ_{AB} уравнения (Г') и (Д')

$$\left. \begin{aligned} -AB \cos \varphi_{AB} - BC \cos \varphi_{BC} i_{32}^2 - BC \sin \varphi_{BC} i_{32}' &= -\tilde{a}_{CC_1}', \\ -AB \sin \varphi_{AB} - BC \sin \varphi_{BC} i_{32}^2 + BC \cos \varphi_{BC} i_{32}' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma'')$$

$$\left. \begin{aligned} AE \cos \varphi_{AB} &= \tilde{a}_{EE_6}' \cos \varphi_{DE_6} - 2\tilde{v}_{EE_6} i_{62} \sin \varphi_{DE_6} - \\ &\quad - DE_6 i_{62}^2 \cos \varphi_{DE_6} - DE_6 i_{62}' \sin \varphi_{DE_6}, \\ -AE \sin \varphi_{AB} &= \tilde{a}_{EE_6}' \sin \varphi_{DE_6} - 2\tilde{v}_{EE_6} i_{62} \cos \varphi_{DE_6} - \\ &\quad - DE_6 i_{62}^2 \cos \varphi_{DE_6} - DE_6 i_{62}' \sin \varphi_{DE_6}. \end{aligned} \right\} \quad (\Delta'')$$

В уравнениях (Γ'') и (D'') $i'_{32} = di_{32}/d\varphi_{AB}$, $\tilde{a}_{CC_1}$ — аналог ускорения точки C в движении относительно точки C_1 ; $\tilde{a}_{EE_0}'$ — аналог ускорения точки E в движении относительно точки E_0 ; $i'_{62} = di_{62}/d\varphi_{AB}$.

Уравнения (Γ'') и (D'') так же, как и уравнения (Γ') и (D'), являются линейными, и потому неизвестные $\tilde{a}_{CC_1}'$, i'_{32} , $\tilde{a}_{EE_0}'$ и i'_{62} могут быть определены без затруднений.

Для определения действительных величин скоростей и ускорений надо аналоги скоростей умножить на ω_{AB} — величину угловой скорости ведущего звена AB , а для определения действительных ускорений их аналоги надо умножить на ω_{AB}^2 — квадрат угловой скорости ведущего звена AB . Для определения величин действительных ускорений начального движения следует аналоги ускорений умножить на заданную величину углового ускорения ϵ_{AB} ведущего звена AB .

§ 33. Определение скоростей и ускорений групп III класса

1°. Определение скоростей и ускорений механизмов III класса может быть произведено так называемым *методом особых точек*, или *точек Ассура*, по имени русского ученого Л. В. Ассура, предложившего этот метод.

Ознакомление с применением этого метода начнем с задачи определения скоростей и ускорений группы III класса с тремя поводками.

Пусть задана группа III класса с тремя поводками, причем все входящие в группу кинематические пары — вращательные (рис. 280, *a*) и заданы скорости и ускорения точек B , C и D концевых элементов, которыми поводки 4, 5 и 6 входят во вращательные пары со звеньями 1, 2 и 3 основного механизма. Требуется определить скорости и ускорения звеньев группы. Продолжаем оси поводков 4 и 5 до пересечения в точке S_1 , которую примем принадлежащей базисному звену 7.

Тогда из произвольной точки p плоскости откладываем отрезки (pb), (pc) и (pd) (рис. 280, *b*), представляющие в выбранном масштабе μ_v заданные скорости точек B , C и D . Скорость v_{S_1} точки S_1 , как принадлежащей звену 7, определится из уравнений (см. § 26, 2°)

$$\left. \begin{aligned} v_{S_1} &= v_E + v_{S_1E} = v_B + \overline{v_{EB} + v_{S_1E}}, \\ v_{S_1} &= v_F + v_{S_1F} = v_C + \overline{v_{FC} + v_{S_1F}} \end{aligned} \right\} \quad (6.72)$$

В уравнениях (6.72) два последних вектора каждого из уравнений направлены по одной прямой, так как оба вектора перпендикулярны к общим направлениям S_1B или S_1C , т. е. вектор $v_{S_1B} = \overline{v_{EB} + v_{S_1E}}$ перпендикулярен к направлению $\overline{S_1B}$, а вектор $v_{SC} = \overline{v_{FC} + v_{S_1F}}$ перпендикулярен к направлению $\overline{S_1C}$.

Пользуясь уравнениями (6.72), проводим через точку b плана скоростей прямую в направлении скорости v_{S_1B} , перпендикулярную к направлению $\overline{S_1B}$, а через точку c плана скоростей — прямую в направлении вектора скорости v_{S_1C} , перпендикулярную к направлению $\overline{S_1C}$. Точка s_1 пересечения этих двух прямых на плане скоростей (рис. 280, *b*) и представляет собой конец вектора скорости v_{S_1} точки S_1 . Величина скорости этой точки равна

$$v_{S_1} = \mu_v (ps_1).$$

Соединяем, далее, прямой точку S_1 с точкой G и составляем для определения скорости G следующие уравнения:

$$v_G = v_{S_1} + v_{GS_1}, \quad v_G = v_D + v_{GD}. \quad (6.73)$$

Пользуясь уравнениями (6.73), проводим через точки s_1 и d плана скоростей прямые, имеющие направления скоростей v_{GS_1} и v_{GD} , соответственно перпендикулярные к направлениям $\overline{GS_1}$ и $\overline{GD}$. Точка g пересечения этих

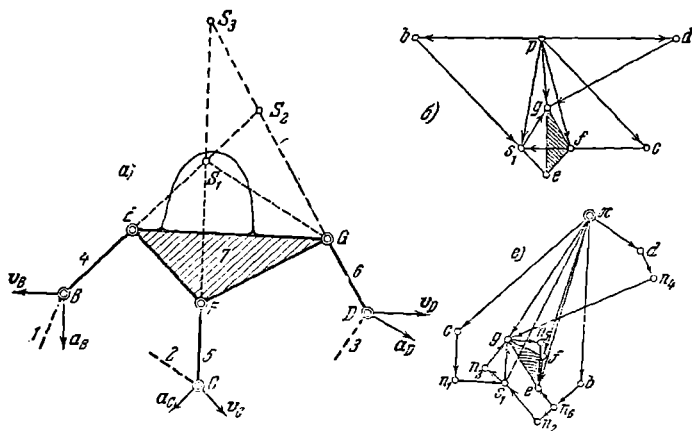


Рис. 280. Трехповодковая группа с тремя вращательными парами: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) план ускорений.

двух прямых и дает конец вектора скорости v_G точки G . Величина скорости v_G равна

$$v_G = \mu_v (\rho g).$$

Зная скорость точки G , скорость точки E определяем из уравнений

$$v_E = v_G + v_{EG}, \quad v_E = v_B + v_{EB}. \quad (6.74)$$

Скорость v_F точки F определится из подобия треугольника egf плана скоростей треугольнику EGF схемы или же из уравнений

$$v_F = v_G + v_{FG}, \quad v_F = v_C + v_{FC}. \quad (6.75)$$

Построение всех этих скоростей показано на рис. 280, б.

Точку S_1 пересечения осей двух поводков будем называть *особой точкой*. Особая точка может быть получена путем пересечения осей двух любых поводков (рис. 280, а). Таким образом, в группе с тремя поводками мы можем получить три особые точки S_1 , S_2 и S_3 , и, пользуясь любой из них, можно построить план скоростей. Выбор той или иной из этих точек определяется удобством графических построений.

Необходимо иметь в виду, что точки S_1 , S_2 и S_3 принадлежат базисному звену EGF , а не поводкам, на пересечении осей которых они находятся.

В том случае, когда все эти три оси поводков пересекаются в одной точке, особые точки совмещаются в одну, и в этом случае группа приобретает дополнительную мгновенную подвижность.

2°. Задача об ускорениях группы III класса с тремя поводками решается аналогично задаче о скоростях. Здесь, так же как и для определения ско-

ростей, пользуемся особой точкой S_1 на звене 7 (рис. 280, а). В качестве такой точки может быть выбрана любая из трех особых точек. Построение ускорений всех точек группы может быть выполнено следующим образом. Выбираем на плоскости произвольную точку π (рис. 279, в) за полюс плана ускорений и откладываем от нее отрезки (πb) , (πc) и (πd) , изображающие в масштабе μ_a ускорения a_B , a_C и a_D точек B , C и D . Ускорение a_{S_1} особой точки S_1 определится из уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{S_1} &= a_B + \overline{a_{EB}^n + a_{S_1E}^n + a_{EB}^t + a_{S_1E}^t} = a_B + a_{S_1B}^n + a_{S_1B}^t \\ a_{S_1} &= a_C + \overline{a_{FC}^n + a_{S_1F}^n + a_{FC}^t + a_{S_1F}^t} = a_C + a_{S_1C}^n + a_{S_1C}^t \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

В уравнениях (6.76) суммы нормальных и тангенциальных ускорений для краткости обозначены через результирующие векторы $a_{S_1B}^n$, $a_{S_1C}^n$ и $a_{S_1B}^t$, $a_{S_1C}^t$, потому что направления отдельных слагаемых совпадают.

Величины нормальных относительных ускорений определяются обычным методом из уравнений

$$a_{EB}^n = \frac{v_{EB}^2}{l_{BE}}, \quad a_{S_1E}^n = \frac{v_{S_1E}^2}{l_{ES_1}}, \quad a_{FC}^n = \frac{v_{FC}^2}{l_{CF}}, \quad a_{S_1F}^n = \frac{v_{S_1F}^2}{l_{FS_1}}.$$

Направления этих векторов также определяются известными методами. Так как отдельные члены каждой из сумм тангенциальных ускорений совпадают по направлению, то отдельные слагаемые этих сумм особо могут не определяться. Для их нахождения достаточно через концы результирующих векторов нормальных ускорений $a_{S_1B}^n$ и $a_{S_1C}^n$ провести линии действия векторов тангенциальных ускорений в направлениях, перпендикулярных к векторам указанных нормальных ускорений. С этой целью от точек b и c плана ускорений откладываем отрезки (bn_2) и (cn_1) , представляющие в масштабе μ_a ускорения $a_{S_1B}^t$ и $a_{S_1C}^t$.

Далее, через точки n_3 и n_1 проводим прямые в направлениях ускорений $a_{S_1B}^t$ и $a_{S_1C}^t$, которые соответственно перпендикулярны к направлениям S_1B и S_1C . Точка s_1 пересечения этих двух прямых и дает конец вектора a_{S_1} полного ускорения точки S_1 , величина которого равна

$$a_{S_1} = \mu_a (\pi s_1).$$

Ускорение точки G определится из уравнений

$$a_G = a_{S_1} + a_{GS_1}^n + a_{GS_1}^t, \quad a_G = a_D + a_{GD}^n + a_{GD}^t. \quad (6.77)$$

От точек d и s_1 плана ускорений откладываем отрезки (dn_4) и (s_1n_3) , представляющие в масштабе μ_a ускорения a_{GD}^n и $a_{GS_1}^n$. Далее, через точки n_3 и n_4 проводим прямые в направлениях тангенциальных ускорений $a_{GS_1}^t$ и a_{GD}^t , перпендикулярные к отрезкам GS_1 и GD . Точка g пересечения этих прямых и дает конец полного ускорения a_G точки G . Зная ускорение a_G точки G , легко определить ускорения остальных точек группы. Например, ускорение точки E определится из уравнений

$$a_E = a_G + a_{EG}^n + a_{EG}^t, \quad a_E = a_B + a_{EB}^n + a_{EB}^t. \quad (6.78)$$

Ускорение точки F найдется из подобия треугольника egf плану ускорений треугольнику EGF схемы или же из уравнений, аналогичных уравнениям (6.56).

Построение всех этих ускорений показано на рис. 280, а.

3°. Рассмотрим теперь вопрос об определении скоростей и ускорений методом особых точек для тех групп, в состав которых наряду с вращательными парами входят также и поступательные пары. Пусть, например, дана группа III класса с тремя поводками и с двумя поступательными парами E и C (рис. 281), у которой известны скорости точек B и D , скорости всех точек звена 2 и угловая скорость ω_2 . Для определения особых точек звена 7 можно поступить следующим образом. Через точку B проводим прямую, перпендикулярную к оси $x-x$ направляющей, принадлежащей звену 4. Далее, через точку F проводим прямую, перпендикулярную к оси $y-y$ направляющей, принадлежащей звену 2. Точка S_1 пересечения этих двух прямых и определяет первую особую точку звена 7. Другая особая точка S_2 может быть найдена на пересечении прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной к оси $x-x$, с направлением GD поводка 6, и, наконец, третья особая точка S_3 может быть определена на пересечении прямой, проходящей через точку F перпендикулярно к оси $y-y$, с направлением GD поводка 6.

Если воспользоваться особой точкой S_1 , то определение скоростей группы может быть сделано следующим образом. Скорость v_{S_1} точки S_1 определится из уравнений

$$\begin{aligned} v_{S_1} &= v_B + \overline{v_{S_4B}} + \overline{v_{S_1S_4}}, \\ v_{S_1} &= v_{F_2} + \overline{v_{FF_2}} + \overline{v_{S_1F}}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Рис. 281. Кинематическая схема группы III класса с двумя поступательными парами.

В уравнениях (6.79) v_{F_2} есть скорость точки F_2 , принадлежащей звену 2. Эта скорость известна, так как скорости всех точек звена 2 являются заданными. Вектор v_B в уравнениях (6.79) есть заданная скорость точки B . Точка S_4 является точкой, принадлежащей звену 4 и совпадающей в данный момент времени с особой точкой S_1 . Ее относительная скорость в движении вокруг точки B выразится вектором v_{S_4B} . Величина этой скорости неизвестна, а направлена она перпендикулярно к направлению BS_1 . Скорость особой точки S_1 относительно звена 4 представлена в уравнениях (6.79) вектором $v_{S_1S_4}$. Величина этой скорости неизвестна, а направлена она параллельно оси $x-x$, перпендикулярно к направлению BS_1 . Таким образом, скорости v_{S_4B} и $v_{S_1S_4}$ параллельны, и следовательно, в уравнениях (6.79) над векторами, их представляющими, может быть поставлена общая черта. Скорость точки F относительно точки F_2 , принадлежащей звену 2, выразится вектором v_{FF_2} . Эта скорость, неизвестная по величине, параллельна оси $y-y$, или, что то же, перпендикулярна к направлению FS_1 . Скорость точки S_1 относительно точки F выразится вектором v_{S_1F} , величина которого неизвестна и который перпендикулярен к направлению FS_1 . Таким образом, скорости v_{FF_2} и v_{S_4F} параллельны, что в уравнении (6.79) отмечено чертой, поставленной над этими векторами. Совместным решением уравнений (6.79) определяется скорость v_{S_1} точки S_1 .

Скорость точки G определится из уравнений

$$v_G = v_{S_1} + \overline{v_{GS_1}}, \quad v_G = v_D + \overline{v_{GD}}. \quad (6.80)$$

Скорости остальных точек определяются из уравнений, аналогичных уравнениям для групп II класса.

4°. Для определения ускорения точки S_1 должны быть совместно решены следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a_{S_1} &= a_B + \overline{a_{S_1B}^n + a_{S_1S_4}^k} + \overline{a_{S_1B}^t + a_{S_1S_4}^r} \\ a_{S_1} &= a_{F_2} + \overline{a_{FF_2}^k + a_{S_1F}^n} + \overline{a_{FF_2}^t + a_{S_1F}^r} \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

В уравнениях (6.81) ускорения a_B и a_{F_2} заданы. Нормальное ускорение $a_{S_1B}^n$ в движении точки S_4 относительно точки B и кориолисово ускорение $a_{S_1S_4}^k$ в движении точки S_1 относительно звена 4 взаимно параллельны и направлены перпендикулярно к оси $x-x$. Величины и направления ускорений определяются обычным способом. Точно так же взаимно параллельны и ускорения: $a_{FF_2}^k$, представляющее собой кориолисово ускорение в движении точки F относительно звена 2, и $a_{S_1F}^n$, представляющее собой нормальное ускорение в движении точки S_1 относительно точки F . Векторы ускорений $a_{FF_2}^k$ и $a_{S_1F}^n$ направлены перпендикулярно к оси $y-y$. Величины и направления этих ускорений определяются обычным способом. Ускорения $a_{S_1B}^t$ и $a_{S_1S_4}^r$ неизвестны по величине и имеют взаимно параллельные направления, параллельны оси $x-x$. Точно так же взаимно параллельны и ускорения $a_{FF_2}^t$ и $a_{S_1F}^r$ (параллельны оси $y-y$). Таким образом, из уравнений (6.81) определяется вектор ускорения a_{S_1} точки S_1 .

Для определения ускорения a_G точки G решаем совместно уравнения

$$a_G = a_{S_1} + \overline{a_{GS_1}^n + a_{GS_1}^t}, \quad a_G = a_D + \overline{a_{GD}^n + a_{GD}^t}. \quad (6.82)$$

Ускорения остальных точек группы определяются из уравнений, аналогичных уравнениям для группы II класса.

Метод особых точек применим к механизмам III класса любого порядка.

Пример. В качестве примера рассмотрим механизм, показанный на рис. 282. Требуется определить скорости точек звеньев этого механизма в перманентном его движении, в котором кривошип 2 вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 .

При ведущем звене 2 механизм относится к механизмам III класса третьего порядка, как образованный присоединением к ведущему звену 2 группы $BCDEFG$ III класса с тремя поводками 3, 5 и 6.

Определение скоростей проводим методом особых точек.

Для построения *повернутого плана скоростей* по методу особых точек находим особую точку S на пересечении направлений GD и BC звеньев 5 и 3 (рис. 282, а). От точки p откладываем скорость v_B точки B в виде отрезка (pb) в масштабе μ_v (рис. 282, б). Скорость v_S точки S может быть определена из уравнений

$$v_S = v_B + \overline{v_{CB} + v_{SC}}, \quad v_S = v_Q + \overline{v_{DQ} + v_{SD}} = \overline{v_{DQ} + v_{SD}},$$

так как $v_Q = 0$. Далее, соединяем прямой точку E с точкой S (рис. 282, а) и для определения скорости точки E составляем уравнения

$$v_E = v_S + \overline{v_{ES}}, \quad v_E = v_F + \overline{v_{EF}} = v_{EF},$$

так как $v_F = 0$.

Определив скорость v_E точки E , легко построить скорости и всех остальных точек. Проверкой построений может служить условие, чтобы точки d , c и e лежали на прямых заданных направлений, выходящих из полюса p , и треугольник dce был подобен треугольнику DCE . Следует отметить, что особая точка S могла бы быть выбрана и на пересечении осей двух любых других поводков группы.

План ускорений строим аналогично. Откладываем из точки π отрезок (πb) , изображающий в масштабе μ_a ускорение a_B точки B (рис. 282, в). Далее, из уравнений

$$a_S = a_C + a_{SC}^n + a_{SC}^t = a_B + \overline{a_{CB}^n + a_{SC}^n} + \overline{a_{CB}^t + a_{SC}^t},$$

$$a_S = a_D + \overline{a_{SD}^n} + a_{SD}^t = a_G + \overline{a_{DG}^n + a_{SD}^n} + \overline{a_{DG}^t + a_{SD}^t} = \overline{a_{DG}^n + a_{SD}^n} + \overline{a_{DG}^t + a_{SD}^t},$$

так как $a_G = 0$. Ускорение a_S точки S находим известными приемами.

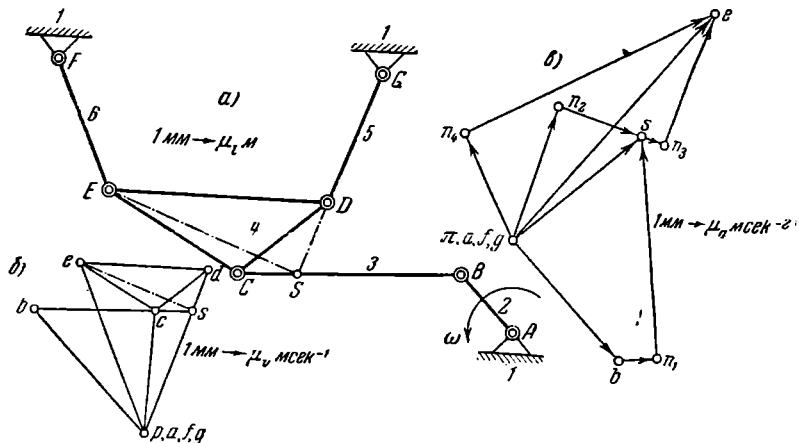


Рис. 282. Механизм III класса с трехпроводковой группой: а) кинематическая схема; б) повернутый план скоростей; в) план ускорений.

Ускорение a_E точки E найдем из уравнений

$$a_E = a_S + a_{ES}^n + a_{ES}^t, \quad a_E = a_F + a_{EF}^n + a_{EF}^t = a_{EF}^n + a_{EF}^t,$$

где $a_F = 0$. Зная ускорение a_E точки E , ускорения a_D и a_C точек D и C легко определить, рассматривая движение этих точек соответственно относительно точек E , G и E , B . Построение ускорений a_D и a_C на рис. 282, в не показано. На рис. 282, в отрезки (bn_1) , (gn_2) и т. д. представляют собою суммы нормальных ускорений, стоящих под общей чертой.

ГЛАВА VII

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ДИАГРАММ

§ 34. Построение кинематических диаграмм

1°. При кинематическом исследовании механизмов необходимо бывает проводить это исследование за полный цикл движения исследуемого механизма. Для этого аналитическое или графическое исследование перемещений скоростей и ускорений ведется для ряда

положений механизма, достаточно близко отстоящих друг от друга. Полученные значения кинематических величин могут быть сведены в таблицы или по полученным значениям этих величин могут быть построены графики, носящие название *кинематических диаграмм*.

В зависимости от характера движения исследуемых звеньев или отдельных точек механизма могут быть построены и различные кинематические диаграммы. В практических задачах теории механизмов каждая кинематическая диаграмма обычно представляет собой графическое изображение изменения одного из кинематических параметров звена: перемещения точки звена исследуемого механизма, в функции времени или перемещения ведущего звена механизма, т. е. в функции обобщенной координаты.

Например, если мы имеем кривошипно-ползунный механизм (рис. 283), то для перемещений s_C , скоростей v_C и ускорений a_C точки C , как перемещающейся прямолинейно, удобно строить кинематические диаграммы в виде зависимостей этих величин от времени t или от обобщенной координаты φ_3 , т. е. строить графическое изображение зависимостей

$$s_C = s_C(t), \quad v_C = v_C(t), \quad a_C = a_C(t) \quad (7.1)$$

или

$$s_C = s_C(\varphi_3), \quad v_C = v_C(\varphi_3), \quad a_C = a_C(\varphi_3), \quad (7.1')$$

если угол φ_3 поворота звена 2 выбран в качестве обобщенной координаты.

В некоторых случаях может потребоваться построение и других зависимостей, например,

$$v_C = v_C(s_C) \quad \text{или} \quad a_C = a_C(s_C). \quad (7.2)$$

Зависимости (7.2) могут быть получены из зависимостей (7.1) исключением из первой и второй зависимостей, или из первой и третьей зависимостей параметра t .

Если исследованию подлежат угловые перемещения φ_3 , угловые скорости ω_3 и угловые ускорения ε_3 шатуна 3 (рис. 283), то можно построить графическое изображение зависимостей

$$\varphi_3 = \varphi_3(t), \quad \omega_3 = \omega_3(t), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(t)$$

или

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2), \quad \omega_3 = \omega_3(\varphi_2), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_2),$$

а также зависимости

$$\omega_3 = \omega_3(\varphi_3) \quad \text{или} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_3).$$

2°. В качестве примера рассмотрим построение кинематических диаграмм $s_C = s_C(t)$, $v_C = v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$ для точки C кривошип-

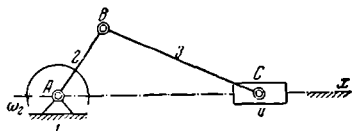


Рис. 283. Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма.

но-ползунного механизма ABC , кривошип которого вращается с *постоянной угловой скоростью* ω_2 (рис. 284, а). Для этого методами, указанными в § 31, производим разметку путей точек B и C . Отсчет перемещений точки C удобно вести от крайнего левого положения ползуна. Проводим две оси координат (рис. 284, б) и на оси абсцисс откладываем отрезок l мм, представляющий собой в масштабе μ_l время T одного полного оборота кривошипа, т. е.

$$T = \frac{60}{n} = \mu_l T, \quad (7.3)$$

где n — число оборотов кривошипа в минуту. Из равенства (7.3) получаем масштаб μ_l времени. Имеем:

$$\mu_l = \frac{60}{n\pi}. \quad (7.4)$$

Отрезок l разбиваем на 12 равных частей и в соответствующих точках 1, 2, 3, откладываем расстояния, пройденные точкой C (рис. 284, а) от крайнего левого положения C_1 ползуна. Так, в точке 2 (рис. 284, б) откладываем в направлении, параллельном оси ординат, отрезок (C_1C_2) , в точке 3 отрезок (C_1C_3) и т. д. Если отрезки (C_1C_2) , (C_1C_3) , ... откладывать прямо со схемы (рис. 284, а), то масштаб диаграммы

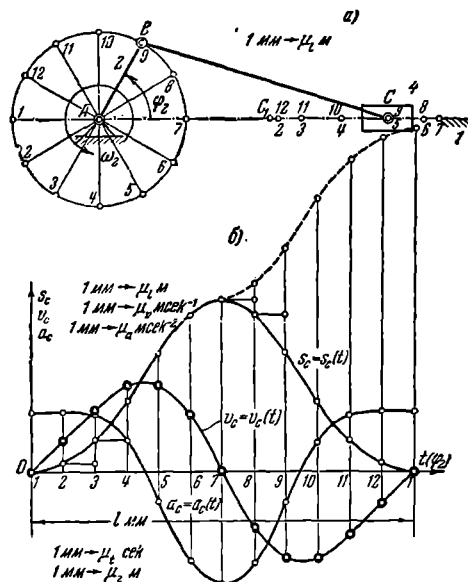


Рис. 284. Кривошипно-ползунный механизм: а) кинематическая схема; б) графики, изображающие зависимости $s_C = s_C(t)$; $v_C = v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$.

$s_C = s_C(t)$ по оси ординат будет равен μ_l , т. е. масштабу построения схемы. С положения C_7 , когда точка C займет крайнее правое положение (рис. 284, а), расстояния (C_7C_8) , (C_7C_9) , вычитаются из ординаты (C_1C_7) , отложенной в положении C_7 , и таким образом, кривая $s_C = s_C(t)$ в положении, когда кривошип 2 придет в начальное положение, будет иметь ординату, равную нулю. Полученная кривая является *кривой расстояний точки C* от крайнего левого положения ползуна. Если надо построить *кривую путей*, пройденных точкой C , то от положения C_7 расстояния (C_7C_8) , (C_7C_9) , надо прибавлять к ранее отложенному отрезку (C_1C_7) . На рис. 284, б эта часть кривой путей показана штриховой линией.

Так как кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 , то можно считать, что по оси абсцисс отложено не время t , а углы поворота φ_2 звена 2, т. е. диаграммы $s_C = s_C(t)$, $v_C = v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$ будут одновременно и диаграммами $s_C = s_C(\varphi_2)$, $v_C = v_C(\varphi_2)$

и $a_c = a_c(\varphi_2)$. Масштаб μ_φ в этих диаграммах по оси абсцисс будет равен

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{l},$$

где отрезок l должен быть взят с чертежа в миллиметрах.

3°. Для построения диаграмм $v_c = v_c(t)$ и $a_c = a_c(t)$ отрезки, изображающие на плане скоростей и ускорений скорость v_c и ускорение a_c , откладывают на ординатах, проведенных в точках 1, 2, 3, (рис. 284, б), учитывая при этом знак скорости v_c и ускорения a_c . Если отрезки откладываются непосредственно с планов скоростей и ускорений, то масштабы ординат кривых $v_c = v_c(t)$ и $a_c = a_c(t)$ будут равны масштабам μ_v и μ_a планов скоростей и ускорений. Эти же диаграммы будут и диаграммами $v_c = v_c(\varphi_2)$ и $a_c = a_c(\varphi_2)$.

Построение диаграмм $v_c = v_c(s_c)$ и $a_c = a_c(s_c)$ удобно в некоторых случаях вести на схеме самого механизма (рис. 285). Для этого начало координат берем в точке C_1 и на ординатах, проведенных в точках C_1, C_2, C_3 , откладываем отрезки из плана скоростей и плана ускорений, изображающие скорости v_c и ускорения a_c точки C . Кривая $a_c = a_c(s_c)$ для хода ползуна слева направо и справа налево совпадает, если не учитывать знака ускорения a_c . Если считать положительными ускорения, направления которых совпадают с направлениями соответствующих скоростей, и отрицательными, направления которых противоположны направлениям скоростей, то при ходе поршня справа налево кривую $a_c = a_c(s_c)$ надо строить так, как это показано на рис. 285 штриховой линией.

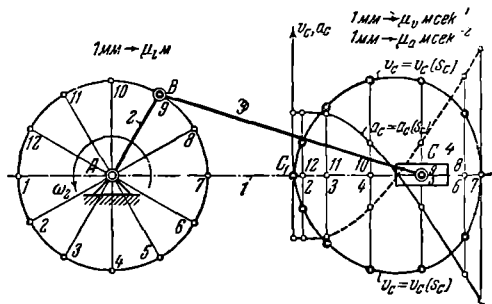


Рис. 285. Схема кривошипно-ползунного механизма с построенными на ней графиками скоростей и ускорений ползуна.

4°. В рассмотренных примерах исследуемая точка двигалась прямолинейно. Для точек, имеющих криволинейное движение, удобнее строить кинематические диаграммы, дающие не только абсолютные значения скоростей и ускорений исследуемых точек, но и направления векторов полных скоростей и ускорений. Для этого откладываем векторы скоростей и ускорений, полученные на планах скоростей и ускорений из общих полюсов p и π в их истинном направлении. Если после этого соединить концы всех векторов плавной кривой, то полученная диаграмма будет называться *годографом скорости* или соответственно *годографом ускорения*.

На рис. 286, б и в показаны годографы скорости и ускорения точки E шатуна кривошипно-ползунного механизма ABC (рис. 286, а).

Построение диаграмм величин угловых перемещений φ_3 , угловых скоростей ω_3 и угловых ускорений ϵ_3 шатуна 3 механизма ABC

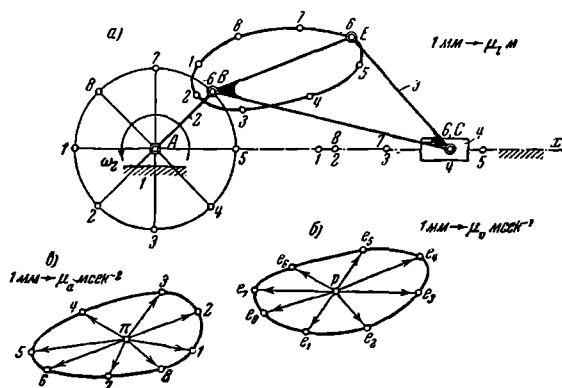


Рис. 286. Кривошипно-ползунный механизм: а) кинематическая схема, б) годограф скорости точки E; в) годограф ускорения точки E.

(рис. 284, а) можно сделать аналогичными приемами, пользуясь схемой механизма и его планами скоростей и ускорений. На рис. 287

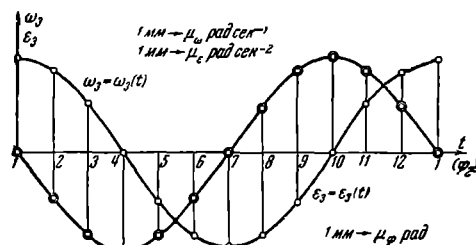


Рис. 287. Графики угловой скорости и углового ускорения шатуна 3 кривошипно-ползунного механизма, схема которого изображена на рис. 284, а.

построены диаграммы изменения величин угловой скорости ω_3 и углового ускорения ϵ_3 в функции времени t или угла φ_3 поворота кривошипа 2, т. е. $\omega_3 = \omega_3(t)$, $\epsilon_3 = \epsilon_3(t)$ или $\omega_3 = \omega_3(\varphi_2)$, $\epsilon_3 = \epsilon_3(\varphi_2)$ для шатуна 3 механизма ABC (рис. 284, а).

Изложенная нами на примере кривошипно-ползунного механизма методика построения кинематических диаграмм может быть применена для любых плоских механизмов как с низшими, так и с высшими кинематическими парами.

§ 35. Кинематическое исследование механизмов методом диаграмм

1°. Метод кинематических диаграмм может быть использован для кинематического исследования механизмов. Покажем применение метода кинематических диаграмм к исследованию конкретного механизма. Пусть, например, требуется построить диаграммы $s_C = s_C(t)$, $v_C = v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$ для точки C звена 3 кулачкового механизма,

показанного на рис. 288, если кулачок вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 . Находим перемещения точки C относительно крайнего нижнего ее положения (положение 1). Для этого через центр A вращения кулачка 2 проводим лучи: AI , $A2$, $A3$,... под равными углами φ . Если из центра A сделать засечку радиусом AC на оси движения звена 3, то отрезок $(1-2')$ будет равен перемещению звена 3 при повороте кулачка 2 на угол φ из первого во второе положение. Точно так же отрезок $(1-3')$ будет равен перемещению звена 3 при повороте кулачка 2 на угол 2φ , из первого в третье положение, и т. д.

Определив перемещения $(1-2')$, $(1-3')$, $(1-4')$,... строим в произвольно выбранных масштабах μ_s и μ_t диаграмму $s_C = s_C(t)$ или, что то же, диаграмму $s_C = s_C(\varphi_2)$ (рис. 289), так как угловая скорость $\omega_2 = \text{const}$.

Для построения диаграммы $v_C = v_C(t)$ пользуемся зависимостью

$$v_C = \frac{ds_C}{dt} = \frac{d[s_C(t)]}{dt}, \quad (7.5)$$

которая позволяет определить скорости v_C путем графического дифференцирования кривой $s_C = s_C(t)$. Для этого продолжаем ось

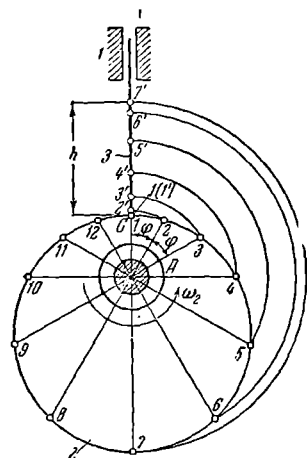


Рис. 288. Схема кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

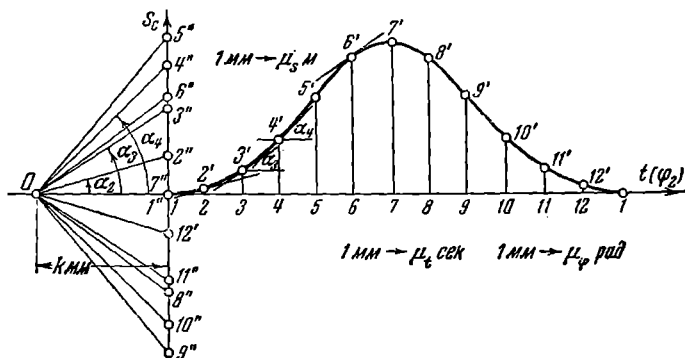


Рис. 289. График пути толкателя механизма со схемой, показанной на рис. 288.

абсцисс (рис. 289) влево и откладываем отрезок (OI) , равный k мм. Далее, в точках $1, 2', 3', 4', \dots$ кривой $s_C = s_C(t)$ проводим касательные, а через точку O — лучи $O1'', O2'', O3'', \dots$, параллельные проведенным касательным. Лучи $O1'', O2'', O3'', \dots$ отсекут на оси

s_C отрезки $(1-2'')$, $(1-3'')$, $(1-4'')$, ..., пропорциональные скоростям v_C в положениях 1, 2, 3, 4, 5, ... Имеем:

$$v_C = \frac{ds_C}{dt} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha, \quad (7.6)$$

где α — угол наклона касательной, проведенной к соответствующей

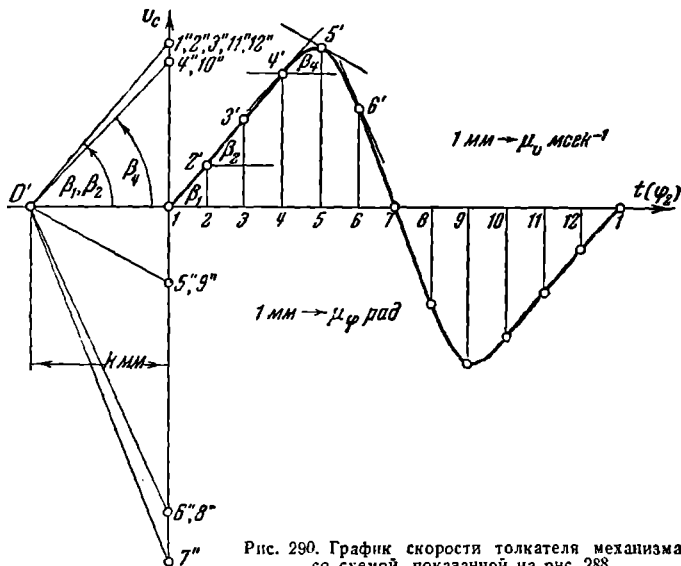


Рис. 290. График скорости толкателя механизма со схемой, показанной на рис. 288.

точке кривой $s_C = s_C(t)$. Помножим и разделим выражение (7.6) на величину, равную k мм. Имеем:

$$v_C = \frac{\mu_s}{\mu_t k} k \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.7)$$

Но величина $k \operatorname{tg} \alpha$ для касательных, проведенных в различных точках, равняется отрезкам $(1-2'')$, $(1-3'')$, $(1-4'')$, ..., отсекаемым лучами $O2''$, $O3''$, $O4''$, ... на оси s_C . Следовательно, скорости v_C пропорциональны отрезкам $(1-2'')$, $(1-3'')$, $(1-4'')$, ..., измеренным в миллиметрах. Масштаб μ_v скоростей из уравнения (7.7) равен

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t k} \left[\frac{\text{м} \cdot \text{сек}^{-1}}{\text{мм}} \right]. \quad (7.8)$$

Полученные отрезки, пропорциональные скорости v_C точки С, откладываем на соответствующих ординатах диаграммы $v_C = v_C(t)$ рис. 290.

Для построения диаграммы $a_C = a_C(t)$ пользуемся зависимостью

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{d[v_C(t)]}{dt}, \quad (7.9)$$

на основании которой ускорения a_c могут быть определены путем графического дифференцирования кривой $v_c = v_c(t)$ (рис. 290). Для этого, так же как и для определения скоростей v_c , откладываем отрезок $O'I$ (рис. 290), равный k мм; в точках $2', 3', 4', \dots$ кривой $v_c = v_c(t)$ проводим касательные, а через точку O' лучи $O'2'', O'3'', \dots$ параллельные проведенным касательным. Имеем:

$$a_c = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta = \frac{\mu_v}{\mu_t k} k \operatorname{tg} \beta, \quad (7.10)$$

где β — угол наклона касательной, проведенной в соответствующей

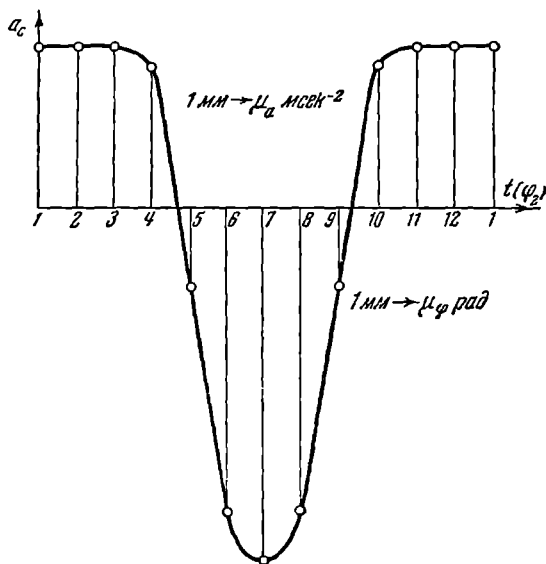


Рис. 291. График ускорения толкателя механизма со схемой, показанной на рис. 288.

точке кривой $v_c = v_c(t)$. Так как величина $k \operatorname{tg} \beta$ для касательных, проведенных в различных точках, равна отрезкам $(1-2'')$, $(1-3'')$, $(1-4'')$, ..., то, следовательно, ускорения равны отрезкам $(1-2'')$, $(1-3'')$, $(1-4'')$ и т. д., измеренным в миллиметрах и помноженным на масштаб μ_a , определяемый из формул (7.10) и (7.8):

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t k} = \frac{\mu_s}{\mu_t^2 k^2} \left[\frac{\text{м} \cdot \text{сек}^{-2}}{\text{мм}} \right]. \quad (7.11)$$

Полученные отрезки, пропорциональные ускорению a_c точки C , откладываем на соответствующих ординатах диаграммы $a_c = a_c(t)$ (рис. 291).

Если считать, что по осям абсцисс (рис. 290 и 291) отложено не время t , а угол поворота φ_2 кулачка 2 (рис. 288), а по осям абсцисс

отложены аналоги скоростей и ускорений, то масштабы μ_v^0 и μ_a^0 для скоростей и ускорений определяются следующим образом:

$$v_C = \frac{ds_C}{dt} = \frac{ds_C}{d\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 \frac{ds_C}{d\varphi_2} = \frac{\omega_2 \mu_s}{k \mu_\varphi} k \operatorname{tg} \alpha \quad (7.12)$$

и

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{dv_C}{d\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 \frac{dv_C}{d\varphi_2} = \frac{\omega_2 \mu_v}{k \mu_\varphi} k \operatorname{tg} \beta. \quad (7.13)$$

Из равенств (7.12) и (7.13) следует:

$$\mu_v^0 = \frac{\omega_2 \mu_s}{k \mu_\varphi} [м \cdot сек^{-1} / мм] \quad (7.14)$$

и

$$\mu_a^0 = \frac{\omega_2 \mu_v}{k \mu_\varphi} [м \cdot сек^{-2} / мм]. \quad (7.15)$$

2°. В выше рассмотренном примере для построения кинематических диаграмм мы применили метод касательных. Задачу о построении кинематических диаграмм $s_C = s_C(t)$,



На рис. 292, а построена диаграмма перемещений точки С штанги кулачкового механизма (рис. 288) по двенадцати положениям механизма в произвольно выбранных масштабах μ_s и μ_t . За начало отсчета времени и перемещений принято положение 1 точки С звена 3 (рис. 288), хотя вообще говоря, за начальное положение может быть принято любое положение точки С. Построение выполнено аналогично построению, показанному на рис. 289.

Рис. 292. Графики пути, скорости и ускорения толкателя механизма, схема которого показана на рис. 288: а) график пути; б) график скорости; в) график ускорения.

Для построения диаграммы $v_C = v_C(t)$ поступаем следующим образом. Проводим оси ординат графика $v_C = v_C(t)$ (рис. 292, б). Отрезок длиной l мм на оси абсцисс делим на двенадцать равных частей, из которых каждая $\Delta l = l/12$, и каждую двенадцатую часть делим пополам. Получаем точки I, II, III, ... и т. д.

Средняя скорость v_{1-2} на участке (1—2) точки С равна

$$v_{1-2} = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} = \frac{\mu_s (2 - 2')}{\mu_t \Delta l} = \mu_v (2 - 2'), \quad (7.16)$$

где (2—2') — отрезок в миллиметрах, взятый с ординаты, проведенной в точке 2 диаграммы $s_C = s_C(t)$ (рис. 292, а), и μ_v — масштаб диаграммы $v_C = v_C(t)$, равный

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t \Delta l} \left[\text{м} \cdot \text{сек}^{-1} / \text{мм} \right]. \quad (7.17)$$

Отрезок (2—2'), взятый с диаграммы $s_C = s_C(t)$, откладываем на ординате диаграммы $v_C = v_C(t)$ (рис. 292, б), проведенной в точке 1, лежащей посередине между точками 1 и 2 в виде отрезка (1—1') = (2—2').

Если масштаб μ_v выбран в соответствии с формулой (7.17), то

$$v_{1-2} = \mu_v (1 - 1').$$

Средняя скорость v_{2-3} на участке (2—3) соответственно равна

$$v_{2-3} = \frac{s_3 - s_2}{\Delta t} = \frac{\mu_s [(3 - 3') - (2 - 2')]}{\mu_t \Delta l} = \frac{\mu_s (2'' - 3')}{\mu_t \Delta l} = \mu_v (2'' - 3'),$$

где отрезок (2''—3') = (II—II') берется с диаграммы $s_C = s_C(t)$ (рис. 292, а).

Отрезок (II—II') откладывается на ординате, проведенной через точку II, лежащую посередине между точками 2 и 3 диаграммы $v_C = v_C(t)$ (рис. 292, б). Аналогично получаем значения средних скоростей v_{3-4} , v_{4-5} , ... Соединив точки I', II', III', ... плавной кривой, получаем диаграмму $v_C = v_C(t)$ (рис. 292, б).

Для выяснения вопроса о том, какой характер имеет диаграмма $v_C = v_C(t)$ в начале цикла движения штанги на участке (1—1) и конце цикла (на участке XII—1) (рис. 292, б), в конце цикла правее точки 1 откладываем по оси абсцисс отрезок (1—1), равный тому же отрезку в начале цикла, и на ординате, проведенной через точку 1, откладываем отрезок (1—1), представляющий собой скорость v_{1-2} в масштабе μ_v . Соединив точки XII' и I' плавной кривой, определим характер диаграммы $v_C = v_C(t)$ в начале и конце цикла движения штанги.

Диаграмму $a_C = a_C(t)$ (рис. 292, в) строим аналогично диаграмме $v_C = v_C(t)$.

Средние величины ускорения a_{I-II} , a_{II-III} , a_{III-IV} , ... на интервалах (I—II) (II—III), (III—IV), ... соответственно равны (292, б)

$$\left. \begin{aligned} a_{I-II} &= \frac{v_{II} - v_I}{\Delta t} = \frac{\mu_v [(II - II') - (I - I')]}{\mu_t \Delta l} = \frac{\mu_v}{\mu_t \Delta l} (I'' - II') = \\ &= \mu_a (2 - 2''), \\ a_{II-III} &= \frac{v_{III} - v_{II}}{\Delta t} = \frac{\mu_v [(III - III') - (II - II')]}{\mu_t \Delta l} = \frac{\mu_v}{\mu_t \Delta l} (II'' - III') = \\ &= \mu_a (3 - 3''). \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

В равенстве (7.18) отрезки (I''—II'), (II''—III'), ... следует взять из диаграммы $v_C = v_C(t)$, а равные им отрезки (2—2''), (3—3''), ... откладываются на диаграмме $a_C = a_C(t)$ (рис. 292, в) на ординатах, проведенных в точках 1, 2, 3, ... Эти отрезки будут представлять собой ускорения: a_{I-II} , a_{II-III} , ... т. е. в масштабе

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t \Delta l} \left[\text{м} \cdot \text{сек}^{-2} / \text{мм} \right].$$

Соединив плавной кривой точки I'', 2'' ..., получим диаграмму $a_C = a_C(t)$.

3°. В рассмотренном механизме задача об определении скоростей и ускорений сводилась к двукратному графическому дифференцированию заданной кривой перемещений. В ряде задач теории механизмов приходится пользоваться методом графического интегрирования. Пусть, например, задана (рис. 293, а) диаграмма ускорения a_C какой-либо точки механизма, имеющей прямолинейное движение, в функции времени t . Требуется построить диаграммы $v_C = v_C(t)$ и $s_C = s_C(t)$. Ось абсцисс (рис. 293, а) разбивается на равные участки и из точек 1, 2, 3, ... проводятся ординаты (1—1'), (2—2'), (3—3'), ... Приращение скорости v_C за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно

$$v_{C_2} - v_{C_1} = \int_{t_1}^{t_2} a_C dt. \quad (7.19)$$

Интеграл в правой части соотношения (7.19) может быть выражен через площадь $[1'2'2]$ мм², ограниченную осью абсцисс, ординатами (1—1'), (2—2') и кривой $a_C = a_C(t)$ (рис. 293, а), причем эту площадь надо умножить на произведение масштабов μ_a и μ_t . Имеем:

$$v_{C_2} - v_{C_1} = \mu_a \mu_t \text{ пл. } [1'2'2]. \quad (7.20)$$

Рис. 293. К графическому интегрированию графиков: а) график ускорения прямолинейно движущейся точки; б) график ее скорости; в) график ее пути.

Площадь $[1'2'2]$ может быть определена планиметром, наложением на кривую $a_C = a_C(t)$ миллиметровой сетки, построением кривой $a_C = a_C(t)$ на миллиметровой бумаге или путем замены площади $[1'2'2]$ равновеликим прямоугольником или трапецией. Подставляя полученное значение площади, подсчитанное в квадратных миллиметрах, в равенство (7.20), определяем приращение скорости v_C за время $\Delta t = t_2 - t_1$. Если скорость v_{C_1} в положении 1 равнялась нулю (рис. 293, б), то скорость v_{C_2} в положении 2 равна

$$v_{C_2} = \mu_a \mu_t \text{ пл. } [1'2'2].$$

Полученное значение скорости v_{C_2} откладываем в масштабе μ_v на ординате, проведенной в точке 2 (рис. 293, б) в виде отрезка (2—2') мм. Имеем:

$$v_{C_2} = \mu_v (2 - 2').$$

Далее, определяем площадь $[2 \ 2' \ 3' \ 3]$ (рис. 293, а). Имеем:

$$v_{C_2} - v_{C_3} = \int_{t_2}^{t_3} a_C dt = \mu_a \mu_t \text{ пл. } [2 \ 2' \ 3' \ 3].$$

Полученное значение приращения скорости v_C на участке $t_2 - t_3$ откладываем в виде отрезка ($3'' - 3'$) на ординате, проведенной в точке 3 (рис. 293, б), прибавляя этот отрезок к отрезку ($3 - 3''$) = ($2 - 2'$). Произведя такие же построения для последующих промежутков времени, получаем диаграмму $v_C = v_C(t)$. Для большей точности вычислений можно подсчет площадей вести от положения 1. Тогда, например, скорость v_{C_3} (рис. 293, б) определится из условия

$$v_{C_3} = \int_{t_1}^{t_3} a_C dt = \mu_a \mu_t \text{ пл. } [11' \ 3' \ 3] = \mu_v (3 - 3').$$

Скорость v_{C_4} определится из условия

$$v_{C_4} = \int_{t_1}^{t_4} a_C dt = \mu_a \mu_t \text{ пл. } [11' \ 4' \ 4] = \mu_v (4 - 4')$$

и т. д. Соответствующие отрезки ($3 - 3'$), ($4 - 4'$), ... откладываем на ординатах, проведенных через точки 3, 4 ... (рис. 293, б).

Аналогично может быть построена диаграмма $s_C = s_C(t)$ (рис. 293, в) графическим интегрированием диаграммы $v_C = v_C(t)$ (рис. 293, б).

Для тех же промежутков времени Δt будет иметь:

$$s_{C_2} = \int_{t_1}^{t_2} v_C dt = \mu_v \mu_t \text{ пл. } [11' \ 2' \ 2] = \mu_s (2 - 2'),$$

$$s_{C_3} = \int_{t_1}^{t_3} v_C dt = \mu_v \mu_t \text{ пл. } [11' \ 3' \ 3] = \mu_s (3 - 3'),$$

где пл. $[11' \ 2' \ 2]$, пл. $[11' \ 3' \ 3]$, ... подсчитываются по диаграмме $v_C = v_C(t)$ (рис. 293, б), а отрезки ($2 - 2'$), ($3 - 3'$), откладываются в масштабе μ_s на ординатах диаграммы $s_C = s_C(t)$ (рис. 293, в).

В заключение отметим, что изложенные в этой главе применительно к кинематическим диаграммам методы графического дифференцирования и интегрирования могут быть использованы при решении многих задач динамики механизмов. Например, силы, действующие на механизм, часто задаются в виде диаграмм зависимости силы от пути. Тогда работа каждой силы может быть подсчитана методом графического интегрирования.

ГЛАВА VIII

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ
РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 36. Механизм шарнирного четырехзвенника

1°. Из рычажных механизмов с низшими кинематическими парами широкое применение в технике получили четырехзвенные механизмы. Рассмотрим вопрос о кинематическом анализе некоторых видов четырехзвенных механизмов.

Как это было показано в § 30, положения скорости и ускорения звеньев механизмов можно определить в функции не времени, а обобщенной координаты, в качестве которой удобно выбрать угловое

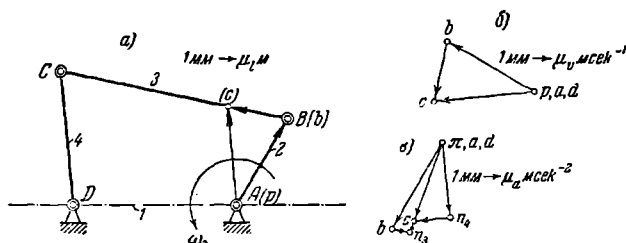


Рис. 294. Механизм шарнирного четырехзвенника: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) план ускорений.

или линейное перемещение ведущего звена механизма. Тогда положения, скорости и ускорения звеньев будут зависеть только от геометрических параметров механизма и не будут зависеть от времени. При этом было показано, что, рассматривая движение механизма состоящим из перманентного, при котором $\omega = d\varphi/dt = \text{const}$, где φ — обобщенная координата механизма, и начального, при котором $\omega = 0$ и $\epsilon = d^2\varphi/dt^2 \neq 0$, можно простыми построениями или расчетами определить истинные скорости и ускорения звеньев механизма при заданной функции обобщенной координаты от времени. Рассмотрим движение шарнирного четырехзвенного механизма (рис. 294, а), принимая угловую скорость ω_1 ведущего звена 2 постоянной (перманентное движение механизма).

Схема механизма построена в масштабе μ_l . Для определения скоростей и ускорений воспользуемся известными нам уравнениями (6.34) и (6.38). Имеем:

$$\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB} = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{CD}; \quad \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t,$$

или так как $\mathbf{v}_D = 0$ и $\mathbf{a}_D = 0$, то

$$\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB} = \mathbf{v}_{CD}, \quad (8.1)$$

$$\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t = \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t. \quad (8.2)$$

По уравнению (8.1) строим план скоростей (рис. 294, б), в котором вектор $\boldsymbol{v}_B$ откладываем в виде отрезка (pb) mm , равного отрезку (AB) mm на схеме (рис. 294, а). Такое построение называется *построением в масштабе ведущего звена*. Тогда масштаб μ_v скоростей получает весьма простое выражение. Имеем:

$$v_B = |\omega_2| l_2 = |\omega_2| \mu_l (AB) = \mu_v (pb). \quad (8.3)$$

Так как (pb) = (AB), то из (8.3) получаем:

$$\mu_v = |\omega_2| \mu_l. \quad (8.4)$$

Величина скорости $\boldsymbol{v}_C$ точки C равна

$$v_C = \mu_v (pc) = |\omega_2| \mu_l (pc).$$

Величина угловой скорости ω_3 звена 3 согласно формуле (6.35) равна

$$|\omega_3| = \frac{v_{CB}}{l_3} = \frac{\mu_v (bc)}{\mu_l (BC)} = |\omega_2| \frac{(bc)}{(BC)}.$$

Величина угловой скорости ω_4 звена 4 равна

$$|\omega_4| = \frac{v_C}{l_4} = \frac{\mu_v (pc)}{\mu_l (DC)} = |\omega_2| \frac{(pc)}{(DC)}. \quad (8.5)$$

Для определения ускорений строим согласно уравнению (8.2) план ускорений (рис. 294, в), в котором вектор $\boldsymbol{a}_B$ откладываем в виде отрезка (πb) mm , равного отрезку (AB) mm на схеме (рис. 294, а). Тогда масштаб μ_a получает простое выражение

$$a_B = \omega_2^2 l_2 = \omega_2^2 \mu_l (AB) = \mu_a (\pi b),$$

откуда

$$\mu_a = \omega_2^2 \mu_l = |\omega_2|^2 \mu_v.$$

Величины нормальных ускорений $\boldsymbol{a}_{CB}^n$ и $\boldsymbol{a}_{CD}^n$ равны

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_3} = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn_3) = \omega_2^2 \mu_l (bn_3)$$

и

$$a_{CD}^n = \frac{v_C^2}{l_4} = \frac{\mu_v^2 (pc)^2}{\mu_l (DC)} = \mu_a (\pi n_4) = \omega_2^2 \mu_l (\pi n_4).$$

Величины тангенциальных ускорений $\boldsymbol{a}_{CB}^t$ и $\boldsymbol{a}_{CD}^t$ равны

$$a_{CB}^t = \mu_a (n_3 c) = \omega_2^2 \mu_l (n_3 c), \quad a_{CD}^t = \mu_a (n_4 c) = \omega_2^2 \mu_l (n_4 c).$$

Величина полного ускорения $\boldsymbol{a}_C$ точки C равна

$$a_C = \mu_a (\pi c) = \omega_2^2 \mu_l (\pi c).$$

Абсолютные величины угловых ускорений ε_3 и ε_4 звеньев 3 и 4 равны

$$|\varepsilon_3| = \frac{a_{CB}^t}{l_3} = \frac{\omega_2^2 \mu_l (n_3 c)}{\mu_l (BC)} = \omega_2^2 \frac{(n_3 c)}{(BC)}$$

и

$$|\varepsilon_4| = \frac{a_{CD}^t}{l_4} = \frac{\omega_2^2 \mu_l (n_4 c)}{\mu_l (DC)} = \omega_2^2 \frac{(n_4 c)}{(DC)}.$$

При построении планов скоростей удобно воспользоваться методом повернутых планов (§ 32,2°), выбрав за полюс p плана скоростей точку A на схеме механизма (рис. 294, а). Тогда построение плана сводится к проведению через точку $A(p)$ прямой Ac , параллельной прямой DC . Треугольник ABc (рис. 294, а) и будет представлять собой повернутый план скоростей, построенный в масштабе

$$\mu_v = |\omega_2| \mu_l.$$

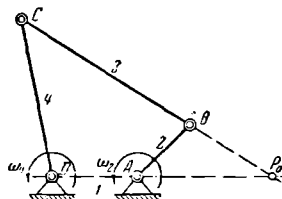


Рис. 295. К определению передаточного отношения i_{24} от кривошипа к коромыслу механизма шарнирного четырехзвенника.

Если кривошип 2 (рис. 294, а) имеет угловое ускорение ε_2 , то для нахождения скоростей и ускорений звеньев надо дополнительно рассмотреть начальное движение механизма и, пользуясь уже построенным планом скоростей, внести дополнения в план ускорений так, как это было показано в примере § 32,12°.

Если требуется определить передаточное отношение i_{24} между звеньями 2 и 4, то можно воспользоваться методом, указанным в § 25,1°. Для этого продолжаем направление BC звена 3 (рис. 295) до пересечения в точке P_0 с прямой DA и на основании соотношения (5.2) получаем:

$$i_{24} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = - \frac{(DP_0)}{(AP_0)}. \quad (8.6)$$

Так как угловая скорость ω_2 задана, то из формулы (8.6) определится угловая скорость ω_4 , а следовательно, может быть определена и скорость v_C точки C .

2°. В некоторых технических расчетах при исследовании механизмов требуется большая точность результатов, чем та, которая может быть получена графическими построениями. В этих случаях можно рекомендовать численные и аналитические методы расчета. Эти методы особенно полно были развиты Н. Г. Бруевичем и Вяч. А. Зиновьевым.

Задачи кинематического исследования численными методами сводятся к совместному решению уравнений проекций на оси координат контуров, образованных звеньями механизмов, с последующим дифференцированием этих уравнений для определения скоростей и ускорений (см. § 31,2° и § 32,13°).

В качестве примера рассмотрим механизм шарнирного четырехзвенника (рис. 296), у которого в качестве обобщенной координаты принят угол φ_2 , образованный осью AB звена 2 с осью Ax . Рассматривая контур $ABCD$, можно составить следующее векторное уравнение его замкнутости:

$$\overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{DC}$$

или

$$l_1 + l_2 + l_3 = l_4. \quad (8.7)$$

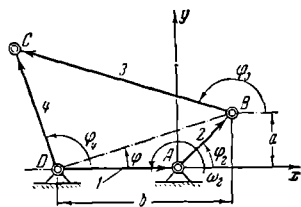


Рис. 296. К численному решению задачи кинематического анализа механизма шарнирного четырехзвенника.

Проектируя это векторное уравнение на оси системы координат xAy , получаем:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 &= l_4 \cos \varphi_4, \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 &= l_4 \sin \varphi_4, \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4 — углы, образованные осями звеньев 1, 2, 3 и 4 с осью Ax .

Так как $\varphi_1 = 0$, то $\sin \varphi_1 = 0$ и $\cos \varphi_1 = 1$. Следовательно, уравнения (8.8) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 &= l_4 \cos \varphi_4, \\ l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 &= l_4 \sin \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Так как угол φ_2 поворота ведущего звена 2 задан, то, обозначая известные величины в уравнениях (8.9)

$$l_1 + l_2 \cos \varphi_2 = a \quad \text{и} \quad l_2 \sin \varphi_2 = b,$$

получаем:

$$a + l_3 \cos \varphi_3 = l_4 \cos \varphi_4, \quad b + l_3 \sin \varphi_3 = l_4 \sin \varphi_4. \quad (8.10)$$

Возведем уравнения (8.10) в квадрат и сложим. Получим:

$$a^2 + b^2 + 2al_3 \cos \varphi_3 + l_3^2 + 2bl_3 \sin \varphi_3 - l_4^2 = 0$$

или

$$\frac{a^2 + b^2 + l_3^2 - l_4^2}{2al_3} + \cos \varphi_3 + \frac{b}{a} \sin \varphi_3 = 0. \quad (8.11)$$

Вводя для сокращения записи обозначения

$$\frac{a^2 + b^2 + l_3^2 - l_4^2}{2al_3} = A \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = B,$$

имеем:

$$A + \cos \varphi_3 = -B \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_3}. \quad (8.12)$$

Возводя обе части уравнения (8.12) в квадрат, получаем:

$$A^2 + 2A \cos \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3 = B^2 (1 - \cos^2 \varphi_3),$$

откуда

$$(1 + B)^2 \cos^2 \varphi_3 + 2A \cos \varphi_3 + (A^2 - B^2) = 0.$$

Таким образом, мы получили квадратное уравнение, из которого и определяется угол φ_3 в функции угла φ_2 . Имеем:

$$\cos \varphi_3 = -\frac{1}{(1+B)^2} [A \pm B \sqrt{1 - (A^2 - B^2)}], \quad (8.13)$$

где

$$A = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_4^2 + 2l_1 l_2 \cos \varphi_2}{2l_3 (l_1 + l_2 \cos \varphi_2)} \quad \text{и} \quad B = \frac{l_2 \sin \varphi_2}{l_1 + l_2 \cos \varphi_2}.$$

Для определения угла φ_4 достаточно воспользоваться одним из уравнений (8.10). Имеем:

$$\cos \varphi_4 = \frac{a + l_3 \cos \varphi_3}{l_4} = \frac{l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3}{l_4},$$

где $\cos \varphi_3$ определяется из формулы (8.13).

Можно получить и непосредственную связь $\cos \varphi_4$ с $\cos \varphi_2$, если применить только что рассмотренный прием для определения $\cos \varphi_3$. Для этого в уравнениях (8.10) члены, содержащие l_3 и l_4 , надо поменять местами и далее проделать известные нам преобразования.

3°. Для определения угловых скоростей ω_3 и ω_4 звеньев 3 и 4 дифференцируем уравнения (8.9) по обобщенной координате φ_3 . Получаем:

$$\left. \begin{aligned} -l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} &= -l_4 \sin \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2}, \\ l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} &= l_4 \cos \varphi_4 \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Имея в виду, что $d\varphi_3/d\varphi_2$ есть аналог $\omega_{3\varphi_2} = l_{32}$ угловой скорости ω_3 звена 3 и $d\varphi_4/d\varphi_2$ есть аналог $\omega_{4\varphi_2} = l_{42}$ угловой скорости ω_4 звена 4 (см. § 30,5°), получаем:

$$\left. \begin{aligned} l_2 \sin \varphi_2 + l_{32} l_3 \sin \varphi_3 &= l_{42} l_4 \sin \varphi_4, \\ l_2 \cos \varphi_2 + l_{32} l_3 \cos \varphi_3 &= l_{42} l_4 \cos \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Из углов, входящих в первое уравнение (8.15), вычитаем общий угол φ_3 , что соответствует повороту осей координат xAy (рис. 296) на общий угол φ_3 . Имеем:

$$l_2 \sin (\varphi_2 - \varphi_3) = l_{42} l_4 \sin (\varphi_4 - \varphi_3),$$

откуда получаем:

$$l_{42} = \frac{l_2 \sin (\varphi_2 - \varphi_3)}{l_4 \sin (\varphi_4 - \varphi_3)}. \quad (8.16)$$

После аналогичного преобразования того же уравнения путем поворота осей координат на угол φ_4 получаем для угловой скорости $\omega_{3\varphi_2}$

$$i_{32} = - \frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}. \quad (8.17)$$

Для определения угловых ускорений ϵ_3 и ϵ_4 звеньев 3 и 4 дифференцируем по обобщенной координате φ_1 уравнения (8.15), что приводит к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} l_2 \cos \varphi_2 + i_{32}^2 l_3 \cos \varphi_3 + i_{32}' l_3 \sin \varphi_3 &= i_{42}^2 l_4 \cos \varphi_4 + i_{42}' l_4 \sin \varphi_4, \\ -l_2 \sin \varphi_2 - i_{32}^2 l_3 \sin \varphi_3 + i_{32}' l_3 \cos \varphi_3 &= -i_{42}^2 l_4 \sin \varphi_4 + i_{42}' l_4 \cos \varphi_4, \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

где i_{32} и i_{42} — аналоги угловых скоростей, i_{32}' и i_{42}' — аналоги угловых ускорений, равные производным по обобщенной координате от соответствующих аналогов угловых скоростей, являющихся передаточными отношениями от звеньев 3 и 4 к звену 2.

Величины аналогов i_{32}' и i_{42}' можно определить, если выполнить преобразования координат последовательным поворотом осей координат на углы φ_3 и φ_4 . Имеем:

$$i_{42}' = \frac{l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + i_{32}^2 l_3 - i_{42}^2 l_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3)}{l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)}, \quad (8.19)$$

$$i_{32}' = \frac{l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) - i_{42}^2 l_4 + i_{32}^2 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4)}{-l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}. \quad (8.20)$$

Истинные скорости ω_3 , ω_1 и ускорения ϵ_3 и ϵ_4 звеньев 3 и 4 согласно формулам (6.3) и (6.4) равны

$$\omega_3 = \omega_2 i_{32}, \quad \omega_4 = \omega_2 i_{42}, \quad \epsilon_3 = \omega_2^2 i_{32}' + \epsilon_2 i_{32}, \quad \epsilon_4 = \omega_2^2 i_{42}' + \epsilon_2 i_{42},$$

где ω_2 и ϵ_2 — заданные угловая скорость и ускорение звена 2.

§ 37. Кривошипно-ползунный механизм

1°. Следующим четырехзвенным механизмом, широко применяемым в технике, является *кривошипно-ползунный механизм* (рис. 297, а). Рассмотрим перманентное движение механизма, когда кривошип 2 вращается с заданной постоянной угловой скоростью ω_2 . Для определения скоростей и ускорений воспользуемся уравнениями (6.42) и (6.46). Имеем:

$$\begin{aligned} v_B + v_{CB} &= v_{C_1} + v_{CC_1}, \\ a_B + a_{CB}^n + a_{CB}' &= a_{C_1} + a_{CC_1}^k + a_{CC_1}^r, \end{aligned}$$

или так как $v_{C_1} = 0$, $a_{C_1} = 0$ и $a_{CC_1}^k = 0$, то

$$v_C = v_B + v_{CB} = v_{CC_1} \quad (8.21)$$

и

$$a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}' = a_{CC_1}^r. \quad (8.22)$$

По уравнению (8.21) строим план скоростей в масштабе кривошипа 2 (рис. 297, б). Величина скорости v_C точки С равна

$$v_C = |\omega_2| \mu_l (pc).$$

Абсолютная величина угловой скорости ω_3 шатуна 3 равна

$$|\omega_3| = |\omega_2| \frac{(bc)}{(BC)}.$$

На рис. 297, а показано построение повернутого плана скоростей с полюсом p плана, совпадающим с точкой А.

Для определения ускорений строим в масштабе кривошипа план ускорений согласно уравнениям (8.22) (рис. 297, в). Величина ускорения a_C точки С равна

$$a_C = \omega_2^2 \mu_l (\pi c).$$

Абсолютная величина углового ускорения ϵ_3 шатуна 3 равна

$$|\epsilon_3| = \omega_2^2 \frac{(\pi c)}{BC}.$$

Рис. 297. Кривошипно-ползунный механизм: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) план ускорений.

2°. Перейдем к численному определению скоростей и ускорений звеньев кривошипно-ползунного механизма. Рассмотрим кривошипно-ползунный механизм, изображенный на рис. 298. Для определения скоростей и ускорений звеньев представим контур $A'ABC$ как сумму векторов

$$\overline{A'A} + \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{A'C}$$

или

$$a + l_2 + l_3 = x_C. \quad (8.23)$$

Проектируя это векторное уравнение на оси Ox и Oy , получаем:

$$l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 = x_C,$$

$$a + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 = 0. \quad (8.24)$$

Из второго уравнения (8.24) имеем:

$$\sin \varphi_3 = - \frac{l_2 \sin \varphi_2 + a}{l_3}. \quad (8.25)$$

Определив угол φ_3 , можно определить расстояние x_C из первого уравнения (8.24).

Уравнения для определения угловых скоростей и угловых ускорений получим двукратным дифференцированием уравнений (8.24) по обобщенной координате φ_2 .

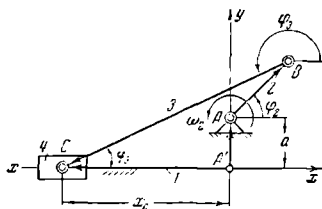


Рис. 298. Схема кривошипно-ползунного механизма.

Для определения угловой скорости ω_3 шатуна 3 и скорости v_C ползуна 4 имеем:

$$-l_2 \sin \varphi_2 - l_{32} l_3 \sin \varphi_3 = v_{C\varphi_2}, \quad l_2 \cos \varphi_2 + l_{32} l_3 \cos \varphi_3 = 0, \quad (8.26)$$

где $l_{32} = d\varphi_3/d\varphi_2$ и $v_{C\varphi_2} = dx_C/d\varphi_2$ — соответствующие аналоги скоростей. Аналог скорости $v_{C\varphi_2}$ определится из первого уравнения (8.26), если подставить в него значение аналога угловой скорости l_{32} шатуна 3 из второго уравнения (8.26). Имеем:

$$l_{32} = -\frac{l_2 \cos \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3} \quad \text{и} \quad v_{C\varphi_2} = l_2 \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\cos \varphi_3}. \quad (8.27)$$

Для определения аналогов углового ускорения i'_{32} шатуна 3 и ускорения $a_{C\varphi_2}$ ползуна 4 получаем:

$$\left. \begin{aligned} -l_2 \cos \varphi_2 - i'_{32} l_3 \cos \varphi_3 - i'_{32} l_3 \sin \varphi_3 &= a_{C\varphi_2}, \\ -l_2 \sin \varphi_2 - i'_{32} l_3 \sin \varphi_3 + i'_{32} l_3 \cos \varphi_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

где $i'_{32} = di_{32}/d\varphi_2$ и $a_{C\varphi_2} = dv_{C\varphi_2}/d\varphi_2$ — аналоги ускорений.

Из второго уравнения (8.28) определяем аналог углового ускорения

$$i'_{32} = \frac{l_2 \sin \varphi_2 + i'_{32} l_3 \sin \varphi_3}{l_3 \cos \varphi_3}. \quad (8.29)$$

Определив аналог углового ускорения i'_{32} , можно, подставив его значение в первое уравнение (8.28), определить и аналог $a_{C\varphi_2}$.

Действительные скорости v_C , ω_3 и ускорения a_C и ε_3 равны

$$v_C = \omega_2 v_{C\varphi_2}, \quad \omega_3 = \omega_2 i_{32}, \quad a_C = \omega_2^2 a_{C\varphi_2} + \varepsilon_2 v_{C\varphi_2}, \quad \varepsilon_3 = \omega_2^2 i'_{32} + \varepsilon_2 i_{32},$$

где ω_2 и ε_2 — заданные угловая скорость и ускорение звена 2.

Если ось $x-x$ направляющей ползуна 4 (рис. 298) проходит через точку А, то в уравнении (8.24) величина a обращается в нуль и уравнение (8.25) принимает вид

$$\sin \varphi_3 = -\frac{l_2}{l_3} \sin \varphi_2. \quad (8.30)$$

Уравнения (8.26) и (8.28) остаются без изменений.

3°. В некоторых инженерных расчетах перемещение x_C , аналоги скорости $v_{C\varphi_2}$ и ускорения $a_{C\varphi_2}$ ползуна 4 (рис. 299) можно приближенно выразить в функции угла поворота кривошипа 2. Из равенства (8.30) имеем:

$$\sin \varphi_3 = -\lambda \sin \varphi_2, \quad (8.31)$$

где $\lambda = l_2/l_3$ есть отношение длины АВ кривошипа 2 к длине ВС шатуна 3. В большинстве кривошипно-ползунных механизмов величина

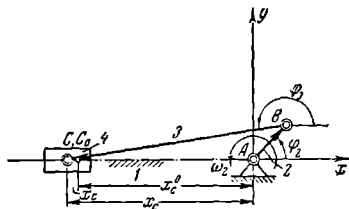


Рис. 299. Схема кривошипно-ползунного механизма, направляющая ползуна которого проходит через ось вращения кривошипа.

λ меньше единицы. Из (8.31) следует:

$$\cos \varphi_3 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_3} = \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}, \quad (8.32)$$

где значение корня следует взять со знаком минус, потому что, согласно рис. 299, углу φ_3 , равному 0° , соответствует угол φ_2 , равный 180° , косинус которого равен -1 , т. е. при $\varphi_2 = 0^\circ$ имеем:

$$\cos \varphi_3 = -\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 0^\circ} = -1.$$

Подставляя выражение (8.30) в первое уравнение (8.24) и имея в виду соотношение (8.32), получаем:

$$x_C = l_3 (\lambda \cos \varphi_3 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}). \quad (8.33)$$

Выражение $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}$ разложим в ряд по формуле бинома Ньютона:

$$(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi_2 - \frac{1}{8} \lambda^4 \sin^4 \varphi_2 - \frac{1}{16} \lambda^6 \sin^6 \varphi_2 \dots \quad (8.34)$$

Четные степени синусов угла можно выразить через косинусы углов, кратных $2\varphi_2$, по формулам, известным из тригонометрии. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \varphi_2 &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi_2), \\ \sin^4 \varphi_2 &= \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\varphi_2 + \cos 4\varphi_2), \\ \sin^6 \varphi_2 &= \frac{1}{32} (10 - 15 \cos 2\varphi_2 + 6 \cos 4\varphi_2 - \cos 6\varphi_2). \end{aligned} \right\} \quad (8.35)$$

Если подставить значения (8.35) в формулу (8.34), то, собрав члены, содержащие $\cos 2\varphi_2$, $\cos 4\varphi_2$, $\cos 6\varphi_2$, будем иметь:

$$(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2)^{1/2} = C_0 + C_2 \cos 2\varphi_2 + C_4 \cos 4\varphi_2 + C_6 \cos 6\varphi_2 \dots,$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{3}{64} \lambda^4 - \frac{5}{256} \lambda^6 - \dots, \\ C_2 &= \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{16} \lambda^4 + \frac{15}{512} \lambda^6 + \dots, \\ C_4 &= -\frac{1}{64} \lambda^4 - \frac{3}{256} \lambda^6 + \dots, \\ C_6 &= \frac{1}{512} \lambda^6 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

Равенство (8.33) может быть теперь представлено так:

$$x_C = l_3 (\lambda \cos \varphi_3 - C_0 - C_2 \cos 2\varphi_2 - C_4 \cos 4\varphi_2 - C_6 \cos 6\varphi_2 - \dots). \quad (8.37)$$

При значениях $\lambda \leq 1/3$ для практических расчетов достаточно ограничиться третьим членом ряда (8.34), так как в этом случае перемещение x_C может быть подсчитано с точностью до пятого знака после запятой. При точности до третьего знака после запятой достаточно ограничиться вторым членом ряда (8.34). Тогда формула (8.33) принимает вид

$$x_C = l_3 (\lambda \cos \varphi_3 - 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi_3), \quad (8.38)$$

или, принимая во внимание первое выражение (8.35), получаем:

$$x_C = l_3 \left(\lambda \cos \varphi_3 - 1 + \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{1}{4} \lambda^3 \cos 2\varphi_3 \right). \quad (8.39)$$

Последнее выражение может быть представлено так:

$$x_C = l_3 \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{\lambda} + \cos \varphi_3 - \frac{1}{4} \lambda \cos 2\varphi_3 \right). \quad (8.40)$$

При кинематическом исследовании поршневых машин весьма часто перемещение ползуна 4 (рис. 299) отсчитывают не от центра A , а от крайнего предельного положения C_0 ползуна 4, когда при $\varphi_3 = 0$ кривошип 2 и шатун 3 образуют одну прямую. Если для механизма, изображенного на рис. 299, отсчет перемещений вести от точки C_0 , то равенство для определения перемещения x_C можно представить с учетом формул (8.34) и (8.35) так:

$$x_C = l_2 + l_3 + l_3 \cos \varphi_3 - l_3 \left(1 - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^3 \cos 2\varphi_3 \right).$$

После подстановки $l_3 = l_2/\lambda$ и упрощений получаем:

$$x_C = l_2 \left(1 + \frac{\lambda}{4} + \cos \varphi_3 - \frac{1}{4} \lambda \cos 2\varphi_3 \right). \quad (8.41)$$

Для определения аналога скорости $v_{C\varphi_3}$ точки C дифференцируем выражение (8.40) по обобщенной координате φ_3 :

$$v_{C\varphi_3} = -l_2 \left(\sin \varphi_3 - \frac{1}{2} \lambda \sin 2\varphi_3 \right). \quad (8.42)$$

Для определения аналога ускорения $a_{C\varphi_3}$ точки C дифференцируем равенство (8.42):

$$a_{C\varphi_3} = -l_2 (\cos \varphi_3 - \lambda \cos 2\varphi_3), \quad (8.43)$$

где $v_{C\varphi_3}$ и $a_{C\varphi_3}$ — аналоги скорости и ускорения точки C . Скорость v_C и ускорение a_C определяются аналогично случаю, рассмотренному на рис. 298.

§ 38. Кулисные механизмы

1°. На рис. 300, а показан кулисный механизм. Рассмотрим перманентное движение механизма, когда кривошип 2 вращается с заданной постоянной угловой скоростью ω_2 . Для определения скоростей и ускорений воспользуемся уравнениями (6.52) и (6.56). Имеем:

$$\mathbf{v}_{C_4} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C_4B} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{C_4C}$$

и

$$\mathbf{a}_{C_4} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C_4B}^n + \mathbf{a}_{C_4B}^t = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{C_4C}^k + \mathbf{a}_{C_4C}^r,$$

или так как $\mathbf{v}_B = 0$ и $\mathbf{a}_B = 0$, то

$$\mathbf{v}_{C_4} = \mathbf{v}_{C_4B} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{C_4C} \quad (8.44)$$

и

$$\mathbf{a}_{C_4} = \mathbf{a}_{C_4B}^n + \mathbf{a}_{C_4B}^t = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{C_4C}^k + \mathbf{a}_{C_4C}^r. \quad (8.45)$$

Согласно уравнению (8.44) строим план скоростей в масштабе кривошипа 2 (рис. 300, б). Величина скорости $\mathbf{v}_{C_4}$ точки C_4 кулисы 4

$$v_{C_4} = |\omega_2| \mu_l (pc_4).$$

Абсолютная величина угловой скорости ω_4 кулисы 4

$$|\omega_4| = |\omega_2| \frac{(pc_4)}{(BC_4)}.$$

Величина скорости $\mathbf{v}_{C_4C}$ скольжения кулисы 4 вдоль ползуна 3

$$v_{C_4C} = |\omega_2| \mu_l (cc_4).$$

Для определения ускорений согласно уравнению (8.45) строим в масштабе кривошипа 2 план ускорений (рис. 300, в). Величина ускорения $\mathbf{a}_{C_4}$ точки C_4

$$a_{C_4} = \omega_2^2 \mu_l (\pi c_4).$$

Абсолютная величина углового ускорения ε_4 кулисы 4

$$|\varepsilon_4| = \omega_2^2 \frac{(nc_4)}{(BC_4)}.$$

Величина ускорения $\mathbf{a}_{C_4C}^r$ скольжения кулисы 4 вдоль ползуна 3

$$a_{C_4C}^r = \omega_2^2 \mu_l (kc_4).$$

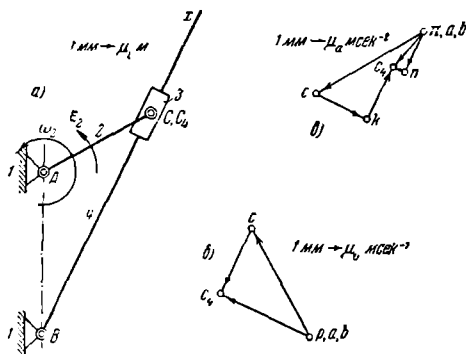


Рис. 300. Кулисный механизм: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) план ускорений.

Если требуется определить передаточное отношение i_{24} между звеньями 2 и 4, то можно воспользоваться приемом, указанным в § 25,3°. Для этого через точку C (рис. 301) проводим прямую CP_0 ,

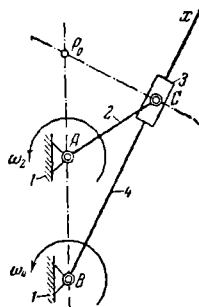


Рис. 301. К определению передаточного отношения от звена 2 к звену 4 кулисного механизма.

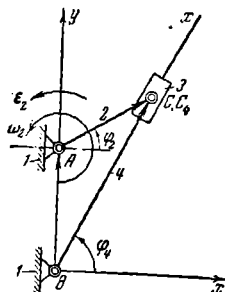


Рис. 302. Кинематическая схема кулисного механизма в виде замкнутого векторного контура.

перпендикулярную к направлению BC кулисы 4, до пересечения в точке P_0 с прямой BA . Тогда

$$i_{24} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{(BP_0)}{(AP_0)}. \quad (8.46)$$

2°. Переходим к численному определению перемещений, скоростей и ускорений звеньев кулисного механизма, показанного на рис. 302. Из треугольника ABC имеем:

$$\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC} \text{ или } l_1 + l_3 = l_4.$$

Уравнение проекций на оси координат xBy

$$l_2 \cos \varphi_2 = l_4 \cos \varphi_4, \quad l_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_4 \sin \varphi_4. \quad (8.47)$$

Для определения угла φ_4 разделим второе уравнение на первое. Получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{l_1 + l_2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2}. \quad (8.48)$$

Определив угол φ_4 , находим из первого уравнения (8.47) l_4 :

$$l_4 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \sin \varphi_2}.$$

Для определения аналогов скоростей звеньев механизма дифференцируем по обобщенной координате φ_2 уравнения (8.47). Получаем:

$$\left. \begin{aligned} -l_2 \sin \varphi_2 &= -i_{42} l_4 \sin \varphi_4 + (v_{C_4 C})_{\varphi_2} \cos \varphi_4, \\ l_2 \cos \varphi_2 &= i_{42} l_4 \cos \varphi_4 + (v_{C_4 C})_{\varphi_2} \sin \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (8.49)$$

Из углов первого и второго уравнений вычитаем угол φ_4 :

$$(v_{C_4C})_{\varphi_2} = -l_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_4), \quad (8.50)$$

$$i_{42} = \frac{l_2}{l_4} \cos(\varphi_2 - \varphi_4), \quad (8.51)$$

где $(v_{C_4C})_{\varphi_2}$ и i_{42} — соответствующие аналоги скоростей.

Для определения ускорений звеньев механизма дифференцируем по обобщенной координате φ_3 уравнения (8.49)

$$\left. \begin{aligned} -l_3 \cos \varphi_3 &= -i_{42}^2 l_4 \cos \varphi_4 - i'_{42} l_4 \sin \varphi_4 - (a_{C_4C}^k)_{\varphi_2} \sin \varphi_4 + \\ &\quad + (a_{C_4C}^r)_{\varphi_2} \cos \varphi_4, \\ -l_2 \sin \varphi_3 &= -i_{42}^2 l_4 \sin \varphi_4 + i'_{42} l_4 \cos \varphi_4 + (a_{C_4C}^k)_{\varphi_2} \cos \varphi_4 + \\ &\quad + (a_{C_4C}^r)_{\varphi_2} \sin \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

Вычитая из углов первого и второго уравнений (8.52) угол φ_4 , получаем:

$$(a_{C_4C}^r)_{\varphi_2} = i_{42}^2 l_4 - l_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_4), \quad (8.53)$$

$$i'_{42} = - \frac{(a_{C_4C}^k)_{\varphi_2} + l_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}{l_4}, \quad (8.54)$$

где i'_{42} , $(a_{C_4C}^k)_{\varphi_2}$ и $(a_{C_4C}^r)_{\varphi_2}$ — соответствующие аналоги углового, кориолисова и релятивного ускорений. Определение истинных скоростей и ускорений звеньев механизма при заданных угловой скорости ω_3 и углового ускорения ε_3 может быть сделано аналогично ранее рассмотренным случаям с помощью формул (6.5) — (6.8).

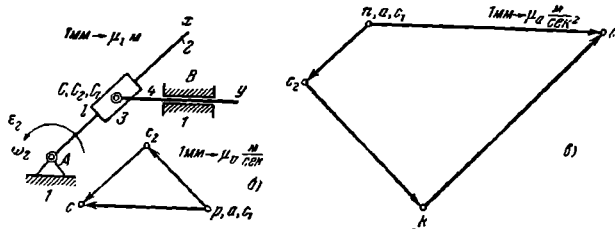


Рис. 303. Кулисный механизм с двумя ползунами: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) план ускорений.

3°. На рис. 303, а показан кулисный механизм ABC с двумя поступательными парами. Рассмотрим перманентное движение механизма, когда кулиса 2 вращается с заданной постоянной угловой скоростью ω_3 . Для определения скоростей и ускорений воспользуемся уравнениями (6.58) и (6.60). Имеем:

$$v_C = v_{C_2} + v_{CC_2} = v_{C_1} + v_{CC_1}$$

и

$$a_C = a_{C_2} + a_{CC_2}^k + a_{CC_2}^r = a_{C_1} + a_{CC_1}^k + a_{CC_1}^r,$$

или так как $v_{C_1} = 0$, $a_{C_1} = 0$ и $a_{CC_1}^h = 0$, то

$$v_C = v_{C_2} + v_{CC_2} = v_{CC_1}, \quad (8.55)$$

$$a_C = a_{C_2} + a_{CC_2}^h + a_{CC_2}^r = a_{CC_1}^r. \quad (8.56)$$

По уравнению (8.55) строим план скоростей (рис. 303,б). Величина скорости v_C точки C

$$v_C = |\omega_2| \mu_l (pc).$$

Величина скорости v_{CC_2} скольжения ползуна 3 по кулисе 2

$$v_{CC_2} = |\omega_2| \mu_l (c_2c).$$

Для определения ускорений строим согласно уравнению (8.56) план ускорений (рис. 303,в). Величина ускорения a_C точки C

$$a_C = \omega_2^2 \mu_l (\pi c).$$

Величина ускорения $a_{CC_2}^r$ скольжения ползуна 3 по кулисе 2

$$a_{CC_2}^r = \omega_2^2 \mu_l (kc).$$

4°. Переходим к численному определению перемещений, скоростей и ускорений звеньев механизма, показанного на рис. 304. Продолжим ось BC направляющей B до пересечения в точке D с осью Ay и представим контур $ADCA$ как сумму векторов $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$ или $a + x_C = l_2$.

Проектируя это векторное уравнение на оси координат, получаем:

$$x_C = l_2 \cos \varphi_2 \text{ и } a = l_2 \sin \varphi_2. \quad (8.57)$$

Из уравнений (8.57) находим:

$$x_C = a \operatorname{ctg} \varphi_2 \quad (8.58)$$

и

$$l_2 = \frac{a}{\sin \varphi_2}. \quad (8.59)$$

Для определения аналогов скоростей $v_{C\varphi_2}$ и $(v_{CC_2})_{\varphi_2}$ дифференцируем уравнения (8.58) и (8.59) по обобщенной координате φ_2 . Имеем:

$$v_{C\varphi_2} = -a \frac{1}{\sin^2 \varphi_2}, \quad (8.60)$$

$$(v_{CC_2})_{\varphi_2} = \frac{dl_2}{d\varphi_2} = -a \frac{\cos \varphi_2}{\sin^2 \varphi_2} = -a \frac{\cos \varphi_2}{1 - \cos^2 \varphi_2}. \quad (8.61)$$

Для определения аналога ускорений $a_{C\varphi_2}$ дифференцируем по обобщенной координате φ_2 зависимость (8.60). Получаем:

$$a_{C\varphi_2} = 2a \frac{\cos \varphi_2}{\sin^3 \varphi_2}. \quad (8.62)$$

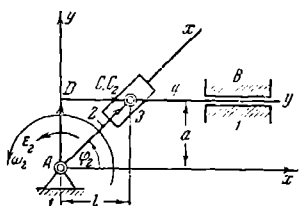


Рис. 304. Кинематическая схема кулисного механизма с двумя ползунами в виде замкнутого векторного контура.

Для определения аналога ускорения $(a'_{CC_2})_{\varphi_2}$ можно непосредственно продифференцировать по обобщенной координате уравнение (8.61). Получаем:

$$a'_{CC_2} = a \frac{1 + \cos^2 \varphi_2}{\sin^3 \varphi_2}. \quad (8.63)$$

Истинные скорости и ускорения звеньев механизма определяются аналогично ранее рассмотренным случаям.

5°. На рис. 305, а показан кулисный механизм ABC. Рассмотрим перманентное движение механизма, когда кривошип 2 вращается с заданной постоянной угловой скоростью ω_2 . Для определения скоростей и ускорений воспользуемся уравнениями (6.42) и (6.46). Имеем:

$$v_{B_4} = v_B + v_{B_4B} = v_{B_1} + v_{B_1B_4}$$

и

$$a_{B_4} = a_B + a_{B_4B}^k + a_{B_4B}^r = \\ = a_{B_1} + a_{B_4B_1}^k + a_{B_4B_1}^r,$$

или так как $v_{B_1} = 0$, $a_{B_1} = 0$, $a_{B_4B}^k = 0$ и $a_{B_4B}^r = 0$, то

$$v_{B_4} = v_{B_1} + v_{B_1B_4} = v_{B_1B_4} \quad (8.64)$$

и

$$a_{B_4} = a_B + a_{B_4B}^r = a_{B_4B_1}^r. \quad (8.65)$$

По уравнению (8.64) строим план скоростей (рис. 305, б). Величина скорости v_{B_4} точки B_4 звена 4

$$v_{B_4} = |\omega_2| \mu_l (pb_4).$$

Величина скорости v_{B_4B} скольжения кулисы звена 4 по ползуну 3

$$v_{B_4B} = |\omega_2| \mu_l (bb_4).$$

По уравнению (8.65) строим план ускорений (рис. 305, в). Величина ускорения a_{B_4} точки B_4 звена 4

$$a_{B_4} = \omega_2^2 \mu_l (\pi b_4).$$

Величина ускорения a'_{B_4B} скольжения кулисы звена 4 по ползуну 3

$$a'_{B_4B} = \omega_2^2 \mu_l (bb_4).$$

6°. Аналитические выражения для скоростей и ускорений точек механизма (рис. 306) могут быть получены из уравнений проекций замкнутого векторного контура ABD на оси координат Ax и Ay. Имеем:

$$b = l_2 \cos \varphi_2, \quad a = l_2 \sin \varphi_2 = y_{B_4}. \quad (8.66)$$

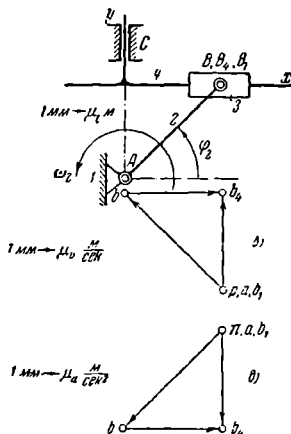


Рис. 305. Кулисный механизм с двумя ползунами: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) план ускорений.

Дифференцируя зависимости (8.66) по обобщенной координате φ_2 , получаем:

$$\left. \begin{aligned} (v_{B_4B})_{\varphi_2} &= -l_2 \sin \varphi_2, \\ v_{B_4\varphi_2} &= l_2 \cos \varphi_2, \end{aligned} \right\} \quad (8.67)$$

где

$$(v_{B_4B})_{\varphi_2} = db/d\varphi_2, \quad v_{B_4\varphi_2} = \frac{dy_{B_4}}{d\varphi_2}$$

суть аналоги скоростей.

Дифференцируя зависимости (8.67), получаем аналоги ускорений

$$(a_{B_4B})_{\varphi_2} = -l_2 \cos \varphi_2, \quad a_{B_4\varphi_2} = -l_2 \sin \varphi_2. \quad (8.68)$$

Из рассмотрения зависимостей (8.66), (8.67) и (8.68) видно, что звено 4 механизма имеет простое гармоническое движение.

Истинные скорости и ускорения звеньев механизма при заданных угловой скорости ω_2 и угловом ускорении ϵ_2 определяются аналогично ранее рассмотренным случаям.

7°. Из плоских кулисных механизмов с одними поступательными парами

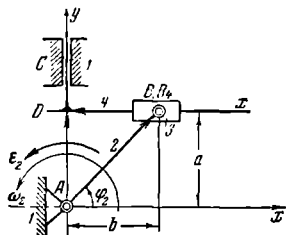


Рис. 306. Кинематическая схема кулисного механизма в виде замкнутого векторного контура.

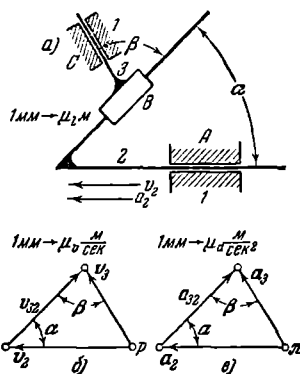


Рис. 307. Клиновой механизм с одними поступательными парами: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) план ускорений.

в технике получили применение трехзвенные клиновые механизмы (см. § 20, 6°). На рис. 307, а дана схема трехзвенного клинового механизма ABC .

Пусть звено 2 движется с заданной скоростью v_2 и заданным ускорением a_2 . Скорость v_3 и ускорение a_3 звена 3 определяются из уравнений

$$v_3 = v_2 + v_{32} \quad (8.69)$$

и

$$a_3 = a_2 + a_{32}. \quad (8.70)$$

План скоростей построен на рис. 307, б, а план ускорений — на рис. 307, в. Вследствие того, что звенья механизма имеют только поступательные движения, планы скоростей и ускорений представляют собой подобные фигуры (рис. 307, б и в). Это позволяет в простой форме получить аналитические зависимости между перемещениями, скоростями и ускорениями звеньев 2 и 3. Имеем для перемещения s_3 звена 3

$$s_3 = s_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad (8.71)$$

где s_2 — перемещение звена 2. Скорость v_3 и ускорение a_3 звена 3 соответственно равны

$$v_3 = v_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad a_3 = a_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (8.72)$$

Кинематический анализ более сложных клиновых механизмов может быть выполнен аналогичными методами.

ГЛАВА IX

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 39. Определение положений

1°. Задача о положениях кулачковых механизмов, у которых радиусы кривизны отдельных участков профиля кулачка заданы, решается общими приемами, изложенными выше, путем замены высших пар кинематическими цепями с низшими парами (см. § 18). При этом получаются заменяющие механизмы с одними только низшими парами. Задача об определении положений этих механизмов может быть решена общими методами, изложенными в § 31. Задача оказывается более сложной, когда радиусы кривизны профилей неизвестны. Тогда задача может быть решена геометрически приближенно с помощью метода обращения движения.

Начнем с рассмотрения задачи о положениях кулачкового механизма с поступательно движущимися кулачком 1 и толкателем 2 (рис. 308, а), у которого ведомое звено — толкатель 2 оканчивается круглым роликом 3 радиуса r .

Профиль α — α кулачка 1 в этом случае называется *действительным профилем*, и прежде чем переходить к нахождению положений звена 2, необходимо по заданному действительному профилю построить так называемый *центральной профиль* β — β (рис. 308, а). Действительный и центральный профили представляют собой эквидистантные кривые, т. е. кривые, равноотстоящие друг от друга по нормальным на расстоянии, равном радиусу r ролика 3. Тогда, если известно направление нормалей в точках действительного профиля, откладываем на этих нормалях отрезки, равные радиусу ролика, и соединяем полученные точки плавной кривой. В результате такого построения найдем центральный профиль кулачка. Так как в большинстве случаев нормали профиля кулачка не бывают заданы, то определение центрального профиля ведется приближенными приемами. Для этого раствором циркуля, равным радиусу r ролика, проводим ряд окружностей, центры которых лежат на действительном профиле α — α (рис. 308, а). Центральный профиль получится, если обогнуть все проведенные окружности плавной кривой β — β . Теперь задача сведется к рассмотрению случая, когда ведомое звено 2 оканчивается точкой B , скользящей по профилю β — β .

положений звеньев I и 2 , так как при этом возможные ошибки графического построения будут меньшими.

Можно, далее, показать, что при равенстве масштабов μ_l и μ'_l путей (рис. 309), проходимых звеньями I и 2 , кривая перемещений $s_2 = s_2(s_1)$ будет подобной профилю кулачка I . В самом деле, проведем через начальное положение ведомого звена 2 , т. е. через точку B_1 (рис. 308, б), оси x и y так, чтобы ось y совпадала с направлением движения звена 2 , а ось x с направлением движения кулачка I . Тогда можно видеть, что отрезки: $(B_1 B^{II})$, $(B^{II} B^{III})$, $(B^{III} B^{IV})$, $(B^{IV} B^V)$, ..., отложенные

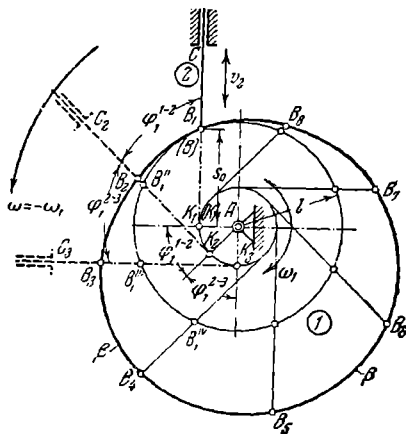


Рис. 310. Кинематическая схема кулачкового механизма с вращающимся кулачком и поступательно движущимся толкателем.

вдоль оси x , представляют собой пути, пройденные кулачком I за рассматриваемые промежутки времени, т. е. отрезок $(B_1 B^{II})$ представляет путь s_1^{1-2} , отрезок $(B^{II} B^{III})$ — путь s_1^{2-3} , отрезок $(B^{III} B^{IV})$ — путь s_1^{3-4} и т. д. Точно так же отрезки $(B^{II} B_2)$, $(B^{III} B_3)$, $(B^{IV} B_4)$, ..., отложенные параллельно оси y , представляют пути, пройденные звеном 2 от некоторого начального положения этого звена, т. е. отрезок $(B^{II} B_2)$ представляет путь s_2^{1-2} , отрезок $(B^{III} B_3)$ — путь s_2^{2-3} и т. д. Тогда кривая $\beta - \beta$ (рис. 308, б) является кривой $s_2 = s_2(s_1)$ и сам профиль

кулачка I представляет кривую зависимости перемещения звена 2 от перемещения кулачка I . Это обстоятельство значительно облегчает кинематическое исследование кулачковых механизмов указанного типа.

Отметим здесь, что указанное упрощение, которое мы получили для случая, когда элементом ведомого звена является *точка*, не может быть применено для кулачковых механизмов, у которых элементом ведомого звена является *произвольно заданная кривая*, так как в этом случае точками соприкосновения звеньев 2 и 1 могут быть различные точки этой кривой.

2°. Метод обращения движения может быть распространен и на тот случай кулачковых механизмов, когда кулачок I вращается вокруг некоторой оси A (рис. 310), а ведомое звено 2 движется поступательно в направляющих C .

За начальное положение механизма примем положение, в котором точка B занимает крайнее нижнее положение B_1 и радиус-вектор $\overline{AB} = \overline{AB_1} = l$ получается наименьшим.

В качестве обобщенной координаты примем угол φ_1 поворота кулачка I и будем рассматривать перманентное движение ме-

ханизма, когда кулачок I вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 .

Пусть кривая $\beta - \beta$ является центровым профилем кулачка I . Сообщим всему механизму общую угловую скорость $\omega = -\omega_1$. Тогда кулачок I остановится, а ведомое звено 2 будет вращаться с угловой скоростью $\omega = -\omega_1$ вокруг оси A и одновременно перемещаться в направляющих C со скоростью v_2 .

Из точки A опустим перпендикуляр AK на направление направляющих C и радиусом $AK = \sqrt{l^2 - s_0^2}$ опишем окружность. В обращенном движении направление движения звена 2 будет всегда касательным к окружности радиуса AK .

На этой окружности находим точки $K_1, K_2, K_3, \dots$, соответствующие равным углам $\varphi_1^{1-2} = \varphi_1^{2-3} = \varphi_1^{3-4}$.

Поворачиваем далее звено 2 в направлении угловой скорости $\omega = -\omega_1$ на угол φ_1^{1-2} . Тогда точка K_1 займет положение K_2 , а точка B_1 — положение B_1^{II} . Перемещаем, далее, звено 2 в направляющих C до тех пор, пока точка B не коснется профиля кулачка I . Если за начальное положение точки B звена 2 было принято положение B_1 , то во втором положении точка B займет положение B_2 . Пусть s_2^{1-2} — путь, пройденный звеном 2 при переходе из положения I в положение 2, равен

$$s_2^{1-2} = \mu_l [(K_2 B_2) - (K_2 B_1^{\text{II}})] = \mu_l [(K_2 B_2) - s_0] = \mu_l (B_1^{\text{II}} B_2),$$

где μ_l — масштаб чертежа.

Полученный путь s_2^{1-2} откладываем в масштабе μ_l на графике $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 311) в виде отрезка $b_2 = (B_1^{\text{II}} B_2)$. Получаем:

$$s_2^{1-2} = \mu_l (B_1^{\text{II}} B_2) = \mu_l b_2.$$

Далее, откладываем угол поворота φ_1^{2-3} и находим новое положение точки B звена 2 (рис. 310), положение B_3 . Полный путь s_2^{1-3} , пройденный ведомым звеном 2 от начального его положения, равен

$$s_2^{1-3} = \mu_l [(K_3 B_3) - (K_3 B_1^{\text{III}})] = \mu_l [(K_3 B_3) - s_0] = \mu_l (B_1^{\text{III}} B_3).$$

Полученный путь отложен на графике $s_2 = s_2(\varphi_1)$ в виде отрезка $b_3 = (B_1^{\text{III}} B_3)$ (рис. 311). Аналогичными построениями могут быть найдены все последующие положения звена 2, и может быть построен график $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 311) за полный оборот кулачка I . Если отсчет путей, проходимых звеном 2, вести из наинизшего или наивысшего его положений, то размер s_0 будет постоянным для всех положений этого звена. Тогда отсчет путей звена 2 можно вести от вспомогательной окружности радиуса l (рис. 310), равного $l = \sqrt{(AK)^2 + s_0^2}$.

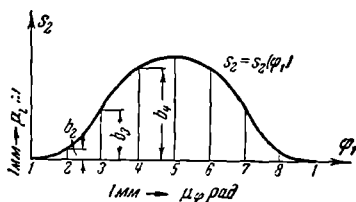


Рис. 311. График пути толкателя кулачкового механизма, схема которого показана на рис. 310.

достаточно отложить на ординатах от оси $O\varphi_1'$ соответствующие отрезки (AB_1) , (AB_2) , ... (рис. 312, б). Построив график, переносим ось абсцисс выше на расстояние, равное отрезку $(AB_1) = s_0/\mu_1$. Полученная диаграмма и представит собой график $s_2 = s_2(\varphi_1)$, построенный в масштабе μ_1 чертежа (рис. 312, а).

3°. Для определения положений кулачкового механизма с качающимся толкателем рис. 313 можно также применить метод обращения движения. Рассмотрим перманентное движение механизма, когда угловая скорость ω_1 кулачка 1 принята постоянной и обобщенной координатой является угол φ_1 поворота кулачка. Пусть кривая $\beta - \beta$ будет центровым профилем кулачка 1. В рассматриваемом случае задача сводится к нахождению последовательных положений звена 2, точка В которого находится на профиле $\beta - \beta$. Сообщаем всему механизму угловую скорость $\omega = -\omega_1$, равную по величине и противоположную по направлению угловой скорости ω_1 кулачка 1. Тогда кулачок 1 становится неподвижным, а толкатель 2 вращается вокруг оси О с угловой скоростью $\omega = -\omega_1$ и вокруг оси А с угловой скоростью ω_2 . При этом точка А займет последовательно положения A_1, A_2 и т. д. Так как угловая скорость ω_1 принята постоянной, то углы φ_1^{1-2} , φ_1^{2-3} , φ_1^{3-4} , ..., образуемые соответственно радиусами OA_1, OA_2, OA_3 и т. д., будут равны между собой. Поворачиваем толкатель 2 вокруг A_1 до соприкосновения в точке B_1 с профилем $\beta - \beta$ кулачка 1. Если в первоначальном положении угол, образуемый звеном 2 с радиусом OA_1 , был равен φ_0 , то во втором положении этот угол будет равен $\varphi_0 + \varphi_1^{1-2}$.

В третьем положении этот угол будет равен $\varphi_0 + \varphi_1^{1-2} + \varphi_1^{2-3}$... и т. д. Положение толкателя 2 будет определено, если из точек $A_1, A_2, A_3, \dots$ засечь кривую $\beta - \beta$ дугами радиусов $AB = A_1B_1 = A_2B_2 \dots$. Получен-

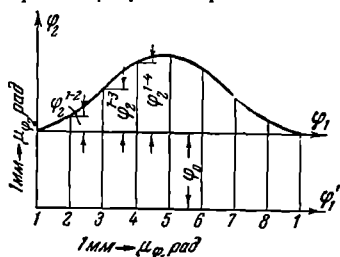
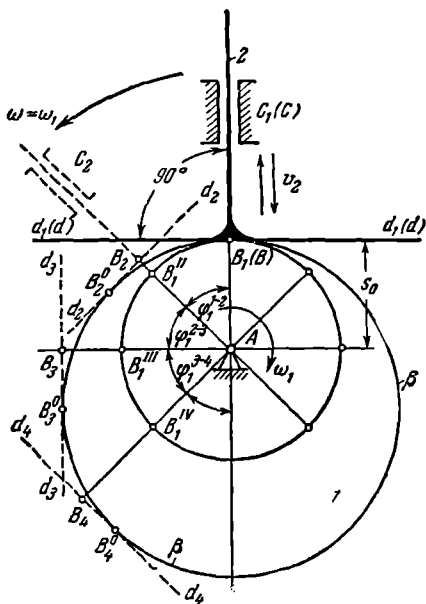


Рис. 314. График угла поворота толкателя кулачковых механизмов, схемы которых изображены на рис. 313 и рис. 316.



ные углы φ_0 , $\varphi_0 + \varphi_2^{i-2}$, $\varphi_0 + \varphi_2^i$, откладываем в произвольно выбранном масштабе μ_{φ_2} на ординатах графика (рис. 314), где по оси абсцисс отложены равные углы φ_1 в некотором произвольно выбранном масштабе μ_{φ_1} . Переместив ось абсцисс из положения φ_1^i в положение φ_1 , отстоящее на ординату, изображающую в масштабе μ_{φ_2} угол φ_0 , получаем диаграмму $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ углов поворота φ_2 толкателя 2 в функции обобщенной координаты φ_1 .

4°. Для определения положений кулачкового механизма (рис. 315), у которого толкатель 2 оканчивается плоскостью $d-d$, всегда

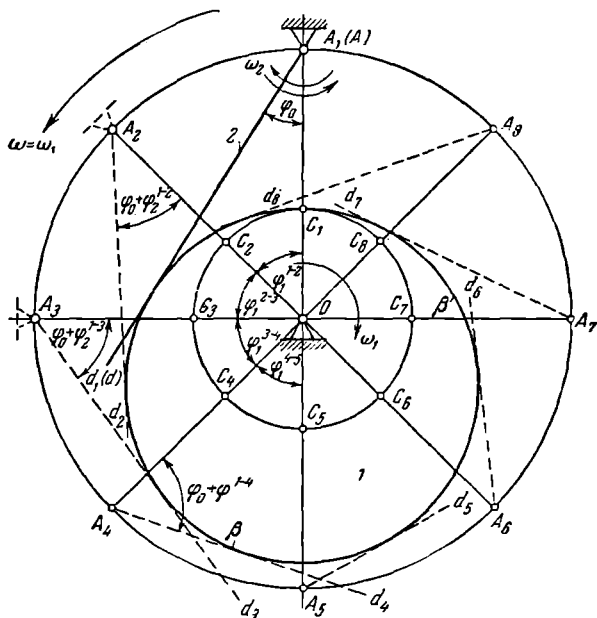


Рис. 316. Схема кулачкового механизма с плоским качающимся толкателем.

касательной к профилю $\beta-\beta$ кулачка 1, можно также применить метод обращения движения. Все построения в этом случае следует выполнять аналогично тем, которые мы применяли для кулачкового механизма, показанного на рис. 312, а. Здесь надо иметь в виду, что места касания кулачка 1 с плоскостью $d-d$ находятся не в точках $B_2, B_3, B_4, \dots$, а в точках $B_2^0, B_3^0, B_4^0, \dots$, в которых плоскость $d-d$ занимает положение $d_2-d_2, d_3-d_3, d_4-d_4$.

Для построения графика $s_2 = s_2(\varphi_1)$ надо от оси абсцисс (рис. 312, б) откладывать отрезки $(AB_1), (AB_2), (AB_3), \dots$ (рис. 315) в масштабе μ_l . После этого надо перенести ось абсцисс выше на расстояние $AB_1 = s_0$.

Для кулачкового механизма, показанного на рис. 316, у которого звено 2 представляет собою плоскость Ad , всегда касательную к про-

филю $\beta - \beta$ кулачка 1, обращаем движение и находим последовательные положения $A_2d_2, A_3d_3, A_4d_4, \dots$ плоскости Ad . Тогда определяются углы $\varphi_0 + \varphi_2^{1-2}, \varphi_0 + \varphi_3^{1-3}, \varphi_0 + \varphi_4^{1-4}, \dots$, значения которых могут быть отложены в соответствующем масштабе μ_{φ_2} (рис. 314) на ординатах графика. Переместив ось абсцисс из положения φ_1' в положение φ_1 , отстоящее на расстоянии, изображенном в масштабе μ_{φ_2} углом φ_0 , получим диаграмму $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$.

§ 40. Определение скоростей и ускорений

1°. Если для кулачкового механизма определены положения ведомого звена и построены графики зависимости перемещения ведомого звена в функции обобщенной координаты, например для механизма, показанного на рис. 312 [график $s_2 = s_2(\varphi_1)$], или график $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (рис. 314) для механизма, показанного на рис. 313 или рис. 316, то для определения скоростей и ускорений ведомых звеньев удобнее всего применить метод кинематических диаграмм, изложенный в главе VII.

В самом деле, аналог $(v_2)_{\varphi_1}$ скорости v_2 звена 2 (рис. 312)

$$(v_2)_{\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1}.$$

Соответственно аналог $(a_2)_{\varphi_1}$ ускорения a_2

$$(a_2)_{\varphi_1} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}.$$

Для механизмов, показанных на рис. 313 и рис. 316, будем иметь аналоги угловых скоростей и ускорений

$$i_{21} = (\omega_2)_{\varphi_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \quad \text{и} \quad i'_{21} = (\epsilon_2)_{\varphi_1} = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}.$$

Таким образом, определение скоростей и ускорений ведомых звеньев 2 сводится к двукратному графическому дифференцированию графиков $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 312, б) и $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (рис. 314).

Необходимо отметить, что двукратное графическое дифференцирование обычно дает значительные погрешности, особенно в диаграммах ускорений. Это заставляет для получения более точных результатов пользоваться для определения скоростей и ускорений методом планов скоростей и ускорений, изложенным выше.

Для определения этим методом скоростей и ускорений кулачковых механизмов необходимо знать радиусы кривизны различных участков профиля кулачка. В кулачках, профили которых очерчены по дугам окружностей, парабол, эллипсов, отрезкам прямых и т. д., нахождение радиусов кривизны не встречает никаких затруднений. Если радиусы кривизны профиля кулачка известны, то методом замены

высших пар цепями с низшими парами (см. § 18) кулачковый механизм может быть всегда приведен к механизмам только с одними низшими парами. Тогда задача решается методами, изложенными в главах VI и VIII.

Если профиль кулачка получен путем измерения координат его точек, то всегда может быть получена зависимость радиуса-вектора R от угла θ (рис. 317)

$$R = R(\theta). \quad (9.1)$$

Для определения радиуса кривизны ρ в точке C проводим касательную $t-t$ к профилю. Касательная $t-t$ образует с радиусом-вектором R угол μ , тангенс которого, как это известно из дифференциальной геометрии,

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{R}{\frac{dR}{d\theta}} = \frac{R}{\frac{d[R(\theta)]}{d\theta}}. \quad (9.2)$$

Проводим под углом 90° к касательной $t-t$ направление нормали $n-n$ к профилю в точке C и откладываем на ней радиус кривизны $\rho = OC$, величина которого, как известно, равна

$$\rho = \frac{R^2 + 2 \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 - R \frac{d^2 R}{d\theta^2}}{\left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (9.3)$$

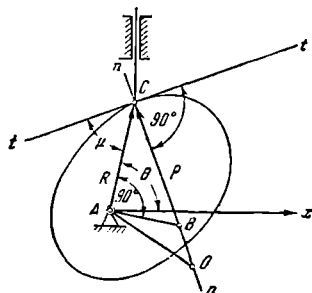


Рис. 317. К определению радиуса кривизны профиля кулачка.

Имея функцию (9.1), заданную или графически, или аналитически, можно определить значения угла μ и радиус кривизны ρ . Тогда кулачковый механизм (рис. 317) может быть заменен кривошипно-ползунным механизмом AOC , скорость и ускорение точки C которого могут быть определены

или методом планов, или аналитически (см. гл. VI и VIII). Из выражения (9.2) следует, что величина $dR/d\theta$ может быть определена геометрически, если из точки A провести перпендикуляр AB к радиусу R до пересечения в точке B с направлением нормали $n-n$. Отрезок AB будет пропорционален величине $dR/d\theta$.

2°. Построение планов скоростей и ускорений может быть также сделано без замены высших пар цепями с низшими парами, если воспользоваться уравнениями, приведенными в § 26.

Например, пусть требуется построить планы скоростей и ускорений кулачкового механизма в парманентном движении, показанного на рис. 318, а, у которого радиус кривизны O_1C_1 профиля кулачка в точке C равняется ρ .

Имеем следующие уравнения [см. уравнения (5.25) и (5.26) § 26]:

$$v_{C_2} = v_{C_1} + v_{C_2C_1} \quad (9.4)$$

и

$$a_{C_2} = a_{C_1} + a_{C_2C_1}^k + a_{C_2C_1}^n + a_{C_2C_1}^t, \quad (9.5)$$

или так как $a_{C_2} = a_{C_2}^n + a_{C_2}^t$, то

$$a_{C_2}^n + a_{C_2}^t = a_{C_1} + a_{C_2C_1}^k + a_{C_2C_1}^n + a_{C_2C_1}^t. \quad (9.6)$$

На рис. 318, б построен план скоростей в масштабе отрезка AC_1 (рис. 318, а). Величины ускорений $a_{C_2}^n$, $a_{C_2C_1}^k$ и $a_{C_2C_1}^n$ определяются из соотношений

$$a_{C_2}^n = \frac{v_{C_2}^2}{l_{BC_2}}, \quad a_{C_2C_1}^k = 2|\omega_1|v_{C_2C_1} \quad \text{и} \quad a_{C_2C_1}^n = \frac{v_{C_2C_1}^2}{\rho}.$$

План ускорений построен на рис. 318, в в масштабе отрезка AC_1 (рис. 318, а).

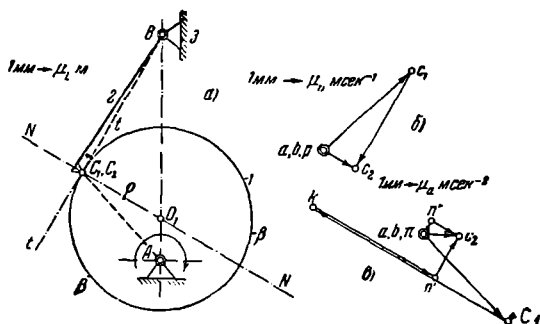


Рис. 318. Кулачковый механизм с качающимся толкателем: а) кинематическая схема; б) план скоростей; в) план ускорений.

3°. Особое внимание при кинематическом исследовании кулачковых механизмов надо обращать на места сопряжения кривых, образующих профиль кулачка. Пусть, например, они сопряжены так, как показано на рис. 319. В точке b кривые ab и bc не имеют общей касательной. Радиусы кривизны профиля в этой точке будут соответственно равны ρ_1 и ρ_2 ; и для этого участка профиля можно будет построить два заменяющих механизма с различными размерами звеньев, первый, образованный звеньями 1, 3 и 2, и второй, образованный звеньями 1', 3' и 2. Очевидно, что когда конец штанги, скользя по профилю кулачка, будет находиться в точке b , скорости и ускорения штанги будут иметь соответственно по два различных значения, и мы получим в этой точке мгновенное изменение скорости и ускорения ведомой штанги, что будет свидетельствовать о наличии удара в механизме. Если кривые сопряжены так, что у них одна общая нормаль в точке сопряжения (рис. 320), но радиусы кривизны кривых в точке

сопряжения различны, то мы также можем получить два заменяющих механизма: первый, образованный звеньями 1, 3 и 2, и второй, образованный звеньями 1', 3' и 2. Тогда для рассматриваемого момента времени скорости звена 2 имеют одинаковые значения, а ускорения оказываются различными, и при переходе штанги через точку сопряжения получается мгновенное изменение только ускорения звена 2.

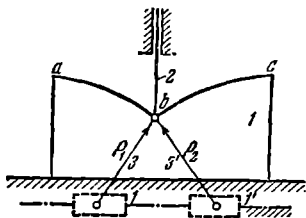


Рис. 319. Пример неудачного сопряжения кривых профиля кулачка — неизбежны жесткие удары во время движения ведомого звена.

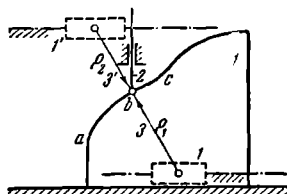


Рис. 320. Пример сопряжения кривых профиля кулачка, имеющих общую нормаль, но разные радиусы кривизны — неизбежны мягкие удары при движении ведомого звена.

Наконец, кривые могут быть сопряжены так, что у них радиусы кривизны в точке b сопряжения одинаковые (рис. 321). В таком случае мы получим только один заменяющий механизм.

Для безударной работы механизма необходимо стремиться к тому, чтобы радиусы кривизны в точках сопряжения всегда совпадали как по величине, так и по направлению.

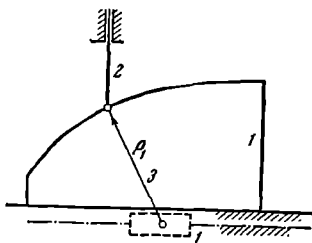


Рис. 321. Пример сопряжения кривых профиля кулачка, имеющих общий радиус кривизны — в месте сопряжения удары отсутствуют.

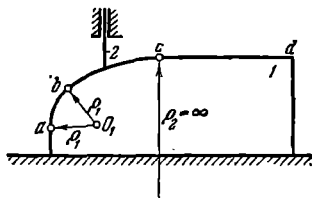


Рис. 322. Пример правильного сопряжения дуги ab окружности с прямой cd с помощью промежуточной кривой bc с постепенно изменяющимся радиусом кривизны.

Очевидно, что при сопряжении кривой, очерченной по дуге ab окружности радиуса ρ_1 , и прямой cd (рис. 322), всегда будет происходить мгновенное изменение ускорения в точках сопряжения. Чтобы избежать его, рекомендуется между кривой и прямой включать переходную кривую bc (рис. 322), у которой радиус кривизны плавно изменялся бы от значения, равного радиусу ρ_1 дуги окружности ab до значения ρ_2 , равного бесконечности.

ГЛАВА X

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ПЕРЕДАЧ

§ 41. Основные кинематические соотношения

1°. В различных машинах и приборах широко применяются механизмы для воспроизведения вращательного движения с постоянным передаточным отношением между двумя различно заданными в пространстве осями. Такие механизмы носят название *механизмов передачи вращательного движения или сокращенно механизмы передачи*.

Механизмы передачи имеют своей задачей воспроизведение заданного передаточного отношения между двумя звеньями. Простейшим механизмом передачи с твердыми звеньями является трехзвенный механизм, состоящий из двух подвижных звеньев, входящих в две вращательные и одну высшую пару. Для воспроизведения требуемых передаточных отношений в современных машинах и приборах часто применяются сложные механизмы передач, имеющие кроме ведущего и ведомого звеньев, вращающихся вокруг заданных осей, несколько промежуточных звеньев, вращающихся вокруг своих осей. Применение сложных механизмов объясняется различными причинами. Например, оси ведущего и ведомого звеньев могут быть расположены далеко друг от друга, и непосредственная передача вращения при помощи двух звеньев потребовала бы создания передачи с большими габаритами звеньев. Если передаточное отношение, которое должно осуществляться механизмом передачи, очень велико или очень мало, то конструктивно удобно между ведущей и ведомой осями иметь промежуточные оси с соответствующими звеньями, вращающимися вокруг них. Передавая вращение с ведущей оси на промежуточные оси и с них на ведомую ось, мы как бы последовательно отдельными ступенями изменяем передаточные отношения, получая в результате требуемые передаточные отношения между ведущей и ведомой осями. Таким образом, сложный механизм передачи можно разделить на отдельные части — ступени, каждая ступень является самостоятельным механизмом, звенья которого входят в высшие пары между собою и низшие пары со стойкой. Такая отдельная часть сложного механизма и называется *ступенью передачи*. В соответствии с указанным бывают одно- и многоступенчатые передачи, по большей части двух- и трехступенчатые.

2°. Рассмотрим кинематические соотношения в одноступенчатом механизме передачи при различных расположениях осей ведущего и ведомого звеньев.

Расположение осей этих звеньев может быть следующим:

- а) оси параллельны,
- б) оси пересекаются,
- в) оси перекрещиваются.

Если оси вращения O_1 и O_2 параллельны (рис. 323, а) и заданы постоянные угловые скорости ω_1 и ω_2 звеньев 1 и 2, то передаточное отношение i_{12} (см. § 25) равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{O_2 P_0}{O_1 P_0} = \text{const}, \quad (10.1)$$

где P_0 — мгновенный центр вращения в относительном движении звеньев 1 и 2.

Так как мы рассматриваем передачи с постоянным передаточным отношением, то центроидами в относительном движении звеньев

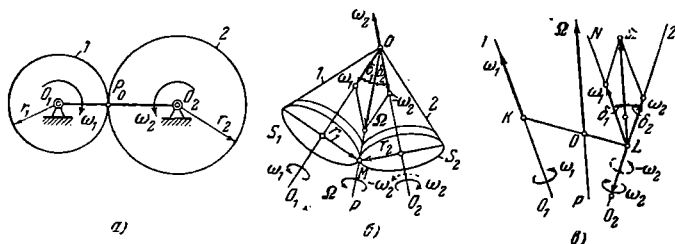


Рис. 323. Схемы одноступенчатых зубчатых передач: а) передача с цилиндрическими колесами; б) передача с коническими колесами; в) передача с перекрещивающимися осями.

оказываются окружности радиусов $r_1 = O_1 P_0$ и $r_2 = O_2 P_0$. Следовательно, передаточное отношение равно

$$i_{12} = -\frac{r_2}{r_1}. \quad (10.2)$$

Знак минус в равенствах (10.1) и (10.2) показывает, что угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют разные направления.

Таким образом, передача вращения между параллельными осями с постоянным передаточным отношением может быть всегда осуществлена круглыми цилиндрическими колесами.

3°. Для случая, когда оси вращения O_1 и O_2 звеньев 1 и 2 (рис. 323, б) пересекаются в точке O и заданы постоянные угловые скорости ω_1 и ω_2 вращения звеньев 1 и 2, то передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}. \quad (10.3)$$

Из теоретической механики известно, что в этом случае движение звена 2 относительно звена 1 происходит вокруг мгновенной оси вращения OP , положение которой определяется из следующих соображений.

Условимся вектору угловой скорости придавать такое направление, при котором, если смотреть с конца вектора угловой скорости к началу, вращение видно происходящим против часовой стрелки.

Сообщим звеньям 1 и 2 общую угловую скорость $-\omega_2$. Тогда звено 2 будет неподвижным, а звено 1 будет вращаться вокруг оси O_2 с угловой скоростью $-\omega_2$ и вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1 . Мгновенная угловая скорость Ω звена 1 относительно звена 2 будет равна

$$\Omega = \omega_1 + (-\omega_2). \quad (10.4)$$

Откладывая векторы ω_1 и $-\omega_2$ в соответствующих направлениях по осям O_1 и O_2 , находим результирующий вектор Ω . Направление этого вектора определяет мгновенную ось вращения OP в относительном движении звеньев 1 и 2 . Так как угловые скорости ω_1 и ω_2 приняты постоянными, то направление оси OP неизменно и аксоидами в относительном движении суть два круглых конуса 1 и 2 , имеющие соприкосновение по общей образующей OP .

Выберем на оси OP произвольную точку M и пересечем аксоиды плоскостями, проходящими через точку M и перпендикулярными к осям O_1 и O_2 . Тогда в сечении получим окружности S_1 и S_2 , соприкасающиеся в точке M . При вращении аксоидов 1 и 2 вокруг осей O_1 и O_2 окружности S_1 и S_2 перекатываются без скольжения друг по другу. Тогда для скорости v_M точки M будем иметь:

$$v_M = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad (10.5)$$

где r_1 и r_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2 . Формула (10.3) с учетом равенства (10.5) примет вид

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}, \quad (10.6)$$

где δ_1 и δ_2 — половины углов раствора конусов 1 и 2 .

Таким образом, передача вращения с постоянным передаточным отношением между пересекающимися осями может быть всегда осуществлена круглыми коническими колесами, представляющими собой части аксоид 1 и 2 .

4°. Переходим к рассмотрению случая, когда оси O_1 и O_2 звеньев 1 и 2 перекрещиваются в пространстве (рис. 323, в). Пусть заданы постоянные угловые скорости ω_1 и ω_2 вращения звеньев 1 и 2 . Передаточное отношение для этого случая также [см. формулу (10.3)] равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const.} \quad (10.7)$$

Из теоретической механики известно, что в этом случае движением звена 2 относительно звена 1 является вращение вокруг и скольжение вдоль мгновенной оси вращения и скольжения OP , проходящей через точку O , лежащую на линии кратчайшего расстояния KL между осями O_1 и O_2 . Положение точки O определяется из условия

$$\frac{KO}{LO} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_2}, \quad (10.8)$$

где δ_1 и δ_2 — углы, образованные осями O_1 и O_2 с мгновенной осью вращения и скольжения OP . Углы δ_1 и δ_2 и направление мгновенной оси вращения и скольжения OP определяется, если сообщить звеньям 1 и 2 общую угловую скорость — ω_3 . Тогда вектор угловой скорости Ω вращения звена 1 относительно звена 2 определится, если через точку L провести прямую LN , параллельную оси O_1 , и отложить на этой прямой вектор угловой скорости ω_1 . Далее, на оси O_2 следует отложить вектор угловой скорости — ω_2 , соблюдая ранее указанное условие о направлении этих векторов. Направление мгновенной оси вращения и скольжения OP параллельно диагонали параллелограмма, построенного на векторах ω_1 и — ω_2 , угловая скорость Ω равна

$$\Omega = \omega_1 + (-\omega_2). \quad (10.9)$$

Из построения (рис. 323, в) следует, что передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (10.10)$$

Если учесть условие (10.8), то передаточное отношение i_{12} может быть представлено также следующим образом:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{(LO) \cos \delta_2}{(KO) \cos \delta_1}. \quad (10.11)$$

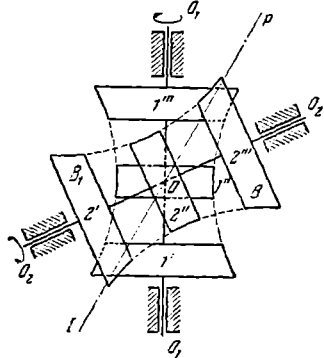


Рис. 324. Схема передачи с гиперболическими колесами.

Так как угловые скорости ω_1 и ω_2 нами были приняты постоянными, то постоянными будут и углы δ_1 и δ_2 , и во всех положениях звеньев 1 и 2 мгновенная ось вращения и скольжения будет занимать одно и то же положение, а аксоиды в относительном движении этих звеньев будут всегда соприкасаться своими образующими по общей прямой OP . Этими аксоидами являются линейчатые гиперboloиды вращения с осями O_1 и O_2 . Таким образом, передача вращения между пересекающимися осями с постоянным передаточным отношением может быть всегда осуществлена гиперболическими колесами (рис. 324), представляющими собой части 1', 2' или 1'', 2'' или 1''', 2''' гиперboloидов вращения 1 и 2.

§ 42. Механизмы фрикционных передач

1°. В современных машинах широкое применение имеют механизмы фрикционных колес, воспроизводящих постоянное передаточное отношение. Центроидами таких механизмов являются окружности.

Если эти центроиды выполнить конструктивно в форме круглых цилиндров (рис. 325, а и б) и обеспечить достаточную силу сцепления (трения) между этими цилиндрами, чтобы отсутствовало проскаль-

зывание между цилиндрами, то мы получим центроидные механизмы так называемых круглых цилиндрических колес (см. § 7). Обозначим радиусы фрикционных колес через r_1 и r_2 . Если проскальзывание

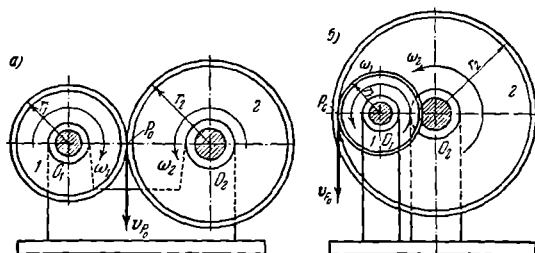


Рис. 325. Цилиндрические центроидные механизмы: а) механизм с внешним касанием колес; б) механизм с внутренним касанием колес.

отсутствует, то при перекатывании колес модуль скорости v_{P_0} в точке P_0 их соприкасания равен

$$v_{P_0} = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad (10.12)$$

откуда получаем, что передаточное отношение i_{12} таких механизмов

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}, \quad (10.13)$$

где n_1 и n_2 — числа оборотов в минуту колес 1 и 2, верхний знак относится к внутреннему соприкасанию (рис. 325, б), а нижний — к внешнему (рис. 325, а).

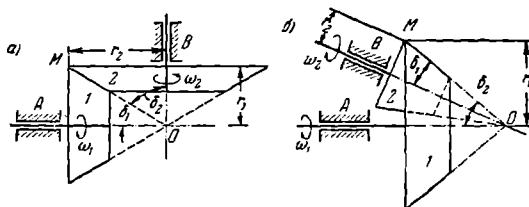


Рис. 326. Конические центроидные механизмы: а) механизм с внешним касанием колес; б) механизм с внутренним касанием колес.

2°. Фрикционные конические колеса обычно представляют собой прямые усеченные конусы 1 и 2 (рис. 326, а) и (рис. 326, б), оси вращения А и В которых пересекаются в точке О. Соприкасание колес происходит по общей образующей. С помощью сил трения, возникающих в точках соприкасания, можно воспроизвести вращение этих колес вокруг осей А и В с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Механизм конических фрикционных колес, показанный на рис. 326, а, носит название

механизма круглых конических фрикционных колес с внешним соприкасанием. На рис. 326, б показан механизм круглых конических фрикционных колес с внутренним соприкасанием.

Согласно уравнению (10.6) и рис. 326 передаточное отношение

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}, \quad (10.14)$$

где n_1 и n_2 суть числа оборотов колес 1 и 2. Верхний знак относится к механизму с внутренним соприкасанием, а нижний знак — к механизму с внешним соприкасанием.

Если угол $\delta = \delta_1 + \delta_2$ между осями 1 и 2 (рис. 326, а) равен 90° , то формула (10.14) принимает вид

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = - \frac{r_2}{r_1} = - \operatorname{tg} \delta_2 = - \operatorname{ctg} \delta_1. \quad (10.15)$$

При внутреннем соприкасании δ всегда меньше 90° .

3°. Рассмотрим некоторые другие виды механизмов фрикционных передач. На рис. 327 показана схема механизма лобовой фрикционной передачи. Диск 1 жестко связан с осью O_1 , вращающейся в неподвижном подшипнике А. Диск 1 входит в высшую кинематическую пару М с роликом 2, входящим во вращательную пару В со звеном 3. Ролик 2 с помощью винтовой пары С может перемещаться вдоль оси O_3 . Точка М контакта может занимать различные положения, определяемые расстоянием x . Передаточное отношение i_{21} равно

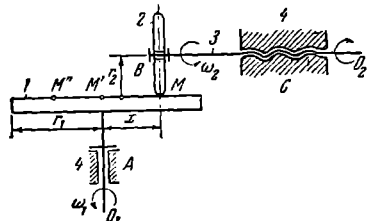


Рис. 327. Схема лобовой фрикционной передачи.

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \pm \frac{x}{r_2}. \quad (10.16)$$

При перемещении точки контакта М в положение М' передаточное отношение i_{21} равно нулю. При $x = r_1$ передаточное отношение равно

$$i_{21} = \pm \frac{r_1}{r_2}. \quad (10.17)$$

При перемещении точки контакта М за точку М', например в положении М'', диск 1 меняет направление вращения. Таким образом, передаточное отношение может плавно меняться в пределах

$$\frac{r_1}{r_2} \geq i_{21} \geq - \frac{r_1}{r_2}.$$

Механизмы, осуществляющие плавное изменение передаточного отношения, называются механизмами бесступенчатых передач или вариаторами скоростей.

На рис. 328 показан механизм бесступенчатой передачи с двумя дисками 1 и 5 и промежуточным роликом 2. Передаточное отношение i_{51} между параллельными осями O_1 и O_5 равно

$$i_{51} = \frac{\omega_5}{\omega_1} = \frac{x_1}{x_5}, \quad (10.18)$$

т. е. передаточное отношение не зависит от радиуса ролика 2. Направление вращения осей O_1 и O_5 одинаковое. Передаточное отношение i_{51} может изменяться в пределах

$$\frac{(x_1)_{\min}}{(x_5)_{\max}} \leq i_{51} \leq \frac{(x_1)_{\max}}{(x_5)_{\min}}. \quad (10.19)$$

На рис. 329 показан механизм бесступенчатой передачи с коническими барабанами 1 и 5, имеющими равные углы раствора конусов. Передаточное отношение i_{51} определится формулой (10.18). Передаточное отношение i_{51} может изменяться в пределах

$$\frac{r}{R} \leq i_{51} \leq \frac{R}{r}, \quad (10.20)$$

где r и R — малый и большой радиусы барабанов.

На рис. 330 показан механизм бесступенчатой передачи с торцовыми барабанами для случая, когда оси O_1 и O_5 ведущего и ведомого

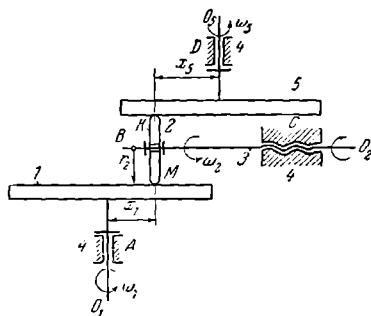


Рис. 328. Схема двойной лобовой фрикционной передачи.

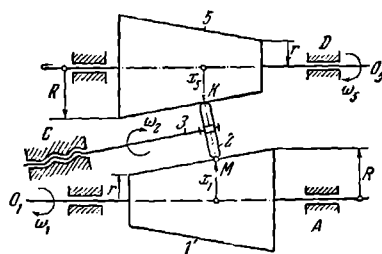


Рис. 329. Схема фрикционной передачи с коническими барабанами и промежуточным роликом.

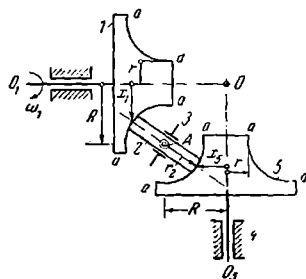


Рис. 330. Схема фрикционной передачи с торцовыми барабанами и промежуточным роликом.

звеньев пересекаются в точке O . Если провести плоскости, содержащие оси OO_1 или OO_5 , то в сечении профили барабанов, находящиеся в соприкосновении с роликом 2, являются дугами $a-a$ окружности радиуса r_2 . Ролик 2 вращается вокруг оси 3, которая вместе с роликом 2 может поворачиваться вокруг оси, направленной перпендикулярно к плоскости, содержащей оси O_1 и O_5 . Передаточное отношение i_{51} определяется формулой (10.18), а пределы передаточного отношения выражением (10.20).

4°. Для надежной работы механизмов фрикционных передач необходимо исключить проскальзывание между соприкасающимися колесами. Для этого надо, чтобы сила трения, возникающая между соприкасающимися элементами, была достаточной. Последнее достигается прижатием одного колеса к другому обычно с помощью пружин. Таким образом, соприкасающиеся элементы колес оказываются сильно нагруженными, деформируются и изнашиваются в процессе работы. Деформация соприкасающихся элементов и их проскальзывание вызывают износ поверхностей соприкасания.

При расчетах эффект проскальзывания обычно учитывается введением коэффициента ξ относительного скольжения. Величина ξ равняется

$$\xi = \frac{v_1 - v_2}{v_1}, \quad (10.21)$$

где v_1 и v_2 — окружные скорости соприкасающихся фрикционных колес 1 и 2. Соотношение (10.21) может быть представлено так:

$$\xi = 1 - \frac{v_2}{v_1} = 1 - \frac{\omega_2 r_2}{\omega_1 r_1}, \quad (10.22)$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости колес 1 и 2, а r_1 и r_2 — их радиусы. Из равенства (10.22), зная, что $\omega_1/\omega_2 = i_{12}$, получаем:

$$i_{12} = \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{1 - \xi}. \quad (10.23)$$

Таким образом, если коэффициент относительного скольжения ξ постоянный, то передаточное отношение i_{12} также постоянное и не равно отношению радиусов фрикционных колес, но ему пропорционально. Величина передаточного отношения i_{12} получается в этом случае несколько больше, но незначительно, так как величина коэффициента ξ обычно располагается в пределах от 0,01 до 0,03.

§ 43. Механизмы трехзвенных зубчатых передач

1°. Простейшим механизмом зубчатых передач является трехзвенный механизм. На рис. 331 и 332 показаны механизмы круглых цилиндрических колес, у которых радиусы r_1 и r_2 являются радиусами центроид в относительном движении звеньев 1 и 2 и точка P_0 является мгновенным центром вращения в относительном движении. Если в механизмах фрикционных передач центроиды представляют собой гладкие, круглые цилиндрические колеса, то в механизмах зубчатых передач колеса для передачи движения снабжаются зубьями, профили которых представляют собой взаимоогibaемые кривые. Как это видно на рис. 331 и 332, для возможности передачи движения часть профиля зуба выполняется за пределами центроид радиусов r_1 и r_2 , а часть внутри этих центроид. Окружности радиусов

r_1 и r_2 в теории механизмов зубчатых передач называются *начальными окружностями*. Профили зубьев подбираются из условия, чтобы нормаль в их точке соприкосновения всегда проходила через постоянную точку P_0 — мгновенный центр вращения в относительном движении колес 1 и 2.

Таким образом, если известны радиусы начальных окружностей колес, то известно и их передаточное отношение, определяемое по формуле

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.24)$$

Практически отношение радиусов удобнее заменять отношением чисел зубьев. Так как расстояние между соседними профилями зубьев сопряженных колес должны иметь по начальным окружностям одинаковые размеры, то число зубьев z_2 на колесе 2 так относится к числу зубьев z_1 на колесе 1, как длина начальной окружности колеса 2 относится к длине начальной окружности колеса 1

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\pi r_2}{2\pi r_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (10.24), можем написать:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}, \quad (10.25)$$

где n_1 и n_2 — числа оборотов в минуту колес 1 и 2.

Таким образом, отношение чисел зубьев зубчатых круглых колес равно обратному отношению угловых скоростей этих колес.

Напомним, что мы условились приписывать передаточному отношению знак в зависимости от направления угловых скоростей. Так как при *внешнем* зацеплении (рис. 331) угловые скорости колес имеют различное направление вращения, то у внешнего зацепления передаточное отношение всегда *отрицательное*. Наоборот, у *внутреннего* зацепления (рис. 332) передаточное отношение всегда *положительное*. Формула (10.25) описывает оба случая, надо лишь помнить, что в ней каждая из угловых скоростей ω_1 и ω_2 берется со своим знаком.

Частным случаем трехзвенного зубчатого механизма является механизм с реечным зацеплением (рис. 333). Колесо 1, вращаясь вокруг

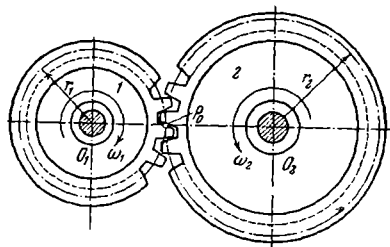


Рис. 331. Цилиндрическая зубчатая передача с внешним зацеплением зубьев.

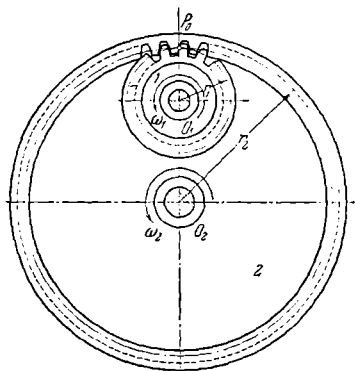


Рис. 332. Цилиндрическая зубчатая передача с внутренним зацеплением зубьев.

оси O_1 с угловой скоростью ω_1 , приводит в прямолинейно-поступательное движение рейку 2 со скоростью v_2 . Колесо 1 имеет начальную окружность радиуса r_1 , а рейка 2 начальную прямую $a-a$. Центроида радиуса r_1 перекатывается без скольжения по прямой $a-a$. Точка P_0 является мгновенным центром вращения в относительном движении звеньев 1 и 2. Скорости ω_1 и v_2 связаны очевидным условием

$$v_2 = \omega_1 \cdot (O_1 P_0) = \omega_1 r_1, \quad (10.26)$$

или так как

$$v_2 = \frac{ds_2}{dt} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt},$$

Рис. 333. Зубчатая передача с реечным зацеплением зубьев.

где φ_1 — угол поворота колеса 1, а s_2 — перемещение рейки 2, то, следовательно,

$$\frac{ds_2}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} r_1$$

или

$$(v_2)_{\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = r_1. \quad (10.27)$$

Величина $(v_2)_{\varphi_1}$ представляет собой аналог скорости v_2 рейки 2.

2°. Для исследования закона распределения скоростей точек зубчатых колес и определения скоростей отдельных точек можно применить метод картин скоростей, разработанный Л. П. Смирновым. Пусть, например, требуется построить картины скоростей колес 1 и 2 (рис. 334), у которых окружности 1 и 2 являются начальными. Эти окружности соприкасаются в точке P_0 . В этой точке скорости окружностей 1 и 2 равны. Обозначаем эту скорость через v_{P_0} . Проводим прямую линию $O_1 O_2$, параллельную линии центров $O_1 O_2$ (рис. 334), проектируем на эту прямую точки O_1 , P_0 и O_2 и получаем точки o_1 , k и o_2 . Из точки k откладываем вектор скорости v_{P_0} в виде отрезка (kp) , представляющего в масштабе μ_v скорость v_{P_0} :

$$v_{P_0} = \mu_v (kp).$$

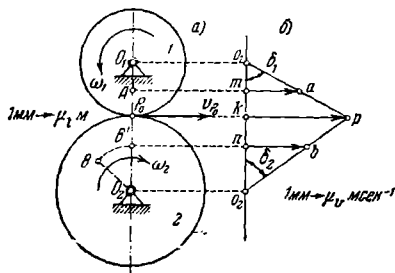


Рис. 334. Картина скоростей для цилиндрической зубчатой передачи с внешним зацеплением зубьев.

Так как скорости точек O_1 и O_2 равны нулю, то, соединив прямою точку p с точками o_1 и o_2 , получаем два треугольника kpo_1 и kpo_2 , которые будут картинами скоростей колес 1 и 2. Прямые o_1p и o_2p представляют собой геометрические места концов векторов скоростей точек, принадлежащих обоим колесам и расположенных в данном положении на линии центров O_1O_2 . Так, скорость v_A точки A определится, если спроектировать точку A на прямую o_1p параллельно вектору скорости v_{P_0} . Модуль скорости v_A представлен отрезком (ma) и равен

$$v_A = \mu_v (ma).$$

Обозначим углы при точках o_1 и o_2 в картине скоростей через δ_1 и δ_2 . Покажем, что угловые скорости ω_1 и ω_2 пропорциональны тангенсам углов δ_1 и δ_2 . Имеем:

$$\omega_1 = \frac{v_{P_0}}{r_1} = \frac{\mu_v (kp)}{\mu_l (O_1P_0)} = \frac{\mu_v (kp)}{\mu_l (o_1k)} = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \delta_1,$$

$$\omega_2 = \frac{v_{P_0}}{r_2} = \frac{\mu_v (kp)}{\mu_l (O_2P_0)} = \frac{\mu_v (kp)}{\mu_l (o_2k)} = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \delta_2,$$

где μ_l и μ_v — масштабы схемы и картины скоростей.

Для определения модуля скорости v_B произвольной точки B колеса 2 надо из точки O_2 радиусом O_2B сделать на прямой O_1O_2

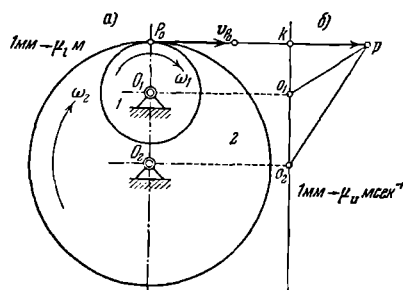


Рис. 335. Картина скоростей для цилиндрической зубчатой передачи с внутренним зацеплением зубьев.

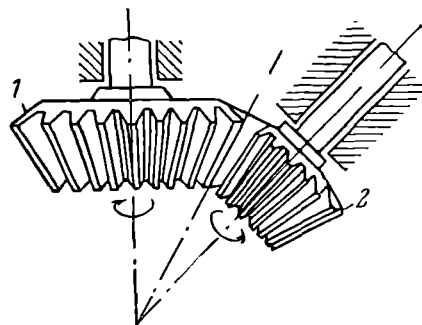


Рис. 336. Коническая зубчатая передача.

засечку B' и точку B' спроектировать на прямую o_2p . Модуль скорости v_B равен

$$v_B = \mu_v (nb).$$

Направление скорости v_B перпендикулярно к радиусу O_2B . На рис. 335 построена картина скоростей для зубчатого механизма с внутренним зацеплением.

3°. К трехзвенным пространственным механизмам зубчатых передач относятся механизмы конических зубчатых колес (рис. 336). Как это

было показано в § 41,3°, передаточное отношение этого механизма равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}, \quad (10.28)$$

где n_1 и n_2 — числа оборотов в минуту колес 1 и 2. Если числа зубьев колес 1 и 2 будут соответственно равны z_1 и z_2 , то формула (10.28) примет вид

$$i_{12} = -\frac{z_2}{z_1}. \quad (10.29)$$

Для механизма гиперболоидных колес (рис. 337), у которого числа зубьев колес 1 и 2 соответственно равны z_1 и z_2 , передаточное отношение равно (см. § 41,4°)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = -\frac{R_2 \cos \delta_2}{R_1 \cos \delta_1} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad (10.30)$$

где R_1 и R_2 — радиусы горловых сечений гиперболоидов, являющихся аксоидами в частном случае, когда $\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$, т. е. если оси колес взаимно перпендикулярны, i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{R_2 \operatorname{tg} \delta_1}{R_1}. \quad (10.31)$$

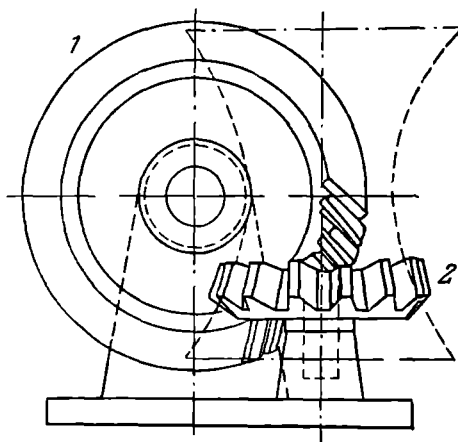


Рис. 337. Гиперболоидная зубчатая передача.

4°. К трехзвенным пространственным механизмам зубчатых передач с перекрещивающимися под углом 90° осями относится механизм *червячной передачи* (рис. 338). Червяк 1 вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1 и приводит во вращение с угловой скоростью ω_2 червячное колесо 2, вращающееся вокруг оси O_2 .

Если рассечь червячную передачу плоскостью, перпендикулярной к оси колеса и содержащей ось червяка, то в этом сечении при эвольвентном очертании профилей получим рейку a , сцепляющуюся с плоским колесом 2 (рис. 338). Эта плоскость называется *плоскостью главного сечения*. Червячное зацепление как в главном сечении, так и в любом, параллельном ему, может быть представлено как плоское реечное зацепление. Вращение червячного колеса 2 с угловой скоростью ω_2 можно воспроизвести поступательным движением рейки a вдоль оси O_1 .

Чтобы из рейки a получить червяк, достаточно рейку перемещать винтовым движением вдоль и вокруг оси O_1 . Если при повороте

рейки a на угол, равный 2π , зуб b рейки перемещается вдоль оси O_1 на величину, равную шагу t , то мы получаем червяк с одной ниткой, или *однониточный червяк* (рис. 338). Если зуб b рейки a при повороте на угол 2π продвинется на величину, равную $2t$, то мы получаем *двухниточный червяк* и т. д.

Основные кинематические соотношения для червячной передачи могут быть получены из формул для механизма гиперболоидной

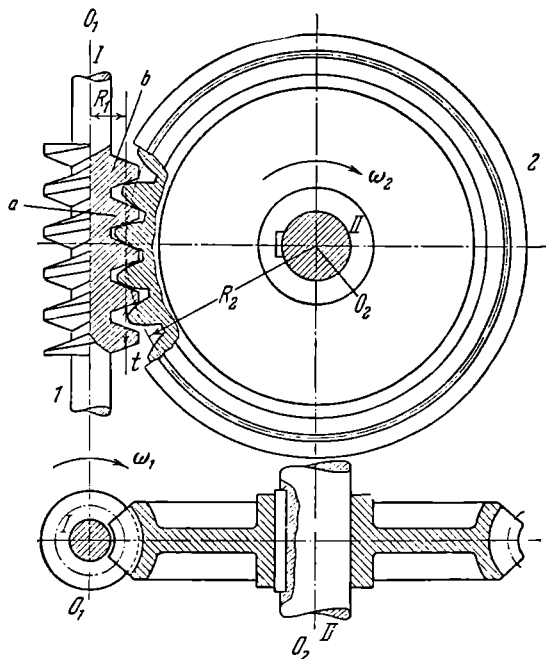


Рис. 338. Червячная передача.

передачи. Как было показано выше, передаточное отношение для колес, оси которых пересекаются под углом 90° , согласно формуле (10.31) равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \operatorname{tg} \delta_1, \quad (10.32)$$

где ω_1 — угловая скорость червяка 1, ω_2 — угловая скорость червячного колеса 2, R_1 — радиус начального цилиндра червяка, R_2 — радиус начального цилиндра червячного колеса. Если принять $z_1 = z_\kappa$ и $z_2 = z_\kappa$, где z_κ — число ниток или ходов червяка, а z_κ — число зубьев червячного колеса, то формула (10.32) примет следующий вид:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_\kappa}{z_\kappa} = -\frac{R_2}{R_1} \operatorname{tg} \delta_1. \quad (10.33)$$

Из формулы (10.33) следует, что при однопиточном червяке передаточное отношение равно числу зубьев на червячном колесе, при двухпиточном — числу зубьев, деленному на два, при трехпиточном — числу зубьев, деленному на три, и т. д. Таким образом, при однопиточном червяке при каждом обороте червяка колесо поворачивается на один зуб; при двухпиточном — на два зуба, при трехпиточном — на три зуба и т. д. Отсюда следует, что червячной передачей можно воспроизводить большие передаточные отношения. Так, например, если число зубьев колеса равняется 80, а червяк имеет только одну нитку, то передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_k}{z_q} = \frac{80}{1} = 80.$$

§ 44. Механизмы многозвенных зубчатых передач с неподвижными осями

1°. Механизмы трехзвенных зубчатых передач (одноступенчатых передач), состоящие из двух сопряженных зубчатых колес, представляют собой простейший вид зубчатого механизма. Передаточное отношение, которое можно воспроизвести одной парой зубчатых колес, невелико. На практике же часто приходится встречаться с необходимостью воспроизведения значительных передаточных отношений.

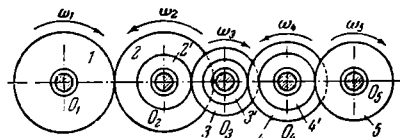


Рис. 339. Рядовое соединение зубчатых колес.

Для осуществления этих передаточных отношений применяется несколько последовательно соединенных колес, где кроме ведущего и ведомого имеются еще промежуточные колеса. Такие сложные зубчатые механизмы получили название *серий зубчатых колес*.

Серии колес, у которых оси вращения неподвижны, носят название *рядового соединения*.

Рассмотрим рядовое соединение, показанное на рис. 339. Ведущее зубчатое колесо 1 сцепляется с колесом 2. На ось O_2 колеса 2 жестко насажено колесо 2', которое сцепляется с колесом 3. На ось O_3 колеса 3 жестко насажено колесо 3' и т. д. Ведомым колесом является колесо 5.

Обозначим угловую скорость колеса 1 через ω_1 , угловую скорость колес 2 и 2' — через ω_2 , угловую скорость колес 3 и 3' — через ω_3 и т. д. Общее передаточное отношение всего механизма равно

$$i_{15} = \frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Определим передаточное отношение для каждой пары колес. Имеем:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad i_{2'3} = \frac{\omega_2}{\omega_3}, \quad i_{3'4} = \frac{\omega_3}{\omega_4}, \quad i_{4'5} = \frac{\omega_4}{\omega_5}. \quad (10.34)$$

Перемножив полученные передаточные отношения (10.34), получим:

$$i_{13} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} \cdot i_{4'5} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Так как $\omega_1/\omega_5 = i_{15}$, то

$$i_{15} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} \cdot i_{4'5}.$$

Таким образом, *передаточное отношение сложного многоступенчатого зубчатого механизма есть произведение взятых со своими знаками передаточных отношений отдельных его ступеней.*

В общем случае, когда в зацеплении находится n колес, формула для общего передаточного отношения i_{1n} может быть написана так:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} \dots i_{(n-1)'n} \quad (10.35)$$

Для каждой ступени передачи имеем:

$$\begin{aligned} i_{12} &= \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}, \\ i_{2'3} &= \pm \frac{r_3}{r_2} = \pm \frac{z_3}{z_2}, \\ i_{(n-1)'n} &= \pm \frac{r_n}{r_{(n-1)'}} = \pm \frac{z_n}{z_{(n-1)'}}, \end{aligned}$$

где $r_1, r_2, r_2', r_3, \dots, r_n$ — радиусы начальных окружностей колес, а $z_1, z_2, z_2', z_3, \dots, z_n$ — числа зубьев, причем верхний знак берется при внутреннем, а нижний — при внешнем зацеплении.

Подставляя в равенство (10.35) выражения передаточных отношений отдельных ступеней, получаем:

$$i_{1n} = (-1)^m \frac{r_2 r_3 r_4 \dots r_n}{r_1 r_2' r_3' \dots r_{(n-1)'}} = (-1)^m \frac{z_2 z_3 z_4 \dots z_n}{z_1 z_2' z_3' \dots z_{(n-1)'}} \quad (10.36)$$

где m — число внешних зацеплений. Множитель $(-1)^m$ позволяет определить знак передаточного отношения сложного зубчатого механизма. Как это было показано в § 43,¹⁰, передаточное отношение пары колес с внешним зацеплением имеет знак минус, а с внутренним зацеплением знак плюс. Таким образом, если мы имеем в рядовом соединении m внешних зацеплений, то при передаче движения от одного вала к другому произойдет m раз изменение знака угловой скорости. Следовательно, для определения знака передаточного отношения рядового соединения надо соответствующие произведения отношений радиусов начальных окружностей или чисел зубьев помножить на множитель $(-1)^m$, взятый в степени, соответствующей числу внешних зацеплений. Для практических расчетов можно пользоваться формулой

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^m (i_{12}) \cdot (i_{2'3}) \cdot (i_{3'4}) \dots (i_{(n-1)'n}). \quad (10.37)$$

2°. При передаче движения между валами, находящимися на большом расстоянии друг от друга, или при необходимости воспроизведения передаточного отношения определенного знака часто применяется рядовое соединение, состоящее из ряда последовательно соединенных колес, каждое из которых имеет собственную ось вращения (рис. 340). Общее передаточное отношение такого рядового соединения, состоящего в рассматриваемом случае из четырех колес, равно

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^m (i_{12}) (i_{23}) (i_{34}) = - (i_{12}) \cdot (i_{23}) \cdot (i_{34}) = \\ = - \frac{r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 r_3} = - \frac{r_4}{r_1} = - \frac{z_4}{z_1}.$$

Как видно из этой формулы, величина общего передаточного отношения i_{14} не зависит от размеров промежуточных зубчатых колес. Это дало повод в технике называть такие колеса паразитными.

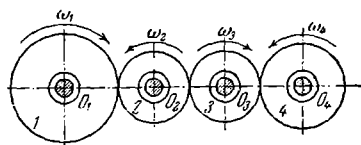


Рис. 340. Схема рядового соединения зубчатых колес с паразитными колесами.

В действительности же эти колеса выполняют существенную роль, заключающуюся либо в обеспечении надлежащего направления вращения ведомого вала, ибо введение таких колес влияет на знак передаточного отношения, либо в передаче движения при большом межосевом расстоянии.

3°. Определение общего передаточного отношения рядового соединения круглых конических зубчатых колес может быть сделано по формуле (10.35).

Передаточное отношение от колеса I к колесу n и в этом случае равно

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (i_{12}) \cdot (i_{2'3}) \cdot (i_{3'4}) \dots (i_{(n-1)'n}) = \\ = \frac{r_2 r_3 r_4 \dots r_n}{r_1 r_2' r_3' \dots r_{(n-1)'}} = \frac{z_2 z_3 z_4 \dots z_n}{z_1 z_2' z_3' \dots z_{(n-1)'}}.$$

Если все промежуточные колеса — паразитные, передаточное отношение равно

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{z_n}{z_1}.$$

Если ось вращения ведомого колеса в рядовом соединении параллельна оси ведущего колеса или, в частности, совпадает с ней, то передаточному отношению i_{1n} целесообразно приписать знак, а именно: знак плюс, если направления угловых скоростей ведущего и ведомого колес совпадают, и знак минус, если эти направления противоположны. Определение этого знака будем вести следующим образом. В месте соприкосновения колес I и 2 (рис. 341 или 342) поставим стрелки a и b , причем если стрелка a направлена от места соприка-

сания, то и стрелка b должна быть направлена от места соприкосновения (рис. 341) или к месту соприкосновения (рис. 342). На колесах $2'$, жестко связанных с колесами 2, в местах соприкосновения с колесами 3 ставим стрелку c того же направления, как и стрелка b . Тогда

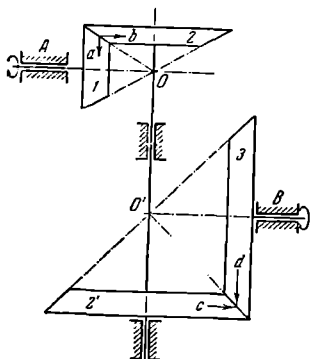


Рис. 341. Схема двухступенчатой конической передачи.

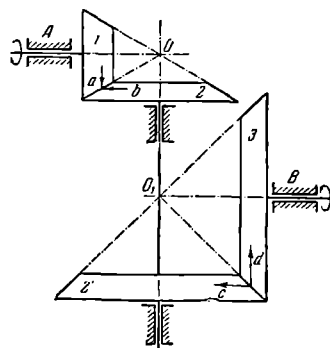


Рис. 342. Схема двухступенчатой конической передачи.

стрелка d согласно вышеуказанному условию будет иметь направления: для колеса 3 на рис. 341, совпадающее со стрелкой a , а для колеса 3 на рис. 342 — обратное стрелке a . Если направления стрелок ведущего и ведомого колес совпадают (рис. 341), то знак передаточного отношения следует считать положительным. Если же направления этих стрелок противоположны (рис. 342), то знак передаточного отношения оказывается отрицательным.

Пример. Рассмотрим редуктор, который показан на рис. 343. Пусть числа зубьев его колес равны

$$\begin{aligned} z_1 &= 20, & z_2 &= 20, & z_3 &= 60, & z_5 &= 25, \\ z_{3'} &= 16, & z_4 &= 24, & z_{4'} &= 15, \end{aligned}$$

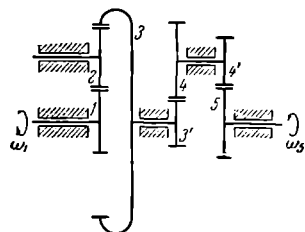


Рис. 343. Схема зубчатого трехступенчатого редуктора.

Требуется определить общее передаточное отношение редуктора. Общее передаточное отношение i_{15} редуктора согласно формулам (10.36) и (10.37) равно

$$i_{15} = (-1)^3 (i_{12}) (i_{23}) (i_{3'4}) (i_{4'5}) = - \frac{z_2 z_3 z_4 z_5}{z_1 z_2 z_3 z_{4'}} = - \frac{z_3 z_4 z_5}{z_1 z_3 z_{4'}}.$$

Передаточное отношение i_{15} отрицательно, потому что число внешних зацеплений равно 3. Число зубьев z_2 колеса 2, входящее в числитель и знаменатель, можно сократить, ибо колесо 2 является паразитным. Подставляя заданные числа зубьев, получаем:

$$i_{15} = - \frac{60 \cdot 24 \cdot 25}{20 \cdot 16 \cdot 15} = - 7,5.$$

§ 45. Механизмы планетарных зубчатых передач

1°. Перейдем, далее, к рассмотрению серий зубчатых колес, у которых оси некоторых колес подвижные. К числу таких зубчатых механизмов относятся так называемые *планетарные зубчатые механизмы*.

Планетарные зубчатые механизмы можно разделить на механизмы с одной, двумя и несколькими степенями подвижности. Планетарные механизмы с двумя и несколькими степенями подвижности называются *дифференциальными* или просто *дифференциалами*.

Примером четырехзвенного дифференциала может служить четырехзвенный механизм, изображенный на рис. 344. Колеса 1 и 3 вращаются

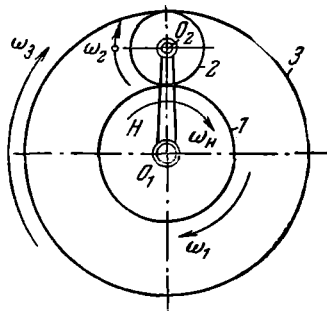


Рис. 344. Схема простейшего зубчатого дифференциала.

вокруг неподвижной оси O_1 с угловыми скоростями ω_1 и ω_3 . Звено H вращается вокруг оси O_1 независимо от колес 1 и 3 с угловой скоростью ω_H . Колесо 2 одновременно участвует в двух движениях: во вращении вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_H и во вращении вокруг своей собственной оси O_2 , принадлежащей звену H , с угловой скоростью ω_2^H . Верхний индекс H у угловой скорости ω_2^H показывает, что рассматривается угловая скорость звена 2 в его движении относительно звена H . В механизме имеем: число подвижных звеньев $n=4$, число вращательных пар V класса $p_3=4$ и число

пар IV класса $p_4=2$. Следовательно, по структурной формуле число степеней подвижности ω равно

$$\omega = 3n - 2p_3 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

Таким образом, механизм должен иметь заданными законы движения двух звеньев или две обобщенные координаты. Можно, например, задаться угловыми скоростями ω_1 и ω_H звеньев 1 и H . Тогда угловая скорость ω_3 звена 3 будет вполне определенной. Можно задаться угловыми скоростями ω_1 и ω_3 ; тогда вполне определенной будет угловая скорость ω_H звена H .

2°. Выведем формулу, связывающую угловые скорости ω_1 , ω_3 и ω_H звеньев 1, 3 и H . Пусть звенья механизма движутся с угловыми скоростями ω_1 , ω_3 и ω_H . Относительное движение звеньев не изменится, если всем звеньям механизма сообщить дополнительное вращение с какой-либо общей угловой скоростью. Сообщим всем звеньям механизма дополнительное вращение вокруг оси O_1 с угловой скоростью $-\omega_H$, равной по величине, но противоположной по знаку

угловой скорости звена H . Тогда звенья механизма будут иметь угловые скорости:

Звено механизма	Первоначальная угловая скорость звена	Угловая скорость звена после сообщения ему дополнительного вращения
1	ω_1	$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H$
3	ω_3	$\omega_3^H = \omega_3 - \omega_H$
H	ω_H	$\omega_H^H = \omega_H - \omega_H = 0$

Следовательно, после сообщения звеньям механизма дополнительного вращения с угловой скоростью — ω_H звено H будет неподвижно и дифференциал превратится в обыкновенный зубчатый механизм с неподвижными осями O_1 и O_3 . Индекс H у угловых скоростей ω_1^H , ω_3^H и ω_H^H показывает, что рассматриваются угловые скорости колес 1 и 3 и звена H в предположении неподвижности звена H^*). Передаточное отношение такого механизма равно

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H}, \quad (10.38)$$

где n_1 , n_3 и n_H — числа оборотов в минуту колес 1 и 3 и звена H .

Угловая скорость ω_2^H не входит в равенство (10.38), так как колесо 2 является паразитным (см. § 44, 2°). В левой части формулы (10.38) стоит передаточное отношение i_{13}^H обыкновенного зубчатого механизма в предположении неподвижности звена H . Формула (10.38) связывает между собой угловые скорости колес 1 и 3 и звена H . Задаваясь двумя какими-либо из них, можно всегда определить третью. Например, данным механизмом можно выполнять задачи скалярного сложения двух заданных величин.

Механизмы дифференциалов широко применяются в автомобилях, счетных машинах, сельскохозяйственных машинах и т. д.

3°. Из механизма, показанного на рис. 344, могут быть получены и другие механизмы закреплением одного из звеньев. Так, если закрепить звено H , то его угловая скорость ω_H будет равна нулю. Тогда формула для передаточного отношения i_{13} будет иметь известный вид

$$i_{13} = i_{13}^H = \frac{\omega_1}{\omega_3}, \quad (10.39)$$

*) В дальнейшем верхний индекс у величин передаточных отношений будет указывать номер неподвижного звена.

и дифференциал превращается, как сказано выше, в обыкновенный зубчатый механизм с неподвижными осями. Если закрепить одно из колес, например колесо 3 (рис. 345), то угловая скорость ω_3 будет равна нулю, и формула (10.38) может быть написана так:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}^{(3)},$$

откуда получим:

$$i_{1H}^{(3)} = 1 - i_{13}^H, \quad (10.40)$$

где $i_{1H}^{(3)}$ — передаточное отношение механизма с неподвижным колесом 3, подсчитанное от колеса 1 к звену H , а i_{13}^H — передаточное отношение механизма, составленного из тех же колес с неподвижными осями O_1 и O_3 , подсчитанное от колеса 1 к колесу 3. При неподвижном колесе 3 колесо 2 будет катиться по колесу 3. Число степеней подвижности такого механизма равно

$$\omega = 3n - 2p_3 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

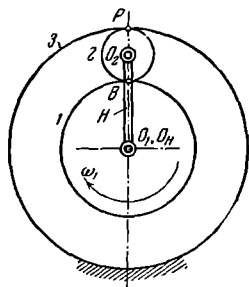


Рис. 345. Схема планетарного механизма с неподвижным солнечным колесом.

Зубчатое колесо, вращающееся вокруг неподвижной оси или скрепленное со стойкой, называется *солнечным* или *центральным колесом*. Зубчатое колесо, имеющее гипоциклическое или эпициклическое движение относительно солнечного колеса, называется планетным колесом или *сателлитом*. Поэтому иногда планетарные зубчатые механизмы называются *сателлитными зубчатыми механизмами*. Промежуточное звено H , соединяющее солнечное колесо с сателлитом, называется *водилом*. Как видно из формулы (10.40), чтобы определить передаточное отношение планетарной передачи, необходимо из единицы вычесть передаточное отношение обыкновенной зубчатой передачи в предположении неподвижности водила. Передаточное отношение от водила к колесу 1 (рис. 345) равно

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{i_{1H}^{(3)}} = \frac{1}{1 - i_{13}^H}.$$

Из формулы (10.40) следует, что планетарные механизмы могут воспроизводить очень большие и очень малые передаточные отношения. Для этого необходимо, чтобы передаточное отношение при неподвижном водиле было близко к единице.

4°. Исследование планетарных механизмов может быть также проведено с помощью картины скоростей. На рис. 346 показано построение картины скоростей для трехзвенного планетарного механизма, состоящего из подвижного колеса 1, неподвижного колеса 2 и водила H .

Скорость v_{O_1} точки O_1 водила H отложена в виде отрезка (ko_1). Картина скоростей колеса I получится, если соединить точку o_1 с точкой p — проекцией мгновенного центра вращения P_0 колеса I ; это — треугольник pko_1 . Картина скоростей водила H получится, если соединить точку o_1 с точкой o_2 ; это — треугольник o_2ko_1 . Из картины скоростей имеем:

$$v_{O_1} = \omega_1 r_1 = \omega_H (r_1 + r_2),$$

откуда получаем:

$$j_{1H}^{(2)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{r_1 + r_2}{r_1}.$$

Угловая скорость ω_H водила равна

$$\omega_H = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \delta_H,$$

а угловая скорость ω_1 колеса I равна

$$\omega_1 = \frac{\mu_v}{\mu_j} \operatorname{tg} \delta_1,$$

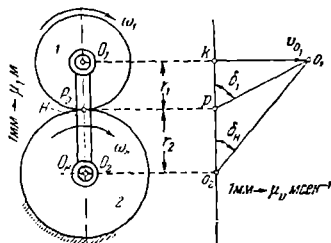


Рис. 346. Схема трехзвенного планетарного механизма и его картина скоростей.

где μ_1 и μ_2 — масштабы схемы и карты скоростей.

5°. Широкое распространение в различных машинах получили конические планетарные механизмы.

Для определения чисел оборотов в минуту колес конических дифференциалов и передаточного отношения планетарных конических механизмов могут быть применены формулы (10.38) и (10.40).

На рис. 347 показан конический дифференциал, применяемый в автомобилях. При повороте ведущих колес автомобиля (рис. 348) колесо 1, катящееся по внешней кривой $\alpha - \alpha$, должно пройти больший путь, чем колесо 2, катящееся по внутренней кривой $\beta - \beta$. Следовательно, скорость колеса 1 оказывается больше, чем колеса 2. Чтобы воспроизвести это движение колес с различными угловыми скоростями, и применяется дифференциал. Коническое зубчатое колесо 1 (рис. 347) получает вращение от двигателя. Это зубчатое колесо входит в зацепление с коническим зубчатым колесом 2, вращающимся свободно на полуоси А. С колесом 2 скреплена коробка Н, служащая водилом. В коробке Н свободно на своих осях вращаются два одинаковых сателлита 3. Сателлиты 3 находятся в зацеплении с двумя одинаковыми зубчатыми колесами 4 и 5, скрепленными с полуосями А и В. Если колеса автомобиля движутся по прямым, то можно считать, что моменты сил сопротивления на полуосях А и В равны и, следовательно, сателлиты 3 находятся относительно их собственных осей вращения в равновесии, и они не поворачиваются вокруг своих осей. Тогда коробка Н вместе с сателлитами 3 и полуоси А и В вращаются как одно целое в одну и ту же сторону с одинаковой угловой скоростью. Как только колеса автомобиля начнут двигаться по кривым различных радиусов R_1 и R_2 (рис. 348),

сателлиты 3 начнут поворачиваться вокруг своих осей, и весь механизм будет работать как дифференциальный механизм.

Рассмотрим кинематику автомобильного дифференциала. Согласно формуле (10.38) имеем:

$$i_{45}^H = \frac{\omega_4 - \omega_H}{\omega_5 - \omega_H} = \frac{n_4 - n_H}{n_5 - n_H},$$

где n_4 и n_5 суть числа оборотов в минуту колес 4 и 5, а n_H есть число оборотов в минуту коробки H (водила). Колесо 4 сцепляется с паразитными колесами 3 (сателлитами), которые в свою очередь сцепляются с колесом 5, одинаковым с колесом 4. Следовательно, передаточное отношение i_{45}^H равно

$$i_{45}^H = \frac{z_5 z_3}{z_3 z_4} = \frac{z_5}{z_4} = -1.$$

Знак минус поставлен потому, что стрелки a и c колес 4 и 5

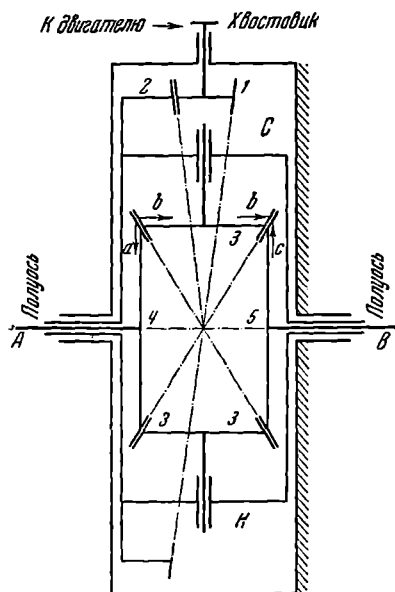


Рис. 347. Схема конического автомобильного дифференциала.

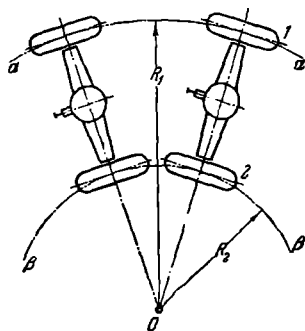


Рис. 348. Положения колес автомобиля при его повороте.

(рис. 347) не совпадают по направлению. Таким образом, окончательно получим:

$$i_{45}^H = \frac{n_4 - n_H}{n_5 - n_H} = -1,$$

откуда

$$n_4 - n_H = n_H - n_5$$

или

$$n_H = \frac{n_4 + n_5}{2}.$$

Из полученной формулы следует, что число оборотов в минуту n_H коробки H равно полусумме чисел оборотов полуосей A и B . Если одно из колес, например колесо 4, остановится и n_4 будет равно нулю, то получим:

$$n_H = \frac{n_5}{2},$$

и тогда колесо 5 будет делать в два раза большее число оборотов, чем коробка H . Если неподвижной будет коробка H и число оборотов n_H коробки будет равно нулю, то

$$n_4 = -n_5,$$

и колесо 4 будет вращаться с тем же числом оборотов, что и колесо 5, но в противоположном направлении.

Пример 1. Рассмотрим планетарный механизм, показанный на рис. 349, у которого колесо 3 скреплено со стойкой. Обозначим числа зубьев колес 1, 2 и 3 соответственно через z_1 , z_2 и z_3 , а радиусы этих колес соответственно через r_1 , r_2 и r_3 . Требуется определить передаточные отношения $i_{1H}^{(3)}$ и $i_{H1}^{(3)}$.

Передаточное отношение $i_{1H}^{(3)}$ от колеса 1 к водилу H равно

$$i_{1H}^{(3)} = 1 - i_{13}^H = 1 - i_{12}^H \cdot i_{23}^H = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2} = 1 - \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_1}.$$

Передаточное отношение $i_{H1}^{(3)}$ от водила H к колесу 1 равно

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{i_{1H}^{(3)}} = \frac{z_1}{z_1 - z_3}.$$

На рис. 349 построена картина скоростей механизма. Из картины скоростей имеем:

$$v_{O_2} = \omega_H(r_3 + r_2) = \omega_2 r_2, \quad v_{P''} = \omega_2 2r_2$$

и

$$v_{O_1} = \omega_H(r_3 + 2r_2 + r_1),$$

где ω_1 , ω_2 и ω_H — угловые скорости колес 1 и 2 и водила H .

Далее, из картины скоростей следует:

$$v_{P''} - v_{O_1} = -\omega_1 r_1.$$

Подставляя в последнее уравнение величины скоростей $v_{P''}$ и v_{O_1} , получаем:

$$2\omega_2 r_2 - \omega_H(r_3 + 2r_2 + r_1) + \omega_1 r_1 = 0.$$

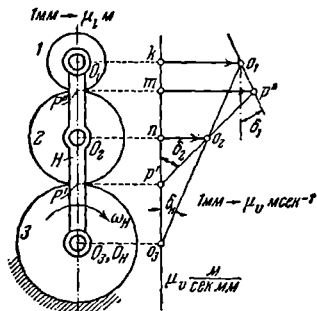


Рис. 349. Схема планетарного зубчатого механизма с картиной скоростей.

Из выражения для скорости v_{O_2} следует:

$$2\omega_2 r_2 = 2\omega_H (r_2 + r_1).$$

Тогда окончательно получаем:

$$2\omega_H (r_2 + r_1) - \omega_H (r_2 + 2r_2 + r_1) + \omega_1 r_1 = 0.$$

Из последнего уравнения после несложных преобразований определяем величину передаточного отношения $i_{1H}^{(3)}$. Имеем:

$$i_{1H}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{r_1 - r_2}{r_1}.$$

Для передаточного отношения $i_{H1}^{(3)}$ получаем соответственно

$$i_{H1}^{(2)} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_1 - r_2}.$$

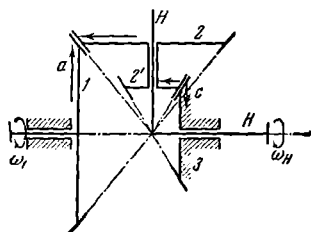


Рис. 350. Схема конического планетарного механизма.

Угловые скорости ω_1 , ω_2 и ω_H равны $\omega_1 = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \delta_1$, $\omega_2 = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \delta_2$ и $\omega_H = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \delta_H$, где μ_l и μ_v — масштабы схемы и картины скоростей.

Пример 2. На рис. 350 показан планетарный редуктор с коническими зубчатыми колесами 1, 2, 2', 3, имеющими соответственно числа зубьев, $z_1 = 60$, $z_2 = 48$, $z_2' = 18$ и $z_3 = 30$. Требуется определить передаточное отношение $i_{1H}^{(3)}$ от колеса 1 к водилу H, если колесо 3 скреплено со стойкой. Имеем [см. формулу (10.40)]:

$$i_{1H}^{(3)} = 1 - i_{13}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'} \right) = 1 + \frac{48}{6} \cdot \frac{30}{18} = 7,3.$$

Знак минус в скобках поставлен потому, что стрелки a и c имеют противоположные направления, и следовательно, колеса 1 и 3 вращаются в разные стороны.

§ 46. Механизмы некоторых типов редукторов и коробок скоростей

1° В настоящем параграфе рассмотрим кинематику некоторых типов редукторов и коробок скоростей, применяемых в различных машинах и устройствах.

На рис. 351 показан четырехзвенный планетарный редуктор. Редуктор состоит из двух пар колес с внешним зацеплением и водила H. На рис. 351 построена картина скоростей звеньев редуктора.

Передаточное отношение редуктора можно подсчитать по формуле (10.40). Имеем:

$$i_{1H}^{(3)} = 1 - i_{13}^H = 1 - i_{12} \cdot i_{23} = 1 - (-1) \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'} = 1 - \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2'}.$$

Передаточное отношение $i_{2'H}$ равно

$$i_{2'H}^{(4)} = 1 + \frac{z_8 z_4}{z_2 z_3} = 1 + \frac{40 \cdot 90}{20 \cdot 30} = 7,$$

и следовательно, общее передаточное отношение i_{1H} редуктора оказывается равным

$$i_{1H}^{(4)} = i_{12} \cdot i_{2'H}^{(4)} = (-2) \cdot 7 = -14.$$

На рис. 352 показана кроме схемы и картина скоростей звеньев редуктора.

3°. Рассмотрим многозвенный редуктор, показанный на рис. 353. Такого типа редукторы называются замкнутыми дифференциальными редукторами.

Как было показано выше, дифференциальный механизм должен иметь не менее двух ведущих звеньев. Однако если механизм имеет

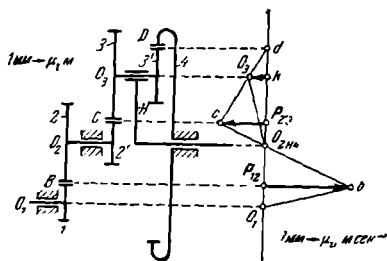


Рис. 352. Схема сложного планетарного зубчатого редуктора с картиной скоростей.

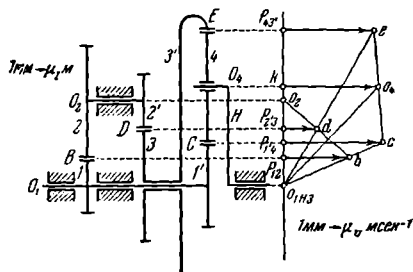


Рис. 353. Схема замкнутого дифференциального механизма с картиной скоростей.

две степени подвижности и его оба ведущих звена связаны дополнительной зубчатой передачей, то движение механизма можно осуществить одним ведущим звеном. Дифференциальный механизм, у которого ведущие звенья связаны дополнительной зубчатой передачей, называется *замкнутым дифференциальным механизмом*. Замыкание производится так, что два колеса с неподвижными осями связываются дополнительной передачей, или одно из указанных колес через посредство дополнительных колес соединяется со звеном H .

На рис. 353 показан дифференциальный механизм, у которого колеса $1'$ и $3'$ замкнуты колесами $1-2-2'-3$, вследствие чего угловая скорость колеса $3'$ поставлена в зависимость от угловой скорости ведущего звена 1 . Требуется определить передаточное отношение i_{1H} .

Передаточное отношение от колеса $1'$ к колесу $3'$ в рассматриваемом случае можно определить по формуле (10.38) для дифференциального механизма. Имеем:

$$i_{1'3'}^H = \frac{\omega_{1'} - \omega_H}{\omega_{3'} - \omega_H},$$

или так как $i_{1'H} = i_{1H}$, то

$$i_{1'3'}^H = \frac{\frac{\omega_{1'}}{\omega_H} - 1}{\frac{\omega_{3'}}{\omega_H} - 1} = \frac{i_{1'H} - 1}{\frac{\omega_{3'}}{\omega_H} - 1} = \frac{i_{1H} - 1}{\frac{\omega_{3'}}{\omega_H} - 1},$$

где

$$i_{1'3'}^H = i_{1'4'}^H \cdot i_{43'}^H = (-1)^{\frac{z_4 z_{3'}}{z_1 z_4}} = -\frac{z_{3'}}{z_1}.$$

Для определения величины i_{1H} необходимо выразить величину ω_3 через величину угловой скорости ω_1 , для чего определяем передаточное отношение i_{13} . Имеем:

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{13} \cdot i_{2'3} = (-1)^{\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}.$$

Подставляя величину $\omega_3 = \omega_{3'} = \frac{\omega_1}{i_{13}}$ в приведенную выше формулу для дифференциала, получаем:

$$i_{1'3'}^H = \frac{i_{1H} - 1}{\frac{\omega_1}{i_{13}\omega_H} - 1} = \frac{(i_{1H} - 1)i_{13}}{i_{1H} - i_{13}}.$$

Теперь последнее уравнение можно решить относительно i_{1H} :

$$i_{1H} = \frac{i_{13}(i_{1'3'}^H - 1)}{i_{1'3'}^H - i_{13}} = \frac{i_{1'3'}^H - 1}{\frac{i_{1'3'}^H}{i_{13}} - 1}.$$

Подставляя в эту формулу величины i_{13} и $i_{1'3'}^H$, выраженные через числа зубьев, определяем передаточное отношение i_{1H} . Если, например, $z_1 = 20$, $z_{1'} = 26$, $z_2 = 34$, $z_{2'} = 18$, $z_3 = 36$, $z_{3'} = 78$, $z_4 = 26$, то, подсчитав предварительно

$$i_{1'3'}^H = -\frac{z_{3'}}{z_1} = -\frac{78}{26} = -3 \quad \text{и} \quad i_{13} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}} = \frac{34 \cdot 36}{20 \cdot 18} = 3,4,$$

получим:

$$i_{1H} = \frac{-3 - 1}{\frac{-3}{3,4} - 1} = 2,125.$$

На рис. 353 показана вместе со схемой и картина скоростей звеньев рассмотренного механизма.

4°. Рассмотрим теперь кинематику некоторых типов коробок скоростей. *Зубчатой коробкой скоростей* называется зубчатый механизм, передаточное отношение которого можно изменять скачкообразно по ступеням. Коробками скоростей снабжаются те машины, рабочие органы которых должны вращаться с различными скоростями

в зависимости от условий работы. Например, обработка различных деталей на токарном станке производится при разных скоростях, поэтому в механизм токарного станка включается коробка скоростей. Коробки скоростей применяются в автомобилях для получения различных скоростей движения автомобиля. Схема и конструктивное оформление коробок скоростей бывают чрезвычайно разнообразными. Если число ступеней регулирования скорости невелико, то схема коробки получается достаточно простой, при большом же числе ступеней регулирования как схема, так и конструктивное оформление могут быть весьма сложными.

Коробка скоростей состоит из зубчатых колес, которые могут быть введены в зацепление в различных комбинациях для получения передаточных отношений, соответствующих заданным скоростям вращения рабочего органа машины. Способы переключения отдельных

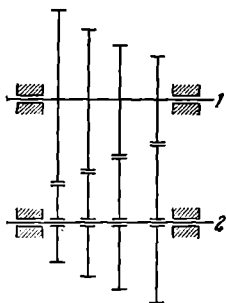


Рис. 354. Схема четырехступенчатой коробки скоростей.

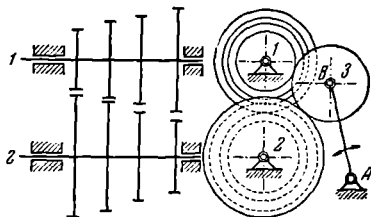


Рис. 355. Схема коробки скоростей с тремя валами.

колес для получения различных скоростей разнообразны и зависят от конструктивного оформления коробки и поэтому здесь не рассматриваются.

На рис. 354 показана схема четырехступенчатой коробки с двумя валами. Колеса на валу 1 посажены наглухо, на валу 2 колеса сидят свободно. При помощи специальной шпонки, не показанной на чертеже, можно жестко соединить одно из нижних колес с валом 2, в соответствии с чем между валами 1 и 2 получается то или иное передаточное отношение.

Коробка, показанная на рис. 355, имеет три вала. Колеса, сидящие на валах 1 и 2, входят в передачу через промежуточное колесо, сидящее на валу 3. На валу 3 свободно посажено только одно колесо, которое можно передвигать вдоль вала. Вал 3 можно это двигать вместе с колесом 3 от колес, сидящих на валах 1 и 2, поворачивая звено АВ вокруг оси А. Таким образом, при помощи колеса 3 можно соединять любую пару колес, расположенных на валах 1 и 2, благодаря чему один из валов 1 или 2 будет иметь четыре ступени скорости при одной и той же скорости другого вала.

Рассмотрим теперь схему более сложной коробки с подвижной осью. На рис. 356 показана двухступенчатая планетарная коробка скоростей, одна из ступеней скорости которой получается закреплением колеса 3, вторая же — закреплением колеса 4.

Определим передаточное отношение при закрепленном колесе 3 и вращающемся вхолостую колесе 4. В этом случае получаем:

$$(i_{1H})' = 1 - i_{13}^H = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2''} = 1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2''}.$$

При неподвижном колесе 4 и вхолостую вращающемся колесе 3 имеем:

$$(i_{1H})'' = 1 - i_{14}^H = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_4}{z_1 z_2'}.$$

Пусть $z_1 = 28$, $z_2 = 28$, $z_2' = 20$, $z_2'' = 38$, $z_3 = 18$, $z_4 = 36$. Тогда

$$(i_{1H})' = 1 - \frac{28 \cdot 18}{28 \cdot 38} = 0,526, \quad (i_{1H})'' = 1 - \frac{28 \cdot 36}{28 \cdot 38} = 0,053.$$

На этом мы заканчиваем рассмотрение кинематики некоторых типов редукторов и коробок скоростей.

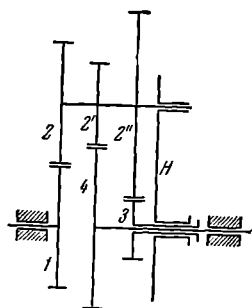


Рис. 356. Схема двухступенчатой планетарной коробки скоростей.

§ 47. Механизмы передач с гибкими звеньями

1°. Механизмы передач с гибкими звеньями широко применяются в технике. Достаточно указать на передачи ременные, канатные, цепные и т. д.

Рассмотрим основные кинематические зависимости, имеющие место при передаче движения гибким звеном. Пусть два звена 1 и 3 (рис. 357) имеют профили, очерченные по некоторым кривым $\alpha - \alpha$ и $\gamma - \gamma$. Гибкое нерастяжимое звено 2 охватывает профили $\alpha - \alpha$ и $\gamma - \gamma$ на участках Bk и Cn и закреплено своими концами k и n на профилях. Если звено 1 вращать, то гибкое звено 2 будет наматываться на профиль $\alpha - \alpha$ и сматываться с профиля $\gamma - \gamma$ и тем самым приведет во вращение звено 3. Найдем связь между угловыми скоростями ω_1 и ω_3 звеньев 1 и 3. Для этого воспользуемся методом мгновенных центров вращения, изложенным в § 25. Мгновенный центр P_{14} располагается в точке A . Мгновенный центр P_{34} находится в точке D .

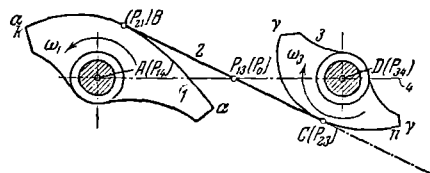


Рис. 357. Схема передачи с нерастяжимой гибкой нитью и отрицательным передаточным отношением.

Мгновенный центр P_{21} совпадает с точкой B . В самом деле, если мысленно остановить звено 1 , то звено 2 будет перекашиваться без скольжения по профилю $\alpha - \alpha$ звена 1 . Точно так же мгновенный центр вращения P_{32} совпадает с точкой C . Мгновенный центр вращения P_{13} в движении звена 3 относительно звена 1 должен одновременно лежать на прямых, соединяющих мгновенные центры P_{14} ,

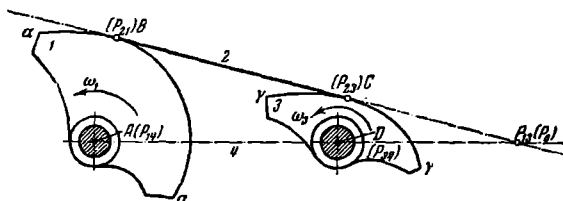


Рис. 358. Схема передачи с нерастяжимым гибким звеном и положительным передаточным отношением.

P_{34} и P_{21} , P_{23} , и в соответствии с этим он лежит в точке пересечения прямых AD и BC . Следовательно, передаточное отношение i_{13} будет равно

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = -\frac{P_{34}P_{13}}{P_{14}P_{13}} = -\frac{DP_0}{AP_0}. \quad (10.41)$$

Таким образом, направление гибкого звена делит линию, соединяющую центры вращения звеньев 1 и 3 , на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

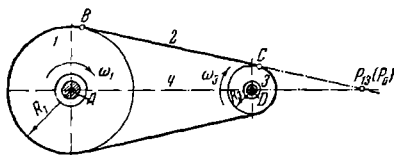


Рис. 359. Схема открытой передачи с нерастяжимым гибким звеном и круглыми шкивами.

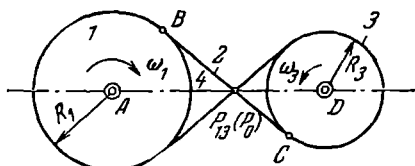


Рис. 360. Схема перекрестной передачи с нерастяжимым гибким звеном и круглыми шкивами.

В случае деления линии AD внутренним образом передаточное отношение отрицательно (рис. 357); в случае деления внешним образом передаточное отношение положительно (рис. 358).

2°. При передаче движения гибким звеном посредством круглых шкивов (рис. 359) передаточное отношение равно

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{DP_0}{AP_0} = \frac{R_3}{R_1}, \quad (10.42)$$

т. е. передаточное отношение равно обратному отношению радиусов R_1 и R_3 шкивов 1 и 3 .

Механизм передачи гибким звеном, показанный на рис. 359, носит название *открытой передачи*. На рис. 360 показан механизм *перекрестной передачи*. Передаточное отношение перекрестной передачи

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = -\frac{DP_0}{AP_0} = -\frac{R_3}{R_1}. \quad (10.43)$$

На рис. 361 показана схема бесступенчатого вариатора скорости с гибким звеном 5. Конусы 1, 2, 3 и 4 специальным механизмом, не показанным на схеме, могут сдвигаться или раздвигаться. При этом соблюдается условие постоянства длины гибкого звена 5. Таким образом, мы имеем два шкива, у которых могут плавно меняться радиусы и плавно изменяться передаточные отношения.

Передачи с гибкими звеньями широко применяются также и в виде цепных передач, в которых зубчатые звездочки входят в зацепление со звеньями цепи. Такие механизмы применяются в сельскохозяйственных машинах, транспортерах, горных машинах и т. д.

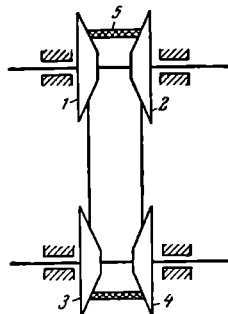


Рис. 361. Схема бесступенчатого вариатора скоростей с нерастяжимым гибким звеном и коническими шкивами.

ГЛАВА XI

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 48. Механизм универсального шарнира

1°. В § 3,9° при рассмотрении рычажных механизмов мы отметили сферический шарнирный четырехзвенник.

На рис. 362 показан простейший сферический шарнирный четырехзвенник $ABCD$, оси вращательных кинематических пар которого

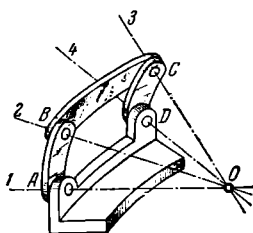


Рис. 362. Сферический шарнирный четырехзвенник со схематизированными конструктивными формами звеньев.

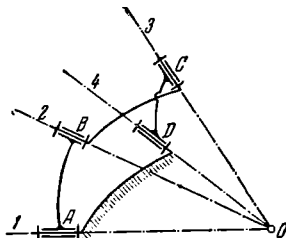


Рис. 363. Кинематическая схема сферического шарнирного четырехзвенника.

пересекаются в точке O . В ней пересекаются оси 1, 2, 3 и 4 вращательных кинематических пар V класса. Кинематическая схема этого механизма показана на рис. 363.

Конструктивно сферический механизм шарнирного четырехзвенника выполняется так, как это показано на рис. 364. Звено 1, вращающееся с угловой скоростью ω_1 в неподвижном подшипнике, выполнено в виде вилки F , снабженной двумя втулками B и B' с одной общей осью. Аналогично звено 2, вращающееся с угловой скоростью ω_2 в неподвижном подшипнике, выполнено в виде вилки F_1 , снабженной двумя втулками C и C' с одной общей осью. Звено 3 выполнено в виде крестовины, концы которой входят во втулки B , B' и C , C' вилок F и F_1 .

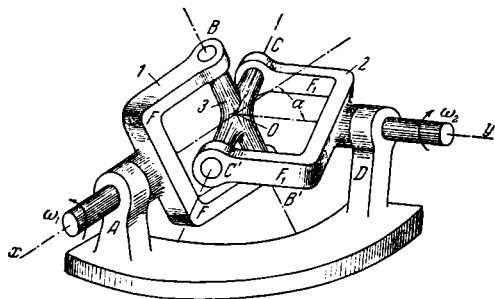


Рис. 364. Модель сферического шарнирного четырехзвенника.

Механизм позволяет воспроизводить передачу вращения от звена 1 к звену 2, оси валов которых пересекаются под углом α (рис. 364).

На практике мы встречаем по преимуществу тот частный вид механизма, когда углы AOB , COB и COD равны 90° (рис. 365). Тогда точки B и B' движутся по дуге большого круга, плоскость которого перпендикулярна к оси x , а точки C и C' — по дуге большого круга, плоскость которого перпендикулярна к оси y . Описанный механизм носит название *механизма универсального шарнира* или *шарнира Гуга*.

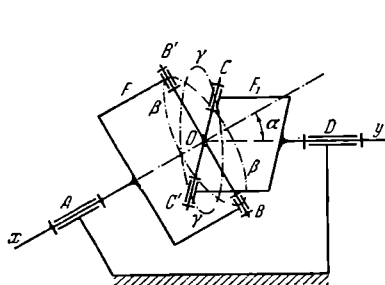


Рис. 365. Схема универсального шарнира.

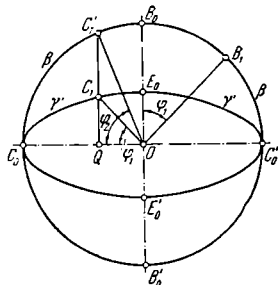


Рис. 366. К определению соотношения между углами φ_1 и φ_2 поворота звеньев универсального шарнира.

2°. Рассмотрим теперь, в какой зависимости находятся угловые скорости ω_1 и ω_2 . Как это видно на рис. 365, точка B вилки F описывает окружность $\beta - \beta$ в плоскости, перпендикулярной к оси x , а точка C вилки F_1 описывает окружность $\gamma - \gamma$ в плоскости, перпендикулярной к оси y . Угол между этими плоскостями равен углу α между осями x и y .

Если в качестве плоскости проекций выбрать плоскость, перпендикулярную к оси x , то окружность $\beta - \beta$ на эту плоскость спроек-

тируется в натуральную величину (рис. 366), а окружность $\gamma - \gamma$ в виде эллипса $\gamma' - \gamma'$. Пусть в начальном положении ось BB' занимает положение $B_0B'_0$ (рис. 366), тогда ось CC' займет положение $C_0C'_0$, так как угол BOC равен 90° и проектируется в натуральную величину. Пусть, далее, звено 1 повернется на угол φ_1 . Тогда ось OB из положения OB_0 перейдет в положение OB_1 и угол φ_1 будет проектироваться в натуральную величину. Ось OC из положения OC_0 перейдет в положение OC_1 , которое определится, если к прямой OB_1 в точке O восстановить перпендикуляр и найти точку C_1 пересечения этого перпендикуляра с эллипсом $\gamma' - \gamma'$. При этом звено 2 повернется на угол φ_2 , натуральную величину которого можно найти на чертеже, если совместить плоскость, содержащую окружность $\gamma - \gamma$, с плоскостью проекций, т. е. с плоскостью, содержащей окружность $\beta - \beta$. Это совмещение может быть сделано как поворот вокруг оси $C_0C'_0$. При этом точка C_1 переместится в точку C'_1 , лежащую на перпендикуляре QC'_1 к оси $C_0C'_0$. Угол $C_0OC'_1$ и будет искомым углом φ_2 , на который повернется звено 2. Так как угол между плоскостями, содержащими окружности $\beta - \beta$ и $\gamma - \gamma$, равен углу α между осями x и y , то всегда будет иметь место условие

$$QC_1 = QC'_1 \cos \alpha. \quad (11.1)$$

Далее, из чертежа (рис. 366) видно, что

$$QC_1 = OQ \operatorname{tg} \varphi_1 \quad (11.2)$$

и

$$QC'_1 = OQ \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (11.3)$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \cos \alpha$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \alpha. \quad (11.4)$$

Так как $\alpha = \text{const}$, то, дифференцируя выражение (11.4) по координате φ_1 , находим:

$$\frac{d(\operatorname{tg} \varphi_1)}{d\varphi_1} = \frac{d(\operatorname{tg} \varphi_2)}{d\varphi_2} \cos \alpha \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$$

или

$$\frac{d\varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} = \cos \alpha \frac{d\varphi_2}{\cos^2 \varphi_2}.$$

Разделим правую и левую части на dt . Имеем:

$$\frac{\omega_1}{\cos^2 \varphi_1} = \cos \alpha \frac{\omega_2}{\cos^2 \varphi_2},$$

так как $d\varphi_1/dt = \omega_1$ и $d\varphi_2/dt = \omega_2$. Следовательно, передаточное отношение i_{21} равно

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (11.5)$$

Уравнение (11.4) представим в виде

$$\frac{\sin^2 \varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} = \frac{\sin^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} \cos^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} \cos^2 \alpha.$$

Решая последнее уравнение относительно $\cos^2 \varphi_2$, получаем:

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{\cos^2 \varphi_1 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \alpha}. \quad (11.6)$$

Подставляя выражение (11.6) в выражение (11.5), получаем:

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \alpha}. \quad (11.7)$$

Отсюда непосредственно следует, что при *равномерном* вращении одного вала другой вал вращается *неравномерно*. В самом деле, при $\varphi_1 = 0^\circ$, или $\varphi_1 = 180^\circ$, имеем:

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

При $\varphi_1 = 90^\circ$, или $\varphi_1 = 270^\circ$, имеем:

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \cos \alpha.$$

Таким образом, передаточное отношение i_{21} у механизма универсального шарнира изменяется в пределах от $1/\cos \alpha$ до $\cos \alpha$. Чтобы не было большого колебания передаточного отношения i_{21} , оси валов шарнира следует располагать под небольшим углом α .

§ 49. Механизм двойного универсального шарнира

1°. Из механизмов первого семейства рассмотрим *механизм двойного универсального шарнира*. Как было показано в § 20,1°, формула (2.6), механизм первого семейства имеет следующую структурную формулу:

$$w = 5n - 4p_3 - 3p_4 - 2p_5 - p_6.$$

Рассмотрим механизм двойного универсального шарнира, кинематическая схема которого изображена на рис. 367. Этот механизм можно рассматри-

вать как два универсальных шарнира, имеющих общее звено $HKLN$. В этом механизме имеется пять подвижных звеньев и шесть кинематических пар V класса. Структурная формула этого механизма такая:

$$w = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = 1.$$

Таким образом, двойной универсальный шарнир обладает одной степенью подвижности.

2°. Рассмотрим соотношения угловых скоростей в механизме двойного универсального шарнира (рис. 367). Пусть в точке O пересекаются оси 1, 2 и 3, а в точке O_1 — оси 4, 5 и 6. Пусть угловая скорость звена ABC

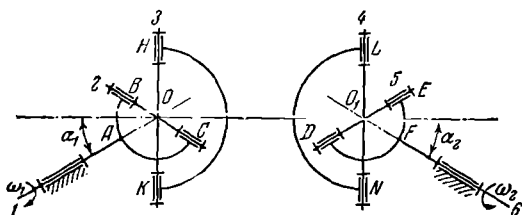


Рис. 367. Схема двойного универсального шарнира.

вокруг оси I равна ω_1 , а угловая скорость звена DEF вокруг оси 6 равна ω_2 . Пусть, далее, оси I и 6 наклонены к линии OO_1 соответственно под углами α_1 и α_2 . Вилки HK и LN находятся в одной и той же плоскости.

Обозначим угол поворота звена $HKLN$ через φ , угол поворота звена ABC — через φ_1 и, наконец, угол поворота звена DEF — через φ_2 . Тогда по формуле (11.4) для механизма универсального шарнира получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_2,$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}. \quad (11.8)$$

Отношение i_{21} угловых скоростей ω_2 и ω_1 может быть найдено с помощью формулы, аналогичной формуле (11.5).

Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2,$$

откуда имеем:

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = \omega_2.$$

Таким образом, при симметричном расположении звеньев механизма угловые скорости звеньев ABC и DEF равны между собой.

§ 50. Механизм пространственного шарнирного четырехзвенника

1°. Во многих современных машинах для передачи движения между перекрещивающимися валами применяется механизм пространственного шарнирного четырехзвенника (рис. 368). Этот механизм принадлежит к механизмам нулевого семейства и имеет следующую структурную формулу (см. § 19, 1°):

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

В механизме имеется две вращательные пары V класса (A и D) и две шаровые пары III класса (B и C). В этом механизме лишняя степень подвижности получается за счет возможного вращения звена BC вокруг своей продольной оси. Таким образом, с точки зрения структуры и кинематики возможно одну пару III класса заменить парой IV класса. Тогда по структурной формуле механизма получаем:

$$\begin{aligned} w &= 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = \\ &= 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

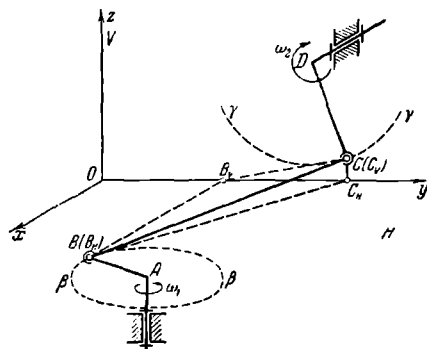


Рис. 368. Схема пространственного шарнирного четырехзвенника.

2°. На практике часто применяется тот вид механизма, в котором вращение кривошипа AB (рис. 368) вокруг оси, параллельной оси z , преобразуется в качательное движение коромысла DC вокруг оси, параллельной оси x . Таким образом, точка B шатуна BC движется по окружности $\beta - \beta$, лежащей в плоскости xOy , а точка C по дуге окружности $\gamma - \gamma$, лежащей в плоскости zOy . Пусть звено AB вращается с постоянной угловой

скоростью ω_1 . Для определения последовательных положений коромысла DC можно применить обычный метод начертательной геометрии. Осью проекций выбираем ось Oy . Горизонтальной плоскостью H проекций пусть будет плоскость xOy (рис. 368), а вертикальной плоскостью V проекций — плоскость yOz . Окружность $\beta - \beta$ будет проектироваться на плоскость H в натуральную величину [окружность $\beta_H - \beta_H$ (рис. 369, а)]. Точно так же дуга $\gamma - \gamma$ (рис. 368) будет проектироваться в натуральную величину на плоскость V [дуга $\gamma_V - \gamma_V$ (рис. 369, а)]. Пусть в исследуемом положении кривошип AB занимает положение, заданное его проекциями $A_H B_H$ и $A_V B_V$.

Из рис. 368 видно, что если треугольник $B_H B_V C_V$ вращать вокруг стороны $B_H B_V$, то при совмещении плоскости треугольника с плоскостью H

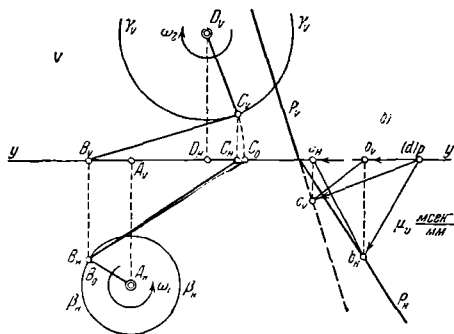


Рис. 369. Пространственный шарнирный четырехзвенник: а) проекции схемы, б) план скоростей.

шатуна BC изображается в этой плоскости в натуральную величину. Для нахождения точки C шатуна BC надо из точки B_H (B) (рис. 369, а) радиусом $B_0 C_0$, равным истинной длине шатуна BC , сделать засечку на оси $y - y$. Получаем точку C_0 . Треугольник $B_H B_V C_0$ (рис. 369, а) представляет собой совмещенный с плоскостью H треугольник $B_H B_V C$. Далее вращаем треугольник $B_H B_V C_0$ (рис. 369, а) вокруг стороны $B_H B_V$. Точка C_0 при этом будет перемещаться по дуге, описанной из точки B_V радиусом $B_V C_0$.

Точка C_V получится на пересечении этой дуги с дугой $\gamma_V - \gamma_V$ (рис. 369, а). Точка C_H при этом определится как проекция точки C на ось $y - y$ (рис. 369, а). Горизонтальная проекция механизма получится в виде многоугольника $A_H B_H C_H D_H$, а вертикальная в виде $A_V B_V C_V D_V$ (рис. 369, а).

3°. Для определения скорости v_C точки C имеем два уравнения:

$$v_C = v_B + v_{CB}, \quad v_C = v_D + v_{CD}.$$

Так как $v_D = 0$, то

$$v_{CD} = v_B + v_{CB}.$$

Построение пучка скоростей выполняем в тех же проекциях (рис. 369, б).

Из точки p откладываем отрезок $(p\bar{b}_H)$, направленный перпендикулярно к отрезку $(A_H B_H)$ (рис. 369, а). Величина скорости v_B равна

$$v_B = \omega_1 (r_{BH}^h),$$

где μ_v — масштаб скоростей.

Проекция скорости v_B на вертикальную плоскость V проекций представляется отрезком (pb_V) . Через конец b_V отрезка (pb_V) проводим плоскость, содержащую вектор скорости v_{CB} . Эта плоскость перпендикулярна к оси шатуна BC . На рис. 369 эта плоскость представлена своими следами P_V и P_H .

Далее, из точки p плана проводим прямую в направлении скорости $v_C = v_{CD}$ перпендикулярную к отрезку $(D_V C_V)$ (рис. 369, а). Точка c_V пере-

сечения этого направления со следом P_V является концом вектора скорости v_C точки C , и

$$v_C = \mu_v (pc_V).$$

Горизонтальная проекция скорости v_C представляется отрезком (pc_H) . Пучок скоростей на рис. 369, б представлен треугольником, имеющим проекции $pb_H^{c_H}$ и $pb_V^{c_V}$.

Определение ускорений механизма может быть сделано с помощью лучка ускорений, но исследование пространственных механизмов обычно проводится методом кинематических диаграмм.

§ 51. Винтовые механизмы

1°. К механизмам четвертого семейства относятся трехзвенные винтовые механизмы (см. § 20). Структурная формула для этих механизмов имеет вид

$$w = 2n - p_5.$$

На рис. 370 показан трехзвенный винтовой механизм, имеющий два подвижных звена и три винтовые пары V класса. Имеем для него

$$w = 2n - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

Рассмотрим вопрос о том, как связаны между собой отдельные параметры трехзвенного винтового механизма. Относительное движение звеньев винтовой пары представляет собой вращение звеньев вокруг оси и поступательное перемещение вдоль оси пары. Связь между этими двумя движениями имеет следующий вид:

$$s = h \frac{\varphi}{2\pi}, \quad (11.9)$$

где s есть перемещение одного звена пары относительно другого вдоль оси пары, h — шаг винтовой линии (резьбы), φ — угол поворота.

Таким образом, если известны угол поворота звена I и шаг резьбы, то всегда можно по формуле (11.9) определить перемещение звена I . Если при вращении звена по направлению часовой стрелки, смотря вдоль оси пары, видим, что звено *удаляется* от нас, то такую винтовую резьбу называем *правой*. Если же, вращая звено по направлению часовой стрелки, видим, что звено *приближается* к нам, то такую винтовую резьбу называем *левой*. Будем считать шаг правой резьбы *положительным*, а шаг левой резьбы — *отрицательным*.

2°. Рассмотрим кинематику механизма, показанного на рис. 370. Перемещение s_{13} звена I относительно стойки 3 согласно формуле (11.9) равно

$$s_{13} = h_1 \frac{\varphi_{13}}{2\pi} = h_1 \frac{\omega_{13}t}{2\pi}, \quad (11.10)$$

где h_1 есть шаг винтовой пары A , в которую входят звенья I и 3 , φ_{13} — угол поворота звена I относительно стойки 3 , ω_{13} — постоянная угловая скорость звена I относительно стойки 3 и t — время.

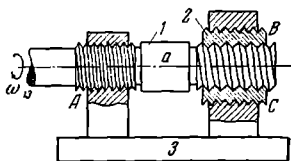


Рис. 370. Трехзвенный винтовой механизм.

Аналогично перемещения s_{21} и s_{23} равны

$$s_{21} = h_2 \frac{\varphi_{21}}{2\pi} = h_2 \frac{\omega_{21}t}{2\pi} \quad (11.11)$$

и

$$s_{23} = h_3 \frac{\varphi_{23}}{2\pi} = h_3 \frac{\omega_{23}t}{2\pi}, \quad (11.12)$$

где h_2 и h_3 суть соответственно шаги винтовых пар B и C , в которые входят звенья $1, 2$ и звенья $2, 3$; φ_{21} и φ_{23} — углы поворота винта 2 относительно звеньев 1 и 3 , а ω_{21} и ω_{23} — угловые скорости винта 2 относительно звена 1 и стойки 3 .

Перемещение s_{23} равно

$$s_{23} = s_{13} + s_{21}. \quad (11.13)$$

Здесь s_{23} , s_{13} и s_{21} суть алгебраические величины, знак каждой из которых определяется по формулам (11.10), (11.11) и (11.12), в которых h_1 , h_2 и h_3 считаются положительными в случае *правой* резьбы и отрицательными в случае *левой*.

После подстановки в уравнение (11.13) значений s_{13} , s_{21} и s_{23} из соотношений (11.10), (11.11) и (11.12) получаем:

$$h_3 \omega_{23} = h_1 \omega_{13} + h_2 \omega_{21}. \quad (11.14)$$

Угловая скорость ω_{21} может быть получена из уравнения

$$\omega_{23} = \omega_{13} + \omega_{21},$$

откуда

$$\omega_{21} = \omega_{23} - \omega_{13}.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (11.14), находим:

$$i_{12} = \frac{\omega_{13}}{\omega_{23}} = \frac{h_3 - h_2}{h_1 - h_2}. \quad (11.15)$$

Формула (11.15) позволяет определять величину передаточного отношения через шаги резьб.

Перемещение s_{23} при заданном угле поворота звена 1 может быть всегда определено из формулы (11.12). Действительно,

$$s_{23} = h_3 \frac{\varphi_{23}}{2\pi} = h_3 \frac{\varphi_{13}}{2\pi i_{12}}, \quad (11.16)$$

так как

$$\frac{\varphi_{13}}{\varphi_{23}} = \frac{\omega_{13}}{\omega_{23}} = i_{12}.$$

Подставляя в формулу (11.16) значение i_{12} из формулы (11.15), получаем:

$$s_{23} = h_3 \frac{h_1 - h_2}{h_3 - h_2} \cdot \frac{\varphi_{13}}{2\pi}. \quad (11.17)$$

Формула (11.17) может быть представлена еще и так:

$$s_{23} = \frac{h_1 - h_2}{1 - \frac{h_2}{h_3}} \cdot \frac{\varphi_{13}}{2\pi}. \quad (11.18)$$

3°. Рассмотрим теперь различные видоизменения трехзвенного винтового механизма. Пусть, например, винтовая пара A (рис. 370) заменена вращательной (рис. 371). В этом механизме шаг резьбы h_1 равен нулю, и перемещение s_{23} , определяемое по формуле (11.18), получается таким:

$$s_{23} = \frac{-h_2}{1 - \frac{h_2}{h_3}} \cdot \frac{\varphi_{13}}{2\pi}.$$

Если винтовая пара C (рис. 370) заменена поступательной парой, то получается механизм, показанный на рис. 372. В этом механизме шаг h_3 равен бесконечности, и следовательно, перемещение звена 2, определяемое по формуле (11.18), равно

$$s_{23} = (h_1 - h_2) \frac{\varphi_{13}}{2\pi}.$$

Наконец, если винтовая пара A (рис. 370) заменена вращательной парой,

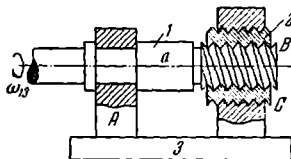


Рис. 371. Трехзвенный винтовой механизм с вращательной парой.

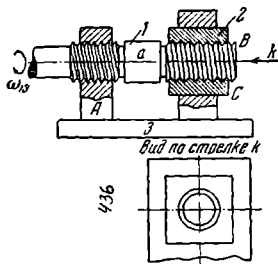


Рис. 372. Трехзвенный винтовой механизм с поступательной парой.

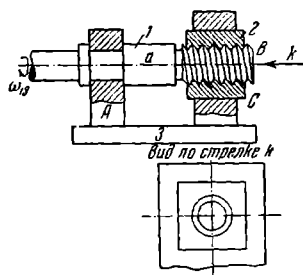


Рис. 373. Трехзвенный механизм с вращательной, поступательной и винтовой парами.

а винтовая пара C — поступательной парой (рис. 373), то $h_1 = 0$, а $h_3 = \infty$, следовательно,

$$s_{23} = -h_2 \frac{\varphi_{12}}{2\pi}.$$

На этом мы заканчиваем рассмотрение структуры и кинематики винтовых механизмов.

§ 52. Зубчатые механизмы прерывистого и знакопеременного движения ведомого звена

1°. Рассмотрим некоторые особые виды зубчатых механизмов для воспроизведения движения с остановками, переменной направленности движения и перерывами движения.

Механизмы, воспроизводящие указанные виды движения, весьма разнообразны, поэтому остановимся здесь только на наиболее распространенных.

Из механизмов для воспроизведения движения с остановками можно указать на зубчатый механизм, показанный на рис. 374. Этот механизм представляет собой два колеса 1 и 2, снабженных зубьями только на некоторых

частях окружностей. Таким образом, при непрерывном вращении колеса 1 колесо 2 движется с остановками.

Механизм этот работает с ударами, так как в начале зацепления колеса 2 неподвижно. Чтобы уменьшить удары, колеса снабжаются дополнительными рычагами K и L , профили которых

представляют центроиды или взаимоогibaемые кривые. Формы этих кривых выполняются так, что колесо 2 после остановки постепенно увеличивает свою скорость. Угловая скорость ω_2 колеса 2 при перека- тывании центроид друг по другу равна

$$\omega_2 = -\omega_1 \frac{AP_0}{BP_0},$$

где P_0 есть мгновенный центр вращения в относительном движении колес 1 и 2. Из написанного уравнения следует: для постепенного увеличения угловой скорости ω_2 необходимо, чтобы точка зацепления перемещалась от точки A к точке B . Удар отсутствует, если точка P_0 в начальный момент движения совпадает с точкой A . Чтобы обеспечить отсутствие самопроизвольного движения колеса 2, на колесе 1 имеется так называемая запирающая дуга CDE , которая в момент остановки проходит под соответствующей дугой колеса 2. Этим самым обеспечивается полная неподвижность колеса 2.

Рис. 374. Схема зубчатого механизма, предназначенного для работы с остановками.

2°. На рис. 375 показан цевочный механизм с остановками, у которого ведущим является звено 1, снабженное зубцом A , действующим на цевки B , принадлежащие звену 2. При одном обороте звена 1 звено 2, снабженное цевками, поворачивается на угол φ_2 , равный

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{z},$$

где z — число цевок.

На рис. 376 показан другой цевочный механизм с остановками, у которого зацепление внутреннее. Для предупреждения самопроизвольного движения звена 2 и, следовательно, размыкания кинематической цепи звено 1 снабжено запирающей дугой CDE , скользящей в соответствующих дугах колеса 2.

Рис. 375. Схема цевочного механизма с внешним зацеплением.

На рис. 377 и 378 показаны сложные цевочные механизмы с остановками, носящие название *звездчатых механизмов*. Звездчатые механизмы позволяют воспроизводить движение с различными периодами покоя и движения, а также с различными отношениями угловых скоростей в различные периоды движения. На рис. 377 показан звездчатый механизм, имеющий четыре равных периода движения с постоянным передаточным отношением и четыре равных периода покоя. На рис. 378 показан звездчатый механизм с различными периодами покоя и движения и с переменным передаточным отношением.

3°. К зубчатым механизмам с остановками также относятся механизмы *мальтийских крестов*. Механизм мальтийского креста представляет собой

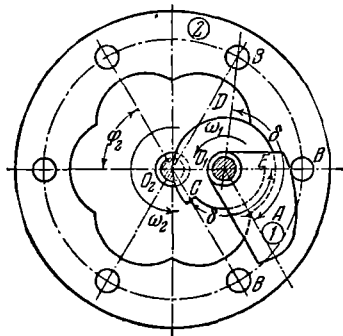


Рис. 376. Схема цевочного механизма с внутренним зацеплением.

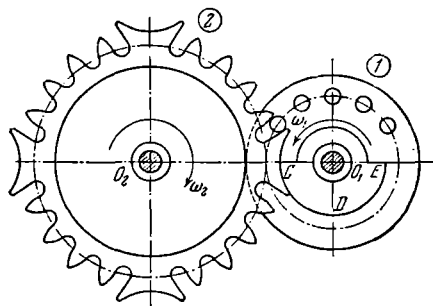


Рис. 377. Схема звездчатого механизма с четырьмя равными периодами движения.

звено 1, состоящее из диска с вырезом и пальца A (рис. 379). Звено 2 представляет собой диск, снабженный радиальными пазами. При вращении звена 1 палец A входит в соответствующие пазы *b* звена 2 и поворачивает его на определенный угол. Так же как и в ранее рассмотренных механизмах, звенья 1 и 2 снабжены запирающими дугами *CDE*, предупреждающими самопроизвольное движение звена 2. Механизмы мальтийских крестов выполняются как с внешним, так и с внутренним зацеплением. Механизм с внешним зацеплением показан на рис. 379, а механизм с внутренним зацеплением на рис. 380. Механизм мальтийского креста после замены высших

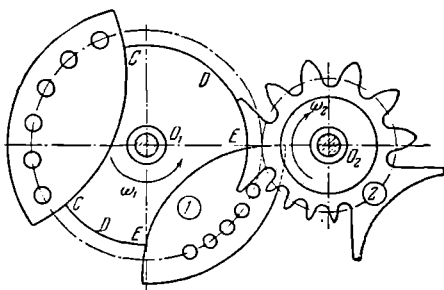


Рис. 378. Схема звездчатого механизма с различными периодами движения.

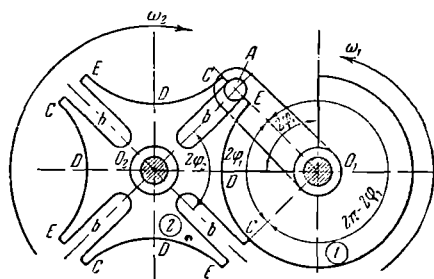


Рис. 379. Схема механизма мальтийского креста с внешним зацеплением.

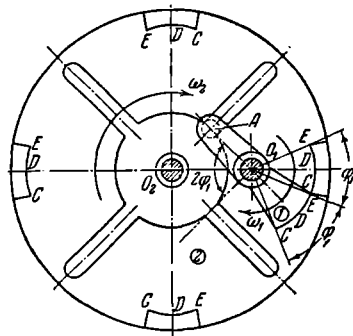


Рис. 380. Схема механизма мальтийского креста с внутренним зацеплением.

пар низшими может быть приведен к обыкновенному кулисному механизму

(рис. 381). Для определения скоростей и ускорений этого механизма могут быть приведены формулы для кулисного механизма, выведенные нами в § 38. При исследовании механизма мальтийского креста с внешним зацеплением надо исследовать движение заменяющего кулисного механизма при повороте его звена 1 на угол $2\varphi_1$, для механизма с внутренним зацеплением исследование производится при повороте звена 1 кулисного механизма на угол $2\varphi'_1$. На рис. 382 даны диаграммы угловых скоростей и угловых ускорений звена 2

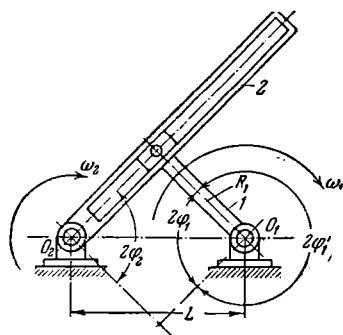


Рис. 381. Схема кулисного механизма, заменяющего механизм мальтийского креста.

для внешнего и внутреннего зацеплений при постоянной угловой скорости ведущего звена 1. При внешнем зацеплении угловая скорость ω_2 и угловое ускорение ϵ_2 изменяются по законам, указанным на участке AB диаграммы. При внутреннем зацеплении угловая скорость ω_2 и угловое ускорение ϵ_2 изменяются по законам, указанным на участках CA и BD диаграммы. Из сравнения диаграмм для внешнего и внутреннего зацеплений следует, что мальтийский крест с внутренним зацеплением работает более плавно, чем мальтийский крест с внешним зацеплением.

Механизм, показанный на рис. 383, обеспечивает равные периоды движения и покоя, так как углы между пазами и пальцами равны между собой. При равных периодах углы λ_1 между пальцами и расстояния должны быть равны. Если периоды движения должны быть равны, а периоды покоя не равны, то механизм

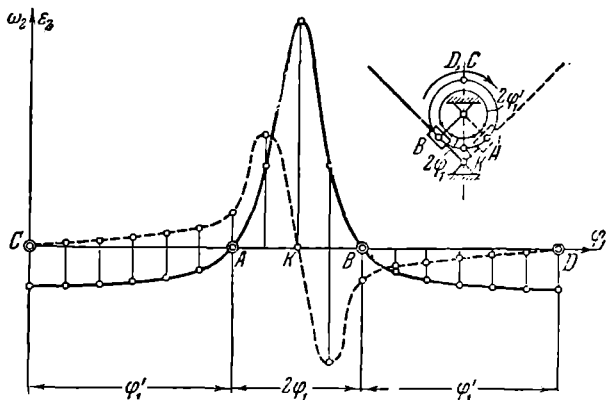


Рис. 382. Диаграммы угловой скорости и углового ускорения коромысла кулисного механизма, заменяющего механизмы мальтийских крестов с внешним и внутренним зацеплениями.

должен иметь равные углы между пазами, но не равные углы между пальцами (рис. 384).

Если и периоды покоя и периоды движения заданы неравными, получается механизм неправильного мальтийского креста (рис. 385). В этом механизме могут быть различными углы между пазами, углы между пальцами и расстояния пальцев от оси вращения O_1 .

В механизме мальтийского креста с одним пальцем, у которого вектор скорости оси пальца в момент входа в паз направлен по оси паза, угол поворота креста за один оборот звена *I* равен

$$2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z},$$

где *z* — число пазов. При повороте креста на угол $2\varphi_2$ звено *I* поворачивается на угол $2\varphi_1$ (рис. 379), равный

$$2\varphi_1 = \pi - 2\varphi_2 = \pi - \frac{2\pi}{z} = \pi \left(1 - \frac{2}{z}\right).$$

Время движения креста

$$t_d = \frac{30}{\pi n_1} 2\varphi_1 = \frac{30}{n_1} \left(1 - \frac{2}{z}\right),$$

где n_1 — число оборотов в минуту звена *I*.

Время покоя креста

$$t_p = \frac{30}{\pi n_1} (2\pi - 2\varphi_1) = \frac{30}{n_1} \left(1 + \frac{2}{z}\right).$$

4°. Из зубчатых механизмов, преобразующих непрерывное вращательное движение в движение непрерывное возвратно-вращательное, можно указать на механизм, изображенный на рис. 386. Колесо *I*, вращаясь вокруг оси *O*₁

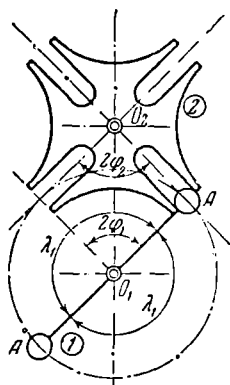


Рис. 383. Схема механизма мальтийского креста с равными периодами движения и покоя.

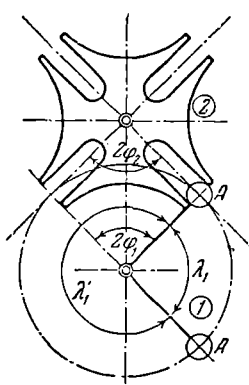


Рис. 384. Схема механизма мальтийского креста с равными периодами движения и неравными периодами покоя.

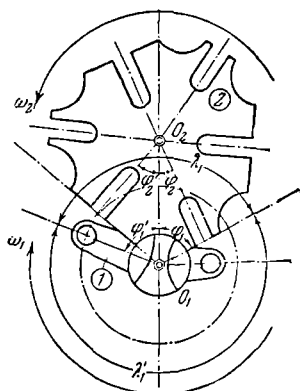


Рис. 385. Схема механизма неправильного мальтийского креста.

в одном и том же направлении, заставляет колесо 2, снабженное цевками, вращаться вокруг оси *O*₂ в различных направлениях. Паз *a* — *a*, принадлежащий колесу 2, переводит ось *O*₁ из положения *O*₁ в положение *O*₁', тем самым изменяя направление вращения колеса 2.

Механизм работает с ударами в момент изменения направления вращения колеса 2.

На рис. 387 показан механизм, подобный только что рассмотренному, но у которого ведомым звеном 2 служит рейка с цевками. Этим механизмом вращательное движение в одном направлении преобразуется в возвратно-поступательное движение.

5°. К числу зубчатых механизмов, воспроизводящих прерывное движение в одном каком-либо направлении, относятся так называемые *храповые зубчатые механизмы*. На рис. 388 показана схема механизма шарнирного четырехзвенника $ABCD$, соединенного с храповым колесом 5 посредством собачки 4, сидящей на звене 3. Вращением звена 1 коромысло приводится в колебатель-

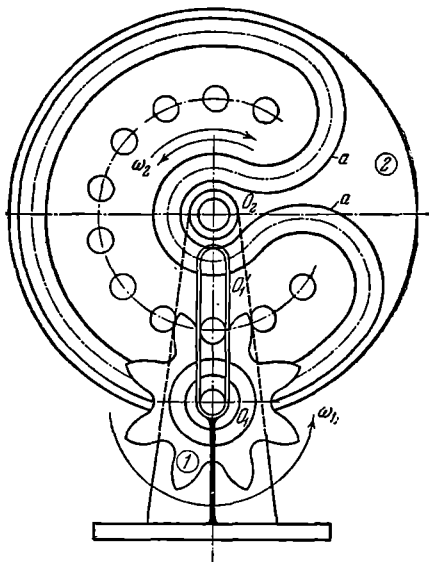


Рис. 386. Схема механизма, преобразующего непрерывное вращательное движение в движение возвратно-вращательное.

ное движение. При ходе коромысла справа налево собачка 4 упирается в соответствующий зуб храпового колеса 5, поворачивая последнее на некоторый угол. Для предупреждения обратного самопроизвольного вращения колеса 5

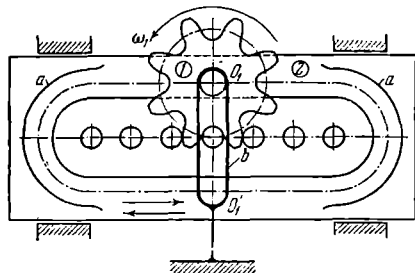


Рис. 387. Схема механизма, преобразующего вращательное движение в одном направлении в движение возвратно-поступательное.

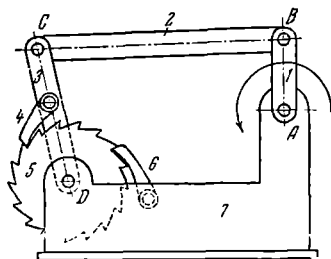


Рис. 388. Схема механизма шарнирного четырехзвенника вместе с храповым механизмом.

установлена стопорная собачка 6. Для того чтобы стопорная собачка 6 не была откинута, необходимо, чтобы нормаль к профилю зуба в точке соприкосновения проходила между центрами вращения стопорной собачки и храпового колеса.

§ 53. Механизмы с гидравлическими и пневматическими устройствами

1°. В настоящем параграфе рассмотрим кинематику типовых поршневых механизмов с гидро- или пневмоустройствами. На рис. 389 показан механизм, у которого поршень 4 скользит в неподвижном цилиндре H . Так как ведущим в механизме является звено 4, то в качестве обобщенной координаты следует выбрать перемещение s точки C звена 4. Для определения функции положения $\varphi_2 = \varphi_2(s)$ кривошипа 2 воспользуемся уравнением замкнутости контура схемы $ABCOA$:

$$l_2 + l_3 - l_{OC} + l_{OA} = 0.$$

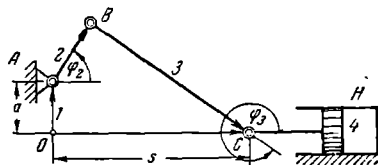


Рис. 389. Схема кривошипно-ползунного механизма с ведущим поршнем.

Выразим все векторы, входящие в это уравнение, в безразмерных величинах, отнесенных к длине кривошипа l_2 . Обозначим:

$$\lambda = \frac{l_3}{l_2}, \quad \kappa = \frac{l_{OC}}{l_2} = \frac{s}{l_2}, \quad \mu = \frac{l_{OA}}{l_2} = \frac{a}{l_2}.$$

После этого напишем:

$$e_2 + \lambda - \kappa + \mu = 0,$$

где e_2 — орт вектора l_2 .

Спроектируем векторы последнего уравнения на направление CC и направление, ему перпендикулярное:

$$\cos \varphi_2 + \lambda \cos \varphi_3 - \kappa = 0, \quad \sin \varphi_2 + \lambda \sin \varphi_3 + \mu = 0. \quad (11.19)$$

Определим из второго уравнения величину $\sin \varphi_3$:

$$\sin \varphi_3 = -\frac{\mu + \sin \varphi_2}{\lambda}. \quad (11.20)$$

Имея в виду, что

$$\cos \varphi_3 = \sqrt{1 - \frac{(\mu + \sin \varphi_2)^2}{\lambda^2}} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (\mu + \sin \varphi_2)^2}}{\lambda},$$

подставим выражение $\cos \varphi_3$ в первое уравнение (11.19)

$$\cos \varphi_2 + \sqrt{\lambda^2 - (\mu + \sin \varphi_2)^2} - \kappa = 0.$$

Переносим квадратный корень этого равенства в правую часть и возводя после этого обе части полученного равенства в квадрат, имеем:

$$2(\mu \sin \varphi_2 - \kappa \cos \varphi_2) = \lambda^2 - \mu^2 - \kappa^2 - 1$$

или

$$2\kappa \left(\frac{\mu}{\kappa} \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \right) = \lambda^2 - \mu^2 - \kappa^2 - 1. \quad (11.21)$$

Обозначая $\mu/x = \operatorname{tg} \alpha$ и принимая для дальнейшего во внимание, что

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{x^2}}},$$

представляем уравнение (11.21) так:

$$\frac{2x}{\cos \alpha} (\sin \alpha \sin \varphi_2 - \cos \alpha \cos \varphi_2) = \lambda^2 - \mu^2 - x^2 - 1.$$

Решая это уравнение относительно косинуса суммы, получаем:

$$\cos(\varphi_2 + \alpha) = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - x^2 - 1}{2x \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{x^2}}}$$

или окончательно

$$\varphi_2 = -\operatorname{arctg} \frac{\mu}{x} + \arccos - \frac{\lambda^2 - \mu^2 - x^2 - 1}{2x \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{x^2}}}. \quad (11.22)$$

Если будет задан центральный кривошипно-ползунный механизм, то $\mu = 0$, и тогда последняя формула будет иметь более простой вид

$$\varphi_2 = \arccos - \frac{\lambda^2 - x^2 - 1}{2x}. \quad (11.22')$$

Формула (11.22) связывает угол φ_2 с относительной обобщенной координатой x .

Аналог угловой скорости $\dot{\varphi}_2 = d\varphi_2/ds$ кривошипа можно получить дифференцированием равенства (11.22) по относительной обобщенной координате x . Однако в результате дифференцирования получается очень сложное выражение. Вследствие этого мы ограничимся получением аналога угловой скорости $\dot{\varphi}_2$ кривошипа 2 в функции углов φ_2 и φ_3 . Дифференцируем уравнения (11.19) по относительной обобщенной координате x :

$$\left. \begin{aligned} -\sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2 - \lambda \sin \varphi_3 \cdot \dot{\varphi}_3 - 1 &= 0, \\ \cos \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2 + \lambda \cos \varphi_3 \cdot \dot{\varphi}_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

Из второго уравнения получаем:

$$\dot{\varphi}_3 = - \frac{\cos \varphi_2}{\lambda \cos \varphi_3} \dot{\varphi}_2. \quad (11.24)$$

Подставляем выражение $\dot{\varphi}_3$ в первое уравнение системы (11.23), после чего можно написать:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_3 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2}. \quad (11.25)$$

Для получения аналога φ_2'' углового ускорения кривошипа дифференцируем равенство (11.25) по относительной обобщенной координате x . В результате дифференцирования окончательно получаем

$$\varphi_2'' = \frac{\frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_3} + \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2}{(\operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2)^2} \varphi_2'. \quad (11.26)$$

В случае центрального кривошипно-ползунного механизма аналог φ_2' и φ_2'' можно получить двукратным дифференцированием равенства (11.22').

2°. Переходим к рассмотрению механизма, у которого цилиндр 4 (рис. 390) качается вокруг точки C . В качестве обобщенной координаты выбираем перемещение s поршня 3 в цилиндре 4. Для определения функции положения $\varphi_2 = \varphi_2(s)$ кривошипа 2 напомним уравнение замкнутости векторного контура схемы ABC . Воспользовавшись обозначениями, указанными на рис. 390, получаем следующее векторное уравнение:

$$l_2 + s + a = 0.$$

Переходя к относительным величинам, обозначаем:

$$x = \frac{s}{l_2}, \quad \mu = \frac{a}{l_2}.$$

Теперь вместо написанного выше векторного уравнения имеем:

$$e_2 + x + \mu = 0,$$

где e_2 — орт вектора l_2 .

Проводя оси Sx и Sy неподвижной системы координат (рис. 390), спроектируем векторы последнего уравнения на указанные оси

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_2 + x \cos \varphi_3 &= 0, \\ \sin \varphi_2 + x \sin \varphi_3 + \mu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.27)$$

Из первого уравнения получаем:

$$\cos \varphi_2 = -\frac{\cos \varphi_3}{x}, \quad \sin \varphi_2 = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi_3}{x^2}}. \quad (11.28)$$

Подставляем выражение $\sin \varphi_2$ во второе уравнение системы (11.27)

$$\sin \varphi_2 + \mu = -x \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi_3}{x^2}} = -\sqrt{x^2 - \cos^2 \varphi_3}.$$

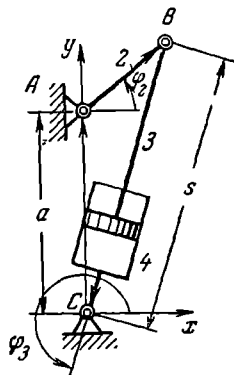


Рис. 390. Схема кулисного механизма с ведущим поршнем на шатуне.

Для определения φ_2 возводим обе части этого равенства в квадрат

$$\sin^2 \varphi_2 + \mu^2 + 2\mu \sin \varphi_2 = x^2 - \cos^2 \varphi_2,$$

откуда

$$\sin \varphi_2 = \frac{x^2 - \mu^2 - 1}{2\mu}, \quad \varphi_2 = \arcsin \frac{x^2 - \mu^2 - 1}{2\mu}. \quad (11.29)$$

Для определения аналога φ_2' угловой скорости кривошипа дифференцируем равенство (11.29) по относительной обобщенной координате x :

$$\varphi_2' = \frac{x}{\mu \sqrt{1 - \frac{(x^2 - \mu^2 - 1)^2}{4\mu^2}}}. \quad (11.30)$$

Дифференцированием по той же координате равенства (11.30) можно определить аналог φ_2'' углового ускорения кривошипа. Окончательно имеем:

$$\varphi_2'' = \frac{2}{\sqrt{4\mu^2 - (x^2 - \mu^2 - 1)^2}} + \frac{2x^2(x^2 - \mu^2 - 1)}{\sqrt{[4\mu^2 - (x^2 - \mu^2 - 1)^2]^3}}. \quad (11.31)$$

Рис. 391. Схема механизма с двумя поступательными парами и ведущим поршнем на шатуне.

3°. На рис. 391 показан механизм с неподвижным цилиндром H и ведомым звеном 2, движущимся поступательно в неподвижных направляющих 1. Из рис. 391 следует, что перемещение s поршня 4 и перемещение звена 2 связаны уравнениями проекций замкнутого векторного контура ABO :

$$\left. \begin{aligned} l_3 \cos \varphi_3 - s \cos \varphi_4 &= 0, \\ -s_2 + l_3 \sin \varphi_3 - s \sin \varphi_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

Из первого уравнения имеем:

$$\cos \varphi_3 = \frac{s}{l_3} \cos \varphi_4.$$

Принимая во внимание, что

$$\sin \varphi_3 = \sqrt{1 - \frac{s^2}{l_3^2} \cos^2 \varphi_4},$$

определяем величину s_2 из второго уравнения системы (11.32)

$$s_2 = s \sin \varphi_4 + l_3 \sqrt{1 - \frac{s^2}{l_3^2} \cos^2 \varphi_4}. \quad (11.33)$$

Для определения аналога s_2' скорости звена 2 дифференцируем равенство (11.33) по обобщенной координате s . В результате дифференцирования окончательно получаем:

$$s_2' = -\sin \varphi_4 - \frac{s \cos^2 \varphi_4}{l_3 \sqrt{1 - \frac{s^2}{l_3^2} \cos^2 \varphi_4}}. \quad (11.34)$$

Второе дифференцирование по обобщенной координате позволяет получить аналог s_2'' ускорения звена 2. Имеем окончательно

$$s_2'' = - \frac{\cos^3 \varphi_4}{l_2 \sqrt{1 - \frac{s^2}{l_3^2} \cos^2 \varphi_4}} - \frac{s^2 \cos^4 \varphi_4}{l_3^3 \sqrt{\left(1 - \frac{s^2}{l_3^2} \cos^2 \varphi_4\right)^3}}. \quad (11.35)$$

На рис. 392 показана схема кулисного механизма с неподвижным цилиндром H и ведомым звеном 2, вращающимся вокруг оси A . Из

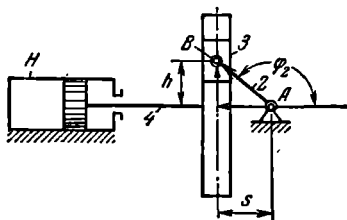


Рис. 392. Схема кулисного механизма с двумя поступательными парами и ведущим поршнем.

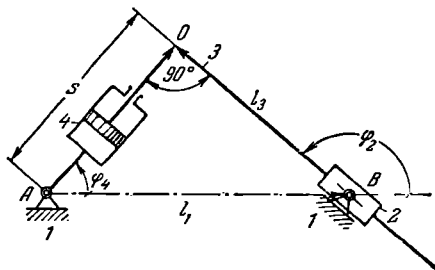


Рис. 393. Схема второго кулисного механизма с двумя поступательными парами и ведущим поршнем.

рис. 392 непосредственно следует, что угол φ_4 поворота звена 2 в функции обобщенной координаты s равен

$$\varphi_4 = \arccos\left(-\frac{s}{l_3}\right). \quad (11.36)$$

Дифференцируя это равенство по обобщенной координате s , получаем аналог φ_4' угловой скорости звена 2. Имеем окончательно

$$\varphi_4' = \frac{-1}{l_3 \sqrt{1 - \frac{s^2}{l_3^2}}}. \quad (11.37)$$

Дифференцируя по обобщенной координате равенство (11.37), получаем аналог φ_4'' углового ускорения звена 2. Не приводя преобразований, связанных с дифференцированием, напомним окончательную формулу

$$\varphi_4'' = \frac{-s}{l_3^3 \sqrt{\left(1 - \frac{s^2}{l_3^2}\right)^3}}. \quad (11.38)$$

4°. Рассмотрим кулисный механизм с качающимся цилиндром 4 (рис. 393). На схеме механизма показано, что угол между направлениями s и l_3 равен 90° и остается при движении механизма постоянным. На этом основании можно написать:

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 90^\circ + \varphi_4, \quad \omega_3 = \omega_4, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4.$$

Считая величину s перемещения поршня 4 обобщенной координатой, напишем, имея в виду обозначения, показанные на рис. 393:

$$\cos \varphi_4 = \frac{s}{l_1}, \quad \varphi_4 = \arccos \frac{s}{l_1}. \quad (11.39)$$

Одновременно из той же фигуры получаем:

$$l_3 = \sqrt{l_1^2 - s^2}. \quad (11.40)$$

Для аналогов φ_4' и φ_4'' угловой скорости и углового ускорения поршня 4 и, следовательно, звена 3 имеем следующие выражения, получаемые дифференцированием соотношения (11.39) по обобщенной координате s :

$$\varphi_4' = \frac{-1}{\sqrt{l_1^2 - s^2}}, \quad (11.41)$$

$$\varphi_4'' = \frac{-s}{\sqrt{(l_1^2 - s^2)^3}}. \quad (11.42)$$

Для аналогов l_3' и l_3'' имеем следующие выражения, получаемые дифференцированием по обобщенной координате s равенства (11.40):

$$l_3' = \frac{-s}{\sqrt{l_1^2 - s^2}}, \quad (11.43)$$

$$l_3'' = \frac{-s^2}{\sqrt{(l_1^2 - s^2)^3}}. \quad (11.44)$$

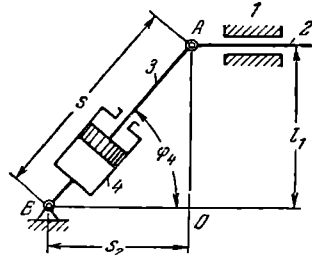


Рис. 394. Схема третьего кулисного механизма с двумя поступательными парами и ведущим поршнем.

На рис. 394 показан другой кулисный механизм с качающимся цилиндром 4. Угол поворота цилиндра 4 можно определить из треугольника ABO :

$$\sin \varphi_4 = \frac{l_1}{s}, \quad \varphi_4 = \arcsin \frac{l_1}{s}. \quad (11.45)$$

Аналоги φ_4' и φ_4'' получаем дифференцированием равенства (11.45) по обобщенной координате s :

$$\varphi_4' = \frac{l_1}{s \sqrt{s^2 - l_1^2}}, \quad (11.46)$$

$$\varphi_4'' = \frac{(2s^2 - l_1^2) l_1}{s^2 \sqrt{(s^2 - l_1^2)^3}}. \quad (11.47)$$

Из того же рис. 394 имеем:

$$s_2 = \sqrt{s^2 - l_1^2}. \quad (11.48)$$

Аналоги s_2' и s_2'' скорости и ускорения, с которыми движется звено 2, получаем дифференцированием равенства (11.48) по обобщенной координате s :

$$s_2' = \frac{s}{\sqrt{s^2 - l_1^2}}, \quad (11.49)$$

$$s_2'' = \frac{-l_1^2}{\sqrt{(s^2 - l_1^2)^3}}. \quad (11.50)$$

В настоящем параграфе мы определяли аналоги скоростей и ускорений. Для получения действительных скоростей и ускорений должны быть заданы не только обобщенная координата, но и скорость и ускорение ведущего звена, в рассматриваемых в этом параграфе случаях движущегося поступательно. Таким образом, кроме координаты s мы должны знать скорость v ведущего звена и его ускорение a .

Воспользовавшись указаниями, изложенными в § 30, для последнего рассмотренного нами примера можно написать следующие выражения для скорости v и ускорения a_2 звена 2:

$$v_2 = s_2' \frac{ds}{dt} = s_2' v, \quad (11.51)$$

$$a_2 = s_2'' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + s_2' \frac{d^2s}{dt^2} = s_2'' v^2 + s_2' a. \quad (11.52)$$

К рассмотренным нами схемам сводятся не только чисто поршневые механизмы с гидро-, пневмоустройствами, но и многие роторные, лопастные механизмы. Так, например, исследование движения каждой лопасти a (рис. 83) ротационного насоса с вращающимися цилиндрами сводится к исследованию движения по кинематической схеме, показанной на рис. 390, но с расстоянием $AC < AB$. Формулы исследования кинематики механизма, показанного на рис. 390, могут быть использованы и для механизма, показанного на рис. 83.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА XII

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

§ 54. Основные задачи

1°. При рассмотрении вопросов кинематического анализа механизмов мы всегда предполагаем движение ведущих звеньев заданным. Движение ведомых звеньев изучается в зависимости от заданного движения ведущих звеньев. При этом силы, действующие на звенья механизма, и силы, возникающие при его движении, нами не изучаются. Таким образом, при кинематическом анализе исследование движения механизмов ведется с учетом только структуры механизмов и геометрических соотношений в размерах их звеньев.

Динамический анализ механизмов имеет своими задачами:

а) изучение влияния внешних сил, сил веса звеньев, сил трения и массовых сил (сил инерции) на звенья механизма, на элементы звеньев, на кинематические пары и неподвижные опоры и установление способов уменьшения динамических нагрузок, возникающих при движении механизма;

б) изучение режима движения механизма под действием заданных сил и установление способов, обеспечивающих заданные режимы движения механизма. Первая задача носит название *силового анализа механизмов*, а вторая задача — *динамики механизмов*.

В динамический анализ механизмов может быть включен и ряд других задач, имеющих важное техническое значение, а именно: теория малых колебаний (вибраций) в механизмах, теория соударения звеньев механизмов и т. д. Но эти вопросы являются предметом изучения в курсе общей теории машин или в специальных курсах, так как при их решении необходимо применять методы теории упругости, а в теории механизмов задачи решаются обычно в предположении, что звенья механизмов являются абсолютно жесткими.

2°. Первая из указанных задач динамики механизмов имеет своей целью определение внешних неизвестных сил, действующих на звенья механизма, а также усилий (реакций), возникающих в кинематических парах при движении механизма.

К внешним силам, например, относятся: давление рабочей смеси (газа или жидкости) на поршень кривошипно-ползунного механизма двигателя внутреннего сгорания, парового двигателя, компрессора, вращающий момент, развиваемый электродвигателем на валу рабочего механизма и т. д. Некоторые силы возникают в результате движения механизма. К этим силам, например, относятся силы трения при движении, силы сопротивления среды и т. д. Некоторые силы, как, например, динамические реакции в кинематических парах, возникают при движении вследствие инерции звеньев.

Изучение природы сил требует не только теоретического, но и экспериментального исследования. С помощью современных измерительных приборов можно весьма точно определять различные силы, действующие на отдельные звенья механизма, и выявлять их зависимость от различных факторов.

Если известны внешние силы, действующие на звенья механизма, и известны законы движения всех его звеньев, то можно методами, излагаемыми в теоретической механике, определить: силы трения и реакции связей в кинематических парах, силы сопротивления среды, силы инерции звеньев и другие силы, возникающие при движении механизма, т. е. произвести так называемый *силовой расчет механизма*.

К первой задаче динамического анализа механизмов относится вопрос об устранении дополнительных динамических нагрузок от сил инерции на опоры механизма соответствующим подбором масс звеньев. Этот вопрос носит название *теории уравнивания масс в механизмах*.

Вторая задача имеет своей целью определение общего количества энергии, необходимой для воспроизведения заданного движения машины или механизма, и изучение законов распределения этой энергии на выполнение работ, связанных с действием различных сил на механизм, а также решение вопроса о сравнительной оценке механизмов с помощью коэффициента полезного действия, характеризующего степень использования общей энергии, потребляемой машиной или механизмом, на полезную работу. К этой же задаче относится вопрос об определении истинного движения механизма под действием приложенных к нему сил, т. е. вопрос о режиме его движения, а также вопрос о подборе таких соотношений между силами, массами и размерами звеньев механизма или машины, при которых движение механизма или машины было бы наиболее близким к требуемому условию рабочего процесса.

Эта задача обычно носит название *теории регулирования хода машин*.

§ 55. Задачи силового расчета механизмов

1°. Как было указано выше (§ 54), силовой расчет механизмов заключается в определении тех сил, которые действуют на отдельные звенья механизмов при их движении.

Вопрос об определении сил имеет большое практическое значение для расчета на прочность отдельных деталей механизмов, для определения энергии, потребной для работы механизма, для определения трения в кинематических парах, для расчета на износ трущихся деталей в кинематических парах и т. д. Зная силы, действующие на различные звенья механизма, конструктор может выбрать наиболее рациональные размеры звеньев, определить формы, необходимые для достаточной прочности деталей, обеспечить в кинематических парах достаточную смазку и т. д.

До появления в технике быстроходных машин определение сил в механизмах велось без учета тех дополнительных сил, которые возникают при движении механизма. Такие расчеты обычно носили название *статических расчетов*. В связи с появлением в технике быстроходных машин стало необходимым учитывать и те силы, которые возникают при движении механизма и часто значительно превышают статические силы. Расчеты, в которых учитываются как статические, так и динамические нагрузки, носят название *динамических расчетов*.

2°. Определение сил, действующих на различные звенья механизма при его движении, может быть сделано в том случае, если известны законы движения всех звеньев механизма, известны внешние силы, приложенные к механизму. Поэтому общую задачу динамического расчета и проектирования новых механизмов и машин конструктор расчленяет на две части. Сначала он задается приближенным законом движения ведущих звеньев механизма и внешними силами, на него действующими, определяет все необходимые расчетные усилия и по ним подбирает необходимые размеры, массы и моменты инерции звеньев. Это — первая часть задачи. После этого конструктор приступает к решению второй части задачи, а именно, к исследованию вопроса об истинном движении спроектированного механизма, к которому приложены различные действующие на него силы. Определив истинный закон движения механизма, конструктор вносит в ранее проведенный расчет все необходимые исправления.

Первая часть задачи носит название силового расчета механизма. В настоящем отделе мы займемся рассмотрением некоторых методов силового расчета механизмов.

3°. Силовой расчет механизмов может быть произведен самыми разнообразными методами. В теории машин и механизмов весьма широкое применение получил метод силового расчета механизмов на основе обыкновенных уравнений равновесия твердых тел.

Сущность этого метода сводится к применению при решении задач динамики уравнений равновесия в форме Даламбера. Как известно из

теоретической механики, для этого силу инерции, которая является противодействием ускоряемого тела, приложенным к телу, сообщаемому это ускорение, условно переносят на ускоряемое тело. Перенесенная сила уравнивается со всеми остальными внешними силами, в том числе и реакциями, действующими на это тело.

В применении к механизмам сущность метода может быть сформулирована так: если ко всем внешним действующим на звено механизма силам присоединить силы инерции, то под действием всех этих сил звено можно рассматривать условно находящимся в равновесии. Таким образом, при применении принципа Даламбера к расчету механизмов кроме внешних сил, действующих на каждое звено механизма, вводятся в рассмотрение еще силы инерции, величины которых определяются как произведение массы отдельных материальных точек на их ускорения. Направления этих сил противоположны направлениям ускорений рассматриваемых точек. Составляя для полученной системы сил уравнения равновесия и решая их, определяем силы, действующие на звенья механизма и возникающие при его движении. Метод силового расчета механизмов с использованием сил инерции и применением уравнений динамического равновесия носит иногда название *кинетостатического расчета механизмов*, в отличие от статического расчета, при котором не учитываются силы инерции звеньев.

§ 56. Силы, действующие на звенья механизма

1°. При работе механизма к его звеньям приложены внешние задаваемые силы, а именно: силы движущие, силы производственных сопротивлений, силы тяжести и др. Кроме того, при движении механизма в результате реакций связей в кинематических парах возникают силы трения, которые можно рассматривать как составляющие этих реакций. Реакции в кинематических парах так же, как и силы трения, по отношению ко всему механизму являются силами внутренними, но по отношению к каждому звену, входящему в кинематическую пару, оказываются силами внешними.

Реакции в кинематических парах возникают не только вследствие действия внешних задаваемых сил на звенья механизма, но и вследствие движения отдельных масс механизма с ускорениями. Составляющие реакции, возникающие от движения звеньев с ускорениями, можно считать *дополнительными динамическими давлениями* в кинематических парах. Как было указано в § 55, эти дополнительные динамические давления легко могут быть определены из уравнений равновесия звеньев, если к задаваемым силам и реакциям связей добавить силы инерции.

2°. Будем называть в механизме *движущими силами* те силы, которые стремятся *ускорить* движение ведущего звена. Иначе, движущими силами будем называть те силы из числа приложенных к звеньям механизма, элементарная работа которых *положительна*.

Силами сопротивления в механизме будем называть те силы, которые стремятся *замедлить* движение ведущего звена. Иначе, силами сопротивления будем называть те силы из числа сил, приложенных к звеньям механизма, элементарная работа которых *отрицательна*.

Силами производственного сопротивления или *силами полезного сопротивления* будем считать те силы сопротивления, на преодоление которых затрачивается работа, необходимая для выполнения технологического процесса. Для осуществления технологического процесса и предназначен механизм. *Силами непроизводственных сопротивлений* или *силами вредных сопротивлений* будем называть те силы сопротивления, на преодоление которых затрачивается дополнительная работа сверх той, которая необходима для преодоления полезного сопротивления.

Например, у двигателя внутреннего сгорания движущей силой является давление расширяющегося газа на поршень. Силами сопротивления будут: сила трения в подшипниках и цилиндрах, сопротивление воздуха, сопротивление той рабочей машины, которая приводится в движение двигателем и т. д. При этом сопротивление рабочей машины, которая приводится двигателем в движение, будет производственным сопротивлением, а силы трения, сопротивление воздуха и т. д. будут непроизводственными сопротивлениями.

Необходимо отметить некоторую условность в разделении сил на силы движущие и силы сопротивления. Например, силы тяжести звеньев при подъеме их центров тяжести оказываются силами сопротивления, а при опускании центров тяжести — силами движущими. Силы трения, возникающие в подшипниках, являются силами сопротивления, а силы трения, возникающие в точках контакта при обхвате ремнем шкива ременной передачи, являются силами движущими и т. д. Работа движущих сил называется иногда *затрачиваемой работой*, работа сил производственных сопротивлений — *полезной работой* и работа сил непроизводственных сопротивлений — *вредной работой*.

ГЛАВА XIII

СИЛЫ ДВИЖУЩИЕ И СИЛЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

§ 57. Диаграммы сил, работ и мощностей

1°. Силы движущие и силы производственных сопротивлений в зависимости от их физических и технологических характеристик могут быть функциями различных кинематических параметров: перемещений, скоростей, ускорений и времени. В теории механизмов мы предполагаем эти силы известными и заданными в аналитической или графической форме. В последнем случае — это диаграммы сил, работ или мощностей.

Рассмотрим наиболее типичные диаграммы и связь этих диаграмм между собой.

На рис. 395 представлена диаграмма силы P , которая действует на ведущее звено механизмов убирающегося шасси самолета при подъеме шасси. Сила P дана в функции пути s точки ее приложения. Имея диаграмму $P=P(s)$ (рис. 395), можно построить диаграмму $A=A(s)$ работы A в функции пути s (рис. 396). В самом деле, работа A_{1k} на интервале пути от начального положения 1 до любого последующего k равна

$$A_{1k} = \int_{s_1}^{s_k} P ds, \quad (13.1)$$

где s_1 и s_k — величины пути соответственно в положениях 1 и k .

Следовательно, построение диаграммы $A=A(s)$ (рис. 396) сводится к интегрированию кривой $P=P(s)$ (рис. 395). Метод графического интегрирования был рассмотрен

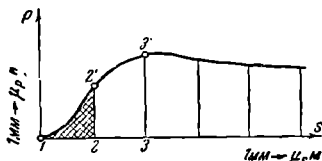


Рис. 395. Диаграмма зависимости силы от пути точки ее приложения.

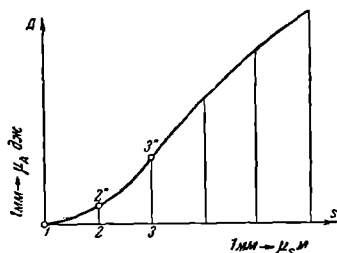


Рис. 396. Диаграмма зависимости работы от пути, построенная интегрированием диаграммы, изображенной на рис. 395.

нами в седьмой главе (§ 35, 3°). Так на интервале от s_1 до s_2 работа A_{12} равна

$$A_{12} = \int_{s_1}^{s_2} P ds = \mu_P \mu_s \text{ пл. } [12'2] = \mu_A (2 - 2''),$$

где пл. $[12'2]$ — площадь, ограниченная кривой $1, 2'$ и прямыми $1, 2$ и $2, 2'$ и измеренная в квадратных миллиметрах (на рис. 395 эта площадь заштрихована), а μ_P и μ_s — масштабы сил и путей. Полученное значение A_{12} отложено в масштабе μ_A на перпендикуляре, восстановленном в точке 2 диаграммы $A=A(s)$ (рис. 396) в виде отрезка $(2 - 2'')$.

Работа A_{13} в интервале от s_1 до s_3 равна

$$A_{13} = \int_{s_1}^{s_3} P ds = \mu_P \mu_s \text{ пл. } [12'3] = \mu_A (3 - 3'')$$

(рис. 396) и т. д.

На рис. 397 дана диаграмма момента M , развиваемого на валу двигателя внутреннего сгорания в функции угла φ поворота вала

двигателя (диаграмма $M=M(\varphi)$). Для построения диаграммы работы $A=A(\varphi)$ можно воспользоваться равенством

$$A_{1k} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_k} M d\varphi. \quad (13.2)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию диаграммы $M=M(\varphi)$ (рис. 397). Диаграмма $A=A(\varphi)$ дана на рис. 398.

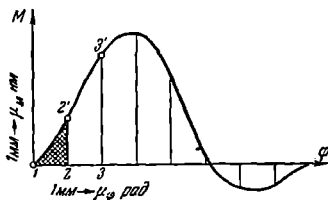


Рис. 397. Диаграмма зависимости момента на коренном валу поршневого двигателя от угла поворота коренного вала.

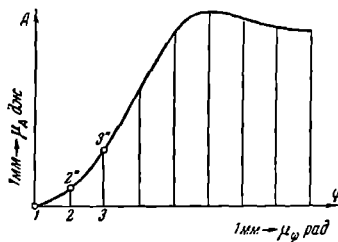


Рис. 398. Диаграмма зависимости работы поршневого двигателя от угла поворота коренного вала, построенная интегрированием диаграммы, изображенной на рис. 397.

2°. В рассмотренных примерах сила P и момент M были заданы в функции перемещений s и φ ведущих звеньев. В некоторых случаях эта сила или момент могут быть заданы в функции времени t . На рис. 399 показана диаграмма $P=P(t)$, характерная для многих

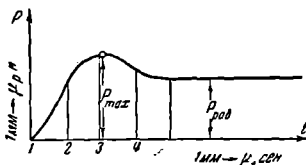


Рис. 399. Диаграмма зависимости силы от времени ее действия.

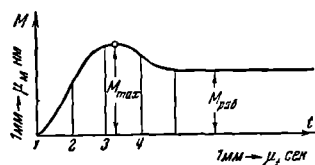


Рис. 400. Диаграмма зависимости момента от времени ее действия.

машин. Например, приближенно по такому закону изменяется сила тяги многих сельскохозяйственных машин. Если рассматривать процесс с момента трогания с места, т. е. с момента начала перемещения машины по полю, то сила тяги вначале быстро растет до некоторого значения P (рис. 399), после чего уменьшается, приближаясь к некоторому постоянному значению $P_{\text{ср}}$, соответствующему рабочему времени движения машин.

На рис. 400 показана аналогичная диаграмма $M=M(t)$ изменения момента M центрифуги в функции времени t .

Для построения диаграмм работ по диаграммам $P = P(t)$ и $M = M(t)$ необходимо дополнительно знать зависимость перемещения s от времени t или угла поворота φ от времени t , т. е. зависимость $s = s(t)$ или $\varphi = \varphi(t)$. Эти зависимости могут быть, например, экспериментально определены одновременно с регистрацией силы P или момента M в функции времени t .

Имея диаграммы $P = P(t)$ и $s = s(t)$, можно исключить из них время t и построить диаграмму $P = P(s)$, после чего построение диаграммы $A = A(s)$ может быть сделано так, как это указано выше.

Аналогично, имея диаграммы $M = M(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, можно построить диаграмму $M = M(\varphi)$ и по ней диаграмму $A = A(\varphi)$.

3°. При экспериментальном исследовании машин в некоторых случаях записывается диаграмма мощности N , потребляемой машиной, в функции времени t , т. е. диаграмма $N = N(t)$. Такую диаграмму мы получаем, например, при записи на самопишущем ваттметре мощности, потребляемой электродвигателем, приводящим в движение рабочую машину. По диаграмме $N = N(t)$ можно построить диаграмму зависимости работы A от времени t — диаграмму $A = A(t)$, так как работа A_{1k} на интервале времени от t_1 до t_k равна

$$A_{1k} = \int_{t_1}^{t_k} N dt. \quad (13.3)$$

Таким образом, построение диаграммы $A = A(t)$ сводится к интегрированию диаграммы $N = N(t)$. Если дополнительно построены диаграммы $s = s(t)$ или диаграмма $\varphi = \varphi(t)$, то, исключая время t из диаграмм $A = A(t)$ и $s = s(t)$ или из диаграмм $A = A(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, получаем диаграмму $A = A(s)$ или $A = A(\varphi)$. Диаграммы $P = P(s)$ или $M = M(\varphi)$ могут быть получены дифференцированием диаграмм $A = A(s)$ или $A = A(\varphi)$ по пути s или углу φ , так как

$$P = \frac{dA}{ds} \quad \text{и} \quad M = \frac{dA}{d\varphi}. \quad (13.4)$$

§ 58. Механические характеристики машин

1°. При динамическом исследовании и расчете машин большое значение имеет вопрос о мощности, которая может быть развита машиной-двигателем при различных скоростях вращения ведомого вала, или о мощности, необходимой для приведения в движение рабочей машины при различных скоростях вращения ведомого вала. В большинстве машин момент на валу при различных скоростях вращения вала не постоянен. Во всех машинах при изменении скорости вращения изменяются динамические давления в кинематических парах и, следовательно, изменяются силы трения в них. В рабочих машинах при

изменении скорости вращения ведущего вала изменяются производственные сопротивления, сопротивления среды и т. д. Зависимость момента M , приложенного к ведомому валу машины-двигателя или к ведущему валу рабочей машины, от угловой скорости этих валов носит название *механической характеристики машины*.

Таким образом, механическими характеристиками являются зависимости вида $M=M(\omega)$ или $M=M(n)$, где n — число оборотов машины в минуту, равное

$$n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Так как мощность N , момент M и угловая скорость ω связаны соотношением

$$N = M\omega, \quad (13.5)$$

то, зная зависимость $M=M(\omega)$, можно определить зависимость $N=N(\omega)$. Зависимость $N=N(\omega)$ также может быть названа механической характеристикой машины.

2°. Рассмотрим типовые механические характеристики машин-двигателей и рабочих машин.

Для машин-двигателей характерным является уменьшение вращающего момента M с увеличением угловой скорости ω .

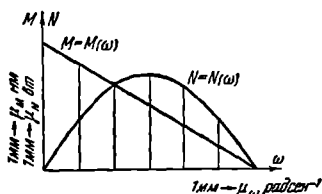


Рис. 401. Механические характеристики электродвигателя постоянного тока с параллельным возбуждением в виде зависимости момента ротора от угловой скорости и в виде зависимости мощности от угловой скорости ротора.

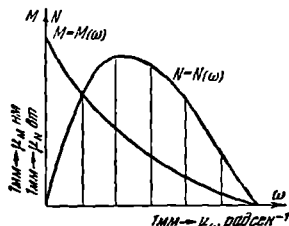


Рис. 402. Механические характеристики электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением в виде зависимости момента ротора от угловой скорости и в виде зависимости мощности от угловой скорости.

На рис. 401 и 402 показаны две механические характеристики для двух типов электродвигателей постоянного тока. На рис. 401 момент $M=M(\omega)$ изменяется линейно, а на рис. 402 — по более сложному закону. Кривые $N=N(\omega)$ имеют параболический характер. На рис. 403 показана характеристика водяной турбины. Все механические характеристики вида $M=M(\omega)$ для машин-двигателей, показанные на рис. 401—403, являются нисходящими кривыми. На рис. 404

показана механическая характеристика асинхронного электродвигателя трехфазного тока. Эта характеристика имеет как нисходящий, так и восходящий участки кривой. По механическим характеристикам вида

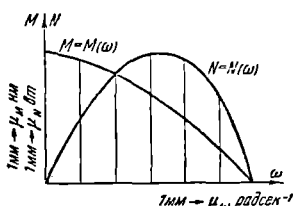


Рис. 403. Механические характеристики водяной турбины в виде зависимости момента на коренном валу от угловой скорости и в виде зависимости мощности от угловой скорости.

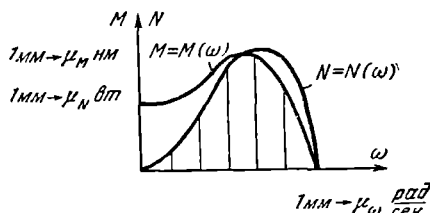


Рис. 404. Механические характеристики асинхронного электродвигателя трехфазного тока в виде зависимости момента ротора от угловой скорости и в виде зависимости мощности от угловой скорости.

$N=N(\omega)$ можно определить те угловые скорости, при которых двигатель развивает максимальную мощность N .

3°. На рис. 405 и 406 показаны механические характеристики рабочих машин — центробежного насоса и прядильной машины. Как

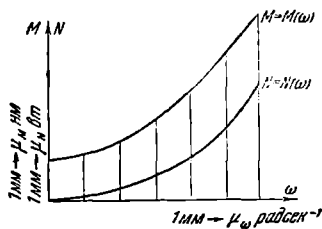


Рис. 405. Механические характеристики центробежного насоса в виде зависимости момента на роторе от угловой скорости и в виде зависимости мощности от угловой скорости.

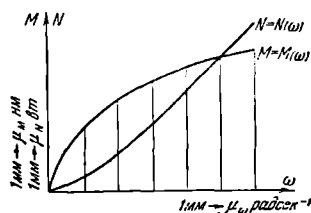


Рис. 406. Механические характеристики прядильной машины в виде зависимостей момента и мощности от угловой скорости.

видно из характеристик, у рабочих машин момент M возрастает с увеличением угловой скорости, что объясняется, как это указано выше, увеличением сил трения, сил сопротивлений обрабатываемых сред и объектов и т. д. Таким образом, все механические характеристики как вида $M=M(\omega)$, так и вида $N=N(\omega)$ для рабочих машин являются обычно восходящими кривыми. Более подробно вопрос о механических характеристиках рассматривается в специальных курсах при решении задач, связанных с наиболее выгодным подбором двигателей к рабочим машинам.

ГЛАВА XIV

ТРЕНИЕ В МЕХАНИЗМАХ

§ 59. Виды трения

1°. Вопрос о природе трения до сих пор изучен недостаточно. Как показывают экспериментальные исследования, трение представляет собой сложный комплекс физических и химических явлений, причем те или иные явления преобладают в зависимости от условий, при которых происходит процесс трения.

В нашу задачу не входит подробное изложение современных теорий трения и методов расчета трущихся элементов машин. Мы остановимся только на изложении элементарных сведений по теории трения, необходимых для решений простейших задач теории механизмов.

Обычно различают два основных вида трения: *трение сухое* (или трение несмазанных поверхностей) и *трение жидкостей* (или трение смазанных поверхностей). Кроме этого, различают иногда еще два вида трения: *полусухое трение* и *полужидкое трение*.

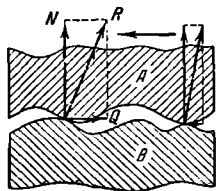


Рис. 407. Увеличенное изображение двух трущихся поверхностей.

2°. Явление сухого трения может быть объяснено схематически следующим образом. Рассматривая под большим увеличением поверхности трущихся тел, можно обнаружить, что эти поверхности не абсолютно гладкие, а шероховатые и покрыты большим количеством неровностей. На рис. 407 схематически изображены движущиеся поверхности A и B. Если эти поверхности двигать друг относительно друга, то выступы одной поверхности будут задевать за выступы другой поверхности. Выступы будут деформироваться. Деформации эти могут быть упругими и неупругими, в зависимости от величины нагрузки, приложенной к трущейся поверхности, скорости относительного движения, различных физических свойств трущихся тел (упругость, характер поверхностей и т. д.).

Если в точках соприкосновения приложить опорные реакции R , направленные по нормали к элементарным площадкам соприкосновения (рис. 407), и разложить их на составляющие, перпендикулярные и параллельные направлению движения, то нормальные составляющие N будут уравниваться заданными нормальными нагрузками, а касательные составляющие Q в сумме создадут некоторую силу сопротивления относительному перемещению поверхностей A и B. Эта сила сопротивления и называется силой трения.

Если в точках соприкосновения приложить опорные реакции R , направленные по нормали к элементарным площадкам соприкосновения (рис. 407), и разложить их на составляющие, перпендикулярные и параллельные направлению движения, то нормальные составляющие N будут уравниваться заданными нормальными нагрузками, а касательные составляющие Q в сумме создадут некоторую силу сопротивления относительному перемещению поверхностей A и B. Эта сила сопротивления и называется силой трения.

Если выступающие неровности поверхностей A и B непосредственно соприкасаются друг с другом, то такой вид трения называется *сухим трением*. Если же между поверхностями A и B имеется

промежуточный слой смазки (рис. 408) и поверхности A и B непосредственно не соприкасаются, то такой вид трения называется *жидкостным трением*. При жидкостном трении поверхности A и B разделены слоем смазки. Поэтому при жидкостном трении силами трения являются силы сопротивления сдвигу отдельных слоев смазки. Много разных явлений, которые имеют место при жидкостном трении, отсутствует при сухом трении, и наоборот. Полусухим трением называют такой вид трения, при котором наиболее выступающие шероховатости не разделяются слоем смазки и приходят в непосредственное соприкосновение. Разница между полусухим и полужидкостным видами трения заключается главным образом в том, какой из основных видов трения преобладает.

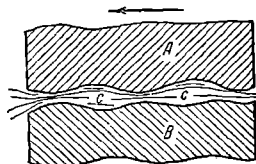


Рис. 408. Увеличенное изображение двух трущихся поверхностей, разделенных слоем смазки.

3°. Явления сухого и жидкостного трения по своей природе совершенно различны. Поэтому различные и методы учета сил трения в механизмах. Во фрикционных, ременных и других передачах наблюдается сухое трение, в смазанных подшипниках, подпятниках и т. д. — жидкостное трение, переходящее иногда в полусухое или даже сухое трение (периоды пуска машин). Поэтому необходимо изучать оба вида трения.

По видам относительного движения различают: *трение скольжения* и *трение качения* (*сопротивление перекатыванию*).

При трении скольжения одни и те же площадки соприкасающихся поверхностей одного тела соприкасаются с различными площадками другого тела. При трении качения различные площадки соприкасающихся поверхностей одного тела последовательно совпадают с соответствующими площадками другого тела.

§ 60. Трение скольжения несмазанных тел

1°. Рассмотрим основные закономерности, характеризующие явление трения скольжения несмазанных тел. Пусть тело, сила тяжести которого равна G , находится на наклонной плоскости (рис. 409), имеющей угол наклона α к горизонту. Если обозначить нормальную реакцию наклонной плоскости через N , а силу, возникающую вследствие трения и направленную параллельно плоскости, через F_0 , то для равновесия тела (влиянием опрокидывающего момента пренебрегаем) необходимо, чтобы удовлетворялись равенства

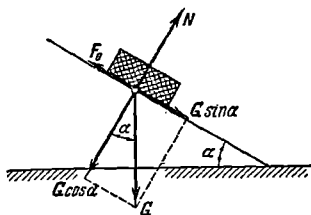


Рис. 409. К исследованию вопроса о трении на наклонной плоскости.

$$F_0 = G \sin \alpha, \quad N = G \cos \alpha.$$

Из этих равенств следует:

$$\frac{F_0}{N} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (14.1)$$

Наблюдения показывают, что равновесие возможно, пока угол α не превышает некоторого предельного значения φ_0 и пока имеет место неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Если обозначить $\operatorname{tg} \varphi_0$ через f_0 , то можно написать: $\operatorname{tg} \alpha \leq f_0$.

Число f_0 называется *коэффициентом трения покоя*, а угол φ_0 — *углом трения покоя*.

Из равенства (14.1) следует, что величина силы F_0 удовлетворяет неравенству

$$F_0 \leq f_0 N. \quad (14.2)$$

Трение, имеющее место при относительном покое соприкасающихся тел, называется *трением покоя* или *статическим трением*.

Физический смысл неравенства (14.2) можно пояснить следующим образом. Если представить себе, что на тело действует сдвигающая сила, величина которой постепенно увеличивается от нулевого значения, то эта сила будет вызывать невидимую глазом постепенно увеличивающуюся деформацию сдвига трущихся поверхностей. Когда величина сдвигающей силы достигнет значения, равного величине $f_0 N$, то в дальнейшем начнется уже видимое движение одного тела относительно другого.

Неравенство (14.2) устанавливает только максимально возможную величину силы трения покоя, так как сила трения является слагающей пассивной реакции связи и ее сначала неизвестное направление определяется в дальнейшем только активными силами. Из этого неравенства также следует, что сила трения покоя имеет всегда такую величину, которая необходима для предотвращения скольжения тел одного относительно другого, но не может превзойти некоторого предельного значения. Если бы трение отсутствовало, то равновесие было бы возможно при вполне определенных значениях сил или координат, определяющих положение тела. При трении имеется целая область положений равновесия и бесконечное множество значений активных сил, при которых имеет место равновесие.

2°. Если соприкасающиеся тела находятся в относительном движении, то имеет место не трение покоя, а *трение движения*, или *кинетическое трение*.

В отличие от силы трения покоя сила трения движения производит определенную работу.

Вопросы теории сухого трения скольжения начали разрабатываться уже давно. Вопросами трения занимался Леонардо да Винчи. Позднее ряд вопросов сухого трения разрешил Л. Эйлер. В конце XVII века французским ученым Кулоном было опубликовано сочинение, в котором он на основе собственных наблюдений и исследова-

ний других ученых (главным образом Амонтона) сформулировал следующие основные положения:

а) сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению,

б) трение зависит от материалов и состояния трущихся поверхностей,

в) трение почти не зависит от величины относительной скорости трущихся тел,

г) трение не зависит от величины поверхностей соприкосновения трущихся тел,

д) трение покоя больше трения движения,

е) трение возрастает с увеличением времени предварительного контакта соприкасающихся поверхностей.

Анализ положений, выдвинутых Амонтоном и Кулоном, сделанный последующими исследователями, показал, что эти положения могут считаться правильными только в применении к определенным трущимся материалам и только в некоторых пределах изменения скоростей и нагрузок. Так, например, на основе ряда экспериментов было установлено, что зависимость силы трения от нормального давления выражается следующим равенством:

$$F = A + f_c N. \quad (14.3)$$

В этом равенстве F есть сила трения, f_c — коэффициент трения движения, принимаемый для рассматриваемых тел постоянным, N — нормальное давление и A — некоторая постоянная трения, не зависящая

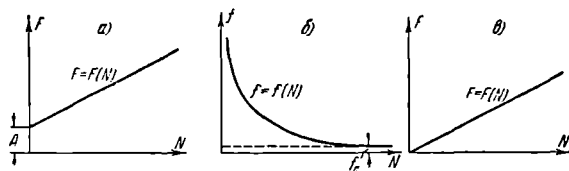


Рис. 410. К исследованию вопроса о трении: а) график линейной зависимости силы сухого трения от нормальной силы; б) график гиперболической зависимости коэффициента трения от нормальной силы; в) график зависимости, силы трения от нормальной силы, применяемый в расчетной практике.

от давления, а зависящая от способности соприкасающихся поверхностей к предварительной сцепленности. Таким образом, хотя зависимость силы трения от нормального давления линейная, но закон изменения силы трения в функции нормального давления выражается в виде прямой, не проходящей через начало координат (рис. 410, а). Постоянная величина A характеризует как бы «целпкость» соприкасающихся поверхностей и показывает необходимость приложения некоторой дополнительной силы для преодоления предварительной сцепленности соприкасающихся поверхностей.

Разделив обе части равенства (14.3) на величину N , получим:

$$\frac{F}{N} = \frac{A}{N} + f_c \quad (14.4)$$

Если принять согласно положению Амонтона — Кулона, что величина силы трения F прямо пропорциональна величине нормального давления, т. е.

$$F = fN \quad \text{или} \quad f = \frac{F}{N},$$

то равенство (14.4) можно будет переписать так:

$$f = \frac{A}{N} + f_c \quad (14.5)$$

Графическое изображение зависимости, выраженной соотношением (14.5), показано на рис. 410, б. График представляет собой гиперболу. Таким образом, коэффициент трения, вообще говоря, зависит от нормального давления.

В большинстве технических расчетов обычно пользуются уравнением Амонтона — Кулона в простейшей его форме, пренебрегая цепкостью поверхности, и считают

$$F = fN, \quad (14.6)$$

где f — некоторое среднее значение коэффициента трения, определяемого из опыта и принимаемого постоянным. Графическое изображение соотношения (14.6) дано на рис. 410, в.

Опыты показали, что коэффициент трения f для большинства материалов убывает с увеличением относительной скорости, достигая при значительных скоростях некоторого постоянного значения. В отдельных случаях, как, например, при трении кожи о сталь и чугун, коэффициент трения возрастает с увеличением скорости.

Опыты также показывают, что коэффициент трения f изменяется при увеличении нагрузки на единицу площади соприкосновения. Зависимость силы трения от относительной скорости и удельного давления легко объясняется тем, что величины и характер деформаций отдельных выступов соприкасающихся поверхностей являются различными в зависимости от относительной скорости и удельного давления.

3°. Опытное определение силы трения движения F и силы трения покоя F_0 может быть сделано, если приложить к телу движущую силу, параллельную плоскости соприкосновения. Тело, как указывалось выше, выходит из состояния покоя, когда величина этой движущей силы достигает значения

$$P_0 = F_0 = f_0 N.$$

Чтобы тело продолжало двигаться с постоянной скоростью, необходимо приложить к нему движущую силу, несколько меньшую силы P_0 и равную по величине

$$P = fN.$$

Значение коэффициентов трения f и f_0 для наиболее употребительных сочетаний материалов соприкасающихся пар приводится во всех инженерных справочниках.

Рассмотрим, далее, вопрос о направлении сил трения для некоторых случаев движения соприкасающихся тел.

Пусть тело A движется со скоростью v_A относительно неподвижного тела B (рис. 411). Сила трения F_A , приложенная к телу A , имеет направление, противоположное скорости v_A . Если необходимо определить, в каком направлении действует сила F_B , приложенная к телу B , то надо рассмотреть движение тела B относительно тела A . Для этого сообщаем обоим телам скорость $-v_A$, противоположную скорости v_A . В этом случае тело A станет неподвижным, а тело B начнет двигаться относительно A со скоростью $-v_A$, и следовательно, сила трения F_B будет направлена в сторону, противоположную скорости $-v_A$. Силы F_A и F_B равны между собой по величине и имеют противоположные направления. Таким образом, *сила трения всегда имеет направление, противоположное относительной скорости движения.*

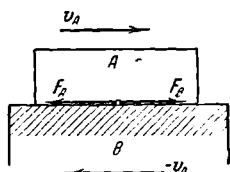


Рис. 411. К вопросу о связи между направлениями силы трения и относительной скорости движения трущихся тел.

Когда относительная скорость движения равна нулю, сила трения движения отсутствует, но тогда может появиться в зависимости от действующих сил сила статического трения.

4°. Основные положения о силах сухого трения в уточненной форме могут быть сформулированы так:

а) коэффициент трения можно считать постоянным и силы трения прямо пропорциональными нормальным давлениям только в определенном диапазоне скоростей и нагрузок;

б) силы трения всегда направлены в сторону, противоположную относительным скоростям;

в) трение покоя в начальный момент движения в большинстве случаев несколько больше трения движения;

г) с увеличением скорости движения сила трения в большинстве случаев уменьшается, приближаясь к некоторому постоянному значению;

д) с возрастанием удельного давления сила трения в большинстве случаев увеличивается;

е) с увеличением времени предварительного контакта сила трения возрастает.

§ 61. Трение в поступательной кинематической паре

1°. Пусть ползун A нагружен некоторой силой P (рис. 412), представляющей собой результирующую всех действующих на ползун сил, и пусть коэффициенты трения покоя и движения соответственно равны f_0 и f . Рассмотрим, при каких условиях ползун A начнет двигаться

по неподвижной направляющей B . Для этого перенесем точку приложения силы P в точку O и разложим эту силу на составляющие P' и P'' , из которых первая параллельна поверхности соприкосновения, а вторая к ней перпендикулярна. Если обозначить угол, образуемый силой P с нормалью $n-n$, через φ_0 , то величины составляющих P' и P'' будут соответственно равны

$$P' = P \sin \varphi_0 \text{ и } P'' = P \cos \varphi_0.$$

Рис. 412. К вопросу о трении в поступательной паре.

Под действием силы P' поверхности соприкосновения сближаются друг с другом, а под влиянием силы P'' ползун A стремится сдвинуться относительно направляющей B . Величина силы трения покоя F_0 по закону Амонтона — Кулона равна

$$F_0 = P' f_0 = P \cos \varphi_0 f_0.$$

Ползун сдвинется с места в тот момент, когда величина силы P' достигнет значения F_0 и будет иметь место равенство

$$P' = F_0.$$

Подставив вместо P' и F_0 их значения, можно написать:

$$P \sin \varphi_0 = P \cos \varphi_0 f_0;$$

отсюда

$$f_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Из этой формулы следует, что ползун A выходит из состояния покоя, когда тангенс угла φ_0 становится равным коэффициенту трения покоя f_0 .

Угол φ_0 , как было указано выше, называется *углом трения покоя*.

Величина силы трения движения F меньше величины силы трения покоя F_0 . Следовательно, и *угол трения движения* φ меньше угла трения покоя φ_0 , т. е.

$$\varphi < \varphi_0.$$

Угол φ может быть определен из равенства

$$f = \operatorname{tg} \varphi.$$

2°. Углы трения покоя и движения позволяют в очень простой геометрической форме представить взаимодействие сил, приложенных к ползуну, перемещающемуся с трением по направляющей. Рассмотрим условия равновесия ползуна I , движущегося с трением по направ-

ляющей 2 (рис. 413) с постоянной скоростью v . На ползун действуют силы T и Q . Сила T параллельна оси направляющей 2 и стремится перемещать ползун 1 вдоль оси направляющей 2. Сила Q , перпендикулярная к оси направляющей, прижимает ползун 1 к направляющей 2.

Воздействие направляющей 2 на ползун 1 сводится к действию на него нормальной реакции N и силы трения F . Пусть задан угол трения φ , тогда величина силы трения F будет равна

$$F = Nf. \quad (14.7)$$

Сложением сил F и N находим результирующую силу R , представляющую собой полную реакцию звена 2 на звено 1, равную по величине

$$R = \sqrt{N^2 + F^2} = \sqrt{N^2 + N^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = N \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = N \frac{1}{\cos \varphi},$$

откуда

$$R \cos \varphi = N.$$

Из этого равенства следует, что полная реакция R отклонена от нормали $n-n$ на угол трения φ .

Таким образом, для учета сил трения в поступательной паре надо отклонить реакцию R от направления нормали $n-n$ на угол трения φ в сторону, обратную скорости v движения ползуна относительно неподвижной направляющей.

Отложим от нормали $n-n$ (рис. 414) углы φ_0 и φ трения покоя и движения. Если тело находится в покое, то направление реакции R всегда располагается внутри угла, равного $2\varphi_0$ — большего угла 2φ .

3°. Покажем теперь, что если результирующая внешняя сила P , действующая на ползун 1, приложена под углом α к нормали $n-n$, меньшим угла трения покоя φ_0 , то неподвижный ползун 1 не может быть приведен в движение (рис. 415). Разложим силу P на две силы: силу P' и силу P'' , равные

$$P' = P \sin \alpha \quad \text{и} \quad P'' = P \cos \alpha.$$

Величина силы трения покоя F_0 равна

$$F_0 = f_0 N = f_0 P'' = P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi_0.$$

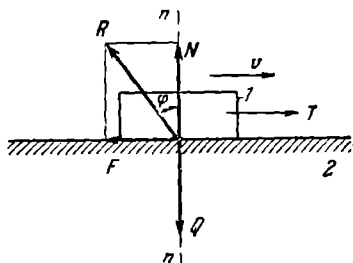


Рис. 413. К определению равнодействующей реакции трущихся поверхностей во время движения одного тела по другому.

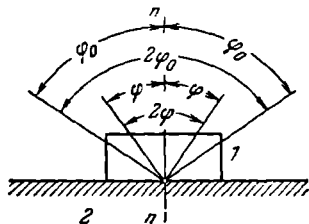


Рис. 414. Углы трения и движения.

Подставив в это равенство значение $P = \frac{P'}{\sin \alpha}$, получим:

$$F_0 = P' \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Так как по условию $\varphi_0 > \alpha$, то

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \alpha} > 1,$$

откуда

$$P' < F_0,$$

т. е. сила P' , стремящаяся сдвинуть ползун 1 по направляющей 2, меньше силы трения покоя F_0 . Таким образом, если $\alpha < \varphi_0$, то неподвижный ползун продолжает оставаться в покое вне зависимости от величины силы P . Ползун 1 начнет перемещаться, если $\alpha \geq \varphi_0$. Отложим угол φ_0 вправо и влево от нормали $n-n$ (рис. 415). Тогда угол

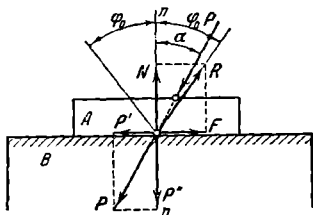


Рис. 415. К определению возможности движения ползуна по направляющей.

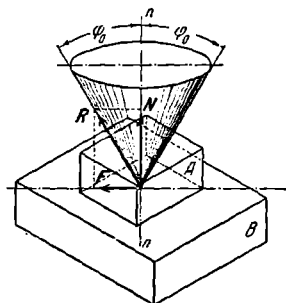


Рис. 416. Конус трения покоя.

$2\varphi_0$ будет ограничивать некоторую область равновесия тела. Любая сила, приложенная в этой области под углом $\alpha < \varphi_0$, не сможет вывести ползун из состояния покоя.

Если давать силе P различные направления в пространстве, то область равновесия будет ограничена *конусом трения покоя*, который может быть образован вращением угла трения φ_0 вокруг нормали $n-n$ к соприкасающимся поверхностям (рис. 416).

Из аналогичных рассуждений можно установить, что если тело находится в движении, то направление приложенной к ползуну силы должно проходить по стороне угла или вне угла, равного 2φ , или по образующей, или вне конуса, раствор которого равен также 2φ .

4°. Перейдем к рассмотрению возможных случаев движения ползуна в неподвижных направляющих. На рис. 417 показан кривошипно-ползунный механизм с симметричным относительно точки С ползуном 4,двигающимся в неподвижных направляющих 1. К ведущему кривошипу 2 приложен движущий момент M_d , а к ведомому ползуну 4 сила T —резльтирующая силы сопротивления веса и силы

инерции ползуна. Если пренебречь весом и силами инерции шатуна 3, то ползун 4 будет находиться под действием движущей силы P , направленной вдоль оси BC шатуна 3 и равной

$$P = \frac{M_2}{h},$$

силы T , реакции N со стороны направляющей 1 и силы трения F , (рис. 417). Величина силы трения F , если пренебречь размерами a и b ползуна и считать, что ползун всей поверхностью прижимается к одной из сторон направляющих, будет равна

$$F = fN = fP \sin \alpha, \quad (14.8)$$

где N — реакция направляющей 1, проходящая через точку C .

Аналогичную схему нагрузки имеем в кулачковом механизме

(рис. 418), в котором к ползуну 3 приложены движущая сила P , направленная по нормали $n-n$, сила T , нормальные реакции N направляющих и силы трения F . Силы N и F на рис. 418 не показаны.

Если опорные поверхности направляющих 1 (рис. 418) считать упругими, то давление на эти поверхности будет распределяться по сложному закону, определяемому внешними нагрузками и упругими свойствами ползуна и поверхностей направляющих. Точное решение такой задачи представляет значительные трудности, а потому примем некоторые упрощающие предположения. Так как между ползуном и направляющими всегда имеется производственный зазор, то под действием приложенных к ползуну сил он может или прижиматься к левой AD , или к правой EB поверхности направляющих, или перекашиваться так, как это схематично показано на рис. 419. В первом случае сила трения может быть определена по формуле (14.8). Во втором случае реакции опор надо считать приложенными в точках A и B или D и E (рис. 419).

На рис. 420 показана расчетная схема действия сил в случае перекаса ползуна и учета его размеров. Движущая сила P приложена к ползуну в точке C под углом α к оси Sy движения ползуна. Сила

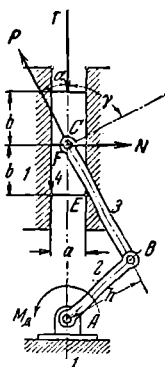


Рис. 417. Распределение сил в кривошипно-ползунном механизме.

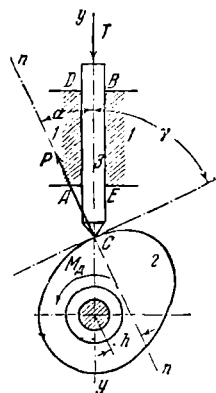


Рис. 418. Распределение сил в кулачковом механизме.

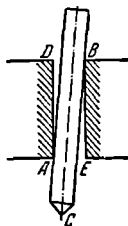


Рис. 419. Явление перекаса ползуна в направляющих.

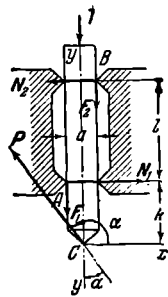


Рис. 420. Расчетная схема действия сил в случае перекаса ползуна в направляющих.

сопротивления действует по той же оси Sy ползуна. В точках A и B к ползуну приложены реакции N_1 и N_2 и силы трения F_1 и F_2 . Угол наклона реакции N_1 равен 0° , реакции N_2 равен 180° , сила P наклонена к оси Sx под углом α , силы трения F_1 и F_2 наклонены к той же оси под углом 270° , сила T наклонена также под углом 270° . Для решения задачи силового анализа сила T должна быть задана, определению подлежит необходимая для движения сила P . Известно, что силы трения F_1 и F_2 соответственно равны

$$F_1 = fN_1 \quad \text{и} \quad F_2 = fN_2.$$

Составляем уравнения проекций сил на оси координат и уравнение моментов всех сил относительно точки C :

$$\left. \begin{aligned} N_1 - N_2 + P \cos \alpha &= 0, \\ P \sin \alpha - fN_1 - fN_2 - T &= 0, \\ -N_1k + N_2(l+k) + fN_1 \frac{a}{2} - fN_2 \frac{a}{2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Выразим реакции N_1 и N_2 в функциях P и T :

$$N_1 = \frac{P \sin \alpha - fP \cos \alpha - T}{2f}, \quad (14.10)$$

$$N_2 = \frac{P \sin \alpha + fP \cos \alpha - T}{2f}. \quad (14.11)$$

Подставляя выражения для N_1 и N_2 в третье уравнение системы (14.9) и решая полученное после этого равенство относительно P , окончательно имеем:

$$P = \frac{T}{\sin \alpha + f \left(1 + \frac{2k}{l} - \frac{fa}{l} \right) \cos \alpha}. \quad (14.12)$$

Соотношение (14.12) устанавливает зависимость движущей силы P от силы сопротивления T , приложенной к ползуну.

В практических расчетах можно в соотношении (14.12) пренебречь членом $f(a/l)$, потому что он весьма мал по сравнению с членом $2k/l$, входящим в соотношение (14.12). Например, если принять коэффициент $f = 0,1$, то при размерах, показанных на рис. 420, величина $f(a/l)$ приблизительно в 40 раз меньше величины $2k/l$. Следовательно, можно практически пользоваться соотношением

$$P = \frac{T}{\sin \alpha + f \left(1 + \frac{2k}{l} \right) \cos \alpha}. \quad (14.13)$$

Формула (14.13) показывает, что для уменьшения движущей силы P при одной и той же силе T сопротивления надо стремиться к тому, чтобы сила P как можно меньше отклонялась от направления Sy .

5°. В некоторых случаях поверхность соприкосновения ползуна и направляющей в поперечном сечении имеет вид симметричного двугранного угла или желоба (рис. 421). Такой ползун называется клинчатый. К ползуну 1 приложена движущая сила P , параллельная оси желоба, сила Q , перпендикулярная к этой оси, нормальные реакции N_1 и N_2 , перпендикулярные к граням желоба, и две равные силы трения F_1 и F_2 . Сила трения F , равная $F = F_1 + F_2$, определяется по формуле

$$F = (N_1 + N_2)f = 2N_1f, \quad (14.14)$$

так как $N_2 = N_1$. Далее, имеем:

$$N_1 + N_2 + Q = 0. \quad (14.15)$$

Строим треугольник сил (рис. 421, б) согласно уравнению (14.15). Из этого треугольника получаем:

$$2N_1 = \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

Тогда формула (14.4) будет иметь вид

$$F = Q \frac{f}{\sin \alpha} \quad (14.16)$$

или

$$F = f'Q,$$

где

$$f' = \frac{f}{\sin \alpha}. \quad (14.17)$$

Из формулы (14.17) видно, что величина f' , условно называемая *коэффициентом трения клинового ползуна*, больше коэффициента трения плоского ползуна в направляющих.

В некоторых случаях находят применение круглые ползуны, движущиеся в желобе, имеющем форму круглого цилиндра (рис. 422). Для таких ползун рекомендуется определять силу трения F по формуле

$$F = f'Q,$$

где

$$f' = 1,27f.$$

6°. Мы рассмотрели вопрос об определении сил трения при движении ползуна по неподвижным направляющим. В случае движения ползуна по подвижным направляющим, как это имеет место, например, в кулисном механизме (рис. 423), метод определения величины силы трения такой же, как и для движения ползуна по неподвижным

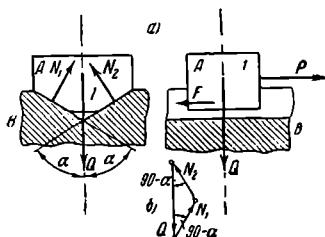


Рис. 421. Направляющая поступательной пары в виде желоба: а) схема; б) треугольник сил.

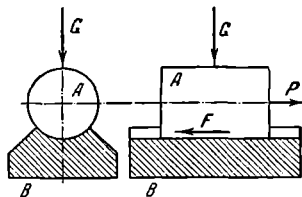


Рис. 422. Направляющая поступательной пары в виде круглого цилиндра.

направляющим, но для определения направления силы трения надо пользоваться правилом, изложенным в § 60,3°, и направлять силу трения в сторону, обратную относительной скорости движения ползуна по подвижной направляющей.

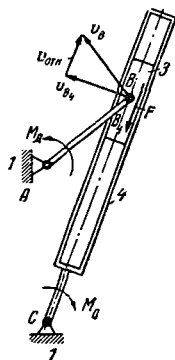


Рис. 423. Схема кулисного механизма.

На рис. 423 ползун 3 скользит в направляющих звена 4. Из треугольника скоростей, построенного на схеме, видно направление относительной скорости $v_{отн}$. Сила трения F , приложенная к ползуну 3, по направлению противоположна вектору $v_{отн}$.

§ 62. Трение в винтовой кинематической паре

1°. При рассмотрении трения в винтовой кинематической паре обычно делают целый ряд допущений. Во-первых, так как закон распределения давлений по винтовой резьбе неизвестен, то условно считают, что давление гайки на винт или, наоборот, винта на гайку приложено по средней линии резьбы. Средняя линия резьбы расположена на расстоянии r от оси винта (рис. 424). Во-вторых, предполагается, что действие сил в винтовой паре может быть сведено к действию сил на ползун, находящийся на наклонной плоскости. Развертывая среднюю линию винтовой резьбы на плоскость, сводят пространственную задачу к плоской, для чего поступают следующим образом.

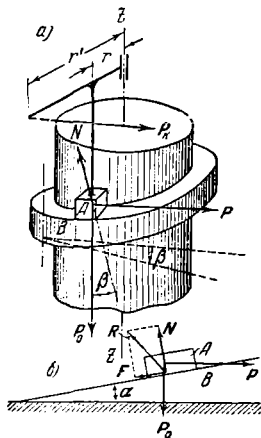


Рис. 424. Пространственная схема винтовой пары.

Пусть на гайку A действует некоторая осевая сила P_0 и некоторая пара сил в плоскости, перпендикулярной к оси винта (рис. 424). Момент M этой пары мы можем представить в виде момента силы P_k , приложенной на расстоянии r' от оси $z-z$.

Чтобы гайка двигалась равномерно вдоль оси $z-z$ в направлении, противоположном направлению силы P_0 , необходимо, чтобы момент M равнялся моменту силы P относительно той же оси $z-z$.

Имеем:

$$P_k r' = P r.$$

В этом равенстве P есть сила, необходимая для равномерного перемещения тела A (гайки) по наклонной плоскости B (рис. 425, а), угол подъема β которой равняется углу подъема винтовой резьбы (рис. 424). Строим план сил согласно уравнению равновесия сил, действующих на гайку A . Имеем:

$$P_0 + P + N + F = 0.$$

Из плана сил (рис. 425, б) следует, что величина силы P равна

$$P = P_0 \operatorname{tg}(\beta + \varphi).$$

Следовательно,

$$P_k r' = P_0 r \operatorname{tg}(\beta + \varphi)$$

или

$$P_k = P_0 \frac{r}{r'} \operatorname{tg}(\beta + \varphi). \quad (14.18)$$

Равенство (14.18) связывает величину осевой силы P_0 , приложенной к гайке A , с параметрами винтовой пары и углом трения φ . В

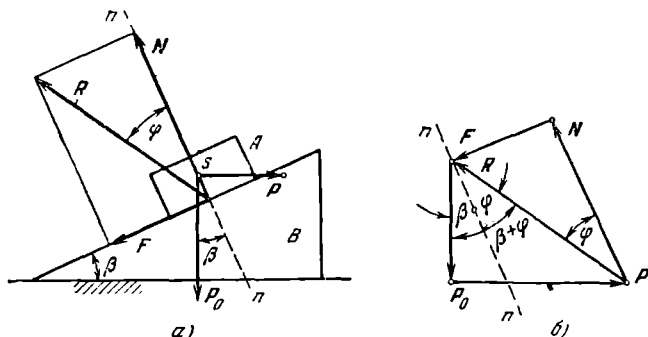


Рис. 425. К силовому расчету винтовой пары: а) распределение сил; б) план сил.

случае движения гайки по направлению, совпадающему с направлением силы P_0 , формула (14.18) принимает следующий вид:

$$P_k = P_0 \frac{r}{r'} \operatorname{tg}(\beta - \varphi). \quad (14.19)$$

При $\beta < \varphi$ двухзвенный механизм, состоящий из винта и гайки, является самотормозящимся.

Из плана сил (рис. 425, б) имеем, что сила трения F равна

$$F = R \sin \varphi. \quad (14.20)$$

Так как реакция R равна $R = \frac{P}{\sin(\beta + \varphi)}$, то, подставляя это значение R в равенство (14.20), получаем:

$$F = P \frac{\sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)} = P \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \beta + \cos \beta \operatorname{tg} \varphi} = P \frac{f}{\sin \beta + f \cos \beta}, \quad (14.21)$$

так как коэффициент трения $f = \operatorname{tg} \varphi$.

2°. Выведенными соотношениями можно пользоваться при определении сил трения в винтовых парах с прямоугольной резьбой. При

треугольной резьбе (рис. 426) весьма приближенно считают, что движение гайки аналогично движению клинового ползуна по желобу, у которого угол между вертикалью и стенками желоба равен $90^\circ - \alpha$, где α — угол подъема резьбы. Тогда коэффициент трения f' выразится [см. формулу (14.17)]

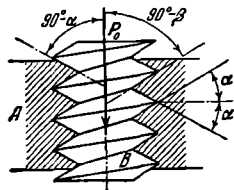


Рис. 426. Винтовая пара с треугольной резьбой.

$$f' = \frac{f}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{f}{\cos \alpha}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \alpha}.$$

Формула для определения силы трения F в винтовой паре с треугольной резьбой имеет следующий вид:

$$F = P \frac{f'}{\sin \beta + f' \cos \beta}. \quad (14.22)$$

Так как коэффициент трения f' больше коэффициента трения f , то трение в винтовой паре с треугольной резьбой больше, чем в винтовой паре с резьбой прямоугольной.

§ 63. Трение во вращательной кинематической паре

1°. При рассмотрении явления сухого трения во вращательной кинематической паре пользуются различными гипотезами о законах распределения нагрузки на поверхностях элементов этой пары. С помощью этих гипотез могут быть выведены соответствующие формулы

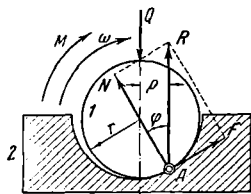


Рис. 427. Вал в подшипнике.

для определения сил трения и мощности, затрачиваемой на преодоление этих сил. Такие гипотезы были предложены некоторыми учеными (Рейе, Вейсбах и др.). Недостатком всех этих гипотез, так же как это имело место и для винтовой пары, является отсутствие достаточного экспериментального материала по вопросам распределения давлений во вращательных парах, работающих без смазки. Поэтому мы не будем останавливаться на всех различных формулах определения сил трения во вращательных парах, ограничившись выводом простейших из них, сделанным на основе элементарнейших предположений, схематизирующих явление.

2°. Начнем с простейшего предположения, что вал 1, располагающийся в подшипнике 2, находится под действием радиальной силы Q и внешнего момента M и вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 427). Между валом 1 и подшипником 2 имеется радиальный зазор. Тогда при вращении вала в направлении, указанном

стрелкой, при наличии трения между валом и подшипником, его цапфа будет как бы «взбегать» на подшипник. Предположим, что вследствие «взбегания» цапфы на подшипник соприкосновение элементов кинематической пары оказывается в точке A , где реакция R параллельна силе Q . На основании ранее установленных положений полная реакция R должна быть отклонена от нормали на угол трения φ , и величина силы трения F получается равной

$$F = fN = fR \cos \varphi = fQ \cos \varphi, \quad (14.23)$$

так как при равновесии цапфы $R = Q$.

Момент M , приложенный к цапфе, уравновешивается моментом трения $M_{\text{тр}}$, равным

$$M_{\text{тр}} = Fr = fQr \cos \varphi = Qr \sin \varphi = Q\rho, \quad (14.24)$$

где $\rho = r \sin \varphi$.

Если из центра вала O описать радиусом ρ окружность (рис. 428), то полная реакция R будет направлена по касательной к этой окружности. Круг радиуса ρ по аналогии с углом и конусом трения называется *кругом трения*.

Так как углы трения малы, то можно считать $\sin \varphi \approx \tan \varphi$. Вследствие этого радиус ρ круга трения будет приблизительно равен $\rho \approx rf$. Момент трения $M_{\text{тр}}$ во вращательной паре обычно определяется по формуле

$$M_{\text{тр}} = Qr f', \quad (14.25)$$

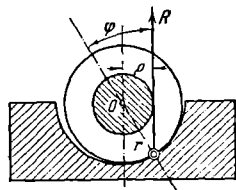


Рис. 428. Круг трения.

где r есть радиус цилиндрического элемента пары, f' — коэффициент трения во вращательной паре и Q — результирующая нагрузка на цапфу.

Коэффициент трения f' обыкновенно определяется экспериментально для различных условий работы вращательных пар и изменяется в значительных пределах в зависимости от материалов и состояния трущихся поверхностей, от условий их работы и т. п. Для неприработавшихся цапф при сухом трении обычно f' принимают равным $f' = \frac{3}{2}f$, а для приработавшихся $f' = \frac{4}{3}f$, где f есть коэффициент трения плоских соприкасающихся поверхностей из того же материала.

3°. В некоторых случаях вращательные пары выполняют в виде пяты A и подпятника B (рис. 429), нагруженных осевой силой P . В этом случае на поверхности соприкосновения пяты и подпятника возникает сила *трения верчения*, подчиняющаяся закону Амонта—Кулона. На рис. 429 показана кольцевая пята, имеющая в качестве опорной поверхности кольцо шириной a , равной $a = r_2 - r_1$. Если принять распределение давления равномерным по всей ширине

кольца, то величина удельного давления p на единицу опорной площади будет равна

$$p = \frac{P}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}. \quad (14.26)$$

Выделим на пяте кольцо радиуса r , ширина которого равна бесконечно

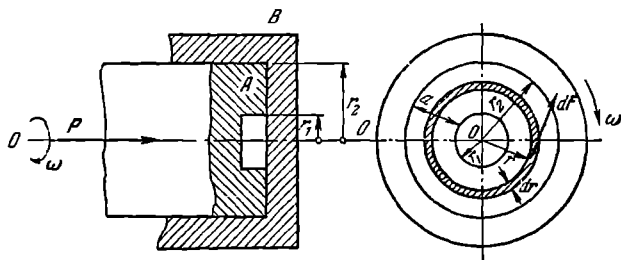


Рис. 429. Пята с подпяточником.

малой величине dr . Элементарный момент трения $dM_{тр}$ на этой площади равен

$$dM_{тр} = dF_{тр} r. \quad (14.27)$$

Элементарная сила трения $dF_{тр}$ равна

$$dF_{тр} = f dN = fp 2\pi r dr. \quad (14.28)$$

Следовательно,

$$dM_{тр} = fp 2\pi r^2 dr. \quad (14.29)$$

Интегрируя равенство (14.30) в пределах от r_1 до r_2 , получаем:

$$M_{тр} = 2\pi fp \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = \frac{2}{3} \pi fp (r_2^3 - r_1^3) \quad (14.30)$$

или с учетом равенства (14.26)

$$M_{тр} = \frac{2}{3} P f \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (14.31)$$

Если пята не кольцевая, а сплошная, то $r_1 = 0$ и $r_2 = r$. Равенство (14.31) тогда принимает вид

$$M_{тр} = \frac{2}{3} P f r. \quad (14.32)$$

§ 64. Трение скольжения смазанных тел

1°. Выше были рассмотрены основные вопросы теории сухого трения в кинематических парах. В настоящем параграфе изложим некоторые основные сведения по теории жидкостного трения. Как указывалось выше, при жидкостном трении непосредственное соприка-

сание между двумя поверхностями, движущимися друг относительно друга, отсутствует, ибо между этими поверхностями имеется промежуточный смазочный слой жидкости. При относительном движении поверхностей наблюдается сдвиг отдельных слоев жидкости друг относительно друга. Таким образом, трение в жидкостном слое сводится к вязкому сдвигу.

Для удобства технических расчетов при изучении жидкостного трения вводят понятие коэффициента трения, но, в отличие от коэффициента сухого трения, *коэффициент жидкостного трения* f зависит от скорости v движения слоев смазки друг относительно друга, от нагрузки p и от коэффициента вязкости η , т. е.

$$f = f(v, p, \eta).$$

Коэффициент вязкости η называется динамическим коэффициентом вязкости и имеет размерность $\text{н} \cdot \text{сек}^2 / \text{м}$.

Исследуя плоскопараллельное движение вязкой жидкости, Ньютон нашел опытным путем, что величина силы T , необходимой для перемещения одного слоя жидкости параллельно другому, равна

$$T = F\eta \frac{dv}{dy}, \quad (14.33)$$

где T есть сила вязкого сдвига, F — площадь поверхности скольжения, η — динамический коэффициент вязкости, dv/dy — изменение скорости по высоте слоя (градиент скорости). Сила вязкого сдвига на единицу поверхности, или напряжение сдвига, равняется

$$\tau = \frac{T}{F} = \eta \frac{dv}{dy}. \quad (14.34)$$

2°. Основоположник теории трения смазанных тел Н. П. Петров в 1883 году в работе «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» сформулировал основные требования, необходимые для жидкостного трения. Эти требования следующие:

а) смазочная жидкость, заполняющая зазор между скользящими поверхностями, должна удерживаться в зазоре;

б) в слое смазки при относительном скольжении смазываемых поверхностей должно возникать и поддерживаться внутреннее давление, уравнивающее внешнюю нагрузку, прижимающую скользящие поверхности одну к другой;

в) смазочная жидкость должна полностью разделять скользящие поверхности;

г) слой жидкости, находящейся между скользящими поверхностями, должен иметь толщину не менее минимального предела, определяемого наиболее выступающими частями шероховатостей трущихся поверхностей.

Для выполнения первого требования необходимо, чтобы при смазывании смазочной жидкостью твердых тел силы сцепления между

поверхностями твердых тел и прилегающим слоем жидкости были больше сил сцепления между частицами смазочной жидкости. Тогда при относительном движении смоченных твердых поверхностей возникает относительное скольжение слоев смазочной жидкости и не наблюдается скольжения жидкости относительно твердых тел.

Для удовлетворения второго требования необходимо, чтобы между скользящими поверхностями непрерывно нагнеталась смазочная

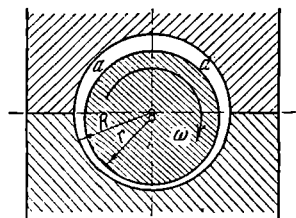


Рис. 430. Клиновидный зазор между цапфой и подшипником.

жидкость и между этими поверхностями был бы обеспечен клиновидный зазор. В применении к цапфе, лежащей в подшипнике (рис. 430), это достигается тем, что радиусы R -подшипника и r -цапфы не равны между собой. Благодаря этому между цапфой и подшипником создается клиновидный зазор a — a , в который при вращении цапфы нагнетается смазочная жидкость. При этом в смазочном слое возникают силы, уравнивающие внешнюю нагрузку на цапфу, и цапфа как бы «всплывает» на слое смазочной жидкости.

При этом при повышении угловой скорости центральная ось цапфы стремится совпасть с центральной осью подшипника.

Третье и четвертое требования сводятся к обеспечению такой обработки поверхности цапфы и подшипника, при которой уменьшились бы возможные неровности и шероховатости на их поверхностях; кроме того, необходимо стремиться к возможно меньшим деформациям цапфы и производить возможно более тщательную очистку смазочной жидкости от посторонних твердых примесей.

Расчет кинематических пар при жидкостном трении подробно излагается в курсе деталей машин и в специальных курсах при изложении вопросов расчета и конструирования подшипников и направляющих.

§ 65. Трение качения и трение скольжения в высших парах

1°. При рассмотрении относительного движения элементов звеньев, входящих в высшие пары, мы встречаемся не только со скольжением одного элемента относительно другого, но и с качением элементов друг по другу. В том случае, когда элементы звеньев являются центроидами, имеет место чистое качение элементов без скольжения; в том же случае, когда элементы являются взаимоогibaемыми кривыми, имеет место качение и скольжение.

Пусть элементы A и B (рис. 431) высшей кинематической пары представляют собой две взаимоогibaемые кривые. Мгновенным центром вращения в относительном движении является точка P_a . Как было

показано в § 28, 3°, скорость скольжения v_{21} профиля звена 2 по профилю звена 1 равна

$$v_{21} = |\Omega| (P_0 C),$$

где Ω — мгновенная угловая скорость в относительном движении, абсолютная величина которой равна

$$|\Omega| = |\omega_1| + |\omega_2|.$$

Так же как и в ранее рассмотренных задачах, полная реакция R второго звена на первое приложена в точке соприкосновения C звеньев и отклонена от направления общей нормали на угол трения φ в сторону, противоположную вектору относительной скорости скольжения v_{21} . Величина силы трения F , приложенной к звену 1, определяется по формуле

$$F = fN,$$

где f — коэффициент трения скольжения.

Сопротивление, возникающее при перекачивании элементов пар друг по другу с угловой скоростью Ω , может быть учтено введением *момента трения качения* $M_{\text{тр. к.}}$ (рис. 431), направление которого противоположно угловой скорости Ω .

2°. Рассмотрим вопрос о том, как определяется момент трения качения $M_{\text{тр. к.}}$. Физические явления, вызывающие трение качения, изучены мало, в технических расчетах пользуются в основном данными, полученными при экспериментах, проводимых над различными конкретными объектами: катками, колесами, роликами и шариками в подшипниках и т. д. Опыт показывает, что сопротивление перекачиванию зависит от упругих свойств материалов, соприкасающихся тел, кривизны соприкасающихся поверхностей и величины прижимающей силы. На преодоление сопротивлений при перекачивании тел тратится работа. Работа эта расходуется на деформацию поверхностей соприкосновения. Пусть, например, имеется неподвижный цилиндр, лежащий на плоскости (рис. 432) и нагруженный некоторой силой Q .

В зоне соприкосновения цилиндра и плоскости возникает местная деформация контактного сжатия на площадке шириной b . Согласно положениям теории упругости напряжения приблизительно могут быть приняты распределенными по эллиптическому закону. При этом кривая распределения напряжений симметрична и, следовательно, направление равнодействующей N этих напряжений совпадает с направлением силы Q .

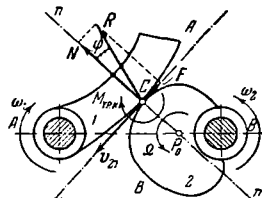


Рис. 431. К трению в высшей паре с вогнуто-выпуклыми кривыми.

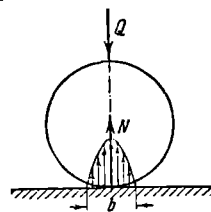


Рис. 432. Эпюра напряжений контактного сжатия на деформированной площадке цилиндра.

Начнем перекачивать цилиндр (рис. 433). Тогда участок ac площадки контактного сжатия будет находиться в зоне нарастающих деформаций, а участок ae — в зоне исчезающих деформаций. Из-за

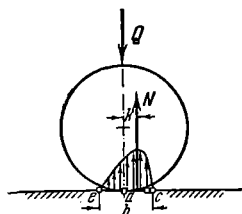


Рис. 433. Искаженная форма эпюры напряжений контактного сжатия, получающаяся при перекачивании цилиндра.

внутреннего трения в материале имеет место несовпадение кривых нагрузки и разгрузки материала (явление упругого последдействия или гистерезиса). Поэтому кривая напряжений в области нарастающих деформаций выше кривой в области исчезающих деформаций. Следовательно, распределение напряжений по площадке b оказывается несимметричным с максимумом, сдвинутым в сторону движения. Результирующая N напряжений смещена вправо от точки a на величину k . Величину k называют *плечом силы трения качения*. При качении

необходимо преодолеть некоторый момент $M_{тр. к.}$, называемый *моментом трения качения*, величина которого равна

$$M_{тр. к.} = Qk. \quad (14.35)$$

Здесь коэффициентом пропорциональности является плечо трения качения k , которое называется также *коэффициентом трения качения*.

3°. Из формулы (14.35) следует, что коэффициент трения качения имеет *размерность длины*. Пусть под действием внешней силы P

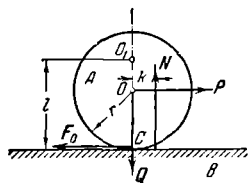


Рис. 434. Распределение сил, действующих на катящийся цилиндр.

(рис. 434), приложенной в точке O , цилиндр A равномерно перекачивается без скольжения по плоскости B . Равномерное перекачивание цилиндра происходит под действием пары сил P и F_0 , где F_0 — сила трения скольжения, приложенная в точке C и равная по величине силе P . Сила F_0 есть сила трения покоя, равная по величине $F_0 \leq Qf_0$, где f_0 — коэффициент трения покоя, как его называют в этих случаях — *коэффициент сцепления* цилиндра с плоскостью. Пара сил, под действием которой цилиндр A перекачивается по плоскости, имеет момент $M = Pr$, где r есть радиус цилиндра.

При равномерном качении цилиндра этот момент M равняется по абсолютной величине моменту сопротивления перекачиванию, т. е. моменту трения качения:

$$Pr = M_{тр. к.} = Qk, \quad (14.36)$$

откуда

$$P = k \frac{Q}{r}. \quad (14.37)$$

Из равенства (14.37) следует, что величина силы P прямо пропорциональна коэффициенту трения качения и обратно пропорциональна радиусу цилиндра.

Коэффициент трения качения обычно измеряется в миллиметрах или сантиметрах. Таблицы этих коэффициентов приводятся в общетехнических справочниках.

4°. Под действием силы P (рис. 434) при одних условиях цилиндр может перекачиваться, а при других — скользить. Рассмотрим, при каких условиях наблюдается трение качения и при каких трение скольжения. Пусть цилиндр A перемещается равномерно по плоскости B под действием силы P , приложенной в центре O и параллельной плоскости B (рис. 434). Если нормальное давление в точке C соприкосновения равно Q , то сопротивление трения скольжения F_0 равно

$$F_0 = f_0 Q,$$

и следовательно, чтобы цилиндр равномерно скользил по плоскости, необходимо, чтобы величина силы P была равна

$$P = f_0 Q.$$

Условие равномерного качения определяется равенством

$$Pr = kQ.$$

Чтобы цилиндр *только скользил* по плоскости, необходимо, чтобы кроме условия $P = f_0 Q$ удовлетворялось еще условие

$$Pr < kQ,$$

откуда

$$Qf_0 r < kQ \quad \text{или} \quad f_0 < \frac{k}{r}.$$

Таким образом, чтобы имело место *чистое скольжение*, необходимо, чтобы коэффициент трения скольжения был *меньше* отношения $\frac{k}{r}$.

Чтобы цилиндр *только перекачивался* по плоскости, необходимо, чтобы кроме условия $Pr = kQ$ удовлетворялось еще условие

$$P < f_0 Q,$$

откуда

$$f_0 > \frac{k}{r}.$$

Таким образом, чтобы имело место *чистое качение*, необходимо, чтобы коэффициент трения скольжения был *больше* отношения k/r .

Если сила P приложена не в точке O цилиндра (рис. 434), а в какой-либо другой точке, например в точке O_1 , находящейся на заданном расстоянии l от плоскости, необходимо во всех выведенных соотношениях величину r заменять величиной l . Так как на практике работа сопротивлений перекачиванию почти всегда меньше работы сопротивлений трению скольжения, то в технике трением качения

широко пользуются, применяя катки, шариковые и роликовые подшипники и т. д.

5°. Рассмотрим вопрос об определении потерь на трение качения в шариковых подшипниках.

На рис. 435 изображена схема шарикового или роликового подшипника. Подшипник состоит из наружного кольца *I*, связанного с корпусом подшипника внутреннего кольца *II*, связанного с валом, и шариков или роликов *III*. Нагрузка *Q* на подшипник распределяется неравномерно по отдельным шарикам или роликам. Наиболее нагруженными оказываются те из них, которые лежат на линии действия силы *Q*.

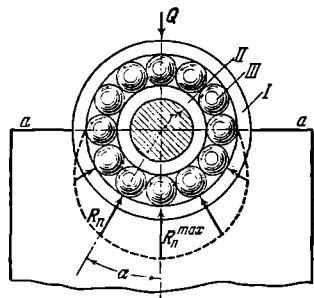


Рис. 435. Шариковый подшипник с эпюрой давлений на шарикоподшипник.

Если считать, что нагрузку будут воспринимать только шарики или ролики, расположенные ниже прямой *a—a*, то можно сделать предположение, что закон распределения реакций R_n имеет приблизительно вид, показанный на рис. 435 в виде пунктирной линии. Таким образом, нагрузка на шарики убывает по мере удаления шариков от линии действия силы *Q* и равна нулю для шариков или роликов, центры которых лежат на прямой *a—a*.

Если принять гипотезу о синусоидальном законе распределения давлений и предположить, что нормальная реакция R_n на шариках или роликах удовлетворяет условию

$$R_n = (R_n)_{\max} \cos \alpha,$$

где $(R_n)_{\max}$ — реакция на максимально нагруженный шарик, то сумма всех реакций равна

$$\Sigma R_n \approx 1,3Q.$$

Если использовать уравнение упругости по Герцу, то эта сумма равна: для шарикового подшипника

$$\Sigma R_n \approx 1,4Q,$$

а для роликового подшипника

$$\Sigma R_n \approx 1,46Q.$$

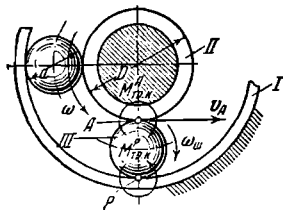


Рис. 436. Силы, действующие на шарикоподшипник.

Таким образом, сумма ΣR_n может быть принята изменяющейся в зависимости от различных гипотез в пределах от 1,3Q до 1,46Q.

Изложенные рассуждения правильны для неподвижного подшипника. Если внутреннее кольцо *II* вращается (рис. 435), то закон распределения реакций со стороны внешнего кольца на шарики или ролики становится несимметричным из-за сопротивления перекачиванию. Но с практической точки зрения этой асимметрией можно пренебречь, так как искажение закона распределения реакций оказывается весьма незначительным.

6°. Переходим к определению мощности, затрачиваемой на трение качения в шарикоподшипниках (рис. 436). Мощность $N_{тр}^0$, затрачиваемая на перекачивание одного шарика, равна

$$N_{тр}^0 = N_{тр}^P + N_{тр}^A,$$

где $N_{\text{тр}}^P$ — мощность, затрачиваемая в точке P контакта, и $N_{\text{тр}}^A$ — мощность, затрачиваемая в точке A контакта.

Мощность $N_{\text{тр}}^P$ равна

$$N_{\text{тр}}^P = M_{\text{тр.к}}^P \omega_{\text{ш}},$$

где $M_{\text{тр.к}}^P$ — абсолютная величина момента трения качения, равная произведению коэффициента трения качения k на нормальное давление R_n , т. е.

$$M_{\text{тр.к}}^P = kR_n,$$

и $\omega_{\text{ш}}$ — абсолютная величина угловой скорости шарика.

Обозначим внешний диаметр кольца II через D и диаметр шарика через d . Так как точка P (рис. 436) является мгновенным центром вращения шарика, то угловая скорость $\omega_{\text{ш}}$ определяется из условия

$$v_A = \omega_{\text{ш}}(PA) = \omega_{\text{ш}}d,$$

или так как скорость v_A равна

$$v_A = \omega \frac{D}{2},$$

где ω — угловая скорость вала, то

$$\omega_{\text{ш}} = \omega \frac{D}{2d}.$$

Отсюда мощность $N_{\text{тр}}^P$ равна

$$N_{\text{тр}}^P = kR_n \omega \frac{D}{2d}.$$

Мощность $N_{\text{тр}}^A$ равна

$$N_{\text{тр}}^A = M_{\text{тр.к}}^A \Omega,$$

где Ω — относительная угловая скорость кольца II по отношению к шарiku и $M_{\text{тр.к}}^A$ — момент трения качения, равный

$$M_{\text{тр.к}}^A = kR_n,$$

так как обычно для упрощения расчетов коэффициент k принимают одинаковым в точках контакта P и A .

Относительная угловая скорость Ω равна по абсолютной величине

$$\Omega = \omega + \omega_{\text{ш}}.$$

Следовательно, мощность $N_{\text{тр}}^A$ равна

$$N_{\text{тр}}^A = kR_n(\omega + \omega_{\text{ш}}) = kR_n \omega \left(1 + \frac{D}{2d}\right).$$

Общая мощность $N_{\text{тр}}^0$ равна

$$N_{\text{тр}}^0 = N_{\text{тр}}^P + N_{\text{тр}}^A = kR_n \omega \left(1 + \frac{D}{d}\right).$$

Если обозначить сумму мощностей, затрачиваемых на качение всех шариков через $N_{\text{тр}}$, а сумму нормальных реакций через R , т. е.

$$N_{\text{тр}} = \Sigma N_{\text{тр}}^0 \quad \text{и} \quad R = \Sigma R_n = cQ,$$

где c — коэффициент, принимающий согласно § 65,5° значения в пределах от 1,3 до 1,46, то общая мощность $N_{\text{тр}}$ — выразится так:

$$N_{\text{тр}} = ck\omega Q \left(1 + \frac{D}{d}\right).$$

Если, далее, ввести обозначение

$$ckQ \left(1 + \frac{D}{d}\right) = M_{\text{тр}},$$

то формула для $N_{\text{тр}}$ будет подобна формуле для мощности трения в подшипниках скольжения;

$$N_{\text{тр}} = M_{\text{тр}}\omega.$$

Выражение для момента $M_{\text{тр}}$ может быть также представлено в форме, аналогичной (14.25);

$$M_{\text{тр}} = Qrf',$$

где r — радиус вала (рис. 435), а

$$f' = \frac{ck}{r} \left(1 + \frac{D}{d}\right).$$

Величина f' носит название приведенного коэффициента трения шарико- или роликоподшипников.

§ 66. Трение в передачах с фрикционными колесами

1°. Силами трения пользуются в технике для передачи движения отдельным звеньям механизмов. Рассмотрим вопрос о передаче движения фрикционными колесами. Если мы рассечем пару круглых цилиндрических колес плоскостью, перпендикулярной к осям их вращения (рис. 437), то получим две окружности — центроиды колес в их

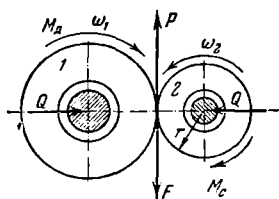


Рис. 437. Схема передачи с фрикционными колесами.

относительном движении. Передача движения с помощью центроид, представляющих собой окружности, невозможна, так как эти центроиды проскальзывают относительно друг друга. Передача движения станет возможной, если между центроидами возникнет сила сцепления F , достаточная для преодоления окружной силы P , равной по величине моменту M_c сопротивления на ведомом колесе, деленному на радиус r колеса. Для этого фрикционные колеса прижимаются друг к другу с некоторой силой Q , и предельное значение силы сцепления F оказывается равным

$$F = Qf, \quad (14.38)$$

где f — коэффициент трения.

Если $F > P$, то проскальзывания не будет. Отношение χ , равное

$$\chi = \frac{F}{P} = \frac{Qfr}{M_c},$$

называется *коэффициентом запаса сцепления*. Сила нажима Q передается на опоры колеса и вызывает их износ. Поэтому стремятся получить необходимую силу P при небольшом нажимающем усилии Q . Для этого применяют иногда клиновые фрикционные колеса (рис. 438). В этих колесах для определения окружного усилия можно воспользоваться коэффициентом трения f' для клинчатых ползунов [см. формулу (14.17)]. Имеем:

$$f' = \frac{f}{\sin \alpha},$$

где f есть коэффициент трения. Величина окружного усилия P , которое может быть передано, определяется по формуле

$$P \leq F = \frac{Qf}{\sin \alpha}. \quad (14.39)$$

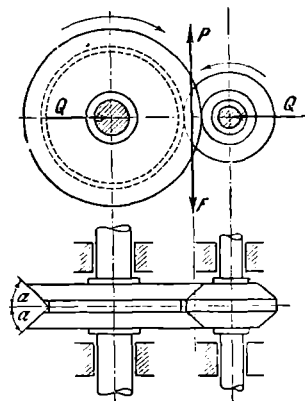


Рис. 438. Схема передачи с фрикционными клиновыми колесами.

Из этого соотношения следует, что для создания окружного усилия, по величине равного P , при клиновых фрикционных колесах надо прижимать колеса с меньшей силой Q , чем при обыкновенных круглых фрикционных колесах.

2°. При пересекающихся осях применяется коническая фрикционная передача (рис. 439). В этих передачах колесо A прижимается к колесу B силой Q . Разлагая силу Q по направлению, перпендикулярному к оси подшипника, и по направлению, перпендикулярному к общей образующей конусов, получаем величину первой слагающей, равную $Q' = Q/\operatorname{tg} \alpha$, и величину второй — равную $Q'' = Q/\sin \alpha$. Величина окружного усилия P определяется по формуле

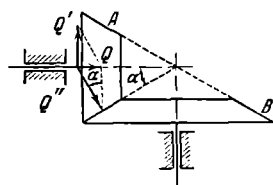


Рис. 439. Схема конической фрикционной передачи.

$$P \leq F = \frac{Qf}{\sin \alpha} = Qf. \quad (14.40)$$

Таким образом, окружное усилие в конических фрикционных колесах определяется по формуле для клиновых фрикционных колес.

§ 67. Трение в передачах с гибкими звеньями

1°. Как было указано в § 47, широкое применение в технике имеют механизмы с гибкими звеньями в виде ремней, канатов и лент. Так же как и в механизмах с фрикционными колесами, в этих механизмах передача движения становится возможной при достаточной силе трения между гибким звеном и шкивом.

Формула, связывающая основные параметры передачи гибким звеном, была выведена в 1765 году Л. Эйлером. Рассмотрим скольжение гибкого звена по неподвижному шкиву (рис. 440). Пусть гибкое звено охватывает круглый шкив. Ту ветвь гибкого звена, которая при своем движении набегаёт на шкив, назовем *набегающей ветвью*, а ту ветвь, которая сбегаёт с шкива, — *сбегающей ветвью*. Дуга, на которой гибкое звено соприкасается со шкивом, называется *дугой обхвата*, а соответствующий ей центральный угол — *углом обхвата*. Пусть

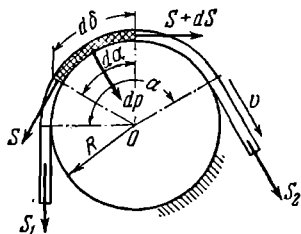


Рис. 440. К определению соотношения между натяжениями сбегающей и набегающей ветвей ремня.

натяжение набегающей ветви есть S_1 , а сбегающей — S_2 . Найдём связь между этими натяжениями. При этом примем следующие упрощения. Будем считать гибкое звено нерастяжимым и не оказывающим сопротивления изгибу при набегаании и сбегаании. Далее, будем предполагать движение этого звена происходящим с постоянной скоростью v . Будем пренебрегать массой гибкого звена и его центробежной силой.

Чтобы сообщить гибкому звену равномерное движение, необходимо преодолеть силу трения F . Таким образом, натяжение S_2 должно быть больше натяжения S_1 на величину силы F :

$$S_2 = S_1 + F, \quad (14.41)$$

откуда

$$F = S_2 - S_1. \quad (14.42)$$

Таким образом, при установившемся движении гибкого звена с постоянной скоростью разность натяжений сбегающей и набегающей ветвей этого звена равна силе трения между нитью и шкивом.

2°. Рассмотрим бесконечно малый элемент дуги обхвата $d\delta$, которому соответствует угол обхвата $d\alpha$ (рис. 440). Пусть натяжение гибкого звена в начале этого элемента есть S , тогда натяжение в конце элемента оказывается равным $S + dS$. Линии действия сил S и $S + dS$ касательны к шкиву и перпендикулярны к радиусам, проведенным из точки O в точки касания. Элементарная сила трения dF согласно равенству (14.42) равна

$$dF = (S + dS) - S = dS. \quad (14.43)$$

С другой стороны, сила трения dF равна

$$dF = f dp, \quad (14.44)$$

где p — элементарная сила давления элемента $d\delta$ на шкив, а f — коэффициент трения. Из соотношений (14.43) и (14.44) следует:

$$dS = f dp. \quad (14.45)$$

Величина силы dp может быть определена, если сложить по правилу параллелограмма силы S и $S + dS$. С точностью до величин второго порядка малости можно параллелограмм заменить ромбом (рис. 441) со сторонами, равными S .

Тогда сила dp будет равна

$$dp = 2S \sin \frac{d\alpha}{2} \approx 2S \frac{d\alpha}{2} = S d\alpha. \quad (14.46)$$

Подставляя полученное значение для силы dp в равенство (14.45), получаем:

$$dS = fS d\alpha, \quad (14.47)$$

откуда

$$\frac{dS}{S} = f d\alpha. \quad (14.48)$$

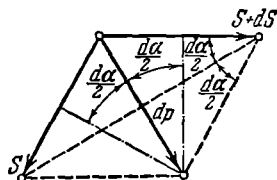


Рис. 441. Силовая схема к рис. 440.

Интегрируя левую и правую части равенства (14.48), имеем:

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = \int_0^{\alpha} d\alpha$$

или

$$\ln \frac{S_2}{S_1} = f\alpha,$$

откуда получаем:

$$S_2 = S_1 e^{f\alpha}, \quad (14.49)$$

где α — полный угол обхвата (рис. 440).

Формула (14.49) носит название *формулы Эйлера*.

Из формулы Эйлера следует, что сила натяжения S_2 возрастает с увеличением угла обхвата α и коэффициента трения f . При постоянном коэффициенте трения f увеличение угла обхвата α дает весьма быстрое увеличение силы S_2 .

Подставляя в равенство (14.42) значение S_2 из формулы (14.49), получаем для силы трения F выражение

$$F = S_1 (e^{f\alpha} - 1). \quad (14.50)$$

Сила F есть та наибольшая сила, которая может быть передана шкиву. Если окружное сопротивление на ведомом шкиве равно или меньше силы F , то гибкое звено заставит шкив вращаться. Если же окружное сопротивление больше силы F , то гибкое звено будет скользить по шкиву, не приводя его во вращение. Таким образом, натянутое усилиями S_1 и S_2 гибкое звено при $S_2 > S_1$ может передавать ведомому шкиву вращающий момент M , равный

$$M = (S_2 - S_1) R = S_1 R (e^{f\alpha} - 1), \quad (14.51)$$

где R — радиус шкива.

Формула Эйлера дает только приближенную связь между натяжениями ветвей гибкой нити. Поэтому в последние годы в советской технической литературе рекомендуются также и другие методы расчета, которые здесь не излагаются.

ГЛАВА XV

СИЛЫ ИНЕРЦИИ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 68. Определение сил инерции звеньев

1°. Как известно из теоретической механики, в общем случае все силы инерции звена BC (рис. 442), совершающего плоскопараллельное движение и имеющего плоскость симметрии, параллельную плоскости движения, могут быть сведены к силе инерции P_n , приложенной в центре масс S звена, и к паре сил инерции, момент которой равен M_n . Сила P_n может быть определена по формуле

$$P_n = -ma_S \quad (15.1)$$

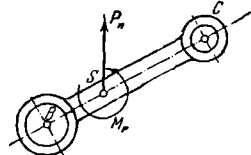


Рис. 442. Схема звена с приложенными к нему главным вектором и главным моментом сил инерции материальных точек звена.

В формуле (15.1) P_n есть вектор силы инерции звена BC , m — масса звена, измеряемая в килограммах, и a_S — вектор полного ускорения центра масс S звена, измеряемого в $м/сек^2$.

Таким образом, для определения силы инерции P_n звена плоского механизма надо знать его массу m и вектор полного ускорения a_S его центра масс S или проекции этого вектора на координатные оси.

Из формулы (15.1) следует, что сила инерции P_n имеет размерность $кг \cdot м/сек^2$ и называется *ньютоном*.

Вектор полного ускорения центра масс в механизмах удобно определять из построенного плана ускорений, применяя известное из кинематики свойство подобия. Пусть, например (рис. 443, а), дано звено BC и известны ускорения a_B и a_C его точек B и C , которые на плане ускорений (рис. 443, б) изображаются отрезками (πb) и (πc) , построенными в масштабе μ_a . Чтобы определить полное ускорение a_S центра S масс звена, соединяем точки b и c прямой и разделим этот отрезок в том же отношении, в котором точка S делит отрезок BC . Соединив полученную на плане ускорений точку s с точкой π , получим величину полного ускорения a_S точки S :

$$a_S = \mu_a (\pi s).$$

Сила инерции звена P_n направлена противоположно полному ускорению a_S точки S и равна

$$P_n = -ma_S [н].$$

Момент $M_{\text{и}}$ пары сил инерции направлен противоположно ускорению ϵ и может быть определен по формуле

$$M_{\text{и}} = -J_S \epsilon \quad [\text{н.м.}] \quad (15.2)$$

В уравнении (15.2) J_S — момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс S и перпендикулярной к плоскости движения звена, а ϵ — угловое ускорение звена.

Таким образом, для определения момента $M_{\text{и}}$ пары сил инерции звена плоского механизма надо знать величину его момента инерции J_S , а также величину и направление углового ускорения ϵ этого звена.

Момент инерции J_S имеет размерность $\text{кг} \cdot \text{м}^2$. Угловое ускорение ϵ имеет размерность $\text{рад}/\text{сек}^2$. Следовательно, момент $M_{\text{и}}$ пары сил инерции имеет размерность $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{сек}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{сек}^2 \cdot \text{м} = \text{н.м.}$, ибо $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{сек}^2$ есть ньютон.

Момент инерции звена J_S может быть представлен как произведение массы m звена на квадрат его радиуса инерции ρ :

$$J_S = m\rho^2. \quad (15.3)$$

Величина углового ускорения ϵ , входящая в формулу (15.2), определяется из равенства

$$|\epsilon| = \frac{a'_{CB}}{l_{BC}}, \quad (15.4)$$

где a'_{CB} — тангенциальное ускорение (рис. 443, б) в относительном движении звена и l_{BC} — длина звена BC .

Таким образом, все силы инерции звена могут быть сведены к главному вектору сил инерции $P_{\text{и}}$, приложенному в центре масс S звена, и главному моменту сил инерции $M_{\text{и}}$ (рис. 443, а).

2°. Рассмотрим теперь частные случаи движения звеньев механизма. Если звено движется поступательно с некоторой переменной скоростью v , то его сила инерции $P_{\text{и}}$ равна

$$P_{\text{и}} = -ma_S,$$

где m есть масса звена, а a_S — ускорение его центра масс S . Так как угловое ускорение ϵ звена при этом равно нулю, то момент пары сил инерции будет также равен нулю и все силы инерции сведутся к одной результирующей силе $P_{\text{и}}$, приложенной в центре масс S звена и направленной противоположно ускорению a_S (рис. 444).

3°. Если звено находится только во вращательном движении вокруг оси, проходящей через его центр масс, то ускорение a_S центра масс S этого звена равно нулю и сила инерции $P_{\text{и}}$ также равна нулю $P_{\text{и}} = 0$.

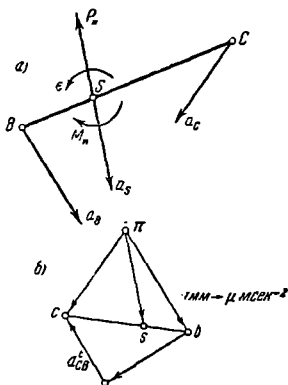


Рис. 443. Схема звена с плановым ускорением: а) схема с показанным на ней главным вектором и главным моментом сил инерции материальных точек; б) план ускорений.

Если при этом угловое ускорение ε этого звена не равно нулю, то силы инерции составят пару с моментом M_n , равным

$$M_n = -J_S \varepsilon.$$

Такой случай может иметь место, например, для неравномерно вращающихся деталей (шкивы, барабаны, роторы и т. д.), центр

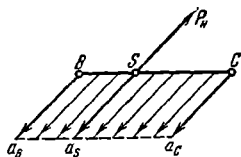


Рис. 444. Схема поступательно движущегося звена с показанными на ней ускорениями отдельных точек и главным вектором сил инерции материальных точек.

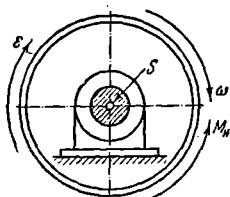


Рис. 445. Схема звена, центр масс которого расположен на оси вращения.

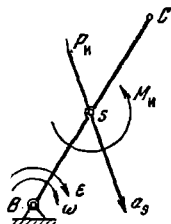


Рис. 446. Схема звена, вращающегося вокруг оси, не совпадающей с осью, на которой располагается центр масс.

масс S которых находится на оси вращения (рис. 445). При равномерном вращении этих деталей результирующие сил инерции и моментов от сил инерции равны нулю (при плоской задаче).

В случае вращательного движения звена BC вокруг некоторой оси, например оси B , не проходящей через центр масс S (рис. 446), его силы инерции могут быть сведены к приложенной в центре масс S силе P_n , направленной противоположно ускорению a_S и равной

$$P_n = -ma_S$$

и к паре сил инерции с моментом M_n , равным

$$M_n = -J_S \varepsilon,$$

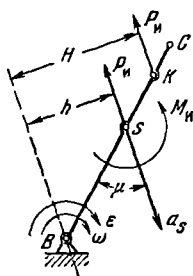


Рис. 447. Приведение сил инерции к одной силе.

где J_S есть момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс S .

4°. Сила P_n и пара сил с моментом M_n могут быть заменены одной результирующей силой P_n , приложенной в *центре качания* этого звена. Положение центра качания K (рис. 447) определяется из следующих соображений.

Главный момент сил инерции звена BC относительно точки B (рис. 447) равен

$$M_B(P_n) = P_n h + J_S \varepsilon, \quad (15.5)$$

где h — кратчайшее расстояние линии действия главного вектора сил инерции от точки B .

Величина главного вектора сил инерции P_n равна $P_n = ma_S$, а момент инерции J_S согласно формуле (15.3) равен

$$J_S = m\rho^2,$$

где ρ — радиус инерции звена относительно его центра масс S . Величина h равна $h = l_{BS} \sin \mu$.

Величина ε согласно формуле (15.4) равна

$$|\varepsilon| = \frac{a_{SB}^t}{l_{BS}} = \frac{a_S \sin \mu}{l_{BS}},$$

где a_S — модуль полного ускорения точки S и μ — угол, образуемый вектором a_S с направлением SB .

Подставляя полученные выражения в формулу (15.5), имеем:

$$M_B(P_n) = ma_S \left(l_{BS} + \frac{\rho^2}{l_{BS}} \right) \sin \mu = P_n \left(l_{BS} + \frac{\rho^2}{l_{BS}} \right) \sin \mu. \quad (15.6)$$

Откладываем (рис. 447) от точки B отрезок BK , равный

$$l_{BK} = l_{BS} + \frac{\rho^2}{l_{BS}} = l_{BS} + \frac{J_S}{ml_{BS}}. \quad (15.7)$$

Тогда равенство (15.6) принимает следующий вид:

$$M_B(P_n) = P_n l_{BK} \sin \mu,$$

или так как $l_{BK} \sin \mu = H$ (рис. 447), то

$$M_B(P_n) = P_n H. \quad (15.8)$$

Таким образом, силы инерции звена BC могут быть сведены к одной результирующей силе P_n , равной по величине массе звена, умноженной на модуль ускорения a_S его центра масс. Эта сила направлена в сторону, противоположную ускорению a_S , и приложена в точке K звена, положение которой определяется по формуле (15.7).

Приведение всех сил инерции звена к одной результирующей силе, приложенной в точке K , является весьма удобным при кинетостатическом расчете механизмов, излагаемом ниже.

Из формулы (15.7) следует: так как отношение ρ^2/l_{BS} всегда положительно, то точка K приложения силы инерции P_n всегда находится дальше от оси вращения звена, чем точка S .

Точка K носит название *центра качания звена*.

5°. Переходим к рассмотрению случая, когда звено имеет сложное движение.

Пусть требуется определить точку приложения или линию действия главного вектора P_n сил инерции звена BC , находящегося в сложном движении (рис. 448, *а*), если закон распределения ускорений его точек задан планом ускорений (рис. 448, *б*). Полное ускорение a_S центра тяжести S звена BC равно

$$a_S = \mu_a(\pi s), \quad (15.9)$$

где μ_a есть масштаб плана ускорений. Формула (15.9) может быть представлена так:

$$a_s = \mu_a [(\overline{\pi b}) + (\overline{bs})].$$

Таким образом, вектор (πs) может быть представлен в виде геометрической суммы векторов $(\overline{\pi b})$ и $(\overline{bs})$. Соответственно главный вектор сил инерции $P_{\text{и}}$ звена BC может быть представлен как геометрическая сумма

$$P_{\text{и}} = [-m\mu_a(\overline{\pi b})] + [-m\mu_a(\overline{bs})]. \quad (15.10)$$

Первое слагаемое этой геометрической суммы представляет собой силу инерции в переносном *поступательном* движении звена BC с ускорением, равным ускорению точки B . Второе слагаемое этой суммы представляет собой силу инерции в относительном *вращательном* движении звена вокруг точки B . Первая сила, сила инерции в поступательном движении, равная $-m\mu_a(\overline{\pi b})$ может быть приложена в центре масс S звена. Обозначим эту силу через $P'_{\text{и}}$ и приложим ее в точке S , направив противоположно ускорению a_B точки B , т. е. противоположно вектору $(\overline{\pi b})$ (рис. 448, б).

Рис. 448. Приведение сил инерции материальных точек звена, находящегося в сложном движении: а) схема звена; б) план ускорений.

Вторая сила, сила инерции во вращательном движении звена вокруг точки B , складываясь с парой сил инерции, дает результирующую силу, которая равна $-m\mu_a(\overline{bs})$ и приложена в центре качания K_0 звена в предположении, что условной точкой вращения является точка B . Положение этого центра качания определяется по формуле

$$l_{BK_0} = l_{BS} + \frac{J_S}{ml_{BS}}, \quad (15.11)$$

или по формуле

$$l_{BK_0} = \frac{J_B}{ml_{BS}}. \quad (15.12)$$

В формуле (15.11) J_S есть момент инерции звена BC относительно его центра масс S . В формуле (15.12) J_B есть момент инерции звена BC относительно точки B . В точке K_0 должна быть приложена вторая слагающая сила инерции [см. формулу (15.10)]. Эта сила направлена противоположно ускорению a_{SB} , т. е. противоположно вектору $(\overline{bs})$ плана ускорений. Обозначим эту силу через $P''_{\text{и}}$. Полная сила инерции $P_{\text{и}}$ есть геометрическая сумма сил $P'_{\text{и}}$ и $P''_{\text{и}}$, т. е.

$$P_{\text{и}} = P'_{\text{и}} + P''_{\text{и}}.$$

Так как силы $P'_{\text{и}}$ и $P''_{\text{и}}$ приложены к одному и тому же звену BC , то, продолжая их линии действия до пересечения в точке T , полу-

чаем точку, через которую проходит линия действия главного вектора сил инерции P_{ii} . Так как главный вектор сил инерции может быть определен непосредственно по формуле

$$P_{ii} = ma_S \quad (15.13)$$

то нет необходимости в раздельном определении составляющих P'_{ii} и P''_{ii} . Достаточно определить только положение точки T на звене BC . Для этого проводим через точку S прямую, параллельную вектору $(\pi \bar{b})$ плана ускорений, а через точку K_0 — прямую, параллельную вектору $(\bar{b}s)$ плана ускорений. Эти прямые являются линиями действия сил P'_{ii} и P''_{ii} . Точка пересечения T этих прямых определит точку приложения главного вектора P_{ii} сил инерции. В этой точке и может быть приложена сила P_{ii} , которая определяется по величине и направлению по формуле (15.13). Точкой приложения силы P_{ii} может быть, вообще говоря, выбрана любая точка, лежащая на прямой $n-n$ (рис. 448, а).

Иногда за точку, определяющую поступательную слагающую движения звена BC , удобнее принять не точку B , а какую-либо другую точку звена, например точку C (рис. 448, а). Тогда мы получаем некоторую *другую* точку приложения силы P_{ii} , но также лежащую на линии $n-n$. На этой же прямой $n-n$ находится и действительный центр качания звена BC — точка K , лежащая на прямой, соединяющей мгновенный центр ускорений Π с центром масс S .

6°. Ту же самую задачу об определении сил инерции звена, совершающего сложное движение, можно решить несколько иначе, не приходя всех сил инерции к одной результирующей силе, а вводя в рассмотрение силу и пару сил, создающую *добавочный* момент.

Этот метод основан на разложении сложного движения звена на поступательное с ускорением, равным ускорению центра масс S и на вращательное вокруг оси, проходящей через центр масс звена, с угловым ускорением ϵ . В этом случае, как это было показано выше, полная сила инерции P_{ii} звена, равная

$$P_{ii} = -ma_S \quad (15.14)$$

может быть приложена в его центре масс S (рис. 449). Кроме того, на звено действует пара сил инерции, момент M_{ii} который определяется по формуле

$$M_{ii} = -J_S \epsilon. \quad (15.15)$$

Величина углового ускорения ϵ определяется из плана ускорений. Для этого раскладываем полное относительное ускорение точки C звена BC относительно точки B , представленное на плане ускорений (рис. 449, б) отрезком (bc) , на нормальное ускорение в относительном движении, направленное вдоль оси звена BC , и на тангенциальное ускорение в том же относительном движении, перпендикулярное к этой оси. Вектор первого ускорения представлен на рис. 449, б отрезком (bn) ,

а вектор второго ускорения — отрезком (nc). Абсолютная величина ϵ равна

$$|\epsilon| = \frac{a_{CB}^t}{l_{BC}} = \frac{\mu_a(nc)}{l_{BC}},$$

где μ_a есть масштаб плана ускорений, а l_{BC} — длина звена BC . Направление ϵ определится, если вектор a_{CB}^t приложить в точке C звена.

В этом случае направление тангенциального ускорения a_{CB}^t точки C относительно точки B соответствует направлению углового ускорения ϵ , направленному против движения часовой стрелки.

Подставляя полученное значение ϵ в формулу (15.15), получаем окончательно

$$M_n = - \frac{J_S \mu_a(nc)}{l_{BC}}. \quad (15.16)$$

Рис 449. К вопросу о приведении сил инерции материальных точек звена к силе, приложенной в центре масс, и к паре сил, слагаемые которой приложены к концам звена.

Если динамические давления от пары сил с моментом M_n воспринимаются элементами кинематических пар B и C , то удобно этот момент представить как момент пары сил P_n^0 и $-P_n^0$, приложенных в точках B и C и направленных перпендикулярно к оси звена BC (рис. 449, а).

Величина сил P_n^0 определяется по формуле

$$P_n^0 l_{BC} = M_{nBC},$$

откуда, принимая во внимание соотношение (15.16), получаем:

$$P_n^0 = - \frac{J_S \mu_a(nc)}{l_{BC}^2}.$$

Полученная пара сил с плечом l_{BC} должна иметь момент, по знаку противоположный угловому ускорению ϵ . Таким образом, силы инерции звена BC представляются в виде трех сил: силы P_n , приложенной в центре тяжести S , и двух сил P_n^0 и $-P_n^0$, приложенных в точках B и C .

§ 69. Метод замещающих точек

1°. Вместо приведения всех сил инерции звена к силе и паре или к результирующей силе, приложенной в определенной точке этого звена, в некоторых случаях удобно заменить эти силы силами инерции масс, сосредоточенных в соответствующим образом выбранных точках, которые носят название *замещающих точек*. В этом случае определение сил инерции сводится к определению сил инерции масс,

сосредоточенных в определенных точках, и, таким образом, отпадает необходимость определения пары сил инерции и углового ускорения звена.

Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять выбранные точки, чтобы полученная система была эквивалентна первоначальной. Пусть дано звено Q (рис. 450), имеющее плоскость симметрии, параллельную плоскости движения звена. Чтобы результирующая сила инерции масс, сосредоточенных в замещающих точках, равнялась силе инерции всего звена, необходимо, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1) сумма масс, сосредоточенных в замещающих точках, должна равняться массе всего звена;

2) общий центр масс, сосредоточенных в замещающих точках, должен совпадать с центром масс звена.

Удовлетворение этих условий дает так называемое *статическое размещение массы звена*. Чтобы результирующая пара сил инерции масс, сосредоточенных в замещающих точках, была эквивалентна паре сил инерции звена, необходимо кроме соблюдения двух указанных условий удовлетворить еще третьему условию, которое сводится к тому, чтобы сумма моментов инерции масс, сосредоточенных в замещающих точках, относительно оси, проходящей через общий центр масс, равнялась моменту инерции звена относительно этой же оси. Удовлетворение этого третьего условия вместе с двумя первыми дает так называемое *динамическое размещение массы звена*.

Указанные условия статического и динамического размещений могут быть выражены следующими уравнениями:

$$\sum_{i=1}^n m_i = m, \quad (15.17)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0, \quad (15.18)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i = 0, \quad (15.19)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_S \quad (15.20)$$

В уравнениях (15.17) — (15.20) m_i — масса, сосредоточенная в замещающей точке с индексом i , m — масса всего звена, x_i и y_i — координаты i -й точки относительно осей, проходящих через центр масс, и J_S — момент инерции звена относительно оси, проходящей через точку S . Уравнения (15.17) — (15.19) соответствуют статическому

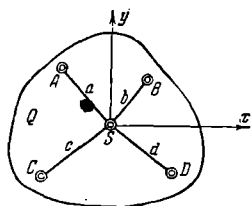


Рис. 450. К вопросу о размещении массы звена по четырем точкам.

размещению, а уравнение (15.20) вместе с уравнениями (15.17) — (15.19) — *динамическому размещению*.

Определим число параметров, которыми можно задаваться при решении уравнений (15.17) — (15.20). Искомыми являются положение каждой замещающей точки, определяемое двумя координатами, и масса, сосредоточенная в этой точке. Таким образом, для каждой точки имеем три неизвестных, подлежащих определению. Число уравнений для определения неизвестных равно четырем [уравнения (15.17) — (15.20)]. Если обозначить число выбранных точек через n , то число параметров p , которыми мы можем задаваться, будет равно

$$p = 3n - 4. \quad (15.21)$$

При заданном $n = 1$ равенство (15.21) нельзя удовлетворить. При заданном $n = 2$ получаем $p = 2$. В этом случае можно задаться, например, двумя координатами одной из точек, или может быть задана одна координата и одна масса. При $n = 3$ получаем $p = 5$, и могут быть произвольно заданы, например, положения двух точек и одна из координат третьей точки, или же положение двух точек и масса одной из точек. При $n = 4$ получаем $p = 8$. Можно в этом случае задаться положениями четырех точек или положениями трех точек и массами двух точек и т. д.

2°. Рассмотрим вопрос о выборе замещающих точек для некоторых, наиболее часто встречающихся в технических расчетах случаев распределения масс звеньев. Пусть требуется разместить массу m звена, имеющего центр масс в точке S , по *четырем* произвольно выбранным точкам A, B, C и D (рис. 450). Из уравнения (15.21) получаем, что при размещении масс по четырем замещающим точкам можно задаться восемью параметрами.

Удобно задаться восемью координатами точек A, B, C и D , т. е. положениями этих четырех точек, и определить массы, сосредоточенные в этих точках.

Уравнения (15.17) — (15.20) для этого случая имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m_A + m_B + m_C + m_D &= m, \\ m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C + m_D x_D &= 0, \\ m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C + m_D y_D &= 0, \\ m_A a^2 + m_B b^2 + m_C c^2 + m_D d^2 &= J_S \end{aligned} \right\} \quad (15.22)$$

В уравнениях (15.22) m_A, m_B, m_C и m_D суть массы, сосредоточенные в точках A, B, C и D , $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$ и x_D, y_D — координаты точек A, B, C и D в системе координатных осей x и y с началом в центре масс S , взятые с соответствующими знаками, J_S — момент инерции звена относительно оси, проходящей через точку S , и a, b, c и d — соответственно расстояния точек A, B, C и D от точки S . Массы m_A, m_B, m_C и m_D определяются совместным решением уравнений (15.22).

Рассмотрим, далее, тот случай, когда требуется разместить массу по трем точкам A , B и S (рис. 451), лежащим на одной прямой, проходящей через центр масс S звена. В этом случае координатную ось x можно совместить с прямой, на которой лежат точки A , B и S (рис. 451), а начало координат поместить в точке S . Тогда уравнения (15.17) — (15.20) напишем так:

$$m_A + m_B + m_S = m, \quad m_A a = m_B b, \quad m_A a^2 + m_B b^2 = J_S \quad (15.23)$$

В уравнениях (15.23) через a обозначено расстояние от точки A до точки S , а через b — расстояние от точки B до точки S .

Из этих уравнений получаем:

$$m_A = \frac{J_S}{al}, \quad m_B = \frac{J_S}{bl}, \quad m_S = m - \frac{J_S}{ab}, \quad (15.24)$$

где $l = a + b$.

При размещении массы звена, имеющего центр масс в точке S по двум точкам A и B (рис. 451), уравнения (15.17) — (15.20) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m_A + m_B &= m, & m_A a &= m_B b, \\ m_A a^2 + m_B b^2 &= J_S. \end{aligned} \quad (15.25)$$

Так как в рассматриваемом случае число замещающих точек равно двум, то согласно формуле (15.21) можно задаться только двумя параметрами, например координатами одной из точек.

Зададимся, например, положением точки A . Положение точки B тогда получится в результате совместного решения уравнений (15.25). Определяя из этих уравнений массы m_A и m_B , получаем:

$$m_A = \frac{m J_S}{m a^2 + J_S}, \quad m_B = \frac{m^2 a^2}{m a^2 + J_S}. \quad (15.26)$$

Положение точки B определяется ее расстоянием b от точки S . Величина b равна

$$b = \frac{J_S}{m a}. \quad (15.27)$$

Из равенства (15.27) следует, что точка B лежит на продолжении отрезка AS вправо от точки S , и ее положение совпадает с положением центра качания звена Q при условии, что центром вращения является точка A .

Таким образом, динамическое размещение масс может быть сделано по *четырем произвольным* точкам. Размещение по трем произвольным точкам может быть сделано *при условии их расположения на одной прямой с центром масс* и, наконец, размещение по *двум*

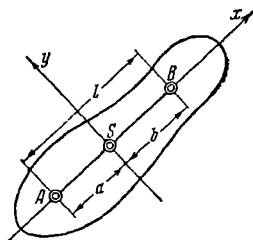


Рис. 451. К вопросу о размещении массы звена по трем точкам.

точкам может быть сделано только для *определенного положения одной из точек и условия, что обе точки и центр масс лежат на одной прямой*.

3°. В механизмах при размещении масс звеньев удобнее всего выбирать в качестве тех точек, по которым размещаются массы, оси шарниров и центры масс самих звеньев. Например, при размещении массы звена группы III класса с тремя поводками (рис. 452) в качестве точек, по которым удобно разместить массу m звена Q , могут быть выбраны точки B , C и D присоединения поводков 1, 2 и 3 и точка S — центр масс звена.

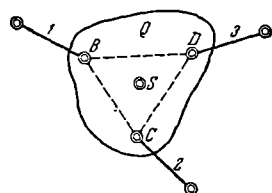


Рис. 452. К вопросу о размещении массы базисного звена трехповодковой группы.

В звеньях, у которых центр масс S расположен на оси звена (рис. 453), удобно выбирать в качестве замещающих точек

точки A и B присоединения соседних звеньев и центр масс S звена и т. п.

При решении некоторых практических задач бывает достаточно ограничиться только статическим размещением масс и удовлетворить уравнениям

$$\sum_1^n m_i = m, \quad \sum_1^n m_i x_i = 0, \quad \sum_1^n m_i y_i = 0. \quad (15.28)$$

В этом случае при размещении массы звена по двум точкам мы можем ограничиться уравнениями

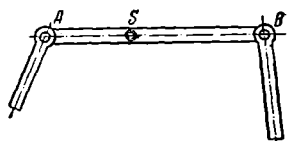


Рис. 453. К вопросу о размещении массы звена, центр масс которого располагается на прямой, проходящей через центры двух шарниров.

$$m_A + m_B = m, \quad m_A a = m_B b. \quad (15.29)$$

Из этих уравнений следует, что точки A , B и S должны лежать на одной прямой и положения точек A и B могут быть выбраны на этой прямой произвольно. Величины масс m_A и m_B равны

$$m_A = m \frac{b}{a+b} \quad \text{и} \quad m_B = m \frac{a}{a+b}.$$

При статическом размещении массы звена по трем произвольным точкам получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m_A + m_B + m_C &= m, \\ m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C &= 0, \\ m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.30)$$

Из этих уравнений следует, что точки A , B и C могут быть выбраны произвольно и статическое размещение допускает размещение массы по трем произвольным точкам. Величины этих масс могут быть определены из уравнений (15.30).

Таким образом, при статическом размещении масс можно разместить их или по *трем произвольным* выбранным точкам, или по двум точкам, но *лежащим на одной общей прямой, проходящей через центр масс*.

Пример. Определить силы инерции звеньев механизма, кинематическая схема которого показана на рис. 454, *а*. Ведущее звено *AB* имеет заданные угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ϵ_1 . Массы звеньев и их моменты инерции являются известными. Буквой *S* с соответствующими индексами обозначены центры масс звеньев. Рассмотрим перманентное движение механизма, когда ведущее звено *AB* вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 . Строим план скоростей механизма (рис. 454, *б*), а затем и план ускорений (рис. 454, *в*), предполагая, что $\omega_1 = \text{const}$. Для получения величин сил инерции отдельных звеньев умножаем величины полученных ускорений на массы соответствующих звеньев.

Если обозначим величины ускорений центров масс *S* отдельных звеньев через a_s с индексом, соответствующим номеру звена, а через *m* — массы с тем же индексом, то получим:

$$\begin{aligned} P_{и1} &= m_1 a_{S_1} = m_1 \mu_a (\pi s_1), & P_{и2} &= m_2 a_{S_2} = m_2 \mu_a (\pi s_2), \\ P_{и3} &= m_3 a_{S_3} = m_3 \mu_a (\pi s_3), & P_{и4} &= m_4 a_{S_4} = m_4 \mu_a (\pi s_4), \\ P_{и5} &= m_5 a_{S_5} = m_5 \mu_a (\pi s_5), \end{aligned}$$

где μ_a — масштаб плана ускорений. Направления полученных сил инерции определяются по плану ускорений. Сила $P_{и1}$ имеет направление, противоположное направлению a_{S_1} , сила $P_{и2}$ — направление, противоположное направлению a_{S_2} , и т. д. Для определения точек приложения результирующих сил инерции воспользуемся методами, изложенными выше.

Так как звено 1 вращается с постоянной угловой скоростью, то его сила инерции $P_{и1}$ приложена в точке S_1 (рис. 455, *а*). Звенья 3 и 5 имеют поступательное движение. Следовательно, их силы инерции $P_{и3}$ и $P_{и5}$ приложены в их центрах масс S_3 и S_5 , совпадающих с точками *C* и *D*.

Для определения точек приложения результирующих сил инерции звеньев 2 и 4, имеющих сложное движение, удобно воспользоваться методом, указанным выше. Для этого определяем положение центров

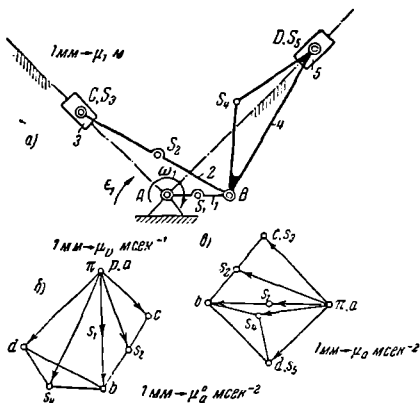


Рис. 454. Шестизвённый механизм II класса: *а*) кинематическая схема; *б*) план скоростей; *в*) план ускорений.

качания K_2 и K_4 , звеньев 2 и 4 в предположении, что точкой вращения этих звеньев служит точка B (рис. 455, б). Тогда имеем

$$l_{BK_2} = l_{BS_2} + \frac{J_2}{m_2 l_{BS_2}}, \quad l_{BK_4} = l_{BS_4} + \frac{J_4}{m_4 l_{BS_4}},$$

где J_2 и J_4 — заданные моменты инерции звеньев 2 и 4 относительно осей, проходящих через их центры масс S_2 и S_4 .

Точка приложения T_2 силы инерции $P_{и2}$ звена 2 находится на пересечении прямой, параллельной ускорению a_B точки B , проведенной через точку S_2 , с прямой, параллельной относительному ускорению a_{S_2B} точки S_2 относительно точки B , проведенной через точку K_2 (рис. 455, б). Первая прямая параллельна отрезку (πb) плана ускорений, а вторая — отрезку (bs_2) плана ускорений (рис. 454, б). Точно так же точка приложения T_4 силы инерции $P_{и4}$ звена 4 располагается на пересечении прямой, параллельной ускорению a_B точки B , проведенной через точку S_4 , с прямой, параллельной ускорению a_{S_4B} точки S_4 относительно точки B (рис. 455, б). Первая прямая параллельна отрезку (πb) плана ускорений, а вторая — отрезку (bs_4) плана ускорений (рис. 454, в). В точках T_2 и T_4 прикладываем силы $P_{и2}$ и $P_{и4}$ (рис. 455, а). Так определяются силы инерции рассматриваемого механизма по величине, направлению и линии действия.

Рис. 455. Шестизвездный механизм II класса: а) кинематическая схема с показанными на ней векторами сил инерции звеньев; б) кинематическая схема с показанными на ней центрами качаний и точками, через которые проходят линии действия сил инерции.

Применим теперь для решения задачи об определении сил инерции данного механизма метод замещающих точек. В рассматриваемом механизме (рис. 454, а) удобно разместить массы звеньев 1 и 2 на три точки, так как центры тяжести этих звеньев лежат на прямых, соединяющих центры вращательных пар.

В качестве замещающих точек удобно выбрать для звена 1 точки A , B и S_1 , а для звена 2 точки B , C и S_2 . Размещение может быть произведено по формулам для случая размещения по трем точкам, лежащим на одной прямой.

Так, для звена 1 будем иметь:

$$m_{A_1} + m_{B_1} + m_{S_1} = m_1, \quad m_{A_1} l_{AS_1} = m_{B_1} l_{BS_1}, \\ m_{A_1} l_{AS_1}^2 + m_{B_1} l_{BS_1}^2 = m_1 \rho_1^2.$$

В этих уравнениях через m_1 обозначена масса звена 1, через m с соответствующими индексами — размещенные массы и через ρ_1 —

радиус инерции звена I относительно оси, проходящей через его центр масс. Из этих уравнений получаем:

$$m_{A_1} = \frac{m_1 \rho_1^2}{I_{AS_1} I_{AB}}, \quad m_{B_1} = \frac{m_1 \rho_1^2}{I_{BS_1} I_{AB}}, \quad m_{S_1} = m_1 \left(1 - \frac{\rho_1^2}{I_{AS_1} I_{BS_1}} \right).$$

Аналогичным методом размещаем и массу звена 2. Получаем:

$$m_{B_2} = \frac{m_2 \rho_2^2}{I_{BS_2} I_{BC}}, \quad m_{C_2} = \frac{m_2 \rho_2^2}{I_{CS_2} I_{BC}}, \quad m_{S_2} = m_2 \left(1 - \frac{\rho_2^2}{I_{BS_2} I_{CS_2}} \right).$$

Масса m_{A_1} , сосредоточенная в точке A , может быть исключена из дальнейшего расчета, так как точка A имеет ускорение, равное нулю. Размещение массы звена 4 не дает никакого упрощения, так как на этом звене мы не имеем точек, по которым удобно произвести размещение. В самом деле, на звене 4 необходимо выбрать не менее четырех точек, а удобными являются только две точки — точка B и точка D .

После размещения массы звена силы инерции размещенных масс должны быть приложены в соответствующих замещающих точках, а величина их и направление определяются из ранее построенного плана ускорений. Так, например, величина силы инерции $P_{иB}$ массы m_B , полученной в результате размещения масс звеньев 1 и 2, равна

$$P_{иB} = m_B a_B = (m_{B_1} + m_{B_2}) a_B = (m_{B_1} + m_{B_2}) \mu_a (\pi b),$$

где m_{B_1} — масса, сосредоточенная в точке B , полученная от размещения массы m_1 , m_{B_2} — масса, сосредоточенная в точке B , полученная от размещения массы m_2 . Направлена эта сила противоположно ускорению a_B точки B .

Аналогично величина силы инерции $P_{иC}$ массы m_C , полученной в результате размещения массы звена 2, равна

$$P_{иC} = m_C a_C = (m_3 + m_{C_2}) a_C = (m_3 + m_{C_2}) \mu_a (\pi c),$$

где m_3 — масса звена 3, m_{C_2} — масса, сосредоточенная в точке C , полученная от размещения массы m_2 .

Определение величин и точек приложения сил инерции в начальном движении механизма, когда ведущее звено AB (рис. 456, а) вращается с заданным угловым ускорением ϵ_1 , а угловая скорость $\omega_1 = 0$, может быть сделано аналогичными приемами, как и для случая перманентного движения механизма. В качестве плана ускорений в начальном движении может быть взят в соответствующем масштабе μ_a^0 (рис. 456, а) план скоростей (рис. 454, б). Сила инерции $P_{и1}^0$ в начальном движении звена 1 может быть представлена в виде силы $P_{и1}^0$, приложенной в центре качания K_1 звена 1 (рис. 456, б), равной

$$P_{и1}^0 = m_1 \mu_a^0 (\pi_0 s_1^0)$$

и направленной в сторону, обратную ускорению a_{S_1} (рис. 456, б). Сила инерции $P_{и2}^0$, равная $P_{и2}^0 = m_2 \mu_a^0 (\pi_0 s_2^0)$, приложена в точке T_2^0

(рис. 456, б), положение которой определится, если через точку S_2 проведем направление, параллельное ускорению $(\pi \overline{b_0})$ до пересечения в точке T_2^0 с направлением, параллельным ускорению $(b_0 s_3^0)$, проведенным через точку S_3 . Сила инерции $P_{н4}^0 = m_4 a_a^0 (\pi_0 s_2^0)$ приложена в точке T_4^0 , положение которой определится, если через точку S_4 проведем напри-

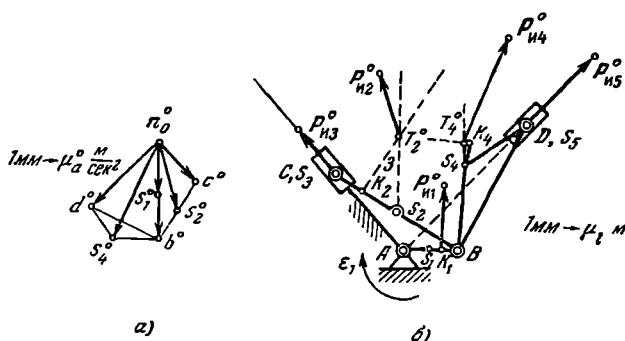


Рис. 456. К вопросу об определении сил инерции в начальном движении шестизвенного механизма: а) план ускорений; б) кинематическая схема.

вление, параллельное ускорению $(\pi \overline{b_0})$, до пересечения в точке T_4^0 с направлением, параллельным ускорению $(b_0 s_4^0)$, проведенным через точку K_4 .

Силы инерции $P_{н3}^0 = m_3 a_a^0 (\pi_0 c^0)$ и $P_{н5}^0 = m_5 a_a^0 (\pi_0 d^0)$ приложены в точках C и D .

Результирующие силы инерции механизма определяются как геометрические суммы сил инерции в перманентном и начальном движениях.

ГЛАВА XVI

КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 70. Условия статической определимости кинематических цепей

1°. При решении задач силового расчета механизмов закон движения ведущего звена предполагается заданным; точно так же предполагаются известными массы и моменты инерции звеньев механизма. Таким образом, всегда могут быть определены те силы инерции, которые необходимы для решения задач силового расчета с помощью уравнений равновесия.

Вопрос о силовом расчете механизмов начнем с рассмотрения вопроса об определении реакций в кинематических парах.

В тех случаях, когда при расчете в число заданных сил не входят силы инерции звеньев, расчёт называется статическим. Если в число заданных сил при расчете входят и силы инерции звеньев, то такой

расчет называется *кинетостатическим*. Так как метод расчета для обоих случаев один и тот же, то в дальнейшем будем предполагать, что в число заданных сил входят и силы инерции, известные нам по величине, направлению и точкам приложения. Далее, в первом приближении будем вести расчет *без учета сил трения*.

2°. Рассмотрим, как будут направлены реакции в различных кинематических парах плоских механизмов. Во вращательной паре V класса результирующая сила реакции R проходит через центр шарнира (рис. 457).

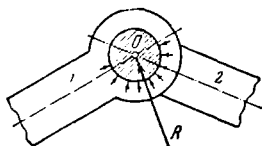


Рис. 457. Изображение вращательной кинематической пары со схематизированными конструктивными формами.

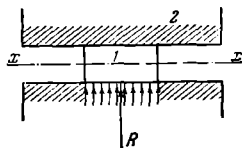


Рис. 458. Изображение со схематизированными конструктивными формами поступательной кинематической пары.

Величина и направление этой реакции не известны, так как они зависят от величины и направления заданных сил, приложенных к звеньям пары. В поступательной паре V класса (рис. 458) реакция R перпендикулярна к оси движения $x-x$ этой пары. Она известна по направлению, но не известна по точке приложения и величине. Наконец, в высшей паре IV класса (рис. 459) реакция R приложена в точке C соприкосновения и направлена по общей нормали $N-N$, проведенной к соприкасающимся профилям 1 и 2 в точке C , а для высшей пары IV класса нам известны направления реакции и ее точка приложения.

Таким образом, для определения реакции в каждой из низших пар V класса необходимо найти по две неизвестных, а для определения реакции в высшей паре IV класса — только одну неизвестную величину.

3°. Обозначим число подвижных звеньев плоской кинематической цепи через n , число пар V класса — через p_3 и число пар IV класса — через p_4 .

Составим теперь условие статической определимости плоских кинематических цепей. Так как для каждого звена, имеющего плоско-параллельное движение, можно написать три уравнения равновесия, то число уравнений, которое мы сможем составить при n звеньях, будет равно $3n$. Число неизвестных, которое необходимо определить, будет равно для пар V класса $2p_3$ и для пар IV класса p_4 . Следовательно, кинематическая цепь будет статически определима, если удовлетворяется условие

$$3n = 2p_3 - p_4. \quad (16.1)$$

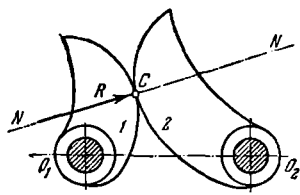


Рис. 459. Изображение высшей кинематической пары со схематизированными конструктивными формами.

Как это было показано в § 18, любой механизм с парами IV и V классов может быть заменен механизмом с парами только V класса. Поэтому для рассмотрения общего случая достаточно ограничиться рассмотрением групп, звенья которых входят только в пары V класса. Группы с парами IV класса могут быть приведены к группам с парами V класса и могут быть рассчитаны теми же методами. Тогда формула (16.1) может быть написана так:

$$3n = 2p_5,$$

откуда

$$p_5 = \frac{3}{2}n. \quad (16.2)$$

Таким образом, числа звеньев и пар связаны между собой соотношением (16.2). Так как числа n и p_5 должны быть целыми, то этому соотношению удовлетворяют следующие ряды чисел звеньев и кинематических пар:

$$n = 2, 4, 6, 8,$$

$$p_5 = 3, 6, 9, 12,$$

Как известно (см. § 22), первое сочетание звеньев и пар, т. е. два звена, входящих в три пары, представляют собой группу II класса; второе сочетание из четырех звеньев, входящих в шесть пар, представляют собой группу III класса третьего порядка или группу IV класса второго порядка и т. д. Таким образом, статически определимыми являются кинематические цепи, названные выше группами (см. § 21). Поэтому наиболее рациональным является рассмотрение методов определения реакций в кинематических парах по тем классам и порядкам групп, которые были нами установлены выше.

§ 71. Определение реакций в кинематических парах групп

1°. Пусть задана группа II класса BCD первого вида (рис. 460). Введем следующие обозначения: звено, к которому присоединяется звено BC , обозначим номером 1, звено BC — номером 2, звено CD —

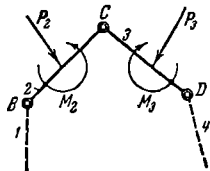


Рис. 460. Кинематическая схема двухповодковой группы первого вида.

номером 3 и звено, к которому присоединяется звено CD , — номером 4. Силу, действующую на звено с номером 1 со стороны звена с номером k , будем обозначать через P_{k1} , момент силы P_k относительно точки A — через $M_A(P_k)$, расстояние между двумя какими-либо точками A и B звена AB — через l_{AB} , и, наконец, момент пары, действующий на звено с номером k , — через M_k . Пусть группа II класса (рис. 460) нагружена силами P_2 и P_3 и парами с моментами M_2 и M_3 . Требуется определить реакции в кинематических парах.

Эта задача может быть решена *методом планов сил*. В точках B и D прикладываем неизвестные пока реакции P_{12} и P_{43} и, состав-

вляя уравнение равновесия группы BCD (рис. 461, a), приравниваем нулю сумму всех сил, действующих на группу. Имеем:

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \quad (16.3)$$

В этом уравнении нам известны силы P_2 и P_3 по величине, направлению и точкам приложения. Реакции же P_{12} и P_{43} нам известны только по точкам приложения. Для определения величин этих реакций раскладываем каждую из них на две составляющие: одну, действующую по оси звена, другую, перпендикулярную к оси звена. Будем обозначать первую составляющую реакцию индексом n , а вторую составляющую индексом t . Тогда получаем:

$$P_{12} = P_{12}^n + P_{12}^t, \quad P_{43} = P_{43}^n + P_{43}^t. \quad (16.4)$$

Величины P_{12}^t и P_{43}^t могут быть получены из уравнений равновесия, написанных для каждого из звеньев 2 и 3 в отдельности. Для этого рассмотрим сначала равновесие звена 2. Звено 2 находится под действием следующих сил и пар: силы P_2 , составляющих P_{12}^n и P_{12}^t , реакции P_{13} , реакции P_{33} и пары с моментом M_2 . Составим уравнение моментов всех сил относительно точки C . Так как знак силы P_{12}^t нам неизвестен, то при составлении уравнения момента задаемся произвольным знаком момента этой силы. Если после определения этой величины силы она окажется *отрицательной*, то ее истинное направление должно быть выбрано *противоположным*.

Имеем:

$$M_C(P_2) + M_C(P_{12}^t) + M_2 = 0.$$

В это уравнение моменты от сил P_{13} и P_{33} не входят, так как линии действия этих сил проходят через точку C , т. е.

$$M_C(P_{13}) = 0 \quad \text{и} \quad M_C(P_{33}) = 0.$$

Далее, так как $M_C(P_{12}^t) = P_{12}^t l_{BC}$, то составленное уравнение моментов принимает вид

$$M_C(P_2) + P_{12}^t l_{BC} + M_2 = 0,$$

откуда и определяем величину силы P_{12}^t . Имеем:

$$P_{12}^t = - \left[\frac{M_C(P_2)}{l_{BC}} + \frac{M_2}{l_{BC}} \right]. \quad (16.5)$$

Знак силы P_{12}^t , как было указано выше, определяется знаком правой части формулы (16.5). Аналогично из условия равновесия звена 3

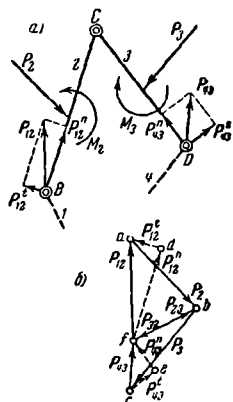


Рис. 461. Двухзвонковая группа первого вида: a) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; b) план сил.

получаем уравнение моментов

$$M_C(P_3) + M_C(P_{43}^t) + M_3 = 0,$$

так как $M_C(P_{43}^n) = 0$ и $M_C(P_{23}) = 0$. Для величины силы P_{43}^t теперь получаем:

$$P_{43}^t = - \left[\frac{M_C(P_3)}{l_{DC}} + \frac{M_3}{l_{DC}} \right]. \quad (16.6)$$

Знак силы P_{43}^t определяется знаком правой части уравнения (16.6). Полученные выражения для P_{12}^t и P_{43}^t подставляем в уравнение (16.3). Имеем:

$$P_{12}^n + P_{12}^t + P_2 + P_3 + P_{43}^n + P_{43}^t = 0.$$

В этом уравнении нам неизвестны только величины составляющих P_{12}^n и P_{43}^n реакций P_{12} и P_{43} , направленных по осям звеньев BC и DC . Величины этих составляющих могут быть определены построением плана сил. Для этого из произвольной точки a (рис. 461, б) откладываем в произвольном масштабе μ_P силу P_2 и прибавляем к ней силу P_3 . Прикладываем к ним в том же масштабе соответственно силы P_{12}^t и P_{43}^t , которые уже определены по формулам (16.5) и (16.6). Эти силы перпендикулярны к осям звеньев BC и DC . Далее, из точки d проводим прямую, параллельную оси звена BC , а из точки e — прямую, параллельную оси звена DC . Точка f пересечения этих двух прямых и определяет величины составляющих P_{12}^n и P_{43}^n .

Полные реакции P_{12} и P_{43} могут быть получены как результирующие согласно уравнениям (16.4). Первая реакция на плане сил получается, если соединить точки f и a , вторая — если соединить точки c и f . Для определения реакции P_{23} звена 2 на звено 3 напишем уравнение равновесия сил, действующих на звено 3. Имеем:

$$P_{43} + P_3 + P_{23} = 0.$$

Единственной неизвестной по величине и направлению силой в этом уравнении является сила P_{23} . Величина ее может быть получена построением по уравнению силового треугольника. Для этого на плане сил на рис. 461, б достаточно соединить точки f и b . Очевидно, что реакция P_{23} , равная по величине реакции P_{32} , но противоположная ей по знаку, может быть определена из уравнения равновесия звена 2. Имеем:

$$P_{12} + P_2 + P_{23} = 0.$$

На плане сил вектор P_{23} представлен тем же отрезком (bf) , что и реакция P_{32} , но имеет противоположное направление.

2°. Кинематическая схема группы II класса второго вида представлена на рис. 462, а. Ось x — x есть ось движения звеньев поступательной пары. На группу действуют внешние силы P_2 и P_3 и пары с моментом M_2 и M_3 . Определим реакции в кинематических парах

методом планов сил. Векторное уравнение равновесия всех сил, действующих на группу (рис. 462, а), имеет следующий вид:

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \quad (16.7)$$

Реакция P_{12} известна по направлению: она перпендикулярна к направляющей $x-x$. Точка приложения этой реакции и ее величина неизвестны. Для реакции P_{43} известна точка приложения, но не известны ни ее величина, ни направление.

Разлагаем реакцию P_{43} на две составляющие: одну P_{43}^n , направленную по оси звена DC , и вторую P_{43}^t , перпендикулярную к этой оси. Получаем:

$$P_{43} = P_{43}^n + P_{43}^t.$$

Величина силы P_{43}^t определяется из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 3, относительно точки C . Имеем:

$$M_C(P_3) + M_C(P_{43}^t) + M_3 = 0,$$

так как $M_C(P_{23}) = 0$ и $M_C(P_{43}^n) = 0$. Момент $M_C(P_{43}^t)$ равен

$$M_C(P_{43}^t) = P_{43}^t l_{DC}$$

и, следовательно,

$$P_{43}^t = - \left[\frac{M_C(P_3)}{l_{DC}} + \frac{M_3}{l_{DC}} \right].$$

Знак силы P_{43}^t определяется знаком суммы моментов $M_C(P_3)$ и M_3 . Подставляя полученное выражение для P_{43} в уравнение (16.7), получаем:

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43}^n + P_{43}^t = 0.$$

В этом уравнении неизвестны только величины сил P_{12} и P_{43}^n . Величины этих сил определяются построением плана сил. Из произвольно выбранной точки a (рис. 462, б) в выбранном масштабе μ_P откладываем силу P_3 . В том же масштабе прибавляем к ней силу P_3 . Из точки c откладываем известную силу P_{43}^t , перпендикулярную к оси звена DC , и из точки d проводим прямую в направлении силы P_{43}^n , параллельную оси звена DC . Далее, из точки a проводим прямую в направлении силы P_{12} , перпендикулярную к оси $x-x$. Точка e пересечения этих прямых определяет величины реакций P_{43} и P_{12} . Реакция P_{43} представлена в масштабе μ_P отрезком (ce) , а реакция P_{12} — отрезком (ea) . Реакция P_{23} или равная ей по величине и противоположная по направлению реакция P_{32} представлена отрезком (be) .

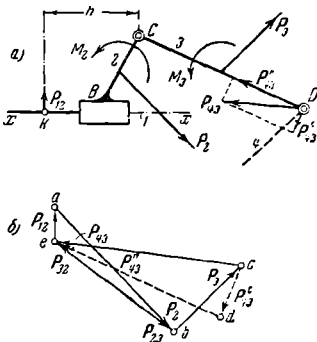


Рис. 462. Двухповодковая группа второго вида: а) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; б) план сил.

Остается еще определить точку K приложения силы P_{13} на направляющей $x-x$ (рис. 462, а). Для этого составляем уравнение моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки C . Имеем:

$$M_C(P_2) + M_C(P_{12}) + M_2 = 0,$$

так как $M_C(P_{32}) = 0$.

В этом уравнении неизвестным является только плечо h силы P_{12} (рис. 462, а), которое из этого уравнения может быть определено. Имеем:

$$h = - \left[\frac{M_C(P_2)}{P_{12}} + \frac{M_2}{P_{12}} \right]. \quad (16.8)$$

Положение плеча h относительно точки C определяется знаком правой части уравнения (16.8).

Так как ползун B (рис. 462, а) показан схематично, то точка K приложения силы P_{12} оказалась лежащей как бы вне ползуна. В действительности сила P_{12} приложена в зоне контакта звеньев 1 и 2. Если, например, ползун конструктивно выполнен в виде параллелепипеда, длина которого равна l , скользящего в направляющих $q-q$ (рис. 463), то можно перенести точку приложения силы P_{12} в точку O — центр ползуна (рис. 463). Тогда на ползун будет действовать сила P_{12} и пара сил с моментом M , равным по величине

$$M = P_{12}h',$$

где h' — расстояние от точки K до точки O — центра ползуна. Пару сил с моментом M удобно представить в виде двух сил P_{12}^0 и $-P_{12}^0$, приложенных в крайних точках N и L ползуна (рис. 463). Величина силы P_{12}^0 равна

$$P_{12}^0 = \frac{M}{l} = P_{12} \frac{h'}{l}.$$

Таким образом, ползун будет находиться под действием силы P_{12} , приложенной в точке O , и сил P_{12}^0 и $-P_{12}^0$, приложенных в точках N и L и создающих пару с моментом M .

3°. Кинематическая схема группы II класса третьего вида показана на рис. 464, а. Звенья поступательной пары имеют движение вдоль оси $x-x$. На группу действуют внешние силы P_2 и P_3 и пары с моментами M_2 и M_3 . Уравнение равновесия всех сил, действующих на группу II класса рассматриваемого вида (рис. 464, а), будет следующим:

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \quad (16.9)$$

Реакции P_{12} и P_{43} разлагаем по направлениям, параллельным оси $x-x$ и перпендикулярным к ней. Имеем:

$$P_{12} = P_{12}^n + P_{12}^t, \quad P_{43} = P_{43}^n + P_{43}^t.$$

Для определения слагающих P_{12}^t и P_{43}^t составляем уравнения равновесия каждого из звеньев 2 и 3 в отдельности. Уравнения равновесия составляем в виде уравнений проекций на ось $x-x$ всех сил, действующих на каждое из звеньев 2 и 3.

Для звена 2 имеем:

$$P_{12}^t + P_2 \cos \beta = 0. \quad (16.10)$$

В этом уравнении проекции сил P_{12}^n и P_{23} на ось $x-x$ равны нулю.

Для звена 3 имеем:

$$P_{43}^t + P_3 \cos \gamma = 0. \quad (16.11)$$

В этом уравнении проекции сил P_{43}^n и P_{23} на ось $x-x$ равны нулю. Из уравнения (16.10) и (16.11) определяем составляющие P_{12}^t и P_{43}^t . Имеем:

$$P_{12}^t = -P_2 \cos \beta \quad \text{и} \quad P_{43}^t = -P_3 \cos \gamma.$$

Подставляем полученные значения в уравнение (16.9). Имеем:

$$P_{12}^n + P_{12}^t + P_2 + P_3 + P_{43}^n + P_{43}^t = 0.$$

В написанном уравнении неизвестны только величины сил P_{12}^n и P_{43}^n . Для их определения строим план сил. Из произвольной точки a (рис. 464, б)

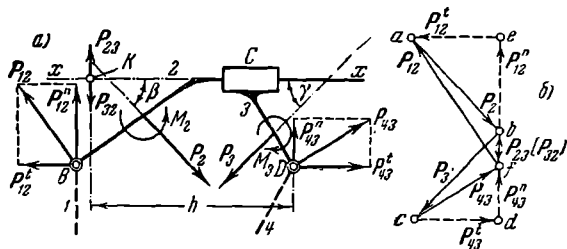


Рис. 464. Двухповодковая группа третьего вида: а) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; б) план сил.

в масштабе μ_P откладываем силу P_2 и прибавляем к ней силу P_3 . Далее откладываем известные нам силы, параллельные оси $x-x$: из точки c силу P_{43}^t , а из точки a силу P_{12}^t . Соединив точки d и e , получаем отрезок (de) , который представляет сумму сил P_{12}^n и P_{43}^n , так как эти силы параллельны. Для определения каждой из этих сил в отдельности составляем уравнение моментов сил, действующих на рассматриваемую группу, относительно точки D . Имеем:

$$M_D(P_{12}^t) + M_D(P_{12}^n) + M_D(P_2) + M_D(P_3) + M_2 + M_3 = 0. \quad (16.12)$$

Из этого уравнения определяется величина силы P_{12}^n . Отложив величину этой силы в виде отрезка (fe) на прямой de , увидим, что сила P_{43}^n будет тогда изображаться на плане сил отрезком (df) . Полная реакция P_{12} будет изображаться в масштабе μ_P отрезком (fa) , полная реакция P_{43} — отрезком

(cf) и, наконец, две равные и противоположно направленные реакции P_{23} и P_{32} — отрезком (bf).

Для определения точки K приложения силы P_{23} составляем уравнение моментов всех сил, действующих на звено 3, относительно точки D . Имеем:

$$M_D(P_{23}) + M_D(P_3) + M_3 = 0. \quad (16.13)$$

В этом уравнении $M_D(P_{43})$ равен нулю. В уравнении (16.13) неизвестным является только плечо h силы P_{23} , входящее в выражение для момента $M_D(P_{23})$. Это плечо определяем из уравнения (16.13). Имеем:

$$h = - \left[\frac{M_D(P_3)}{P_{23}} + \frac{M_3}{P_{23}} \right].$$

Так же как и для группы II класса второго вида, действие результирующей реакции P_{23} может быть заменено действием реакции P_{23} , приложенной в центре поступательной пары, и парой сил P_{23}^0 и $-P_{23}^0$ аналогично случаю, рассмотренному на рис. 463.

4°. Кинематическая схема группы II класса четвертого вида показана на рис. 465, а. Звено одной из поступательных пар движется вдоль оси $x-x$, а другой — вдоль оси $y-y$. Группа нагружена внешними силами P_2 и P_3 и парами с моментами M_2 и M_3 .

Уравнение равновесия всех действующих на данную группу сил имеет следующий вид:

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \quad (16.14)$$

В уравнении (16.14) направления реакций P_{12} и P_{43} нам известны (рис. 465, а). Реакция P_{12} перпендикулярна к оси $x-x$, реакция P_{43} — к оси $y-y$. Величины этих реакций являются неизвестными.

Определение величин этих реакций может быть сделано построением плана сил. Из произвольной точки a в выбранном масштабе μ_P откладываем силу P_2 . К силе P_2 прикладываем в том же масштабе μ_P силу P_3 . Из точки a проводим прямую в направлении реакции P_{12} , перпендикулярную к оси $x-x$, а через точку c — в направлении реакции P_{43} , перпендикулярную к оси $y-y$. Точка d пересечения этих двух прямых и определяет величины искоемых реакций. Реакция P_{12} представлена в масштабе μ_P отрезком (da), а реакция P_{43} отрезком (cd). Реакции P_{23} и P_{32} в паре C представлены отрезком (bd) и определяются из условий равновесия каждого звена в отдельности из уравнений:

$$P_{32} + P_2 + P_{12} = 0, \quad P_{23} + P_3 + P_{43} = 0.$$

Для определения точек приложения K и L реакций P_{12} и P_{43} составляем два уравнения моментов всех сил, действующих на звенья 2 и 3, относительно точки C . Имеем:

$$M_C(P_2) + M_C(P_{12}) + M_2 = 0, \quad M_C(P_3) + M_C(P_{43}) + M_3 = 0.$$

В этих уравнениях $M_C(P_{32}) = 0$ и $M_C(P_{23}) = 0$.

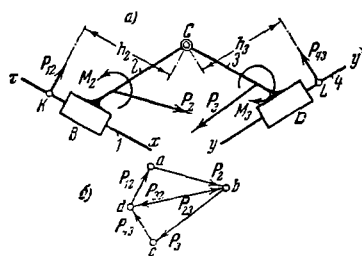


Рис. 465. Двухзвонковая группа четвертого вида: а) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; б) план сил.

Так как, далее,

$$M_C(P_{12}) = P_{12} h_2 \quad \text{и} \quad M_C(P_{43}) = P_{43} h_3,$$

то

$$h_2 = - \left[\frac{M_C(P_2)}{P_{12}} + \frac{M_2}{P_{12}} \right]$$

и

$$h_3 = - \left[\frac{M_C(P_3)}{P_{43}} + \frac{M_3}{P_{43}} \right].$$

По этим формулам определяются точки приложения K и L реакций P_{12} и P_{43} .

5°. Кинематическая схема группы II класса пятого вида показана на рис. 466, а. Звенья поступательных пар движутся вдоль осей $x-x$ и $y-y$.

Группа нагружена внешними силами P_2 и P_3 и парами сил с моментами M_2 и M_3 .

Уравнение равновесия всех действующих на рассматриваемую группу сил имеет следующий вид:

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \quad (16.15)$$

В уравнении (16.15) направления реакции P_{12} известно (рис. 466, а). Эта реакция перпендикулярна к оси $x-x$. Реакция P_{43} в точке D неизвестна ни по величине, ни по направлению. Таким образом, в уравнении (16.15) мы имеем три неизвестные величины, подлежащие определению. Для определения реакций P_{12} и P_{43} составляем уравнения равновесия звеньев 2 и 3 в отдельности. Имеем:

$$P_{12} + P_2 + P_{32} = 0 \quad \text{и} \quad P_{43} + P_3 + P_{23} = 0.$$

Так как звено 2 входит со звеньями 1 и 3 в поступательные пары, то направления реакций P_{12} и P_{32} известны: реакция P_{12} перпендикулярна к оси направляющей $x-x$, а реакция P_{32} — к оси направляющей $y-y$.

Величины этих реакций определяются построением плана сил. Из произвольной точки a (рис. 466, б) в выбранном масштабе μ_P откладываем силу P_2 и через точки a и b проводим прямые, перпендикулярные к осям $x-x$ и $y-y$. Точка c пересечения этих прямых определяет реакции P_{32} и P_{12} . Первая реакция изображается отрезком (bc) , а вторая реакция — отрезком (ca) . Определив реакцию P_{32} , можно найти реакцию P_{43} из написанного выше уравнения равновесия звена 3. Для этого от точки b откладываем заданную силу P_3 в виде отрезка (bd) и точку d соединяем с точкой c . Тогда отрезок (dc) представит собой в масштабе μ_P реакцию P_{43} . Реакция P_{23} изображается при этом ранее построенным отрезком (cb) .

Для определения точки приложения L реакции P_{12} составляем уравнение моментов всех сил, действующих на группу, относительно точки D . Имеем:

$$M_D(P_{12}) + M_D(P_2) + M_D(P_3) + M_2 + M_3 = 0. \quad (16.16)$$

В этом уравнении $M_D(P_{43}) = 0$, и величина $M_D(P_{12})$ может быть представлена так:

$$M_D(P_{12}) = P_{12} h_1.$$

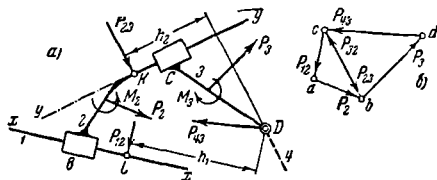


Рис. 466. Двухповодковая группа пятого вида: а) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; б) план сил.

Подставляя значения $M_D(P_{12})$ в уравнение моментов (16.16), получаем:

$$h_1 = - \frac{M_D(P_2) + M_D(P_3) + M_2 + M_3}{P_{12}}.$$

Таким образом, определяется точка приложения L реакции P_{12} . Точку K приложения реакции P_{23} или P_{32} найдем, если составим уравнение моментов всех сил, действующих на звено 2 или на звено 3, относительно какой-либо точки этих звеньев. Например, составляя уравнение моментов всех сил, действующих на звено 3, относительно точки D , получаем:

$$M_D(P_{23}) + M_D(P_3) + M_3 = 0,$$

так как $M_D(P_{43}) = 0$. Из условия $M_D(P_{23}) = P_{23}h_2$ определяем величину h_2 :

$$h_2 = - \frac{M_D(P_3) + M_3}{P_{23}}.$$

Из этого уравнения определяется точка приложения K реакции P_{23} . Реакция P_{32} равна реакции P_{23} по величине, но имеет противоположное ей направление.

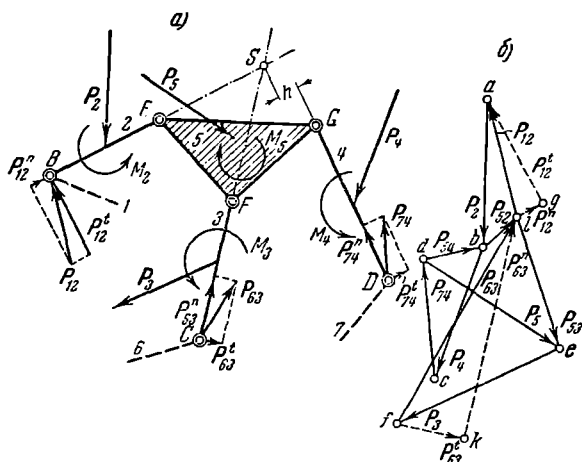


Рис. 467. Трехповодковая группа III класса: а) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; б) план сил.

6°. При определении реакций в кинематических парах групп III класса наиболее удобным является метод планов сил с использованием особых точек. К изложению этого метода мы и переходим.

Пусть задана трехповодковая группа III класса $BCDEFG$ (рис. 467, а), на которую действуют заданные силы P_2, P_3, P_4 и P_5 и пары сил с моментами M_2, M_3, M_4 и M_5 . Требуется определить реакции в кинематических парах B, C, D, E, F и G .

Разложим реакции P_{12}, P_{63} и P_{74} на две составляющие: вдоль оси соответствующего поводка и по направлению к нему перпендикулярному, и поставим своей задачей определение этих составляющих. Имеем:

$$P_{12} = P_{12}^n + P_{12}^t, \quad P_{63} = P_{63}^n + P_{63}^t, \quad P_{74} = P_{74}^n + P_{74}^t.$$

Напишем уравнение моментов всех сил, действующих на звено 2, относительно точки E . Имеем:

$$M_2 + M_E(P'_{12}) + M_E(P_2) = 0,$$

так как $M_E(P_{63}) = 0$ и $M_E(P'_{12}) = 0$. Определяем величину реакции P'_{12} :

$$P'_{12} = - \frac{M_E(P_2) + M_2}{l_{BE}}.$$

Далее, из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 3, относительно точки F определяем величину реакции P'_{63} . Имеем:

$$M_3 + M_F(P'_{63}) + M_F(P_3) = 0,$$

так как $M_F(P_{63}) = 0$ и $M_F(P'_{63}) = 0$. Отсюда

$$P'_{63} = - \frac{M_F(P_3) + M_3}{l_{CF}}.$$

Из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 4, относительно точки G определяем величину реакции P'_{74} . Имеем:

$$M_4 + M_G(P'_{74}) + M_G(P_4) = 0,$$

где $M_G(P_{84}) = 0$ и $M_G(P'_{74}) = 0$. Отсюда

$$P'_{74} = - \frac{M_G(P_4) + M_4}{l_{DG}}.$$

Далее, находим на пересечении осей каких-либо двух поводков особую точку S и составляем уравнение моментов всех сил, действующих на группу, относительно найденной точки S . Имеем:

$$M_S(P_2) + M_S(P_3) + M_S(P_4) + M_S(P_5) + M_S(P'_{12}) + \\ + M_S(P'_{63}) + M_S(P'_{74}) + M_S(P'_{74}) + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = 0. \quad (16.17)$$

В этом уравнении моменты сил P'_{12} и P'_{63} относительно точки S равны нулю. Реакции P'_{12} , P'_{63} и P'_{74} нами уже определены. Единственной неизвестной силой, входящей в уравнение (16.17), является реакция P'_{74} , момент которой относительно точки S равен $M_S(P'_{74}) = P'_{74}h$. Из (16.17) определяем величину реакции P'_{74} :

$$P'_{74} = - \frac{1}{h} [M_S(P_2) + M_S(P_3) + M_S(P_4) + M_S(P_5) + \\ + M_S(P'_{12}) + M_S(P'_{63}) + M_S(P'_{74}) + M_2 + M_3 + M_4 + M_5].$$

Определив реакцию P'_{74} , находим реакцию P_{74} как геометрическую сумму двух известных нам составляющих, т. е.

$$P_{74} = P'_{74} + P'_{74}.$$

Приравниваем, далее, нулю геометрическую сумму всех сил, действующих на группу. Имеем:

$$P'_{12} + P'_{12} + P_2 + P_4 + P_{74} + P_5 + P_3 + P'_{63} + P'_{63} = 0.$$

В этом уравнении неизвестными оказываются только величины составляющих P_{12}^n и P_{03}^n , которые и могут быть определены из уравнения построением плана сил в выбранном масштабе μ_P (рис. 467, б). Из произвольной точки a откладываем силу P_2 в виде отрезка (ab). В точке b к ней прикладываем силу P_4 в виде отрезка (bc); в точке c прикладываем силу P_{74} в виде отрезка (cd). Далее, в точке d прикладываем силу P_5 в виде отрезка (de). Наконец, в точке e прикладываем силу P_3 в виде отрезка (ef). В точках a и f прикладываем ранее определенные реакции P_{12}^f и P_{03}^f в виде отрезков (ag) и (fh) и через полученные точки g и h проводим прямые, параллельные реакциям P_{12}^n и P_{03}^n . Находим, далее, точку l пересечения этих прямых. Соединив точки a и l плана сил, получим в масштабе μ_P полную реакцию P_{12} в виде отрезка (la). Соединяя точки f и l , получаем в том же масштабе полную реакцию P_{03} в виде отрезка (fl).

Реакции P_{52} , P_{53} и P_{54} определяем из уравнений, выражающих условия равновесия отдельно взятых звеньев 2, 3 и 4. Имеем:

$$P_{12} + P_2 + P_{52} = 0, \quad P_{03} + P_3 + P_{53} = 0, \quad P_{74} + P_4 + P_{54} = 0.$$

В первом из этих уравнений неизвестной является реакция P_{52} , во втором уравнении неизвестна реакция P_{53} и в третьем уравнении реакция P_{54} . Эти реакции определяются построением дополнительных силовых треугольников. Первая реакция определится, если на плане сил соединить точки b и l ; вторая реакция определится, если соединить точки l и e , и третья реакция — если соединить точки b и d . Отрезок (bl) в масштабе μ_P представит реакцию P_{52} ; отрезок (le) в том же масштабе — реакцию P_{53} и отрезок (bd) — реакцию P_{54} . Так определяются реакции во всех кинематических парах трехпроводковой группы.

Этот метод может быть распространен на любые группы III класса, в которых могут быть найдены особые точки.

7°. Переходим к рассмотрению вопроса об определении реакций в кинематических парах групп, в состав которых входят высшие пары. Из уравнения (16.1) следует, что статическая определимость этих групп удовлетворяется, если, например, число звеньев n равно $n=1$, число p_5 пар V класса равно $p_5=1$ и число p_4 пар IV класса также равно $p_4=1$. Эта группа показана на рис. 468, а. Звено 2 входит во вращательную пару B со звеном 1 и в высшую пару E со звеном 4, выполненную в виде двух соприкасающихся кривых $p-p$ и $q-q$. Находим на нормали $n-n$, проведенной через точку E, центры кривизны C и D соприкасающихся кривых $p-p$ и $q-q$ и вводим заменяющее звено 3. Тогда имеем группу II класса BCD первого вида, аналогичную группе, показанной на рис. 461, а. Пусть звено 2 нагружено силой P_2 и парой с моментом M_2 (рис. 468, а). Реакция P_{12} может быть представлена как сумма двух составляющих

$$P_{12} = P_{12}^n + P_{12}^f.$$

Так как звено 3 является фиктивным и не нагружено внешними силами и парами, то реакция P_{43} направлена по прямой CD. Эта реакция равна реакции P_{42} :

$$P_{43} = P_{42}.$$

Таким образом, уравнение равновесия группы имеет вид

$$P_{12}^n + P_{12}^f + P_2 + P_{42} = 0. \quad (16.18)$$

В уравнении (16.18) неизвестными являются величины составляющих P_{12}^n и P_{12}^f реакции P_{12} и величина реакции P_{42} . Составляющая P_{12}^f определяется

из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 2, относительно точки C . Имеем:

$$P_{12}^t = - \left[\frac{M_C(P_3)}{l_{BC}} + \frac{M_2}{l_{BC}} \right]. \quad (16.19)$$

В этой формуле $M_C(P_{42}) = 0$.

Для определения величин составляющей P_{12}^n и реакции P_{42} строим план сил (рис. 468, б).

Для этого из произвольной точки a откладываем в некотором масштабе μ_P силу P_3 и прикладываем к ней в том же масштабе силу P_{12}^t , определенную из уравнения (16.19). Из точки c проводим прямую, параллельную

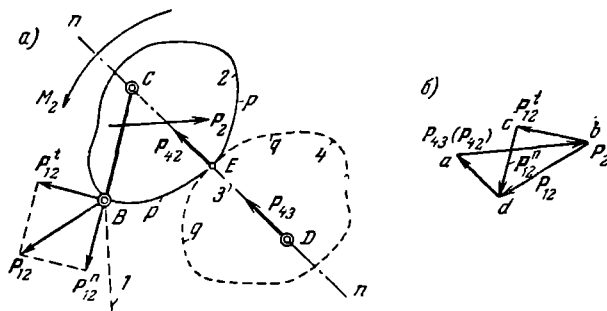


Рис. 468. Высшая кинематическая пара: а) кинематическая пара с показанными на ней силами и моментом пары сил; б) план сил.

направлению BC , а из точки a прямую, параллельную направлению DC . Точка d пересечения этих прямых определит реакции P_{42} и P_{12}^n . Полная реакция P_{12} изображается отрезком (bd).

Из рассмотренного примера видно, что кинетостатический расчет групп с высшими парами можно вести путем приведения этих групп к группам только с одними низшими парами V класса и исследования условий равновесия звена, заменяющего высшую пару. При этом в качестве точки, относительно которой составляется уравнение моментов вида (16.19), может быть выбрана любая точка, лежащая на нормали $n-n$.

§ 72. Определение реакций в кинематических парах групп с учетом сил трения

1°. В § 70 и 71 нами был рассмотрен метод определения реакций в кинематических парах в предположении, что трение в парах отсутствует.

Рассмотрим теперь, какие должны быть внесены изменения в методику изложенных расчетов, если учитываются силы трения, возникающие в кинематических парах. Начнем с решения задачи об определении реакций в парах отдельных групп, из которых образован механизм.

Рассмотрим группу II класса первого вида (рис. 469, а), нагруженную силами P_2 и P_3 . В состав группы входят три вращательные кинематические пары, и в этих парах возникают моменты M_{12}^P , M_{23}^P , M_{32}^P и M_{43}^P от сил трения. Величины этих моментов согласно формуле (14.25) равны

$$M_{12}^P = P_{13} f'_B r_B, \quad M_{23}^P = -M_{32}^P = P_{23} f'_C r_C, \quad M_{43}^P = P_{43} f'_D r_D, \quad (16.20)$$

где P_{12} , P_{23} , P_{43} — реакции в парах B , C , D ; f'_B , f'_C и f'_D — коэффициенты трения во вращательных парах; r_B , r_C и r_D — радиусы цилиндрических элементов этих пар (см. § 63). Направление этих моментов зависит от направления соответствующих скоростей относительного движения звеньев группы. Так, если угловая скорость ω_{21} звена 2 относительно звена 1 направлена по часовой стрелке (рис. 469, а), то момент M_{12}^{TP} при рассмотрении равновесия звена 2 должен быть направлен противоположно вращению часовой стрелки. Если угловая скорость ω_{32} звена 2 относительно звена 3 имеет направление, противоположное вращению часовой стрелки, то знак момента M_{32}^{TP} при рассмотрении равновесия звена 2 должен соответствовать

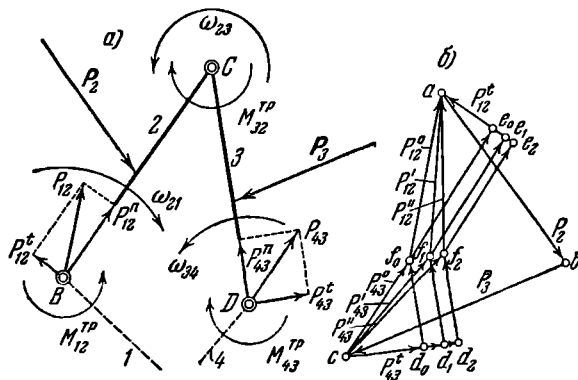


Рис. 469. Двухповодковая группа первого вида: а) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; б) план сил.

направлению вращения часовой стрелки и т. д. Естественно, что при рассмотрении равновесия звена 3 знак момента M_{23}^{TP} противоположен знаку того же момента при рассмотрении равновесия звена 2, так как

$$\omega_{32} = -\omega_{23} \quad \text{и} \quad M_{23}^{TP} = -M_{32}^{TP}.$$

Векторное уравнение равновесия сил, действующих на группу, имеет следующий вид:

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0$$

или

$$P_{12}^a + P_{12}^t + P_2 + P_3 + P_{43}^a + P_{43}^t = 0,$$

где P_{12}^a , P_{12}^t , P_{43}^a и P_{43}^t — соответствующие составляющие реакций P_{12} и P_{43} (рис. 469, б).

Для определения величин составляющих P_{12}^t и P_{43}^t составляем уравнения моментов всех сил, действующих на звенья 2 и 3. Имеем:

$$M_C(P_{12}^t) + M_C(P_2) + M_{12}^{TP} + M_{32}^{TP} = 0, \quad (16.21)$$

$$M_C(P_{43}^t) + M_C(P_3) + M_{43}^{TP} + M_{23}^{TP} = 0. \quad (16.22)$$

В уравнения (16.21) и (16.22) входят моменты трения, которые определяются из уравнений (16.20), но так как реакции P_{12} , P_{23} и P_{43} неизвестны и подлежат определению, то из уравнений (16.21) и (16.22) не могут быть

непосредственно определены и составляющие P'_{12} и P'_{43} . Таким образом, задача сводится к совместному решению всех шести уравнений равновесия, которые в общем случае могут быть составлены для звеньев 2 и 3. Совместное решение такой системы уравнений приводит к чрезвычайно громоздким вычислениям, поэтому для практических расчетов лучше применять способ последовательных приближений, к изложению сущности которого мы и перейдем.

2°. Предположим в первом приближении, что моменты сил трения равны нулю $M_{12}^{TP} = 0$; $M_{23}^{TP} = -M_{32}^{TP} = 0$ и $M_{43}^{TP} = 0$.

Тогда задача сводится к ранее рассмотренному в § 71 случаю расчета группы без учета сил трения в кинематических парах. Указанными там методами находим составляющие P'_{12} и P'_{43} и строим план сил (рис. 469, б). Пусть на этом плане сил полученные реакции в парах B , C и D соответственно равны P'_{12} , P'_{23} и P'_{43} . На рис. 469, б реакция P'_{23} не показана, чтобы не затемнять чертежа. Полученные значения реакций P'_{12} , P'_{23} и P'_{43} подставляем в формулы (16.20). Имеем:

$$(M_{12}^{TP})' = P'_{12} f_B r_B, \quad (M_{23}^{TP})' = - (M_{32}^{TP})' = P'_{23} f_C r_C, \quad (M_{43}^{TP})' = P'_{43} f_D r_D.$$

Эти новые значения моментов трения подставляем в уравнения (16.21) и (16.22) и определяем из них новые значения величин составляющих $(P'_{12})'$ и $(P'_{43})'$. Вновь полученные величины этих составляющих, очевидно, отличаются от тех, которые были получены в предположении равенства нулю моментов трения. Поэтому если в первом случае конец вектора силы P'_{43} находился в точке d_0 , то теперь он будет находиться в некоторой другой точке d_1 . Точно так же начало вектора силы P'_{12} будет находиться не в точке e_0 , а в точке e_1 . Проведя прямые в направлениях составляющих $(P'_{12})'$ и $(P'_{43})'$, найдем, что конец вектора силы P'_{43} , начало вектора силы P'_{12} и начало вектора силы P'_{23} будут находиться не в точке f_0 , а в точке f_1 . Таким образом, будет построен второй план сил, из которого определятся новые значения P'_{12} , P'_{23} и P'_{43} реакций в парах B , C и D .

Для еще большего уточнения величин реакций в парах можно снова повторить проведенный расчет, для чего полученные значения P'_{12} , P'_{23} и P'_{43} надо снова подставить в формулы (16.20), определить новые значения моментов трения $(M_{12}^{TP})''$, $(M_{23}^{TP})''$, $(M_{32}^{TP})''$ и $(M_{43}^{TP})''$ и их в свою очередь подставить в уравнения (16.21) и (16.22). Тогда будут определены новые значения составляющих $(P'_{12})''$ и $(P'_{43})''$, и может быть построен новый план сил (рис. 469, б), в котором мы получим соответственно точки d_2 , e_2 , f_2 и, следовательно, определим новые реакции P'_{12} , P'_{23} и P'_{43} . Указанный процесс может быть продолжен и дальше, но практически вполне достаточно бывает ограничиться вторым или даже первым приближением и найти силы P'_{12} , P'_{23} и P'_{43} или только P'_{12} , P'_{23} и P'_{43} .

3°. Аналогично решаются задачи определения реакций в кинематических парах, если одна или две пары — поступательные. В качестве примера рассмотрим группу II класса второго вида (рис. 470, а), нагруженную силами P_2 и P_3 .

В отличие от рассмотренной выше группы в поступательной паре D к звену 3 приложен не момент трения, а сила трения F_{43} , величина которой равна

$$F_{43} = P_{43} f_D, \quad (16.23)$$

где f_D — коэффициент трения в поступательной паре D . Сила трения F_{43} направлена противоположно скорости v_{34} звена 3 относительно звена 4.

Векторное уравнение равновесия сил, действующих на группу, имеет следующий вид:

$$P_{12}^n + P_{12}^t + P_2 + P_3 + F_{43} + P_{43} = 0. \quad (16.24)$$

Уравнения моментов сил, действующих на звенья 2 и 3, имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} M_C(P_{12}^t) + M_C(P_2) + M_{12}^{TP} + M_{32}^{TP} &= 0, \\ M_C(P_{43}) + M_C(P_3) + M_C(F_{43}) + M_{23}^{TP} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.25)$$

Предполагая в первом приближении $M_{12}^{TP} = 0$, $M_{32}^{TP} = 0$, $M_{23}^{TP} = 0$ и $M_C(F_{43}) = 0$ при $F_{43} = 0$, определяем из уравнений (16.23) величины сил P_{12}^t и P_{43} и строим известным способом план сил (рис. 470, б), из которого определяются реакции P_{12}^0 , P_{23}^0 и P_{43}^0 . Подставляя полученные значения реакций в формулы (16.20) и в формулу (16.23), получаем:

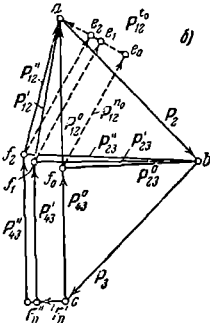
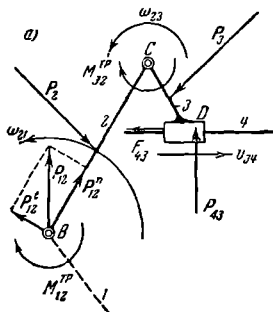


Рис. 470. Двухповодковая группа второго вида: а) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; б) план сил.

значения величин сил P_{12}^t , P_{23}^t и P_{43}^t и снова строим план сил и т. д. На рис. 470, б показано построение трех планов сил и соответствующих им сил F_D' и F_D'' . Так же как и в ранее рассмотренном случае, практически вполне достаточно определить силы P_{12}^t , P_{23}^t и P_{43}^t .

Указанный метод может быть распространен на группы всех классов с любым сочетанием вращательных, поступательных, а также высших пар. Метод является приближенным и может применяться только в тех случаях, когда имеет место процесс сходимости и каждое последующее приближение дает меньшее изменение приращения силы или момента, чем предыдущее. Для тех же целей можно применять введенные выше понятия об углах и кругах трения (см. § 61 и 63).

§ 73. Кинетостатический расчет ведущего звена механизма

1°. Рассмотрим теперь, как может быть определена в общем случае реакция в кинематической паре, в которую входит со стойкой ведущее звено. Это звено обычно входит с неподвижным звеном (стойкой) или в поступательную пару V класса или во вращательную пару V класса. Поэтому рассмотрим оба эти случая отдельно. Из формулы (16.1) следует, что под действием произвольно приложенных к нему сил, в том числе и сил инерции, ведущее звено не находится в равновесии, так как при числе подвижных звеньев, равном

$$\begin{aligned} (M_{12}^{TP})' &= P_{12}^0 f_B' r_B, \\ (M_{23}^{TP})' &= - (M_{32}^{TP})' = P_{23}^0 f_C' r_C, \\ (F_{43})' &= P_{43}^0 f_D. \end{aligned}$$

Полученные значения

для $(M_{12}^{TP})'$, $(M_{23}^{TP})'$, $(M_{32}^{TP})'$ и $(F_{43})'$ подставляем в уравнения (16.24) и (16.25), из которых определяем новые

единице, и числе пар V класса, равном также единице, число уравнений равновесия, которое мы можем составить, на единицу больше числа неизвестных, подлежащих определению, т. е.

$$3n - 2p_3 = 3 - 2 = 1.$$

Чтобы имело место равновесие, необходимо дополнительно ввести силу или пару, уравнивающую все силы, приложенные к ведущему звену. Эта сила и момент пары носят название *уравнивающей силы и уравнивающего момента*. Условимся уравнивающую силу обозначать через P_y , а уравнивающий момент — через M_y . Рассмотрим вопрос о том, какие же силы и моменты будут в машинах уравнивающими.

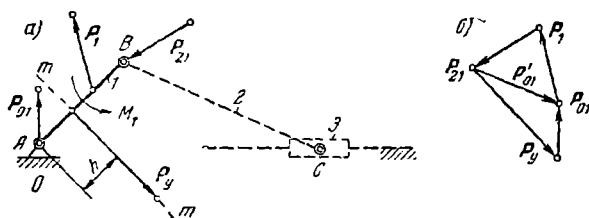


Рис. 471. Кривошипно-ползуновый механизм: а) кинематическая схема с приложенными к ведущему звену силами; б) план сил.

Предположим, что рассматривается задача о силовом расчете кривошипно-ползунового механизма одноцилиндрового поршневого двигателя, приводящего во вращения какую-либо рабочую машину. Если в качестве ведущего звена выбран кривошип 1 (рис. 471, а) двигателя, то присоединяемая группа II класса будет состоять из шатуна 2 и поршня 3. После силового расчета этой группы определится реакция шатуна 2 на кривошип 1 — сила P_{31} . Кроме того, кривошип находится под действием силы P_1 и пары сил с моментом M_1 , представляющих собою результирующие от внешних нагрузок и сил инерции. Под действием этих сил и реакции P_{01} стойки кривошип в общем случае не будет находиться в равновесии. Для равновесия необходимо приложить уравнивающую силу P_y или уравнивающий момент M_y . Этими уравнивающими силой и моментом являются реактивные силы или момент от той рабочей машины, которая приводится в движение рассматриваемым двигателем. Если коленчатый вал двигателя и главный вал рабочей машины соединены посредством муфты, то мы будем иметь в качестве уравнивающего момента, приложенного к валу двигателя, реактивный момент сил сопротивления рабочей машины. Если коленчатый вал двигателя соединен с главным валом рабочей машины посредством зубчатой передачи, то мы будем иметь в качестве уравнивающей силы, приложенной к зубчатому колесу, сидящему на валу двигателя, реактивную силу рабочей машины. Очевидно, что эта реактивная сила,

если пренебречь трением в сопряженных профилях зубьев, будет направлена по нормали к профилям сопряженных зубьев зубчатой передачи. Таким образом, линия действия уравнивающей силы полностью определяется конструкцией передаточного механизма от двигателя к рабочей машине. Обратно, при силовом расчете рабочей машины уравнивающими силой или моментом будут реактивная сила или момент от двигателя.

2°. Пусть ведущее звено I (рис. 471, а) входит с неподвижным звеном 0 во вращательную пару A и на это звено действует сила P_{21} , представляющая собой реакцию звена 2 на звено 1, заданная сила P_1 и пара сил с моментом M_1 .

Для определения величины уравнивающей силы необходимо найти ее линию действия. Это может быть сделано, если рассмотреть конструкцию механизма, связывающего звено I с звеном той машины, которая приводится в движение от звена I или от которой звено I само приводится в движение. Пусть линией действия уравнивающей силы P_y будет прямая $m-m$. Тогда величина момента $M_A(P_y)$ уравнивающей силы определится из уравнения моментов всех сил, действующих на звено относительно точки A . Имеем:

$$M_A(P_y) + M_A(P_1) + M_A(P_{21}) + M_1 = 0,$$

так как $M_A(P_{01}) = 0$. Отсюда получаем значение момента $M_A(P_y)$:

$$M_A(P_y) = -[M_A(P_1) + M_A(P_{21}) + M_1]. \quad (16.26)$$

Знак момента $M_A(P_y)$ определится значениями и знаками моментов $M_A(P_1)$, $M_A(P_{21})$ и M_1 . Величина уравнивающей силы P_y определится из условия

$$P_y h = M_A(P_y),$$

где h есть известное плечо уравнивающей силы P_y (рис. 471, а). Тогда имеем:

$$P_y = - \frac{[M_A(P_1) + M_A(P_{21}) + M_1]}{h}.$$

Так как величина и направление силы P_y теперь нам известны, то реакция P_{01} в кинематической паре A определится из векторного уравнения

$$P_y + P_{01} + P_1 + P_{21} = 0. \quad (16.27)$$

Графическое решение этого уравнения показано на рис. 471, б.

Если уравнивающей будет не сила, а пара сил, то величина уравнивающего момента M_y определится из уравнения, аналогичного уравнению (16.26). Имеем:

$$M_y = -[M_A(P_1) + M_A(P_{21}) + M_1].$$

Реакция P'_{01} в кинематической паре A определится из векторного уравнения

$$P_1 + P_{21} + P'_{01} = 0. \quad (16.28)$$

План сил для определения реакции P'_{01} показан на рис. 471, б.

3°. Предположим, далее, что ведущее звено I входит с неподвижным звеном в поступательную пару A (рис. 472, а). Тогда реакция P_{01} в паре A оказывается направленной перпендикулярно к оси движения этой поступательной пары. Пусть уравнивающая сила P_y направлена по линии действия $m-m$. Величина силы P_y определяется из уравнения (16.27).

В этом уравнении силы P_1 и P_{21} заданы, а сила P_{01} и P_y известны по направлению. Графическое решение этого уравнения показано на рис. 472, б.

Для определения точки N приложения реакции P_{01} составляем уравнение моментов всех сил относительно точки K приложения силы P_{21} . Имеем:

$$M_K(P_y) + M_K(P_1) + M_K(P_{01}) + M_1 = 0.$$

В этом уравнении неизвестно только плечо h силы P_{01} , которое и может быть определено. Имеем:

$$h = - \frac{[M_K(P_1) + M_K(P_y) + M_1]}{P_{01}}.$$

Направление, в котором должен быть отложен отрезок h , зависит от величины и знаков моментов M_1 , $M_K(P_y)$ и $M_K(P_1)$.

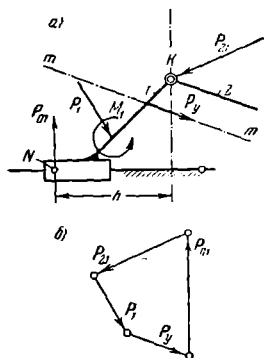


Рис. 472. Ведущее звено, входящее в поступательную пару со стойкой: а) кинематическая схема с показанными на ней силами; б) план сил.

§ 74. Силовой расчет механизмов

1°. Силовой расчет механизмов состоит в определении усилий, действующих на отдельные звенья и кинематические пары механизма.

При силовом расчете механизм расчленяется на отдельные группы согласно принятой классификации. При этом расчленении механизма необходимо учитывать порядок расчленения групп. Порядок силового расчета отсоединенных групп является *обратным* порядку кинематического исследования, т. е. силовой расчет начинается с расчета *последней*, считая от ведущего звена, присоединенной группы и кончается расчетом ведущего звена. Например, если задан механизм III класса (рис. 473) с ведущим звеном AB , нагруженный внешними силами $P_1, P_2, P_3, \dots$, причём в число этих внешних сил включены силы тяжести и силы инерции этих звеньев, а также внешними парами сил с моментами $M_1, M_2, M_3, \dots$, то расчет следует начинать с двух-

поводковой группы II класса LKC как самой крайней. Далее, надо перейти к расчету трехповодковой группы III класса $BDEFGH$ и, наконец, к расчету ведущего звена AB . Стойка механизма принята за нулевое звено.

Итак, начинаем расчет с двухповодковой группы II класса LKC , нагруженной внешними силами P_3 и P_4 и парами с моментами M_3 и M_4 . Изложенным выше методом планов сил (§ 71,1°) определяем реакции P_{04} и P_{43} и P_{23} в парах L , K и C . Далее, ведем расчет трехповодковой группы III класса $BDEFGH$. Для этого кроме приложенных к ней внешних сил P_2 , P_5 , P_6 и P_7 , моментов M_2 , M_5 , M_6 и M_7 и реакций P_{12} , P_{06} и P_{07} прикладываем в точке C реакцию P_{23} , равную по величине и противоположную по направлению реакции P_{23} , которая была определена при расчете двухповодковой группы LKC . При расчете трехповодковой группы $BDEFGH$ кроме реакций P_{06} и P_{07} определяется и реакция P_{12} . Прикладываем к ведущему звену A равную ей по величине и противоположно направленную силу P_{21} . Расчет звена AB ведем методом, указанным в § 72, прикладывая к этому звену уравновешивающий момент.

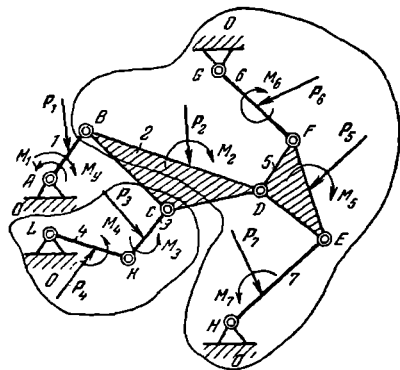


Рис. 473. К вопросу о последовательности силового расчета сложного механизма.

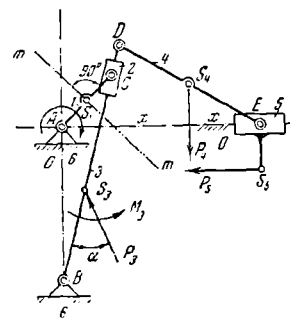


Рис. 474. Кинематическая схема кулисного механизма с показанными на ней силами.

Рассматриваемый кулисный механизм представляет собой механизм II класса и состоит из двух групп II класса: группы третьего вида (группа, состоящая из звеньев 2 и 3) и группы второго вида (группа, состоящая из звеньев 4 и 5).

Определение реакций в кинематических парах начинаем с последней в порядке присоединения группы, состоящей из звеньев 4 и 5. Для

2°. В качестве примера проведем силовой расчет кулисного механизма с ведущим звеном I , показанного на рис. 474. Требуется определить реакции в кинематических парах от силы P_5 , приложенной в точке S_5 звена 5, силы P_4 , приложенной в точке S_4 звена 4, силы P_3 , приложенной в точке S_3 звена 3, и пары сил с моментом M_3 , приложенной к тому же звену. Сила P_3 образует с направлением BD угол α . Сила P_5 параллельна оси $x-x$, а сила P_4 перпендикулярна к ней. Линия действующей силы P_y проходит через точку S_1 звена I перпендикулярно к его оси.

Рассматриваемый кулисный механизм представляет собой механизм II класса и состоит

этого разлагаем реакцию P_{34} (рис. 475, а), действующую в паре D , на составляющие P_{34}^n и P_{34}^t . Имеем:

$$P_{34} = P_{34}^n + P_{34}^t.$$

Составляем, далее, уравнение моментов всех сил, действующих на звено 4, относительно точки E (рис. 475, а)

$$M_E(P_{34}^t) + M_E(P_4) = 0,$$

откуда получаем:

$$P_{34}^t = \frac{P_4 h_4}{l_{DE}},$$

где h_4 — плечо силы P_4 относительно точки E .

Составляем, далее, общее уравнение равновесия всей группы, приравнявая нулю сумму всех сил, действующих на группу

$$P_{34}^n + P_{34}^t + P_4 + P_5 + P_{05} = 0.$$

Силы P_4 , P_5 и P_{34}^t нам известны. Силы P_{34}^n и P_{05} известны по направлению. Сила P_{34}^n параллельна оси DE звена 4, сила P_{05} перпендикулярна к оси $x-x$.

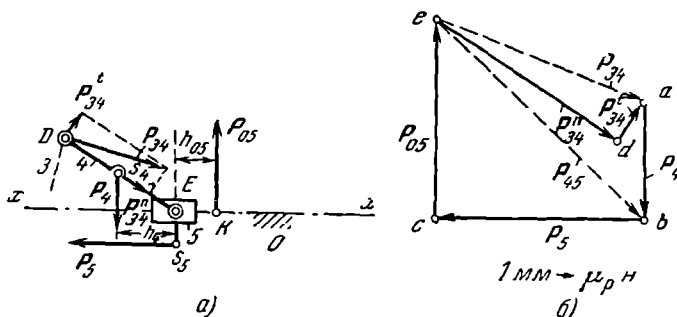


Рис. 475. Двухзвонковая группа 4—5 механизма, изображенного на рис. 474: а) кинематическая схема группы 4—5; б) план сил.

Для определения величин сил P_{34}^n и P_{05} строим в произвольно выбранном масштабе μ_p план сил (рис. 475, б). Для этого из точки d откладываем силу P_{34}^t в виде отрезка (da). К силе P_{34}^t прикладываем силу P_4 в виде отрезка (ab) и к ней прикладываем силу P_5 в виде отрезка (bc). Через точку c проводим прямую в направлении силы P_{05} , т. е. перпендикулярно к оси $x-x$, а через точку d — в направлении силы P_{34}^n , т. е. параллельно направлению DE звена 4. Точка e пересечения этих прямых определяет начало вектора силы P_{34}^n и конец вектора силы P_{05} . Соединив точку e с точкой a , получим силу P_{34} в виде отрезка (ea). Реакция P_{45} в виде отрезка (eb) определится, если соединить точки e и b .

Точку K приложения силы P_{05} (рис. 475, а) найдем из уравнения моментов всех сил, действующих на звене 5, относительно точки E . Имеем:

$$M_E(P_5) + M_E(P_{05}) = 0,$$

откуда получаем величину плеча $h_{05} = EK$ (рис. 475, а) силы P_{05} относительно точки E

$$h_{05} = - \frac{M_E(P_5)}{P_{05}}.$$

Если заданы конструктивные размеры ползуна 5, то необходимо силу P_{03} привести к центру E ползуна, как это было показано на рис. 463 (§ 71).

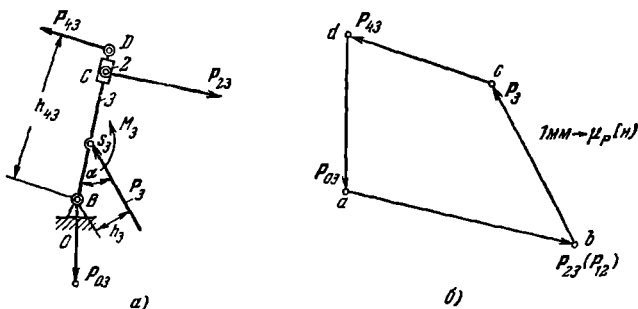


Рис. 476. Двухповодковая группа 2—3 механизма, изображенного на рис. 474: а) кинематическая схема группы 2—3; б) план сил.

Переходим, далее, к рассмотрению группы, состоящей из звеньев 2 и 3 (рис. 476, а). На эту группу действует внешняя сила P_{43} , приложенная к точке D , равная по величине и противоположная по направлению силе P_{34} , сила P_3 , приложенная в точке S_3 , и пара с моментом M_3 .

Рассмотрим равновесие звена 3. Так как звено 2 не нагружено, то реакция P_{23} оказывается приложенной в точке C и направлена перпендикулярно к направлению BD звена 3.

Величина силы P_{23} определяется из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 3, относительно точки B

$$M_B(P_{43}) + M_B(P_{23}) + M_B(P_3) + M_3 = 0,$$

так как $M_B(P_{03}) = 0$. Из этого векторного уравнения определяем величину силы P_{23} :

$$P_{23} = - \left[\frac{P_{43}h_{43}}{l_{BC}} + \frac{P_3h_3}{l_{BC}} + \frac{M_3}{l_{BC}} \right],$$

где h_3 и h_{43} — плечи сил P_3 и P_{43} относительно точки B . После определения силы P_{23} можно найти силу P_{03} , приравняв нулю сумму всех сил, действующих на звено 3,

$$P_{23} + P_3 + P_{43} + P_{03} = 0.$$

Решаем графически это уравнение. Из точки a (рис. 476, б) откладываем в масштабе μ_P силу P_{23} в виде отрезка (ab) и к ней прикладываем силу P_3 в виде отрезка (bc). Далее, из точки c откладываем силу P_{43} в виде отрезка (cd). Отрезок (da) представляет силу P_{03} . Сила P_{13} равна по величине и противоположно направлена силе P_{33} , потому что $P_{13} + P_{33} = 0$.

Далее, рассматриваем равновесие ведущего звена I (рис. 477, а). На него действует сила P_{21} , равная по величине и противоположно направленная силе P_{13} . Линия действия уравнивающей силы P_y

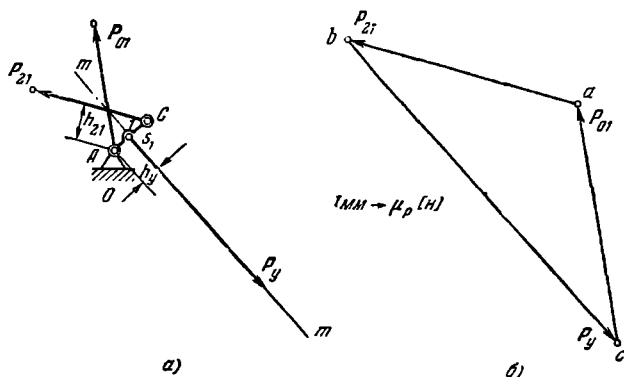


Рис. 477. Ведущее звено I механизма, изображенного на рис. 474: а) кинематическая схема звена I ; б) план сил.

задана прямой $m-m$, перпендикулярной к направлению AC звена I (рис. 477, а). Величина уравнивающей силы P_y определяется из уравнения

$$M_A(P_y) + M_A(P_{21}) = 0,$$

откуда

$$P_y = -\frac{P_{21}h_{21}}{h_y},$$

где h_{21} и h_y — плечи сил P_{21} и P_y относительно точки A .

Для определения реакции P_{01} в паре A решаем графически (рис. 477, б) векторное уравнение равновесия всех сил, действующих на ведущее звено I ,

$$P_{21} + P_y + P_{01} = 0.$$

Из точки a откладываем в масштабе μ_P силу P_{21} в виде отрезка (ab) и к ней прикладываем силу P_y в виде отрезка (bc). Отрезок (ca) представляет собой силу P_{01} .

3°. Для механизмов с парами IV класса силовой расчет может быть произведен методами, изложенными в § 71, если предварительно механизм привести к механизму с парами только V класса.

Пусть дан кулачковый механизм с парами IV класса (рис. 478) с приложенными к нему внешними силами P_2 и P_3 и парой с моментом M_2 . Требуется определить реакции в кинематических парах и величину уравнивающего момента M_1 , приложенного к кулачку 1. Приводим механизм к механизму с парами V класса (рис. 479). Буквами O_1 и O_2 обозначены центры кривизны профилей звеньев 1 и 2 в точке их соприкосновения. При ведущем звене 1 полученный механизм представляет собой механизм II класса. В его состав входят две группы II класса. Первая группа составлена из звеньев 4 и 2 и трех вращательных кинематических пар в точках O_1 , O_2 и B . Вторая группа

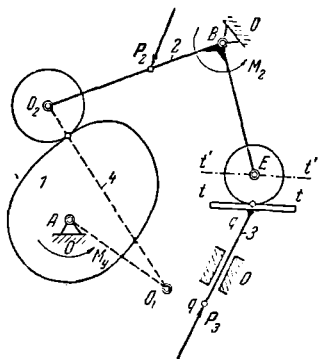


Рис. 478. Схема рычажно-кулачкового механизма с показанными на ней силами.

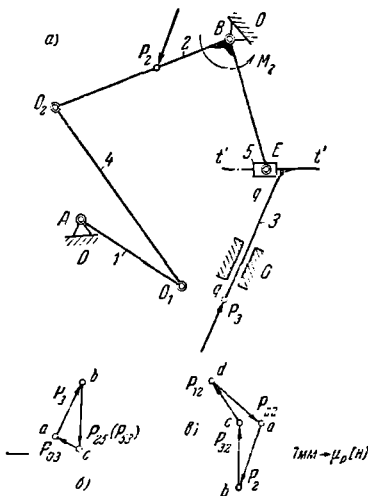


Рис. 479. Механизм, заменяющий кулачковый механизм, изображенный на рис. 478: а) кинематическая схема; б) план сил группы 3—5; в) план сил группы 2—4.

II класса составлена из звеньев 3 и 5, одной вращательной кинематической пары E и двух поступательных кинематических пар с осями $t'-t'$ и $q-q$. Расчет необходимо вести, начиная со второй группы II класса. В этой группе нагруженным силой P_3 является звено 3. Звено 5 как фиктивное не нагружено. Таким образом, звено 3 находится под действием силы P_3 реакции P_{63} , направленной перпендикулярно к оси $t'-t'$ направляющей, и реакции P_{03} , направленной перпендикулярно к оси $q-q$. Для определения реакций $P_{25} = P_{63}$ и P_{03} воспользуемся уравнением равновесия сил, действующих на группу 3—5:

$$P_3 + P_{25} + P_{03} = 0;$$

построением плана сил (рис. 479, б) определяются реакции P_{03} и P_{25} . Реакция $P_{25} = P_{63}$ вследствие отсутствия нагрузки на звене 5 проходит через точку E перпендикулярно к прямой $t'-t'$. Для расчета группы O_1O_2B прикладываем к звену 2 в точке E силу P_{32} , равную по величине и противоположную по направлению силе P_{25} . Таким

образом, звено 2 этой группы будет нагружено силами P_2 и P_{32} и моментом M_2 . Звено 4 как фиктивное не нагружено. Реакция P_{42} вследствие отсутствия внешней нагрузки у звена 4 направлена по оси O_1O_2 этого звена. Из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 2, относительно точки B определяется реакция P_{42} , равная реакции P_{12} :

$$P_{42} = P_{12} = - \left[\frac{M_B(P_2) + M_B(P_{32})}{h} + \frac{M_2}{h_{42}} \right],$$

где h_{42} — плечо силы P_{42} относительно точки B .

После этого из уравнения равновесия сил, действующих на звено 2,

$$P_2 + P_{32} + P_{12} + P_{02} = 0$$

построением плана сил (рис. 479, в) определяется реакция P_{02} . Ведущее звено 1 нагружено силой $P_{21} = -P_{12}$ и уравнивающим моментом M_y .

Величина уравнивающего момента M_y определяется из уравнения моментов

$$M_y + M_A(P_{21}) = 0$$

или

$$M_y = -M_A(P_{21}).$$

Реакция P_{01} тогда определяется из уравнения

$$P_{01} + P_{21} = 0$$

или

$$P_{01} = -P_{21}.$$

Из рассмотренного примера следует, что приведение кулачкового механизма к механизму с парами только V класса не является обязательным, т. к. реакции в высших парах согласно § 70 можно принимать направленными по нормальям к элементам высших пар в точке соприкосновения.

4°. Переходим к рассмотрению силового расчета зубчатых механизмов с круглыми цилиндрическими колесами. На рис. 480, а показан простейший трехзвенный механизм, радиусы начальных окружностей колес которого соответственно равны r_1 и r_2 . Будем в дальнейшем предполагать, что центры масс колес лежат всегда на их осях, и таким образом, колеса уравновешены. Тогда центробежные силы инерции колес оказываются равными нулю и при неравномерном вращении колес могут возникать только дополнительные пары от сил инерции, моменты которых определяются по формуле (15.2) (см. § 68).

Пусть ведущим колесом, к которому приложен уравнивающий момент M_y , является колесо 1, а ведомым, к которому приложен момент M_2 , — колесо 2. Момент M_2 представляет собой результирующий момент от внешних сил и пары сил инерции. Строим картину скоростей механизма (рис. 480, б) и по направлению вектора v_C скорости точки C определяем направления угловых скоростей ω_1 и ω_2 колеса 1

и колеса 2. Направление действия момента M_y должно совпадать с направлением угловой скорости ω_1 , так как колесо 1 является ведущим. Направление действия момента M_2 должно быть противоположным направлению угловой скорости ω_2 , потому что колесо 2 является ведомым. Где бы ни происходило соприкосновение профилей q_1 и q_2 зубьев колес 1 и 2, нормаль $n-n$ к этим профилям будет проходить через точку C соприкосновения начальных окружностей, являющуюся мгновенным центром в относительном движении колес 1 и 2. В дальнейшем удобно всегда считать силы P_{12} или P_{21} приложенными в точке C и направленными по нормали $n-n$. Для определения того, в какую сторону надо откладывать угол α (рис. 480, а) между нормалью $n-n$ и касательной $t-t$ к начальным окружностям в точке C , будем руководствоваться простым правилом.

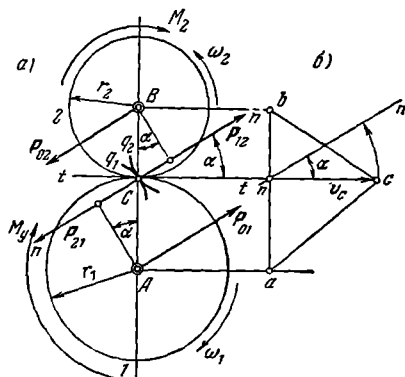


Рис. 480. Зубчатый механизм с внешним зацеплением; а) схема механизма; б) картина скоростей.

Если ведущим колесом является колесо с внешним зацеплением, то, поворачивая вектор скорости точки касания (вектор v_C на рис. 480, б) на угол α в сторону, обратную угловой скорости вращения ведущего колеса (скорость ω_1 на рис. 480, а), найдем положение нормали $n-n$. Если ведущим колесом будет колесо с внутренним зацеплением, то вектор скорости точки касания надо поворачивать по направлению угловой скорости ведущего колеса.

При силовом расчете зубчатых колес можно не производить замены высших пар IV класса цепями с парами V класса, а рассматривать равновесие колес, образующих статически определяемые системы. Такой статически определяемой системой является колесо 2 (рис. 480, а), на которое действует внешний момент M_2 и реакции P_{12} и P_{02} . Из уравнения моментов всех сил, действующих на колесо 2, относительно точки B

$$P_{12}r_2 \cos \alpha + M_2 = 0$$

определяем реакцию P_{12} :

$$P_{12} = -\frac{M_2}{r_2 \cos \alpha}.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на колесо 2,

$$P_{12} + P_{02} = 0$$

определяем и реакцию P_{02} :

$$P_{02} = -P_{12} = \frac{M_2}{r_2 \cos \alpha}.$$

Рассматриваем, далее, равновесие ведущего колеса 1. Из уравнения моментов всех сил, действующих на колесо 2, относительно точки А

$$M_y + P_{21}r_1 \cos \alpha = 0$$

находим уравновешивающий момент M_y :

$$M_y = -P_{21}r_1 \cos \alpha.$$

Далее, из уравнения равновесия всех сил, действующих на колесо 1,

$$P_{21} + P_{01} = 0$$

определяем реакцию P_{01} :

$$P_{01} = -P_{21} = -\frac{M_2}{r_2 \cos \alpha}.$$

5°. Рассмотрим двухступенчатый редуктор (рис. 481, а), у которого ведущим колесом является колесо 1, а ведомым колесо 3, нагруженное внешним моментом M_3 . Для определения направлений уравновешивающего момента M_y и момента M_3 строим картину скоростей (рис. 481, б). Из картины скоростей определяем направление угловой скорости ω_3 колеса 3 при заданной угловой скорости ω_1 колеса 1. Тогда определяются и направления моментов M_y и M_3 (рис. 481, б). Далее, рассматриваем колесо 3 (рис. 481, в), которое находится в равновесии под действием момента M_3 и реакций $P_{2'3}$ и P_{03} . Из уравнения моментов всех сил относительно точки А

$$M_3 + P_{2'3}r_3 \cos \alpha' = 0,$$

где α' — угол, образованный нормалью $n' - n'$ к профилям зубьев колес 2' и 3 с касательной $t' - t'$ к их начальным окружностям, вычисляем реакцию $P_{2'3}$. Имеем:

$$P_{2'3} = -\frac{M_3}{r_3 \cos \alpha'}.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на колесо 3,

$$P_{2'3} + P_{03} = 0$$

определяем реакцию P_{03} :

$$P_{03} = -P_{2'3} = \frac{M_3}{r_3 \cos \alpha'}.$$

Только что определенная нами реакция P_{03} приложена к оси колеса 3 в плоскости, совпадающей с средней плоскостью колеса 2' (рис. 481, а). Реакции, приложенные к подшипникам колеса 3, можно определить, если известны конструкция и относительное расположение этих подшипников. Изучением конструкций зубчатых редукторов занимается курс деталей машин, и потому силы, действующие непосредственно на подшипники, мы определять не будем.

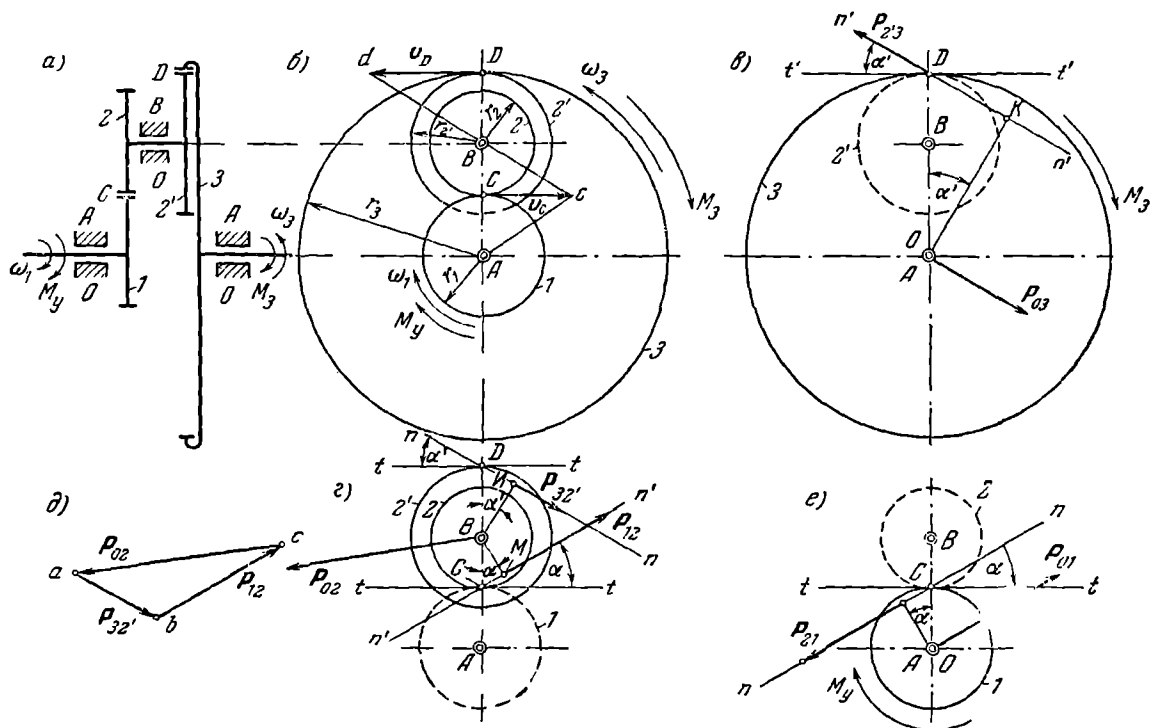


Рис. 481. Двухступенчатый зубчатый редуктор а), б) схема редуктора; в) схема второй ступени; г) схема первой ступени; д) треугольник сил, приложенных к колесам первой ступени, е) схема колес 1 и 2 первой ступени.

Далее, переходим к рассмотрению колес 2 и 2' (рис. 481, з), которые находятся в равновесии под действием силы $P_{32'} = -P_{2'3}$ и реакций P_{12} и P_{02} . Указанные силы располагаются в трех параллельных плоскостях (рис. 481, а). Перенесем их в среднюю плоскость колес 1 и 2. При этом переносе получаются пары сил, действия которых могут быть учтены, если будет известно конструктивное оформление редуктора, и тогда можно будет определить действительные реакции, возникающие в подшипниках.

Из уравнения моментов упомянутых сил относительно оси колес 2 и 2' (рис. 481, з) получаем:

$$P_{12}r_2 \cos \alpha + P_{32'}r_{2'} \cos \alpha' = 0,$$

где α — угол, образованный нормалью $n' - n'$ к профилям зубьев колес 1 и 2 с касательной $t - t$ к их начальным окружностям, вычисляем реакцию P_{12} :

$$P_{12} = -P_{32'} \frac{r_{2'} \cos \alpha'}{r_2 \cos \alpha}.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на колеса 2 и 2',

$$P_{32'} + P_{12} + P_{02} = 0$$

определяем реакцию P_{02} . Решение этого уравнения с помощью плана сил показано на рис. 481, д.

Последним рассматриваем ведущее колесо 1 (рис. 481, е), которое находится в равновесии под действием силы $P_{21} = -P_{12}$, момента M_y и реакции P_{01} . Из уравнения моментов всех сил относительно точки А

$$M_y + P_{21}r_1 \cos \alpha = 0$$

вычисляем уравнивающий момент M_y :

$$M_y = -P_{21}r_1 \cos \alpha.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на колесо 1,

$$P_{01} + P_{21} = 0$$

определяем реакцию P_{01} :

$$P_{01} = -P_{21}.$$

6°. Рассмотрим двухступенчатый планетарный редуктор (рис. 482, а), у которого ведущим является водило H , а ведомое колесо 3 нагружено внешним моментом M_3 . Кроме того, внешними силами, действующими на редуктор, являются центробежная сила инерции $P_{ис}^n$ сателлитов 2 и 2', условно приложенная в точке B (рис. 482, б), равная $P_{ис}^n = m_c \omega_H^2 (r_3 + r_2)$, где m_c — масса обоих сателлитов и ω_H — угловая скорость водила H , а также центробежная сила инерции $P_{нH}^n$ водила H , приложенная в его центре масс S и равная

$$P_{нH}^n = m_H \omega_H^2 (AS),$$

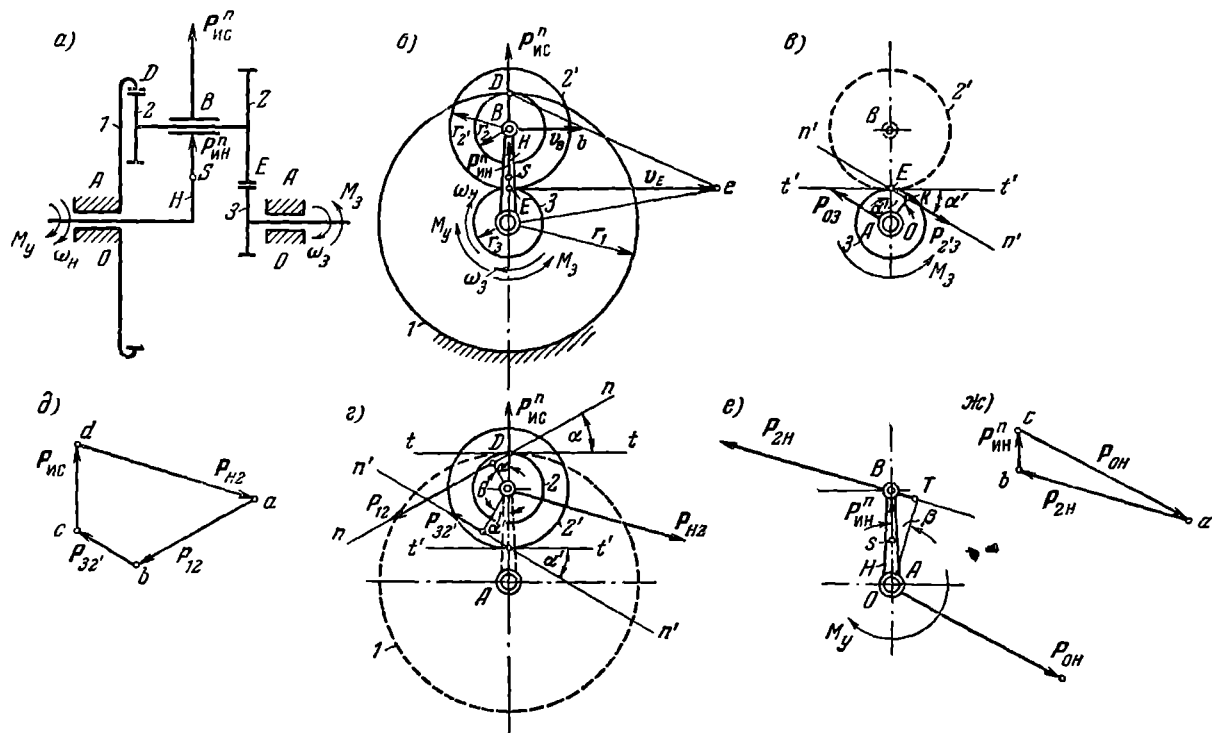


Рис. 482. Двухступенчатый планетарный редуктор: а, б) схема редуктора; в) схема колес 2' и 3; г) схема колес 1 и 2; д) план сил колес 1 и 2; е) схема водила; ж) план сил водила.

где m_H — масса поводка H . Для определения направлений уравновешивающего момента M_y и внешнего момента M_3 строим картину скоростей (рис. 482, б). Из картины скоростей устанавливаем направление угловой скорости ω_3 колеса 3 при заданном направлении угловой скорости ω_H водила H , после чего определяются и направления моментов M_3 и M_y (рис. 482, б).

Рассмотрим колесо 3 (рис. 482, в), которое находится в равновесии под действием момента M_3 и реакций $P_{2'3}$ и P_{03} . Из уравнения моментов всех сил относительно точки A

$$M_3 + P_{2'3}r_3 \cos \alpha' = 0,$$

где α' — угол, образованный нормалью $n' - n'$ к профилям зубьев колес 2' и 3 с касательной $t' - t'$ к их начальным окружностям, вычисляем реакцию $P_{2'3}$:

$$P_{2'3} = -\frac{M_3}{r_3 \cos \alpha'}.$$

Из уравнения всех сил, действующих на колесо 3,

$$P_{2'3} + P_{03} = 0$$

определяем реакцию P_{03} :

$$P_{03} = -P_{2'3}.$$

Далее, переходим к рассмотрению жестко связанных сателлитов 2 и 2' (рис. 482, з), которые находятся в равновесии под действием силы $P_{32'} = -P_{2'3}$, силы инерции $P_{ис}^n$ и реакций P_{12} и P_{H2} . Из уравнения моментов всех сил относительно оси сателлитов 2 и 2'

$$P_{12}r_2 \cos \alpha + P_{32'}r_{2'} \cos \alpha' = 0,$$

где α — угол, образованный нормалью $n - n$ к профилям зубьев колес 1 и 2 с касательной $t - t$ к их начальным окружностям, определяем реакцию P_{12} :

$$P_{12} = -P_{32'} \frac{r_{2'} \cos \alpha'}{r_2 \cos \alpha}.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на сателлиты 2 и 2',

$$P_{12} + P_{32'} + P_{ис}^n + P_{H2} = 0$$

определяем реакцию P_{H2} . Решение этого уравнения с помощью плана сил показано на рис. 482, д.

Последним рассматриваем ведущее водило H (рис. 482, е), которое находится в равновесии под действием силы $P_{2H} = -P_{H2}$, силы инерции $P_{иH}^n$, уравновешивающего момента M_y и реакции P_{OH} . Из уравнения моментов относительно точки A

$$M_y + P_{2H}(AT) = 0$$

определяем уравновешивающий момент M_y :

$$M_y = -P_{2H}(AT) = -P_{2H}(r_3 + r_{2'}) \cos \beta,$$

где β — угол между направлением силы P_{2H} и перпендикуляром к оси AB водила или равный ему угол между перпендикуляром AT к направлению силы P_{2H} и осью AB водила.

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на водило,

$$P_{2H} + P_{иH}^n + P_{OH} = 0$$

определяем реакцию P_{OH} . Решение этого уравнения с помощью плана сил показано на рис. 482, жс.

7°. В рассматриваемых примерах силового расчета механизмов мы предполагали все силы, действующие на каждое звено, расположенными в одной плоскости. В действительности силы лежат в различных плоскостях, что ясно видно на примере зубчатых механизмов, показанных на рис. 481, а или на рис. 482, а. Расположение действительных опор и их конструкции на этих рисунках не показаны. При расчете реальных конструкций, о чем было сказано выше, необходимо учитывать конструктивное оформление как промежуточных кинематических пар, так и опор. Соответственно должна составляться и расчетная схема элементов механизма. Например, нами были определены силы $P_{32'}$, P_{12} и P_{H2} , действующие на колеса 2 и 2' (рис. 481, з). Все эти силы расположены в трех параллельных плоскостях. Сила $P_{32'}$ расположена в плоскости колеса 2', сила P_{12} в плоскости колеса 2 и сила P_{H2} в плоскости, перпендикулярной к оси колес 2 и 2'. Опоры оси колес 2 и 2' могут быть конструктивно выполнены различным образом в зависимости от требований прочности, надежности, габаритов конструкции, условий сборки и т. д.

В каждом конкретном случае мы получаем ту или иную схему нагружения и можем определить истинные нагрузки на элементы кинематических пар с целью их расчета на прочность.

8°. Для определения усилий, действующих на отдельные звенья механизма, необходимых при расчете этих звеньев на прочность, можно рассматривать равновесие каждого звена в отдельности со всеми действующими на него силами. Для этого отсоединяем это звено от других звеньев и прикладываем к отсоединенным элементам пар соответствующие реакции. Если в число сил, действующих на звено, входит результирующая сила инерции, то для большей точности расчета рекомендуется эту силу заменить распределенными по объему силами инерции масс звена и нагрузить звено как бы некоторой сплошной нагрузкой, представляющей собой силы инерции масс отдельных точек звена, распределенной по закону, соответствующему законам распределения масс и ускорений звена.

Пусть, например, масса звена AB (рис. 483), обладающего плоскостью симметрии, параллельной плоскости движения, распределена равномерно по всей его длине. Если ускорения точек A и B равны a_A и a_B , то эпюра распределения ускорений по длине звена представляется в виде четырехугольника $AghB$, а эпюрой распределения сил инерции является четырехугольник $AabB$. Сила инерции каждого элемента массы равна элементарной массе, умноженной на ее ускорение. Таким образом, в общем случае силы инерции элементарных масс не параллельны между собой. Поэтому для расчета удобно ускорение a_B точки B или ускорение a_A точки A представить в виде

суммы двух составляющих (рис. 484) и разложить, например, ускорение a_B на переносное поступательное и относительное вращательное. Имеем:

$$a_B = a_A + a_{BA}.$$

Тогда и сила инерции каждой из элементарных масс может быть представлена в виде суммы двух сил.

Первая сила инерции $P_{ип}$ в переносном движении будет равна элементарной массе, умноженной на переносное ускорение a_A . Так как массы рас-

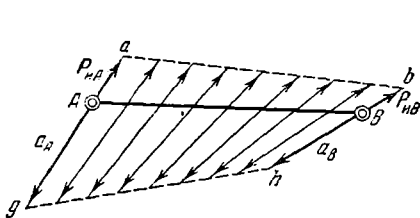


Рис. 483. Эпюры ускорений и сил инерции материальных точек звена.

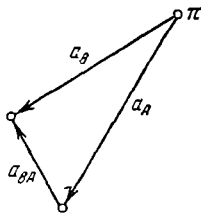


Рис. 484. Пример разложения ускорений материальных точек звена.

пределены равномерно по длине звена, то эпюра распределения этих сил инерции представится в виде параллелограмма $Aa'b'B$ (рис. 485), сторона $a'b'$ которого параллельна прямым $g'h'$ и AB . Эти силы инерции будут параллельны друг другу.

Вторая сила инерции $P_{но}$ в относительном движении равна элементарной массе, умноженной на относительное ускорение a_{BA} . Эпюра относительных ускорений представится в виде треугольника $g''b''B$ (рис. 486). Аналогично эпюра распределения сил инерции $P_{но}$ элементарных масс представится треугольником $a''h''B$. Так как все

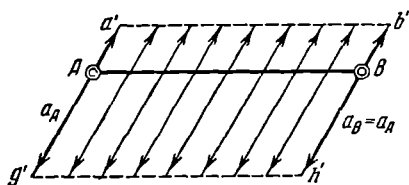


Рис. 485. Эпюры переносных ускорений и сил инерции материальных точек звена.

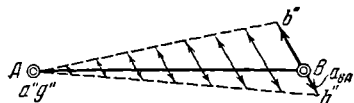


Рис. 486. Эпюры относительных ускорений и сил инерции материальных точек звена.

относительные ускорения наклонены к оси AB звена под одним и тем же углом, то все силы инерции $P_{но}$ будут также параллельны между собой.

Таким образом, расчет звена AB под действием сил инерции сводится к расчету звена, нагруженного сплошной нагрузкой, распределенной сначала по закону параллелограмма (рис. 485), а потом по закону треугольника (рис. 486).

Если массы звена неравномерно распределены по его длине, но материал звена однороден, то эпюры распределения сплошной нагрузки от сил инерции имеют более сложный вид. На рис. 487 показана эпюра распределения сил инерции от переносного ускорения a_A , а на рис. 488 — от относительного ускорения a_{BA} звена, имеющего форму шатуна. В отличие от эпюры, показанной на рис. 485, эпюра, показанная на рис. 487, представляется

площадью $abcde$, а эпюра на рис. 488, в отличие от эпюры на рис. 486, — площадью $abcdAef$. С достаточной для практики точностью для рассматриваемого

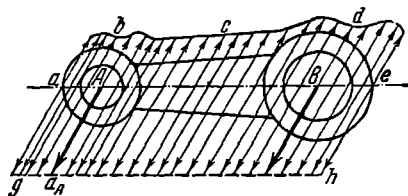


Рис. 487. Эпюры переносных ускорений и сил инерции материальных точек звена, имеющего форму шатуна.

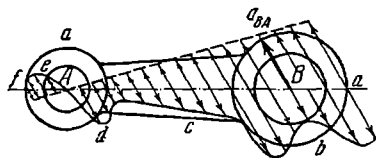


Рис. 488. Эпюры относительных ускорений и сил инерции материальных точек звена, имеющего форму шатуна.

случая можно считать элементарные силы инерции пропорциональными соответствующим массам, заключенные между поперечными сечениями звена, проведенными перпендикулярно к оси AB звена.

§ 75. Уравновешивание масс звеньев механизма на фундаменте

1°. При движении звеньев механизма в кинематических парах возникают дополнительные динамические нагрузки от сил инерции звеньев. Так как всякий механизм имеет неподвижное звено — стойку, то и стойка механизма также испытывает вполне определенные динамические нагрузки. В свою очередь через стойку эти нагрузки передаются на фундамент механизма. Динамические нагрузки, возникающие при движении механизма, являются источниками дополнительных сил трения в кинематических парах, вибраций в звеньях и фундаменте и дополнительных напряжений в отдельных звеньях механизма. Поэтому при проектировании механизма часто ставится задача о рациональном подборе масс звеньев механизма, обеспечивающем полное или частичное погашение указанных динамических нагрузок. Эта задача носит название задачи *об уравновешивании масс механизма*. Так как при определении динамических нагрузок мы пользуемся по преимуществу приемами кинетостатики, то иногда эта задача носит также название *уравновешивания сил инерции звеньев механизма*.

Задача уравновешивания сил инерции звеньев механизма может быть разделена на две задачи: задачу *об уравновешивании динамических нагрузок на фундамент* и задачу *об уравновешивании динамических нагрузок в кинематических парах*.

2°. Рассмотрим вопрос об уравновешивании динамических нагрузок на стойку и фундамент механизма. Как известно, любая система сил, приложенных к твердому телу, приводится к одной силе, приложенной в произвольно выбранной точке, и к одной паре, причем вектор этой результирующей силы равен *главному вектору* данной системы сил, а момент пары равен *главному моменту* данной системы сил относительно выбранного центра приведения. Рассмотрим кривошипно-

ползунный механизм (рис. 489), установленный на фундаменте Φ . Пользуясь принципом отвердевания, мы можем силы инерции всех звеньев механизма также привести к силе и паре. Выбираем какую-либо точку O механизма за центр приведения и за начало координат. Такой точкой удобно выбрать точку, лежащую где-либо на оси вращения ведущего звена I , вращающегося с угловой скоростью ω . Из точки O проводим взаимно перпендикулярные оси Ox , Oy и Oz . Проекции на оси координат главного вектора всех сил инерции механизма выразятся так:

$$P_{ux} = - \sum m_i \ddot{x}_i, \quad P_{uy} = - \sum m_i \ddot{y}_i, \\ P_{uz} = - \sum m_i \ddot{z}_i.$$

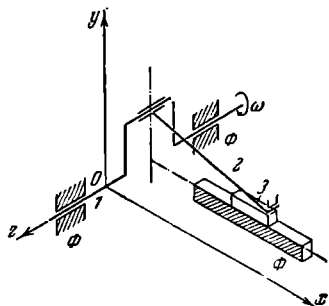


Рис. 489. Кривошипно-ползунный механизм на фундаменте.

В этих уравнениях m_i есть масса i -й точки звена, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$ суть проекции ускорений i -й точки на оси x , y и z , равные вторым производным от соответствующих координат по времени. Проекции на оси x , y и z главного момента всех сил инерции относительно начала координат выразятся формулами:

$$M_{ux} = \sum (y_i P_{uzi} - z_i P_{uyi}) = - \sum m_i (y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i), \\ M_{uy} = \sum (z_i P_{uxi} - x_i P_{uzi}) = - \sum m_i (z_i \ddot{x}_i - x_i \ddot{z}_i), \\ M_{uz} = \sum (x_i P_{uyi} - y_i P_{uxi}) = - \sum m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i).$$

В случае плоского механизма удобно выбрать одну из осей, например ось Oz , перпендикулярной к плоскости, параллельно которой происходит движение механизма, как это сделано на рис. 489, а оси Ox и Oy расположить в этой плоскости. Тогда для плоского механизма будем иметь:

$$P_{uz} = 0,$$

и формулы, определяющие проекции на оси координат главного вектора и главного момента сил инерции, примут вид

$$\left. \begin{aligned} P_{ux} &= - \sum m_i \ddot{x}_i, & P_{uy} &= - \sum m_i \ddot{y}_i, & P_{uz} &= 0, \\ M_{ux} &= - \sum z_i P_{uyi} = \sum m_i z_i \ddot{y}_i, \\ M_{uy} &= \sum z_i P_{uxi} = - \sum m_i z_i \ddot{x}_i, \\ M_{uz} &= - \sum m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i). \end{aligned} \right\} \quad (16.29)$$

Так как x_i и y_i суть функции угла поворота φ ведущего звена механизма, а угол φ есть функция времени t , то вторые производные

от координат x_i и y_i по времени, как это было показано ранее (см. § 30), равны

$$\ddot{x}_i = \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} \omega^2 + \frac{dx_i}{d\varphi} \varepsilon, \quad \ddot{y}_i = \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} \omega^2 + \frac{dy_i}{d\varphi} \varepsilon.$$

Выражения $d^2 x_i/d\varphi^2$, $d^2 y_i/d\varphi^2$, $dx_i/d\varphi$ и $dy_i/d\varphi$ суть аналоги ускорений и скоростей i -й точки, а ε — угловое ускорение ведущего звена I .

Подставив полученные выражения для $\ddot{x}_i$ и $\ddot{y}_i$ в формулы (16.29), получим:

$$\left. \begin{aligned} P_{ix} &= -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi}, \\ P_{iy} &= -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi}, \\ M_{ix} &= \omega^3 \sum m_i z_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi}, \\ M_{iy} &= -\omega^3 \sum m_i z_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi}, \\ M_{iz} &= \omega^3 \left(\sum m_i y_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} - \sum m_i x_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} \right) + \\ &\quad + \varepsilon \left(\sum m_i y_i \frac{dx_i}{d\varphi} - \sum m_i x_i \frac{dy_i}{d\varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (16.30)$$

Для полного уравнивания сил инерции звеньев плоского механизма необходимо, чтобы проекции на оси координат результирующей сил инерции и главные моменты сил инерции относительно осей x , y и z равнялись нулю, т. е. чтобы удовлетворялись условия $P_{ix} = 0$, $P_{iy} = 0$, $M_{ix} = 0$, $M_{iy} = 0$, $M_{iz} = 0$.

Воздействие на фундамент Φ момента M_{iz} относительно оси z , перпендикулярной к плоскости движения механизма, должно рассматриваться совместно с моментами заданных сил, приводящих в движение механизм, и с моментами сил сопротивления. Влияние всех этих моментов на режим движения механизма и на динамические нагрузки на фундамент и стойку будут рассмотрены далее в разделе динамики механизмов. Поэтому дальнейшему анализу подвергнем только следующие уравнения:

$$P_{ix} = 0, \quad P_{iy} = 0, \quad M_{ix} = 0 \quad \text{и} \quad M_{iy} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} &= 0, \\ -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} &= 0, \\ \omega^3 \sum m_i z_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} &= 0, \\ -\omega^3 \sum m_i z_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы последние уравнения удовлетворялись при любых значениях угловой скорости ω и углового ускорения ϵ ведущего звена I , необходимо, чтобы каждая из сумм, входящих в эти уравнения, в отдельности равнялась нулю, т. е. необходимо, чтобы соблюдались следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad \sum m_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} &= 0, & \text{(V)} \quad \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} &= 0, \\ \text{(II)} \quad \sum m_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} &= 0, & \text{(VI)} \quad \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} &= 0, \\ \text{(III)} \quad \sum m_i z_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} &= 0, & \text{(VII)} \quad \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} &= 0, \\ \text{(IV)} \quad \sum m_i z_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} &= 0, & \text{(VIII)} \quad \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.31)$$

Таким образом, для полного уравновешивания механизма необходимо так подобрать массы и размеры его звеньев, чтобы удовлетворялись уравнения (16.31). Из этих уравнений видно, что четыре уравнения (I) — (IV), в которые входят вторые производные, могут быть получены дифференцированием по φ четырех уравнений (V) — (VIII). Если удовлетворяются четыре последних уравнения, то будут удовлетворяться и четыре первых. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением только условий:

$$\left. \begin{aligned} \text{(V)} \quad \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} &= 0, & \text{(VII)} \quad \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} &= 0, \\ \text{(VI)} \quad \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} &= 0, & \text{(VIII)} \quad \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.32)$$

Рассмотрим выражения

$$\sum m_i x_i = m x_S \quad \text{и} \quad \sum m_i y_i = m y_S$$

Эти выражения представляют собой *статические моменты масс* всех звеньев механизма и могут быть представлены как произведение массы m всех звеньев механизма на соответствующие координаты x_S и y_S его общего центра масс S . Дифференцируя эти выражения по φ , получаем:

$$\sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = m \frac{dx_S}{d\varphi} \quad \text{и} \quad \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} = m \frac{dy_S}{d\varphi}.$$

Подставляя эти выражения в первые два уравнения (16.32), получаем следующие необходимые условия:

$$m \frac{dx_S}{d\varphi} = 0 \quad \text{и} \quad m \frac{dy_S}{d\varphi} = 0,$$

или так как $m \neq 0$, то

$$\frac{dx_S}{d\varphi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dy_S}{d\varphi} = 0. \quad (16.33)$$

Рассмотрим, далее, выражения

$$\sum m_i z_i x_i \text{ и } \sum m_i z_i y_i.$$

Эти суммы представляют собой так называемые *центробежные моменты инерции* относительно плоскостей xz и yz . Обозначим их соответственно через J_{xz} и J_{yz} и продифференцируем написанные выражения по φ . Имеем:

$$\sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = \frac{dJ_{xz}}{d\varphi} \text{ и } \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} = \frac{dJ_{yz}}{d\varphi},$$

так как $dz/d\varphi = 0$. Подставляя полученные выражения в третье и четвертое уравнения (16.32), находим:

$$\frac{dJ_{xz}}{d\varphi} = 0 \text{ и } \frac{dJ_{yz}}{d\varphi} = 0. \quad (16.34)$$

Таким образом, для уравнивания сил инерции необходимо, чтобы удовлетворялись равенства (16.33) и (16.34). Из этих равенств непосредственно следует, что для уравнивания сил инерции звеньев плоского механизма необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\left. \begin{aligned} x_S &= \text{const}, & J_{xz} &= \text{const}, \\ y_S &= \text{const}, & J_{yz} &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (16.35)$$

Анализируя равенства (16.35), приходим к выводу, что для уравнивания главного вектора сил инерции звеньев плоского механизма необходимо и достаточно так подобрать массы этого механизма, чтобы *общий центр масс всех звеньев механизма оставался неподвижным*. Для уравнивания главных моментов относительно осей x и y необходимо и достаточно подобрать массы механизма так, чтобы *центробежные моменты инерции масс всех звеньев механизма относительно плоскостей xz и yz были постоянными*.

В практике машиностроения при уравнивании механизмов указанные условия обычно выполняются только частично, в зависимости от конкретно поставленной задачи. Так, в некоторых механизмах уравнивается полностью только результирующая сила инерции, в других — уравниваются только моменты сил инерции и частично результирующая сила инерции и т. д. В последующих параграфах настоящей главы мы и займемся рассмотрением как общих, так и частных приближенных методов уравнивания.

§ 76. Определение положения общего центра масс механизма

1°. Как было показано в § 75, для уравнивания главного вектора сил инерции механизма необходимо удовлетворить условию постоянства координат центра масс механизма. В настоящем параграфе рассмотрим вопрос об определении положения центра масс механизма.

В общем виде формула для нахождения вектора $\mathbf{r}_S$, определяющего положение общего центра масс S отдельных точно сосредоточенных масс $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, напишется так:

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (16.36)$$

Произведения $m_1 \mathbf{r}_1, m_2 \mathbf{r}_2, \dots, m_n \mathbf{r}_n$ представляют собою статические моменты точно сосредоточенных масс относительно произвольно выбранной точки.

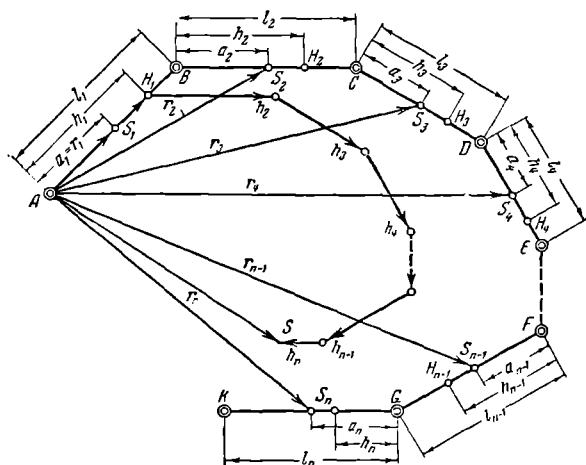


Рис. 490. К определению общего центра масс кинематической цепи.

Пользуясь формулой (16.36), можно для любой кинематической цепи определить положение ее центра масс. Пусть, например, задана кинематическая цепь $ABC \dots FGK$, состоящая из n звеньев (рис. 490). Центрами масс звеньев пусть будут точки $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$. Длины звеньев обозначим соответственно через $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, а расстояния центров масс $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ от крайних левых осей шарниров при обходе цепи по часовой стрелке через $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Требуется определить положение общего центра масс S рассмотренной цепи.

Из точки A проводим векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$, определяющие положение центров масс $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$. По формуле (16.36) имеем:

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}.$$

Векторы $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ могут быть представлены как суммы векторов

$$\begin{aligned} r_1 &= a_1, \\ r_2 &= l_1 + a_2, \\ r_3 &= l_1 + l_2 + a_3, \\ r_n &= l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{n-1} + a_n, \end{aligned}$$

получаем:

$$r_S = \frac{m_1 a_1 + m_2 (l_1 + a_2) + \dots + m_n (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{n-1} + a_n)}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}.$$

Открываем скобки и группируем члены

$$r_S = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3 + \dots + m_n) l_1}{m} + \frac{m_2 a_2 + (m_3 + m_4 + \dots + m_n) l_2}{m} + \dots + \frac{m_{n-1} a_{n-1} + m_n l_{n-1}}{m} + \frac{m_n a_n}{m}, \quad (16.37)$$

где

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n.$$

Из равенства (16.37) следует, что первый член правой части этого равенства представляет собой некоторый вектор h_1 , определяющий положение центра масс звена AB относительно точки A (рис. 490), если условно предположить, что в точке A звена сосредоточена масса всех предшествующих звеньев, в точке B — масса всех последующих звеньев и, наконец, в точке S_1 — масса m_1 самого звена AB (рис. 491). Так как до звена AB звеньев нет (рис. 490), то масса, сосредоточенная в точке A , равна нулю. После звена AB следуют звенья 2, 3, 4, ..., n , общая масса которых равна $m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_n$, и, наконец, в точке S_1 сосредоточена масса m_1 . Чтобы определить центр этого условного расположения масс, воспользуемся формулой (16.36)

$$h_1 = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3 + \dots + m_n) l_1}{m}.$$

Рис. 491. Схема размещения масс на звене AB кинематической цепи, изображенной на рис. 490.

Сравнивая полученное выражение с первым членом формулы (16.37), мы видим их полную тождественность. Таким образом, первый член формулы (16.37) представляет собой вектор h_1 , определяющий положение некоторого фиктивного центра масс H_1 .

Аналогично, если для звена BC предположить, что в его точке B сосредоточена масса всех предшествующих ему звеньев, т. е. масса m_1 , а в точке C сосредоточена масса всех последующих звеньев, т. е. масса $m_3 + m_4 + m_5 + \dots + m_n$, и, наконец, в точке S_2 сосре-

доточена масса m_2 (рис. 492), то общий центр H_2 такого расположения масс определится вектором h_2 , представляющим собой второй член формулы (16.37). Имеем:

$$h_2 = \frac{m_2 a_2 + (m_3 + m_4 + \dots + m_n) l_2}{m},$$

так как статический момент массы m_1 , условно сосредоточенной в точке B , равен нулю.

Проведя аналогичные рассуждения для всех остальных звеньев, приходим к выводу, что формула (16.37) может быть представлена так:

$$r_S = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n, \quad (16.38)$$

и вектор общего центра масс может быть определен как геометрическая сумма векторов $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$.

Векторы $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ параллельны осям соответствующих звеньев $AB, BC, CD, \dots, GK$ (рис. 490). Модули этих векторов постоянны вследствие неизменности масс звеньев и расстояний $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ и $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$. Таким образом, определение положения общего центра масс звеньев кинематической цепи сводится к геометрическому сложению постоянных по модулю векторов, направленных параллельно осям соответствующих звеньев.

В сокращенном виде формула (16.38) может быть написана так:

$$r_S = \sum_1^n h_i. \quad (16.39)$$

На рис. 493 показано определение с помощью векторов h_1, h_2 и h_3 двух положений S' и S'' общего центра масс S кинематической цепи $ABCD$, которая последовательно занимала положения $A'B'C'D'$ и $A''B''C''D''$. Точки $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ (рис. 490) будем называть *главными точками*, а векторы $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ — *векторами главных точек*.

2°. Применим рассмотренный метод к решению задачи об определении общего центра масс звеньев механизма шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 494). Пусть даны длины звеньев l_1, l_2 и l_3 и расстояния a_1, a_2 и a_3 их центров масс S_1, S_2 и S_3 от осей левых шарниров. За начальную точку возьмем точку A и соединим ее прямыми с точками S_1, S_2 и S_3 . Векторы $\overline{AS_1}, \overline{AS_2}$ и $\overline{AS_3}$ соответственно

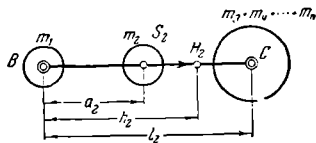


Рис. 492. Схема размещения масс на звене BC кинематической цепи, изображенной на рис. 490.

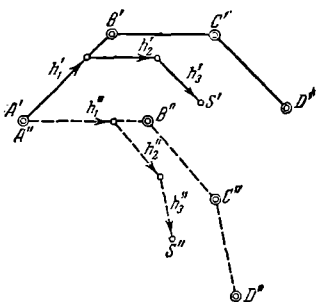


Рис. 493. Определение общего центра масс звеньев трехзвенной кинематической цепи в двух положениях.

обозначим через r_1 , r_2 и r_3 . Если, далее, обозначить массы звеньев через m_1 , m_2 и m_3 , а сумму всех масс через m , то согласно формуле (16.36) можно написать:

$$r_S = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m}$$

Пользуясь равенствами (16.37) и (16.38), получаем:

$$\begin{aligned} r_S &= \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) l_1}{m} + \\ &+ \frac{m_2 a_2 + m_3 l_2}{m} + \frac{m_3 a_3}{m} = \\ &= h_1 + h_2 + h_3, \end{aligned} \quad (16.40)$$

где

$$h_1 = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) l_1}{m}, \quad (16.41)$$

$$h_2 = \frac{m_2 a_2 + m_3 l_2}{m}, \quad (16.42)$$

$$h_3 = \frac{m_3 a_3}{m}. \quad (16.43)$$

Рис. 494. К определению положения общего центра масс.

Определяя векторы h_1 , h_2 и h_3 и зная, что их сумма должна давать вектор r_S , складываем векторы h_1 , h_2 и h_3 (рис. 494).

Результирующая этих векторов представляет собой вектор r_S , а конец вектора r_S определяет точку S — центр масс всего механизма. Так как все главные точки H при перемещении звеньев не меняют своего положения относительно этих звеньев, то нетрудно, зная положение этих точек при одном каком-либо положении механизма, найти все последовательные положения точки S путем построения ломаной линии, состоящей из постоянных отрезков h_1 , h_2 и h_3 , параллельных соответствующим направлениям звеньев механизма.

§ 77. Исследование движения общего центра масс механизма

1°. Чтобы исследовать движение общего центра масс S механизма шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 495), можно перемещения этого центра масс представить как перемещения точки S , принадлежащей одному из звеньев механизма, полученного из основного механизма $ABCD$ присоединением трех групп второго класса.

Так как вектор h_1 направлен по оси звена AB (рис. 495), то этот вектор всегда перемещается вместе с этим звеном с той же угловой скоростью.

Присоединяем в точках C и H_1 группу CLH_1 , у которой длина звена CL равна $AB = h_1$, а $H_1L = BC$. Звенья CL и H_1L вследствие выбранных размеров оказываются в любом положении механизма параллельными звеньям AB и BC . Если теперь на звене H_1L отложить отрезок, равный h_2 , то движение точки H_2 этого отрезка будет таким же, как и движение точки H_2 механизма, изображенного на рис. 494.

Далее, присоединяем в точках D и L вторую группу DNL , у которой длина звена DN равна CL , а длина звена LN равна CD . Точно так же, как и в ранее присоединенной группе, звено LN всегда остается параллельным

звену CD , а звено ND — параллельным звену AB . От точки L откладываем на звене LN отрезок LH'_2 , равный h_3 , и присоединяем в точках H'_2 и H'_3 третью группу $H'_2SH'_3$ со звеньями, длины которых соответственно равны

$$H'_2S = h_3 \quad \text{и} \quad H'_3S = BC - h_2.$$

Звено H'_2S во всех положениях параллельно звену BC , а звено H'_3S — звену CD .

Полученная точка S механизма с присоединенными группами совпадает при любом положении механизма с его центром масс как полученная путем сложения векторов h_1 , h_2 и h_3 . Траектория точки S и есть траектория центра масс механизма. Скорость и ускорение центра масс S определяются как скорость и ускорение точки S механизма, образованного присоединением к механизму $ABCD$ трех вышеуказанных групп II класса.

2°. В выше рассмотренном случае центры масс всех звеньев лежали на продольных осях звеньев.

Рассмотрим теперь, как определяется центр масс механизма, если центры масс его отдельных звеньев расположены произвольно. Пусть дан механизм $ABCD$ (рис. 496, а), у которого центр масс звена AB лежит в точке S_1 ,

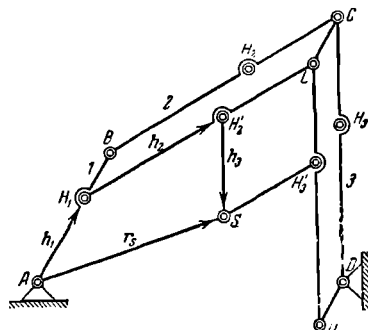


Рис. 495. К определению положения общего центра масс механизма шарнирного четырехзвенника с помощью дополнительных двухповодковых групп.

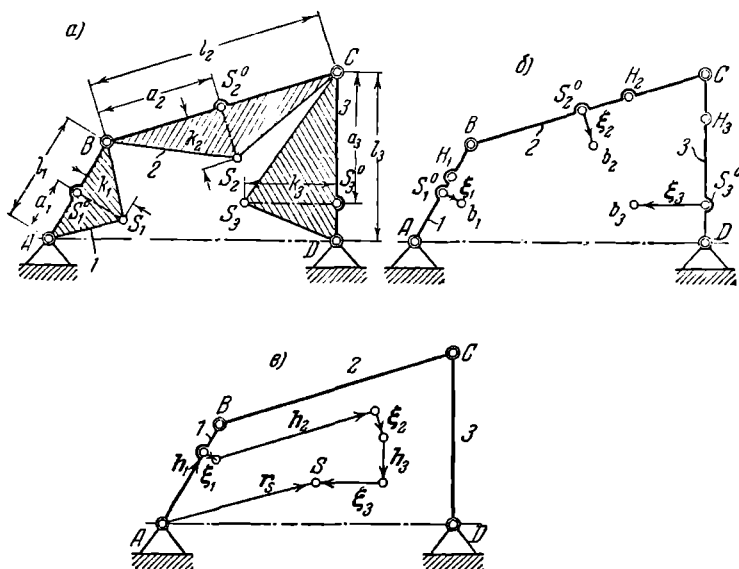


Рис. 496. Шарнирный четырехзвенный механизм; а) кинематическая схема; б) схема с фиктивными центрами масс; в) схема с векторами главных точек.

центр масс звена BC — в точке S_2 и центр масс звена CD — в точке S_3 . Из точек S_1 , S_2 и S_3 опустим на прямые AB , BC и CD перпендикуляры $S_1S_1^0$, $S_2S_2^0$ и $S_3S_3^0$. Обозначим длины этих перпендикуляров через k_1 , k_2 и k_3 ;

расстояния AS_1^0 , BS_2^0 и CS_3^0 обозначим через a_1 , a_2 и a_3 , а длины — через l_1 , l_2 и l_3 . Соединим, далее, точки S_1 , S_2 и S_3 прямыми с точкой A и обозначим полученные векторы через r_1 , r_2 и r_3 (на рис. 496, а эти векторы не проведены); массы звеньев обозначим через m_1 , m_2 , m_3 , а общую массу всего механизма — через m . Согласно формуле (16.36) имеем:

$$r_S = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m},$$

или так как

$$r_1 = a_1 + k_1, \quad r_2 = l_1 + a_2 + k_2 \quad \text{и} \quad r_3 = l_1 + l_2 + a_3 + k_3,$$

то

$$r_S = \frac{m_1 (a_1 + k_1) + m_2 (l_1 + a_2 + k_2) + m_3 (l_1 + l_2 + a_3 + k_3)}{m},$$

откуда получаем:

$$r_S = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) l_1}{m} + \frac{m_1 k_1}{m} + \frac{m_2 a_2 + m_3 l_2}{m} + \frac{m_2 k_2}{m} + \frac{m_3 a_3}{m} + \frac{m_3 k_3}{m}$$

или, вводя обозначения,

$$\frac{m_1 k_1}{m} = \xi_1, \quad \frac{m_2 k_2}{m} = \xi_2, \quad \frac{m_3 k_3}{m} = \xi_3$$

и принимая во внимание сказанное в § 76, имеем окончательно

$$r_S = h_1 + h_2 + h_3 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

Векторы ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 , параллельные векторам k_1 , k_2 и k_3 , суть радиусы-векторы относительно точек S_1^0 , S_2^0 и S_3^0 фиктивных центров масс b_1 , b_2 и b_3 (рис. 496, б), полученных в предположении, что в точках S_1 , S_2 и S_3 сосредоточены массы m_1 , m_2 и m_3 отдельных звеньев, а в точках S_1^0 , S_2^0 и S_3^0 — массы $(m - m_1)$, $(m - m_2)$ и $(m - m_3)$. Складывая полученные векторы в любом порядке, получаем положение общего центра масс S всего механизма (рис. 496, в). Механизм, воспроизводящий траекторию точки S , может быть построен аналогично механизму, показанному на рис. 495.

Рис. 497. К определению общего центра масс кривошипно-ползунного механизма.

Рассмотрим кривошипно-ползунный механизм ABC , радиус кривошипа AB которого равен R , а длина шатуна BC равна L (рис. 497). Требуется определить положение центра масс S механизма. Пусть масса кривошипа равна m_1 , масса шатуна m_2 и масса поступательно движущегося ползуна m_3 . Определяем главные векторы h_1 , h_2 и h_3 . Пусть центр масс кривошипа AB лежит в точке S_1 на расстоянии a_1 от точки A . Сосредотачиваем в точке B все последующие массы, а в точке A — предшествующие массы. Так как звено AB — первое, то в точке A сосредоточена масса, равная нулю, в точке B сосредоточена масса $m_2 + m_3$, а в точке S_1 — масса m_1 . Выражение для определения вектора h_1 напомним так:

$$h_1 = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) R}{m}. \quad (16.44)$$

Модуль вектора h_1 равен расстоянию от точки A до первой главной точки H_1 .

Переходим теперь к шатуну BC . Представим, что в точке B сосредоточена масса m_1 кривошипа AB . В точке S_2 сосредоточена масса m_2 шатуна BC , а в точке C — масса m_3 ползуна $\mathcal{Z}$. Выражение для определения вектора h_2 напомним так:

$$h_2 = \frac{m_2 a_2 + m_3 L}{m}. \quad (16.45)$$

Для поступательно движущегося ползуна при определении вектора h_3 надо сосредоточить массу $m_1 + m_2$ в точке C , а массу m_3 — в точке S_3 на расстоянии a_3 от точки C . Выражение для определения вектора h_3 напомним так:

$$h_3 = \frac{m_3 a_3}{m}. \quad (16.46)$$

Согласно предыдущему вектор h_1 имеет направление оси звена AB , вектор h_2 параллелен оси звена BC , а вектор h_3 параллелен оси движения ползуна $\mathcal{Z}$. Для определения центра масс S всего механизма по оси звена AB (рис. 497) откладываем от точки A отрезок, равный h_1 , из точки H_1 проводим прямую, параллельную звену BC , и откладываем на ней отрезок, равный h_2 . Из точки K проводим прямую, параллельную перемещению звена $\mathcal{Z}$, и откладываем на ней отрезок, равный h_3 . Точка S и представляет собой центр масс всего механизма ABC .

Рассмотрим теперь, как перемещается этот центр масс при движении механизма. Так как вектор h_3 при всех положениях механизма будет параллелен самому себе, то все его точки опишут одни и те же траектории. Так, например, точка K опишет такую же траекторию, что и центр масс S , только смещенную на отрезок, равный h_3 (рис. 498). Таким образом, если траекторией точки S является некоторая кривая Q , то траекторией точки K — та же кривая, но сдвинутая влево на величину, равную $h_3 = KS$. Кроме того, так как отрезок BH_2 равен и параллелен H_1K , то фигура H_1BH_2K представляет собой параллелограмм со сторонами постоянной длины $H_1B = KH_2$, $BH_2 = H_1K$ и с переменными углами. Траекторию точки K можно построить, если к механизму ABC присоединить группу II класса H_1KH_2 (рис. 499), состоящую из двух звеньев, длины которых H_1K и KH_2 и которые входят в три вращательные пары H_1, K и H_2 . Траектория точки K этого механизма и представляет собой траекторию центра масс S механизма, сдвинутую на постоянный отрезок KS (рис. 498).

Указанный метод может быть применен для решения задачи определения центра масс и его траектории для механизмов любых классов.

4°. Выше было показано, что положение центра масс механизма и его траектория могут быть всегда определены с помощью векторов главных точек и присоединенных к основному механизму групп II класса. Покажем теперь, что, зная закон движения центра масс, всегда можно определить и

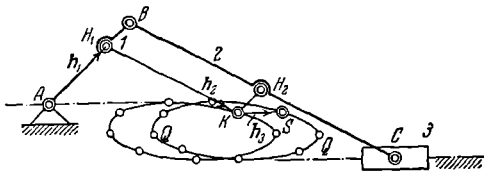


Рис. 498. Схема кривошипно-ползунного механизма с показанной на ней траекторией движения общего центра масс.

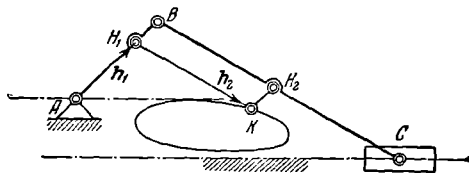


Рис. 499. Схема кривошипно-ползунного механизма с траекторией движения общего центра масс, построенной при помощи добавочной двухповодковой группы.

результующую силу инерции всех звеньев механизма и ее воздействие на стойку и фундамент механизма.

Для этого, имея механизм с прибавленными к нему группами II класса, одна из точек которых совпадает с центром масс S механизма и описывает его траекторию, строим для нескольких положений механизма планы скоростей и ускорений и определяем ускорение центра масс S .

На рис. 500 дано построение повернутого плана скоростей и плана ускорений для шарнирного четырехзвенного механизма с тремя присоединенными к нему группами II класса, перемещение центра масс которого совпадает с перемещением точки S . Отрезок (ps) в масштабе μ_v плана скоростей представляет скорость v_s точки S (рис. 500, б), а отрезок (πs) в масштабе μ_a плана ускорений представляет ускорение a_s точки S (рис. 500, в):

$$v_s = \mu_v (ps), \quad a_s = \mu_a (\pi s).$$

Зная ускорение общего центра масс, легко определить и результирующую силу инерции (главный вектор сил инерции) звеньев механизма. Эта сила равна

$$P_{ii} = -m a_s = -m \mu_a (\pi s),$$

где m есть общая масса звеньев, для которых точка S является центром масс, а a_s есть ускорение этого центра, определяемое из плана ускорений; направлена сила P_{ii} всегда противоположно ускорению a_s точки S механизма.

Результирующую силу инерции звеньев механизма можно найти также дифференцированием графиков перемещения проекций центра масс S механизма. Для этого строят ряд положений центра масс S механизма и проектируют их на произвольно выбранные прямоугольные оси координат x и y . Тогда получаем две диаграммы перемещений проекций центра масс: на ось x и на ось y . Двукратным графическим дифференцированием полученных графиков определяют величины проекций на оси x и y ускорения центра масс. По полученным проекциям можно определить ускорение центра масс механизма. Метод графиков может быть рекомендован при исследовании сложных многозвенных механизмов, для которых построение планов ускорений представляет некоторые технические трудности.

Отметим, что построение планов скоростей и ускорений для рассматриваемого механизма может быть значительно облегчено, если учесть, что вследствие параллельности звеньев BC , LM и SE и звеньев AB , MC и FD угловые скорости и ускорения параллельных звеньев равны между собой, что приводит к равенству на плане ускорения отрезков, изображающих относительные ускорения этих звеньев.

5°. Зная результирующую силу инерции P_{ii} звеньев механизма, можно решить некоторые задачи, связанные с расчетом фундамента на прочность и на его устойчивость.

Пусть, например, для плоского механизма $ABCD$ (рис. 501), укрепленного на фундаменте Φ , для положения, указанного на чертеже, определена

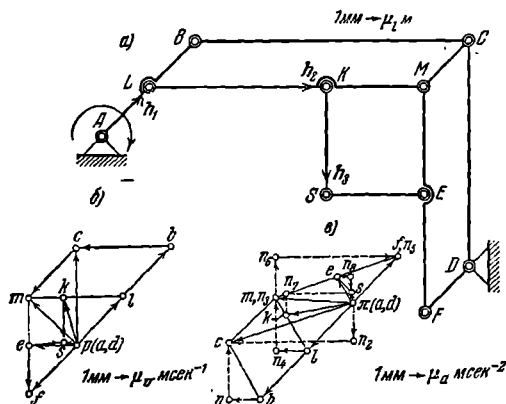


Рис. 500. Механизм шарнирного четырехзвенника: а) кинематическая схема с дополнительными двухповодковыми группами; б) план скоростей; в) план ускорений.

результатирующая сила инерции $P_{и}$ звеньев механизма, приложенная в его центре масс S . Перенесем точку приложения силы $P_{и}$ в точку A , выбранную в качестве начала координат, для чего в точке A приложим две равные по величине и противоположно направленные силы $P_{и}$ и $-P_{и}$. Тогда на фундамент будут действовать сила $P_{и}$, приложенная в точке A , и пара сил инерции с моментом $M_{и} = P_{и}h_{и}$, где $h_{и}$ — плечо силы $P_{и}$ относительно точки A .

Разложим силу $P_{и}$, приложенную в точке A , на силы $P_{иx}$ и $P_{иy}$, направленные вдоль осей x и y . Под действием силы $P_{иx}$ фундамент будет перемещаться в горизонтальном направлении, а под действием силы $P_{иy}$ — в вертикальном направлении. Вследствие периодичности и знакопеременности этих сил за каждый оборот механизма под их действием фундамент будет иметь колебательное движение в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Кроме того, фундамент будет находиться также под действием пары с моментом $M_{и}$, периодически изменяющимся и вызывающим колебания фундамента вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения механизма. При расчете фундамента на прочность необходимо будет все эти виды колебаний учитывать. Кроме того, указанные силы и моменты должны быть также приняты во внимание и при решении вопроса об устойчивости механизма на фундаменте.

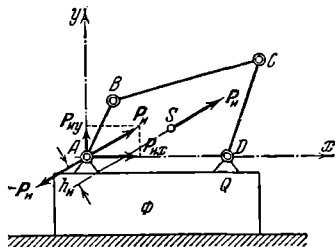


Рис. 501. Схема механизма шарнирного четырехзвенника, установленного на фундаменте.

§ 78. Уравновешивание сил инерции звеньев механизма

1°. Для уравновешивания только главного вектора сил инерции плоского механизма (без уравновешивания моментов сил инерции), как было показано выше [см. (16.35)], достаточно, чтобы общий центр S масс всех звеньев механизма оставался неподвижным и удовлетворялось условие

$$x_S = \text{const} \quad \text{и} \quad y_S = \text{const}. \quad (16.47)$$

Два равенства (16.47) могут быть заменены одним векторным

$$\mathbf{r}_S = \text{const}, \quad (16.48)$$

где $\mathbf{r}_S$ — вектор, определяющий положение общего центра масс звеньев механизма.

Как было показано в § 76, радиус-вектор $\mathbf{r}_S$ центра S масс звеньев механизма определяется как геометрическая сумма отрезков, представляющих векторы главных точек отдельных звеньев. Так, для механизма шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 502), если обозначить массы звеньев 1, 2 и 3 соответственно через m_1 , m_2 и m_3 , расстояния центров тяжести S_1 , S_2 и S_3 этих звеньев от точек A , B и C — через a_1 , a_2 и a_3 и длины звеньев — через l_1 , l_2 и l_3 , то радиус-вектор $\mathbf{r}_S$ центра S масс его звеньев будет равен геометрической сумме векторов главных точек

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3,$$

где модули векторов h_1 , h_2 и h_3 определяются по формулам (16.41), (16.42) и (16.43).

Для удовлетворения условия (16.48) необходимо, чтобы соблюдалось условие

$$h_1 + h_2 + h_3 = \text{const.} \quad (16.49)$$

Это условие может быть удовлетворено, если модули векторов h_1 , h_2 и h_3 подобрать так, что векторный многоугольник, образованный ими, будет подобен четырехугольнику $ABCD$, образуемому осями звеньев механизма (рис. 502). При таком подборе модули h_1 , h_2 и h_3 должны удовлетворять пропорциям

$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2} = \frac{h_3}{l_3}. \quad (16.50)$$

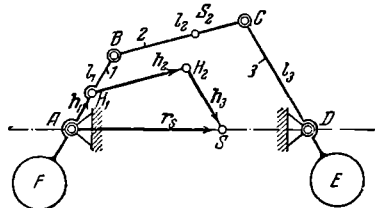


Рис. 502. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с противовесами на звеньях I и 3.

Вследствие параллельности векторов h_1 , h_2 и h_3 соответственно сторонам AB , BC и CD их векторный многоугольник является как бы вторым шарнирным четырехзвенным механизмом AH_1H_2S , подобным основному механизму, и следовательно, все точки фигуры AH_1H_2S описывают траектории, подобные траекториям соответствующих точек звеньев данного механизма. Общий центр S масс звеньев механизма $ABCD$ в этом случае находится на прямой AD и за все время движения механизма остается неподвижным, при этом удовлетворяется условие (16.47), или условие (16.48), и следовательно, силы инерции звеньев шарнирного четырехзвенника оказываются уравновешенными.

Механизм будет уравновешен при любом положении точки S на прямой AD как между точками A и D , так и вправо или влево от них.

Подставляя в равенства (16.50) значения h_1 , h_2 и h_3 из формул (16.41), (16.42) и (16.43), получаем для заданных размеров l_1 , l_2 и l_3 следующие два уравнения:

$$m_1 a_1 = -m_2 \frac{l_1}{l_2} (l_3 - a_3), \quad (16.51)$$

$$m_2 a_2 = -m_3 \frac{l_2}{l_3} (l_3 - a_3). \quad (16.52)$$

Из этих уравнений непосредственно следует, что при решении задачи о подборе масс механизмов, удовлетворяющих условию его уравновешенности, можно получить бесчисленное множество решений, так как в эти два уравнения входят шесть переменных: m_1 , m_2 , m_3 , a_1 , a_2 и a_3 , из которых четыре могут быть выбраны произвольно.

Из уравнений (16.51) и (16.52) также следует, что если задать одно из трех расстояний a_1 , a_2 или a_3 на оси звена между шарнирами, остальные два расстояния до центров тяжести получатся за крайними шарнирами звена, и, считая, что расположение центра масс

за шарнирами соответствует как бы установке *противовеса* (дополнительной массы), можно сказать, что уравнивание результирующей силы инерции звеньев механизма шарнирного четырехзвенника может быть достигнуто путем установки противовесов на двух его звеньях. Например, при $a_3 > l_3$ и при установке противовеса E на звене CD за точкой D (рис. 502) из уравнения (16.52) следует, что $a_2 > 0$, т. е. центр масс S_2 звена BC должен быть расположен от точки B вправо. Если при этом $a_2 < l_2$, то из уравнения (16.51) имеем $a_1 < 0$, и центр масс звена AB должен быть расположен вне звена, за точкой A . Следовательно, противовесы F и E необходимо расположить на звеньях 1 и 3 так, как это показано на рис. 502. Если $a_2 > l_2$, то $a_1 > 0$, и следовательно, звенья 2 и 3 имеют центры масс вне этих звеньев и противовесы должны быть расположены на звеньях 2 и 3 так, как это показано на рис. 503.

2°. В практических расчетах задачу о подборе масс звеньев и положений их центров масс решают в следующем порядке. Задаются положением центра масс и массой одного из звеньев. Тогда массы и расстояния центров масс других звеньев легко подбираются с помощью уравнений (16.51) и (16.52). Например, задаваясь значениями m_3 и a_3 , получаем из уравнения (16.52) значение $m_2 a_2$, в котором можно задаваться одним из переменных, учитывая при этом соответствующий знак у a_2 . Подставляя, далее, полученные значения в уравнение (16.51), получаем значения $m_1 a_1$, в котором также можно задать одним из переменных, соблюдая знак у расстояния a_1 . Точно такой же расчет может быть произведен путем первоначального выбора значений m_3 и a_3 или m_1 и a_1 и т. д.

При различных исходных заданиях можно получить различные схемы уравнивания и получить положение точки S — центра масс механизма — в любом месте прямой AD или на ее продолжении, как это показано на рис. 503. При всех трех положениях центров масс S_1 , S_2 и S_3 механизм будет уравновешен, но для положений S_2 и S_3 , когда центр масс S находится вне отрезка AD , противовесы должны быть расположены на больших расстояниях от шарниров, что конструктивно неудобно. Кроме того, расположение общего центра масс S за точками A и D дает неравномерное распределение сил веса на опоры и невыгодно с точки зрения устойчивости механизма. Поэтому надо считать, что наиболее рациональным является расположение центра масс механизма между точками A и D . В каждом конкретном случае это расположение может быть задано в зависимости от поставленных конструктивных требований.

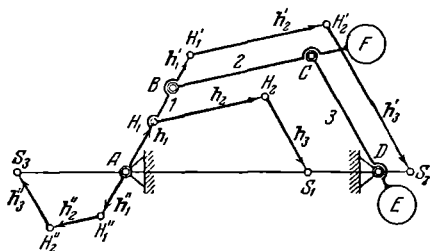


Рис. 503. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с противовесами на звеньях 2 и 3.

Условие (16.48) удовлетворяется, в частности, и тогда, когда $r_S = 0$. В этом случае центр масс механизма совпадает с точкой A или D . Такое условие практически приводит к неконструктивным размерам звеньев и величинам их масс.

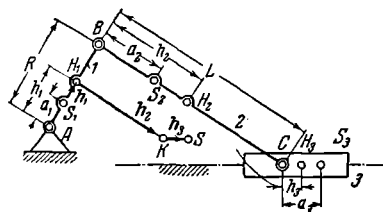


Рис. 504. Схема кривошипно-ползунного механизма с векторами главных точек.

неподвижной точкой механизма, и должно быть соблюдено условие $r_S = 0$. Но это может иметь место только в том случае, если векторы h_1 и h_2 каждый в отдельности равны нулю:

$$h_1 = 0 \text{ и } h_2 = 0.$$

Подставляя в эти уравнения значения для h_1 и h_2 , равные согласно § 76,1°

$$h_1 = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) R}{m} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{m_2 a_2 + m_3 L}{m},$$

получаем

$$m_1 a_1 + (m_2 + m_3) R = 0, \quad m_2 a_2 + m_3 L = 0,$$

или

$$m_1 a_1 = -(m_2 + m_3) R, \quad (16.53)$$

$$m_2 a_2 = -m_3 L. \quad (16.54)$$

Из этих уравнений видно, что как a_1 , так и a_2 отрицательны, и потому центры тяжести S_1 и S_2 должны лежать не вправо от точек A и B , а влево. Если масса m_3 ползуна 3 (рис. 505) задана, то, задаваясь в уравнении (16.54), например, расстоянием a_2 , находим массу m_3 , которая представляет собой массу шатуна 2 с насаженным на него противовесом E (рис. 505). Полученное значение массы m_3 подставляем в уравнение (16.53). Если теперь задаться расстоянием a_1 , то из этого уравнения определится масса m_1 ,

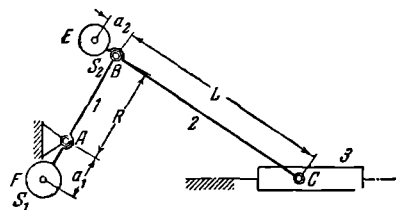


Рис. 505. Схема кривошипно-ползунного механизма с противовесами на кривошипе и шатуне.

представляющая собой массу кривошипа 1 с насаженным на него противовесом F . Если задаться в уравнениях (16.53) и (16.54) желаемыми массами m_1 , m_2 и m_3 , то определятся необходимые расстояния

a_2 и a_1 центров масс S_2 и S_1 шатуна 2 и кривошипа 1 соответственно от точек B и A . Так как по конструктивным соображениям противовес E обычно располагается вблизи от точки B и a_2 выбирается малым, то, как это видно из уравнения (16.54), масса противовеса получается весьма большой, что ведет к появлению добавочных нагрузок в шарнирах и направляющей ползуна. Поэтому подобное полное уравнивание результирующей силы инерции звеньев кривошипно-ползунных механизмов, несмотря на все его динамические достоинства, на практике применяется редко.

4°. В современных конструкциях чаще применяют частичное уравнивание сил инерции звеньев кривошипно-ползунных механизмов.

Аналогично уравниванию шарнирных четырехзвенных механизмов и для кривошипно-ползунного механизма можно подобрать массы звеньев и их центры масс так, чтобы главные векторы h образовывали фигуру, подобную кривошипно-ползунному механизму, но, в отличие от механизма шарнирного четырехзвенника, центр масс кривошипно-ползунного механизма не будет неподвижным, а будет двигаться по прямой, параллельной оси ползуна. В этом случае в механизме останутся неуравновешенными силы инерции, направленные вдоль этой оси. Такое частичное уравнивание весьма часто применяется на практике (например, в механизмах сельскохозяйственных машин, двигателей и др.).

Чтобы центр масс S механизма или, что равносильно, точка K (рис. 506) двигались параллельно оси ползуна 3, надо удовлетворить пропорцию, аналогичную пропорции (16.50), а именно:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R}{L}, \quad (16.55)$$

где R — радиус кривошипа 1, а L — длина шатуна 2. В этом случае мы как бы получаем второй кривошипно-шатунный механизм с кривошипом длиной h_1 и шатуном длиной h_2 . Звено h_1 этого механизма вращается с угловой скоростью, равной угловой скорости кривошипа 1; точка K этого механизма, а следовательно, и точка S движутся по прямой, параллельной оси движения ползуна 3.

Подставляя в пропорцию (16.55) величины

$$h_1 = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) R}{m} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{m_2 a_2 + m_3 L}{m},$$

получаем

$$\frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) R}{m_2 a_2 + m_3 L} = \frac{R}{L}.$$

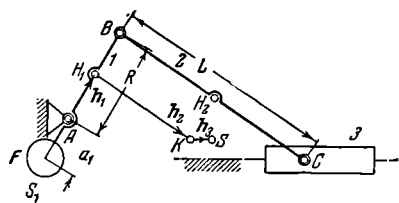


Рис. 506. Схема кривошипно-ползунного механизма с противовесом на кривошипе.

При практических расчетах величины a_2 , R и L в большинстве случаев бывают заданы. В этом случае имеем:

$$m_1 a_1 = -m_2 \frac{R}{L} (L - a_2). \quad (16.56)$$

Так как обычно центр масс шатуна лежит между точками B и C ($a_2 < L$), то центр тяжести S_1 кривошипа I должен лежать влево от точки A , потому что величина $m_1 a_1$ в уравнении (16.56) стоит со знаком минус. Определив из уравнения (16.56) необходимую массу кривошипа I , получим, что на фундамент будут действовать только силы инерции, параллельные оси движения ползуна, и следовательно, механизм и фундамент будут перемещаться только в этом направлении. Подобное уравнивание весьма часто применяется на практике, но оно решает задачу об уравнивании сил инерции только частично, причем в некоторых случаях слагающие силы инерции, действующие по направлению движения ползуна, могут достигать значительной величины.

5°. Таким образом, задача о полном уравнивании сил инерции звеньев механизма путем подбора величин и расположения масс для многих механизмов является теоретически вполне разрешимой, но в некоторых случаях указанный подбор масс практически не может

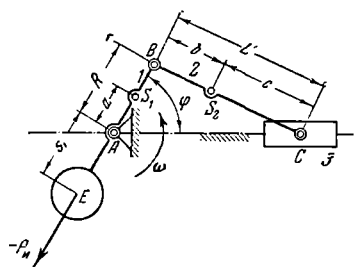


Рис. 507. Схема кривошипно-ползунного механизма с одним противовесом на кривошипе.

быть достигнут вследствие особенностей конструкции или же вследствие необходимости установки для этого слишком больших дополнительных масс (противовесов). Поэтому в современных конструкциях механизмов проводится частичное уравнивание сил инерции звеньев механизма.

Например, в кривошипно-ползунных механизмах на практике часто применяется уравнивание только сил инерции массы кривошипа и части сил инерции массы шатуна. Пусть, например, имеется кривошипно-ползунный механизм, показанный на рис. 507. Разносим массу m_2 шатуна 2, сосредоточенную в его центре масс S_2 , статически на две точки B и C (см. § 69).

Массы m_{2B} и m_{2C} , сосредоточенные в точках B и C , соответственно равны

$$m_{2B} = \frac{m_2 c}{b + c}, \quad m_{2C} = \frac{m_2 b}{b + c}. \quad (16.57)$$

Массу m_1 кривошипа I , сосредоточенную в его центре масс S_1 , статически приводим к точке B . Величина m_{1B} этой массы равна

$$m_{1B} = m_1 \frac{a}{R}.$$

Полная масса m_B , условно сосредоточенная в точке B , равна

$$m_B = m_{1B} + m_{2B} = m_1 \frac{a}{R} + m_2 \frac{c}{L}. \quad (16.58)$$

Центробежная сила инерции $P_{и}$, зависящая от величины этой массы, равна

$$P_{и} = m_B \omega^2 R = \left(m_1 \frac{a}{R} + m_2 \frac{c}{L} \right) \omega^2 R. \quad (16.59)$$

Для уравновешивания этой силы инерции необходимо на расстоянии s_1 от точки А установить противовес E массы $m_{п}$, центробежная сила $P_{пЕ}$ которого была бы равна по величине $P_{и}$ и обратна по знаку:

$$P_{пЕ} = m_{п} \omega^2 s_1 = -P_{и}.$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (16.59), получаем:

$$m_{п} s_1 = - (m_1 a + m_2 \frac{R}{L} c).$$

Таким образом, подбирая массу $m_{п}$ и расстояние s_1 , можно уравновесить все силы инерции от вращающихся масс звеньев механизма. Неуравновешенными в этом случае остаются силы инерции всех горизонтально движущихся масс звеньев и, конечно, момент сил инерции звеньев относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения механизма.

В практических расчетах для уравновешивания сил инерции поступательно движущихся масс иногда устанавливают на кривошипе противовес E массы $m'_п$, большей $m_{п}$, удовлетворяющей условию

$$m'_п s_1 = - (m_B R + m_C R). \quad (16.60)$$

В уравнении (16.60) масса m_B представляет собой приведенную к точке В массу кривошипа 1 и часть массы шатуна 2, отнесенной статически к этой точке; масса m_C представляет собой массу поступательно движущегося ползуна 3, сосредоточенную в точке С, и часть массы шатуна 2, отнесенную статически к этой точке. Масса m_B на основании уравнения (16.58) равна

$$m_B = m_1 \frac{a}{R} + m_2 \frac{c}{L},$$

а масса m_C равна

$$m_C = m_3 + m_{2C}.$$

Подставляя в это равенство вместо m_{2C} его значение из второй формулы (16.57) и принимая во внимание, что $b + c = L$, имеем:

$$m_C = m_3 + m_2 \frac{b}{L}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (16.60), находим:

$$m'_п s_1 = - (m_1 a + (m_2 + m_3) R). \quad (16.61)$$

Установкой противовеса, величина которого подсчитана по формуле (16.61), уравновешиваются полностью силы инерции самого кривошипа, а также часть горизонтальных сил инерции поступательно движущихся масс, но в системе дополнительно возникают вертикальные силы инерции. В самом деле, поступательно движущиеся массы в центральном кривошипно-ползунном механизме (рис. 507), создают силу инерции, равную по величине [см. формулу (8.43), § 37]

$$P_{иС} = - m_C a_C \approx m_C \omega^2 R \left(\cos \varphi - \frac{R}{L} \cos 2\varphi \right). \quad (16.62)$$

Условимся называть силы инерции, величины которых пропорциональны $\cos \varphi$, *силами инерции первого порядка*, а силы инерции, величины которых пропорциональны $\cos 2\varphi$, — *силами инерции второго порядка*. Очевидно, что в приближенное уравнение (16.62) входят только силы инерции первого и второго порядков. Если бы нами было написано точное уравнение, то в него вошли бы и силы инерции более высоких порядков. Если пренебречь силами инерции второго и более высоких порядков, которые обычно меньше сил инерции первого порядка, то уравнение (16.62) изменится так:

$$P_{иС} \approx m_C \omega^2 R \cos \varphi. \quad (16.63)$$

Противовес массы $m'_п$ создает в механизме силу инерции $P_{ип}$, величина которой равна

$$P_{ип} = -m'_п \omega^2 s_1.$$

Раскладывая силу инерции $P_{ип}$ по горизонтальному и вертикальному направлениям (рис. 508), получаем, что горизонтальная проекция этой силы инерции будет равна

$$P_{иН} = -m'_п \omega^2 s_1 \cos \varphi,$$

а вертикальная проекция равна

$$P_{иВ} = -m'_п \omega^2 s_1 \sin \varphi.$$

Подставляя в эти формулы вместо произведения $m'_п s_1$ его значение из равенства (16.61), получаем:

$$P_{иН} = (-m_1 a \omega^2 \cos \varphi) + (-m_2 R \omega^2 \cos \varphi) + (-m_3 R \omega^2 \cos \varphi) = \\ = -(m_B R + m_C R) \omega^2 \cos \varphi \quad (16.64)$$

и

$$P_{иВ} = -(m_1 a \omega^2 \sin \varphi) + (-m_2 R \omega^2 \sin \varphi) + (-m_3 R \omega^2 \sin \varphi) = \\ = -(m_B R + m_C R) \omega^2 \sin \varphi. \quad (16.65)$$

Из этих формул следует, что установленный противовес массы $m'_п$ полностью уравнивает силы инерции масс, приведенных к точке В и силу инерции первого порядка поступательно движущихся масс, приведенных

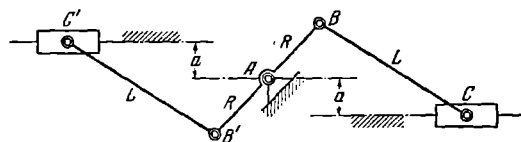


Рис. 509. Схема двоянного самоуравновешенного кривошипно-ползунного механизма.

точке С. Однако в системе, как это видно из формулы (16.65), возникает дополнительная вертикальная сила, пропорциональная $\sin \varphi$ угла поворота, и вместо уравнивающей горизонтальной силы получается вертикальная сила. Таким образом, при разобранном способе уравнивания происходит

как бы замена горизонтальной силы инерции поступательно движущихся масс силой инерции, направленной по вертикали. Этот способ уравнивания иногда применяется в двигателях, компрессорах, сельскохозяйственных и других машинах.

6° В некоторых случаях на практике частичное или даже полное уравнивание сил инерции звеньев достигается установкой симметрично расположенных механизмов с равными массами симметрично расположенных звеньев, благодаря чему получается самоуравнивание механизма в целом. На рис. 509 показана одна из таких схем. Механизм состоит из двух сим-

метрично расположенных кривошипно-ползунных механизмов ABC и $AB'C'$. В этом механизме силы инерции масс звеньев уравниваются, но остается неуровновешенная пара сил инерции.

Далее следует указать на схему уравнивания сил инерции ползуна 3 кривошипно-ползунного механизма, показанную на рис. 510.

На валах A и A' жестко укрепляются два одинаковых зубчатых колеса 1 и 2, снабженные двумя противовесами a равной массы. При своем вращении противовесы развивают силы инерции $P_{и}$ и $P'_{и}$, равные по величине

$$P_{и} = P'_{и} = m\omega^2 s,$$

где m — масса противовеса и s — расстояние центра масс противовеса от оси вращения.

Разлагая эти силы по горизонтальному и вертикальному направлениям, получаем:

$$P_{иx} = -m\omega^2 s \cos \varphi,$$

$$P'_{иx} = -m\omega^2 s \cos \varphi,$$

$$P_{иy} = m\omega^2 s \sin \varphi,$$

$$P'_{иy} = -m\omega^2 s \sin \varphi.$$

Силы $P_{иy}$ и $P'_{иy}$ взаимно уравниваются, а силы $P_{иx}$ и $P'_{иx}$ складываются, создавая силу

$$2P_{иx} = -2m\omega^2 s \cos \varphi.$$

Эта сила передается на опоры механизма и уравнивает силы инерции первого порядка [см. формулу (16.63)], если подобрать величины масс так, чтобы удовлетворялось условие

$$m_C \omega^2 R \cos \varphi = 2m\omega^2 s \cos \varphi,$$

где m_C — масса ползуна C . В этом случае масса противовеса m и расстояние s его центра масс до оси вращения должны быть связаны соотношением

$$ms = m_C \frac{R}{2}.$$

В рассматриваемой схеме уравнивания колеса 1 и 2 с равными противовесами не создают никакой дополнительной пары.

В настоящем курсе мы не рассматриваем вопроса об уравнивании составляющих главного момента сил инерции по осям x и y (см. § 75). Этот вопрос подробно рассматривается в специальных курсах динамики двигателей.

§ 79. Уравнивание вращающихся звеньев

1°. Решение задачи об уравнивании динамических нагрузок в кинематических парах механизмов от сил инерции звеньев в общем виде представляет весьма большие практические трудности. Решение этой задачи заключается в таком распределении масс звеньев, при котором полностью или частично устраняются динамические нагрузки. При этом подборе масс конфигурация звеньев и их вес в большинстве

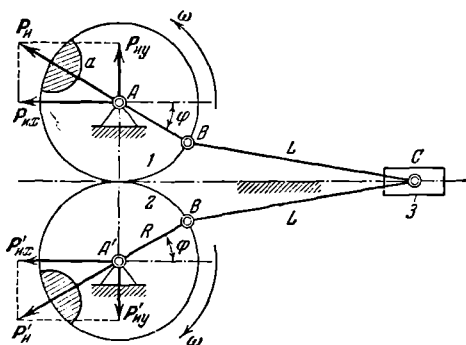


Рис. 510. Схема кривошипно-ползунного механизма с установленными на зубчатых колесах противовесами.

случаев получаются мало конструктивными, а потому такой способ применяется главным образом при уравнивании вращающихся деталей, обладающих значительной массой и большими угловыми скоростями. Сюда надо отнести валы быстроходных двигателей, барабаны центрифуг, турбины, тарелки сепараторов, барабаны молотилок, якоря динамомашин, веретена, роторы гироскопов и т. д. Число оборотов некоторых из этих деталей достигает 20 000—50 000 в минуту и более. При этих условиях работы чрезвычайно важным является вопрос о правильном распределении масс всех этих деталей относительно их оси вращения.

Пусть, например, мы имеем коленчатый вал A (рис. 511), вращающийся вокруг неподвижной оси $z-z$ с угловой скоростью ω . Как

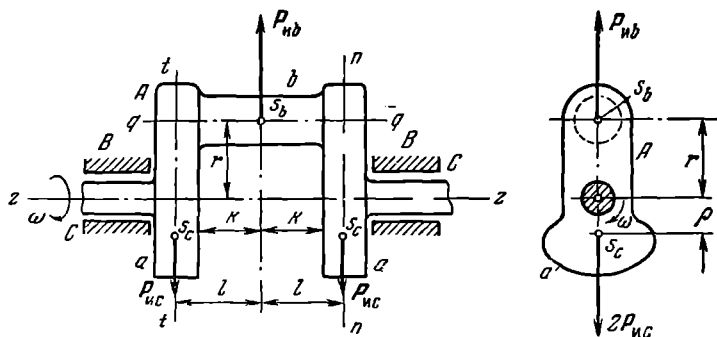


Рис. 511. Коленчатый вал двигателя.

это было показано в § 75, чтобы подшипники B не испытывали дополнительных динамических давлений от сил инерции масс вала, необходимым и достаточным является условие равенства нулю главного вектора момента от сил инерции масс материальных точек вала. Как известно из теоретической механики, это условие всегда удовлетворяется, если центр масс вращающегося звена лежит на его оси вращения, которая должна быть одной из его главных осей инерции. Если конструктивное оформление вала (рис. 511) удовлетворяет этому условию, то вал получается уравновешенным. При проектировании это достигается соответствующим выбором формы уравниваемой детали. Например, коленчатый вал (рис. 511) имеет фигурные щеки a , коренные шейки c и шатунную шейку b . Рассматривая в отдельности эти элементы вала, мы видим, что центр масс материальных точек коренных шеек располагается на оси вращения $z-z$ вала. Центр масс S_b точек шатунной шейки b находится на ее геометрической оси $q-q$ на равных расстояниях от щек a . Центробежная сила инерции P_{nb} шейки b равна по величине

$$P_{nb} = m_b \omega^2 r, \quad (16.66)$$

где m_b — общая масса шатунной шейки.

Сила инерции P_{nb} может быть полностью уравновешена соответствующим подбором масс m_c шек и их центров масс S_c (рис. 511). Для этого центры масс S_c должны лежать в плоскостях $t-t$ и $n-n$, симметрично расположенных относительно точки S_b на расстоянии ρ от оси $z-z$ вала так, чтобы удовлетворялось условие

$$2m_c\rho = m_b r. \quad (16.67)$$

В самом деле, если помножить правую и левую части равенства (16.67) на ω^2 , то получим:

$$2m_c\omega^2\rho = m_b\omega^2r$$

или согласно формуле (16.66)

$$2P_{nc} = P_{nb}.$$

Таким образом, суммарная сила инерции $2P_{nc}$ шек с полностью уравновешивает силу инерции P_{nb} шатунной шейки. Из уравнения

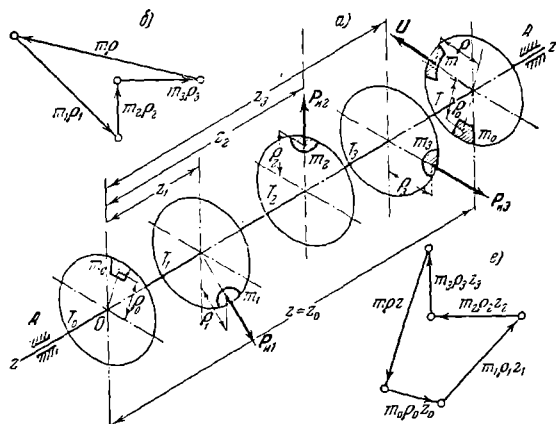


Рис. 512. К уравновешиванию нескольких масс, жестко установленных на валу.

моментов всех сил инерции относительно точки S_b следует, что момент от всех сил инерции масс вала также равен нулю. Таким образом, мы имеем равенство нулю как главного вектора сил инерции, так и главного вектора момента от сил инерции вала, т. е. этот вал полностью уравновешен.

При этом, как было показано выше в § 75, динамические нагрузки от сил инерции масс звеньев будут равны нулю и при вращении вала с угловым ускорением ε .

2°. Рассмотрим более общий случай уравновешивания вращающегося звена, когда с валом, вращающимся в подшипниках A , жестко связаны заданные массы m_1 , m_2 и m_3 (рис. 512, а). Пусть центры

масс m_1 , m_2 и m_3 расположены в трех плоскостях T_1 , T_2 и T_3 , перпендикулярных к оси вращения $z - z$ на расстояниях ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 . Величины центробежных сил инерции, развиваемых этими массами, равны

$$P_{и1} = m_1 \omega^2 \rho_1, \quad P_{и2} = m_2 \omega^2 \rho_2 \quad \text{и} \quad P_{и3} = m_3 \omega^2 \rho_3.$$

Переносим все эти силы в какую-либо плоскость T_0 , проведенную через произвольную точку O вала, перпендикулярно к оси $z - z$. Для этого в точке O каждый раз прикладываем по две равные, но противоположно направленные силы, величины которых равны $P_{и1}$, $P_{и2}$ и $P_{и3}$. Далее, складываем все перенесенные силы, для чего строим силовой многоугольник (рис. 512, б). Так как величины сил $P_{и1}$, $P_{и2}$ и $P_{и3}$ пропорциональны произведениям масс m на соответствующие расстояния ρ , то вместо сил $P_{и1}$, $P_{и2}$ и $P_{и3}$ можно откладывать в силовом многоугольнике произведения $m_1 \rho_1$, $m_2 \rho_2$ и $m_3 \rho_3$, являющиеся статическими моментами масс относительно оси вращения. Вектор $m\rho$ определяет величину уравновешивающей силы U :

$$U = m \omega^2 \rho. \quad (16.68)$$

Уравновешивающая масса m может быть установлена в любой точке по длине вала и на любом расстоянии ρ от его оси вращения, отложенном в направлении вектора $m\rho$ (рис. 512, а). Необходимо только, чтобы произведение $m\rho$ удовлетворяло плану сил, построенному на рис. 512, б. В рассматриваемом примере центр масс массы m расположен в плоскости T .

Установкой противовеса, удовлетворяющего формуле (16.68), уравновешиваются статические нагрузки на подшипники A от результирующей силы инерции. Для уравновешивания динамических нагрузок от моментов сил инерции находим моменты M_1 , M_2 и M_3 этих сил относительно точки O . Имеем:

$$M_1 = m_1 \omega^2 \rho_1 z_1, \quad M_2 = m_2 \omega^2 \rho_2 z_2, \quad M_3 = m_3 \omega^2 \rho_3 z_3, \quad M = m \omega^2 \rho z. \quad (16.69)$$

Строим многоугольник моментов (рис. 512, в). Так как плоскости действия всех пар содержат ось $z - z$, то многоугольник моментов лежит в плоскости, перпендикулярной к оси $z - z$. Направление векторов моментов выбираем так, чтобы, смотря вдоль по вектору, видеть вращение происходящим против часовой стрелки. Так как величина ω^2 в равенствах (16.69) входит в виде постоянного множителя, то величину вектора результирующего момента можно подсчитать, не вводя этого множителя.

Замыкающий вектор $\overline{m_0 \rho_0 z_0}$ в многоугольнике моментов (рис. 512, в) определит величину момента и плоскость действия уравновешивающей пары. Обозначим этот момент через M_0 . Имеем тогда:

$$M_0 = m_0 \omega^2 \rho_0 z_0. \quad (16.70)$$

Плоскость действия уравновешивающей пары вполне определяется замыкающим вектором $m_0 \rho_0 z_0$. Она перпендикулярна к этому вектору

и содержит ось $z-z$. Уравновешивающие массы m_0 могут быть в этой плоскости установлены в любых точках вала. В качестве плоскостей установки уравновешивающих грузов с массой m_0 по оси $z-z$ выбираем те же плоскости T_0 и T . Тогда при заданном расстоянии z_0 между этими плоскостями необходимо подобрать такие значения масс m_0 и расстояний ρ_0 их центров масс от оси $z-z$, чтобы удовлетворялось равенство (16.70). Одна из масс m_0 устанавливается так, чтобы ее центр масс находился в плоскости T_0 . Другая так, чтобы ее центр масс находился в плоскости T . Знак момента этой пары определяется замыкающим вектором многоугольника моментов (рис. 512, в).

Таким образом, установкой двух противовесов массы m_0 и одного противовеса массы m достигается полное уравновешивание всех масс, закрепленных на валу. Так как один из противовесов массы m_0 расположен в той же плоскости T (рис. 512, а), что и противовес массы m , то массы m_0 и m можно заменить одной массой. Следовательно, полное уравновешивание масс, закрепленных на валу, может быть достигнуто установкой двух противовесов, центры масс которых лежат в двух произвольно выбранных плоскостях.

3°. Правильно спроектированная с точки зрения полного уравновешивания

вращающаяся деталь все же может иметь некоторую неуравновешенность вследствие неоднородности материала, из которого она изготовлена, неточности обработки и т. д. Поэтому все быстро вращающиеся детали проверяют опытно на специальных машинах, которые называются *балансирующими машинами*. Конструкции балансирующих машин очень разнообразны, но большинство из них основано на принципе установки испытуемой детали на упругое основание (люлька на пружинах, подшипники на упругом основании и т. д.) и сообщения этой детали скорости, близкой к резонансной. Тогда неуравновешенные силы создают значительные амплитуды колебаний, которые регистрируются специальными устройствами, позволяющими определить места, в которых надо установить уравновешивающие массы или удалить лишнее количество материала.

Рассмотрим процесс динамической балансировки на станке Шитикова, схема которого показана на рис. 513. Балансируемая деталь I , представляющая собой в рассматриваемом случае ротор с фланцем B , укладывается в подшипники люльки 2, которая свободно вращается

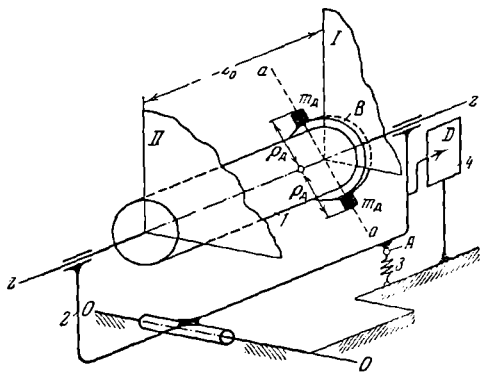


Рис. 513. Схема балансирующего станка Шитикова.

вокруг оси $O—O$. Второй конец люльки в точке A скреплен с пружиной $З$, имеющей регулировку, позволяющую устанавливать вал $z—z$ горизонтально. Амплитуды колебаний люльки вокруг оси $O—O$ записываются индикатором D .

Как это было показано выше, все центробежные силы отдельных частиц вращающегося тела могут быть сведены к эквивалентной системе из двух сил $P_{и1}$ и $P_{и2}$, лежащих в двух произвольно выбранных плоскостях I и II (рис. 514). В рассматриваемом примере плоскость I проходит через среднее сечение фланца (рис. 513). Эти силы могут быть представлены как центробежные силы, возникающие от

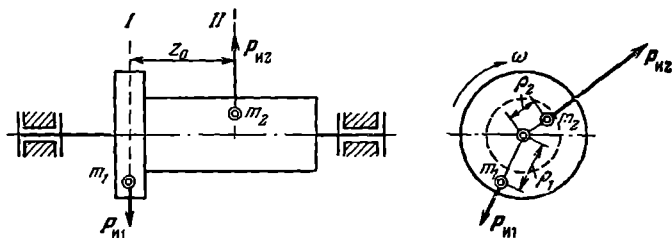


Рис. 514. Схема балансируемого ротора.

двух точечных масс m_1 и m_2 , расположенных в плоскостях I и II на расстояниях ρ_1 и ρ_2 от оси вращения. Силы $P_{и1}$ и $P_{и2}$ равны по величине

$$P_{и1} = m_1 \omega^2 \rho_1 \quad \text{и} \quad P_{и2} = m_2 \omega^2 \rho_2.$$

Как это было показано выше, угловая скорость ω^2 входит постоянным множителем. Поэтому величины сил $P_{и1}$ и $P_{и2}$ можно характеризовать статическими моментами масс $m_1 \rho_1$ и $m_2 \rho_2$.

Если в плоскостях I и II установить массы m_1 и m_{II} на расстояниях r_1 и r_{II} так, чтобы удовлетворялись условия

$$m_1 r_1 = - m_{II} r_{II} \quad (16.71)$$

и

$$m_2 r_2 = - m_{II} r_{II}, \quad (16.72)$$

то силы инерции ротора будут полностью уравновешены и будет иметь место полное уравновешивание сил инерции ротора.

Если вывести раму с ротором из равновесия (например, надавить на один из подшипников, а потом отпустить его), то рама придет в колебательное движение, которое вследствие сопротивления воздуха, трения в оси $O—O$ и т. п. будет затухающим и прекратится.

Частота k этого колебания является постоянным параметром для данной установки; она зависит от момента инерции колеблющейся системы относительно оси OO , жесткости пружины и в малой степени от сопротивления среды и называется частотой *собственных* (свободных) колебаний системы.

Установим ротор в подшипниках так, чтобы плоскость II (она, вообще говоря, может быть выбрана произвольно) проходила через ось вращения $O—O$. Приведем ротор в быстрое вращение. Вертикальная слагающая центробежной силы $P_{н1}$, равная $P_{н1} \cos \omega t$ (рис. 515), создает вокруг оси $O—O$ момент $M_{н1} = P_{н1} z_0 \cos \omega t$. Сила $P_{н2}$ располагается в одной плоскости II с осью $O—O$, и потому момент ее относительно этой оси равен нулю.

Момент $M_{н1}$, изменяющийся по гармоническому закону с частотой ω , равной угловой скорости ротора, вызывает вынужденные незатухающие колебания люльки. По мере убывания угловой скорости ω ротора уменьшается и частота изменения возмущающего момента $M_{н1}$. Когда эта частота ω станет близкой к собственной частоте колебаний системы k , возникает состояние резонанса; в это время амплитуда колебаний люльки станет наибольшей. Из теории колебаний известно, что при резонансе амплитуда A вынужденных колебаний может считаться пропорциональной амплитуде возмущающего фактора

$$A = \mu P_{н1}, \quad (16.73)$$

где μ — коэффициент пропорциональности, зависящий от постоянных параметров данной установки.

Если определить постоянную μ данного станка, то по амплитуде A , зафиксированной на индикаторе D , можно установить величину силы $P_{н1}$, определяющей дисбаланс, отнесенный к плоскости I . Это дает возможность определить искомое значение $m_1 r_1$.

Таким же образом, повторив испытание, но установив ротор плоскостью I на место плоскости II , и можно определить значение $m_{11} r_{11}$.

4°. Однако остался нерешенным еще вопрос о линии действия сил $P_{н1}$ и $P_{н2}$, следовательно, об отыскании тех направлений в плоскостях I и II , на которых нужно укрепить противовесы с точечными массами m_1 и m_{11} .

Для определения коэффициента пропорциональности μ и направлений, в которых необходимо установить массы m_1 и m_{11} , можно воспользоваться приемом, который сводится к тому, что к балансируемой детали искусственно присоединяется дополнительная масса m_d на некотором расстоянии r_d от оси вращения детали. Обычно в качестве такой массы берут кусок пластилина массы m_d , и этот кусок прилепляют к поверхности балансируемой детали. На рис. 513 куски этой массы показаны на поверхности фланца B . Масса m_d носит название *корректирующей массы*.

Разгоняем ротор до быстрого вращения, после чего отключаем приводное устройство, переводим ротор в режим выбега и измеряем величину максимальной амплитуды на индикаторе D . Пусть эта амплитуда равна A_1 [мм].

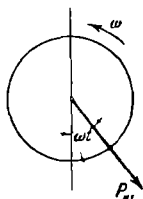


Рис. 515. Вектор центробежной силы неуравновешенной массы ротора.

Устанавливаем корректирующую массу m_d (рис. 513) в плоскости I на расстоянии ρ_d от оси $z-z$, равном внешнему радиусу фланца, приводим во вращение ротор и снова замеряем на индикаторе наибольшую амплитуду. Пусть эта амплитуда равна A_2 . Наконец, устанавливаем корректирующую массу m_d на том же расстоянии ρ_d от центра фланца B, но по другую сторону от него, и приводим во вращение ротор и снова замеряем наибольшую амплитуду. Пусть эта амплитуда равна A_3 . По полученным амплитудам A_1 , A_2 и A_3 можно определить величину $m_1 r_1$ [см. формулу (16.71)].

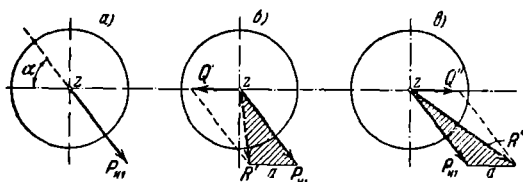


Рис. 516. К определению положения корректирующей массы при уравнивании ротора: а) положение вектора центробежной силы при первом испытании; б) векторная диаграмма действующих сил после установки корректирующей массы; в) векторная диаграмма действующих сил при третьем испытании с корректирующей массой.

На рис. 516, а показана сила P_{n1} , вызывающая вынужденные колебания в первом испытании.

На рис. 516, б показана сила R' , полученная вследствие установки корректирующей массы m_d при втором испытании. Имеем:

$$R' = P_{n1} + Q' = m_1 r_1 + m_d \rho_d.$$

На рис. 516, в показана сила R'' , полученная вследствие установки корректирующей массы при третьем испытании. Имеем:

$$R'' = P_{n1} + Q'' = P_{n1} - Q' = m_1 r_1 - m_d \rho_d,$$

так как $Q'' = -Q_1$.

Совместим заштрихованные на рис. 516, б и 516, в треугольники так, чтобы равные их стороны a совпадали (рис. 517). Тогда получаем параллелограмм BCDE, у которого стороны a , b , c и d и диагонали связаны условием

$$2c^2 + 2d^2 = (BD)^2 + (CE)^2$$

или

$$c = \sqrt{\frac{(BD)^2 + (CE)^2 - 2d^2}{2}}. \quad (16.74)$$

Рис. 517. Диаграмма для определения статического момента противояеса, уравнивающего ротор.

Так как согласно равенству (16.73) $A_1 = \mu P_{n1}$, $A_2 = \mu R'$, $A_3 = \mu R''$ и $A_d = \mu Q' = \mu Q''$, где μ — общий коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров установки, то, заменяя в равенстве (16.74) отрезки c , d , (BD) и (CE) их значениями, равными

$$c = Q' = Q'' = \frac{A_d}{\mu}, \quad d = P_{n1} = \frac{A_1}{\mu},$$

$$(BD) = R'' = \frac{A_3}{\mu} \quad \text{и} \quad (CE) = R' = \frac{A_2}{\mu},$$

получаем:

$$A_d = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}. \quad (16.75)$$

Так как амплитуды A_1 , A_2 и A_3 нами могут быть замерены, то из формулы (16.75) можно определить амплитуду A_d . Согласно условию (16.73)

$$A_d = \mu Q' = \mu Q'' = \mu m_d \rho_d.$$

Из последнего равенства определяем коэффициент пропорциональности μ :

$$\mu = \frac{A_d}{m_d \rho_d}.$$

Величина статического момента $m_1 r_1$ уравнивающего противовеса может быть теперь получена из формулы

$$m_1 r_1 = P_{u1} = \frac{A_1}{\mu} = \frac{A_1}{A_d} m_d \rho_d.$$

Угол α (рис. 516, а) между направлением, на котором надо установить противовес m_1 , и направлением установки корректирующей массы m_d определяется согласно рис. 517 из соотношения

$$\alpha_{1,2} = \arccos \frac{A_1^2 + A_d^2 - A_3^2}{2A_1 A_d}. \quad (16.76)$$

Из последнего соотношения будут получены два значения угла α .

Вопрос о пригодности того или другого значения решается испытанием на станке: противовес m_1 на выбранном расстоянии r_1 устанавливается сначала под углом α_1 , затем под углом α_2 ; пригодной является та установка, при которой вибрации отсутствуют (даже при критической, т. е. резонансной угловой скорости).

Поменяв местами плоскости I и II, т. е. установив ротор на станке так, чтобы его ось была повернута на 180° относительно первоначального положения, мы тем же способом можем найти статический момент $m_{II} r_{II}$ уравнивающего противовеса m_{II} , устанавливаемого в плоскости II. Практически устранение неуравновешенности производится или удалением части массы детали или закреплением дополнительной массы.

Таким образом, установив в плоскостях I и II противовесы m_1 и m_{II} , мы полностью уравниваем силы инерции ротора.

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА XVII

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЗМОВ

§ 80. Режимы движения механизмов

1°. Полным временем движения механизма назовем промежуток времени от момента начала движения механизма до момента конца его движения. Так как закон движения всех звеньев механизма определяется законом движения ведущего звена, *то полным временем движения механизма* является также промежуток времени от момента начала движения *ведущего звена* до момента конца его движения.

Полное время движения механизма состоит из трех частей:

- а) времени *разбега*,
- б) времени *установившегося движения*,
- в) времени *выбега*.

Время разбега характеризуется возрастанием скорости ведущего звена от нулевого значения до некоторого среднего значения, соответствующего нормальной рабочей скорости ведущего звена механизма. Во время установившегося движения обычно скорость ведущего звена механизма колеблется около среднего значения, соответствующего нормальной рабочей скорости ведущего звена механизма, периодически при этом повторяющейся.

Время выбега характеризуется убыванием скорости ведущего звена от среднего значения нормальной рабочей скорости механизма до нулевого ее значения.

На рис. 518 показана так называемая *тахограмма механизма* — кривая $\omega = \omega(t)$ зависимости угловой скорости ω ведущего звена от времени t . Полное время T движения механизма состоит из времени T_p разбега, времени $T_{y. \lambda}$ установившегося движения и времени T_b выбега. Рис. 518 показывает, что в течение времени установившегося движения кривая скорости $\omega = \omega(t)$ имеет некоторые периодические колебания около среднего значения ω_{cp} , соответствующего нормальной рабочей скорости ведущего звена.

Циклом движения ведущего звена механизма называется промежуток времени, по истечении которого положение, скорость и ускорение ведущего звена принимают первоначальные значения. На рис. 518 время установившегося движения имеет четыре цикла. Каждому циклу движения соответствует время $T_{ц}$. Таким образом, общее время T равно

$$T = T_p + T_{y.д} + T_v,$$

а время $T_{y.д}$ равно

$$T_{y.д} = k T_{ц},$$

где k — число циклов.

Продолжительность времени T_p , времени T_v и времени $T_{ц}$ зависит от соотношений между действующими силами, массами и кинематическими параметрами механизма, и если эти соотношения известны и достаточны, то всегда можно определить время T_p разбега, время T_v выбега и время $T_{ц}$ одного цикла движения.

Полное время $T_{y.д}$ установившегося движения может состоять из любого числа циклов движения и зависит от того, сколь долго необходимо и возможно поддерживать рабочий режим движения механизма — режим со средней рабочей угловой скоростью $\omega_{ср}$.

Необходимо отметить, что во многих машинах их механизмы могут и не иметь четко разграниченных стадий движения. Так, например, в грузоподъемных кранах, экскаваторах, некоторых транспортирующих машинах и др. полное время движения того или иного механизма может состоять из времени разгона и времени выбега, и в этих механизмах отсутствует время установившегося движения с характерными для него циклами движения.

Периодическим движением механизма называется такое движение, при котором в течение некоторого промежутка времени механизм обладает постоянными циклами движения, причем в течение каждого цикла движение происходит по одному и тому же закону.

Например, рис. 518 показывает, что механизм имеет периодическое движение на участке времени $T_{y.д}$. Периодическое движение механизма отличается также и тем, что при любом сдвиге начала отсчета времени $T_{ц}$ это время остается постоянным. Если (рис. 518), например, время $T_{ц}$ начать отсчитывать не от точки b , а от точки e , то соответственно конец цикла передвинется из точки f в точку g ; при этом отрезки (bf) и (eg) будут равны между собой.

Цикл может соответствовать одному или нескольким оборотам ведущего вала. Так, например, ведущий вал насоса с кривошипно-

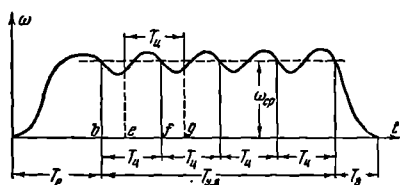


Рис. 518. Тахограмма механизма.

ползунным механизмом в течение цикла делает один оборот. У четырехтактного двигателя внутреннего сгорания в течение цикла ведущий вал делает два оборота. В некоторых машинах один цикл соответствует и большему числу оборотов ведущего вала.

2°. Рассмотрим теперь, чем характеризуются с точки зрения динамики разбег, установившееся движение и выбег. Для этого напомним уравнение кинетической энергии. Это уравнение применительно к механизму может быть написано так:

$$A_d - A_c = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}, \quad (17.1)$$

где A_d есть работа всех движущих сил, A_c — работа всех сил сопротивления, $\sum mv^2/2$ — кинетическая энергия механизма, а v_0 и v суть скорости в начале и в конце рассматриваемого перемещения. Для времени разбега механизма необходимым является условие, в соответствии с которым конечная скорость v была бы по величине больше начальной скорости v_0 , а это влечет за собой требование, чтобы работа сил движущих за все это время была больше работы сил сопротивления:

$$A_d > A_c.$$

Для времени установившегося движения через каждый цикл движения величина скорости v становится равной величине скорости v_0 и, следовательно, за тот же цикл ~~работа движущих сил должна быть равна работе сил сопротивления~~

$$A_d = A_c.$$

Для времени выбега $v < v_0$, и потому должно быть

$$A_d < A_c.$$

Соответственно указанному правая часть уравнения (17.1) принимает последовательно следующие значения. Для времени разбега

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} > 0; \quad (17.2)$$

для целого числа циклов во время установившегося движения

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = 0, \quad (17.3)$$

а для времени выбега

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} < 0. \quad (17.4)$$

Из полученных уравнений видно, что за время разбега механизма происходит приращение его кинетической энергии. Во время установившегося движения это приращение за целый цикл движения

механизма равно нулю. За время выбега механизма происходит отдача всей кинетической энергии, накопленной им за время разбега.

3°. Рассмотрим вопрос об энергии, потребляемой машиной на преодоление различных видов сопротивлений, и установим соотношения между работами, производимыми отдельными силами, действующими на машину.

Для этого уравнение кинетической энергии механизма (17.1) представим в следующем виде:

$$A_d - A_c - \left(\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} \right) = 0. \quad (17.5)$$

Величина, стоящая в скобках, может быть условно представлена как работа A_n сил инерции. Тогда уравнение (17.5) будет иметь вид

$$A_d - A_c \pm A_n = 0. \quad (17.6)$$

Двойной знак у работы A_n стоит в силу того, что приращение кинетической энергии в зависимости от значений величин v_0 и v может быть положительным и отрицательным.

Далее, в уравнении (17.6) выделим отдельно работу $A_{п.с}$ производственных сопротивлений, работу A_τ сил трения и других непроизводственных сопротивлений и работу $A_{с.т}$ сил тяжести звеньев.

Тогда уравнение (17.6) будет иметь следующий вид:

$$A_d - A_{п.с} - A_\tau \pm A_n \pm A_{с.т} = 0. \quad (17.7)$$

Работа $A_{с.т}$ имеет двойной знак, так как при подъеме общего центра масс звеньев механизма работа $A_{с.т}$ получается отрицательной, а при его опускании — положительной.

Если кроме указанных в уравнении (17.7) работ имеются работы и других сил, то они также могут быть включены в уравнение (17.7) с соответствующими знаками. Например, в некоторых случаях в это уравнение необходимо включать работу сил упругости пружин в зависимости от конструкции механизма и характера его работы.

4°. Уравнение (17.7) справедливо и для элементарных работ

$$dA_d - dA_{п.с} - dA_\tau \pm dA_n \pm dA_{с.т} = 0. \quad (17.8)$$

Разделив все члены уравнения (17.8) на дифференциал времени dt , получим:

$$\frac{dA_d}{dt} - \frac{dA_{п.с}}{dt} - \frac{dA_\tau}{dt} \pm \frac{dA_n}{dt} \pm \frac{dA_{с.т}}{dt} = 0$$

или

$$N_d - N_{п.с} - N_\tau \pm N_n \pm N_{с.т} = 0, \quad (17.9)$$

где N_d — мощность, развиваемая силами движущими, $N_{п.с}$ — мощность, затрачиваемая на преодоление производственных сопротивлений, N_τ —

мощность, затрачиваемая на преодоление всех сил трения и других непроизводительных сопротивлений, N_n — мощность, затрачиваемая на изменение кинетической энергии механизма или, наоборот (в зависимости от знака), получаемая за счет изменения кинетической энергии машины, $N_{с.т}$ — мощность, затрачиваемая на преодоление сил тяжести или, наоборот (в зависимости от знака), развиваемая силами тяжести.

Уравнение (17.9) можно назвать *уравнением энергетического баланса машины*.

Из уравнения (17.9) следует, что в некоторые моменты времени мощности N_n и $N_{с.т}$ могут быть положительными, в другие моменты времени — отрицательными. В случае знака плюс они увеличивают мощность N_d , которую надо развить на ведущем звене механизма, в случае знака минус они ее уменьшают. Например, в течение времени разбега [см. § 80, 2°, уравнение (17.2)] мощность N_n положительна, и следовательно, при разбеге машины мощность N_d должна быть больше, чем для времени выбега, когда мощность N_n отрицательна.

§ 81. Механический коэффициент полезного действия

1°. Рассмотрим отдельно установившееся движение. Для каждого цикла этого движения приращение кинетической энергии механизма равно нулю [см. уравнение (17.3)]

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = 0.$$

Следовательно, работа A_n в уравнении (17.7) равна нулю. Точно так же для каждого цикла равна нулю и работа сил тяжести $A_{с.т}$.

Для установившегося движения уравнение (17.7) имеет следующий вид:

$$A_d = A_{п.с} + A_r. \quad (17.10)$$

Таким образом, за полный цикл установившегося движения работа всех движущих сил равна работе всех производственных $A_{п.с}$ и всех непроизводительных A_r сил сопротивления.

Механическим коэффициентом η полезного действия называется отношение абсолютной величины работы сил производственных сопротивлений к работе всех движущих сил за время установившегося движения

$$\eta = \frac{A_{п.с}}{A_d} \quad (17.11)$$

или, принимая во внимание уравнение (17.10), получаем:

$$\eta = \frac{A_{п.с}}{A_{п.с} + A_r}. \quad (17.12)$$

Формулу можно представить также в следующем виде:

$$\eta = \frac{A_d - A_r}{A_d} = 1 - \frac{A_r}{A_d}, \quad (17.13)$$

ибо согласно уравнению (17.10)

$$A_{п.с} = A_d - A_r.$$

Отношение работы A_r непроизводительных сопротивлений к работе A_d движущих сил принято обозначать через φ и называть *коэффициентом потерь* в механизме. В соответствии с этим формулу (17.13) можно написать так:

$$\eta = 1 - \varphi. \quad (17.14)$$

Чем меньше в механизме работа непроизводительных сопротивлений, тем меньше его коэффициент потерь и тем совершеннее механизм в энергетическом отношении.

В некоторых случаях удобно вводить в рассмотрение коэффициент ψ , представляющий собой отношение $\psi = \frac{A_r}{A_{п.с}}$. Из формул (17.13) и (17.14) получаем связь между η , φ и ψ :

$$\psi = \frac{1 - \eta}{\eta} = \frac{\varphi}{1 - \varphi} = \frac{\varphi}{\eta}. \quad (17.15)$$

Из уравнения (17.13) следует: так как ни в одном механизме работа A_r непроизводительных сопротивлений (например, сил трения) практически не может равняться нулю, то коэффициент полезного действия η всегда меньше единицы.

Из формулы (17.13) следует далее, что коэффициент полезного действия может быть равен нулю, если

$$A_d = A_r.$$

Из последнего равенства следует, что коэффициент полезного действия равен нулю, если работа движущих сил равна работе всех сил непроизводительных сопротивлений, которые имеются в механизме. В этом случае движение механизма является *возможным, но без совершения какой-либо полезной работы*. Такое движение механизма обычно называют *движением вхолостую*.

Коэффициент полезного действия не может быть меньше нуля, так как для этого необходимо [см. формулу (17.13)], чтобы отношение работ A_r/A_d было больше единицы

$$\frac{A_r}{A_d} > 1 \quad \text{или} \quad A_d < A_r.$$

Из этого неравенства следует, что если механизм, удовлетворяющий указанному условию, находится в покое, то действительного движения механизма произойти не может. Это явление носит название *самоторможения механизма*. Если же механизм находится в

движении, то под действием сил непроизводительных сопротивлений он постепенно будет замедлять свой ход, пока не остановится (затормозится). Следовательно, получение при теоретических расчетах отрицательного значения коэффициента полезного действия служит признаком самоторможения механизма или невозможности движения механизма в заданном направлении.

Таким образом, коэффициент полезного действия механизма может изменяться в пределах

$$0 \leq \eta < 1. \quad (17.16)$$

Из формул (17.14) и (17.15) следует, что коэффициент φ изменяется в пределах $0 < \varphi \leq 1$, а коэффициент ψ — в пределах $0 < \varphi \leq \infty$.

2°. Во многих механизмах движущие силы и силы сопротивления в течение времени установившегося движения непостоянны. Поэтому

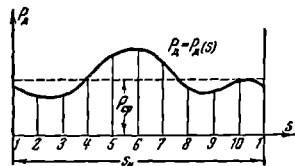


Рис. 519. График суммарной движущей силы.

для определения коэффициента полезного действия подсчитывают работу всех движущих сил и производственных сопротивлений за один полный цикл времени установившегося движения машины. Например, если задан график (рис. 519) суммарной движущей силы $P_d = P_d(s)$, то для определения работы A_d движущих сил весь график разбивают на отдельные участки и определяют площади этих участков. Полная работа A_d

движущих сил будет равна сумме всех этих площадей, умноженной на соответствующие масштабы силы P_d и пути s . Если, далее, определить величину средней движущей силы P_{cp} , то работа A_d движущих сил будет равна

$$A_d = P_{cp} s_d$$

где s_d есть путь, пройденный точкой приложения силы P_d за один полный цикл времени установившегося движения.

Аналогично может быть определена работа $A_{п.с}$, если задан график $P_{п.с} = P_{п.с}(s)$ сил производственных сопротивлений.

3°. Рассмотрим теперь вопрос об определении коэффициента полезного действия нескольких механизмов, соединенных *последова-*

тельно друг с другом. Пусть имеется n связанных между собой механизмов (рис. 520). Первый механизм приводится в движение движущими силами, совершающими работу A_d . Так как полезная

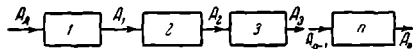


Рис. 520. Схема последовательного соединения механизмов.

работа каждого предыдущего механизма, затрачиваемая на производственные сопротивления, является работой движущих сил для каждого последующего, то коэффициент полезного действия η_1 первого

механизма равен

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_d}.$$

Для второго механизма коэффициент полезного действия

$$\eta_2 = \frac{A_2}{A_1}.$$

Для третьего механизма

$$\eta_3 = \frac{A_3}{A_2}$$

и, наконец, для n -го механизма

$$\eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Общий коэффициент полезного действия η_{1n} равен

$$\eta_{1n} = \frac{A_n}{A_d}.$$

Величина этого коэффициента полезного действия может быть получена, если перемножить все отдельные коэффициенты полезного действия $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Имеем:

$$\eta_{1n} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n = \frac{A_1}{A_d} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_d}.$$

Таким образом, *общий механический коэффициент полезного действия последовательно соединенных механизмов равняется произведению механических коэффициентов полезного действия отдельных механизмов, составляющих одну общую систему*

$$\eta_{1n} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n. \quad (17.17)$$

Значения работ за полное время установившегося движения машины пропорциональны средним значениям мощностей за тот же период времени. Поэтому формулы (17.11) и (17.13) можно написать так:

$$\eta = \frac{N_{п.с}}{N_d} \quad (17.18)$$

или

$$\eta = 1 - \frac{N_r}{N_d}, \quad (17.19)$$

где $N_{п.с}$ — средняя мощность, поглощаемая силами производственных сопротивлений, N_r — средняя мощность, поглощаемая силами непроизводственных сопротивлений, и N_d — средняя мощность, развиваемая движущими силами.

общего источника энергии, производящего работу A_d . Работа A_d может быть представлена как сумма

$$A_d = \frac{A'_n}{\eta_{1n'}} + \frac{A''_n}{\eta_{1n''}} + \frac{A'''_n}{\eta_{1n'''}} \quad (17.21)$$

где $\eta_{1n'}$, $\eta_{1n''}$, и $\eta_{1n'''}$ — общие коэффициенты полезного действия каждого из потоков $I—I$, $II—II$, $III—III$, равные

$$\begin{aligned}\eta_{1n'} &= \eta_{11}\eta_{23}\eta_{4'}\dots\eta_{n'}, \\ \eta_{1n''} &= \eta_{11}\eta_{23}\eta_{4''}\dots\eta_{n''}, \\ \eta_{1n'''} &= \eta_{11}\eta_{23}\eta_{4'''}\dots\eta_{n'''}. \end{aligned}$$

Общий коэффициент полезного действия η всей системы механизмов равен

$$\eta = \frac{A'_n + A''_n + A'''_n}{\frac{A'_n}{\eta_{1n'}} + \frac{A''_n}{\eta_{1n''}} + \frac{A'''_n}{\eta_{1n'''}}} \quad (17.22)$$

Из формулы (17.22) следует, что общий коэффициент полезного действия в значительной степени зависит от той схемы распределения потоков энергии, которая была принята при проектировании общей схемы системы механизмов.

§ 82. Определение коэффициентов полезного действия типовых механизмов

1°. Из формулы (17.19) следует, что для определения коэффициентов полезного действия отдельных механизмов необходимо каждый раз определять работу или мощность, затрачиваемые на преодоление всех сил непроизводительных сопротивлений за один полный цикл времени установившегося движения. Для этого определяют для ряда положений механизма соответствующие силы непроизводительных сопротивлений. Для большинства механизмов — это силы трения. Далее, по известным скоростям движения отдельных звеньев механизма определяют мощности, затрачиваемые на преодоление сил трения. По полученным значениям мощностей определяют среднюю мощность, затрачиваемую в течение одного полного цикла установившегося движения на преодоление сил трения. Тогда, если мощность движущих сил будет известна, коэффициент полезного действия определится по формуле (17.19).

Коэффициент полезного действия механизма всегда зависит от характера сил трения, которые возникают в кинематических парах, от вида смазки и т. д. Поэтому нельзя точно указать для тех или иных механизмов их коэффициенты полезного действия. В каждом отдельном случае этот вопрос должен подлежать теоретическому и экспериментальному анализу. В дальнейшем мы рассмотрим только

некоторые расчетные приемы, которые могут быть применены для решения этих вопросов. Начнем с рассмотрения механизма с низшими парами.

2°. Пусть, например, задан механизм (рис. 522, а) и требуется определить его коэффициент полезного действия. Предположим, что все непроизводительные сопротивления в механизме сводятся к сопротивлению трения и коэффициенты трения в кинематических парах заданы. Реакции $P_A, P_B, P_C, P_D, P_E, P_Q$ и P_H в кинематических парах для каждого положения механизма также известны. Величины сил трения соответственно равны

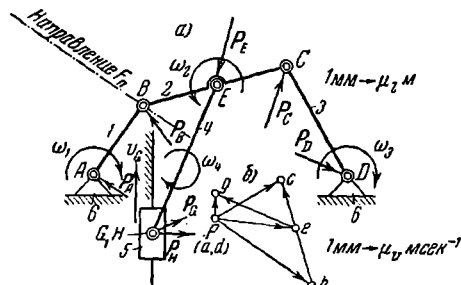


Рис. 522. К определению коэффициента полезного действия рычажного механизма: а) кинематическая схема; б) план скоростей.

$$\begin{aligned} F_A &= f_A P_A, & F_B &= f_B P_B, \\ F_C &= f_C P_C, & F_D &= f_D P_D, \\ F_E &= f_E P_E, & F_Q &= f_Q P_Q \\ & & F_H &= f_H P_H, \end{aligned}$$

где $f_A, f_B, f_C, f_D, f_E, f_Q$ и f_H суть заданные коэффициенты трения в соответствующих шарнирах и направляющей ползуна б.

Для определения мощностей, расходуемых на трение в различных кинематических парах, необходимо определить относительные угловые скорости в шарнирах и относительную скорость ползуна по направляющей. Относительная угловая скорость ω_{16} звена 1 относительно стойки б равна заданной угловой скорости ω_1 , так как вал А вращается в неподвижном подшипнике. Для определения относительных угловых скоростей в остальных шарнирах строим план скоростей механизма (рис. 522, б). Определяем, далее, из построенного плана скоростей угловые скорости звеньев BC, CD и EG. Величины этих скоростей определяются из соотношений

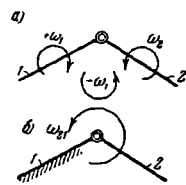


Рис. 523. К определению относительной угловой скорости двух звеньев, входящих во вращательную пару: а) звенья вращаются в противоположных направлениях; б) звенья вращаются в одном направлении.

$$\omega_2 = \mu_v \frac{(bc)}{l_{BC}}, \quad \omega_3 = \mu_v \frac{(pc)}{l_{CD}} \quad \text{и} \quad \omega_4 = \mu_v \frac{(eg)}{l_{EG}}.$$

В этих соотношениях (bc) , (pc) и (eg) суть отрезки, взятые из плана скоростей, l_{BC} , l_{CD} и l_{ED} — длины звеньев BC, CD и ED и μ_v — масштаб плана скоростей. Угловая скорость ω_{21} движения звена 2 относительно звена 1 определяется, если условно сообщить обоим этим звеньям общую угловую скорость $-\omega_1$ (рис. 523, а). Тогда звено 1 как бы остановится, а звено 2 относительно звена 1 будет вращаться с угловой скоростью ω_{21} , абсолютная величина которой равна

$$|\omega_{21}| = |\omega_2| + |\omega_1|.$$

Угловые скорости движения звеньев 3 и 4 относительно звена 2 определяются, если им сообщить общую угловую скорость — ω_2 . В таком случае абсолютная величина относительной угловой скорости ω_{32} будет равна

$$|\omega_{32}| = |\omega_3| + |\omega_2|.$$

Абсолютная величина относительной угловой скорости ω_{42} звена 4 относительно звена 2 равна

$$|\omega_{42}| = |\omega_4| + |\omega_2|.$$

Угловая скорость ω_{36} звена 3 относительно неподвижного подшипника D равна угловой скорости ω_3 . Наконец, угловая скорость ω_{54} звена 5 относительно звена 4 равна

$$|\omega_{54}| = |\omega_4|.$$

Вообще относительная угловая скорость двух звеньев с номерами i и k находится по формуле

$$\omega_{ik} = \omega_i - \omega_k$$

и в случае угловых скоростей разных знаков приводит к сложению их абсолютных величин, а при угловых скоростях одного знака — к вычитанию меньшей абсолютной величины из большей. Относительная скорость ползуна 5 по направляющей a равна скорости v_G . Мощности, затрачиваемые на трение в кинематических парах, равны

$$N_A = F_A r_A |\omega_1|, \quad N_B = F_B r_B |\omega_{21}|, \quad N_C = F_C r_C |\omega_{32}|, \quad N_D = F_D r_D |\omega_3|, \\ N_E = F_E r_E |\omega_{42}|, \quad N_G = F_G r_G |\omega_4| \quad \text{и} \quad N_H = F_H v_G.$$

В этих выражениях r_A , r_B , r_C , r_D , r_E и r_G суть радиусы цапф соответствующих шарниров. Подставляя в полученные формулы значения сил трения и абсолютные значения относительных скоростей, получаем соответственно

$$N_A = f_A P_A r_A |\omega_1|, \quad N_B = f_B P_B r_B [|\omega_2| + |\omega_1|], \\ N_C = f_C P_C r_C [|\omega_3| + |\omega_2|], \quad N_D = f_D P_D r_D |\omega_3|, \\ N_E = f_E P_E r_E [|\omega_4| + |\omega_2|], \quad N_G = f_G P_G r_G |\omega_4|$$

и

$$N_H = f_H P_H v_G.$$

В написанных формулах величины угловых скоростей могут быть заменены их значениями, определенными из плана скоростей (рис. 522, б).

Общая мощность N_τ сил трения в каждый момент времени равна

$$N_\tau = N_A + N_B + N_C + N_D + N_E + N_G + N_H.$$

Построив график изменения мощности N_τ за один полный цикл движения механизма, можно определить среднее значение $N_{\tau, \text{ср}}$ мощности, затрачиваемой на трение. Далее, по заданным силам производ-

ственных сопротивлений определяют мощность $N_{п.с.}$, затрачиваемую на преодоление этих сопротивлений в каждый данный момент времени, и по графику изменения этой мощности находят среднее значение $N_{п.с.ср}$ мощности сил производственных сопротивлений.

Средняя мощность $N_{д.ср}$ движущих сил равна

$$N_{д.ср} = N_{п.с.ср} + N_{т.ср}$$

а общий коэффициент полезного действия η всего механизма равен согласно формуле (17.19)

$$\eta = 1 - \frac{N_{т.ср}}{N_{д.ср}} \quad (17.23)$$

3°. Переходим к рассмотрению механизмов с высшими парами. Пусть, например, требуется определить коэффициент полезного дей-

ствия зубчатого механизма, показанного на рис. 524. Если принять во внимание только силы трения, то для определения коэффициента полезного действия необходимо определить потери на трение скольжения в подшипниках O_1 и O_3 , на трение скольжения между зубьями и, наконец, на трение качения зубьев друг по другу.

Мощности $N'_т$ и $N''_т$, затрачиваемые на трение в подшипниках O_1 и O_3 , равны

$$N'_т = M'_т |\omega_1| \quad \text{и} \quad N''_т = M''_т |\omega_3|,$$

где $M'_т$ и $M''_т$ суть абсолютные величины моментов сил трения скольжения в подшипниках O_1 и O_3 , определенные по соответствующим формулам, указанным в § 63.

Мощность $N'''_т$, затрачиваемая на трение скольжения в зубьях, равна

$$N'''_т = F_c v_{ск} \quad (17.24)$$

где F_c — величина силы трения скольжения в зубьях, $v_{ск}$ — величина скорости скольжения зубьев друг по другу.

Величина F_c силы трения скольжения равна $F_c = f P_{12}$, где P_{12} — давление зуба колеса 1 на зуб колеса 2 в предположении, что давление воспринимается одной парой зубьев и направлено по нормали $N-N$ к профилям зубьев, f — коэффициент трения. Величина силы P_{12} может быть определена обычными методами кинестатики, указанными выше.

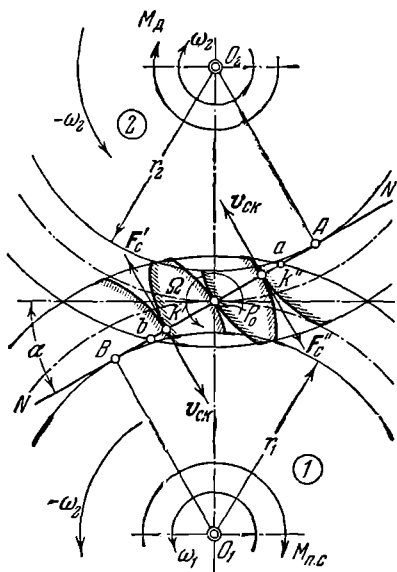


Рис. 524. К определению коэффициента полезного действия зубчатого механизма с внешним зацеплением.

Таким образом, формулу (17.24) можно написать так:

$$N_{\tau}''' = f P_{12} v_{\text{ск}}.$$

Величина скорости скольжения равна

$$v_{\text{ск}} = [|\omega_1| + |\omega_2|] (P_0 k),$$

где $(P_0 k)$ — расстояние от мгновенного центра вращения P_0 в относительном движении колес 1 и 2 до точек k' или k'' соприкосновения профилей. Из рис. 524 видно, что скорость скольжения на участке $P_0 a$, например, в случае зацепления в точке k'' имеет одно направление, а в случае зацепления на участке $P_0 b$, например в точке k' , имеет противоположное направление. Соответственно меняют свое направление и силы трения.

Мощность N_{τ}''' , затрачиваемая на трение скольжения в зубьях, равна

$$N_{\tau}''' = f P_{12} [|\omega_1| + |\omega_2|] (P_0 k).$$

Мощность, затрачиваемая на трение перекатывания зубьев друг по другу (см. § 65), равна

$$N_{\tau}'''' = M_{\text{тр. к}} |\Omega| = M_{\text{тр. к}} [|\omega_1| + |\omega_2|],$$

где $M_{\text{тр. к}}$ — величина момента трения качения, равная

$$M_{\text{тр. к}} = k P_{12},$$

где k — коэффициент трения качения и $\Omega = \omega_1 + \omega_2$.

Мощность N_{τ} всего механизма равна сумме мощностей трения

$$N_{\tau} = N_{\tau}' + N_{\tau}'' + N_{\tau}''' + N_{\tau}''''.$$

Построив график изменения мощности N_{τ} , определим среднюю мощность $N_{\tau, \text{ср}}$.

Средняя мощность $N_{\text{п. с. ср}}$ производственных сопротивлений равна

$$N_{\text{п. с. ср}} = M_{\text{п. с. ср}} |\omega_{\text{ср}}|,$$

где $M_{\text{п. с. ср}}$ — абсолютная величина среднего момента производственных сопротивлений, $\omega_{\text{ср}}$ — средняя угловая скорость того вала, к которому приложен момент $M_{\text{п. с. ср}}$.

Средняя мощность $N_{\text{д. ср}}$ движущих сил равна

$$N_{\text{д. ср}} = N_{\text{п. с. ср}} + N_{\tau, \text{ср}}$$

и следовательно, общий коэффициент полезного действия η рассматриваемого зубчатого механизма равен

$$\eta = 1 - \frac{N_{\tau, \text{ср}}}{N_{\text{д. ср}}}.$$

На практике обычно коэффициенты полезного действия зубчатых механизмов определяются экспериментально. В предварительных расчетах принимают коэффициент полезного действия η при учете потерь

в зубьях равным: для колес со шлифованными зубьями 0,99, для колес с нарезанными и не шлифованными зубьями от 0,975 до 0,985, для косозубых колес от 0,97 до 0,975 и т. д.

4°. Коэффициент полезного действия винтовых механизмов определяется приближенно по формулам для коэффициента полезного действия наклонной плоскости.

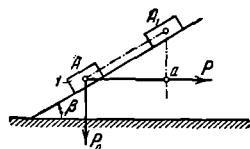


Рис. 525. К определению коэффициента полезного действия наклонной плоскости.

При этом средняя линия резьбы винта заменяется наклонной плоскостью, а гайка заменяется ползуном 1 (рис. 525). Вывод формул тогда может быть сделан следующим образом. Пусть ползун 1, находящийся под действием постоянной вертикальной силы P_0 производственных сопротивлений и под действием постоянной горизонтальной движущей силы P , переместился из положения A в положение A_1 . Из точки A_1 опустим на направление силы P перпендикуляр A_1a . Производственная работа, произведенная силой P , состоит в подъеме ползуна 1 на высоту A_1a ; при этом на преодоление производственных сопротивлений затрачивается работа $A_{п.с.}$, равная

$$A_{п.с.} = P_0 (A_1a).$$

Работа движущей силы P равна

$$A_d = P (Aa).$$

Следовательно, коэффициент полезного действия η на основании формулы (17.11) равен

$$\eta = \frac{A_{п.с.}}{A_d} = \frac{P_0 (A_1a)}{P (Aa)} = \frac{P_0}{P} \operatorname{tg} \beta.$$

Как это было показано в § 62, в винтовой паре силы P и P_0 связаны условием

$$P = P_0 \operatorname{tg} (\beta + \varphi),$$

где φ — угол трения. Следовательно,

$$\eta = \frac{P_0 \operatorname{tg} \beta}{P_0 \operatorname{tg} (\beta + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\beta + \varphi)}. \quad (17.25)$$

При опускании груза под действием силы P_0 коэффициент полезного действия η равен

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} (\beta - \varphi)}{\operatorname{tg} \beta}, \quad (17.26)$$

так как в этом случае $P = P_0 \operatorname{tg} (\beta - \varphi)$, и сила P_0 является движущей.

Из формулы (17.25) следует, что коэффициент полезного действия наклонной плоскости при подъеме груза обращается в нуль при $\beta = 0$ и при $\beta = \pi/2 - \varphi$. В промежутке между значениями $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2 - \varphi$ коэффициент полезного действия положителен, а при $\beta > \pi/2 - \varphi$ отри-

чателен; в последнем случае движение ползуна под действием силы P невозможно. Для определения угла β , при котором η будет максимальным, берем производную от η по углу β и приравниваем ее нулю:

$$\frac{d\eta}{d\beta} = \frac{d\left[\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta + \varphi)}\right]}{d\beta} = 0.$$

Решая это уравнение относительно β , находим:

$$\beta_0 = 45^\circ - \varphi.$$

Таким образом, максимальный коэффициент полезного действия имеет место при угле β_0 .

Далее, из равенства (17.26) следует, что при опускании ползуна под действием силы P_0 коэффициент полезного действия η оказывается отрицательным при значениях угла β , лежащих в пределах от 0 до φ . В этих пределах движение груза под действием силы P_0 невозможно. Движение груза возможно в пределах значений угла β от φ до $\pi/2$, так как в этих пределах коэффициент полезного действия положителен.

Можно показать, что при подъеме ползуна по наклонной плоскости, у которой угол подъема меньше угла φ , коэффициент полезного действия всегда меньше 0,5. В самом деле, уже при $\beta = \varphi$ формула (17.25) принимает следующий вид:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} 2\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)}{2 \operatorname{tg} \varphi} = 0,5 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2}.$$

Следовательно, в этом случае η всегда меньше 0,5.

Только что выведенные формулы применяются для приближенного определения коэффициента полезного действия винтовых и червячных механизмов. В случае передачи от червяка к колесу применяется формула (17.25), а в случае передачи от колеса к червяку — формула (17.26). Все следствия, вытекающие из этих формул для наклонной плоскости, остаются действительными и для винтовых и червячных механизмов.

5°. Рассмотрим, далее, вопрос об определении коэффициента полезного действия планетарных механизмов на примере механизма, показанного на рис. 526, а.

Рассмотрим соотношения между моментами и силами, действующими на механизм в целом и на отдельные его звенья. Обозначим момент на ведущем колесе I через M_I , момент на ведомом водиле H — через M_H и момент на неподвижном колесе $З$ — через $M_З$ (реактивный или опорный момент). Если пренебречь потерями на трение в зубьях и опорах, можно написать уравнение мощностей для всего механизма в форме

$$M_I \omega_I + M_H \omega_H = 0. \quad (17.27)$$

В уравнение (17.27) входит алгебраическая сумма мощностей, подводимых и отводимых от механизма. Моменты M_I , M_H и $M_З$ связаны

между собой также уравнением равновесия всех внешних моментов, приложенных к механизму. Имеем:

$$M_1 + M_H + M_3 = 0. \quad (17.28)$$

Моменты, входящие в уравнения (17.27) и (17.28), могут быть всегда выражены через окружные усилия на колесах и радиусы колес. Для этого рассмотрим в отдельности равновесие каждого из звеньев, входящих в состав механизма.

Составим схему (рис. 526, а) для каждого звена редуктора в профильной плоскости. На колесо 1 действуют момент M_1 и сила P_{21} от колеса 2. На звено, состоящее из сателлитов 2 и 2', — сила P_{13} от колеса 1, сила $P_{32'}$ от колеса 3 и сила P_{H2} от водила H . На

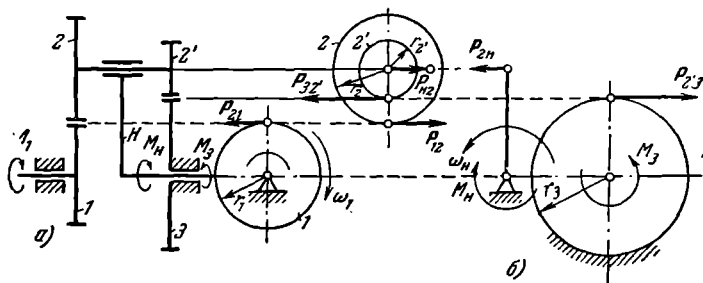


Рис. 526. К определению коэффициента полезного действия планетарного механизма: а) схема механизма; б) отдельные звенья с приложенными к ним силами.

водило H действуют момент M_H и сила P_{2H} от звена, состоящего из сателлитов. Наконец, на колесо 3 действуют момент M_3 и сила $P_{2'3}$ от звена, состоящего из сателлитов. Все указанные силы могут быть выражены через соответствующие моменты и радиусы: $r_1, r_2, r_{2'}$ и r_3 колес 1, 2, 2' и 3. Из уравнений равновесия звеньев 1, H и 3 получаем:

$$P_{21} = \frac{M_1}{r_1}, \quad (17.29)$$

$$P_{2H} = \frac{M_H}{r_1 + r_2}, \quad (17.30)$$

$$P_{2'3} = \frac{M_3}{r_3}. \quad (17.31)$$

Из уравнения равновесия звена, состоящего из сателлитов, определяются как направления, так и величины сил $P_{32'}$ и P_{H2}

$$P_{12}r_2 = P_{32'}r_{2'},$$

откуда

$$P_{32'} = P_{12} \frac{r_2}{r_{2'}}, \quad (17.32)$$

и, далее,

$$P_{12}(r_2 - r_{2'}) = P_{H2}r_{2'},$$

откуда

$$P_{H2} = P_{12} \frac{r_2 - r_2'}{r_3'} \quad (17.33)$$

Кроме того, имеем:

$$P_{12} = -P_{21}, \quad P_{H2} = -P_{2H}, \quad P_{32'} = -P_{2'3}. \quad (17.34)$$

Кроме того, мы располагаем и кинематическим соотношением (10.38)

$$i_{12}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = (-1)^3 \frac{r_2 r_3}{r_1 r_2'} = \frac{r_2 r_3}{r_1 r_2'}. \quad (17.35)$$

Из соотношения (17.32) следует:

$$\frac{r_2}{r_2'} = \frac{P_{32'}}{P_{12}}.$$

Тогда равенство (17.35) может быть написано так:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{P_{32'} r_3}{P_{12} r_1},$$

откуда получаем:

$$P_{12} r_1 (\omega_1 - \omega_H) = P_{32'} r_3 (\omega_3 - \omega_H) = -P_{32'} r_3 \omega_H, \quad (17.36)$$

ибо угловая скорость ω_3 при неподвижном колесе 3 равна нулю.

Так как $M_1 = P_{12} r_1$ и $M_3 = P_{32'} r_3$, получаем:

$$M_1 (\omega_1 - \omega_H) = -M_3 \omega_H \quad (17.37)$$

или

$$N_1^H = -N_3^H. \quad (17.38)$$

Правая и левая части равенств (17.37) и (17.38) представляют собой мощности в каждой паре колес, находящихся в зацеплении колес механизма, который мы рассматриваем в условном предположении о неподвижности водила H . Таким образом, *мощность в зацеплении* пары колес равняется моменту, передаваемому данным колесом, умноженному на угловую скорость этого колеса относительно водила.

Мощность в зацеплении характеризует возможные потери в механизме. Чем больше эта мощность, тем большие потери и тем, следовательно, ниже коэффициент полезного действия.

6°. В планетарных механизмах ведущим звеном может быть как одно из центральных колес, так и водило H , при этом второе центральное колесо является неподвижным. В том случае, когда ведущим звеном является колесо I (рис. 526, а), мощность N_1 на этом колесе представляет собой мощность движущих сил, в то время как мощность N_H сил производственных сопротивлений снимается с водила H и равна

$$N_H = N_1 - N_T, \quad (17.39)$$

где N_T — мощность, теряемая на трение в кинематических парах.

Мощность N_T может быть подсчитана по мощности в зацеплении, т. е. по величине мощности N_1^H [см. формулу (17.38)], передаваемой редуктором в обратном движении всего механизма относительно водила H .

Таким образом, коэффициент полезного действия η механизма при ведущем колесе I и ведомом водиле H определяется по формуле

$$\eta_{IH} = \frac{N_I - N_T}{N_I}. \quad (17.40)$$

Величина мощности N_T может быть выражена через мощность N_1^H в зацеплении и коэффициент потерь φ_H (см. § 81,1^о). Имеем:

$$N_T = |N_1^H| \varphi_H, \quad (17.41)$$

если в обратном движении колесо I будет ведущим, и

$$N_T = |N_1^H| \frac{\varphi_H}{1 - \varphi_H}, \quad (17.42)$$

если в обратном движении колесо I будет ведомым. Практически, если общий коэффициент полезного действия η_H редуктора при неподвижном водиле $\eta_H > 0,9$, а следовательно, $\varphi_H < 0,1$, с достаточной точностью можно пользоваться формулой (17.41) вне зависимости от того, будет ли колесо I в обратном движении ведущим или ведомым. Следует подчеркнуть, что в формулы (17.41) и (17.42) входит абсолютное значение мощности N_1^H . Учитывая равенство (17.37), можно написать формулу (17.41) в таком виде:

$$N_T = |M_1 (\omega_1 - \omega_H)| \varphi_H. \quad (17.43)$$

В том случае, когда ведущим звеном является водило H , мощность N_1 на колесе I является мощностью сил производственных сопротивлений, в то время как мощность N_H на водиле H оказывается мощностью движущих сил и равна $N_H = N_1 + N_T$.

Таким образом, коэффициент полезного действия η механизма при ведущем водиле H и ведомом колесе I определяется по формуле

$$\eta_{HI} = \frac{N_I}{N_1 + N_T}, \quad (17.44)$$

где N_T может быть определено из формулы (17.43).

Для этого представим эту формулу в следующем виде:

$$N_T = \left| M_1 \omega_1 \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_1} \right| \varphi_H = N_1 |1 - i_{H1}| \varphi_H, \quad (17.45)$$

где

$$i_{H1} = \frac{\omega_H}{\omega_1}.$$

Подставляя полученное выражение для N_T из формулы (17.45) в формулы (17.40) и (17.44), получаем:

$$\eta_{1H} = 1 - |(1 - i_{H1})| \varphi_H \quad (17.46)$$

и

$$\eta_{H1} = \frac{1}{1 + |(1 - i_{H1})| \varphi_H}. \quad (17.47)$$

Полученные формулы являются приближенными формулами для определения коэффициента полезного действия планетарных механизмов. Для большинства механизмов указанные формулы дают значения коэффициента полезного действия, незначительно отклоняющиеся от действительных величин, за исключением тех механизмов, для которых передаточное отношение i_{13}^H в обратном движении близко к единице. В этом случае передача может оказаться самотормозящейся и найденное по формулам (17.46) и (17.47) значение коэффициента полезного действия не будет соответствовать истинной его величине *).

Пример 1. Рассмотрим некоторые примеры. Определить коэффициент полезного действия для механизма, представленного на рис. 526, при условии, что числа зубьев соответственно равны $z_1 = 40$, $z_2 = 50$, $z_2' = 30$ и $z_3 = 60$ и коэффициент полезного действия каждой пары колес равен $\eta = 0,95$.

Имеем для передаточного отношения (см. § 45)

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = \frac{1}{1 - i_{13}^H} = \frac{1}{1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}} = \frac{1}{1 - \frac{50 \cdot 60}{40 \cdot 30}} = -\frac{2}{3}.$$

Общий коэффициент полезного действия η_H редуктора при неподвижном водиле равен согласно формуле (17.17)

$$\eta_H = \eta_{13} \cdot \eta_{2'3} = (0,95)^2 = 0,9,$$

и коэффициент потерь

$$\varphi_H = 1 - \eta_H = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Подставляя полученные выражения для i_{H1} и φ_H в формулы (17.46) и (17.47), соответственно получаем

$$\eta_{1H} = 1 - |(1 - i_{H1})| \varphi_H = 1 - \left(1 + \frac{2}{3}\right) 0,1 = 0,833$$

и

$$\eta_{H1} = \frac{1}{1 + |(1 - i_{H1})| \varphi_H} = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{2}{3}\right) 0,1} = 0,856.$$

Пример 2. Определить коэффициент полезного действия механизма, показанного на рис. 352.

*) Изложенный метод разработан Т. С. Жегаловой и В. Н. Кудрявцевым.

Пусть числа зубьев соответственно равны $z_2 = 20$, $z_3 = 40$, $z_3' = 15$ и $z_4 = 60$. Коэффициент полезного действия каждой пары колес равен $\eta = 0,95$. Передаточное отношение $i_{H2'}$ равно

$$i_{H2'} = \frac{1}{i_{2'H}} = \frac{1}{1 - (-1) \frac{z_3 z_4}{z_2 z_3'}} = \frac{1}{1 + \frac{40 \cdot 60}{20 \cdot 15}} = \frac{1}{9}.$$

Следовательно, коэффициент полезного действия всего редуктора вместе с колесами 1 и 2 равен

$$\begin{aligned} \eta_{1H} &= \eta_{12} \cdot \eta_{2'H} = \eta_{12} [1 - |(1 - i_{H2'})| \varphi_H] = \\ &= 0,95 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{9} \right) 0,1 \right] = 0,855, \end{aligned}$$

так как $\varphi_H = 1 - \eta_H = 1 - (0,95)^2 \approx 0,1$.

Соответственно для коэффициента полезного действия η_{H1} получаем:

$$\eta_{H1} = \eta_{21} \cdot \eta_{H2'} = \eta_{21} \frac{1}{1 + |(1 - i_{H2'})| \varphi_H} = 0,95 \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{9} \right) 0,1} = 0,872.$$

Пример 3. Определить коэффициент полезного действия механизма червячной передачи, если шаг t червячной передачи равен 100 мм, радиус r начальной линии червяка равен 60 мм, коэффициент трения f равен 0,1.

Угол β наклона резьбы равен

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{t}{2\pi r} \approx 15^\circ,$$

угол трения φ :

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0,1 \approx 6^\circ.$$

Если ведущим будет червяк, то коэффициент полезного действия $\eta_{ч.к.}$ определится по формуле (17.25)

$$\eta_{ч.к.} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\beta + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 21^\circ} = \frac{0,267}{0,383} \approx 0,7.$$

Если ведущим будет колесо, то коэффициент полезного действия определится по формуле (17.26)

$$\eta_{ч.к.} = \frac{\operatorname{tg} (\beta - \varphi)}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} 9^\circ}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{0,158}{0,267} \approx 0,63.$$

ГЛАВА XVIII

ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ И МАСС К ЗВЕНУ ПРИВЕДЕНИЯ

§ 83. Приведенные силы и моменты

1°. В главах, посвященных силовому анализу механизмов, мы рассмотрели силы, действующие на механизм, и методы силового расчета механизмов. Переходим теперь к рассмотрению вопросов, связанных с изучением движения механизмов.

При исследовании движения механизма, находящегося под действием заданных сил, удобно все силы, действующие на звенья, заменять силами, приложенными к одному из звеньев механизма. При этом необходимо, чтобы работа на рассматриваемом возможном перемещении или мощность, развиваемая заменяющими силами, были соответственно равны сумме работ или мощностей, развиваемых силами, приложенными к звеньям исследуемых механизмов. Заменяющие силы, удовлетворяющие этим условиям, получили название *приведенных сил*.

Звено механизма, к которому приложены приведенные силы, носит название *звена приведения*, а точка приложения приведенных сил — *точки приведения*. Если рассматриваемый механизм имеет одну степень подвижности, то для изучения его движения достаточно знать закон движения одного из его звеньев (закон изменения обобщенной координаты).

Обычно за звено приведения выбирают то звено, по обобщенной координате которого проводится исследование механизма. Тогда вместо рассмотрения всего комплекса звеньев механизма можно рассмотреть звено, например кривошип AB (рис. 527), обобщенной координатой которого является угол φ . В точке B этого звена перпендикулярно к оси кривошипа приложены две приведенные силы: сила P_d — приведенная движущая сила и сила P_c — приведенная сила сопротивления. При этом сила P_d должна производить работу A_d , равную работе всех движущих сил, или, что то же, развивать мощность N_d , равную мощности всех движущих сил, а сила P_c — производить работу A_c , равную работе всех сил сопротивлений, или, иначе, развивать мощность N_c , равную мощности всех сил сопротивлений.

2°. Для определения приведенных сил или их моментов может быть использовано равенство

$$N_n = \sum_1^k N_i. \quad (18.1)$$

В этом равенстве N_n — мощность, развиваемая приведенной силой или приведенным моментом, а N_i — мощности, развиваемые силами и моментами, приложенными к звену i и подлежащими приведению.

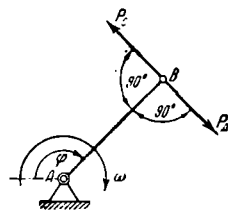


Рис. 527. Схема звена приведения.

Мощность N_n может быть представлена так:

$$N_n = P_n v_B = M_n \omega, \quad (18.2)$$

где P_n — величина приведенной к точке B звена приведения силы (рис. 528), могущей быть, в частном случае, или приведенной движущей силой P_d , или приведенной силой сопротивления P_c (рис. 527), v_B — скорость точки B приведения, M_n — приведенный момент, который может быть приведенным моментом M_d движущих сил или приведенным моментом M_c сил сопротивления и ω — угловая скорость звена приведения.

Величины приведенной силы P_n и приведенного момента M_n можно представить в следующем виде:

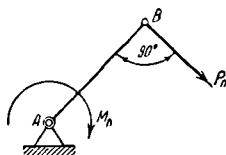


Рис. 528. Схема звена приведения с показанными на ней приведенной силой и приведенным моментом пары сил.

$$P_n = \frac{\sum_1^k N_i}{v_B} \quad (18.3)$$

и

$$M_n = \frac{\sum_1^k N_i}{\omega}. \quad (18.4)$$

Сумма $\sum_1^k N_i$ в развернутом виде может быть представлена так:

$$\sum_1^k N_i = \sum_1^k P_i v_i \cos \alpha_i + \sum_1^k M_i \omega_i, \quad (18.5)$$

где P_i и M_i — сила и момент, приложенные к звену i , v_i — скорость точки приложения силы P_i , ω_i — угловая скорость звена i и α_i — угол, образованный силой P_i и вектором скорости v_i .

Подставляя выражение для $\sum_1^k N_i$ из уравнения (18.5) в уравнения (18.3) и (18.4), получаем:

$$P_n = \sum_1^k P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_B} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{v_B} \quad (18.6)$$

и

$$M_n = \sum_1^k P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{\omega}. \quad (18.7)$$

Из уравнений (18.6) и (18.7) следует: если для каждого положения механизма известны приложенные к его звеньям силы и моменты, то приведенная сила P_n и приведенный момент M_n будут зависеть

только от отношений скоростей, которые, как было показано в кинематике механизмов, зависят только от положения его звеньев.

Из уравнений (18.6) и (18.7) также следует, что при заданных силах P_i и моментах M_i определение приведенной силы P_n и момента M_n не представляет значительных трудностей и может быть сделано, если для каждого исследуемого положения механизма будет построен план скоростей и отношения скоростей в уравнениях (18.6) и (18.7) будут выражены через соответствующие отрезки плана скоростей.

§ 84. Рычаг Жуковского

1°. Силовой расчет и динамическое исследование механизмов можно всегда произвести, пользуясь принципом возможных перемещений. Согласно этому принципу, если на какую-либо механическую систему действуют силы, то, прибавляя к задаваемым силам силы инерции и давая всей системе возможные для данного ее положения перемещения, получаем ряд элементарных работ, сумма которых должна равняться нулю. Аналитически это может быть представлено так. Пусть к системе приложены силы $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, причем в число этих сил входят и силы инерции. Обозначим проекции возможных для данного момента перемещений на направления сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ через $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3, \dots, \delta p_n$. Тогда согласно принципу возможных перемещений при условии, что все связи, наложенные на отдельные звенья механизма, — неосвобождающие, будем иметь:

$$\sum_1^n P_i \delta p_i = 0 \quad (18.8)$$

или

$$P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + \dots + P_n \delta p_n = 0. \quad (18.9)$$

Так как механизм является кинематической цепью принужденного движения, т. е. с вполне определенным движением всех звеньев при заданном движении ведущих звеньев, и так как связи в механизме нами приняты не зависящими от времени, то в механизме действительные перемещения содержатся в числе возможных и уравнение (18.8) можно написать так:

$$\sum_1^n P_i dp_i = 0 \quad (18.10)$$

или

$$P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 + \dots + P_n dp_n = 0, \quad (18.11)$$

где $dp_1, dp_2, dp_3, \dots, dp_n$ суть проекции действительных перемещений на направления приложенных сил.

2°. Рассмотрим, как может быть представлена элементарная работа какой-либо силы P_i , входящей в уравнение (18.11). Пусть на звено AB

в точке C действует сила P_i , и пусть нам известны скорости точек A и B (рис. 529, а). Действительное элементарное перемещение точки C имеет направление скорости v_C точки C . Направление скорости v_C определяется после построения мгновенного центра вращения O ,

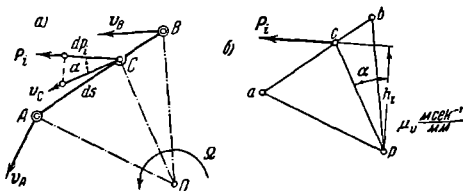


Рис. 529. К доказательству теоремы Жуковского: а) схема звена с показанной на ней силой; б) повернутый план скоростей.

находящегося на пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к скоростям этих точек. Соединив точку C прямой с точкой O и проведя через точку C прямую, перпендикулярную к OC , получим направление скорости v_C . Направление вектора скорости v_C определится

знаком мгновенной угловой скорости Ω . Направление действительного перемещения ds точки C совпадает с направлением скорости v_C этой точки. Элементарная работа силы P_i равна

$$dA_i = P_i dp_i. \quad (18.12)$$

Перемещение dp_i , входящее в уравнение (18.12), может быть представлено так:

$$dp_i = ds \cos \alpha,$$

где α есть угол, образуемый скоростью v_C и силой P_i . Подставляя это значение dp_i в уравнение (18.12), получаем:

$$dA_i = P_i ds \cos \alpha,$$

или так как $ds = v_C dt$, то

$$dA_i = P_i v_C \cos \alpha dt. \quad (18.13)$$

Величину скорости v_C удобно определить построением плана скоростей звена AB . Для этого строим в произвольном масштабе *повернутый* план скоростей звена AB (рис. 529, б). На плане скоростей скорость v_C точки C представляет собой отрезок (pc) , отложенный в масштабе μ_v от полюса p плана скоростей в направлении, перпендикулярном скорости v_C точки C :

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Полученное значение величины скорости v_C подставляем в равенство (18.13)

$$dA_i = P_i \mu_v (pc) \cos \alpha \cdot dt. \quad (18.14)$$

Переносим далее силу P_i со схемы звена в точку c плана скоростей и из точки p опускаем на направление этой силы перпендикуляр h_i . При этом перенесении оставляем без изменения величину и направле-

ние силы P_i . Угол, образуемый отрезком (pc) и перпендикуляром h_i , равен углу α , так как отрезок (pc) перпендикулярен к направлению v_c , а отрезок h_i перпендикулярен к направлению силы P_i . Имеем:

$$h_i = (pc) \cos \alpha.$$

Подставляя полученное выражение в равенство (18.14), получаем:

$$dA_i = P_i h_i v_v dt.$$

Произведение величины силы P_i на плечо h_i представляет собой величину момента $M_p(P_i)$ этой силы относительно точки p полюса плана скоростей. Так как все скорости на плане повернуты в одну сторону, то знак момента для всех сил совпадает со знаком элементарной работы силы. Следовательно, имеем:

$$dA_i = M_p(P_i) v_v dt. \quad (18.15)$$

Таким образом, получаем, что элементарная работа силы, действующей на звено механизма, пропорциональна моменту относительно полюса плана скоростей этой же силы, перенесенной в соответствующую точку плана.

Аналогичные выражения для элементарных работ можно получить и для сил, действующих на другие звенья механизма. Вследствие этого уравнение (18.10) может быть представлено так:

$$v_v dt \sum_1^n M_p(P_i) = 0 \quad (18.16)$$

или

$$M_p(P_1) + M_p(P_2) + \dots + M_p(P_n) = 0, \quad (18.17)$$

так как в эти уравнения входит общий множитель $v_v dt$, не равный нулю. Уравнение (18.17) может быть написано так:

$$\sum_1^n M_p(P_i) = 0. \quad (18.18)$$

3°. Уравнения (18.17) или (18.18) геометрически могут быть интерпретированы следующим образом.

Переносим все заданные силы, действующие в рассматриваемый момент времени на звенья механизма, в том числе и силы инерции, в одноименные точки повернутого плана скоростей, не изменяя при этом величины и направления этих сил, и составляем, далее, уравнение моментов (18.17) всех перенесенных сил относительно полюса плана скоростей, т. е. рассматриваем план скоростей как некоторый рычаг с опорой в полюсе плана скоростей, находящийся под действием всех рассматриваемых сил в равновесии. Подобная геометрическая интерпретация принципа возможных перемещений представляет значительные удобства для решения многих задач динамики механизмов. Метод этот получил название метода Жуковского по имени

ученого, которым он был предложен, а рычаг, которым пользуются в этом методе, назван *рычагом Жуковского*.

Метод Жуковского может быть применен для нахождения величины какой-либо силы, если точка приложения и направление этой силы заданы, а также заданы величины, направления и точки приложения всех остальных сил. В самом деле, в этом случае в уравнении (18.17) будет только одна неизвестная величина искомой силы, которая из него и определится.

В заключение заметим, что если кроме сил $P_1, P_2, \dots, P_n$ на звенья механизма действуют еще пары сил, моменты которых суть $M_1, M_2, \dots, M_n$, то уравнение (18.11) принимает вид

$$P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 + \dots + P_n dp_n + M_1 d\varphi_1 + M_2 d\varphi_2 + \dots + M_n d\varphi_n = 0, \quad (18.19)$$

где $d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3, \dots, d\varphi_n$ — углы поворота звеньев, к которым приложены моменты $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$.

Моменты $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ могут быть также приложены к отрезкам, соответствующим на плане скоростей звеньям механизма, но величина прикладываемого момента M_i^0 должна удовлетворять условию

$$M_i^0 = M_i \frac{l_i^0}{l_i},$$

где l_i^0 — отрезок, соответствующий на плане скоростей отрезку l_i на схеме.

Необходимо иметь в виду, что знак у момента M_i^0 сохраняется, если направление отрезка l_i^0 (порядок букв) совпадает с направлением отрезка l_i и получается противоположным, если эти направления не совпадают.

§ 85. Определение приведенных и уравнивающих сил методом Жуковского

1°. Применим метод Жуковского к нахождению приведенной и уравнивающей сил (или приведенного и уравнивающего моментов). Приведенной к данной точке механизма силой является сила, работа которой на рассматриваемом возможном перемещении равна сумме работ всех сил, приложенных к механизму (см. § 82).

Пусть, например, на механизм действуют силы $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, причем под действием всех этих сил механизм не находится в равновесии. Требуется определить приведенную силу. Если приведенную силу обозначить через P_n , а проекцию на направление силы элементарного перемещения точки приложения этой силы — через dp_n , то элементарная работа силы P_n выразится так:

$$P_n dp_n = \sum_1^n P_i dp_i. \quad (18.20)$$

Если перенести приведенную силу P_n и силы $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ в соответствующие точки плана скоростей и применить метод Жуковского, то уравнение (18.20) может быть заменено уравнением

$$M_p(P_n) = \sum_1^n M_p(P_i), \quad (18.21)$$

т. е. момент приведенной силы относительно точки p — полюса плана скоростей — равняется сумме моментов всех заданных сил относительно той же точки.

Если принять, что уравновешивающая сила P_y (см. § 73, 1°) имеет направление, противоположное направлению приведенной силы P_n , равна ей по величине и приложена в той же точке, т. е.

$$P_y = -P_n, \quad (18.22)$$

то из соотношения (18.22) и уравнения (18.20) следует:

$$P_y dp_y = -P_n dp_n = -\sum_1^n P_i dp_i.$$

Если кроме сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, действующих на механизм, к механизму приложена и уравновешивающая сила P_y , то под действием всех этих сил механизм находится в равновесии, и следовательно, можно написать:

$$P_y dp_y + \sum_1^n P_i dp_i = 0. \quad (18.23)$$

В случае применения рычага Жуковского это уравнение может быть заменено следующим:

$$M_p(P_y) + \sum_1^n M_p(P_i) = 0. \quad (18.24)$$

Таким образом, если на звенья механизма действуют заданные силы $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, под действием которых механизм не находится в равновесии, то из уравнения моментов всех этих сил относительно полюса плана скоростей всегда можно определить величину силы P_y , уравновешивающей заданные силы. Линия действия силы P_y и ее точка приложения при этом должны совпадать с линией действия и с точкой приложения силы P_n .

Определив силу P_y и изменив ее направление на противоположное, получим силу P_n .

2°. Рассмотрим вопрос об определении уравновешивающей силы механизма, показанного на рис. 530, а. Пусть на звенья механизма действуют внешние силы P_2, P_3, P_4 и P_5 . В общем случае под действием этих сил механизм как система, обладающая одной степенью подвижности, не будет находиться в равновесии. Для приведения

механизма в уравновешенное состояние надо в какой-либо точке механизма приложить уравнивающую силу P_y . В качестве такой точки выбираем точку T ведущего звена. Задаемся направлением действия q — q силы P_y . Для определения величины уравнивающей силы воспользуемся методом Жуковского. Строим в произвольном масштабе повернутый план скоростей механизма (рис. 530, б) и переносим все силы, действующие на механизм, в том числе и уравнивающую силу P_y , в одноименные точки плана. Составляем,

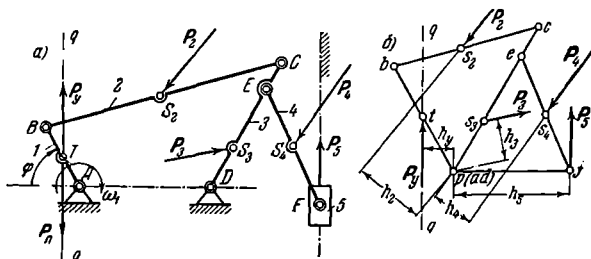


Рис. 530. К определению уравнивающей силы механизма: а) схема механизма; б) план скоростей.

далее, уравнение моментов всех перенесенных сил относительно полюса плана скоростей. Имеем:

$$M_p(P_2) + M_p(P_3) + M_p(P_4) + M_p(P_5) + M_p(P_y) = 0.$$

Обозначая плечи сил P_2 , P_3 , P_4 , P_5 и P_y относительно полюса плана скоростей соответственно через h_2 , h_3 , h_4 , h_5 и h_y , получаем:

$$P_2 h_2 - P_3 h_3 - P_4 h_4 + P_5 h_5 - P_y h_y = 0.$$

Знаки моментов сил P_2 , P_3 , P_4 и P_5 выбираем в зависимости от направления вращения вокруг полюса p . Из последнего уравнения определяем искомую величину уравнивающей силы P_y :

$$P_y = \frac{1}{h_y} (P_2 h_2 - P_3 h_3 - P_4 h_4 + P_5 h_5). \quad (18.25)$$

Направление вектора силы P_y определяется после численного подсчета правой части равенства (18.25). Если правая часть уравнения окажется положительной, то это означает, что направление силы P_y было выбрано правильно. При отрицательном значении правой части направление силы P_y должно быть изменено на противоположное. Произведя в правой части формулы (18.25) почленное деление на h_y , получаем:

$$P_y = P_2 \frac{h_2}{h_y} - P_3 \frac{h_3}{h_y} - P_4 \frac{h_4}{h_y} + P_5 \frac{h_5}{h_y}. \quad (18.26)$$

Таким образом, величина уравнивающей силы P_y равна алгебраической сумме произведений действующих на механизм сил на

соответствующие отношения отрезков h_2/h_y , h_3/h_y , h_4/h_y и h_5/h_y , взятых из плана скоростей.

Изложенный метод является общим для механизмов любого класса.

3°. Аналогично решается задача и об определении приведенной силы. Пусть, например, на звенье механизма, показанного на рис. 530, *а*, действуют силы P_2 , P_3 , P_4 , P_5 . Требуется определить приведенную силу P_n , действующую на звено *1*, причем точка приложения *T* приведенной силы и линия ее действия $q-q$ заданы. Для определения приведенной силы P_n воспользуемся условием (18.22), что приведенная сила P_n равна по величине уравновешивающей силе P_y и противоположна ей по направлению.

Строим повернутый план скоростей механизма, прикладываем к нему все действующие силы (рис. 530, *б*) и уравновешивающую силу P_y , считая ее приложенной в точке *t* отрезка (*pb*), и, как было показано выше, из равенства (18.26) определяем уравновешивающую силу P_y .

Пользуясь, далее, условием (18.22), вычисляем величину приведенной силы P_n :

$$P_n = -P_y = -P_2 \frac{h_2}{h_y} + P_3 \frac{h_3}{h_y} + P_4 \frac{h_4}{h_y} - P_5 \frac{h_5}{h_y}.$$

Таким образом, определение приведенной силы сводится к определению уравновешивающей силы с помощью плана скоростей. Определив уравновешивающую силу, мы найдем приведенную силу, изменив направление уравновешивающей силы на противоположное.

Применение рычага Жуковского позволяет определить искомые силы с помощью только одного уравнения моментов всех сил, действующих на механизм, относительно полюса плана скоростей. В случае применения для решения этих же задач метода планов сил пришлось бы произвести последовательно определение всех давлений в парах, т. е. произвести полный силовой расчет механизма.

При применении рычага Жуковского план скоростей строится *повернутым*. Можно пользоваться также и неповернутым планом скоростей. В этом случае необходимо все силы при их переносе на план скоростей повернуть в одну и ту же сторону на угол 90°.

4°. Метод Жуковского является геометрической интерпретацией уравнений (18.6) и (18.7), позволяющей с исключительной простотой и изяществом определять приведенные силы и моменты. При динамическом исследовании механизмов обычно силы, действующие на механизм, приводятся раздельно. Так, отдельно определяют приведенную силу от производственных сопротивлений, далее, определяют приведенную силу от сил трения и от других. При приведении движущих сил обычно одновременно учитывают и силы тяжести, которые в зависимости от положения механизма увеличивают или уменьшают приведенную движущую силу. Раздельное определение приведенных сил позволяет лучше учесть влияние каждой из них на механизм. В частности, коэффициент полезного действия механизма может быть

всегда определен через приведенные силы, если выбрать одну общую линию их действия. Так, если определены приведенная движущая сила P_d , приведенная сила производственных сопротивлений $P_{п.с.}$ и приведенная сила трения P_{τ} , то коэффициент полезного действия η на основании уравнений (17.11) и (17.13) может быть представлен в виде

$$\eta = \frac{P_{п.с.}}{P_d} \quad (18.27)$$

или

$$\eta = 1 - \frac{P_{\tau}}{P_d}. \quad (18.28)$$

Пример. На рис. 531, а показана схема механизма двигателя с прицепным шатуном. На звенья 3 и 5 действуют силы P_3 и P_5 . Определить уравнивающую силу P_y , приложенную в точке В кривошипа 1, при условии, что сила P_y направлена по прямой $q-q$, перпендикулярной к кривошипу АВ.

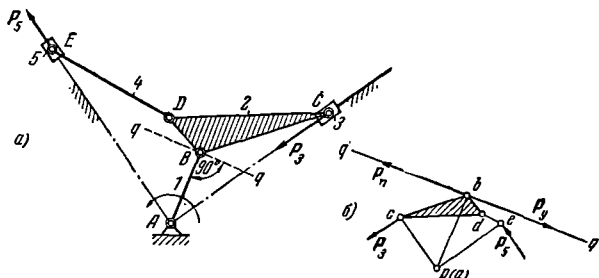


Рис. 531. К определению приведенной силы: а) схема механизма; б) повернутый план скоростей.

Строим в произвольном масштабе повернутый план скоростей (рис. 531, б) и прикладываем в точках с и е силы P_3 и P_5 . Через точку b проводим линию действия уравнивающей силы, параллельную $q-q$. Составляем, далее, уравнение моментов всех сил относительно полюса р плана скоростей. Имеем:

$$M_p(P_y) + M_p(P_3) + M_p(P_5) = 0$$

или, подставляя в это уравнение соответствующие отрезки плана скоростей, являющиеся плечами сил P_y , P_3 и P_5 , находим: $P_y(pb) = P_3(pc) + P_5(pe)$, откуда получаем величину уравнивающей силы

$$P_y = P_3 \left(\frac{pc}{pb} \right) + P_5 \left(\frac{pe}{pb} \right).$$

Так как правая часть уравнения положительна, то направление силы P_y было нами выбрано правильно и силу P_y прикладываем в точке В механизма. Приведенная сила $P_{п.}$, приложенная в точке В, по линии $q-q$ имеет ту же величину, что и уравнивающая сила P_y , а ее направление противоположно направлению уравнивающей силы, т. е. $P_{п.} = -P_y$.

§ 86. Кинетическая энергия механизма

1°. Как было показано в § 80,2°, уравнение кинетической энергии применительно к механизму имеет вид [см. уравнение (17.1)]

$$A_d - A_c = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \quad (18.29)$$

Пользуясь методами, указанными в § 83 или § 85, можно все движущие силы заменить одной приведенной силой P_d , приложенной к выбранному звену приведения AB (рис. 532) в точке B . Точно так же можно все силы сопротивления заменить одной приведенной силой P_c , приложенной к тому же звену AB и в той же точке B .

Приведенные силы можно также заменить приведенными моментами на валу A , для чего достаточно умножить значения приведенных сил на их плечо относительно точки A .

Имея заданными приведенные силы или моменты, мы можем уравнение движения механизма в форме уравнения кинетической энергии написать в следующем виде:

$$A_{P_d} - A_{P_c} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \quad (18.30)$$

В уравнении (18.30) A_{P_d} есть работа приведенной силы P_d , A_{P_c} — работа приведенной силы P_c . Левая часть этого уравнения может быть выражена и через работы приведенных моментов

$$A_{M_d} - A_{M_c} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \quad (18.31)$$

В уравнении (18.31) A_{M_d} есть работа приведенного момента M_d движущих сил и A_{M_c} — работа приведенного момента M_c сил сопротивления.

Введем обозначения:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} \quad \text{и} \quad T_0 = \sum \frac{mv_0^2}{2}.$$

Тогда уравнения (18.30) и (18.31) можно написать так:

$$A_{P_d} - A_{P_c} = T - T_0 \quad (18.32)$$

и

$$A_{M_d} - A_{M_c} = T - T_0. \quad (18.33)$$

Если приведенные силы или моменты заданы в функции пути точки приведения или в функции угла поворота звена приведения, то не составляет труда определить работу этих сил на заданном интервале. Таким образом, всегда может быть найдена разность работ

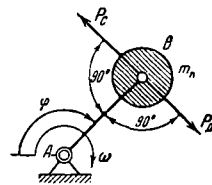


Рис. 532. Схема звена приведения с приведенной массой.

стоящая в левой части уравнений (18.32) и (18.33). Переходя к правой части этих уравнений, мы видим, что в этих частях стоят величины кинетической энергии механизма в рассматриваемых его положениях. Рассмотрим вопрос о том, как может быть определена кинетическая энергия механизма.

2°. В общем случае плоскопараллельного движения звена его кинетическую энергию можно представить в виде суммы энергий в поступательном вместе с центром масс и вращательном вокруг центра масс движениях. Поэтому для механизма можно написать:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n (m_i v_i^2 + J_i \omega_i^2). \quad (18.34)$$

В формуле (18.34) m_i — масса звена i , v_i — скорость его центра масс, J_i — его момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, и ω_i — его угловая скорость. Рассмотрим, как подсчитывается кинетическая энергия отдельных звеньев в зависимости от вида их движения.

Кинетическая энергия звена, движущегося поступательно, равна

$$T = \frac{mv_s^2}{2}.$$

В этой формуле m есть масса звена и v_s — скорость центра масс поступательно движущегося звена. Для звена, имеющего вращательное движение, кинетическая энергия равна

$$T = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Здесь J есть момент инерции звена относительно оси вращения и ω — угловая скорость звена.

Для звена, имеющего сложное плоскопараллельное движение, кинетическую энергию можно представить так:

$$T = \frac{J_P \omega^2}{2}, \quad (18.35)$$

где J_P есть момент инерции звена относительно оси, проходящей через мгновенный центр вращения P , и ω — мгновенная угловая скорость звена. Момент инерции J_P относительно оси, проходящей через мгновенный центр вращения, может быть выражен через момент инерции J_S относительно оси, проходящей через центр масс S звена

$$J_P = J_S + ml_{PS}^2. \quad (18.36)$$

В этом равенстве l_{PS} есть расстояние от центра масс S звена до мгновенного центра вращения P . Подставляя выражение для J_P из равенства (18.36) в формулу (18.35) и принимая во внимание, что

$\omega l_{PS} = v_S$ есть скорость центра масс звена, получаем известную формулу для кинетической энергии звена, имеющего сложное вращательно-поступательное движение

$$T = \frac{J_S \omega^2}{2} + \frac{m v_S^2}{2}. \quad (18.37)$$

Складывая кинетические энергии отдельных звеньев, получаем формулу (18.34) для кинетической энергии всего механизма.

§ 87. Приведенная масса и приведенный момент инерции механизма

1°. Механизм с одной степенью подвижности имеет одно ведущее звено, которое может быть выбрано за звено приведения. Пусть рассматриваемый механизм, состоящий из n звеньев (рис. 533, а), имеет

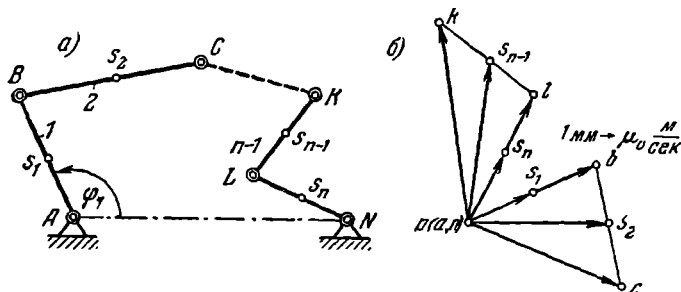


Рис. 533. К определению приведенной массы механизма: а) схема механизма; б) план скоростей.

одну степень подвижности. В этом механизме выбираем звено, например звено AB , в качестве звена приведения, а одну из точек этого звена, например точку B , примем за точку приведения. Помножим и разделим правую часть равенства (18.34) на квадрат скорости v_B^2 точки приведения B и вынесем величину v_B^2 за скобки. Тогда равенство (18.34) в развернутом виде можно представить так:

$$T = \frac{v_B^2}{2} \left[m_1 \left(\frac{v_1}{v_B} \right)^2 + J_1 \left(\frac{\omega_1}{v_B} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_2}{v_B} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{v_B} \right)^2 + \dots + m_n \left(\frac{v_n}{v_B} \right)^2 + J_n \left(\frac{\omega_n}{v_B} \right)^2 \right], \quad (18.38)$$

где $v_1, v_2, \dots, v_n$ — скорости центров масс звеньев.

В равенстве (18.38) кинетическая энергия T выражена в функции скорости v_B точки приведения. Кинетическую энергию можно также выразить в функции угловой скорости ω звена приведения. В этом случае правую часть равенства (18.34) умножаем и делим на квадрат

угловой скорости ω_1^2 звена AB :

$$T = \frac{\omega_1^2}{2} \left[m_1 \left(\frac{v_1}{\omega_1} \right)^2 + J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_2}{\omega_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \dots + \right. \\ \left. + m_n \left(\frac{v_n}{\omega_1} \right)^2 + J_n \left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 \right]. \quad (18.39)$$

Обозначим величину, стоящую в квадратных скобках равенства (18.38), через m_n , а величину, стоящую в квадратных скобках равенства (18.39) — через J_n . Тогда будем иметь:

$$m_n = m_1 \left(\frac{v_1}{v_B} \right)^2 + J_1 \left(\frac{\omega_1}{v_B} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_2}{v_B} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{v_B} \right)^2 + \dots + \\ + m_n \left(\frac{v_n}{v_B} \right)^2 + J_n \left(\frac{\omega_n}{v_B} \right)^2 \quad (18.40)$$

и

$$J_n = m_1 \left(\frac{v_1}{\omega_1} \right)^2 + J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_2}{\omega_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \dots + \\ + m_n \left(\frac{v_n}{\omega_1} \right)^2 + J_n \left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 \quad (18.41)$$

Из равенств (18.40) и (18.41) видно, что величина m_n имеет размерность массы $[кг]$, а величина J_n имеет размерность момента инерции $[кгм^2]$. Таким образом, m_n представляет собой некоторую условную массу, сосредоточенную к точке B , *кинетическая энергия T которой равна в каждом рассматриваемом положении кинетической энергии механизма $ABC...KLN$ (рис. 533, а), т. е. сумме кинетических энергий всех его звеньев. Масса m_n получила название *приведенной массы*.*

Из равенства (18.40) следует, что в общем случае приведенная масса переменна и зависит от квадратов отношений линейных и угловых скоростей, и поэтому она всегда положительна.

Аналогично величина J_n в равенстве (18.41) представляет собой *приведенный к звену AB момент инерции звеньев механизма. Это есть момент инерции вращающегося вместе со звеном AB тела, кинетическая энергия которого в каждом рассматриваемом положении механизма равна сумме кинетических энергий всех его звеньев.*

2°. Подставляя в формулы (18.38) и (18.39) значения m_n и J_n и принимая во внимание формулу (18.34), получаем:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n (m_i v_i^2 + J_i \omega_i^2) = \frac{v_B^2}{2} \sum_1^n \left[m_i \left(\frac{v_i}{v_B} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{v_B} \right)^2 \right] = \frac{m_n v_B^2}{2} \quad (18.42)$$

и

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n (m_i v_i^2 + J_i \omega_i^2) = \frac{\omega_1^2}{2} \sum_1^n \left[m_i \left(\frac{v_i}{\omega_1} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \right] = \frac{J_n \omega_1^2}{2}. \quad (18.43)$$

Из равенств (18.42) и (18.43) следует, что приведенная масса m_n и приведенный момент инерции J_n связаны условием

$$m_n v_B^2 = J_n \omega_1^2,$$

или так как $v_B^2 = \omega_1^2 l_{AB}^2$, то

$$m_n = \frac{J_n}{l_{AB}^2}, \quad (18.44)$$

где l_{AB} — длина звена приведения.

Приведенная масса m_n и приведенный момент инерции J_n могут быть выражены через соответствующие отрезки плана скоростей (рис. 533, б). Имеем:

$$m_n = m_1 \left(\frac{ps_1}{pb} \right)^2 + \frac{J_1}{l_{AB}^2} \left(\frac{ab}{pb} \right)^2 + m_2 \left(\frac{ps_2}{pb} \right)^2 + \frac{J_2}{l_{BC}^2} \left(\frac{bc}{pb} \right)^2 + \dots +$$

$$+ m_n \left(\frac{ps_n}{pb} \right)^2 + \frac{J_n}{l_{LN}^2} \left(\frac{ln}{pb} \right)^2$$

и

$$J_n = m_1 l_{AB}^2 \left(\frac{ps_1}{pb} \right)^2 + J_1 \frac{l_{AB}^2}{l_{AB}^2} \left(\frac{ab}{pb} \right)^2 + m_2 l_{AB}^2 \left(\frac{ps_2}{pb} \right)^2 + J_2 \frac{l_{AB}^2}{l_{BC}^2} \left(\frac{bc}{pb} \right)^2 +$$

$$+ \dots + m_n l_{AB}^2 \left(\frac{ps_n}{pb} \right)^2 + J_n \frac{l_{AB}^2}{l_{LN}^2} \left(\frac{ln}{pb} \right)^2,$$

так как

$$v_{S_1} = \mu_v (ps_1); \quad v_{S_2} = \mu_v (ps_2); \quad v_{S_n} = \mu_v (ps_n);$$

$$\omega_1 = \mu_v \frac{(ab)}{l_{AB}}; \quad \omega_2 = \mu_v \frac{(bc)}{l_{BC}}; \quad \omega_n = \mu_v \frac{(ln)}{l_{LN}}$$

и $v_B = \mu_v (pb)$ где μ_v есть масштаб плана скоростей. Нетрудно видеть, что приведенные массы m_n и момент инерции J_n являются функциями обобщенной координаты φ_1 (рис. 533, а), т. е. $m_n = m_n(\varphi_1)$ и $J_n = J_n(\varphi_1)$.

Как было показано выше, в качестве звена приведения обычно выбирается звено, являющееся ведущим (рис. 533, а). Таким образом, звено AB будет находиться под воздействием сил P_d и P_c , в общем случае переменных, и будет обладать массой m_n , сосредоточенной в точке B , в общем случае также переменной. Приведя все силы, действующие на звенья механизма, и их массы к ведущему звену AB , мы тем самым условно заменили механизм эквивалентной в динамическом отношении системой звена с массой m_n или моментом инерции J_n .

Пример. Определить кинетическую энергию, приведенные массы и момент инерции механизма (рис. 534, а) в положении, показанном на чертеже, если известны массы и моменты инерции его звеньев. Скорости центров масс и угловые скорости звеньев заданы повернутым планом скоростей (рис. 534, б). В качестве звена приведения выбрано звено AB .

Общая кинетическая энергия T механизма согласно формуле (18.34) равна

$$T = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 v_4^2}{2} + \frac{J_4 \omega_4^2}{2} + \frac{m_5 v_5^2}{2}.$$

В этой формуле J_2 и J_4 суть моменты инерции звеньев 2 и 4 относительно осей, проходящих через центры масс S_2 и S_4 ; J_1 и J_3 — моменты инерции звеньев 1 и 3 относительно осей, проходящих через точки A и D , ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 — угловые скорости звеньев 1, 2, 3, 4; v_2 , v_4 и v_5 — скорости центров масс S_2 , S_4 и S_5 звеньев 2, 4 и 5 и m_2 , m_4 и m_5 — массы звеньев 2, 4 и 5. Так как в качестве звена

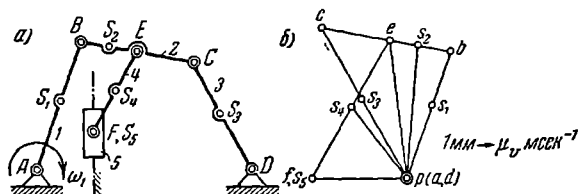


Рис. 534. К определению приведенной массы механизма: а) схема механизма; б) план скоростей.

приведения выбрано звено AB , то кинетическая энергия T механизма согласно формулам (18.39) и (18.41) может быть выражена так:

$$T = \frac{\omega_1^2}{2} \left[J_1 + m_2 \left(\frac{v_2}{\omega_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + J_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + m_4 \left(\frac{v_4}{\omega_1} \right)^2 + J_4 \left(\frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2 + m_5 \left(\frac{v_5}{\omega_1} \right)^2 \right] = \frac{J_n \omega_1^2}{2},$$

где J_n — выражение, стоящее в квадратных скобках.

Величина приведенного момента инерции J_n может быть выражена через соответствующие отрезки плана скоростей (рис. 534, б). Для этого вычисляем все значения линейных и угловых скоростей, входящих в выражение для кинетической энергии. Имеем:

$$\omega_1 = \frac{\mu_v(pb)}{l_{AB}}, \quad \omega_2 = \frac{\mu_v(bc)}{l_{BC}}, \quad \omega_3 = \frac{\mu_v(pc)}{l_{DC}},$$

$$\omega_4 = \frac{\mu_v(fe)}{l_{FE}}, \quad v_2 = \mu_v(ps_2), \quad v_4 = \mu_v(ps_4), \quad v_5 = \mu_v(ps_5).$$

Подставив эти выражения в формулу для приведенного момента инерции, получим:

$$J_n = J_1 + m_2 l_{AB}^2 \left(\frac{ps_2}{pb} \right)^2 + J_2 \frac{l_{AB}^2}{l_{BC}^2} \left(\frac{bc}{pb} \right)^2 + J_3 \frac{l_{AB}^2}{l_{DC}^2} \left(\frac{pc}{pb} \right)^2 + m_4 l_{AB}^2 \left(\frac{ps_4}{pb} \right)^2 + J_4 \frac{l_{AB}^2}{l_{FE}^2} \left(\frac{fe}{pb} \right)^2 + m_5 l_{AB}^2 \left(\frac{ps_5}{pb} \right)^2.$$

Кинетическая энергия механизма (рис. 534, а) может быть также выражена через приведенную массу m_{π} , причем за точку приведения

может быть выбрана любая точка звена AB . Если за точку приведения мы выберем точку B , то формула для кинетической энергии примет следующий вид: $T = \frac{m_{\pi} v_B^2}{2}$.

Так как согласно формуле (18.44) $m_{\pi} = \frac{J_{\pi}}{l_{AB}^2}$, то приведенная масса m_{π} равна

$$m_{\pi} = \frac{J_1}{l_{AB}^2} + m_2 \left(\frac{ps_2}{pb} \right)^2 + \frac{J_2}{l_{BC}^2} \left(\frac{bc}{pb} \right)^2 + \frac{J_3}{l_{DC}^2} \left(\frac{pc}{pb} \right)^2 + \\ + m_4 \left(\frac{ps_4}{pb} \right)^2 + \frac{J_4}{l_{FE}^2} \left(\frac{fe}{pb} \right)^2 + m_5 \left(\frac{ps_5}{pb} \right)^2.$$

Величины отрезков, взятых из плана скоростей, можно брать в миллиметрах без умножения на масштаб μ_v плана, так как при делении одного отрезка на другой масштабы сокращаются.

ГЛАВА XIX

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ МАШИННОГО АГРЕГАТА

§ 88. Основные формы уравнений движения

1°. Как было указано выше (§ 1, 3°), под машинным агрегатом понимается совокупность механизмов двигателя, передаточных механизмов и механизмов рабочей машины. Примерами машинных агрегатов могут быть: поршневой двигатель внутреннего сгорания и поршневой насос, электродвигатель и кривошипный пресс для обработки металлов давлением, электродвигатель и ротационный насос, поршневой двигатель внутреннего сгорания и генератор электрического тока и т. д.

В § 57 и 58 было показано, что движущие силы, силы производственных сопротивлений могут зависеть одновременно или раздельно от положения звена, выбранного за ведущее, и от угловой скорости этого звена. Например, в машинном агрегате с поршневым двигателем и поршневым насосом движущие силы и силы производственных сопротивлений зависят от положения ведущих звеньев. В машинном агрегате электродвигатель — кривошипный пресс для обработки металлов давлением движущие силы зависят от угловой скорости и могут быть представлены в виде соответствующей механической характеристики (см. § 58, 2°). Для прессы сопротивление является функцией положения его ведущего звена. В машинном агрегате электродвигатель — ротационный насос движущая сила и сила производственного сопротивления зависят от угловой скорости ведущих звеньев. Наконец, для машинного агрегата поршневой двигатель внутреннего

сгорания — генератор электрического тока движущая сила может считаться с достаточной точностью зависящей только от положения ведущего звена, а сила производственного сопротивления от угловой скорости вала генератора и т. д.

Приведенные моменты инерции J_n машинного агрегата могут быть или постоянными, или же зависящими от положения ведущего звена. Так, у электродвигателя с ротационным насосом, генератором электрического тока и т. д. приведенный момент инерции J_n постоянный ($J_n = \text{const}$). У кривошипного пресса, поршневого двигателя внутреннего сгорания, строгального станка и т. д. приведенный момент инерции J_n зависит от угла поворота φ ведущего звена [$J_n = J_n(\varphi)$].

Приведенная масса m_n или приведенный момент инерции J_n , очевидно, постоянны для всех машин и механизмов, для которых передаточные отношения, входящие в равенства (18.40) и (18.41), постоянны.

2°. Уравнение движения механизмов машинного агрегата может быть написано в форме уравнения кинетической энергии [см. § 80, (17.1)]

$$A_d - A_c = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \quad (19.1)$$

Если привести все силы и массы к выбранному звену приведения, то уравнение (19.1) может быть написано так:

$$A_{P_d} - A_{P_c} = \frac{m_n v^2}{2} - \frac{m_{n0} v_0^2}{2}, \quad (19.2)$$

где A_{P_d} — работа приведенной к звену приведения движущей силы на рассматриваемом перемещении, A_{P_c} — работа приведенной силы сопротивления на том же перемещении, m_n и m_{n0} — приведенные массы, соответствующие конечному и начальному положениям рассматриваемого перемещения, и v и v_0 — скорости точки приведения, соответствующие конечному и начальному положениям рассматриваемого перемещения.

Обычно удобнее в левую часть уравнения кинетической энергии вводить работу приведенных к звену приведения моментов сил A_{M_d} и A_{M_c} , а правую часть выражать через приведенные моменты инерции J_n и J_{n0} звеньев. Уравнение (19.2) принимает тогда следующий вид:

$$A_{M_d} - A_{M_c} = \frac{J_n \omega^2}{2} - \frac{J_{n0} \omega_0^2}{2}. \quad (19.3)$$

3°. Уравнение движения механизмов машинного агрегата может быть также написано в форме дифференциального уравнения.

Обозначим разность приведенных силы движущей P_d и силы сопротивления P_c через P :

$$P = P_d - P_c.$$

Тогда уравнению кинетической энергии можно придать вид

$$dA = P ds = dT, \quad (19.4)$$

где dA — элементарная работа приведенной силы, ds — элементарное перемещение точки приведения и dT — элементарное приращение кинетической энергии агрегата.

Подставляя в уравнение (19.4) значение кинетической энергии, получаем:

$$P = P_d - P_c = \frac{dT}{ds} = \frac{d\left(\frac{m_n v^2}{2}\right)}{ds}, \quad (19.5)$$

где m_n — приведенная масса, в общем случае переменная и являющаяся функцией пути s . Далее, имеем:

$$\frac{d\left(\frac{m_n v^2}{2}\right)}{ds} = m_n \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} + \frac{v^2}{2} \frac{dm_n}{ds},$$

но

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} = \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dv} \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dv}{dt}.$$

Поэтому уравнение (19.5) принимает вид

$$P = P_d - P_c = m_n \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} \frac{dm_n}{ds}. \quad (19.6)$$

Другой вид уравнению движения механизмов машинного агрегата можно придать, если воспользоваться приведенным моментом $M = M_d - M_c$, приведенным моментом инерции J_n и угловой скоростью ω звена приведения. Имеем:

$$M = M_d - M_c = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}, \quad (19.7)$$

где φ — угол поворота звена приведения. Последнее уравнение получается из уравнения

$$M = M_d - M_c = \frac{dT}{d\varphi} = \frac{d\left(\frac{J_n \omega^2}{2}\right)}{d\varphi} \quad (19.8)$$

аналогично уравнению (19.5).

Для определения истинного движения всех механизмов машинного агрегата, очевидно, достаточно знать закон движения звена, выбранного за звено приведения, т. е. определить из уравнений (19.6) или (19.7) обобщенные координаты приведенных звеньев.

4°. В § 30 было показано, что в общем случае движение любого механизма может быть представлено как сумма двух движений перманентного и начального. В перманентном движении скорость v точки приведения или угловая скорость ω звена приведения постоянны. Соответственно ускорение a точки приведения или угловое ускорение ε звена приведения равны нулю. В начальном движении скорости v и ω соответственно равны нулю, а ускорения a и ε не равны нулю.

Такая интерпретация движения механизма, предложенная Н. Е. Жуковским, становится особенно ясной, если обратиться к уравнению движения звена приведения механизма, написанному в форме дифференциального уравнения вида (19.6) или (19.7).

Рассмотрим уравнение (19.7). Имеем:

$$M = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}. \quad (19.9)$$

В перманентном движении $\omega = \text{const}$ и $\epsilon = d\omega/dt = 0$, и следовательно, равен нулю первый член правой части уравнения (19.9). В начальном движении $\omega = 0$, $\epsilon = d\omega/dt \neq 0$. Следовательно, будет равен нулю второй член правой части уравнения (19.9). Обозначим:

$$M_{\text{нач}} = -J_n \frac{d\omega}{dt}, \quad (19.10)$$

$$M_{\text{пер}} = -\frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}, \quad (19.11)$$

где $M_{\text{нач}}$ — момент от сил инерции в начальном движении, а $M_{\text{пер}}$ — момент от сил инерции в перманентном движении.

Тогда:

$$M - J_n \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi} = 0 \quad (19.12)$$

или

$$M = M_{\text{нач}} + M_{\text{пер}} = 0. \quad (19.13)$$

Уравнение (19.13) есть уравнение динамического равновесия звена приведения, к которому приложен внешний момент M и моменты $M_{\text{нач}}$ и $M_{\text{пер}}$ сил инерции звеньев в начальном и перманентном движениях.

Таким образом, при динамическом исследовании механизма можно не пользоваться понятием приведенной массы или приведенного момента инерции, а определять моменты $M_{\text{нач}}$ и $M_{\text{пер}}$ от сил инерции, приводя силы инерции звеньев, найденные в условиях перманентного движения и начального движений, к выбранному звену приведения.

§ 89. Интегрирование уравнений движения

1°. В дифференциальное уравнение движения механизма машинного агрегата в форме уравнения (19.7) в левую часть входят приведенные моменты M_d и M_c движущих сил и сил сопротивления. Как было указано выше (§ 88, 1°), эти моменты могут быть функциями обобщенной координаты φ или ее первой производной $\dot{\varphi} = \omega$, или, накопец, времени t .

Если рассмотреть возможные сочетания этих функций, то можно установить следующие виды уравнений движения, в которых моменты M_d и M_c являются функциями одной и той же переменной.

Первый вид уравнений:

$$M_d(\varphi) - M_c(\varphi) = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}; \quad (19.14)$$

$$M_d(\omega) - M_c(\omega) = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}; \quad (19.15)$$

$$M_d(t) - M_c(t) = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}. \quad (19.16)$$

В уравнениях (19.14), (19.15) и (19.16) моменты M_d движущих сил и моменты M_c сил сопротивления в каждом из уравнений являются функциями или от φ , или от ω , или от t . Но не менее часто мы имеем случаи, когда моменты M_d и M_c являются функциями различных переменных. Тогда мы получаем уравнения второго вида:

$$M_d(\varphi) - M_c(t) = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}; \quad (19.17)$$

$$M_d(\omega) - M_c(\varphi) = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}; \quad (19.18)$$

$$M_d(t) - M_c(\omega) = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}. \quad (19.19)$$

Уравнения (19.14) — (19.19) в общем случае являются нелинейными дифференциальными, решение которых может быть проведено только приближенными методами.

2°. Нетрудно видеть, что только уравнение (19.14) может быть решено и притом в квадратурах, а не в конечном виде. В самом деле, если $M_d = M_d(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$, то согласно уравнению (19.8) уравнение (19.14) может быть представлено в следующей форме:

$$(M_d - M_c) d\varphi = d \left(\frac{J_n \omega^2}{2} \right),$$

откуда имеем:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_d - M_c) d\varphi = \frac{J_{ni} \omega_i^2}{2} - \frac{J_{n0} \omega_0^2}{2}, \quad (19.20)$$

где J_{ni} и ω_i — приведенный момент инерции и угловая скорость звена приведения в положении i и J_{n0} и ω_0 — приведенный момент инерции и угловая скорость звена приведения в начальном положении. Уравнение (19.20) есть уравнение движения механизма машинного агрегата в форме уравнения кинетической энергии.

Из уравнения (19.20) определяется угловая скорость ω_i :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{ni}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_d - M_c) d\varphi + \frac{J_{n0}}{J_{ni}} \omega_0^2}. \quad (19.21)$$

Из формулы (19.21) следует: если заданы функции $M_d = M_d(\varphi)$, $M_c = M_c(\varphi)$ и $J_n = J_n(\varphi)$, то для определения угловой скорости ω_i

необходимо еще иметь заданной величину угловой скорости ω_0 . Если исследование механизма машинного агрегата начинается с момента пуска его в ход, то угловая скорость ω звена приведения $\omega_0 = 0$ и формула (19.21) принимает вид

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{\text{пн}i}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_{\text{д}} - M_{\text{с}}) d\varphi}. \quad (19.22)$$

Из формул (19.21) и (19.22) можно определить значения угловой скорости ω звена приведения в функции его угла поворота, т. е. $\omega = \omega(\varphi)$. Для определения времени t движения механизма машинного агрегата можно воспользоваться условием:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (19.23)$$

Из соотношения (19.23) получаем:

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \quad (19.24)$$

или

$$t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \quad (19.25)$$

и, далее,

$$t_i = t_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (19.26)$$

Если исследование движения механизма ведется с момента пуска его в ход, то время $t_0 = 0$, и уравнение (19.26) принимает вид

$$t_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (19.27)$$

Из формулы (19.26) или (19.27) можно определить время t движения механизма в функции угла φ поворота звена приведения, т. е. $t = t(\varphi)$. Таким образом, мы имеем две функции $\omega = \omega(\varphi)$ и $t = t(\varphi)$. Исключая из них угол φ , можно получить функцию $\omega = \omega(t)$ — зависимость угловой скорости ω от времени t . Угловое ускорение ε звена приведения определяется из соотношения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi},$$

т. е. дифференцированием функции $\omega = \omega(t)$ или $\omega = \omega(\varphi)$. В частном случае, когда приведенный момент инерции $J_{\text{п}}$ постоянен, то фор-

мулы (19.20) и (19.21) принимают вид

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_d - M_c) d\varphi = \frac{J_n}{2} (\omega_i^2 - \omega_0^2) \quad (19.28)$$

и

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_n} \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_d - M_c) d\varphi + \omega_0^2}. \quad (19.29)$$

Если заданы не приведенные моменты, а приведенные силы $P_d = P_d(s)$, $P_c = P_c(s)$ и приведенная к точке приведения масса $m_n = m_n(s)$, где s — путь точки приведения, то равенства, получаемые решением уравнения движения агрегата, будут аналогичными уравнению (19.20) и формулам (19.21) и (19.26)

$$\int_{s_0}^{s_i} (P_d - P_c) ds = \frac{m_{ni} v_i^2}{2} - \frac{m_{n0} v_0^2}{2}, \quad (19.30)$$

откуда

$$v_i = \sqrt{\frac{2}{m_{ni}} \int_{s_0}^{s_i} (P_d - P_c) ds + \frac{m_{n0}}{m_{ni}} v_0^2}, \quad (19.31)$$

и, далее,

$$t_i = t_0 + \int_{s_0}^{s_i} \frac{ds}{v(s)}, \quad (19.32)$$

где v , v_i и v_0 — скорости точки приведения.

3°. Уравнения (19.15) и (19.16) могут быть решены в квадратурах в частном случае, когда приведенные моменты инерции $J_n = \text{const}$. В этом случае уравнение (19.15) имеет вид

$$M_d(\omega) - M_c(\omega) = J_n \frac{d\omega}{dt}. \quad (19.33)$$

Так как моменты $M_d = M_d(\omega)$ и $M_c = M_c(\omega)$ заданы и известен постоянный момент инерции J_n , то уравнение (19.33) приводится к виду

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = J_n \int_{\omega_0}^{\omega_i} \frac{d\omega}{M_d(\omega) - M_c(\omega)}. \quad (19.34)$$

Из уравнения (19.34) определяется время t движения агрегата в функции угловой скорости ω , т. е. $t = t(\omega)$. Производя интегрирование левой части, получаем:

$$t_i = t_0 + \int_{\omega_0}^{\omega_i} \frac{d\omega}{M_d(\omega) - M_c(\omega)}. \quad (19.35)$$

Уравнение (19.16) при $J_n = \text{const}$ приводится к виду

$$M_d(t) - M_c(t) = J_n \frac{d\omega}{dt}. \quad (19.36)$$

Так как моменты $M_d = M_d(t)$ и $M_c = M_c(t)$ заданы и известен постоянный момент инерции J_n , то из уравнения (19.36) получаем:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_i} d\omega = \frac{1}{J_n} \int_{t_0}^{t_i} [M_d(t) - M_c(t)] dt. \quad (19.37)$$

Из уравнения (19.37) определяется угловая скорость ω движения звена приведения в функции времени t :

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{1}{J_n} \int_{t_0}^{t_i} [M_d(t) - M_c(t)] dt. \quad (19.38)$$

Получение решений уравнений (19.17) — (19.19) в конечном виде возможно в частных случаях, когда функции, стоящие в левой части этих уравнений, достаточно простые.

4°. Как было указано выше, уравнения (19.15) — (19.19) в общем случае могут быть проинтегрированы приближенными методами. В качестве такого метода может быть применен, в частности, метод, разработанный Г. Г. Барановым, заключающийся в том, что угол поворота φ звена приведения разбивается на достаточно малые интервалы $\Delta\varphi$, принимаемые за шаг интегрирования. В каждом интервале $\Delta\varphi$ заданные функции приведенных моментов движущих сил M_d и сил сопротивления M_c считаются постоянными, а приведенный момент инерции J_n принимается изменяющимся линейно.

Обозначим левые части уравнений (19.15) — (19.19) обобщенно в виде $M(\varphi, \omega, t)$, так как моменты M_d и M_c могут быть функциями угла поворота φ , угловой скорости ω и времени t . Тогда эти уравнения можно написать в общем виде так:

$$M(\varphi, \omega, t) = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}. \quad (19.39)$$

Так как

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi},$$

то уравнение (19.39) можно представить в следующем виде:

$$M(\varphi, \omega, t) = J_n \omega \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi} \quad (19.40)$$

или

$$\frac{2M(\varphi, \omega, t)}{\omega} d\varphi = 2J_n d\omega + \omega dJ_n. \quad (19.41)$$

Заменим в уравнении (19.41) $d\varphi$ шагом интегрирования $\Delta\varphi$. Тогда величина $d\omega$ приращения скорости может быть заменена разностью

$(\omega_{i+1} - \omega_i)$, а величина dJ_n приращения приведенного момента инерции — разностью $J_{n(i+1)} - J_{ni}$, где i и $i+1$ — два положения звена приведения, соответствующие началу и концу интервала $\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$.

Тогда уравнение (19.41) принимает вид

$$\frac{2M(\varphi_i, \omega_i, t_i)}{\omega_i} \Delta\varphi = 2J_{ni}(\omega_{i+1} - \omega_i) + \omega_i(J_{n(i+1)} - J_{ni}). \quad (19.42)$$

Решая уравнение (19.42) относительно угловой скорости ω_{i+1} , получаем:

$$\omega_{i+1} = \frac{M(\varphi_i, \omega_i, t_i) \Delta\varphi}{J_{ni}\omega_i} + \frac{3J_{ni} - J_{n(i+1)}}{2J_{ni}}. \quad (19.43)$$

Зная значения для $M(\varphi_i, \omega_i, t_i)$, J_{ni} , $J_{n(i+1)}$ и ω_i , из формулы (19.43) при выбранном шаге интегрирования $\Delta\varphi$ можно определить угловую скорость ω_{i+1} . Проводя шаг за шагом вычисления угловой скорости ω , получаем функцию $\omega = \omega(\varphi)$.

Для определения времени t движения агрегата можно воспользоваться условием

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega}. \quad (19.44)$$

Заменим в уравнении dt через разность $t_{i+1} - t_i$, $d\varphi$ через шаг $\Delta\varphi$ интервала и угловую скорость ω через ее среднее значение $\frac{\omega_i + \omega_{i+1}}{2}$.

В таком случае можно написать:

$$t_{i+1} - t_i = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_i + \omega_{i+1}}, \quad (19.45)$$

откуда определяем время t_{i+1} :

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2\Delta\varphi}{\omega_i + \omega_{i+1}}. \quad (19.46)$$

Изложенный метод приближенного интегрирования может быть применен как в случае аналитического, так и в случае графического задания всех функций, входящих в уравнения (19.15)—(19.19).

§ 90. Исследование движения с помощью уравнения кинетической энергии

1°. В большинстве технических задач приведенный момент движущих сил и приведенный момент сил сопротивления задаются в виде графиков, в виде графика также задается и приведенный момент инерции. Поэтому решение уравнений движения механизма ведется графическими методами. При графическом решении уравнений движения удобно применить уравнение кинетической энергии. Для этого можно использовать диаграмму $T = T(J_n)$, устанавливающую связь между кинетической энергией T и приведенным моментом инерции J_n .

Рассмотрим тот случай, когда приведенные моменты являются функциями угла поворота φ звена привода.

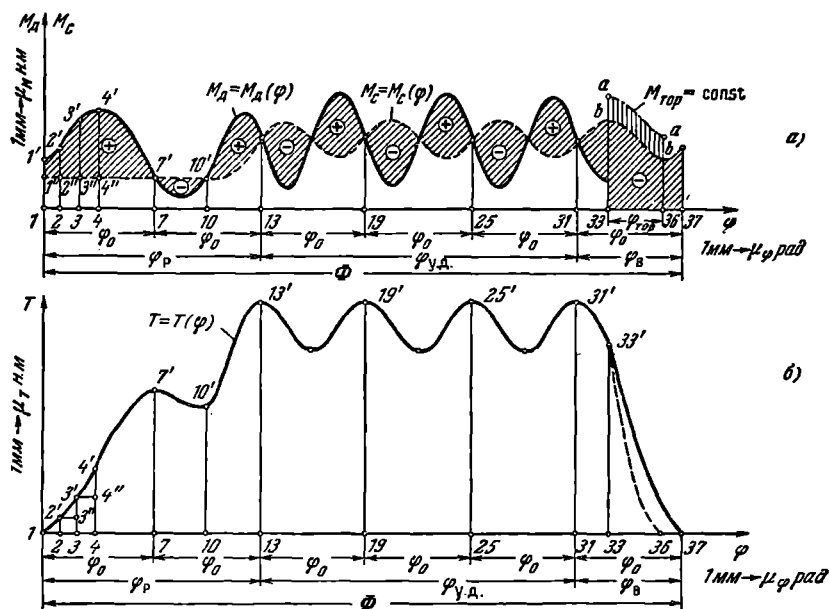


Рис. 535. К графоцисленному решению уравнения движения в форме кинетической энергии: а) графики моментов движущих сил и сил сопротивления; б) график кинетической энергии механизма.

Пусть момент M_d задан графиком $M_d(\varphi)$ (рис. 535, а; сплошная линия), момент M_c задан графиком $M_c = M_c(\varphi)$ (рис. 535, а; штриховая линия), а момент инерции J_n задан графиком $J_n = J_n(\varphi)$ (рис. 536).

Работа приведенного момента M_d на выбранном интервале равна

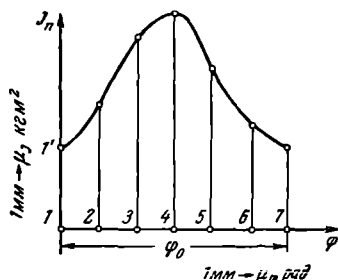


Рис. 536. График приведенного момента инерции.

Работа приведенного момента M_c равна

$$A_{M_c} = \int_0^{\varphi} M_c d\varphi$$

и выражается произведением площади, ограниченной кривой $M_c = M_c(\varphi)$, осью φ , начальной и конечной ординатами, на соответствующие масштабы.

На рис. 535, *a* угол Φ , соответствующий полному времени движения механизма, равен сумме углов: $\Phi = \varphi_p + \varphi_{у.д.} + \varphi_v$, где φ_p — угол, соответствующий времени разбега, $\varphi_{у.д.}$ — угол времени установившегося движения и φ_v — угол времени выбега. Угол φ_0 соответствует времени одного оборота звена приведения. Приращение кинетической энергии механизма за какой-либо промежуток времени согласно уравнению (18.33) выражается разностью площадей кривых $M_d = M_d(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$, помноженной на соответствующие масштабы μ_M и μ_φ . Например, на участке (1 — 2) (рис. 535, *a*) работа приведенного момента M_d выражается площадью $[1'2'2]$ $мм^3$, умноженной на масштабы μ_M и μ_φ моментов и угла поворота, а работа приведенного момента M_c — площадью $[1'2''2]$ $мм^3$, умноженной на те же масштабы. Приращение кинетической энергии ΔT_{12} представляется тогда площадью $[1'2'2'']$ $мм^3$, умноженной на те же масштабы. Таким образом,

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \mu_\varphi \mu_M \{ \text{пл. } [1'2'2] - \text{пл. } [1'2''2] \} = \mu_\varphi \mu_M \text{ пл. } [1'2'2''].$$

В этом равенстве μ_φ есть масштаб углов поворота и μ_M — масштаб моментов. Приращение кинетической энергии на участке (2 — 3) пропорционально площади $[2'2'3'3'']$. Приращение кинетической энергии на участке 3 — 4 пропорционально площади $[3'3'4'4'']$ и т. д.

Изменение кинетической энергии всегда пропорционально площадям, заключенным между кривыми моментов движущих сил и сил сопротивления (на рис. 535, *a* эти площади заштрихованы). Этим площадям следует приписывать знак плюс или минус в зависимости от того, какая работа будет больше: момента движущих сил или момента сил сопротивления. Так, на участке (1 — 7) кривая момента движущих сил расположена выше кривой момента сил сопротивления, и следовательно, приращение кинетической энергии положительно; наоборот, на участке (7—10) приращение кинетической энергии отрицательно и т. д. За все время работы механизма соответствующее углу поворота приращение кинетической энергии равно нулю и сумма всех заштрихованных площадей со знаком плюс должна равняться сумме площадей со знаком минус, так как в момент пуска механизма и в момент его остановки скорость точки приведения равна нулю. Точно такое же равенство должно иметь место и за время установившегося движения на участке (13—25), потому что в этом случае угловая скорость звена приведения механизма через каждый цикл возвращается к прежнему значению.

На рис. 535, *a* условно показаны три полных цикла установившегося движения. Практически число этих циклов может быть очень велико в зависимости от времени непрерывной работы машины.

2°. Подсчитав величины указанных выше площадей, можно построить диаграмму $T = T(\varphi)$ изменения кинетической энергии T звена приведения в функции угла поворота φ (рис. 535, б).

Построение начнем с положения 1. Подсчитаем площадь $[1'2'2'']$ в квадратных миллиметрах. Пусть эта площадь равна F_{12} мм², тогда приращение кинетической энергии на участке (1—2) равно

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \mu_{\varphi} \mu_M \text{ пл. } [1'2'2''] = \mu_{\varphi} \mu_M F_{12},$$

где μ_M — есть масштаб моментов M_d и M_c , а μ_{φ} — масштаб углов поворота звена приведения. Так как механизм начал двигаться с положения, соответствующего точке 1, первоначальный запас кинетической энергии T_1 был равен нулю, и полный запас кинетической энергии механизма в положении 2 выразится величиной T_2 . Эту величину и откладываем в виде отрезка (2—2') в масштабе μ_T на ординате, проведенной в точке 2 (рис. 535, б). Имеем:

$$\Delta T_{12} = T_2 = \mu_{\varphi} \mu_M F_{12} = \mu_T (2 - 2').$$

Далее, подсчитываем следующую площадку $F_{23} = [2''2'3'3'']$ мм². Имеем по предыдущему

$$\begin{aligned} \Delta T_{23} = T_3 - T_2 &= \mu_{\varphi} \mu_M \{ \text{пл. } [1'3'3''] - \text{пл. } [1'2'2''] \} = \\ &= \mu_{\varphi} \mu_M \text{ пл. } [2''2'3'3''] = \mu_{\varphi} \mu_M F_{23} = \mu_T (3'' - 3'), \end{aligned}$$

т. е. приращение кинетической энергии T_{23} на участке (2—3) выражается площадью $[2''2'3'3'']$ мм², умноженной на произведение масштабов μ_{φ} и μ_M . Полученную величину откладываем (рис. 535, б) на ординате в точке 3 в виде отрезка (3''—3') в масштабе μ_T , прибавляя его к предыдущему отрезку (2—2') = (3—3'') и т. д. Ординаты диаграммы кинетической энергии увеличиваются до положения 7, где в точке 7' она имеет вершину, соответствующую одному из максимумов кинетической энергии. Далее, на участке (7—10) кривая опускается, так как заштрихованная площадь (рис. 535, а), заключенная между этими точками оси абсцисс, имеет знак минус. Начиная с точки 10 кривая кинетической энергии $T = T(\varphi)$ поднимается до положения 13, где эта кривая опять имеет вершину в точке 13', и т. д. На участке (13—31), где диаграмма описывает установившееся движение, кривая повторяется через каждый цикл движения механизма, соответствующий углу φ_0 , причем ордината ее достигает то своего максимума, то своего минимума. В положении 31 ордината кривой $T = T(\varphi)$ имеет последний максимум, после чего кривая опускается вследствие наличия на участке (31—37) только одних сил сопротивления. Точка 37, соответствующая моменту остановки механизма, определяется путем постепенного вычитания из ординат кривой кинетической энергии величин, пропорциональных площадям кривой сопротивления на участке (31—37). Момент остановки механизма соответствует полному исчерпыванию кинетической энергии, накоплен-

ной в период разбега. Очевидно, что расход накопленной кинетической энергии может быть ускорен путем введения дополнительных сопротивлений (тормозами). Так, например, вводя дополнительное сопротивление в виде тормозного момента $M_{\text{тор}} = \text{const}$, показанного на рис. 535, а штриховой кривой $a - a$, можно кинетическую энергию механизма израсходовать раньше, и тогда механизм остановится в положении, соответствующем точке 36 (рис. 535, б). Это изменение кривой $T = T(\varphi)$ кинетической энергии показано пунктиром. Нетрудно для этого случая подсчитать работу, которую надо затратить. Она выражается площадью $F_{\text{тор}} \text{ мм}^2$ (рис. 535, а), и полная работа торможения $A_{\text{тор}}$ равна

$$A_{\text{тор}} = \mu_{\varphi} \mu_M F_{\text{тор}} = \mu_{\varphi} \mu_M (ab) \varphi_{\text{тор}},$$

где $\varphi_{\text{тор}}$ — угол поворота звена приведения, на котором производится торможение.

Таким образом, с помощью диаграммы кинетической энергии $T = T(\varphi)$ определяется полный угол поворота Φ звена приведения при заданных моментах движущих сил и сил сопротивления. Для рассматриваемого примера этот угол равен отрезку (1 — 37) оси абсцисс, помноженному на масштаб μ_{φ} , если тормозной момент $\mu_{\text{тор}}$ отсутствует, и соответствует отрезку (1 — 36) при введении дополнительного тормозного момента $M_{\text{тор}}$.

3°. Перейдем теперь к определению угловых скоростей звена приведения. Для этого воспользуемся выражением кинетической энергии механизма [см. формулу (18.43)].

$$T = \frac{J_n \omega^2}{2}. \quad (19.47)$$

В этой формуле J_n есть приведенный момент инерции и ω — угловая скорость звена приведения механизма. Диаграмма $J_n = J_n(\varphi)$ приведенного момента инерции в функции угла поворота дана на рис. 536. Равенство (19.47) можно представить в виде

$$\omega^2 = \frac{2T}{J_n}, \quad (19.48)$$

т. е. квадрат угловой скорости звена приведения в каждом рассматриваемом его положении пропорционален отношению кинетической энергии T , которой обладает машина в рассматриваемом положении, к приведенному моменту инерции J_n , взятому для того же положения.

Для определения значений этого отношения строим диаграммы: приведенного момента инерции $J_n = J_n(\varphi)$ (рис. 537, а) и кинетической энергии $T = T(\varphi)$ (рис. 537, б). Для удобства построений повернем диаграмму $J_n = J_n(\varphi)$ на угол 90° , т. е. ось ординат, на которой отложены значения приведенного момента инерции J_n , расположим горизонтально, а ось абсцисс, где отложены значения угла φ поворота звена приведения, расположим вертикально. Так как кривая $J_n = J_n(\varphi)$ повторяется через каждый цикл, то можно ограничиться

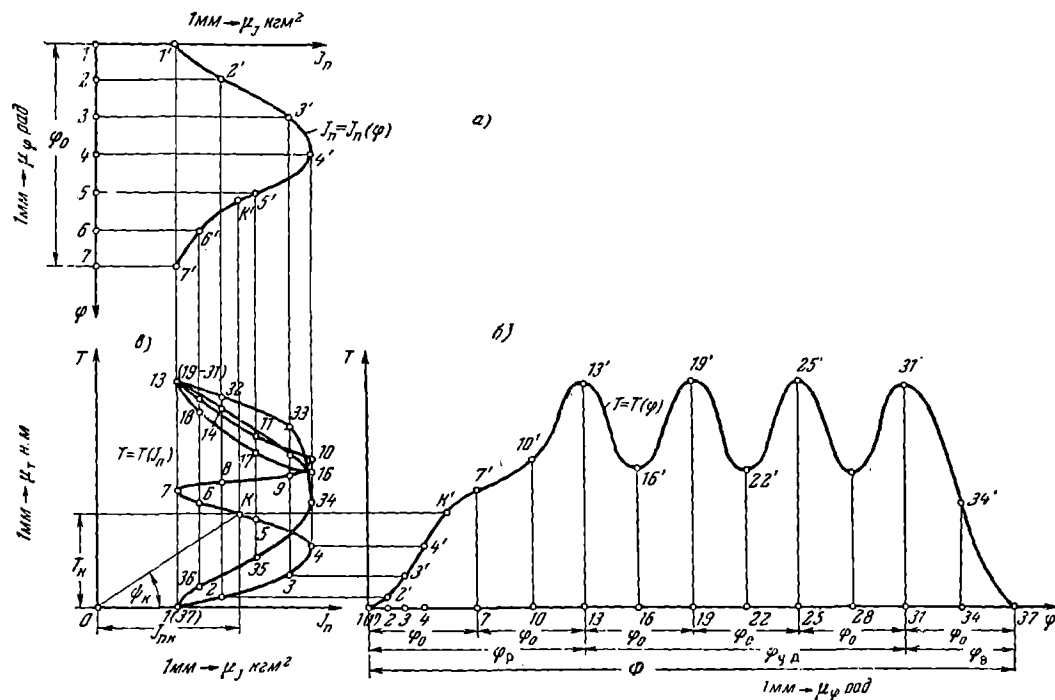


Рис. 537. К определению угловой скорости звена привода: а) диаграмма приведенного момента инерции в функции угла поворота; б) диаграмма кинетической энергии в функции угла поворота; в) диаграмма кинетической энергии в функции приведенного момента инерции.

вычерчиванием диаграммы только для одного полного цикла, соответствующего углу поворота φ_0 , как это сделано на рис. 537, а. На диаграмме $J_n = J_n(\varphi)$ отмечаем точку I' , соответствующую точке I' диаграммы кинетической энергии $T = T(\varphi)$ (рис. 537, б), и через эту точку проводим вертикальную прямую до пересечения с горизонтальной прямой, проведенной через точку I' кривой $T = T(\varphi)$. Точку пересечения этих прямых отметим цифрой 1 (рис. 537, в). Далее, отмечаем на диаграмме $J_n = J_n(\varphi)$ точку $2'$ и соответствующую ей точку $2'$ на диаграмме $T = T(\varphi)$. Пересечение соответствующих вертикали и горизонтали дает точку 2. Пересечение прямых, проведенных через точки $3'$ и $3'$, дает точку 3, через точки $4'$ и $4'$ дает точку 4 и т. д. Соединяя полученные точки плавной кривой, получаем кривую кинетической энергии T в функции приведенного момента инерции J_n (рис. 537, в). Эта кривая представляет зависимость между кинетической энергией T и приведенным моментом инерции J_n , т. е. $T = T(J_n)$. Построим эту кривую для всего времени движения механизма от положения 1 до положения 37. На участке установившегося движения (13 — 31) эта кривая должна быть замкнутой, так как одни и те же значения величин T и J_n периодически повторяются через каждый цикл. Часть кривой, соответствующая времени разбега (1 — 13), не совпадает с частью кривой, соответствующей времени выбега (31 — 37), так как характер кривой $T = T(\varphi)$ на этих участках различен.

4°. Выберем на кривой $T = T(J_n)$ какую-либо точку k и соединим эту точку с точкой O — началом координат (рис. 537, в). Обозначим угол, образованный прямой Ok с осью абсцисс, через ψ_k . Так как по оси абсцисс отложен приведенный момент инерции J_{nk} в масштабе μ_J , соответствующий точке k , а по оси ординат — кинетическая энергия T_k , соответствующая той же точке k в масштабе μ_T , то отношение этих величин даст тангенс угла ψ_k наклона прямой Ok к оси OJ_n :

$$\frac{T_k}{J_{nk}} = \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_k. \quad (19.49)$$

Если соединить последовательно все точки кривой $T = T(J_n)$ с началом O , определить последовательно все углы $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ и, воспользовавшись формулой (19.49), подставить значения тангенсов этих углов в равенство (19.48), то можно получить значение квадратов угловых скоростей ω звена приведения для всех положений механизма. Имеем:

$$\omega_1^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_1; \quad \omega_2^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_2; \quad (19.50)$$

Из формул (19.50) следует, что угловые скорости ω звена AB пропорциональны корням квадратным из тангенсов углов $\psi_1, \psi_2, \dots$, т. е.

$$\omega_1 = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_1}; \quad \omega_2 = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_2}; \quad (19.51)$$

Так определяются значения угловой скорости ω звена привода механизма. Пользуясь этими значениями, можно построить график угловой скорости ω звена привода в функции угла φ : $\omega = \omega(\varphi)$ (рис. 538).

Кривая времени t движения $t = t(\varphi)$ в функции угла φ может быть построена, если воспользоваться формулой (19.25).

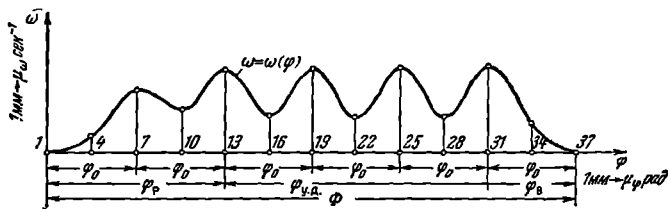


Рис. 538. График угловой скорости звена привода в функции его угла поворота.

Любой промежуток времени от начала движения, соответствующего времени t_1 , до рассматриваемого момента времени t_k равен

$$t_k - t_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_k} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (19.52)$$

Интеграл в правой части формулы (19.52) может быть определен графически, если построить график величин $1/\omega(\varphi)$ в функции угла φ , что можно выполнить, потому что функция $\omega = \omega(\varphi)$ известна. По графикам $\omega = \omega(\varphi)$ и $t = t(\varphi)$ может быть построен график $\omega = \omega(t)$. Угловое ускорение ϵ звена привода определяется графическим дифференцированием функции $\omega = \omega(t)$.

Зная угловую скорость ω и угловое ускорение ϵ звена привода, можно определить скорости, ускорения и силы инерции отдельных звеньев, а также провести полный силовой расчет механизма в условиях неравномерно вращающегося звена привода.

Таким образом, с помощью диаграммы $T = T(J_n)$ и последующих графочисленных расчетов может быть полностью исследован вопрос о движении агрегата при силах, зависящих от положений звена привода.

5°. Если движущие силы или силы сопротивления зависят от положений или скоростей, то исследование движения агрегата может быть проведено также методом, разработанным Вяч. А. Зиновьевым с помощью диаграммы $T = T(\omega)$, дающей зависимость кинетической энергии T от угловой скорости ω звена привода.

Из уравнения (19.8) получаем:

$$M d\varphi = dT = d\left(\frac{J_n \omega^2}{2}\right), \quad (19.53)$$

которое есть не что иное, как уравнение кинетической энергии в дифференциальной форме. Здесь $M = M_d - M_c$, где M_d — приведенный момент движущих сил, M_c — приведенный момент сил сопротивления.

Приведенный момент инерции J_n механизма, входящий в уравнение (19.53), в общем случае является переменным и зависит от угла поворота φ звена привода, и таким образом, известна зависимость $J_n = J_n(\varphi)$. Так как кинетическая энергия механизма равна

$$T = \frac{J_n \omega^2}{2}, \quad (19.54)$$

где ω есть текущее значение угловой скорости звена привода, то для каждого заданного i -го значения J_{ni} может быть построена кривая $T_i = J_{ni} \omega^2 / 2$, которая имеет вид параболы с вершиной в начале координат (рис. 539). Если задана зависимость $J_n = J_n(\varphi)$, то можно построить семейство парабол, каждая из которых соответствует значениям $J_{n1}, J_{n2}, J_{n3}, \dots, J_{nk}$, заданным зависимостью $J_n = J_n(\varphi)$ (рис. 540).



Рис. 539. График кинетической энергии звена привода в функции угловой скорости.

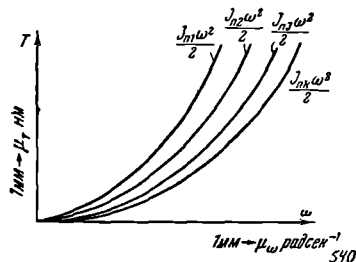


Рис. 540. Графики семейства зависимостей кинетической энергии звена привода от угловой скорости.

6°. Вместо построения семейства парабол $T_i = J_{ni} \frac{\omega^2}{2}$, $i = 1, 2, \dots, k$, что естественно усложняет технику расчета, можно построить одну параболу, но для этого требуется ввести понятие о некотором условном, но постоянном по величине приведенном моменте инерции J_0 механизма.

Зададимся некоторым произвольным, но постоянным значением приведенного момента инерции J_0 , выбранным так, что в каждом положении механизма будет удовлетворяться условие равенства кинетических энергий.

$$\frac{J_0 \omega_0^2}{2} = \frac{J_n \omega^2}{2}, \quad (19.55)$$

где ω_0 — некоторая условная угловая скорость звена привода, соответствующая выбранному значению приведенного момента инерции J_0 . Из равенства (19.55) следует, что действительная угловая скорость ω связана с условной ω_0 равенством

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{J_0}{J_n}}. \quad (19.56)$$

При заданном J_0 величина $\sqrt{\frac{J_0}{J_n}}$, разумеется, всегда может быть подсчитана для каждого положения звена привода. Имея в виду равенство (19.56), можно написать:

$$A_{ik} = \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M d\varphi = \frac{J_0 \omega_0^2 k}{2} - \frac{J_0 \omega_0^2 i}{2}. \quad (19.57)$$

Уравнение (19.57) есть уравнение кинетической энергии, но с некоторым постоянным значением J_0 приведенного момента инерции.

Как это было указано выше, можно задаваться любым значением J_0 . С точки зрения удобства технических расчетов можно, например, принять J_0 равным единице.

7°. Для определения по уравнению (19.57) угловой скорости ω_0 в функции угла φ , т. е. для нахождения зависимости $\omega_0 = \omega_0(\varphi)$, необходимо выразить работу A через угол поворота φ и построить зависимость $A = A(\varphi)$. Кроме того, нужно кинетическую энергию T представить как функцию угловой скорости ω_0 . Если момент M задан в виде графика $M = M(\varphi)$, то методом графического интегрирования может быть построена диаграмма зависимости работы A от угла поворота φ (рис. 541, а);

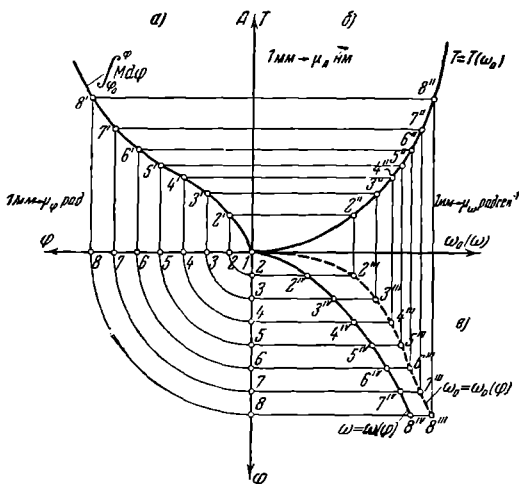


Рис. 541. К построению графика зависимости угловой скорости звена приведения от его угла поворота: а) график зависимости работы от угла поворота; б) график зависимости кинетической энергии от условной угловой скорости звена приведения; в) графики зависимости условной и действительной угловой скорости от угла поворота звена приведения.

$$A_{ik} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_k} M d\varphi = T_{ik},$$

где φ_1 — угол, определяющий положение звена приведения в начале его движения. На рис. 541, а рассмотрено движение агрегата с момента начала его движения, соответствующего положению 1. Далее, задаваясь постоянным значением момента инерции J_0 , строим диаграмму $T = T(\omega_0)$ (рис. 541, б) из условия

$$T = \frac{J_0 \omega_0^2}{2}.$$

Зависимость $T = T(\omega_0)$ изображается параболой с началом в точке 1. Из точек 2, 3, 4, ... оси φ диаграммы $A = A(\varphi)$ (рис. 541, а) проводим вертикальные прямые до пересечения в точках 2', 3', 4', ... с кривой $A = A(\varphi)$. Далее, из точек 2', 3', 4', ... проводим горизонтальные прямые до пересечения в точках 2'', 3'', 4'', ... с кривой $T = T(\omega_0)$ (рис. 541, б). Из точек 2'', 3'', 4'', ... проводим вертикальные прямые, которые отсекут на горизонтальных прямых, проведенных через точки 2, 3, 4, ... вертикальные оси (рис. 541, в), отрезки (2—2''), (3—3''), (4—4''), ... соответствующие значениям угловой скорости ω_0 в положениях 2, 3, 4, ... звена приведения. Кривая $\omega_0 = \omega_0(\varphi)$ построена в правом нижнем квадрате (рис. 541, в) и изображена на чертеже штриховой линией. Имея диаграмму $\omega_0 = \omega_0(\varphi)$, можно построить и диаграмму истинной скорости $\omega = \omega(\varphi)$, для чего надо воспользоваться формулой (19.56). График зависимости $\omega = \omega(\varphi)$ изображен на рис. 541 сплошной линией. Отрезки (2—2''), (3—3''), (4—4''), ... представляют в соответствующем масштабе угловые скорости ω в положениях 2, 3, 4, ... звена приведения. Таким образом, получаем диаграмму $\omega = \omega(\varphi)$ (рис. 541, в).

Построение диаграммы времени движения и определения угловых ускорений звена приведения могут быть теперь сделаны методами, указанными

отрезок (kf) равен

$$(kf) = (ka) + (ae) + (ef),$$

так как $(ka) = (ip)$, $(ae) = (pr)$, $(ef) = (bc)$, то

$$(kf) = (ip) + (pr) + (bc) = (pr) + (bc) + (ip).$$

Отрезок (pr) изображает момент M_i . Отрезок (bc) может быть представлен так:

$$(bc) = (kc) - (iq),$$

или так как отрезок (kc) соответствует $\frac{M_k}{2}$, а отрезок (iq) — $M_i/2$, то отрезок (bc) изображает $M_k/2 - M_i/2 = \Delta M/2$ и отрезок (ip) — $J_{\text{п}} \omega_i^2 / 2\Delta\varphi$. Следовательно, отрезок (kf) согласно уравнению (19.61) изображает $J_{\text{п}} \omega_k^2 / 2\Delta\varphi$, а отрезок (Ok) — угловую скорость ω_k .

9°. Если приведенный момент инерции $J_{\text{п}}$ переменный и является функцией угла φ поворота звена приведения [$J_{\text{п}} = J_{\text{п}}(\varphi)$], то уравнение (19.61) принимает вид

$$M_i + \frac{\Delta M}{2} = \frac{J_{\text{п}k} \omega_k^2}{2\Delta\varphi} - \frac{J_{\text{п}i} \omega_i^2}{2\Delta\varphi}. \quad (19.62)$$

Рис. 544. К графическому решению уравнения (19.62).

Решение уравнения (19.62) аналогично решению уравнения (19.61), но для каждого значения приведенного момента инерции $J_{\text{п}}$ должна быть построена своя кривая $T/\Delta\varphi$. На рис. 544 показано определение угловой скорости ω_k по уравнению (19.62). От точки p откладываем отрезок (pr) , изображающий момент M_i , и из точки r проводим кривую rf , равноотстоящую от кривой $\frac{M}{2} = \frac{M}{2}(\omega)$. Из точки f пересечения кривой rf с кривой $J_{\text{п}k} \omega^2 / 2\Delta\varphi$ опускаем перпендикуляр fk на ось абсцисс. Отрезок (Ok) представляет угловую скорость ω_k , а отрезок (kg) — момент M_k .

10°. Часто при исследовании движения механизма момент $M_{\text{д}}$ движущих сил задается в функции угловой скорости ω , а приведенный момент $M_{\text{с}}$ сил сопротивления — в функции угла поворота φ . Тогда $M_{\text{д}}$ и $M_{\text{с}}$ на участке $\Delta\varphi = \varphi_k - \varphi_i$ выражаются так:

$$M_{\text{д}} \approx M_{\text{д.ср}} = M_i + \frac{\Delta M}{2},$$

где

$$\Delta M = M_k - M_i \quad \text{и} \quad M_{\text{с}} \approx M_{\text{с.ср}},$$

и уравнение движения механизма принимает вид

$$(M_i - M_{\text{с.ср}}) + \frac{\Delta M}{2} = \frac{J_{\text{п}k} \omega_k^2}{2\Delta\varphi} - \frac{J_{\text{п}i} \omega_i^2}{2\Delta\varphi}. \quad (19.63)$$

Решение уравнения (19.63) можно вести методом, изложенным выше, но предварительно по диаграмме $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\varphi)$ для каждого интервала $\Delta\varphi$ надо определить среднее значение $M_{\text{с.ср}}$ и откладывать на соответствующей ординате разность $M_i - M_{\text{с.ср}}$. Так, если задана диаграмма $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\varphi)$ (рис. 545), то методом выравнивания площадок определяем $M_{\text{с.ср}}$ на интервале ik . Далее, от точки p (рис. 546) откладываем отрезок (pr) , представляющий разность $M_i - M_{\text{с.ср}}$, и из точки r проводим кривую rf , равноотстоящую от кривой $\frac{M}{2} = \frac{M}{2}(\omega)$. Опустив из точки f перпендикуляр на ось абсцисс, определим отрезок Ok , изображающий угловую скорость ω_k .

Таким образом, для всех рассмотренных случаев можно определить угловую скорость ω звена приведения в функции угла поворота φ , т. е. $\omega = \omega(\varphi)$. Определение остальных кинематических параметров движения механизма ведется методами, изложенными выше. При приведенных моментах, зависящих от времени t , удобнее применять метод, изложенный в § 89,4°.

11°. В основе рассмотренных в § 90, 8°—10° приближенных приемов определения $\omega = \omega(\varphi)$ при приведенных моментах, зависящих не только от угла поворота φ , но и угловой скорости ω , лежит метод шага, когда заданные функции разбиваются на малые участки, и расчет ведет шаг за шагом от одного участка к соседнему. Для каждого участка принимают значения функций, соответствующих началу каждого рассматриваемого участка. Для

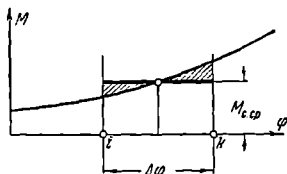


Рис. 545. К определению среднего значения ординаты кривой на заданном интервале.

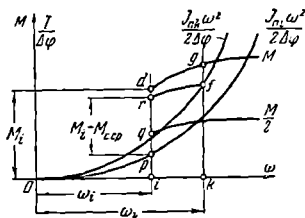


Рис. 546. К графическому решению уравнения (19,63).

получения достаточно точных результатов исследования необходимо рассматриваемый интервал изменения аргумента разбивать на малые участки. В настоящее время в связи с использованием электронных счетно-решающих машин задача численного решения уравнений движения рассмотренного вида не представляет никаких трудностей, так как на этих машинах может быть принят любой по величине шаг расчета и, следовательно, получена требуемая степень точности расчета.

§ 91. Уравнение движения механизма с двумя степенями подвижности

1°. В настоящее время широко применяются механизмы с двумя степенями подвижности. Особенно много применяется дифференциальных зубчатых механизмов. Эти механизмы встречаются в различных областях техники. Дифференциальным зубчатым механизмом можно, например, пользоваться для суммирования двух величин. На рис. 547 изображена схема известного механизма, угловые скорости ω_1 , ω_3 и ω_H колес 1 и 3 и водила H которого связаны следующим соотношением:

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H},$$

где i_{13}^H — передаточное отношение колеса 1 к колесу 3 в движении относительно водила H .

Представим только что приведенную формулу так:

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 + (i_{13}^H - 1) \omega_H}{i_{13}^H}. \quad (19.64)$$

Таким образом, угловую скорость ω_3 колеса 3 мы представили в виде функции угловой скорости ω_1 колеса 1 и угловой скорости ω_H водила H . В аналогичном соотношении находятся и углы поворота φ_3 , φ_1 , и φ_H тех же звеньев

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1 + (i_{13}^H - 1)\varphi_H}{i_{13}^H}. \quad (19.65)$$

Если задать величины углов φ_1 и φ_H , то можно определить и угол φ_3 . Следовательно, дифференциальный зубчатый механизм можно применять для суммирования двух величин.

Пусть числа зубьев колес механизма, изображенного на рис. 547, равны $z_1 = 20$, $z_2 = 20$, $z_3 = 60$. В соответствии с этими данными

$$i_{13}^H = -\frac{z_2}{z_1} \left(+\frac{z_3}{z_2} \right) = -\frac{z_3}{z_1} = -\frac{60}{20} = -3.$$

В этом случае формула (19.65) принимает следующий вид:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1 - 4\varphi_H}{-3}.$$

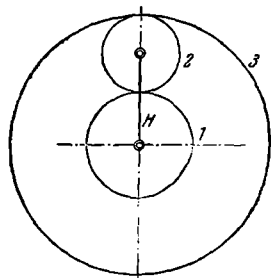


Рис. 547. Схема дифференциального зубчатого механизма.

Таким образом, при заданной схеме (рис. 547) и заданных числах зубьев колес при помощи рассматриваемого механизма из одного числа (φ_1) можно вычитать учетверенное другое число (φ_H). Число 3, входящее в знаменатель, является масштабом, который можно принять во внимание при градуировании шкал, на которых могут быть отмечены последовательные ряды чисел, пропорциональных величинам углов φ_1 , φ_H и φ_3 .

Усложнением схемы, изображенной на рис. 547, можно изменить соотношения величин, входящих в формулу (19.65). Например, приводя во вращение водило H через одноступенчатую зубчатую передачу, передаточное отношение которой равно 4, мы будем вводить на водило H $1/4$ заданного числа, и тем самым механизм можно будет применять для вычитания двух чисел.

Если выбрать какую-либо другую схему дифференциального зубчатого механизма, у которого $i_{13}^H > 0$, то таким механизмом можно пользоваться для сложения чисел.

Дифференциальными зубчатыми механизмами можно пользоваться для сложения и вычитания двух функций. Если, например, $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ и $\varphi_H = \varphi_H(t)$, то для φ_3 можно воспользоваться формулой (19.65), на основании которой имеем:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1(t) + (i_{13}^H - 1)\varphi_H(t)}{i_{13}^H}. \quad (19.66)$$

Однако если в механизм вводятся быстро изменяющиеся функции, то приходится считаться с динамическими явлениями, которые могут исказить результат суммирования. Эффект этих динамических явлений зависит от величин движущихся масс механизма и от скоростей их движения, ибо изменяющаяся кинетическая энергия механизма неизменно вносит искажения в результат суммирования. Поэтому массы звеньев таких механизмов должны быть малыми.

Из изложенного вытекает, что в рассматриваемом механизме имеются четыре переменные величины φ_1 , φ_2 , φ_3 и φ_H , каждая из которых определяет положение соответствующего звена. Для решения задачи о положениях этого механизма надо задавать две из указанных величин. Задаваемые величины, как известно, называются *обобщенными координатами*, которые одна от другой не зависят. В рассмотренных нами примерах в качестве обобщенных координат были выбраны углы φ_1 и φ_H . Можно было бы выбрать и какие-либо две другие величины из четырех. Этот выбор зависит от условий, которые ставятся в задаче.

2°. Механизмами с двумя степенями подвижности широко пользуются и для привода приемников энергии — рабочих машин. В механизме, изображенном на рис. 547, мы интересовались движением трех звеньев 1, 3 и H . Если движения этих звеньев известны, то всегда можно определить и закон движения колеса 2. Далее, мы также будем интересоваться движениями звеньев 1, 3 и H .

Одно из этих звеньев может быть соединено с двигателем, а остальные два — с рабочими машинами. Может быть и наоборот — два двигателя приводят в движение одну рабочую машину. Наконец, в практике встречаются и такие механизмы, в которых два звена соединяются обыкновенной зубчатой передачей, вследствие чего механизм превращается в так называемый *замкнутый дифференциальный механизм* с одной степенью подвижности.

3°. Обращаясь к механизму, изображенному на рис. 547, рассмотрим тот случай, когда колесо 1 и водило H соединены с двигателями, развивающими моменты M_1 и M_H , а рабочая машина связана с валом колеса 3. На валу колеса 3 приложен момент M_a сопротивления. Моменты инерции звена 1, звена 3 и водила H соответственно равны J_1 , J_3 , J_H . Момент инерции колеса 2 $J_2 \approx 0$.

В качестве обобщенных координат выбираем углы φ_1 и φ_H поворота колеса 1 и водила H . В таком случае угловая скорость ω_3 колеса 3 оказывается связанной с угловыми скоростями ω_1 и ω_H соотношением (19.64)

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 + (i_{13}^H - 1) \omega_H}{i_{13}^H}.$$

Для определения законов движения звеньев воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = M_{п1}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_H} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_H} = M_{пH}, \quad (19.67)$$

где T — кинетическая энергия всех подвижных звеньев механизма, $M_{п1}$ — обобщенная сила, приложенная к звену 1, $M_{пH}$ — обобщенная сила, приложенная к звену H . Указанные обобщенные силы являются приведенными к звеньям с обобщенными координатами моментами внешних сил.

Напишем выражение кинетической энергии механизма

$$T = J_1 \frac{\omega_1^2}{2} + J_3 \frac{\omega_3^2}{2} + J_H \frac{\omega_H^2}{2}. \quad (19.68)$$

Выразим квадрат угловой скорости ω_3^2 через угловые скорости ω_1 и ω_H , для чего воспользуемся равенством (19.64)

$$\omega_3^2 = \frac{\omega_1^2}{(i_{13}^H)^2} + \frac{(i_{13}^H - 1)^2}{(i_{13}^H)^2} \omega_H^2 + 2 \frac{i_{13}^H - 1}{(i_{13}^H)^2} \omega_1 \omega_H.$$

Заменим в равенстве (19.68) ω_3^2 только что полученным его выражением. После преобразований получаем:

$$T = \left[J_1 + \frac{J_3}{(i_{13}^H)^2} \right] \frac{\omega_1^2}{2} + \left[J_H + \frac{J_3 (i_{13}^H - 1)^2}{(i_{13}^H)^2} \right] \frac{\omega_H^2}{2} + \frac{J_3 (i_{13}^H - 1)}{(i_{13}^H)^2} \omega_1 \omega_H. \quad (19.69)$$

Вводя обозначения

$$J_{11} = J_1 + \frac{J_3}{(i_{13}^H)^2}, \quad J_{HH} = J_H + \frac{J_3 (i_{13}^H - 1)^2}{(i_{13}^H)^2}, \quad J_{1H} = \frac{J_3 (i_{13}^H - 1)}{(i_{13}^H)^2}, \quad (19.70)$$

имеем:

$$T = J_{11} \frac{\omega_1^2}{2} + J_{HH} \frac{\omega_H^2}{2} + J_{1H} \omega_1 \omega_H. \quad (19.71)$$

Величину J_{11} можно считать приведенным к колесу 1 моментом инерции, соответственно J_{HH} — приведенным к водилу H моментом инерции. Что касается величины J_{1H} , то, являясь коэффициентом при произведении $\omega_1 \omega_H$, ее следует считать приведенным моментом инерции и к колесу 1 и к водилу H .

Теперь определим производные, входящие в уравнения (19.67):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) &= J_{11} \dot{\omega}_1 + J_{1H} \dot{\omega}_H; & \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_H} \right) &= J_{HH} \dot{\omega}_H + J_{1H} \dot{\omega}_1; & \frac{\partial T}{\partial \varphi_H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.72)$$

Далее, определим приведенные моменты $M_{п1}$ и $M_{пH}$. Для этого воспользуемся выражением для суммы мощностей сил, действующих на механизм:

$$M_1 \omega_1 + M_3 \omega_3 + M_H \omega_H = M_{п1} \omega_1 + M_{пH} \omega_H^* \quad (19.73)$$

Подставляя в это равенство значение угловой скорости ω_3 из формулы (19.64), получаем:

$$\left[M_1 + \frac{M_3}{i_{13}^H} \right] \omega_1 + \left[\frac{i_{13}^H - 1}{i_{13}^H} M_3 + M_H \right] \omega_H = M_{п1} \omega_1 + M_{пH} \omega_H. \quad (19.74)$$

Таким образом, приведенные моменты сил выражаются так:

$$M_{п1} = M_1 + \frac{M_3}{i_{13}^H}, \quad M_{пH} = \frac{i_{13}^H - 1}{i_{13}^H} M_3 + M_H. \quad (19.75)$$

*) Моменты и угловые скорости суть величины алгебраические.

Теперь уравнения Лагранжа можно написать в более удобном для исследования виде

$$J_{11}\dot{\omega}_1 + J_{1H}\dot{\omega}_H = M_{п1}, \quad J_{1H}\dot{\omega}_1 + J_{HH}\dot{\omega}_H = M_{пH}. \quad (19.76)$$

4°. Исследуем уравнения (19.76). Бóльшая или меньшая трудность их решения зависит от вида функций $M_{п1}$ и $M_{пH}$. В общем случае они могут быть выражены так:

$$M_{п1} = M_{п1}(\varphi_1, \omega_1, t), \quad M_{пH} = M_{пH}(\varphi_H, \omega_H, t). \quad (19.77)$$

В таком общем случае уравнения (19.76) можно решить только приближенными методами. Для такого решения представим эти уравнения так:

$$\left. \begin{aligned} J_{11}\Delta\omega_1 + J_{1H}\Delta\omega_H &= M_{п1}(\varphi_{1i}, \omega_{1i}, t_i) \Delta t, \\ J_{1H}\Delta\omega_1 + J_{HH}\Delta\omega_H &= M_{пH}(\varphi_{Hi}, \omega_{Hi}, t_i) \Delta t, \end{aligned} \right\} \quad (19.78)$$

где на рассматриваемом малом участке Δt исследуемого интервала движения от положения i механизма $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_H$ суть приращения угловой скорости колеса 1 и водила H , а $M_{п1}(\varphi_{1i}, \omega_{1i}, t_i)$ и $M_{пH}(\varphi_{Hi}, \omega_{Hi}, t_i)$ — значения приведенных моментов в положении i .

Таким образом, мы свели рассматриваемую задачу к системе двух алгебраических уравнений, из которых определяются $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_H$. После их определения можно вычислить угловые скорости ω_{1k} и ω_{Hk} для следующего положения k :

$$\omega_{1k} = \omega_{1i} + \Delta\omega_1, \quad \omega_{Hk} = \omega_{Hi} + \Delta\omega_H. \quad (19.79)$$

После определения угловых скоростей в положении k можно определить углы φ_{1k} и φ_{Hk} поворота колеса 1 и водила H . Для этого воспользуемся следующим равенством:

$$\varphi_{1k} - \varphi_{1i} = \int_{t_i}^{t_k} \omega_1 dt \quad \text{и} \quad \varphi_{Hk} - \varphi_{Hi} = \int_{t_i}^{t_k} \omega_H dt.$$

При приближенном решении можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1k} &\approx \varphi_{1i} + \omega_{1cp}(t_k - t_i) = \varphi_{1i} + \frac{\omega_{1i} + \omega_{1k}}{2}(t_k - t_i), \\ \varphi_{Hk} &\approx \varphi_{Hi} + \omega_{Hcp}(t_k - t_i) = \varphi_{Hi} + \frac{\omega_{Hi} + \omega_{Hk}}{2}(t_k - t_i). \end{aligned} \right\} \quad (19.80)$$

Продолжая, далее, расчет изложенным способом, можно определить величины угловых скоростей для всего исследуемого интервала движения механизма, разделенного на несколько, например n , участков. Точность решения зависит от числа n участков. При современной счетной технике исследуемый интервал можно делить на сотни и даже тысячи участков, что позволяет получать результаты высокой точности.

5°. Аналитическое решение удастся только при достаточно простых заданных функциях $M_{п1}$, M_3 и M_H .

Когда величины $M_{п1}$, M_3 и M_H постоянны, ω_1 и ω_H изменяются по закону прямой линии.

Рассмотрим достаточно часто встречающийся в практике случай. Пусть M_1 и M_H являются функциями угловых скоростей и выражаются следующим образом:

$$M_1 = a - b\omega_1, \quad M_H = a_1 - b_1\omega_H. \quad (19.81)$$

Момент на колесе 3 примем постоянным и равным $M_3 = a_2$.

Для определения приведенных моментов сил воспользуемся формулами (19.75)

$$\left. \begin{aligned} M_{п1} &= a - b\omega_1 + \frac{a_2}{i_{13}^H} = a' - b\omega_1, \\ M_{пH} &= a_1 - b_1\omega_H + \frac{i_{13}^H - 1}{i_{13}^H} a_2 = a'_1 - b_1\omega_H. \end{aligned} \right\} \quad (19.82)$$

После подстановки полученных выражений в (19.76) и несложных преобразований получаем:

$$\left. \begin{aligned} J_{11}\dot{\omega}_1 + b\left(\omega_1 - \frac{a'}{b}\right) + J_{1H}\dot{\omega}_H &= 0, \\ J_{1H}\dot{\omega}_1 + b_1\left(\omega_H - \frac{a'_1}{b_1}\right) + J_{HH}\dot{\omega}_H &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.83)$$

Для упрощения этих уравнений введем новые переменные x и y :

$$x = \omega_1 - \frac{a'}{b}, \quad \dot{x} = \dot{\omega}_1; \quad y = \omega_H - \frac{a'_1}{b_1}, \quad \dot{y} = \dot{\omega}_H.$$

Теперь уравнения (19.83) можно заменить следующими:

$$J_{11}\dot{x} + bx + J_{1H}\dot{y} = 0, \quad J_{1H}\dot{x} + J_{HH}\dot{y} + by = 0. \quad (19.84)$$

Для исключения одной переменной разрешим первое уравнение относительно $\dot{y}$:

$$\dot{y} = -\frac{J_{11}}{J_{1H}} \dot{x} - \frac{b}{J_{1H}} x \quad (19.85)$$

и продифференцируем это равенство

$$\ddot{y} = -\frac{J_{11}}{J_{1H}} \ddot{x} - \frac{b}{J_{1H}} \dot{x}. \quad (19.86)$$

Продифференцируем и второе уравнение системы (19.84)

$$J_{1H}\ddot{x} + J_{HH}\ddot{y} + b\dot{y} = 0. \quad (19.87)$$

Теперь подставим в это уравнение выражения $\dot{y}$ и $\ddot{y}$ из равенств (19.85) и (19.86)

$$J_{1H}\ddot{x} - \frac{J_{11}J_{HH}}{J_{1H}} \ddot{x} - \frac{J_{HH}b}{J_{1H}} \dot{x} - \frac{bJ_{11}}{J_{1H}} \dot{x} - \frac{b^2}{J_{1H}} x = 0.$$

Это уравнение представим так:

$$\ddot{x} - b \frac{J_{11} + J_{HH}}{J_{1H}^2 - J_{11}J_{HH}} \dot{x} - \frac{b^2}{J_{1H}^2 - J_{11}J_{HH}} x = 0. \quad (19.88)$$

Введем обозначения

$$2k = b \frac{J_{11} + J_{HH}}{J_{1H}^2 - J_{11}J_{HH}}, \quad m = \frac{b^2}{J_{1H}^2 - J_{11}J_{HH}}, \quad (19.88')$$

после чего уравнение (19.88) можно представить в простом виде

$$\ddot{x} - 2k\dot{x} - mx = 0. \quad (19.89)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего этому дифференциальному уравнению, следующие:

$$p_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 + m}. \quad (19.90)$$

Теперь можно написать решение уравнения (19.89)

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad (19.91)$$

или, принимая во внимание приведенное выше значение x , имеем:

$$\omega_1 = \frac{a'}{b} + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \quad (19.92)$$

Переходим, далее, к определению угловой скорости ω_H . Изучая уравнения (19.83), можно обратить внимание на то, что они симметричны, и поэтому формулу для ω_H можно написать сразу круговой подстановкой. Для определения ω_H надо предварительно воспользоваться такими формулами, которые мы напомним на основании формул (19.88'):

$$2k_1 = b_1 \frac{J_{11} + J_{HH}}{J_{1H}^2 - J_{11}J_{HH}}, \quad m_1 = \frac{b_1^2}{J_{1H}^2 - J_{11}J_{HH}}, \quad (19.88'')$$

$$p_{1,2} = k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + m_1}, \quad (19.90')$$

$$\omega_H = \frac{a'_1}{b_1} + C_3 e^{p_1 t} + C_4 e^{p_2 t} \quad (19.92')$$

Исследуем полученные формулы (19.92) и (19.92'). Если величины p_1, p_2 и p'_1, p'_2 окажутся положительными, то угловые скорости ω_1 и ω_H будут непрерывно возрастать, и механизм для длительной непрерывной работы будет непригодным.

Для существования установившегося движения с угловыми скоростями ω_{1y} и ω_{Hy} , соответственно равными a'/b и a'_1/b_1 , надо, чтобы p_1, p_2 и p'_1, p'_2 были отрицательными. Это возможно, если k, m и k_1, m_1 оказываются отрицательными (см. формулы (19.90) и (19.90')), а для этого необходимо, чтобы знаменатели выражения (19.88') и выражения (19.88'') были отрицательными, и, таким образом, должно соблюдаться неравенство

$$J_{1H}^2 - J_{11}J_{HH} < 0. \quad (19.93)$$

Если теперь в это неравенство сделать подстановки из формул (19.70), то можно будет убедиться, что во всех случаях неравенство (19.93) соблюдается. После указанных подстановок и преобразований имеем:

$$J_{1H}^2 - J_{11}J_{HH} = -[J_1 J_H (i_{13}^H)^2 + J_1 J_3 (i_{13}^H - 1) + J_3 J_H].$$

Итак, установившееся движение рассматриваемого механизма при приведенных выше исходных данных возможно, если его движение началось из состояния покоя.

Постоянные C_1, C_2 и C_3, C_4 определяются из начальных условий. При $t=0$, в начальный момент пуска механизма, ω_{10} и ω_{H0} равны нулю, но производные $\dot{\omega}_{10}$ и $\dot{\omega}_{H0}$ нулю не равны. Их можно определить так. При $t=0$ уравнения (19.83) превращаются в следующие:

$$J_{11}\dot{\omega}_{10} + J_{1H}\dot{\omega}_{H0} = a', \quad J_{11}\dot{\omega}_{10} + J_{HH}\dot{\omega}_{H0} = a'_1. \quad (19.94)$$

После решения этих уравнений получаем:

$$\dot{\omega}_{10} = \frac{a' J_{HH} - a'_1 J_{1H}}{J_{11} J_{HH} - J_{1H}^2}, \quad \dot{\omega}_{H0} = \frac{a'_1 J_{HH} - a' J_{1H}}{J_{11} J_{HH} - J_{1H}^2}. \quad (19.94')$$

Определять постоянные C_1, C_2 и C_3, C_4 мы не будем. Это проще делать, когда решается конкретная задача.

Формулы (19.92) и (19.92') позволяют определить зависимости угловых скоростей ω_1 и ω_H от времени за время пуска механизма, находящегося до этого в состоянии покоя. Для определения угловой скорости колеса 3 воспользуемся формулой (19.64). После соответствующих подстановок и преобразований окончательно получаем выражение следующего вида:

$$\omega_3 = \frac{a'b_1 + (i_{13}^H - 1)a'_1 b}{i_{13}^H b b_1} + \frac{C_1}{i_{13}^H} e^{p_1 t} + \frac{C_2}{i_{13}^H} e^{p_2 t} + C_3 \frac{i_{13}^H - 1}{i_{13}^H} e^{p_1 t} + C_4 \frac{i_{13}^H - 1}{i_{13}^H} e^{p_2 t}. \quad (19.95)$$

Так как p_1, p_2 и p'_1, p'_2 — величины отрицательные, то при стремлении t к бесконечности все угловые скорости стремятся к своим предельным значениям, определяющим установившееся движение механизма. Величины этих угловых скоростей следующие:

$$\omega_1 = \frac{a'}{b}, \quad \omega_H = \frac{a'_1}{b_1}, \quad \omega_3 = \frac{a'b_1 + (i_{13}^H - 1)a'_1 b}{i_{13}^H b b_1}. \quad (19.96)$$

Если вместо a' и a'_1 подставить их значения

$$a' = a + \frac{a_2}{i_{13}^H}, \quad a'_1 = a_1 + \frac{i_{13}^H - 1}{i_{13}^H} a_2, \quad (19.97)$$

определяемые на основании формул (19.82), то вместо равенств (19.96) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{i_{13}^H a + a_2}{i_{13}^H b}, \quad \omega_H = \frac{a_1 i_{13}^H + (i_{13}^H - 1) a_2}{i_{13}^H b_1}, \\ \omega_3 &= \frac{(i_{13}^H a + a_2) b_1 + (i_{13}^H - 1) [i_{13}^H a_1 + (i_{13}^H - 1) a_2] b}{(i_{13}^H)^2 b b_1}. \end{aligned} \right\} \quad (19.98)$$

6°. Исследуем теперь полученные результаты. По условию колесо 1 и водило H ведущие, потому что они соединены с двигателями. Направления действия их моментов и направления их угловых скоростей должны совпадать. Колесо 3 — ведомое, вследствие чего приложенный к нему момент сопротивления должен быть направлен против его угловой скорости.

Передаточное отношение i_{13}^H рассматриваемого нами механизма от колеса 1 к колесу 3 в движении относительно водила H отрицательное

$$i_{13}^H = -\frac{z_2}{z_1} \left(+ \frac{z_3}{z_2} \right) = -\frac{z_3}{z_1},$$

где z с соответствующим индексом — число зубьев колеса.

В таком случае согласно формуле (19.64) имеем:

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 - \left(\frac{z_2}{z_1} + 1 \right) \omega_H}{-\frac{z_3}{z_1}}. \quad (19.99)$$

При установившемся движении угловые скорости колес выражаются формулами (19.98), которые позволяют ответить на вопрос, какие следует задавать направления вращения колеса 1 и водила H , к которым приложены движущие моменты. Оба эти звена должны преодолевать момент a_2 , приложенный к колесу 3.

Первое равенство (19.97) показывает, что при положительном a_2 второй член правой части отрицательный, и следовательно, величина a должна быть положительная, положительной должна быть и угловая скорость ω_1 [см. (19.98)].

Во втором равенстве (19.97) при том же положительном моменте a_2 второй член положительный, и потому величина a_1 должна быть отрицательная, в противном случае двигатель, соединенный с водилом H , будет находиться в генераторном режиме, т. е. будет приемником энергии, и двигатель колеса 1 должен будет преодолевать заданный внешний момент сопротивления и момент работающего как генератор двигателя водила H .

Можно убедиться [см. третью формулу (19.98)], что угловая скорость ω_3 колеса 3 отрицательная, а так как момент a_2 мы считаем положительным, то он направлен против угловой скорости ω_3 и, таким образом, является сопротивлением.

7°. Рассмотрим более сложную задачу о рычажном механизме с двумя степенями подвижности. На рис. 548, а показан семизвенный механизм

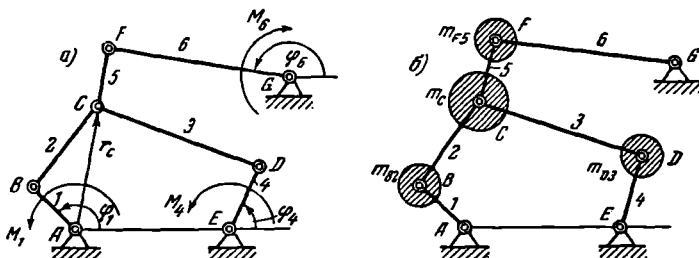


Рис. 548. Схема семизвенного механизма с двумя степенями подвижности: а) кинематическая схема; б) динамическая модель.

с двумя степенями подвижности. В качестве обобщенных координат примем углы поворота φ_1 и φ_4 звеньев 1 и 4. Для определения положений всех звеньев механизма необходимо и достаточно знать в каждом его положении или радиус-вектор r_C , определяющий положение точки C, или угол φ_0 , определяющий положение звена 6 в функции углов φ_1 и φ_4 , т. е.

$$r_C = r_C(\varphi_1, \varphi_4), \quad \varphi_0 = \varphi_0(\varphi_1, \varphi_4). \quad (19.100)$$

Скорости v_B и v_D точек B и D являются функциями обобщенных координат φ_1 и φ_4 , т. е. $v_B = v_B(\varphi_1)$ и $v_D = v_D(\varphi_4)$. Скорость v_C точки C есть функция обеих обобщенных координат и, таким образом, $v_C = v_C(\varphi_1, \varphi_4)$. Угловая скорость ω_6 звена 6 является также функцией обеих обобщенных координат: $\omega_6 = \omega_6(\varphi_1, \varphi_4)$. По правилу дифференцирования сложных функций получаем из равенств (19.100)

$$\left. \begin{aligned} v_C &= \frac{\partial r_C}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial r_C}{\partial \varphi_4} \frac{d\varphi_4}{dt} = v_{C\varphi_1} \omega_1 + v_{C\varphi_4} \omega_4, \\ \omega_6 &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varphi_4} \frac{d\varphi_4}{dt} = i_{01} \omega_1 + i_{04} \omega_4. \end{aligned} \right\} \quad (19.101)$$

В равенствах (19.101) r_C — радиус-вектор, определяющий положение точки C (рис. 548, a), и φ_6 — угол поворота звена 6. Величины $v_{C\varphi_1}$, $v_{C\varphi_4}$, i_{61} и i_{64} суть аналоги скоростей точки C и передаточные функции или аналоги угловых скоростей звена 6. Для определения величин $v_{C\varphi_1}$ и i_{61} условно останавливаем звено 4. В таком случае получаем четырехзвенный шарнирный механизм $ABCD$ с присоединенной к нему двухповодковой группой CFG (рис. 548, a). Этот механизм имеет одну степень подвижности, и для него изложенными ранее методами можно определить аналоги $v_{C\varphi_1}$ и i_{61} . Соответственно для определения аналогов $v_{C\varphi_4}$ и i_{64} надо условно остановить звено 1. Таким образом, каждому значению, например, обобщенной координаты φ_4 соответствует зависимость $v_{C\varphi_1}$ и зависимость ω_{01} от координаты φ_1 , и может быть построено семейство кривых, характеризующих кинематику механизма.

8°. Пусть звенья 1 и 4 нагружены моментами $M_{д1}$ и $M_{д4}$ движущих сил, равными $M_{д1} = M_1$, $M_{д4} = M_4$, а звено 6 моментом M_c сил сопротивления, равным $M_c = M_6$. Уравнения движения механизма в форме уравнений Лагранжа второго рода имеют следующий вид:

$$M_{п1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1}, \quad M_{п4} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_4} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_4}. \quad (19.102)$$

Величины приведенных к звеньям 1 и 4 моментов $M_{п1}$ и $M_{п4}$ определяются из уравнения баланса мощности механизма

$$M_1 \omega_1 + M_4 \omega_4 - M_6 \omega_6 = M_{п1} \omega_1 + M_{п4} \omega_4. \quad (19.103)$$

Знак минус у последнего члена левой части уравнения (19.103) поставлен потому, что момент M_6 есть момент сил сопротивления.

Заменяя ω_6 его выражением из второго равенства (19.101) и подставляя в (19.103), получаем:

$$(M_1 - M_6 i_{61}) \omega_1 + (M_4 - M_6 i_{64}) \omega_4 = M_{п1} \omega_1 + M_{п4} \omega_4,$$

откуда

$$M_{п1} = M_1 - M_6 i_{61}, \quad M_{п4} = M_4 - M_6 i_{64}. \quad (19.104)$$

9°. Переходим к определению кинетической энергии рассматриваемого механизма. Для любого звена i механизма кинетическая энергия T_i равна

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{J_i \omega_i^2}{2}, \quad (19.105)$$

где m_i — масса звена i , v_i — скорость центра масс того же звена, J_i — момент инерции относительно центра масс звена i , ω_i — угловая скорость звена i .

На основании равенств (19.101) можно написать:

$$v_i = v_{i\varphi_1} \omega_1 + v_{i\varphi_4} \omega_4, \quad \omega_i = i_{i1} \omega_1 + i_{i4} \omega_4.$$

Подставляя последние выражения в равенство (19.105), получаем:

$$T_i = \frac{m_i v_{i\varphi_1}^2 + J_i i_{i1}^2}{2} \omega_1^2 + (m_i v_{i\varphi_1} v_{i\varphi_4} \cos \gamma_{14} + J_i i_{i1} i_{i4}) \omega_1 \omega_4 + \frac{m_i v_{i\varphi_4}^2 + J_i i_{i4}^2}{2} \omega_4^2, \quad (19.106)$$

где γ_{14} — угол между аналогами $v_{i\varphi_1}$ и $v_{i\varphi_4}$.

Выражения, стоящие перед членами ω_1^2 , $\omega_1 \omega_4$ и ω_4^2 , зависят только от обобщенных координат, и потому их можно рассматривать как приведенные моменты инерции J_{i1} , $J_{i(14)}$ и J_{i4} , равные

$$J_{i1} = m_i v_{i\varphi_1}^2 + J_i i_{i1}^2, \quad J_{i(14)} = m_i v_{i\varphi_1} v_{i\varphi_4} \cos \gamma_{14} + J_i i_{i1} i_{i4}, \\ J_{i4} = m_i v_{i\varphi_4}^2 + J_i i_{i4}^2.$$

Воспользовавшись этими обозначениями, представим равенство (19.106) в более простом виде

$$T_i = \frac{J_{i1}\omega_1^2}{2} + J_{i(14)}\omega_1\omega_4 + \frac{J_{i4}\omega_4^2}{2}. \quad (19.107)$$

Приведенный момент инерции J_{i1} определяется при условной остановке звена 4 как момент инерции звена i , приведенный к звену 1. Приведенный момент инерции J_{i4} определяется при условной остановке звена 1 как момент инерции звена i , приведенный к звену 4. Приведенный момент инерции $J_{i(14)}$ есть функция обеих обобщенных координат φ_1 и φ_4 .

Кинетическая энергия T всего механизма равняется сумме кинетической энергии всех его звеньев. Для механизма, изображенного на рис. 548, а, имеем:

$$T = \frac{J_{11}\omega_1^2}{2} + J_{14}\omega_1\omega_4 + \frac{J_{44}\omega_4^2}{2}, \quad (19.108)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= \sum_{i=1}^{i=6} (m_i v_{i\varphi_1}^2 + J_i l_{i1}^2), \\ J_{14} &= \sum_{i=1}^{i=6} (m_i v_{i\varphi_1} v_{i\varphi_4} \cos \gamma_{14} + J_i l_{i1} l_{i4}), \\ J_{44} &= \sum_{i=1}^{i=6} (m_i v_{i\varphi_4}^2 + J_i l_{i4}^2). \end{aligned} \right\} \quad (19.109)$$

10°. Для упрощения вычислений приведенных моментов инерции J_{11} , J_{14} и J_{44} можно воспользоваться приближенным способом статического размещения масс, изложенным в § 69, 3°. Массы m_2 , m_3 и m_5 звеньев 2, 3, 5 разносим каждую на две соответствующие точки. Массу m_2 разносим на точки B и C . Массу m_3 — на точки C и D и, наконец, массу m_5 — на точки C и F . В таком случае получаем схему размещения масс, изображенную на рис. 548, б. В точке B сосредоточена масса m_{B3} , в точке D — масса m_{D3} , в точке F — масса m_{F3} и, наконец, в точке C сосредоточена масса m_C , равная

$$m_C = m_{C2} + m_{C3} + m_{C5}.$$

После этого можно определить постоянные приведенные моменты инерции $J_{п1}$, $J_{п4}$ и $J_{п6}$ звеньев 1, 4 и 6:

$$J_{п1} = J_1 + m_{B2} l_{AB}^2, \quad J_{п4} = J_4 + m_{D3} l_{ED}^2, \quad J_{п6} = J_6 + m_{F3} l_{GF}^2,$$

где J_1 , J_4 и J_6 — заданные моменты инерции звеньев 1, 4 и 6 относительно осей, проходящих через точки A , E и G , а l_{AB} , l_{ED} и l_{GF} — длины звеньев 1, 4 и 6.

Согласно формулам (19.109) имеем:

$$\begin{aligned} J_{11} &= J_{п1} + m_C v_{C\varphi_1}^2 + J_{п6} l_{61}^2, \\ J_{14} &= m_C v_{C\varphi_1} v_{C\varphi_4} \cos \gamma_{14} + J_{п6} l_{61} l_{64}, \\ J_{44} &= J_{п4} + m v_{C\varphi_4}^2 + J_{п6} l_{64}^2. \end{aligned}$$

11°. Переходим к определению производных, входящих в правые части уравнений (19.102). Производя дифференцирование равенства (19.106),

получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} \omega_1 \omega_4 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1} \omega_4^2, \quad (19.110)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_1} = J_{11} \omega_1 + J_{14} \omega_4,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) = J_{11} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{dJ_{11}}{dt} \omega_1 + J_{14} \frac{d\omega_4}{dt} + \frac{dJ_{14}}{dt} \omega_4. \quad (19.111)$$

Так как моменты инерции J_{11} и J_{14} являются функциями двух обобщенных координат, то производные dJ_{11}/dt и dJ_{14}/dt могут быть представлены так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ_{11}}{dt} &= \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_4} \frac{d\varphi_4}{dt} = \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \omega_1 + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_4} \omega_4, \\ \frac{dJ_{14}}{dt} &= \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_4} \frac{d\varphi_4}{dt} = \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} \omega_1 + \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_4} \omega_4. \end{aligned} \right\} \quad (19.112)$$

Подставляя выражения (19.112) в равенство (19.111), получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) = J_{11} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_4} \omega_1 \omega_4 + J_{14} \frac{d\omega_4}{dt} + \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_4} \omega_1 \omega_4. \quad (19.113)$$

Аналогично для второго уравнения (19.102) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} &= \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_4} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_4} \omega_1 \omega_4 + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_4} \omega_4^2, \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_4} &= J_{44} \omega_4 + J_{14} \omega_1, \end{aligned} \right\} \quad (19.114)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_4} \right) = J_{44} \frac{d\omega_4}{dt} + \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_4} \omega_4^2 + \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1} \omega_1 \omega_4 + J_{14} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_4} \omega_1 \omega_4. \quad (19.115)$$

Подставляя в уравнение (19.102) соответствующие значения для производных, имеем:

$$M_{\text{п1}} = J_{11} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_4} \omega_1 \omega_4 + \left(\frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_4} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1} \right) \omega_4^2 + J_{14} \frac{d\omega_4}{dt}, \quad (19.116)$$

$$M_{\text{п4}} = J_{44} \frac{d\omega_4}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial J_{44}}{\partial \omega_4} \omega_1^2 + \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1} \omega_1 \omega_4 + \left(\frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_4} \right) \omega_1^2 + J_{14} \frac{d\omega_1}{dt} \quad (19.117)$$

Решая уравнения (19.116) и (19.117) относительно $d\omega_1/dt$ и $d\omega_4/dt$, получаем:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = A_0 + A_{11} \omega_1^2 + A_{14} \omega_1 \omega_4 + A_{44} \omega_4^2, \quad (19.118)$$

$$\frac{d\omega_4}{dt} = B_0 + B_{11} \omega_1^2 + B_{14} \omega_1 \omega_4 + B_{44} \omega_4^2, \quad (19.119)^{**}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{M_{\pi 1} J_{44} - M_{\pi 4} J_{14}}{J_{11} J_{44} - J_{14}^2}, \quad A_{11} = \frac{J_{14} \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} J_{14} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} J_{44} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1}}{J_{11} J_{44} - J_{14}^2}, \\
 A_{14} &= \frac{J_{14} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} J_{44} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1}}{J_{11} J_{44} - J_{14}^2}, \quad A_{44} = \frac{\frac{1}{2} J_{14} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1} - J_{44} \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} + \frac{1}{2} J_{44} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1}}{J_{11} J_{44} - J_{14}^2}, \\
 B_0 &= \frac{M_{\pi 4} J_{11} - M_{\pi 1} J_{14}}{J_{11} J_{44} - J_{14}^2}, \quad B_{11} = \frac{\frac{1}{2} J_{14} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} - J_{11} \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} + \frac{1}{2} J_{11} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1}}{J_{11} J_{44} - J_{14}^2}, \\
 B_{14} &= \frac{J_{14} \frac{\partial J_{11}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} J_{11} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1}}{J_{11} J_{44} - J_{14}^2}, \quad B_{44} = \frac{J_{14} \frac{\partial J_{14}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} J_{14} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{2} J_{11} \frac{\partial J_{44}}{\partial \varphi_1}}{J_{11} J_{44} - J_{14}^2}.
 \end{aligned}$$

Если моменты $M_{\pi 1}$ и $M_{\pi 4}$ зависят только от углов поворота φ_1 и φ_4 , то коэффициенты $A_0, B_0, A_{11}, B_{11}, A_{14}, B_{14}$ и A_{44}, B_{44} суть функции только обобщенных координат φ_1 и φ_4 и не зависят от времени, т. е. определяются только положениями механизма (рис. 548, а). Уравнения (19.118) и (19.119) представляют собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно φ_1 и φ_4 . Коэффициенты этих уравнений могут быть вычислены, если известны значения для $M_{\pi 1}, M_{\pi 4}, J_{11}, J_{14}$ и J_{44} . Из совместного решения этих уравнений определяются и законы движения звеньев 1 и 4, и следовательно, задача о движении механизма (рис. 548, а) разрешается.

Решение уравнений (19.118) и (19.119) можно вести одним из приемов численного интегрирования. Наиболее целесообразным является программирование этих уравнений и введение разработанной программы в электронную счетно-решающую машину.

ГЛАВА XX

НЕРАВНОМЕРНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ

§ 92. Общая постановка задачи

1°. Переходим к следующей важной задаче динамики механизмов — задаче об определении наивыгоднейших соотношений между силами, массами и скоростями звеньев механизма, обеспечивающих заданный режим движения механизма.

Как было показано в предыдущей главе, в общем случае скорости ведущего звена механизма, при установившемся движении механизма, являются величинами переменными. Колебания скоростей ведущего звена вызывают в кинематических парах дополнительные динамические давления, понижающие общий коэффициент полезного действия машины и надежность ее работы. Кроме того, эти колебания скоростей в некоторых случаях могут вызвать значительные упругие колебания в звеньях механизма, что является нежелательным как с точки зрения прочности этих звеньев, так и с точки зрения потери мощности, затрачиваемой на эти упругие колебания. Наконец,

колебания скоростей могут ухудшить тот рабочий технологический процесс, который выполняется механизмом.

Рассматривая колебания скорости ведущего звена за время установившегося движения механизма, можно обнаружить, что эти колебания бывают двух различных типов.

В самом деле, как было установлено выше, у большей части механизмов только за полный цикл установившегося движения работа всех движущих сил равна работе сил сопротивления. Внутри же этого цикла мы не наблюдаем равенства этих работ, и следовательно, ведущее звено механизма движется внутри этого цикла неравномерно. Так как через каждый полный цикл установившегося движения кинетическая энергия механизма принимает начальное значение, то скорости ведущего звена механизма тоже периодически повторяются с тем же самым циклом. Такие колебания скоростей назовем *периодическими*.

Таким образом, *периодическими колебаниями скоростей механизма называются колебания, при которых скорости всех звеньев механизма имеют вполне определенные циклы, по истечении которых эти скорости принимают каждый раз свои первоначальные значения.*

Кроме периодических колебаний скоростей в механизме могут иметь место и непериодические колебания скоростей, вызываемые различными причинами: внезапным изменением полезных или вредных сопротивлений, включением в механизм дополнительных масс и т. д. Такое внезапное изменение нагрузки на механизм вызывает внезапное увеличение или уменьшение скорости его звена приведения, и так как эти колебания скорости в некоторых случаях не имеют определенного цикла, то такие колебания скорости звена приведения назовем *непериодическими*. Во многих механизмах мы наблюдаем оба вида колебаний скоростей.

2°. Колебания скоростей во время установившегося движения могут достигнуть такой величины, которая не будет допустимой с точки зрения обеспечения всех надлежащих условий работы механизма. Тогда может возникнуть вопрос о регулировании в заранее заданных пределах величин этих колебаний. Задача о регулировании колебаний скоростей во время установившегося движения механизма имеет большое значение в технике, потому что в большинстве механизмов это время является рабочим временем его движения — промежутком времени, в течение которого механизм выполняет свои производственные функции.

Регулирование периодических колебаний скоростей при установившемся движении механизма обычно выполняется соответствующим подбором масс его звеньев. Массы звеньев должны быть подобраны так, чтобы они могли аккумулировать все приращения кинетической энергии механизма, имеющие место при превышении работы движущих сил над силами сопротивления. Эта аккумулированная масса

звеньев кинетическая энергия должна быть отдана механизму обратно, когда работа сил сопротивления будет превышать работу движущих сил.

Подбором масс звеньев механизма можно решить задачу о регулировании периодических колебаний при его установившемся движении. В случае же непериодических колебаний скоростей при установившемся движении подбором масс его звеньев можно решить задачу о регулировании колебаний скоростей только в тех случаях, когда эти колебания незначительны. При значительных непериодических колебаниях скоростей задача о регулировании решается установкой специальных механизмов, регулирующих законы изменения или движущих сил, или сил сопротивления. Такие регулирующие механизмы получили название *регуляторов* (см. гл. XXI).

Рассмотрение вопроса о регулировании движения механизма начнем с рассмотрения задачи о регулировании периодических колебаний скоростей во время его установившегося движения.

§ 93. Средняя скорость механизма и его коэффициент неравномерности движения

1°. Для изучения периодических колебаний скоростей во время установившегося движения введем понятие *средней скорости звена приведения* и дальнейшее рассмотрение задачи будем вести для этого времени движения.

Обозначим путь, проходимый выбранной на звене приведения точкой B , за один цикл ее движения от положения i до положения k , через s . Будем называть *действительной средней скоростью* $(v_{cp})_д$ скорость такого равномерного движения, при котором точка прошла бы путь s в тот же промежуток времени t , который требуется и при неравномерном движении.

Так как $dt = ds/v$, то

$$t = t_k - t_i = \int_{s_i}^{s_k} \frac{ds}{v},$$

откуда

$$(v_{cp})_д = \frac{s}{\int_{s_i}^{s_k} \frac{ds}{v}}. \quad (20.1)$$

Действительную среднюю скорость часто заменяют средней арифметической скоростью v_{cp} и полагают:

$$v_{cp} \approx \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2}, \quad (20.2)$$

где $v_{\max}$ и $v_{\min}$ суть максимальное и минимальное значения скорости точки B (рис. 549). Для механизмов с большой равномерностью движения разница между этими значениями пренебрежимо мала, вследствие чего обычно в качестве средней скорости пользуются тем из них, которое удобнее для решения поставленной задачи.

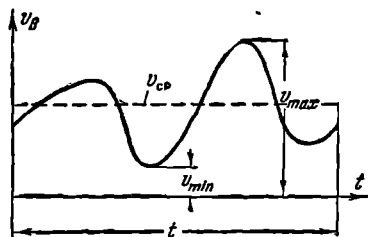


Рис. 549. График скорости точки в функции времени.

На паспорте двигателя, рабочей машины или механизма такая условная средняя скорость бывает обычно указана, причем в этом случае ее обыкновенно называют номинальной скоростью (от латинского слова «попеп», означающего имя, наименование).

Для механизмов с малой равномерностью движения предпочтительнее пользоваться действительной средней скоростью.

Если разность максимального и минимального значений скорости v_B точки B (рис. 549) разделить на среднюю скорость, то получим так называемый *коэффициент неравномерности движения механизма*, обозначаемый через δ и равный

$$\delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_{\text{ср}}} \quad (20.3)$$

Чем меньше разность между $v_{\max}$ и $v_{\min}$, тем равномернее вращается ведущее звено. Задача регулирования движения механизма в период его установившегося движения сводится к подбору такого соотношения между массами механизма и действующими на него силами, при котором коэффициент неравномерности δ не превышал бы какого-либо заранее заданного значения. В практике величина δ колеблется в весьма значительных пределах.

Ниже приводится таблица допустимых коэффициентов неравномерности хода для некоторых типов машин.

Типы машин	Коэффициент неравномерности движения
Насосы	1/5—1/30
Сельскохозяйственные машины	1/5—1/50
Металлообрабатывающие станки	1/20—1/50
Ткацкие, полиграфические, мукомольные машины	1/10—1/50
Бумагопрядильные машины	1/60—1/100
Судовые двигатели	1/20—1/150
Двигатели внутреннего сгорания	1/80—1/150
Компрессоры	1/50—1/100
Электрические генераторы постоянного тока	1/100—1/200
Электрические генераторы переменного тока	1/200—1/300
Авиационные двигатели	1/200 и меньше
Турбогенераторы	1/200 и меньше

Удобно среднюю скорость механизма и коэффициент неравномерности хода выражать через углы поворота и угловые скорости звена привода. Тогда по аналогии с равенствами (20.1) — (20.3) будем иметь для действительной средней угловой скорости $(\omega_{cp})_д$ выражение

$$(\omega_{cp})_д = \frac{\varphi}{\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} \frac{d\varphi}{\omega}}; \quad (20.4)$$

для средней арифметической угловой скорости ω_{cp} :

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \quad (20.5)$$

и для коэффициента неравномерности движения

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}. \quad (20.6)$$

Коэффициент неравномерности движения характеризует только перепад угловой скорости звена привода в пределах от ω_{min} до ω_{max} , но не характеризует динамики движения звена привода внутри одного полного цикла периода установившегося движения. Так, на

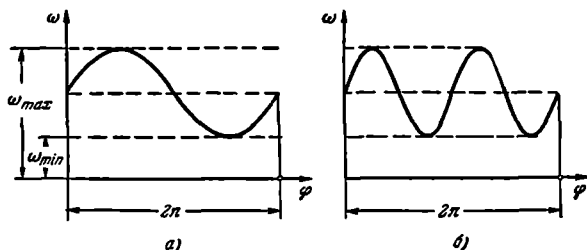


Рис. 550. Графики зависимостей угловой скорости от угла поворота: а) с плавным и б) менее плавным изменением угловой скорости.

рис. 550, а и б показаны два графика зависимости $\omega = \omega(\varphi)$, у которых ω_{max} и ω_{min} равны, но угловые ускорения ϵ для рис. 550, б значительно больше, чем для рис. 550, а. Динамические характеристики механизмов с этими знаками изменения угловых скоростей различны.

Сравнительная оценка динамических свойств механизма в период установившегося движения может быть охарактеризована *коэффициентом динамичности* χ , в качестве которого берут отношения экстремального (наибольшего) значения углового ускорения ϵ_{ext} к квадрату средней угловой скорости ω_{cp}^2 :

$$\chi = \frac{\epsilon_{ext}}{\omega_{cp}^2}. \quad (20.7)$$

Помножим числитель и знаменатель выражения (20.7) на среднее значение приведенного момента инерции $J_{п.ср}$. Тогда получим:

$$\kappa = \frac{J_{п.ср} \epsilon_{ext}}{J_{п.ср} \omega_{ср}^2} = \frac{M_{ext}}{2T_{ср}}, \quad (20.8)$$

и, таким образом, коэффициент динамичности κ механизма равен отношению экстремального момента M_{ext} , приложенного к звену приведения, к удвоенной величине средней кинетической энергии $T_{ср}$ механизма.

Коэффициент динамичности κ режима движения механизма, показанного на рис. 550, б, больше, чем для механизма, режим движения которого показан на рис. 550, а, при одной и той же величине приведенного момента инерции $J_{п.ср}$.

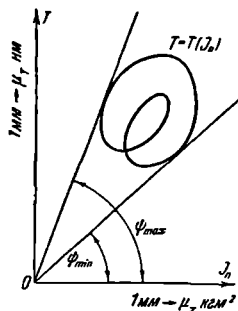


Рис. 551. Диаграмма кинетической энергии в функции приведенного момента инерции для установившегося движения механизма.

2°. Если для всего времени движения механизма построена диаграмма $T = T(J_{п})$ (см. § 90), то определение величины δ во время установившегося движения не представляет трудностей. Для этого рассмотрим участок диаграммы $T = T(J_{п})$, соответствующий установившемуся движению (рис. 551). Это замкнутый участок диаграммы $T = T(J_{п})$. Из формулы (19.51) следует, что максимальная угловая скорость ω_{max} за время установившегося движения соответствует максимальному значению тангенса угла ψ_{max} , определяемого по формуле (19.51), а минимальная угловая скорость ω_{min} соответствует минимальному значению тангенса угла ψ_{min} . Для определения максимального ψ_{max} и минимального ψ_{min} значений угла ψ проводим из точки O к замкнутой части кривой $T = T(J_{п})$ две касательные. Одна касательная образует с осью абсцисс максимальный угол ψ_{max} , другая образует с осью абсцисс минимальный угол ψ_{min} . Согласно равенству (19.50) можем написать:

$$\omega_{max}^2 = 2 \frac{\mu T}{\mu J_{п}} \operatorname{tg} \psi_{max}, \quad \omega_{min}^2 = 2 \frac{\mu T}{\mu J_{п}} \operatorname{tg} \psi_{min}, \quad (20.9)$$

где ω_{max} и ω_{min} суть максимальная и минимальная угловые скорости звена приведения. Коэффициент неравномерности движения δ равен [см. формулу (20.6)]

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{ср}}. \quad (20.10)$$

Умножая числитель и знаменатель правой части формулы (20.10) на $(\omega_{max} + \omega_{min})$, имеем:

$$\delta = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})(\omega_{max} + \omega_{min})}{\omega_{ср}(\omega_{max} + \omega_{min})} = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_{ср}^2}, \quad (20.11)$$

так как $\omega_{\max} + \omega_{\min} = 2\omega_{\text{ср}}$ [см. формулу (20.5)]. Подставляя в формулу (20.11) выражения для $\omega_{\max}^2$ и $\omega_{\min}^2$ из формулы (20.9), получаем:

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_{J_n}} \frac{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}}{\omega_{\text{ср}}^2}. \quad (20.12)$$

Углы $\psi_{\max}$ и $\psi_{\min}$ можно найти непосредственно по чертежу, а величина $\omega_{\text{ср}}$ определяется по формуле (20.4).

Если принять $\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$, то, решая совместно уравнения (20.5) и (20.6), получаем, что коэффициент неравномерности хода δ механизма равен

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} = 2 \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\max} + \omega_{\min}} = 2 \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \psi_{\max}} - \sqrt{\operatorname{tg} \psi_{\min}}}{\sqrt{\operatorname{tg} \psi_{\max}} + \sqrt{\operatorname{tg} \psi_{\min}}}. \quad (20.13)$$

Определение коэффициента неравномерности движения δ механизма может быть сделано также непосредственно, если построена диаграмма скоростей (например, по диаграмме скоростей, построенной на рис. 549). Для этого определяем $v_{\max}$ и $v_{\min}$ по диаграмме и подставляем их значения в формулы (20.2) и (20.3).

§ 94. Связь между приведенным моментом инерции, приведенными силами и коэффициентом неравномерности движения механизма

1°. Рассмотрим вопрос о связи между приведенным моментом инерции, приведенными силами и коэффициентом неравномерности движения механизма. Разрешая уравнения (20.5) и (20.6) относительно $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$, находим:

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{ср}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \quad \text{и} \quad \omega_{\min} = \omega_{\text{ср}} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right). \quad (20.14)$$

Возводя правые и левые части обоих этих уравнений в квадрат, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\max}^2 &= \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 + \delta), \\ \omega_{\min}^2 &= \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 - \delta). \end{aligned} \right\} \quad (20.15)$$

При малых значениях коэффициента δ членом $\delta^2/4$ можно пренебречь. Для механизмов с большой неравномерностью движения этот член должен учитываться. Подставляя в уравнение (20.15) выражение для $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$ из формул (20.9), получаем:

$$2 \frac{\mu_T}{\mu_{J_n}} \operatorname{tg} \psi_{\max} = \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 + \delta)$$

и

$$2 \frac{\mu_T}{\mu_{J_n}} \operatorname{tg} \psi_{\min} = \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 - \delta),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_{\max} &= \frac{\mu_{J_{\Pi}}}{2\mu_T} \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{J_{\Pi}}}{2\mu_T} \omega_{\text{ср}}^2 (1 + \delta), \\ \operatorname{tg} \psi_{\min} &= \frac{\mu_{J_{\Pi}}}{2\mu_T} \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{J_{\Pi}}}{2\mu_T} \omega_{\text{ср}}^2 (1 - \delta). \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

С помощью формул (20.16) можно для заданной угловой скорости $\omega_{\text{ср}}$ и для любого заданного значения коэффициента неравномерности движения δ определить соответствующие углы $\psi_{\max}$ и $\psi_{\min}$. Тогда, если при заданных приведенном моменте инерции и кинетической энергии известна зависимость между ними и построена диаграмма $T = T(J_{\Pi})$, всегда может быть выяснен вопрос о том, как должны

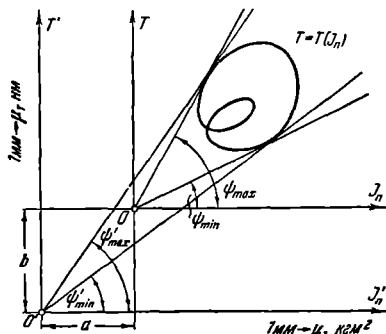


Рис. 552. К исследованию зависимости коэффициента неравномерности движения от величины приведенного момента инерции.

быть изменены эти величины при изменении δ . Пусть задана диаграмма $T = T(J_{\Pi})$ для времени установившегося движения (рис. 551), и пусть коэффициент неравномерности движения равен δ для заданных значений кинетической энергии и приведенного момента инерции. Соответствующие касательные под углами $\psi_{\max}$ и $\psi_{\min}$ пересекаются в начале координат O .

Задаемся каким-либо новым коэффициентом δ' и подсчитываем по формуле (20.16) соответствующие ему значения углов $\psi'_{\max}$ и $\psi'_{\min}$. Касательные к кривой $T = T(J_{\Pi})$ при коэффициенте неравномерности

хода, равном δ' , должны иметь углы наклона к оси абсцисс, соответственно равные углам $\psi'_{\max}$ и $\psi'_{\min}$. Проводим эти касательные к кривой $T = T(J_{\Pi})$ (рис. 552) и находим их точку пересечения O' . Точка O' является новым началом координат диаграммы $T = T(J_{\Pi})$, т. е. изменение коэффициента δ на δ' влечет за собой переход от осей координат TOJ_{Π} к параллельным им осям координат $T'O'J'_{\Pi}$. При этом переходе кинетическая энергия увеличивается на величину T_0 , а приведенный момент инерции — на величину J_0 . Отрезки a и b , измеренные в миллиметрах, изображают в выбранных масштабах $\mu_{J_{\Pi}}$ и μ_T величины добавочного приведенного момента инерции J_0 и добавочной кинетической энергии T_0 , которые необходимы для того, чтобы механизм двигался с выбранным коэффициентом неравномерности δ' . Таким образом,

$$J_0 = \mu_{J_{\Pi}} a \quad \text{и} \quad T_0 = \mu_T b.$$

Из построения непосредственно следует, что чем меньше коэффициент неравномерности δ , тем меньше разница между углами $\psi_{\max}$

и $\psi_{\min}$ и тем дальше, очевидно, от участка кривой $T = T(J_p)$ соответствующего времени установившегося движения будет находиться начало координат. Таким образом, при уменьшении величины δ возрастает приведенная масса механизма и его кинетическая энергия, потребная для приведения в движение механизма с заданной средней угловой скоростью $\omega_{\text{ср}}$. Итак, увеличение равномерности движения звена приведения механизма может быть достигнуто *увеличением приведенного момента инерции механизма*.

2°. Как было показано выше, во время установившегося движения в общем случае движение звена приведения механизма происходит с *переменной* скоростью. Эти колебания скорости звена приведения вызывают колебания скоростей всех остальных звеньев механизма, что ведет к повышению динамических нагрузок на его звенья и кинематические пары. Кроме того, большинство процессов, для выполнения которых применяется механизм, требует определенных скоростей рабочих органов, что достигается только в том случае, если ведущее звено приведения механизма не будет иметь сколько-нибудь большого отклонения величины своей скорости от заданной.

Выше было показано, что движение звена приведения тем ближе к равномерному, чем больше приведенный момент инерции или приведенная масса механизма. Увеличение приведенных масс или приведенных моментов инерции может быть сделано за счет увеличения масс отдельных звеньев механизмов. Практически это увеличение масс производится посадкой на один из валов механизма добавочной детали, имеющей заданный момент инерции. Эта деталь носит название *махового колеса*, или *маховика*. Задачей маховика является уменьшение амплитуды периодических колебаний скорости звена приведения, обусловленных свойствами самих механизмов или периодическим изменением соотношений между величинами движущих сил и сил сопротивления.

Подбором массы и момента инерции маховика можно заставить звено приведения механизма двигаться с заранее заданным отклонением от некоторой его средней скорости.

Маховик является как бы аккумулятором кинетической энергии механизма, накапливая его во время ускоренного движения механизма и отдавая обратно при замедлении его движения. В некоторых машинах, в которых полезная нагрузка периодически меняется в значительных пределах (дробилки, прокатные станы и т. п.), маховик аккумулирует весьма значительные запасы кинетической энергии во время ускоренного движения (при уменьшении величин полезных нагрузок). Такая аккумулирующая роль маховика позволяет использовать накопленную им энергию для преодоления повышенных полезных нагрузок без увеличения мощности двигателя.

Форма маховика, вообще говоря, может быть выбрана любой, но по конструктивным соображениям наиболее удобной является форма в виде диска с тяжелым ободом, колеса со спицами или вообще форма, симметричная относительно главных осей инерции. При такой

форме легче всего достигается совпадение оси вращения с одной из главных центральных осей инерции, что позволяет избежать дополнительных давлений на подшипники того вала, на который насажено маховое колесо.

§ 95. Основные данные, необходимые для определения момента инерции маховика

1°. Для определения момента инерции махового колеса необходимо иметь заданными приведенные силы или приведенные моменты сил движущих и сил сопротивления за один полный цикл времени установившегося движения. Рассмотрим вначале тот случай, когда приведенные моменты сил движущих и сил сопротивления зависят от угла φ поворота звена приведения. На рис. 553, а даны графики $M_d = M_d(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$ изменения приведенных моментов M_d движущих сил и

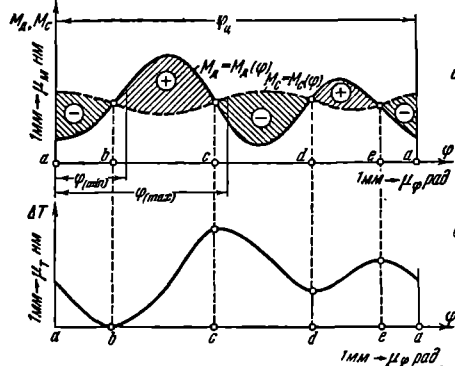


Рис. 553. К расчету маховика: а) диаграммы движущих сил и сил сопротивления; б) диаграмма приращения кинетической энергии.

момента M_c сил сопротивления в функции угла поворота φ звена приведения на участке φ_n , соответствующем одному полному циклу. Так как момент инерции махового колеса неизвестен и подлежит определению, то диаграмма кинетической энергии $T = T(J_n)$ не может быть построена. В самом деле, не имея данных об изменении моментов M_d и M_c во время разгона механизма и не зная полной величины приведенного момента инерции J_n механизма, мы не можем определить ту кинетическую энергию разгона

на T_p (рис. 554), которой механизм обладает к моменту начала установившегося движения. Но изменение кинетической энергии ΔT внутри одного полного цикла во время установившегося движения может быть всегда определено по заданным диаграммам $M_d = M_d(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$ (рис. 553, а).

Построение диаграммы $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ (рис. 553, б) ведем путем подсчета площадей, заключенных между кривыми $M_d = M_d(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$, как это было указано в § 90 (на рис. 553, а эти площадки заштрихованы). Построение диаграммы $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ удобно начать с положения б.

На участке bc кинетическая энергия возрастает, на участке cd кинетическая энергия убывает и т. д. Сумма всех площадок со знаком плюс должна равняться сумме всех площадок со знаком минус, ибо за один полный цикл установившегося движения приращение ки-

нетической энергии равно нулю. Таким образом, полная кинетическая энергия T_i в каком-либо положении i звена приведения (рис. 554) равна

$$T_i = T_p + \Delta T_i. \quad (20.17)$$

При этом первое слагаемое выражения (20.17) нам неизвестно, а второе может быть определено по заданным диаграммам $M_d = M_d(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$.

2°. Величина приведенного момента инерции J_n механизма состоит из трех слагаемых: момента инерции J_m маховика, момента инерции J_0 звена приведения и тех вращающихся звеньев механизма, которые связаны со звеном

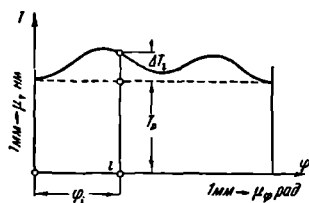


Рис. 554. Диаграмма полной кинетической энергии, которой обладает механизм во время установившегося движения.

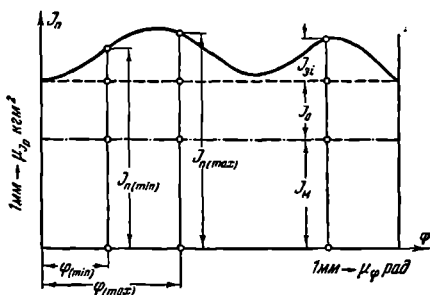


Рис. 555. Диаграмма полного приведенного момента инерции механизма, состоящего из момента инерции маховика, постоянного приведенного момента инерции звеньев и переменного приведенного момента инерции звеньев.

приведения постоянным передаточным отношением, и, наконец, приведенного момента инерции J_3 всех остальных звеньев механизма. Таким образом, полный приведенный момент инерции J_{ni} в каком-либо положении i (рис. 555) равен

$$J_{ni} = J_m + J_0 + J_{3i} = J_m + \Delta J_{ni}, \quad (20.18)$$

где $\Delta J_{ni} = J_0 + J_{3i}$.

Первые два слагаемые всегда постоянны, а последнее слагаемое в общем случае зависит от угла поворота φ , т. е. $J_3 = J_3(\varphi)$. Момент инерции J_m маховика является неизвестным и подлежит определению.

Величина $\Delta J_n = J_0 + J_3$ методом, указанным в § 87, может быть определена для одного полного цикла установившегося движения механизма. Диаграмма $\Delta J_n = \Delta J_n(\varphi)$ показана на рис. 556. Из этой диаграммы видно, что ΔJ_n состоит из постоянного момента инерции J_0 и переменного J_3 . Диаграмма $J_n = J_n(\varphi)$ зависимости полного момента инерции J_n от угла поворота φ согласно равенству (20.18) показана на рис. 555.

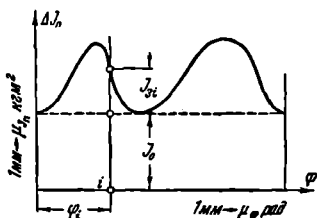


Рис. 556. Диаграмма приведенного момента инерции звеньев.

3°. Для определения необходимого момента инерции $J_{\text{м}}$ маховика надо иметь заданной среднюю угловую скорость $\omega_{\text{ср}}$ звена приведения. Она принимается равной номинальной угловой скорости, которая про- ставляется на паспорте двигателя, рабочей машины или механизма (см. § 94, 1°).

Величина $\omega_{\text{ср}}$ равна

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\pi n}{30},$$

где n — число оборотов в минуту звена приведения.

Далее, при решении задачи о маховике, как было показано в § 93, задаются желательным для машины коэффициентом неравномерности движения δ . Имея заданными $\omega_{\text{ср}}$ и δ , можно определить по формулам (20.14) угловые скорости: максимальную ω_{max} и минимальную ω_{min} . Имеем:

$$\omega_{\text{max}} = \omega_{\text{ср}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right), \quad \omega_{\text{min}} = \omega_{\text{ср}} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right) \quad (20.19)$$

и, далее,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\text{max}}^2 &= \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 + \delta), \\ \omega_{\text{min}}^2 &= \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 - \delta). \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

4°. Связь между кинетической энергией T , приведенным моментом инерции $J_{\text{п}}$ и угловыми скоростями ω_{max} и ω_{min} может быть получена с помощью уравнения движения механизма, написанного в форме уравнения кинетической энергии [см. уравнение (19.3)]. Имеем:

$$A_{\text{д}} - A_{\text{с}} = \frac{J_{\text{п max}} \omega_{\text{max}}^2}{2} - \frac{J_{\text{п min}} \omega_{\text{min}}^2}{2}. \quad (20.21)$$

В уравнении (20.21) работа $A_{\text{д}}$ равна

$$A_{\text{д}} = \int_{\varphi_{\text{min}}}^{\varphi_{\text{max}}} M_{\text{д}} d\varphi,$$

работа $A_{\text{с}}$ равна

$$A_{\text{с}} = \int_{\varphi_{\text{min}}}^{\varphi_{\text{max}}} M_{\text{с}} d\varphi,$$

где φ_{max} и φ_{min} — углы, соответствующие максимальному ω_{max} и минимальному ω_{min} значениям угловой скорости звена приведения. Если эти углы известны, то определение разности работ $A = A_{\text{д}} - A_{\text{с}}$ сводится к определению соответствующей площади F мм², заключенной между кривыми $M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\varphi)$ и $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\varphi)$ (рис. 553, а) и ограни-

ченной ординатами, соответствующими углами $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$. Тогда разность работы A выразится так:

$$A = \mu_M \mu_\varphi F.$$

В уравнении (20.21) $J_{п \max}$ и $J_{п \min}$ — приведенные моменты инерции, соответствующие углам $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$ (рис. 555).

Необходимо заметить, что в общем случае значения приведенных моментов инерции $J_{п \max}$ и $J_{п \min}$ не совпадают с абсолютными величинами максимального и минимального значений $J_{п}$.

Уравнение (20.21) перепишем в следующем виде, учитывая формулы (20.18) и (20.20). Имеем:

$$A = \frac{[J_m + J_0 + J_{з \max}] \omega_{ср}^2 (1 + \delta)}{2} - \frac{[J_m + J_0 + J_{з \min}] \omega_{ср}^2 (1 - \delta)}{2}. \quad (20.22)$$

Решаем уравнение (20.22) относительно J_m :

$$J_m = \frac{A}{\omega_{ср}^2 \delta} - J_0 - \frac{J_{з \max} (1 + \delta) - J_{з \min} (1 - \delta)}{2\delta}. \quad (20.23)$$

Из формулы (20.23) следует: если известны углы $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$, при которых угловая скорость звена приведения достигает значений $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$, то определение момента инерции J_m не представляет затруднений, потому что величины A , J_0 , $J_{з \max}$ и $J_{з \min}$ могут быть всегда определены, а величины $\omega_{ср}$ и δ являются заданными. Ниже будет показано, как может быть решена задача об определении углов $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$.

Из рассмотрения формулы (20.23) следует: если приведенный момент инерции звеньев $J_з$ является постоянным ($J_з = \text{const}$), то уравнение (20.23) принимает вид

$$J_m = \frac{A}{\omega_{ср}^2 \delta} - (J_0 + J_з). \quad (20.24)$$

При некоторых практических расчетах, когда величина $(J_0 + J_з)$ мала по сравнению с первым членом равенства (20.24), для определения момента инерции маховика пользуются приближенной формулой

$$J_m \approx \frac{A}{\omega_{ср}^2 \delta}. \quad (20.25)$$

5°. Если пользоваться формулами (20.24) и (20.25), то определение углов $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$ не представляет трудностей. В самом деле, угловой скорости $\omega_{\max}$ при постоянном моменте инерции $J_з$ соответствует максимальное значение $T_{\max}$ кинетической энергии, а угловой скорости $\omega_{\min}$ соответствует минимальное значение $T_{\min}$ кинетической энергии. Например (рис. 553), минимальным угловым скоростям соответствуют положения b и d , а максимальным угловым скоростям — положения c и e . Наименьшее значение угловой скорости соответствует положению b , а наибольшее — положению c , так как в этих

положениях кинетическая энергия достигает наименьшего и наибольшего значений. Поэтому в формуле (20.25) величину A следует положить равной

$$A = \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} M_d d\varphi - \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} M_c d\varphi = \mu_{M^u \varphi} F_{bc},$$

где F_{bc} — площадь в мм^2 , заключенная между кривыми $M_d = M_x(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$ (рис. 553, а), на интервале bc .

Если диаграмма кинетической энергии не построена, то определение наименьшего из минимальных и наибольшего из максимальных значений угловой скорости может быть сделано сравнением избыточных площадок, заключенных между кривыми $M_d = M_x(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$. Например, для диаграмм, показанных на рис. 553, а, наибольшая максимальная угловая скорость соответствует положению c , если площадь F_{cd} больше площади F_{de} , и наоборот, если $F_{cd} < F_{de}$, то наибольшая максимальная угловая скорость соответствует положению e . Если $F_{bc} > F_{cd}$, то наименьшая минимальная угловая скорость соответствует положению b , и наоборот, если $F_{bc} < F_{cd}$, то наименьшая угловая скорость соответствует положению d .

Максимальные и минимальные значения угловых скоростей соответствуют максимальным и минимальным значениям кинетической энергии только в тех случаях, когда приведенный момент инерции $J_3 = \text{const}$. Если же приведенный момент $J_3 = J_3(\varphi)$ переменный, то для определения момента инерции J_n маховика надо пользоваться формулой (20.23). При этом максимальные и минимальные значения угловой скорости не совпадают с максимальными и минимальными значениями кинетической энергии, а сдвинуты относительно этих положений, как это схематично показано на рис. 553. Определение наибольшей максимальной скорости и наименьшей минимальной скорости может быть также сделано методом сравнения избыточных площадок, заключенных между положениями, соответствующими углам $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$, при условии малого сдвига максимальных и минимальных значений угловой скорости по отношению к максимальным и минимальным значениям кинетической энергии. В практических инженерных расчетах во многих случаях сдвиги эти весьма малы, поэтому применение изложенного метода сравнения избыточных площадей вполне допустимо.

§ 96. Определение момента инерции махового колеса по диаграмме $T = T(J_n)$

1°. При определении момента инерции махового колеса с помощью уравнения кинетической энергии заданными являются коэффициент неравномерности δ движения механизма и средняя угловая скорость $\omega_{\text{ср}}$. Также задаются диаграммы приведенных движущих моментов и моментов сопротивления и диаграмма приведенного момента инерции в функ-

ции угла поворота ведущего звена. Необходимо подчеркнуть, что при расчете маховика с помощью диаграммы $T = T(J_n)$ силы инерции не должны входить в диаграммы движущих сил и сил сопротивления. Диаграммы движущих моментов и моментов сил сопротивления даются только для времени установившегося движения. Следовательно, интегрирование разностей площадок между этими двумя кривыми так, как это было показано в § 95, позволяет определить только изменение кинетической энергии механизма. Обозначим это изменение кинетической энергии через ΔT [см. равенство (20.17)]. Далее, так как нам известны массы и моменты инерции всех звеньев механизма кроме момента инерции махового колеса, величину которого мы и должны найти, то нами может быть определено только изменение ΔJ_n приведенного момента инерции звеньев механизма [см. формулу (20.18)]. Таким образом, не зная момента инерции маховика и величины кинетической энергии, накопленной механизмом за время его разбега, нельзя построить диаграмму $T = T(\varphi)$, а можно построить только диаграмму $\Delta T = \Delta T(\varphi)$.

Переменную величину ΔJ_n определяют по заданным моментам инерции и массам звеньев с помощью планов скоростей механизма (см. § 87).

2°. Чтобы построить диаграмму $\Delta T = \Delta T(\Delta J_n)$ для одного полного цикла времени установившегося движения механизма достаточно знать только изменение кинетической энергии и изменение приведенных моментов инерции. Для этого (рис. 557) откладываем полученное изменение кинетической энергии ΔT по оси ординат от точки O , а переменный приведенный момент инерции ΔJ_n от той же точки по оси абсцисс. Соединяя полученные точки a, b, c и т. д. плавной кривой, мы получаем диаграмму $\Delta T = \Delta T(\Delta J_n)$, соответствующую времени установившегося движения механизма.

Для определения величины J_m приведенного момента инерции маховика воспользуемся формулами (20.16)

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 + \delta)$$

и

$$\operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 (1 - \delta).$$

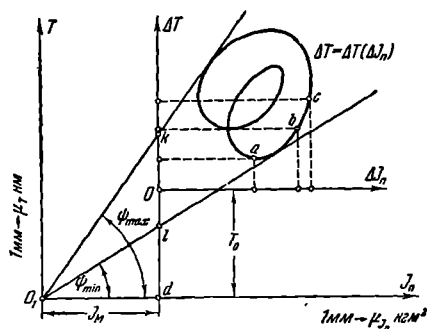


Рис. 557. К расчету маховика по диаграмме зависимости кинетической энергии от приведенного момента инерции звеньев.

Подставляя заданные значения для ω_{cp} и δ в эти формулы, определяем углы ψ_{max} и ψ_{min} . Проводим, далее, одну касательную к кривой $\Delta T \equiv \Delta T(\Delta J_n)$ под углом ψ_{max} , а другую — под углом ψ_{min} и определяем точку пересечения O_1 этих касательных (рис. 557). Точка O_1 является началом осей координат диаграммы $T \equiv T(J_n)$ полной кинетической энергии T механизма в функции полного приведенного момента инерции J_n . Следовательно, для определения полного приведенного момента инерции J_n в каждом положении механизма необходимо отсчитать абсциссы от нового начала координат O_1 . Приведенный момент инерции махового колеса равен произведению отрезка (O_1d) в миллиметрах на масштаб μ_{J_n} :

$$J_n = \mu_{J_n} (O_1d).$$

3°. Необходимо отметить, что при малых значениях коэффициента δ вследствие незначительной разности между углами ψ_{max} и ψ_{min} точка пересечения O_1 касательных очень часто уходит за пределы чертежа. В этом случае можно поступить следующим образом. Обозначим точки пересечения касательных с осью ординат $O\Delta T$ (рис. 557) первой системы координат через k и l . Тогда

$$\operatorname{tg} \psi_{max} = \frac{(kd)}{(O_1d)}, \quad \operatorname{tg} \psi_{min} = \frac{(ld)}{(O_1d)}$$

и

$$\operatorname{tg} \psi_{max} - \operatorname{tg} \psi_{min} = \frac{(kd) - (ld)}{(O_1d)} = \frac{(kl)}{(O_1d)}.$$

Подставляя только что найденное выражение для разности тангенсов в формулу (20.12), имеем:

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_{J_n}} \frac{(kl)}{(O_1d)} \frac{1}{\omega_{cp}^2},$$

откуда, имея в виду, что $\mu_{J_n} (O_1d) = J_n$, получаем:

$$J_n = \frac{\mu_T (kl)}{\omega_{cp}^2 \delta}. \quad (20.26)$$

Приведенный момент инерции махового колеса, следовательно, может быть определен по величине отрезка (kl) на оси ординат $O\Delta T$.

4°. Если маховик посажен на общий вал со звеном приведения, то его момент инерции J_n относительно оси вращения вала может быть уменьшен на величину момента инерции звена приведения относительно той же оси.

Так как маховик обыкновенно выполняется в виде колеса, имеющего массивный обод, соединенный со втулкой спицами, то моментами инерции этих соединительных частей часто пренебрегают и приближенно считают, что масса маховика равномерно распределена по окружности радиуса R , представляющей собой геометрическое место

центров тяжести поперечных сечений обода. Тогда момент инерции J_m маховика может быть выражен так:

$$J_m = mR^2 = m\frac{D^2}{4}, \quad (20.27)$$

где D — диаметр окружности центров тяжести сечений обода. Из формулы (20.27), пользуясь также формулой (20.26), находим:

$$mD^2 = \frac{4\mu_T(kl)}{\omega_{cp}^2 \delta} = \frac{3600\mu_T(kl)}{\pi^2 n^2 \delta},$$

где n есть число оборотов в минуту звена приведения. Принимая $\pi^2 \approx 10$, можем написать:

$$mD^2 = 360 \frac{\mu_T(kl)}{n^2 \delta}. \quad (20.28)$$

Произведение массы обода маховика на квадрат его диаметра носит название *махового момента*, или *характеристики маховика*. Характеристика маховика имеет размерность $\text{кг}\cdot\text{м}^2$. По этой характеристике можно определить необходимую массу маховика, если задан его диаметр, величина которого определяется в большинстве случаев из чисто конструктивных соображений.

Если маховик устанавливается не на звене приведения, а на каком-либо звене i машины, то всегда должно удовлетворяться условие равенства кинетических энергий

$$\frac{J_m \omega^2}{2} = \frac{J_{mi} \omega_i^2}{2}, \quad (20.29)$$

где J_{mi} — момент инерции маховика, установленного на звене i , а ω_i — величина угловой скорости этого звена. Из равенства (20.29) следует:

$$J_{mi} = J_m \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 \quad (20.30)$$

Следовательно, чем больше угловая скорость звена i , тем меньше должен быть момент инерции устанавливаемого маховика. Поэтому выгодно с точки зрения уменьшения веса махового колеса устанавливать его на звеньях, обладающих *большими скоростями*.

Из формулы (20.30) также следует, что для соблюдения условия постоянства момента инерции J_{mi} необходимо, чтобы передаточное отношение ω/ω_i было постоянным, что приводит к условию установки маховика на звеньях, которые связаны со звеном приведения передаточным отношением постоянной величины (механизмы круглых зубчатых колес, червячные механизмы и т. д.).

При установке маховика не на звене приведения необходимо учитывать жесткость промежуточной кинематической цепи. При малой жесткости кинематической цепи упругие колебания могут оказаться настолько большими, что маховое колесо не будет выполнять своего назначения.

§ 97. Определение момента инерции махового колеса по уравнению моментов

1°. Момент инерции маховика может быть также определен при помощи уравнения движения механизма в форме уравнения моментов. Согласно уравнению (19.7) имеем:

$$M_d - M_c = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi}. \quad (20.31)$$

Разность $M_d - M_c$ создает *избыточный момент* M . Величина избыточного момента M может быть определена, если заданы зависимости $M_d = M_d(\varphi)$

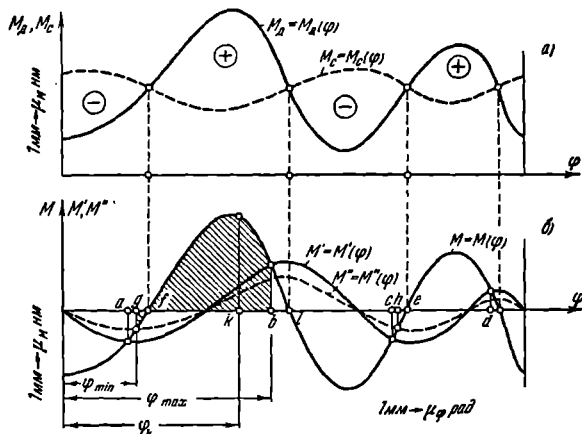


Рис. 558. К расчету маховика по уравнению моментов: а) диаграмма моментов движущих сил и сил сопротивления; б) диаграмма избыточного момента.

и $M_c = M_c(\varphi)$. На рис. 558, а построены кривые $M_d = M_d(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$, а на рис. 558, б — кривая избыточного момента $M = M(\varphi)$.

Подставляя в (20.31) значение для J_n из формулы (20.18), получаем:

$$M = (J_m + \Delta J_n) \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d(\Delta J_n)}{d\varphi}, \quad (20.32)$$

при этом так как $J_m = \text{const}$, то $dJ_m/d\varphi = 0$.

Рассмотрим положения механизма, при которых угловая скорость звена привода равна $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$. В этих положениях угловое ускорение

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Следовательно, формула (20.32) для этих положений имеет вид

$$M' = \frac{\omega_{\max}^2}{2} \frac{d(\Delta J_n)}{d\varphi} \quad \text{и} \quad M'' = \frac{\omega_{\min}^2}{2} \frac{d(\Delta J_n)}{d\varphi}, \quad (20.33)$$

где M' и M'' — значения избыточных моментов, соответствующих углам $\varphi_{\max}$

и $\varphi_{\min}$, при которых угловая скорость ω достигает одного из максимумов или одного из минимумов.

2°. Для определения правой части равенств (20.33) можно воспользоваться методом Жуковского, изложенным в § 88,4°. В самом деле, из равенства (19.11) следует:

$$M'_{\text{пер}} = -\frac{\omega_{\max}^3}{2} \frac{d(\Delta J_{\text{п}})}{d\varphi}, \quad M''_{\text{пер}} = -\frac{\omega_{\min}^3}{2} \frac{d(\Delta J_{\text{п}})}{d\varphi}, \quad (20.34)$$

где $M'_{\text{пер}}$ и $M''_{\text{пер}}$ — приведенные моменты сил инерции звеньев в перманентном движении механизма, т. е. в движении с постоянными угловыми скоростями $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$.

Величины моментов $M'_{\text{пер}}$ и $M''_{\text{пер}}$ могут быть определены, если провести кинетостатический расчет механизма и определить все силы инерции звеньев в предположении постоянства угловой скорости. Можно также с помощью рычага Жуковского (см. § 84) или методом приведения сил и моментов (см. § 85) определить те же моменты $M'_{\text{пер}}$ и $M''_{\text{пер}}$.

Динамическому расчету механизма обычно предшествует его кинетостатический расчет, при котором величина угловой скорости принимается равной $\omega_{\text{ср}}$. Поэтому для определения моментов $M'_{\text{пер}}$ и $M''_{\text{пер}}$ можно пользоваться моментом $M_{\text{пер}}$, полученным при кинетостатическом исследовании

$$M_{\text{пер}} = -\frac{\omega_{\text{ср}}^3}{2} \frac{d(\Delta J_{\text{п}})}{d\varphi}. \quad (20.35)$$

Тогда, учитывая зависимости (20.20), получаем:

$$M'_{\text{пер}} = M_{\text{пер}}(1 + \delta), \quad M''_{\text{пер}} = M_{\text{пер}}(1 - \delta). \quad (20.36)$$

Формулы (20.33) заменяются теперь следующими:

$$M' = M_{\text{пер}}(1 + \delta) \quad (20.37)$$

и

$$M'' = M_{\text{пер}}(1 - \delta). \quad (20.38)$$

3°. Определив моменты M' и M'' в функции угла φ , т. е. $M' = M'(\varphi)$ и $M'' = M''(\varphi)$, строим кривые этих зависимостей в том же масштабе, что и кривая зависимости избыточного момента $M = M(\varphi)$, изображенная на рис. 558, б. Равенство (20.37) удовлетворяется в положениях a , b , c и d , где кривая $M' = M'(\varphi)$ пересекает кривую $M = M(\varphi)$. Но угловая скорость ω может иметь максимум только в положениях b и d , потому что на интервалах fb и ed происходит увеличение кинетической энергии. Определение наибольшего максимума может быть сделано с достаточной для практики точностью сопоставлением величин площадок $(F_{bl} + F_{ed})$ мм² и F_{le} мм², заключенных в интервале bd между кривой $M = M(\varphi)$ и осью $O\varphi$ (рис. 558, б).

Если

$$F_{le} > F_{bl} + F_{ed},$$

то наибольшая угловая скорость оказывается в положении b . Если же

$$F_{le} < F_{bl} + F_{ed},$$

то наибольшая угловая скорость получается в положении d .

Общим правилом нахождения наибольшего максимума является следующее.

Если алгебраическая сумма избыточных площадок на интервале между двумя максимумами больше нуля, то наибольший максимум находится в правом конце интервала, если меньше нуля, то — в левом.

Аналогично, если построить кривую зависимости $M'' = M''(\varphi)$ (на рис. 558, б она показана штриховой линией), то минимумы будут в точках g и h пересечения кривых зависимостей $M'' = M''(\varphi)$ и $M = M(\varphi)$. Определение наименьшего минимума ведется также методом сравнения площадок.

Если углы $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$ (рис. 558, б), в которых угловые скорости равны $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$, соответствуют положениям b и g , то, далее, определение момента инерции J_M махового колеса может вестись по одной из формул (20.23) и (20.24) или (20.25) в зависимости от требуемой точности расчета. При этом избыточная работа A , входящая в эти формулы, подсчитывается по диаграмме $M = M(\varphi)$ (рис. 558, б)

$$A = \mu_M \mu_\varphi F_{gb},$$

где F_{gb} — алгебраическая сумма площадок в квадратных миллиметрах, заключенная в интервале gb .

Если построить зависимость между моментом инерции J_M маховика и коэффициентом неравномерности движения δ , т. е. $J_M = J_M(\delta)$, то можно обнаружить, что эта зависимость имеет приближенно гиперболический характер (рис. 559). Таким образом, с приближением δ к нулю момент инерции J_M маховика быстро возрастает, и следовательно, незначительное уменьшение δ в этой области дает значительное увеличение необходимого момента инерции J_M маховика, что является, конечно, нежелательным. Это обстоятельство заставляет в некоторых случаях отказываться от установки на машинах маховиков с большим моментом инерции, обеспечивающим малый коэффициент неравномерности движения.

4°. Определив момент инерции J_M махового колеса, можно по заданной угловой скорости $\omega_{\max}$ и по диаграмме $M = M(\varphi)$ (рис. 558, б) определить угловую скорость ω для любого угла поворота φ , т. е. построить зависимость $\omega = \omega(\varphi)$. Пусть, например, требуется определить угловую скорость ω_k в положении k , соответствующем углу φ_k (рис. 558, б).

Напишем уравнение кинетической энергии для интервала kb . Имеем:

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi_b} M d\varphi = (J_M + \Delta J_{pb}) \frac{\omega_{\max}^2}{2} - (J_M + \Delta J_{pk}) \frac{\omega_k^2}{2},$$

откуда

$$\omega_k = \sqrt{\frac{J_M + \Delta J_{pb}}{J_M + \Delta J_{pk}} \omega_{\max}^2 - \frac{2}{J_M + \Delta J_{pk}} \int_{\varphi_k}^{\varphi_b} M d\varphi}. \quad (20.39)$$

В этих равенствах ΔJ_{pb} — приведенный момент инерции всех звеньев механизма (без махового колеса) в положении b , соответствующем максимальной угловой скорости $\omega_{\max}$, ΔJ_{pk} — приведенный момент инерции всех звеньев механизма (без махового колеса) в положении k ; J_M — приведенный момент

инерции махового колеса. Интеграл $\int_{\varphi_k}^{\varphi_b} M d\varphi$ пропорционален площади диаграммы $M = M(\varphi)$, заключенной в интервале kb .

Аналогично определяются угловые скорости ω и для других значений угла φ . Таким образом, может быть построена кривая зависимости $\omega = \omega(\varphi)$.

Угловая скорость $\omega_{\max}$ в формуле (20.39) может быть также выражена через заданные угловую скорость $\omega_{\text{ср}}$ и коэффициент неравномерности движения δ , так как

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{ср}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)$$

или

$$\omega_{\max}^2 \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 + \delta).$$

§ 98. Определение момента инерции махового колеса при движущем моменте, зависящем от скорости

1°. Выше мы рассмотрели вопрос об определении момента инерции махового колеса при приведенных моментах, зависящих только от угла поворота звена привода. В настоящем параграфе рассмотрим вопрос об определении маховых масс для тех случаев, когда приведенный момент M_d движущих масс является функцией угловой скорости ω звена привода, а приведенный момент M_c сил сопротивления является функцией угла поворота φ или функцией времени t .

Пусть заданы графики (рис. 560) приведенных моментов движущих сил $M_d = M_d(\omega)$ и сил сопротивления $M_c = M_c(\varphi)$; требуется определить момент

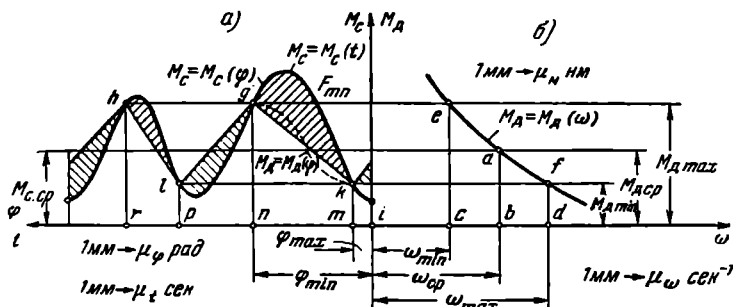


Рис. 560. К расчету маховика при движущем моменте, зависящем от скорости: а) диаграмма момента сил сопротивления, зависящего от угла поворота звена привода или от времени; б) диаграмма момента движущих сил, зависящего от угловой скорости.

инерции J_m махового колеса, если задан коэффициент неравномерности δ . Задача эта может быть решена только приближенно, если принять переменную часть равенства (20.18) равной нулю и не учитывать переменный приведенный момент инерции звеньев механизма. Тогда полный приведенный момент инерции J будет равен моменту инерции J_m маховика и приведенному моменту инерции J_0 звена привода и тех звеньев механизма, которые связаны со звеном привода постоянством передаточного отношения, т. е.

$$J = J_m + J_0. \quad (20.40)$$

Графическим интегрированием определяем площадь диаграммы $M_c = M_c(\varphi)$ (рис. 560, а) и находим среднее значение момента $M_{\text{ср}}$ сил сопротивления. Если приближенно принять, что средняя угловая скорость $\omega_{\text{ср}}$ звена привода соответствует равенству средних моментов сил движущих и сил сопротивления

$$M_{\text{ср}} \approx M_d, \text{ ср}$$

то, продолжая прямую среднего момента $M_{с.ср}$ до пересечения в точке a с кривой $M_d = M_d(\omega)$ (рис. 560, б), определим отрезок (ab) , представляющий в масштабе μ_M момент $M_{д.ср}$.

Отрезок $(1-b)$ по абсциссе в масштабе μ_ω представляет собою искомую среднюю скорость $\omega_{ср}$.

Далее, по равенствам (20.19) определяем угловые скорости $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$ и откладываем их в виде отрезков $(1-d)$ и $(1-c)$ в том же масштабе μ_ω . Отрезки (df) и (ce) в масштабе μ_M представляют собою моменты $M_{д\min}$ и $M_{д\max}$.

При прохождении величины ω через максимальные $\omega_{\max}$ и минимальные $\omega_{\min}$ значения угловое ускорение $d\omega/dt$ равно нулю.

Тогда уравнение движения механизма

$$M_d(\omega) - M_c(\varphi) = J \frac{d\omega}{dt} \quad (20.41)$$

принимает вид

$$M_d(\omega) - M_c(\varphi) = 0$$

или

$$M_d(\omega) = M_c(\varphi), \quad (20.42)$$

т. е. в положениях, когда угловая скорость ω звена приведения достигает экстремальных значений, моменты движущих сил и сил сопротивления должны быть равны. Через точки e и f проводим горизонталь до пересечения с кривой $M_c = M_c(\varphi)$ в точках g , h , k и l (рис. 560, а). Из точек g , h , k и l опускаем перпендикуляры на ось абсцисс и находим соответственно точки m , n , p и r . При углах φ , определяемых точками m и p , звено приведения имеет максимальную угловую скорость $\omega_{\max}$, а при углах φ , определяемых точками n и r , — минимальную скорость $\omega_{\min}$. Рассмотрим интервал угла поворота φ_{mn} . В точке m , соответствующей углу $\varphi_{\max}$, угловая скорость ω равна $\omega_{\max}$. В точке n , соответствующей углу $\varphi_{\min}$, угловая скорость ω равна $\omega_{\min}$. Следовательно, на интервале φ_{mn} кривая $M_d = M_d(\varphi)$ может иметь перегиб, т. е. иметь вид, условно показанный на рис. 560, а пунктиром. Заменяем кривую $M_d = M_d(\varphi)$ на участке φ_{mn} приближенной прямой gk . Площадь F_{mn} мм², заключенная между кривой $M_c = M_c(\varphi)$ и прямой gk , помноженная на масштабы μ_M и μ_φ , представляет собою избыточную работу A , равную

$$A = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} M_d d\varphi - \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} M_c d\varphi. \quad (20.43)$$

На рис. 560, а все площадки, определяющие избыточную работу, заштрихованы.

Для определения момента инерции J_M махового колеса надо выбрать наибольшую площадку, а таковой является площадка F_{mn} (рис. 560, а) на интервале mn . Наибольшая избыточная работа, соответствующая этой площадке, равна

$$A = \mu_M \mu_\varphi F_{mn}. \quad (20.44)$$

При помощи формулы (20.24) определяем момент инерции маховика

$$J_M = \frac{A}{\omega_{ср}^2} - J_0. \quad (20.45)$$

2°. Если приведенный момент сил сопротивления M_c является функцией времени t , т. е. $M_c = M_c(t)$, то порядок расчета остается прежним, но в этом

случае точки m и n соответствуют промежуткам времени $t_{\max}$ и $t_{\min}$, в которых скорость ω достигает значений $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$. Формулу (20.45) в этом случае применить нельзя, ибо избыточная площадка F_{mn} определяет импульс момента U , равный

$$U = \mu_M \mu_t F_{mn} \text{ [н} \cdot \text{м} \cdot \text{сек]}. \quad (20.46)$$

Приближенную формулу для определения момента инерции J_M маховика получаем, пользуясь уравнением движения, написанным в следующем виде:

$$M_d(\omega) - M_c(t) = (J_M + J_0) \frac{d\omega}{dt} \quad (20.47)$$

или

$$[M_d(\omega) - M_c(t)] dt = (J_M + J_0) d\omega \quad (20.48)$$

и, далее,

$$\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} [M_d(\omega) - M_c(t)] dt = (J_M + J_0) \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d\omega. \quad (20.49)$$

Левая часть уравнения (20.49) равна U [см. формулу (20.46)]. Тогда из уравнения (20.49) получаем:

$$J_M = \frac{U}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} - J_0 \quad (20.50)$$

или, так как $\omega_{\max} - \omega_{\min} = \omega_{\text{ср}} \delta$, имеем окончательно

$$J_M = \frac{U}{\omega_{\text{ср}} \delta} - J_0. \quad (20.51)$$

3°. Если приведенные моменты M_d и M_c движущих сил и сил сопротивления являются функциями угловой скорости ω (рис. 561), то механизм всегда работает устойчиво с некоторой угловой скоростью ω_y звена привода, величина которой определится точкой пересечения кривых $M_d = M_d(\omega)$ и $M_c = M_c(\omega)$. В самом деле, если угловая скорость ω уменьшится и будет равна ω_c (рис. 561), то момент M_d увеличится, а момент M_c уменьшится и, следовательно, возникает восстанавливающий момент

$$M_d - M_c > 0,$$

и звено привода механизма возвратится к прежней устойчивой угловой скорости ω_y . Если угловая скорость ω увеличится и будет равна ω_d (рис. 561), то возникает момент

$$M_d - M_c < 0,$$

и звено привода будет также возвращаться к прежней устойчивой угловой скорости ω_y .

4°. Рассмотренный в настоящем параграфе метод определения момента инерции маховика является приближенным.

Величину момента инерции маховика можно уточнить, если после определения его момента инерции приближенным методом построить одним из способов, указанных в § 90, кривую угловой скорости ω на участке φ_{mn}

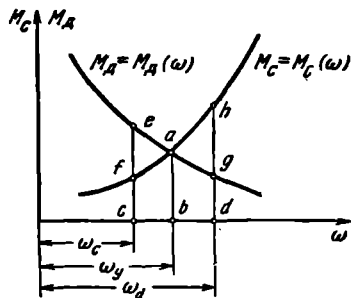


Рис. 561. Диаграмма моментов движущих сил и сил сопротивления, зависящих от угловой скорости.

(рис. 560, а) и определить, значительно ли отклоняются полученные значения для $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$ от заданных. Если эти отклонения значительны, то, увеличив или уменьшив полученное приближенное значение для момента инерции маховика, можно получить более точное решение задачи.

ГЛАВА XXI

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 99. Общая постановка задачи

1°. Как было указано в § 92,2°, при непериодических колебаниях скоростей ведущего вала машины (звена привода механизма) во время установившегося и неустановившегося движений необходимо соединить звено привода регулируемого объекта с особым механизмом, носящим название *скоростного регулятора*. Задача регулятора состоит в установлении устойчивого (стационарного), по закону изменения величины скорости, режима движения звена привода регулируемого объекта, что может быть достигнуто выравниванием разницы между движущими силами и силами сопротивления. Если по каким-либо причинам уменьшается полезное сопротивление и регулируемый объект начинает ускорять свое движение, то регулятор автоматически уменьшает приток движущих сил. Наоборот, если силы сопротивления увеличиваются и регулируемый объект начинает замедлять свое движение, то регулятор увеличивает движущие силы. Таким образом, как только нарушается равновесие между движущими силами и силами сопротивления, регулятор должен вновь их сбалансировать и заставить регулируемый объект работать с прежними или близкими к прежним скоростями.

Скоростные регуляторы, вызывающие изменение сил сопротивления, называются *модераторами*.

Конструкции регуляторов и схемы регулирования разнообразны. Так, например, в практике применяются так называемые центробежные регуляторы, плоские и пространственные, в которых используется центробежная сила инерции. Имеются также инерционные регуляторы, использующие тангенциальные силы инерции. Применяются регуляторы электрического типа и др.

2°. Хотя конструкции механизмов регуляторов и схемы регулирования различные, но в большинстве случаев автоматическое регулирование выполняется по схеме замкнутого контура. Принципиальная схема автоматического регулирования по замкнутому контуру представлена на рис. 562.

Регулируемый объект 1 находится под внешним воздействием *источника возмущения 2*. В результате этого воздействия происходит отклонение регулируемого параметра от заданного. Эти изменения воспринимаются *чувствительным элементом 3*, который передает необходимую информацию *регулирующему органу 4*, восстанавливаю-

щему заданный параметр у регулируемого объекта 1. Система 1—3—4—1 носит название *обратной связи*. Регулируемый объект 1 посредством обратной связи воздействует на чувствительный элемент 3, который в свою очередь действует на регулирующий объект 1.

На рис. 562 дана самая элементарная схема системы автоматического регулирования. Как это будет показано далее, в состав системы автоматического регулирования входят еще различные дополнительные устройства, обеспечивающие надежность действия этой системы. В машинном агрегате регулируемым объектом обычно бывает двигатель, а источником возмущения является рабочая машина, приводимая в движение двигателем. Чувствительный элемент может быть механическим устройством, чаще всего механизмом регулятора центробежного типа или электрическим типа тахогенератора, представляющего собой электрический генератор, развивающий напряжение, пропорциональное угловой скорости. Этим напряжением можно пользоваться для воздействия на регулирующий орган. Регулирующие органы могут быть различными в зависимости от технологического назначения машины.

3°. Рассмотрим некоторые схемы автоматического регулирования угловой скорости звена привода машинного агрегата. На рис. 563 показан машинный агрегат, состоящий из рабочей машины 2 и теплового двигателя 1. Чувствительным элементом является центробежный регулятор 3. Регулятор состоит из двух тяжелых шаров K , сидящих на звеньях AC и BD . Эти звенья входят во вращательные пары C и D со звеньями CE и DF , которые в свою очередь входят во вращательные пары E и F с муфтой N , имеющей возможность свободно двигаться вдоль направляющей $z-z$. Звенья AC и BD связаны пружиной L , стремящейся сблизить шары. Регулятор приводится в движение от звена привода двигателя посредством промежуточного механизма, например парой конических колес H и G . При вращении звена привода двигателя с угловой скоростью ω_1 регулятор вращается с угловой скоростью

$$\omega_p = \omega_1 \frac{l}{l_{ip}},$$

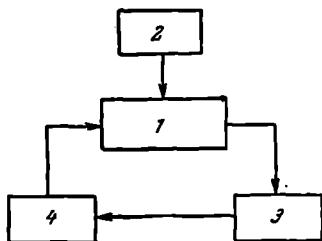


Рис. 562. Принципиальная схема системы регулирования: 1 — регулируемый объект; 2 — источник возмущения; 3 — чувствительный элемент; 4 — регулирующий орган.

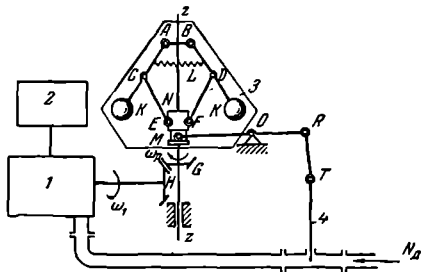


Рис. 563. Схема прямого регулирования машинного агрегата: 1 — двигатель; 2 — рабочая машина; 3 — регулятор; 4 — заслонка паропровода.

где i_p есть передаточное отношение от звена приведения к регулятору.

При различных угловых скоростях ω_1 звена приведения муфта N занимает различные положения. С муфтой N соединен рычажный механизм, увеличивающий или уменьшающий подачу движущей энергии в двигатель. Этот механизм состоит из рычагов OR , RT и заслонки 4. Палец M , принадлежащий рычагу OR , скользит в направляющих, принадлежащих муфте N .

Предположим, что в результате уменьшения сил полезных сопротивлений в рабочей машине 2 угловая скорость ω_1 регулятора увели-

чилась. Тогда грузы K под действием центробежных сил будут удаляться от оси вращения $z-z$ и муфта N будет перемещаться вверх. При этом звено RT будет действовать на заслонку 4, которая, опускаясь вниз, уменьшит сечение канала, по которому поступает в двигатель 1 рабочее вещество (пар, газ и т. д.). Тогда движущие силы уменьшатся, угловая скорость ω_p также уменьшится, муфта N начнет перемещаться вниз и, следовательно, заслонка 4 будет перемещаться вверх, увеличивая сечение канала. После увеличения подачи движущей энергии процесс может снова повториться и т. д. Таким образом, работа регулятора представляет собой некоторый колебательный про-

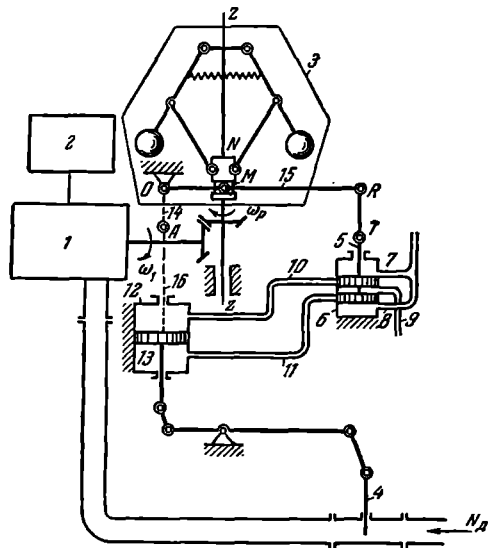


Рис. 564. Схема непрямого регулирования машинного агрегата: 1 — двигатель; 2 — рабочая машина; 3 — чувствительный элемент; 4 — заслонка; 5 — поршни золотника; 6, 7, 8, 9, 10, 11 — маслопроводы; 12 — цилиндр сервомотора; 13 — поршень сервомотора; 14 — дополнительное звено; 15 — рычаг; 16 — шток поршня 13.

цесс. Регулятор отзывается *автоматически* на изменение величины угловой скорости звена приведения двигателя и обеспечивает подачу необходимой энергии для передвижения регулирующего органа.

Следует отметить, что описанный способ регулирования обладает тем недостатком, что после сброса нагрузки угловая скорость оказывается несколько выше той, с которой двигатель вращался до сброса нагрузки, хотя движение машинного агрегата вновь получается установившимся, но скорости этого движения уже иные и несколько большие, чем это имело место в начале процесса регулирования. Чтобы избежать указанного изменения скорости, в технике применяются более сложные схемы регулирования.

Описанная система регулирования называется системой *прямого регулирования*, так как в ней регулятор *непосредственно соединен с механизмом*, увеличивающим или уменьшающим подачу движущей энергии.

4°. В рассмотренном примере перемещение заслонки 4 производится за счет центробежных сил шаров регулятора. В некоторых случаях этих сил может оказаться недостаточно для перемещения заслонки, тогда необходимо включить в схему регулирования вспомогательный источник энергии, называемый *сервомотором*. Такие системы называются *системами непрямого регулирования*.

На рис. 564 показана схема системы непрямого регулирования. Эта система имеет те же основные элементы, что и принципиальная схема автоматического регулирования (рис. 562), но перемещение регулируемого органа 4 (заслонки) происходит посредством гидравлических сервомоторов. Пусть, например, угловая скорость ω_1 звена привода машинного агрегата увеличилась. Тогда муфта *N* начнет подниматься и через систему рычагов поднимет золотник 5. В цилиндр 6 золотника по трубкам 7 и 8 нагнетается масло под постоянным давлением. При равновесном режиме маслопровода 10 и 11 перекрыты золотником 5. При подъеме золотника 5 масло по трубопроводам 8 и 6 начнет поступать в нижнюю полость цилиндра 12 сервомотора, и поршень 13 переместится вверх и системой рычагов опустит заслонку 4, уменьшая доступ движущей энергии N_d . При движении поршня 13 вверх масло, находящееся в верхней полости цилиндра 12, по трубопроводу 10 и маслопроводу 9 вытесняется в приемник масла. После того как заслонка 4 опустится, угловая скорость ω_1 уменьшится, муфта *N* начнет опускаться вниз, золотник 5 перекроет трубопроводы 6 и 10 и доступ масла в цилиндр 12 сервомотора прекратится. После возвращения золотника 5 в исходное положение процесс регулирования должен закончиться. Рассмотренная система регулирования обеспечивает поддержание постоянной установившейся угловой скорости звена привода и носит название *астатической системы регулирования*.

Чтобы регулятор во всех случаях регулирования выключил сервомотор, рассмотренная система регулирования снабжается дополнительным звеном 14, входящим во вращательные кинематические пары *O* и *R* со звеном 15 и штоком 16 поршня 13, а звено 15 входит во вращательную пару *M* с муфтой *N*. При этом точка *O* освобождается от закрепления со стойкой. Звено 14 и шток 16 показаны на рис. 564 пунктиром. Звенья 14, 15 и 16 образуют жесткую обратную связь.

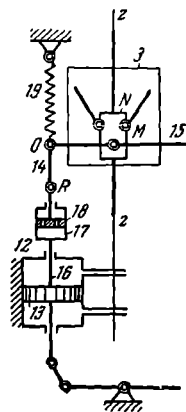


Рис. 565. К системе непрямого регулирования: 12 — цилиндр сервомотора; 13 — поршень сервомотора; 14 — дополнительное звено; 15 — дополнительное звено; 16 — шток поршня; 17 — цилиндр катаракта; 18 — поршень катаракта; 19 — пружина.

Поэтому такая система регулирования получила название *системы непрямого регулирования с жесткой обратной связью*. Недостатком этой системы является то, что после окончания процесса регулирования муфта займет отличное от исходного положение и угловая скорость звена приведения будет несколько отличаться от первоначальной.

5°. Чтобы избежать неравномерности процесса регулирования в системах с обратной связью между штоком 16 и звеном 14 (рис. 565), устанавливается масляный тормоз, состоящий из цилиндра 17, жестко связанного со штоком 16, и поршня 18, входящего во вращательную кинематическую пару со звеном 14. Поршень 18 имеет отверстия, через которые масло может перетекать из верхней полости в нижнюю, и наоборот. Как показывает опыт, сопротивление при перетекании масла пропорционально скорости перемещения поршня 18 в цилиндре 17. Такая система регулирования получила название *изодромной системы регулирования*, а масляный тормоз, состоящий из поршня 18 и цилиндра 17, называется *катарактом*. Изодромная система регулирования является астатической и поддерживает постоянную установившуюся угловую скорость звена приведения. Специальная пружина 19 снабжена устройствами, позволяющими изменять затяжку пружины и тем самым производить настройку системы регулирования на требуемый режим.

§ 100. Кинестатика центробежного регулятора

1°. Выясним вопрос о зависимости угловой скорости регулятора ω_p от высоты подъема z муфты N регулятора (рис. 566, а). Для этого предположим, что угловая скорость ω_p регулятора для рассматриваемого момента времени есть величина постоянная.

Если под действием всех внешних сил, в том числе и сил инерции, регулятор находится в равновесии, то должно удовлетвориться условие равенства нулю суммы всех этих сил

$$\sum_1^n P_i = 0.$$

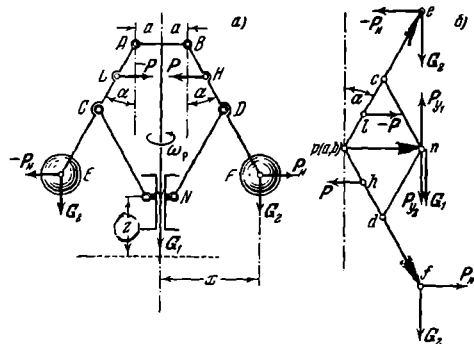


Рис. 566. К кинестатическому исследованию центробежного регулятора: а) схема регулятора; б) повернутый план скоростей.

Силы инерции грузов F и E обозначаем через P_n и $-P_n$. Силами инерции самих звеньев можно пренебречь, так как их массы малы по сравнению с массами грузов. Силами трения в кинематических парах также пренебрегаем. При постоянной угловой скорости ω_p силы инерции самой

муфты взаимно уравниваются. Кроме сил инерции на регулятор действуют силы тяжести G_2 грузов, сила тяжести муфты G_1 и силы пружины P и $-P$ (на рис. 566 пружина не показана).

Определим приведенную к муфте силу $P_{п1}$ от силы тяжести и сил сопротивления пружины. Для этого строим повернутый план скоростей механизма регулятора (рис. 566, б), прилагаем в соответствующих точках силы P , $-P$, G_1 , G_2 и P_{y1} и составляем уравнение моментов всех сил относительно точки p — полюса плана скоростей

$$-G_1(pf) - G_2(pf) \sin \alpha - G_2(pe) \sin \alpha - \\ - P(pl) \cos \alpha - P(ph) \cos \alpha + P_{y1}(pn) = 0, \quad (21.1)$$

где P_{y1} есть уравнивающая сила. Так как $(pf) = (pe)$ и $(pl) = (ph)$, то

$$P_{y1} = G_1 + 2G_2 \left(\frac{pf}{pn} \right) \sin \alpha + 2P \left(\frac{ph}{pn} \right) \cos \alpha. \quad (21.2)$$

Отрезки (pf) , (pn) и (ph) представляют в масштабе μ_v величины скоростей v_F , v_N и v_H точек F , N и H , т. е. $v_F = \mu_v(pf)$;

$$v_N = \mu_v(pn) \quad \text{и} \quad v_H = \mu_v(ph).$$

Поэтому формула (21.2) может быть представлена так:

$$P_{y1} = G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin \alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos \alpha.$$

Модуль приведенной силы $P_{п1}$ равен

$$P_{п1} = P_{y1} = G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin \alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos \alpha, \quad (21.3)$$

а направлена она противоположно P_{y1} , в данном случае вниз.

Аналогично определяется приведенная сила $P_{п2}$ от сил инерции P_n и $-P_n$

$$P_n(pf) \cos \alpha + P_n(pe) \cos \alpha - P_{y2}(pn) = 0, \quad (21.4)$$

где P_{y2} есть уравнивающая сила.

Из уравнения (21.4) получаем:

$$P_{y2} = 2P_n \left(\frac{pf}{pn} \right) \cos \alpha \quad \text{или} \quad P_{y2} = 2P_n \frac{v_F}{v_N} \cos \alpha,$$

где $v_F = \mu_v(pf)$ и $v_N = \mu_v(pn)$. Отсюда модуль приведенной силы $P_{п2}$ равен

$$P_{п2} = P_{y2} = 2P_n \frac{v_F}{v_N} \cos \alpha, \quad (21.5)$$

направлена же она противоположно P_{y2} — вверх.

Так как сила P_n по величине равна

$$P_n = m\omega_p^2 x,$$

где x есть переменное расстояние центров тяжести грузов от оси регулятора, а m — масса груза (рис. 566), то формулу (21.5) можно написать так:

$$P_{n2} = 2m\omega_p^2 x \cos \alpha \frac{v_F}{v_N}. \quad (21.6)$$

Равновесие регулятора определяется равенством нулю суммы приведенных к муфте сил P_{n1} и P_{n2} :

$$P_{n1} + P_{n2} = 0. \quad (21.7)$$

Приведенная сила P_{n1} в равенстве (21.7) носит название *поддерживающей силы регулятора*. В самом деле, если при невращающемся регуляторе мы будем поднимать муфту регулятора, то должны будем прилагать к ней силу, равную по величине и противоположную по направлению силе P_{n1} . Из равенства (21.3) следует, что поддерживающая сила регулятора зависит от координаты z муфты N и в каждом положении уравнивается приведенной силой P_{n2} от сил инерции грузов, которые также зависят от положения z муфты N , т. е.

$$P_{n1} = P_{n1}(z) \quad \text{и} \quad P_{n2} = P_{n2}(z).$$

Сила P_{n2} называется *приведенной к муфте регулятора центробежной силой*.

Подставляя в равенство (21.7) значения P_{n1} и P_{n2} из формул (21.3) и (21.6), получаем:

$$G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin \alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos \alpha - 2m\omega_p^2 x \cos \alpha \frac{v_F}{v_N} = 0. \quad (21.8)$$

Введем следующие обозначения:

$$A = 2mx \cos \alpha \frac{v_F}{v_N} \quad (21.9)$$

и

$$B = G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin \alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos \alpha. \quad (21.10)$$

Тогда уравнение (21.8) примет вид

$$A\omega_p^2 - B = 0. \quad (21.11)$$

Уравнение (21.11) является уравнением равновесия регулятора при силах трения, равных нулю.

Из соотношений (21.9) и (21.10) следует, что величины A и B являются функциями положения одного из звеньев механизма регулятора. Если A и B рассматривать как функции положения z муфты регулятора и положить $A = A(z)$ и $B = B(z)$, то уравнение (21.11) примет вид

$$A(z)\omega_p^2 - B(z) = 0. \quad (21.12)$$

Из этого уравнения имеем:

$$\omega_p^2 = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (21.13)$$

Таким образом, каждому положению z равновесия муфты N соответствует вполне определенная угловая скорость ω_p . Эта угловая скорость носит название *равновесной угловой скорости регулятора*.

2°. Пользуясь формулами (21.9), (21.10), (21.13) и планом скоростей, можно построить диаграмму зависимости перемещения z муфты N от квадрата равновесной угловой скорости ω_p (рис. 567), т. е. $z = z(\omega_p^2)$. Эта диаграмма носит название *равновесной диаграммы регулятора* и имеет обычно вид, указанный на рис. 567. Пользуясь этой диаграммой, всегда можно определить по заданной угловой скорости ω_p координату z муфты. Например, значению угловой скорости ω_{pi} соответствует точка i диаграммы $z = z(\omega_p^2)$ и, следовательно, положение z_i муфты N .

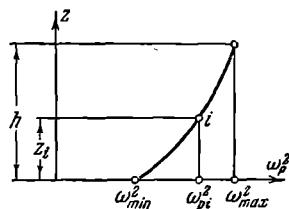


Рис. 567. Диаграмма зависимости перемещения муфты регулятора от квадрата его угловой скорости.

Если построена равновесная диаграмма регулятора для интервала, соответствующего полному перемещению a муфты регулятора, то можно определить значения ω_{min} и ω_{max} минимальной и максимальной угловых скоростей регулятора, при которых муфта занимает свои крайние положения.

Величина

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}, \quad (21.14)$$

где

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}, \quad (21.15)$$

называется *степенью неравномерности регулятора*.

Из формул (21.14) и (21.15) видно, что величина δ может быть также принята равной

$$\delta = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_{cp}^2}. \quad (21.16)$$

3°. В некоторых случаях бывает удобнее силы, действующие на регулятор, приводить не к муфте, а к центру F груза (рис. 568), направляя их по линии центробежной силы инерции $P_{и'}$.

Равновесие регулятора определяется равенством нулю суммы приведенных к точке F сил $P_{п1}'$ и $P_{п2}'$. Имеем:

$$P_{п1}' + P_{п2}' = 0, \quad (21.17)$$

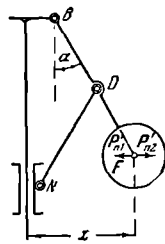


Рис. 568. Приведение сил, действующих на регулятор, к центру груза.

где $P'_{п1}$ — приведенная сила весов G_1 и G_2 грузов, муфты N и сил P и — P пружины и $P'_{п2}$ — приведенная сила сил инерции P_H и — P_H . Модуль силы $P'_{п2}$ определяется, если в равенстве (21.3) помножить все его члены на отношение скорости v_N муфты N к проекции скорости v_F точки F на горизонталь, т. е. на $\frac{v_N}{v_F \cos \alpha}$. Имеем:

$$P'_{п1} = \frac{G_1 v_N}{v_F \cos \alpha} + 2G_2 \operatorname{tg} \alpha + 2P \frac{v_H}{v_F}. \quad (21.18)$$

Модуль силы $P'_{п2}$ определяется, если помножить правую часть формулы (21.6) на то же самое отношение:

$$P'_{п2} = 2m\omega_p^2 x. \quad (21.19)$$

Сила $P'_{п2}$ направлена противоположно силе $P'_{п1}$. Подставляя в уравнение (21.17) выражения для $P'_{п1}$ и $P'_{п2}$ из формул (21.18) и (21.19), получаем уравнение равновесия регулятора в следующем виде:

$$\frac{G_1 v_N}{v_F \cos \alpha} + 2G_2 \operatorname{tg} \alpha + 2P \frac{v_H}{v_F} - 2m\omega_p^2 x = 0. \quad (21.20)$$

Вводя обозначения

$$D = 2mx \quad (21.21)$$

и

$$C = \frac{G_1 v_N}{v_F \cos \alpha} + 2G_2 \operatorname{tg} \alpha + 2P \frac{v_H}{v_F}, \quad (21.22)$$

перепишем уравнение (21.20) так:

$$D\omega_p^2 - C = 0. \quad (21.23)$$

Уравнение (21.23) является также уравнением равновесия регулятора при силах трения, равных нулю. Величины D и C суть функции расстояния x центров тяжести шаров до оси вращения регулятора

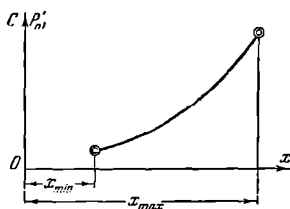
$$D = D(x), \quad C = C(x).$$

Из уравнения (21.23) следует:

$$\omega_p^2 = \frac{C(x)}{D(x)}. \quad (21.24)$$

Рис. 569. Характеристика регулятора.

Диаграмма зависимости $C = C(x)$ или то же $P'_{п1} = P'_{п1}(x)$ носит название *характеристики регулятора*. На рис. 569 показан один из возможных видов диаграммы $C = C(x)$.



§ 101. Устойчивость регулятора

1°. С помощью характеристики регулятора может быть выяснен ряд важных свойств регулятора, к ознакомлению с которыми мы и переходим.

Если обратиться к равновесной кривой регулятора (рис. 567), то из нее следует, что при $z=0$ имеем наименьшее значение $\omega_{\min}$ равновесной угловой скорости, а при $z=a$, где a — полный ход муфты, имеем наибольшее значение $\omega_{\max}$ равновесной угловой скорости. Степень неравномерности регулятора согласно формуле (21.16) равна

$$\delta = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2\omega_{\text{ср}}^2}. \quad (21.25)$$

Таким образом, δ зависит от пределов скоростей, в которых может работать регулятор.

Как следует из формулы (21.19), величина силы $P'_{п2}$ равна сумме центробежных сил инерции грузов

$$P'_{п2} = 2m\omega_p^2 x.$$

Если скорость ω_p постоянна, то величина силы $P'_{п2}$ пропорциональна расстоянию x и ее изменение в функции этого расстояния выражается прямой линией Om (рис. 570), проходящей через начало координат и наклоненной к оси Ox под углом β , тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \beta = 2m\omega_p^2 \frac{\mu_x}{\mu_p},$$

где μ_p и μ_x — масштабы построения диаграммы (рис. 570). Прямая Om носит название *линии центробежной силы*.

2°. Построим, далее, в тех же масштабах характеристику регулятора, его зависимость $P'_{п1} = P'_{п1}(x)$ (рис. 570, кривая $b-b$). Точка c пересечения прямой Om с характеристикой $b-b$ регулятора определяет то положение x_0 центра груза, при котором регулятор находится в равновесном положении при постоянной угловой скорости ω_p , так как в этом положении равны по величине и противоположны по направлению силы $P'_{п1}$ и $P'_{п2}$. Пусть, далее, регулятор выведен из своего равновесного положения, например, опусканием муфты; при этом центры грузов сближаются и будут находиться от оси вращения регулятора на расстоянии $x_1 < x_0$. Если после этого мы предоставим регулятор самому себе, то он окажется под действием центробежной силы $P'_{п2}$, величина которой определится ординатой $d'c'$, большей ординаты $d'b'$, соответствующей величине силы $P'_{п1}$. Под действием избыточных центробежных сил грузы будут расходиться, пока не вернутся в равновесное положение, соответствующее точке c .

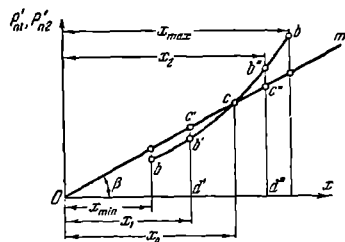


Рис. 570. К исследованию устойчивости регулятора.

Если, наоборот, мы поднимем муфту N , то грузы будут расходиться и центры грузов займут некоторое новое положение, определяемое расстоянием $x_3 > x_0$. Если после этого мы предоставим регулятор самому себе, то он окажется под действием силы $P'_{п1}$, величина которой определится ординатой $d''b''$, большей ординаты $d''c''$, соответствующей величине центробежной силы $P'_{п2}$, и следовательно, грузы начнут сближаться, пока не вернутся в равновесное положение, соответствующее точке c .

Таким образом, равновесие регулятора является *устойчивым*, если характеристика регулятора расположена так, что до точки пересечения c она лежит *ниже* линии центробежной силы, а после точки c она лежит *выше* линии центробежной силы. Так как регулятор должен работать в пределах, определяемых степенью неравномерности δ , равной

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}},$$

то сформулированный выше признак устойчивости регулятора должен выполняться для всех линий центробежных сил между двумя их предельными положениями, определяемыми равенствами

$$P'_{п2 \max} = 2m\omega_{\max}^2 x, \quad P'_{п2 \min} = 2m\omega_{\min}^2 x,$$

в которых $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$ представляют собой максимальное и минимальное значения угловой скорости регулятора, принятые постоянными.

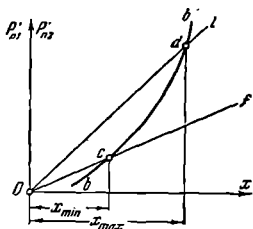


Рис. 571. Характеристика статического регулятора.

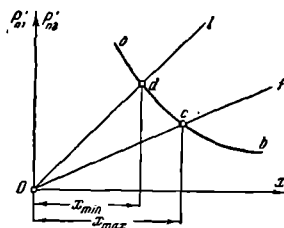


Рис. 572. Характеристика нестатического регулятора.

На рис. 571 нанесена характеристика регулятора bb и линии Ol и Of центробежных сил $P'_{п2 \max}$ и $P'_{п2 \min}$. Для любых линий центробежных сил, проведенных в пределах между линиями Ol и Of , регулятор с характеристикой $b-b$ *устойчив* для равновесных положений от $x_{\min}$ до $x_{\max}$. Регуляторы, для которых выполняются эти условия, называются *статическими*.

На рис. 572 показана характеристика bb , при которой условия устойчивости *не выполняются на всем интервале* от $x_{\min}$ до $x_{\max}$. Такие регуляторы называются *нестатическими*.

Если любому значению x соответствует одна и та же равновесная угловая скорость и равновесная кривая регулятора имеет вид прямой,

параллельной оси ординат, то $\omega_{\max} = \omega_{\min}$ и $\delta = 0$. В этом предельном случае характеристика совпадает с линией центробежной силы, и регулятор находится в динамическом равновесии в любом положении. Такой регулятор называется *астатическим*. Теоретически он может поддерживать постоянную угловую скорость при всех положениях муфты. Однако астатические регуляторы не обладают динамической устойчивостью, и если и применяются, то при введении в схему регулирования дополнительных устройств.

§ 102. Нечувствительность регулятора

1°. В предыдущих параграфах при рассмотрении равновесного состояния регулятора мы не учитывали влияния сил трения на равновесное положение регулятора. Полная приведенная к муфте сила трения F всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения муфты. Следовательно, при подъеме муфты сила F направлена вниз, а при опускании муфты — вверх. Тогда в момент начала движения муфты вверх мы будем иметь, учитывая уравнение (21.11), условие

$$A(\omega_p'')^2 - B - F = 0, \quad (21.26)$$

где ω_p'' — предельная равновесная угловая скорость при подъеме.

Соответственно в момент начала движения муфты вниз получаем:

$$A(\omega_p')^2 - B + F = 0, \quad (21.27)$$

где ω_p' — предельная равновесная угловая скорость при опускании.

Из уравнений (21.26) и (21.27) следует, что

$$(\omega_p'')^2 = \frac{B+F}{A} \quad \text{и} \quad (\omega_p')^2 = \frac{B-F}{A}. \quad (21.28)$$

Так как согласно формуле (21.13) равновесная угловая скорость регулятора при отсутствии трения равна $\omega_p^2 = \frac{B}{A}$, то

$$\omega_p' \leq \omega_p \leq \omega_p''.$$

Таким образом, для каждого значения угловой скорости ω_p и, следовательно, для каждого положения муфты регулятора имеется некоторый интервал изменения угловой скорости, внутри которого положение муфты оказывается неизменным.

2°. Рассмотренное свойство регулятора может быть представлено графически следующим образом. Построим равновесные кривые для значений ω_p , ω_p' и ω_p'' (рис. 573). Область, заключенная между кривыми $z = z(\omega_p')^2$ и $z = z(\omega_p'')^2$, называется *областью нечувствительности регулятора*. В этой области муфта регулятора остается неподвижной.

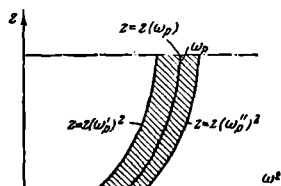


Рис. 573. Диаграмма, характеризующая нечувствительность регулятора.

Мерой нечувствительности регулятора принимается *коэффициент нечувствительности* ϵ , равный

$$\epsilon = \frac{\omega_p'' - \omega_p'}{\omega_p}, \quad (21.29)$$

где

$$\omega_p \approx \frac{\omega_p' + \omega_p''}{2}. \quad (21.30)$$

Коэффициент нечувствительности ϵ может быть приближенно представлен так:

$$\epsilon \approx \frac{(\omega_p'')^2 - (\omega_p')^2}{2\omega_p^2}. \quad (21.31)$$

Подставляя в формулу (21.31) значения для $(\omega_p'')^2$ и $(\omega_p')^2$, получаем:

$$\epsilon = \frac{F}{B}. \quad (21.32)$$

Итак, коэффициент нечувствительности ϵ прямо пропорционален силе трения F .

Из формул (21.29) и (21.30) имеем:

$$\omega_p'' = \omega_p \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right), \quad \omega_p' = \omega_p \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right). \quad (21.33)$$

Приближенно можно считать

$$(\omega_p'')_{\max} = \omega_{\max} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right), \quad (\omega_p')_{\min} = \omega_{\min} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \quad (21.34)$$

и, далее,

$$\omega_p \approx \omega_{\text{ср}}$$

Тогда действительную степень неравномерности δ_d регулятора можно представить так:

$$\delta_d = \frac{\omega_{\max}'' - \omega_{\min}'}{\omega_{\text{ср}}}. \quad (21.35)$$

Подставляя в равенство (21.35) значения $\omega_{\max}''$ и $\omega_{\min}'$ из формул (21.34), получаем:

$$\delta_d = \frac{\omega_{\max} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) - \omega_{\min} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}} + \epsilon = \delta + \epsilon. \quad (21.36)$$

Таким образом, действительная степень неравномерности δ_d равна приближенно сумме степени неравномерности δ , полученной при условии отсутствия трения, и коэффициента нечувствительности ϵ .

§ 103. Уравнения движения звеньев систем автоматического регулирования

1°. Выше были рассмотрены вопросы кинестатики чувствительного элемента регулятора и его статической устойчивости.

В настоящем параграфе рассмотрим вопрос о том, какими уравнениями динамики описываются различные системы автоматического регулирования *). На рис. 563 была показана общая схема системы автоматического регулирования. Из этой схемы следует, что любая система автоматического регулирования состоит из основных элементов (элементы 1, 2, 3 и 4 на рис. 563).

Кроме того, в систему автоматического регулирования, как было указано в § 99, могут быть включены и дополнительные элементы, как сервомотор, катаракт, промежуточные кинематические цепи и т. д.

Очевидно, что динамика автоматической системы в целом определяется динамикой отдельных элементов системы. Эти отдельные элементы системы

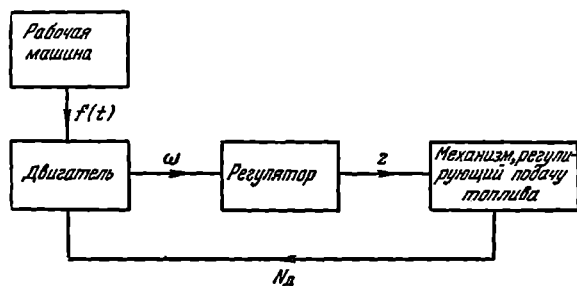


Рис. 574. Принципиальная схема системы регулирования.

автоматического регулирования получили название *звеньев системы автоматического регулирования*. Каждое из этих звеньев имеет свою входную и выходную величины. Например, если мы рассмотрим простейшую систему автоматического регулирования, показанную на рис. 563, то ее схема с входными и выходными величинами будет иметь вид, показанный на рис. 574.

Для теплового двигателя, являющегося объектом регулирования, входной величиной является количество поступающей в него рабочей смеси, обеспечивающей мощность N_d движущих сил, а выходной регулируемой величиной угловая скорость звена приведения машинного агрегата, состоящая из рабочей машины и двигателя. Кроме того, на регулируемый объект поступает со стороны рабочей машины возмущающее воздействие $f(t)$, в общем случае являющееся функцией времени в виде изменения нагрузки на звене приведения, что является следствием изменения режима технологического процесса, выполняемого рабочей машиной.

Для регулятора (рис. 574) входной величиной является угловая скорость ω , а выходной — перемещение z муфты N регулятора (рис. 563). Наконец, для механизма, регулирующего подачу топлива (рис. 574), входная величина есть перемещение z , а выходная — мощность N_d движущих сил.

*) Вопросы динамики систем автоматического регулирования изложены нами по работам следующих авторов: Блох З. Ш., Динамика линейных систем автоматического регулирования машин, М., 1952; Попов Е. П., Автоматическое регулирование и управление, М., изд-во «Наука», 1966; Семенов М. В., Основы теории регулирования силовых машин, Л., 1950.

2°. Рассмотрим двигатель (рис. 575) как одно отдельно взятое звено автоматической системы регулирования. На рис. 576 дана статическая механическая характеристика двигателя (см. § 58) в форме кривой $\omega = \omega(N_d)$ (сплошная кривая *I*). Эта характеристика соответствует номинальному режиму работы двигателя, тому рабочему среднему режиму, на который рассчитана работа двигателя. В этом режиме величину $f(t)$ внешнего возмущающего воздействия принимаем равной нулю, т. е. $f(t) = 0$. Номинальной угловой скорости ω^0 соответствует на этой характеристике некоторая точка *C* и значение

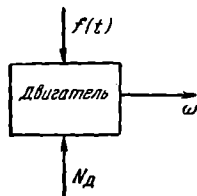


Рис. 575. Звено системы регулирования в виде двигателя.

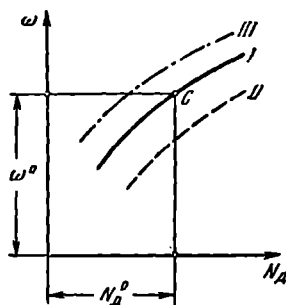


Рис. 576. Механическая характеристика двигателя в виде зависимости угловой скорости его ротора от мощности двигателя.

номинальной мощности N_d^0 . При увеличении мощности N_c сил сопротивления на постоянную величину [при $f(t) = \text{const}$] механическая характеристика расположится ниже кривой *I* (кривая *II*, показанная пунктиром). Она эквидистантна кривой *I*. Соответственно при уменьшении мощности N_c сил сопротивления механическая характеристика расположится выше кривой *I* (кривая *III* показана штрих-пунктиром). Статические механические характе-

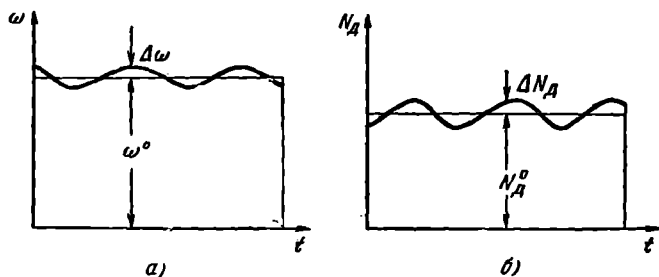


Рис. 577. Характеристика двигателя: а) тахограмма двигателя; б) диаграмма мощности.

ристики обычно криволинейны и потому являются нелинейными. Однако в процессе регулирования механической характеристикой регулируемого объекта пользуются на сравнительно малом участке, лежащем вблизи точки *C* (рис. 576). Действительно, тахограмма двигателя $\omega = \omega(t)$ обычно имеет вид, показанный на рис. 577, а, а диаграмма мощности $N_d = N_d(t)$ — вид, показанный на рис. 577, б. Отклонение $\Delta\omega$ от требуемого значения ω^0 и отклонение ΔN_d от требуемого значения N_d^0 должны быть всегда достаточно малы.

Учитывая малость отклонений $\Delta\omega$ и ΔN_d , обычно для упрощения исследования криволинейный участок механической характеристики заменяют

участком касательной $a-a$ (рис. 578), проведенной в точке C характеристики, построенной для $f(t)=0$. Если теперь принять точку C за начало координат, то мы получим в новых осях зависимость $\Delta\omega = \Delta\omega(\Delta N_d)$ в виде линейной зависимости

$$\Delta\omega = k_0 \Delta N_d, \quad (21.37)$$

где $k_0 = \operatorname{tg} \alpha$.

Коэффициент k_0 называют *крутизной статической характеристики регулируемого объекта*. В рассматриваемом случае k_0 имеет размерность $\left[\frac{\text{рад}}{\text{сек} \cdot \text{вт}} \right]$.

Такое превращение нелинейных зависимостей линейными называется *линеаризацией*. Линеаризация уравнений, описывающих движение всех звеньев или часть звеньев автоматической системы регулирования, является вполне оправданной, так как автоматическая система регулирования всегда базируется на малых отклонениях всех переменных величин в процессе регулирования от их установившихся значений.

3°. Рассмотрим вопрос об уравнениях динамики отдельных звеньев системы автоматического регулирования. Уравнение движения машинного агрегата, состоящего из рабочей машины и двигателя (рис. 574), может быть написано так [см. § 88, формула (19.7)]:

$$M_d - M_c = J_n \frac{d\omega}{dt}, \quad (21.38)$$

где J_n — приведенный момент инерции агрегата, принимаемый нами постоянным, ω — угловая скорость звена приведения, M_d и M_c — приведенные моменты движущих сил и сил сопротивлений.

В системах прямого регулирования положение регулирующего органа определяется координатой z муфты N регулятора (рис. 563). В системах непрямого регулирования — положением поршня 13 сервомотора (рис. 564).

Моменты M_d и M_c принимаем зависящими от угловой скорости ω и координаты z муфты регулятора, т. е. $M_d = M_d(\omega, z)$ и $M_c = M_c(\omega, z)$.

Полагаем, далее,

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega, \quad z = z_0 + \Delta z,$$

где ω_0 и z_0 — угловая скорость и координата муфты в окрестности равновесного состояния, а $\Delta\omega$ и Δz — малые отклонения от равновесного состояния.

Разлагаем функции $M_d = M_d(\omega, z)$ и $M_c = M_c(\omega, z)$ в ряды по степеням малых отклонений $\Delta\omega$ и Δz . Пренебрегая малыми величинами второго и более высоких порядков, получаем:

$$M_d = M_{d0} + \left(\frac{\partial M_d}{\partial z} \right)_0 \Delta z + \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + \quad (21.39)$$

$$M_c = M_{c0} + \left(\frac{\partial M_c}{\partial z} \right)_0 \Delta z + \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + \quad (21.40)$$

Частные производные, входящие в равенства (21.39) и (21.40), определяются по механическим характеристикам, соответствующим $\omega = \omega_0$ и $z = z_0$.

Полученные приближенные выражения (21.39) и (21.40) подставляем в уравнение (21.38)

$$\left(\frac{\partial M_d}{\partial z} - \frac{\partial M_c}{\partial z} \right)_0 \Delta z + \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega} - \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega = J_n \frac{d\omega}{dt}, \quad (21.41)$$

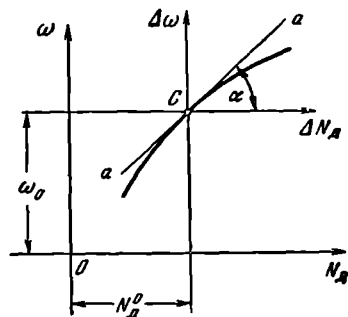


Рис. 578. Приближенное представление механической характеристики двигателя.

где при установившемся режиме работы, если он возможен, $M_{д0} = M_{с0}$. Введем относительные координаты

$$\varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_{ср}} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{\Delta z}{z_{\max}},$$

где $z_{\max}$ — максимальное перемещение муфты регулятора и $\omega_{ср}$ — средняя скорость звена приведения.

Тогда имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= z_{\max} \eta, \quad \Delta\omega = \omega_0 \varphi \approx \omega_{ср} \varphi, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{d(\omega_0 + \Delta\omega)}{dt} = \omega_0 \dot{\varphi} \approx \omega_{ср} \dot{\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (21.42)$$

где $z_{\max}$ — максимальное перемещение муфты регулятора.

Подставляя полученные выражения (21.42) в уравнение (21.41), получаем:

$$\left(\frac{\partial M_d}{\partial z} - \frac{\partial M_c}{\partial z} \right)_0 z_{\max} \eta + \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega} - \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 \omega_{ср} \varphi = J_n \omega_{ср} \dot{\varphi}. \quad (21.43)$$

Уравнение (21.43) является приближенным уравнением движения машинного агрегата, потому что при его выводе мы пренебрегаем вторыми и более высокими степенями малых отклонений $\Delta\omega$ и Δz .

4°. Рассмотрим частные случаи уравнения (21.43). Пусть, как это имеет место в некоторых тепловых и других машинах, момент M_d движущих сил

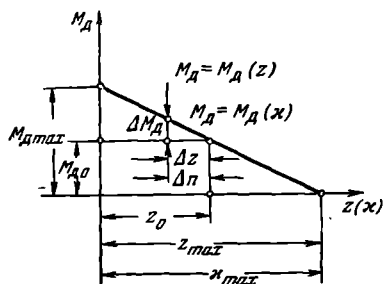


Рис. 579. Механическая характеристика двигателя, представленная в виде зависимости момента от перемещения муфты регулятора.

зависит только от координаты z (см., например, рис. 563), а момент M_c сил сопротивления постоянный, т. е. $M_d = M_d(z)$ и $M_c = \text{const.}$ Этот случай характерен для многих машинных агрегатов, в которые входит, например, тепловой двигатель и рабочая машина с постоянной мощностью сил сопротивления.

Тогда уравнение (21.43) будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial M_d}{\partial z} \right)_0 z_{\max} \eta = J_n \omega_{ср} \dot{\varphi}. \quad (21.44)$$

Пользуясь принципом линеаризации, мы можем механическую характеристику $M_d = M_d(z)$ представить в виде прямой (рис. 579). При $z_{\max}$ регулятор полностью прекращает приток энергии N_d в машинный агрегат, и следовательно, момент M_d движущих сил равен нулю. При $z=0$ энергия N_d , поступающая в двигатель, максимальная и $M_d = M_{d\max}$. Из рис. 579 следует,

что

$$\left(\frac{\partial M_d}{\partial z} \right)_0 = - \frac{\Delta M_d}{\Delta z} = - \frac{M_{d\max}}{z_{\max}}. \quad (21.45)$$

Подставляя выражение (21.45) в уравнение (21.44), получаем:

$$- \frac{M_{d\max}}{z_{\max}} z_{\max} \eta = J_n \omega_{ср} \dot{\varphi},$$

откуда имеем:

$$\frac{J_n \omega_{ср}}{M_{d\max}} \dot{\varphi} + \eta = 0. \quad (21.46)$$

Величина $T_m = J_{п\omega_{ср}}/M_{д\max}$ имеет размерность времени. Назовем ее *временем машинного агрегата*. Тогда окончательно уравнение движения машинного агрегата будет иметь вид

$$T_m \ddot{\varphi} + \eta = 0. \quad (21.47)$$

Время T_m равно времени разгона машинного агрегата. В самом деле, пусть агрегат разгоняется из состояния покоя при отсоединенном регуляторе и без нагрузки под действием максимального момента $M_{д\max}$. Определим время, за которое угловая скорость звена приведения достигнет своего среднего значения $\omega_{ср}$.

Уравнение движения машинного агрегата имеет вид

$$M_{д\max} = J_{п} \frac{d\omega}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение при начальных условиях $t=0$ и $\omega=0$, получаем:

$$t = T_m = \frac{J_{п\omega_{ср}}}{M_{д\max}}.$$

Таким образом, время T_m машины есть время ее разгона.

В случае непрямого регулирования момент M_d движущих сил зависит от перемещения d поршня 13 сервомотора (§ 99, рис. 564). Если мы примем зависимость $M_d = M_d(n)$ изменяющейся по тому же закону, как и зависимость $M_d = M_d(z)$ (рис. 579), то, обозначив

$$\mu = \frac{\Delta n}{n_{\max}},$$

где $n_{\max}$ — максимальное перемещение поршня сервомотора, получим уравнение движения машинного агрегата при $M_c = \text{const}$ в следующем виде:

$$T_m \ddot{\varphi} + \mu = 0. \quad (21.48)$$

5°. Рассмотрим тот случай, когда момент M_d движущих сил является функцией перемещения z муфты регулятора, а момент M_c сил сопротивления является функцией угловой скорости ω , т. е. при $M_d = M_d(z)$ и $M_c = M_c(\omega)$. Этот случай характерен для машинных агрегатов, состоящих, например, из теплового двигателя и турбокомпрессора или центрифуги.

В этом случае уравнение (21.43) принимает вид

$$\left(\frac{\partial M_d}{\partial z}\right)_0 z_{\max} \eta - \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 \omega_{ср} \dot{\varphi} = J_{п\omega_{ср}} \ddot{\varphi}. \quad (21.49)$$

Пусть зависимость $M_d = M_d(z)$ в линеаризованной форме представлена на рис. 579, а зависимость $M_c = M_c(\omega)$ на рис. 580.

Производная $(\partial M_d / \partial z)_0$ согласно равенству (21.45) равна

$$\left(\frac{\partial M_d}{\partial z}\right)_0 = -\frac{M_{д\max}}{z_{\max}}. \quad (21.50)$$

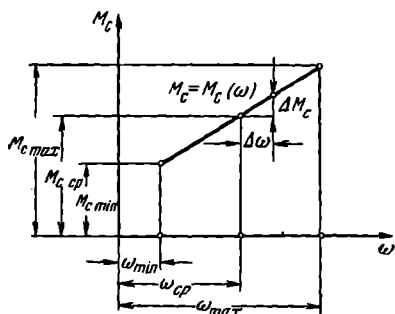


Рис. 580. Механическая характеристика в виде зависимости момента сопротивления рабочей машины от угловой скорости.

Производная $(\partial M_c / \partial \omega)_0$ согласно рис. 580 равна

$$\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 = \frac{\Delta M_c}{\Delta \omega} = \frac{M_{c \max} - M_{c \min}}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} = \frac{M_{c \max} - M_{c \min}}{\omega_{\text{ср}} \delta}. \quad (21.51)$$

Здесь согласно формуле (20.6) § 93

$$\omega_{\max} - \omega_{\min} = \omega_{\text{ср}} \delta,$$

где δ — коэффициент неравномерности движения. Подставляя значения (21.50) для производных в уравнение (21.49), имеем:

$$-M_{\text{д max}} \eta - \frac{M_{c \max} - M_{c \min}}{\delta} \varphi = J_{\text{п}} \omega_{\text{ср}} \ddot{\varphi}. \quad (21.52)$$

Разделим все члены уравнения (21.52) на $M_{\text{д max}}$. Тогда, учитывая, что величина $\frac{J_{\text{п}} \omega_{\text{ср}}}{M_{\text{д max}}} = T_{\text{м}}$, является временем машинного агрегата, получаем:

$$T_{\text{м}} \ddot{\varphi} + \theta_{\text{с}} \varphi + \eta = 0, \quad (21.53)$$

где

$$\theta_{\text{с}} = \frac{M_{c \max} - M_{c \min}}{\delta M_{\text{д max}}}.$$

Величина $\theta_{\text{с}}$ называется *коэффициентом саморегулирования машинного агрегата*.

Чтобы выяснить значение коэффициента $\theta_{\text{с}}$, рассмотрим уравнение движения машинного агрегата с момента выхода его из состояния покоя. Пусть при этом агрегат работает без регулятора и находится под действием некоторого постоянного момента $M_{\text{д}}$ движущих сил, большего момента $M_{\text{с0}}$ сил сопротивлений при равномерном режиме. Имеем:

$$M_{\text{д}} - M_{\text{с0}} = J_{\text{п}} \frac{d\omega}{dt},$$

или так как по (21.42) $d\omega/dt \approx \omega_{\text{ср}} \dot{\varphi}$ [см. (21.42)], то

$$\frac{M_{\text{д}} - M_{\text{с0}}}{M_{\text{д max}}} = \frac{J_{\text{п}} \omega_{\text{ср}}}{M_{\text{д max}}} \dot{\varphi} = T_{\text{м}} \dot{\varphi}.$$

Обозначим

$$\frac{M_{\text{д}} - M_{\text{с0}}}{M_{\text{д max}}} = \lambda.$$

Тогда получаем:

$$T_{\text{м}} \dot{\varphi} - \lambda = 0. \quad (21.54)$$

Интегрируя уравнение (21.54) при начальных условиях $t=0$ и $\omega=0$, получаем:

$$\varphi = \frac{\lambda}{T_{\text{м}}} t. \quad (21.55)$$

Таким образом, отклонение угловой скорости звена приведения такого машинного агрегата при рассматриваемой нагрузке может с течением вре-

мени достичь любых значений, и такой машинный агрегат не может работать без регулятора при изменении нагрузки.

Если теперь при тех же предположениях рассмотреть движение машинного агрегата, описываемое уравнением (21.53), то после интегрирования, при тех же начальных условиях, получим:

$$\varphi = \frac{\lambda}{\theta_c} (1 - e^{-\theta_c t / T_m}). \quad (21.56)$$

Из формулы (21.56) следует, что отклонение угловой скорости $\dot{\varphi}$ стремится к некоторой постоянной величине $\varphi_\infty = \lambda / \theta_c$. Машинные агрегаты, работающие в соответствии с уравнением (21.53), обладают свойством саморегулирования, и такие агрегаты могут работать устойчиво и без регулятора.

6°. Переходим к рассмотрению случая, когда момент M_d движущих сил будет одновременно функцией угловой скорости ω и перемещения z муфты регулятора, а момент M_c сил сопротивления будет функцией угловой скорости ω , т. е. $M_d = M_d(\omega, z)$ и $M_c = M_c(\omega)$. Пусть зависимость $M_d = M_d(\omega)$ в линеаризованном виде дана на рис. 581, зависимость $M_d = M_d(z)$ на рис. 579.

Для этого случая общее уравнение движения (21.43) машинного агрегата имеет вид

$$\left(\frac{\partial M_d}{\partial z} \right)_0 z_{\max} \ddot{\varphi} + \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega} - \frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 \omega_{\text{ср}} \dot{\varphi} = J_n \omega_{\text{ср}} \ddot{\varphi}. \quad (21.57)$$

Подставляя в уравнение (21.57) значение производной из формулы (21.45), получаем:

$$-M_{d \max} \ddot{\varphi} - \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega} - \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_0 \omega_{\text{ср}} \dot{\varphi} = J_n \omega_{\text{ср}} \ddot{\varphi}. \quad (21.58)$$

Разделив все члены уравнения (21.58) на $M_{d \max}$ и приняв во внимание что $J_n \omega_{\text{ср}} / M_{d \max} = T_m$, получим уравнение того же вида, как и уравнение (21.53):

$$T_m \ddot{\varphi} + \theta \dot{\varphi} + \eta = 0, \quad (21.59)$$

но в котором коэффициент саморегулирования θ равен

$$\theta = \frac{\omega_{\text{ср}}}{M_{d \max}} \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega} - \frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_0. \quad (21.60)$$

Для принятых механических характеристик на рис. 580 и рис. 581

$$\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_0 < 0,$$

и, таким образом, коэффициент саморегулирования θ положителен.

Коэффициент θ может быть представлен как сумма двух коэффициентов θ_c и θ_d . В самом деле, напомним уравнение (21.60) следующим образом:

$$\theta = \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\omega_{\text{ср}}}{M_{d \max}} - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\omega_{\text{ср}}}{M_{d \max}}. \quad (21.61)$$

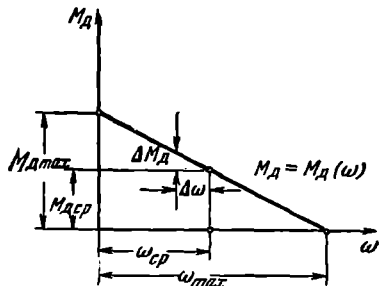


Рис. 581. Механическая характеристика двигателя в виде зависимости момента ротора от угловой скорости.

Но согласно равенству (21.51) производная $\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0$ равна

$$\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 = \frac{M_{c \max} - M_{c \min}}{\omega_{cp} \delta}. \quad (21.62)$$

Из механической характеристики (рис. 581) следует, что производная $(\partial M_d / \partial \omega)_0$ равна

$$\left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0 = -\frac{M_{d \max}}{\omega_{\max}}. \quad (21.63)$$

Подставляя в равенство (21.61) значения производных из равенств (21.62) и (21.63), получаем:

$$\theta = \frac{M_{c \max} - M_{c \min}}{\delta M_{d \max}} + \frac{\omega_{cp}}{\omega_{\max}}. \quad (21.64)$$

Первый член правой части равенства (21.64) представляет собой коэффициент саморегулирования θ_c , входящий в уравнение (21.53). Второй член равенства обозначаем через θ_d . Следовательно, имеем:

$$\theta = \theta_c + \theta_d. \quad (21.65)$$

Коэффициент θ_d может быть приближенно выражен через коэффициент неравномерности движения δ . Согласно формуле (20.14) имеем:

$$\omega_{\max} = \omega_{cp} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right).$$

Следовательно, θ_d равен

$$\theta_d = \frac{\omega_{cp}}{\omega_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}} = \frac{2}{2 + \delta}. \quad (21.66)$$

Таким образом, коэффициенты θ_c и θ_d для рассматриваемого режима являются положительными. Очевидно, что при других механических характеристиках этот коэффициент может оказаться и отрицательным.

Случай, когда моменты M_d и M_c зависят от угловой скорости, т. е. $M_d = M_d(\omega)$ и $M_c = M_c(\omega)$, мы не рассматриваем, так как в § 98,3° (рис. 561) было показано, что при обыкновенном характере механических характеристик машинный агрегат всегда обладает свойством саморегулирования.

7°. Переходим к рассмотрению уравнений движения следующего звена системы автоматического регулирования (рис. 574). Это — чувствительный элемент-регулятор, входная величина для которого угловая скорость ω , а выходная — перемещение муфты z .

На рис. 582 дана структурная схема регулятора с катарактом. Для составления уравнения движения приводим все массы звеньев регулятора, звеньев кинематической цепи, управляющих заслонкой (рис. 563), а в случае непрямого регулирования (рис. 564—565) также звеньев сервомотора и катаракта к муфте N (рис. 582). Приведение масс производим по методу, изложенному в § 87. Полученная приведенная масса m_n , очевидно, является функцией координаты z , т. е. $m_n = m_n(z)$. В теории автоматического регулирования приведенная масса m_n обычно принимается постоянной и равной

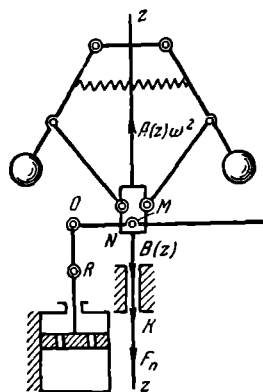


Рис. 582. Схема центробежного регулятора с катарактом.

приведенной массе в положении, соответствующем равновесному значению z_0 муфты N .

Как и при составлении уравнений движения машинного агрегата, будем рассматривать малые отклонения Δz муфты и малые отклонения $\Delta\omega$ угловой скорости. При этом будем считать, что равновесная угловая скорость $\omega_0 \approx \omega_{\text{ср}}$. Согласно уравнению (21.12) к муфте N приложена приведенная сила $B(z)$, эквивалентная весу шаров, муфты и усилию пружины, и сила $A(z)\omega^2$, эквивалентная центробежным силам инерции шаров. Кроме того, к муфте приложена приведенная сила трения F_n от сопротивления трения в кинематических парах и приведенная сила K сопротивления катаракта. Силу K будем считать независимой от передаточного отношения кинематической цепи MOR (рис. 582).

Уравнение движения регулятора имеет следующий вид:

$$A(z)\omega^2 - B(z) - K \pm F_n = m_n \ddot{z}, \quad (21.67)$$

где $\ddot{z} = (z_0 + \Delta z)'' = \ddot{\Delta z}$.

В уравнении (21.67) у силы трения F_n стоят знаки плюс и минус, так как направление этой силы всегда противоположно вектору φ_N скорости муфты. Разлагая величины $B(z)$ и $A(z)$ в ряды по степеням малого отклонения Δz и пренебрегая малыми величинами второго и более высоких порядков, получаем:

$$B(z) = B(z_0 + \Delta z) \approx B_0 + \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)_0 \Delta z \quad (21.68)$$

и

$$A(z) = A(z_0 + \Delta z) \approx A_0 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0 \Delta z, \quad (21.69)$$

где A_0 , B_0 , $(\partial A/\partial z)_0$ и $(\partial B/\partial z)_0$ — значения A и B в новом равновесном состоянии при $z = z_0$. Величина силы $A(z)\omega^2$ будет теперь равна

$$A(z)\omega^2 = \left[A_0 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0 \Delta z \right] (\omega_0 + \Delta\omega)^2 \approx A_0\omega_0^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0 \omega_0^2 \Delta z + 2A_0\omega_0\Delta\omega. \quad (21.70)$$

Подставляя в уравнение (21.67) приближенные значения для сил $A(z)\omega^2$ и $B(z)$ и учитывая, что в каждом новом равновесном состоянии

$$A_0\omega_0^2 - B_0 = 0, \quad (21.71)$$

получаем:

$$-\left[\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0 \omega_0^2\right] \Delta z + 2A_0\omega_0\Delta\omega - K \pm F_n = m_n \ddot{\Delta z}. \quad (21.72)$$

Приведенная сила K катаракта обычно принимается пропорциональной скорости муфты

$$K = \kappa \dot{z} = \kappa (z_0 + \Delta z)' = \kappa \dot{\Delta z}, \quad (21.73)$$

где κ — коэффициент пропорциональности.

Выражение, стоящее в квадратных скобках уравнения (21.72), можно, учитывая уравнение (21.71), представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0 \omega_0^2 &= \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0 \frac{B_0}{A_0} = \frac{A_0 \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)_0 - B_0 \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0}{A_0} = \\ &= A_0 \left[\frac{A_0 \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)_0 - B_0 \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_0}{A_0^2} \right] = A_0 \left(\frac{\partial \frac{B}{A}}{\partial z} \right)_0 = A_0 \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial z} \right)_0, \end{aligned} \quad (21.74)$$

так как из уравнения (21.11) следует, что

$$\omega^2 = \frac{B}{A}.$$

Сила трения F согласно соотношению (21.32) равна

$$F = \varepsilon B_0, \quad (21.75)$$

где ε — коэффициент нечувствительности. Подставляя выражения (21.73), (21.74) и (21.75) в уравнение (21.72), получаем:

$$-A_0 \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial z} \right)_0 \Delta z + 2A_0 \omega_0 \Delta \omega - \kappa \Delta \dot{z} \pm \varepsilon B_0 = m_n \Delta \ddot{z}. \quad (21.76)$$

Как и при составлении уравнения движения машинного агрегата, вводим относительные величины

$$\eta = \frac{\Delta z}{z_{\max}} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \approx \frac{\Delta \omega}{\omega_{\text{ср}}}$$

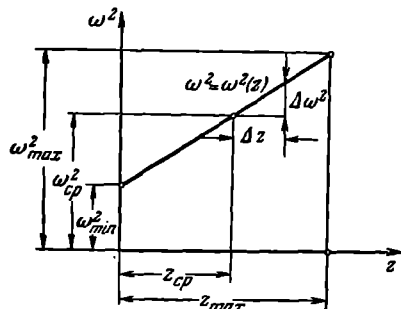
и принимаем

$$\omega_0 \approx \omega_{\text{ср}}.$$

Тогда уравнение (21.76) принимает вид

$$\begin{aligned} & -A_0 z_{\max} \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial z} \right)_0 \eta + \\ & + 2A_0 \omega_{\text{ср}}^2 \varphi - \kappa z_{\max} \dot{\eta} \pm \varepsilon B_0 = \\ & = m_n z_{\max} \ddot{\eta}. \end{aligned} \quad (21.77)$$

Рис. 583. График квадратичной зависимости угловой скорости от перемещения муфты регулятора.



Уравнение (21.77) можно теперь представить в следующей форме:

$$m_n z_{\max} \ddot{\eta} + \kappa z_{\max} \dot{\eta} + A_0 z_{\max} \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial z} \right)_0 \eta = 2A_0 \omega_{\text{ср}}^2 \varphi \pm \varepsilon B_0. \quad (21.78)$$

Пользуясь принципом линеаризации, равновесную кривую $\omega^2 = \omega^2(z)$ заменяем прямой (рис. 583). Тогда производная $(\partial \omega^2 / \partial z)_0$ будет равна

$$\left(\frac{\partial \omega^2}{\partial z} \right)_0 = \frac{\Delta \omega^2}{\Delta z} = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{z_{\max}} = \frac{2\omega_{\text{ср}}^2 \delta}{z_{\max}}, \quad (21.79)$$

так как согласно равенству (20.11)

$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = 2\omega_{\text{ср}}^2 \delta.$$

Подставляем выражение (21.79) в уравнение (21.78). Имеем:

$$m_n z_{\max} \ddot{\eta} + \kappa z_{\max} \dot{\eta} + 2A_0 \omega_{\text{ср}}^2 \delta \eta = 2A_0 \omega_{\text{ср}}^2 \varphi \pm \varepsilon B_0.$$

Разделим левую и правую части этого уравнения на $2B_0 = 2A_0 \omega_{\text{ср}}^2$; имеем тогда

$$\frac{m_n z_{\max}}{2B_0} \ddot{\eta} + \frac{\kappa z_{\max}}{2B_0} \dot{\eta} + \delta \eta = \varphi \pm \frac{\varepsilon}{2}. \quad (21.80)$$

Введем обозначения

$$T_p = \sqrt{\frac{m_{п.з. \max}}{2B_0}} \quad \text{и} \quad T_k = \frac{z_{\max}}{2B_0}.$$

Коэффициенты T_p и T_k имеют размерность времени.

При принятых обозначениях уравнение (21.80) напомним так:

$$T_p^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta \eta = \varphi \pm \frac{\varepsilon}{2}. \quad (21.81)$$

Уравнение (21.81) является общим уравнением чувствительного элемента регулятора. Если при исследовании чувствительного элемента можно пренебречь влиянием сухого трения, то коэффициент ε будет равен нулю и мы получим *абсолютно чувствительный элемент*, уравнение движения которого

$$T_p^2 \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta \eta = \varphi. \quad (21.82)$$

8°. В случае непрямого регулирования в систему автоматического регулирования входит сервомотор (см. рис. 564). Рассмотрим, как может быть написано уравнение движения сервомотора с жесткой связью. Если муфта N регулятора (рис. 564) переместится вверх на величину Δz , то поршень 13 сервомотора должен переместиться также вверх на величину Δm , ибо регулирующий орган (заслонка 4) должен уменьшить поступление мощности N_d движущих сил. Золотник 5 сервомотора переместится также вверх на величину $s_1 = \Delta z \frac{OR}{OM}$, где OR и OM — плечи рычага 15 . Но при подъеме поршня 13 на Δm золотник 5 опустится на величину $s_2 = \Delta m \frac{MR}{OM}$. Следовательно, полное перемещение Δs золотника будет равно

$$\Delta s = s_1 - s_2 = \Delta z \frac{OR}{OM} - \Delta m \frac{MR}{OM}. \quad (21.83)$$

При неподвижной муфте отношение полного хода золотника $s_{\max}$ к полному ходу сервомотора $m_{\max}$ равно

$$\frac{s_{\max}}{m_{\max}} = \frac{MR}{OM}. \quad (21.84)$$

Точно так же отношение полного хода $s_{\max}$ золотника к полному ходу $z_{\max}$ муфты равно

$$\frac{s_{\max}}{z_{\max}} = \frac{OR}{OM}. \quad (21.85)$$

Подставляя выражение (21.84) и (21.85) в уравнение (21.83), получаем:

$$\Delta s = \Delta z \frac{s_{\max}}{z_{\max}} - \Delta m \frac{s_{\max}}{m_{\max}}. \quad (21.86)$$

Из равенства (21.86) получаем:

$$\frac{\Delta s}{s_{\max}} = \frac{\Delta z}{z_{\max}} - \frac{\Delta m}{m_{\max}}. \quad (21.87)$$

Обозначим:

$$\frac{\Delta s}{s_{\max}} = \sigma, \quad \frac{\Delta z}{z_{\max}} = \eta \quad \text{и} \quad \frac{\Delta m}{m_{\max}} = \mu;$$

тогда равенство (21.87) принимает вид

$$\frac{\Delta s}{s_{\max}} = \sigma = \eta - \mu. \quad (21.88)$$

Скорость v_c поршня сервомотора равна

$$v_c = \frac{d(\Delta m)}{dt} = m_{\max} \frac{d\mu}{dt}. \quad (21.89)$$

Но из равенства (21.88) следует:

$$\frac{v_c}{v_{c\max}} = \frac{\Delta s}{s_{\max}} = \eta - \mu, \quad (21.90)$$

где $v_{c\max}$ — максимальная скорость поршня сервомотора при полном открытии отверстия золотника. Из равенства (21.90) получаем:

$$v_c = v_{c\max} (\eta - \mu). \quad (21.91)$$

Из уравнений (21.89) и (21.91) теперь имеем:

$$\frac{m_{\max}}{v_{c\max}} \frac{d\mu}{dt} = \eta - \mu. \quad (21.92)$$

Величина $T_c = m_{\max}/v_{c\max}$ имеет размерность времени и представляет собой время, за которое поршень сервомотора проходит путь $m_{\max}$, двигаясь с постоянной скоростью $v_{c\max}$.

Окончательное приближенное уравнение движения поршня сервомотора с жесткой обратной связью будет:

$$T_c \dot{\mu} = \eta - \mu \quad (21.93)$$

или

$$T_c \dot{\mu} + \mu - \eta = 0. \quad (21.94)$$

Если обратная связь отсутствует, то $\sigma = \eta$, и мы получаем уравнение

$$T_c \dot{\mu} - \eta = 0.$$

9°. Выше мы рассмотрели вопрос об уравнениях движения отдельных звеньев системы автоматического регулирования. Решение задач динамики различных систем в зависимости от их структурных схем сводится к совместному решению дифференциальных уравнений, каждое из которых является уравнением движения соответствующего звена, входящего в общую систему.

Например, если в регулируемом машинном агрегате момент M_d движущих сил зависит только от координаты z , а момент M_c сил сопротивления постоянен, то уравнение движения этого агрегата есть уравнение (21.47)

$$T_m \ddot{\phi} + \eta = 0. \quad (21.95)$$

Если, далее, по схеме автоматического регулирования в качестве чувствительного элемента выбран абсолютно чувствительный элемент с катарактом, то уравнением такого элемента является уравнение (21.82)

$$T_p \ddot{\eta} + T_k \dot{\eta} + \delta \eta = \varphi. \quad (21.96)$$

Таким образом, в случае прямого регулирования динамическое поведение системы автоматического регулирования описывается системой двух дифференциальных уравнений (21.95) и (21.96). Если система имеет не прямое

регулирование и жесткую обратную связь, то к уравнениям (21.95) и (21.96) надо добавить уравнение движения сервомотора (21.94)

$$T_{с\mu} \ddot{\mu} + \mu - \eta = 0. \quad (21.97)$$

Таким образом, при непрямом регулировании динамическое поведение автоматической системы регулирования описывается системой трех дифференциальных уравнений (21.95), (21.97) и (21.96). Аналогично могут быть получены и другие системы уравнений для различных сочетаний звеньев.

§ 104. Динамическая устойчивость систем автоматического регулирования

1°. Автоматически регулируемая система считается *динамически устойчивой*, если при нарушении ее равновесия малые начальные отклонения параметров системы регулирования равновесного значения стремятся с течением времени к нулю. Если же с течением времени эти отклонения возрастают, то такая регулируемая система называется *динамически неустойчивой*.

Рассмотрим некоторые простейшие случаи автоматически регулируемых систем с точки зрения их динамической устойчивости.

Пусть задана система, состоящая из машинного агрегата, движение которого описывается уравнением (21.47):

$$T_{\mu} \ddot{\phi} + \eta = 0, \quad (21.98)$$

регулятор без катаракта, у которого приведенной массой m_p можно пренебречь ввиду ее малости. Такой регулятор называется *идеальным*. Уравнение движения идеального регулятора получается, если в уравнение (21.82) положить $T_p = 0$ и $T_k = 0$. Имеем:

$$\delta\eta = \varphi. \quad (21.99)$$

Исключая из уравнений (21.98) и (21.99) параметр η , получаем уравнение регулируемой системы

$$T_{\mu} \delta\ddot{\phi} + \varphi = 0. \quad (21.100)$$

Решение линейного однородного уравнения (21.100) такое:

$$\varphi = Ce^{-t/T_{\mu}} \delta \quad (21.101)$$

Из формулы (21.101) следует, что если t стремится к бесконечности, то φ стремится к нулю. Зависимость $\varphi = \varphi(t)$, описываемую равенством (21.101), называют *переходным процессом* автоматической регулируемой системы. Эта зависимость схематически показана на рис. 584.

2°. Рассмотрим автоматическую систему регулирования непрямого действия с идеальным регулятором. Тогда к уравнениям (21.48) и (21.99) надо присоединить еще уравнение (21.93) для сервомотора. Получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$T_{\mu} \ddot{\phi} + \mu = 0, \quad \delta\eta = \varphi, \quad T_{с\mu} \ddot{\mu} = \eta - \mu. \quad (21.102)$$

Исключаем из системы уравнений (21.102) параметры μ и η . Получаем уравнение системы регулирования в форме линейного однородного уравнения

$$T_{с} T_{\mu} \delta\ddot{\phi} + T_{\mu} \delta\dot{\phi} + \varphi = 0. \quad (21.103)$$

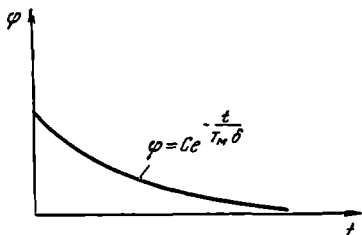


Рис. 584. График зависимости приращения угловой скорости звена приведения машинного агрегата от времени.

Характеристическое уравнение для уравнения (21.103) имеет вид

$$T_c T_m \delta p^2 + T_m \delta p + 1 = 0. \quad (21.104)$$

Из уравнения (21.104) имеем:

$$p = \frac{-T_m \delta \pm \sqrt{T_m^2 \delta^2 - 4 T_c T_m \delta}}{2 T_c T_m \delta}. \quad (21.105)$$

Если в формуле (21.105) $T_m \delta > 4 T_c$, то оба корня характеристического уравнения (21.104) — действительные отрицательные числа, т. е. $p = -p_1$ и $p = -p_2$ ($p_1 > 0$ и $p_2 > 0$).

Общее решение дифференциального уравнения (21.103) такое:

$$\varphi = C_1 e^{-p_1 t} + C_2 e^{-p_2 t}, \quad (21.106)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Если время t стремится к бесконечности, то φ стремится к нулю. Таким образом, такая система устойчива.

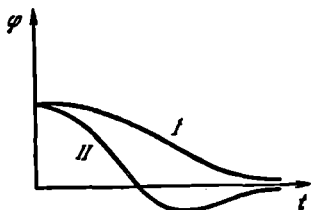


Рис. 585. Характеристика аperiodического переходного процесса автоматического регулирования.

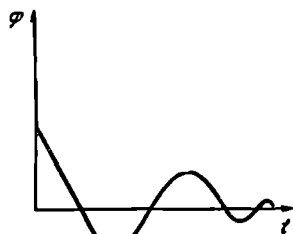


Рис. 586. Характеристика колебательного переходного процесса системы автоматического регулирования.

Схематически зависимость $\varphi = \varphi(t)$ может быть представлена в виде кривой I или кривой II (рис. 585). Кривая I соответствует переходному процессу без колебаний. Такие переходные процессы называются *аperiodическими устойчивыми*.

Если $T_m \delta < 4 T_c$, то оба корня p_1 и p_2 характеристического уравнения комплексные и сопряженные и общее решение дифференциального уравнения (21.103) получается таким:

$$\varphi = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \quad (21.107)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а $\alpha > 0$ — действительная часть корня и $\beta > 0$ — его мнимая часть. Переходной процесс, описываемый формулой (21.107), получается также устойчивым, но колебательным. Схематическая зависимость $\varphi = \varphi(t)$, соответствующая *колебательной устойчивости*, показана на рис. 586.

Мы не будем рассматривать более сложные системы автоматического регулирования, так как этот вопрос относится к общей теории регулирования и излагается в специальных курсах, в том числе и в тех, на которые мы делаем ссылку в § 103. В указанных курсах излагаются и общие критерии устойчивости, называемые критериями Рауса — Гурвица и Михайлова.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТИПОВЫХ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА XXII

ВВЕДЕНИЕ В СИНТЕЗ ПЛОСКИХ ТРЕХЗВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 105. Основные задачи проектирования механизмов

1°. Проектирование механизмов представляет собой сложную комплексную проблему, решение которой может быть разбито на несколько самостоятельных этапов. Первым этапом проектирования является установление основной кинематической схемы механизма, которая обеспечивала бы требуемый вид и закон движения. Вторым этапом проектирования является разработка конструктивных форм механизма, обеспечивающих его прочность, долговечность, высокий коэффициент полезного действия и т. д. Третьим этапом проектирования является разработка технологических и технико-экономических показателей проектируемого механизма, определяемых эксплуатацией в производстве, ремонтом и т. д.

В теории механизмов в основном излагаются методы, с помощью которых может быть разрешен первый этап проектирования — разработка кинематических схем механизмов, воспроизводящих требуемый закон движения. При этом, конечно, учитываются и некоторые вопросы, связанные со вторым и третьим этапами проектирования, как, например, наличие у механизма необходимого коэффициента полезного действия, возможность изготовления его деталей на современном станочном оборудовании, возможность сборки механизма и т. д.

В дальнейшем при изложении данного раздела курса мы будем под проектированием механизмов понимать проектирование их *кинематических схем* с учетом некоторых из вышеуказанных дополнительных условий. Раздел теории механизмов, посвященный методам проектирования по заданным кинематическим условиям схем механизмов,

получил название *синтеза механизмов*. Основной задачей синтеза механизмов является воспроизведение заданного движения одного или нескольких звеньев путем непосредственного их воздействия друг на друга или путем введения между ними промежуточных звеньев. Как в первом, так и во втором случае решение этой задачи сводится к проектированию кинематической цепи заданного движения, т. е. механизма.

2°. При решении задач синтеза должны быть приняты во внимание все условия, обеспечивающие осуществление требуемого движения. Такими условиями в первую очередь являются следующие: правильная структура проектируемого механизма, кинематическая точность осуществляемого движения, возможность создавать проектируемым механизмом заданное движение с точки зрения динамики и, наконец, условие, чтобы размеры звеньев проектируемого механизма допускали воспроизведение заданного движения. В настоящей главе мы остановимся на общем решении основных задач синтеза механизмов и покажем, как могут быть при этом учтены вышеуказанные структурные, кинематические, динамические и метрические условия.

Основными задачами синтеза механизмов, имеющими особенно важное значение в технике, являются следующие:

1) преобразование *вращательного* движения вокруг одной оси *во вращательное* движение вокруг другой оси;

2) преобразование *вращательного* движения вокруг одной оси *в поступательное* движение вдоль некоторой заданной прямой, и наоборот;

3) преобразование *поступательного* движения вдоль одной заданной прямой в поступательное движение вдоль другой заданной прямой и

4) воспроизведение одной из точек звеньев механизма требуемой траектории.

При решении первых трех задач обычно задаются требуемые законы движения тех звеньев, между которыми осуществляется передача движения в виде заданных в функции времени линейных и угловых перемещений или линейных и угловых скоростей.

При решении четвертой задачи задается требуемая траектория аналитически, в виде уравнения, или графически отдельными точками, лежащими на траектории.

Кроме того, как было упомянуто выше, указываются желательные конструктивные формы механизмов, которые должны осуществлять заданные движения, и некоторые условия динамического характера, влияющие на к. п. д. механизма, на устойчивость его движения, на прочность деталей и т. д.

Обычно решение вышеуказанных задач синтеза может быть сделано с помощью механизмов различной структуры, некоторые из которых имеют только низшие кинематические пары, а в состав других входят и низшие и высшие кинематические пары.

Практически оказывается, что решение задач о воспроизведении заданных форм движения с помощью механизмов, в состав которых входят низшие и высшие пары, является более простым, чем воспроизведение тех же форм движения с помощью механизмов, в состав которых входят только низшие пары. Это объясняется в первую очередь тем, что высшие пары обладают большим разнообразием своих видов, в то время как низшие пары, например, в плоских механизмах представлены только двумя видами: парой поступательной и парой вращательной.

Вот почему в громадном большинстве случаев в технике теоретически точное воспроизведение заданных форм движения осуществляется механизмами, в состав которых входят и высшие и низшие пары, а механизмами, в состав которых входят только низшие пары, осуществляется приближенное воспроизведение заданных форм движения.

Поэтому в зависимости от того, какие требования ставит конструктор при проектировании механизма, он выбирает ту или иную кинематическую схему механизма.

3°. В данном отделе курса мы рассмотрим синтез плоских механизмов и некоторые примеры синтеза пространственных механизмов.

Как это было показано в главе пятой (§ 17,2°), элементы высших пар плоских механизмов могут быть или центроидами в относительном движении, или взаимогнбаемыми кривыми. В первом случае элементы высших пар перекачиваются без скольжения, во втором случае они перекачиваются со скольжением. Таким образом, если в состав проектируемого механизма входят высшие пары, то проектирование их элементов сводится или к проектированию *центроид в относительном движении*, или к проектированию *взаимогнбаемых кривых*. Механизмы, у которых элементы высших пар являются центроидами, называются *центроидными*. Механизмы, у которых элементы высших пар являются взаимогнбаемыми кривыми, в зависимости от их конструктивного оформления называются *кулачковыми* или *зубчатыми механизмами*.

Если в состав механизма входят только низшие пары, то такие механизмы в зависимости от их конструктивного оформления называются *рычажными*, *кулисными*, *клиновыми* и т. д. В настоящей главе рассмотрим некоторые общие методы проектирования механизмов для воспроизведения заданных законов движения.

§ 106. Синтез трехзвенных механизмов с центроидной парой

1°. Простейшим механизмом для преобразования вращательного движения вокруг одной оси во вращательное движение вокруг другой оси является трехзвенный центроидный механизм (рис. 587), образованный двумя вращательными и одной центроидной парами.

Рассмотрим, в какой форме может быть задано движение подвижных звеньев 2 и 3 этого механизма.

Пусть ведущим звеном будет звено 2, а ведомым звено 3. Если текущие углы поворота звеньев 2 и 3 относительно неподвижного звена 1 обозначить соответственно через φ_2 и φ_3 , то законы движения звеньев 2 и 3 в общей форме могут быть записаны в виде следующих равенств:

$$\varphi_2 = \varphi_2(t), \quad \varphi_3 = \varphi_3(t). \quad (22.1)$$

Исключая из равенств (22.1) время t , получаем:

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2). \quad (22.2)$$

Рис. 587. Схема центрального механизма.

Зависимость (22.2) будем называть *функцией положения*, так как она определяет положение ведомого звена 3 в зависимости от положения ведущего звена 2. Дифференцируя равенство (22.2) по углу поворота φ_2 , получаем:

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \varphi'_3(\varphi_2). \quad (22.3)$$

Далее, имеем:

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \frac{\frac{d\varphi_3}{dt}}{\frac{d\varphi_2}{dt}} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = i_{32},$$

где ω_2 и ω_3 — угловые скорости звеньев 2 и 3 относительно неподвижного звена 1 и i_{32} — передаточное отношение звеньев 2 и 3. Тогда равенство (22.3) окончательно примет такой вид:

$$i_{32} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \varphi'_3(\varphi_2). \quad (22.4)$$

Зависимость (22.4) будем называть *функцией передаточного отношения*. Соответственно величину

$$i_{32} = \frac{1}{i_{23}} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_3} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{1}{\varphi'_3(\varphi_2)} \quad (22.5)$$

будем называть *функцией передаточного числа*. Функция положения (22.2) является *геометрической характеристикой* механизма, так как она не включает в себя параметр времени. Функция передаточного отношения (22.4) или функция передаточного числа (22.5) представляет собой также геометрическую характеристику механизма, но записанную в дифференциальной форме. Общая связь между ними может быть представлена как в дифференциальной форме в виде зависимости (22.3), так и в интегральной форме в таком виде:

$$\varphi_3 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} \varphi'_3(\varphi_2) d\varphi_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} i_{32} d\varphi_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} \frac{1}{i_{23}} d\varphi_2, \quad (22.6)$$

где φ_0 — угол, соответствующий исходному положению звена 2.

Таким образом, при решении задач проектирования движение может быть задано или как функция положения, или как функция передаточного отношения, или, наконец, как функция передаточного числа.

2°. Связь между угловыми скоростями ω_2 и ω_3 (рис. 587) и основными размерами звеньев механизма может быть установлена на основании соотношения между угловыми скоростями и расстояниями между мгновенными центрами вращения (см. § 25). Мгновенными центрами вращения звеньев 2 и 3 суть точки A и B (рис. 587), а мгновенным центром вращения звеньев в их относительном движении является точка P_0 , лежащая на прямой AB и совпадающая с точкой соприкосновения центроид C_2 и C_3 .

Для центроидного механизма, показанного на рис. 587, должно удовлетворяться условие

$$i_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{AP_0}{BP_0}, \quad (22.7)$$

а для скоростей ω_2 , ω_3 и ω_{32} имеем условие

$$\omega_{32} = \omega_2 + \omega_3. \quad (22.8)$$

Так как, сообщив всему механизму общую угловую скорость, равную и обратную по знаку угловой скорости ω_2 звена 2, мы можем рассматривать движение звена 3 с угловой скоростью ω_{32} относительно звена 2 как происходящее с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей ω_2 и ω_3 . Из условия, что мгновенные центры вращения A , B и P_0 всегда должны лежать на одной прямой, получаем:

$$(AB) = (AP_0) + (P_0B). \quad (22.9)$$

3°. Основная задача проектирования механизмов состоит в том, чтобы при заданном движении ведущего звена механизма обеспечить заданное движение ведомого звена. Требуемое движение может быть задано в виде функции положений или в виде функции передаточного отношения, или передаточного числа. Применительно к трехзвенному центроидному механизму эти условия представлены соответственно равенствами (22.2), (22.4) и (22.5). Так как равенства (22.4) и (22.5) могут быть получены дифференцированием равенства (22.2), которое, если известны начальные положения звеньев, может быть определено интегрированием равенств (22.4) и (22.5) согласно условию (22.6). Отсюда вытекает, что исходными зависимостями, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем, являются следующие:

$$\varphi_3 = \varphi_2 \quad (22.10)$$

или

$$i_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{AP_0}{BP_0}. \quad (22.11)$$

Условие (22.10) для центроидного механизма (рис. 587) будет означать, что для каждого заданного положения звена 2 мы имеем

вполне определенное заданное положение звена 3. Для воспроизведения заданного движения по условиям (22.10) и (22.11) надо найти соответствующие очертания центроид C_2 и C_3 в относительном движении звеньев 2 и 3.

4°. Переходим к рассмотрению вопроса о проектировании трехзвенных центроидных механизмов, образованных одной центроидной парой и двумя низшими парами. К этим механизмам относятся механизмы некруглых колес и реек (рис. 49 и 50), механизмы перекачивающихся рычагов (рис. 42) и др.

Механизмы некруглых колес и реек получают широкое распространение в современном приборостроении и общем машиностроении. Они могут воспроизводить большое число разнообразных функций передаточного отношения. Рассмотрим геометрический метод решения задачи о построении центроид этих механизмов. Как было показано выше (§ 106,1°), требуемый закон движения ведущего и ведомого звеньев может быть задан или в виде функции положения, или функции передаточного отношения. Предположим, что нам заданы графики угловых скоростей ω_2 и ω_3 ведущего и ведомого звеньев в функции угла поворота φ_2 ведущего звена 2 и задано расстояние AB между осями вращения звеньев 2 и 3 (рис. 588, а). Так как $\omega_2 = \omega_2(\varphi_2)$ может быть всегда принята постоянной и равной $\omega_2 = 1$, то функция передаточного отношения $i_{32} = i_{32}(\varphi_2)$ представлена на рис. 588, б в виде кривой, совпадающей с кривой $\omega_3 = \omega_3(\varphi_2)$.

Если за начальные положения сопряженных центроид принять положения, при которых углы поворота центроид, отсчитываемые от направления AB равны нулю, то функция положений $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2)$ (рис. 589) может быть получена из условия (22.6)

$$\varphi_3 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} i_{32} d\varphi_2. \quad (22.12)$$

Для этого производим графическое интегрирование графика (рис. 588, б) и получаем функцию положения (рис. 589).

Имея функцию передаточного отношения (рис. 588, б) и функцию положений (рис. 589), переходим к графическому построению сопряженных центроид, принадлежащих звеньям 2 и 3. Пусть угловые скорости ω_2 и ω_3 противоположны по знаку. Тогда положение мгновенных центров вращения (рис. 588, а) в относительном движении звеньев 2 и 3 будет определяться из условия (22.7)

$$i_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{AP_0}{BP_0} = \frac{AB - BP_0}{BP_0}. \quad (22.13)$$

Таким образом, расстояние AB из-за разных знаков угловых скоростей ω_2 и ω_3 должно быть разделено внутренним образом согласно условию (22.13). Полученные из этого условия положения мгновенных центров вращения P_0^I , P_0^{II} , P_0^{III} , (рис. 588, а) образуют геометри-

ческое место точек, называемое *бицентроидой*. Таким образом, *бицентроидой* называется геометрическое место мгновенных центров вращения в относительном движении двух звеньев, принадлежащее неподвижной плоскости. Для построения профилей центроид находим точки, принадлежащие звеньям 2 и 3, последовательно

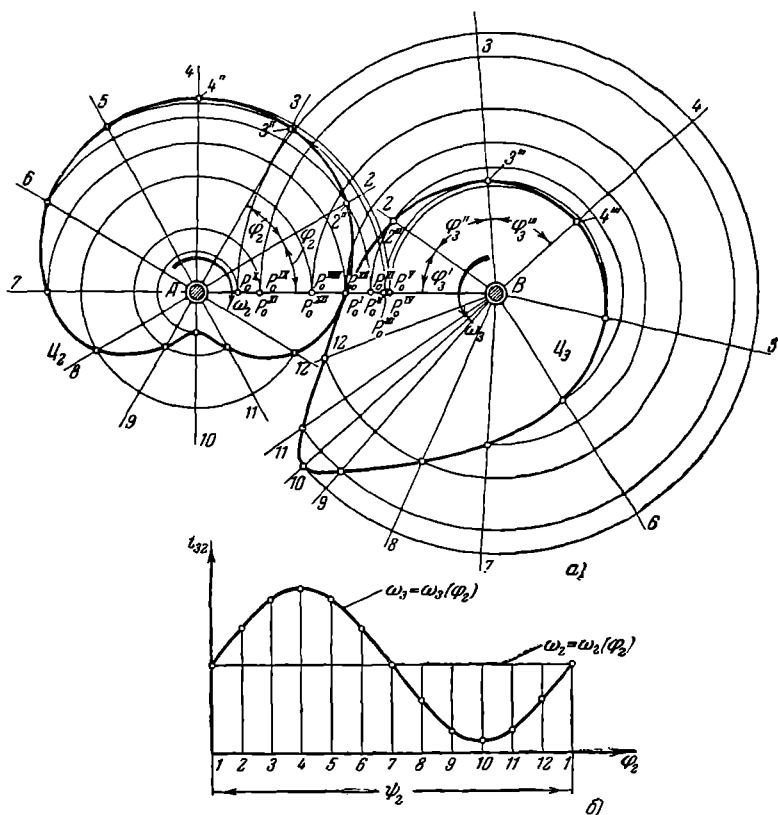


Рис. 588. К проектированию кинематической схемы центроидного механизма: а) схема механизма; б) графики угловых скоростей звеньев 2 и 3.

совпадающие в точках $P_0^I, P_0^{II}, P_0^{III}$, бицентроиды. Для этого от направления AB (рис. 588, а) откладываем углы φ_2 и φ_3 . Углы φ_2 поворота центроиды 2 между двумя соседними положениями (рис. 589) являются равными. Поэтому из точки А (рис. 588, а) проводим лучи $A2, A3, \dots$ под равными друг другу углами φ_2 . Углы φ_3 поворота центроиды 3 между двумя соседними положениями переменные (рис. 589). Поэтому из точки В проводим лучи $B2, B3, \dots$ под углами $\varphi_3^I, \varphi_3^{II}, \varphi_3^{III}, \dots$, полученными из графика (рис. 589). Из точки А (рис. 588, а) радиусами $AP_0^I, AP_0^{II}, \dots$ проводим дуги до пересечения в точках $2'',$

3'', 4'', с соответственными лучами A2, A3, A4, ... Соединив плавной кривой полученные точки P₀^I, 2'', 3'', ..., получим профиль центроида Ц₂, принадлежащей звену 2. Точно так же из точки B проводим дуги радиуса BP₀^{II}, BP₀^{III}, до пересечения в точках 2''', 3''', 4''', с соответственными лучами B2, B3, B4, ... Соединив плавной кривой точки P₀^I, 2''', 3''', ..., получим профиль сопряженной центроида Ц₃, принадлежащей звену 3. Для возможности передачи непрерывного периодического движения длины профилей центроид должны быть равны и, следовательно, полные углы поворота Φ₂ и Φ₃ (рис. 589) сопряженных центроид должны быть равны между собой и за полный угол движения давать угол, равный Φ₃ = Φ₂ = 2π.

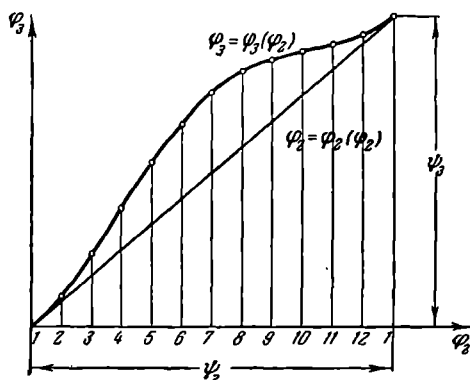


Рис. 589. Графики углов поворота звеньев 2 и 3 в функциях угла поворота звена 2.

Возможны профили центроид с разными углами поворота за полный цикл движения, но при этом эти углы должны быть кратны целому числу. Профили центроид должны иметь симметрию, чтобы была обеспечена симметрия в графике кривой (рис. 588, б), изображающей передаточную функцию. Из изложенного следует, что для случая среднего передаточного отношения, равного $(i_{32})_{cp} = -1$, за один оборот ведущего и ведомого звена, как это имеет место для рассматриваемого механизма (рис. 588, б), необходимым условием

должно быть равенство углов Φ₂ = Φ₃. Это условие требует, чтобы площади, ограниченные кривыми ω₂ = ω₂(φ₂) и ω₃ = ω₃(φ₂) (рис. 588, б), были бы равны между собой, т. е. чтобы всегда удовлетворялось условие

$$\int_0^{\Phi_2} \omega_2 d\varphi_2 = \int_0^{\Phi_3} \omega_3 d\varphi_3. \quad (22.14)$$

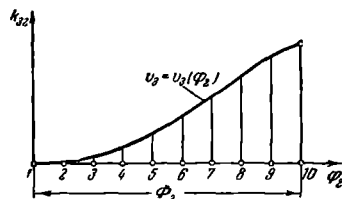


Рис. 590. График зависимости скорости рейки от угла поворота некруглого колеса центроидного реечного механизма.

5°. Переходим к рассмотрению геометрического метода решения задачи о проектировании профилей сопряженных центроид для случая механизма некруглого колеса, сопряженного с рейкой. Пусть некруглое колесо 2 вращается с постоянной угловой скоростью ω₂, а рейка 3 должна двигаться поступательно со скоростью v₃, заданной графиком v₃ = v₃(φ₂) (рис. 590).

Пусть, далее, полный угол поворота Φ₂ колеса 2 равен Φ₂ = $\frac{4}{3}\pi$ и задано

положение оси вращения A колеса 2 и направление $x-x$ перемещения рейки (рис. 591).

Мгновенные центры вращения $P_0^I, P_0^{II}, P_0^{III}, \dots$ в относительном движении лежат на направлении Ay . Положение этих точек определяется из условия [см. (5.15) § 25]

$$AP_0 = \frac{v_3}{\omega_2} = \frac{\frac{ds_3}{dt}}{\frac{d\varphi_2}{dt}} = \frac{ds_3}{d\varphi_2} = k_{32}. \quad (22.15)$$

Условимся величину k_{32} , хотя и имеющую размерность длины, называть также передаточной функцией для случая передачи поступательного

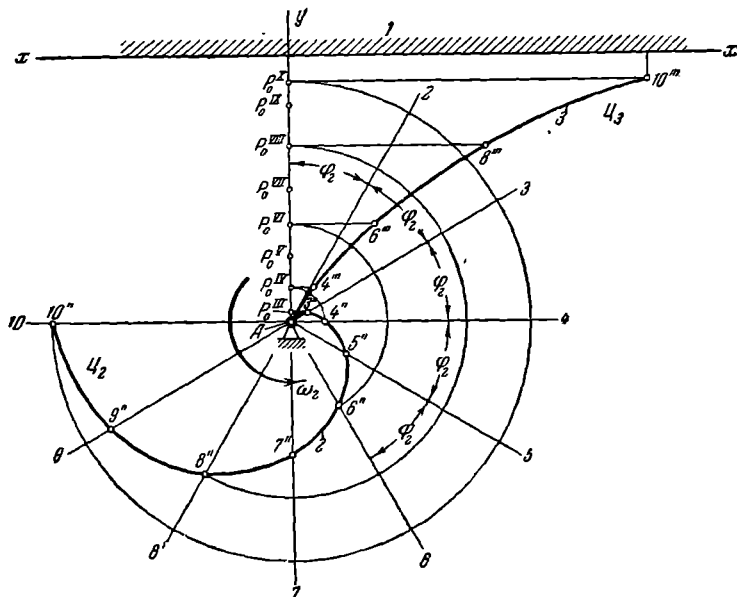


Рис. 591. Схема центроидного реечного механизма.

движения от некруглого колеса к рейке. Из равенства (22.15) следует:

$$s_3 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} k_{32} d\varphi_2. \quad (22.16)$$

Так как угловая скорость ω_2 звена 2 нами может быть принята постоянной и равной $\omega_2 = 1$, то график $v_3 = v_3(\varphi_2)$ (рис. 590) является также графиком $k_{32} = k_{32}(\varphi_2)$. Для получения графика $s_3 = s_3(\varphi_2)$ (рис. 592) производим графическое интегрирование графика $k_{32} = k_{32}(\varphi_2)$ (рис. 590), принимая за начальное положение рейки положение 1, совпадающее с прямой Ay . Ордината S_3 в крайнем положении 10 (рис. 592) определяет полное перемещение S_3 рейки 3. Далее, на направлении Ay (рис. 591) откладываем отрезки $AP_0^I, AP_0^{II}, AP_0^{IV}, \dots$, определяемые графиком $k_{32} = k_{32}(\varphi_2)$ (рис. 590). Таким образом определяются положения точек $P_0^I, P_0^{II}, P_0^{III}, \dots$ бицентроиды. Далее,

из точки A проводим лучи $A2, A3, A4$, под равными углами φ_2 . Из точки A радиусами $AP_0^{II}, AP_0^{III}, AP_0^{IV}$, проводим дуги до пересечения в точках $2'', 3'', 4''$, с соответственными лучами $A2, A3, A4, \dots$. Соединив плавной кривой точки $P_0^I, 2'', 3'', \dots$, получим профиль Λ_2 центроиды, принадлежащей звену 2. Для получения профиля центроиды, принадлежащей рейке, проводим из точек $P_0^{II}, P_0^{III}, P_0^{IV}$, прямые $P_0^{II}2, P_0^{III}3, P_0^{IV}4, \dots$, параллельные направлению $x-x$, и откладываем на этих прямых величины перемещений s_3 рейки, определяемые графиком $s_3 = s_3(\varphi_2)$ (рис. 592). Соединив полученные точки $2''', 3''', 4'''$, плавной кривой, получим профиль сопряженной центроиды Λ_3 , принадлежащей звену 3.

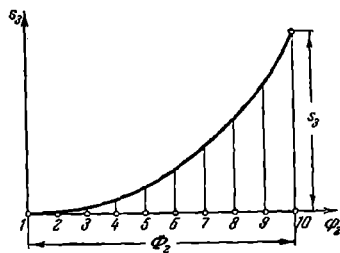


Рис. 592. График зависимости пути рейки от угла поворота некруглого колеса центроидного реечного механизма.

меняются аналитические методы. Рассмотрим вопрос об уравнениях профилей сопряженных центроид. Обозначим (рис. 593) расстояние между осями A и B через l , радиусы-векторы профилей центроид 2 и 3 через r_2 и r_3 и углы поворота центроид через φ_2 и φ_3 . Ведущим принимаем звено 2. Тогда на основании соотношения (22.5) имеем для передаточного числа

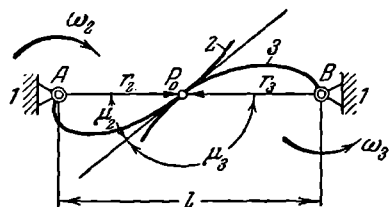


Рис. 593. Схема механизма с сопряженными центроидами.

$$i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_3} \quad (22.17)$$

$$r_2 + r_3 = l. \quad (22.18)$$

Из уравнений (22.17) и (22.18) получаем:

$$r_2 = l \frac{1}{1 + i_{23}} \quad (22.19)$$

и

$$r_3 = l \frac{i_{23}}{1 + i_{23}}. \quad (22.20)$$

Уравнения (22.19) и (22.20) суть уравнения центроид в полярной системе координат. Угол φ_3 , образуемый радиусом-вектором r_3 , определяется из условия

$$\varphi_3 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} i_{23} d\varphi_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} \frac{1}{i_{23}} d\varphi_2. \quad (22.21)$$

Уравнения (22.19), (22.20), (22.21) суть уравнения сопряженных центроид в параметрической форме.

Из формулы (22.17) следует:

$$r_2 d\varphi_2 = r_3 d\varphi_3. \quad (22.22)$$

Из очевидных геометрических условий также следует, что приращения радиусов-векторов профилей центроид всегда удовлетворяют условию

$$dr_2 = -dr_3. \quad (22.23)$$

Разделив равенства (22.22) и (22.23) друг на друга, получим:

$$\frac{r_2}{\frac{dr_2}{d\varphi_2}} = - \frac{r_3}{\frac{dr_3}{d\varphi_3}}. \quad (22.24)$$

Как известно из дифференциальной геометрии, отношения, входящие в левую и правую части равенства (22.24), представляют собой тангенсы углов μ_2 и μ_3 (рис. 593), образованных касательной к профилям центроид с радиусами-векторами этих профилей. Следовательно, получаем:

$$\operatorname{tg} \mu_2 = - \operatorname{tg} \mu_3.$$

Согласно условию, соприкосание профилей сопряженных центроид происходит в точке P_0 бицентроиды. Точка P_0 всегда лежит на прямой AB , следовательно,

$$\mu_2 + \mu_3 = \pi. \quad (22.25)$$

Полученные соотношения вполне определяют основные геометрические параметры профилей сопряженных центроид в аналитической форме.

7°. Если некруглыми колесами должно передаваться непрерывное вращательное движение, то профили сопряженных центроид должны представлять собой замкнутые кривые. Рассмотрим условия, обеспечивающие замкнутость профилей центроид.

Как было показано выше, для заданной функции передаточного числа i_{23} уравнение профиля центроиды 2, принятой за ведущую, равно (см. (22.19))

$$r_2 = l \frac{1}{1 + i_{23}} = r_2(\varphi_2). \quad (22.26)$$

Для обеспечения замкнутости профиля центроиды ведущего колеса необходимо, чтобы функция i_{23} передаточного числа, входящего в равенство (22.16), была периодической функцией с периодом $t_2 = \Phi_2/n$, где Φ_2 — полный угол поворота центроиды 2, а n — число оборотов центроиды 2, равное целому числу, т. е. $n = 1, 2, 3, \dots$. В этом случае функция $r_2 = r_2(\varphi_2)$ является периодической с тем же периодом, равным Φ_2/n , и значения радиуса-вектора r_2 совпадают при значениях угла $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_2 = 2\pi$.

Для ведомой центроиды имеем следующие зависимости (22.20) и (22.21) ее профиля от угла φ_2 :

$$r_3 = l \frac{i_{23}}{1 + i_{23}} = r_3(\varphi_2) \quad (22.27)$$

и

$$\varphi_3 = \int_0^{\varphi_2} \frac{1}{i_{23}} d\varphi_2 = \varphi_3(\varphi_2). \quad (22.28)$$

Функция $r_3 = r_3(\varphi_2)$ является периодической, так как функция передаточного числа была принята периодической. Кроме того, период t_3 функции $r_3 = r_3(\varphi_2)$, равный $t_3 = \Phi_3/n_3$, где Φ_3 — полный угол поворота центроиды 3, а n_3 — ее число оборотов, равное $n = 1, 2, 3, \dots$, должен равняться периоду t_2 функции $r_2 = r_2(\varphi_2)$.

Таким образом, для замкнутости профилей центроид некруглых колес необходимо, чтобы функция передаточного числа i_{23} была периодической с периодом, равным периоду целой части одного оборота как ведущей, так и ведомой центроиды, т. е. период T функции i_{23} передаточного числа

должен быть связан с периодами t_1 и t_2 оборотов колес 2 и 3 соотношением

$$T = \frac{t_2}{n_2} = \frac{t_3}{n_3}, \quad (22.29)$$

где n_2 и n_3 — целые числа.

8°. Рассмотрим вопрос о проектировании профилей сопряженных центроид механизма некруглых колес для воспроизведения заданной функции $y = f(x)$. При этом предполагается, что воспроизводимая функция в заданном интервале $x_k > x > x_i$ непрерывна и дифференцируема.

Такие задачи весьма часто возникают при проектировании механизмов приборов систем управления, математических машин и т. д.

Пусть вращение центроиды 2 связано с независимой переменной x такой зависимостью:

$$\varphi_2 = \mu_2 (x - x_i), \quad (22.30)$$

где μ_2 — масштабный коэффициент. Тогда угол поворота φ_3 центроиды 3 может быть представлен так:

$$\varphi_3 = \mu_3 (y - y_i) = \mu_3 [f(x) - f(x_i)], \quad (22.31)$$

где μ_3 — масштабный коэффициент.

Начало отсчета углов поворота центроид определяется значениями $x = x_i$ и $f(x) = f(x_i)$. Функция $i_{32} = i_{32}(\varphi_2)$ передаточного отношения равна:

$$i_{32} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \frac{d\varphi_3}{dx} \frac{dx}{d\varphi_2} \quad (22.32)$$

Из равенства (22.31) получаем:

$$\frac{d\varphi_3}{dx} = \mu_3 f'(x).$$

Учитывая зависимость (22.30), имеем:

$$\frac{dx}{d\varphi_2} = \frac{1}{\frac{d\varphi_2}{dx}} = \frac{1}{\mu_2}.$$

Подставляя выражения для $\frac{d\varphi_3}{dx}$ и $\frac{dx}{d\varphi_2}$ в равенство (22.32), получаем:

$$i_{32} = \frac{\mu_3}{\mu_2} f'(x). \quad (22.33)$$

Полярные уравнения профиля центроиды 2 определяются из равенств (22.19) и (22.30)

$$r_2 = l \frac{1}{1 + i_{23}} = l \frac{i_{32}}{1 + i_{32}} = l \frac{\frac{\mu_3}{\mu_2} f'(x)}{1 + \frac{\mu_3}{\mu_2} f'(x)}, \quad \varphi_2 = \mu_2 (x - x_i), \quad (22.34)$$

где l — расстояние между осями вращения центроид.

Полярные уравнения профиля центроиды 3 определяются из равенств (22.20) и (22.31)

$$r_3 = l \frac{i_{23}}{1 + i_{23}} = l \frac{1}{1 + i_{32}} = l \frac{1}{1 + \frac{\mu_3}{\mu_2} f'(x)}, \quad \varphi_3 = \mu_3 [f(x) - f(x_i)]. \quad (22.35)$$

Функция $y = f(x)$ может быть задана различными способами. Если она задана аналитически, то решение задачи о воспроизведении этой функции

механизмом некруглых колес может быть сделано с любой требуемой степенью точности. Если функция задана в табличной форме, то для нахождения ее производной можно воспользоваться методом табличного дифференцирования или другими методами численного дифференцирования.

Изложенное проиллюстрируем примером нахождения уравнений профиля центроида для воспроизведения квадратичной зависимости вида $y = ax^2$, где a — постоянный коэффициент.

Пусть для начального значения x , равного x_1 , углы поворота $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Тогда на основании зависимости (22.33) функция i_{32} передаточного отношения будет иметь следующий вид:

$$i_{32} = \frac{\mu_3}{\mu_2} f'(x) = \frac{\mu_3}{\mu_2} 2ax,$$

где μ_3 и μ_2 — масштабные коэффициенты.

Полярные уравнения профиля центроида 2 получим согласно уравнениям (22.34)

$$r_2 = l \frac{\frac{\mu_3}{\mu_2} 2ax}{1 + \frac{\mu_3}{\mu_2} 2ax}, \quad \varphi_2 = \mu_2 a (x - x_1).$$

Полярные уравнения профиля центроида 3 получим из уравнений (22.35)

$$r_3 = l \frac{1}{1 + \frac{\mu_3}{\mu_2} 2ax}, \quad \varphi_3 = \mu_3 a (x^2 - x_1^2).$$

Очертание профилей центроид может быть построено, если заданы функция $y = ax^2$, интервал ее изменения, масштабные коэффициенты μ_2 и μ_3 , расстояние l между осями вращения центроид. На рис. 594 показан один из вариантов механизма для воспроизведения зависимости $y = f(x)$.

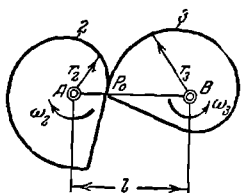


Рис. 594. Схема центроидного механизма для воспроизведения зависимости $y = f(x)$.

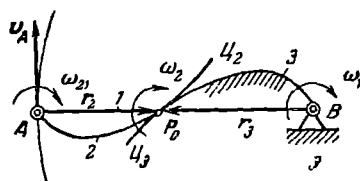


Рис. 595. Схема центроидного механизма с одной неподвижной центроидой.

9° Если центроиды имеют незамкнутый профиль (рис. 587), то такой центроидный механизм часто называется механизмом *перекатывающихся рычагов*. Синтез механизмов перекатывающихся рычагов, вращающихся вокруг неподвижных осей A и B (рис. 587), может быть выполнен методами, рассмотренными выше для синтеза механизмов некруглых колес, если задана передаточная функция i_{23} .

Иногда профиль одной из центроид является неподвижным. Такой механизм может быть получен, например, из механизма, показанного на рис. 587, если в нем сделать неподвижной центроиду C_3 (рис. 595). Пусть звено 1 вращается вокруг оси B с угловой скоростью ω_1 , а центроида 2 перекатывается по неподвижной центроиде 3 с угловой скоростью ω_2 . Если требуемый закон движения задан передаточной функцией $i_{12} = i_{12}(\varphi_1)$ и задана длина l звена AB, то радиус-вектор r_3 центроида 3 определяется из условия,

что скорость v_A точки A , принадлежащей звеньям 1 и 2, равна

$$v_A = \omega_1 (AB) = \omega_2 (AP_0). \quad (22.36)$$

Из равенства (22.36) следует:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{AP_0}{AB} = \frac{AB - BP_0}{AB} = \frac{l - r_3}{l}. \quad (22.37)$$

Из этого равенства определяется величина радиуса-вектора r_3 :

$$r_3 = l(1 - i_{12}). \quad (22.38)$$

Величина радиуса-вектора r_2 центроиды 2 соответственно равна

$$r_2 = l - r_3 = li_{12}. \quad (22.39)$$

Таким образом, при заданной передаточной функции i_{12} радиусы-векторы сопряженных центроид определяются однозначно.

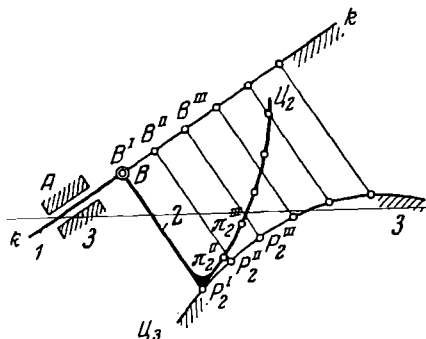


Рис. 596. Схема центроидного механизма с неподвижной центроидой 3 и прямолинейно движущимся звеном 1.

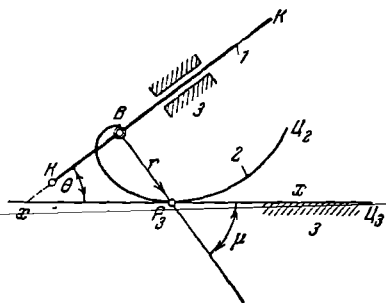


Рис. 597. Схема центроидного механизма с неподвижной центроидой, прямолинейно движущимся звеном 1 и его подвижной центроидой в виде логарифмической спирали.

В некоторых случаях задается не передаточная функция, а профиль одной из центроид и требуется определить профиль сопряженной центроиды. Пусть задан профиль неподвижной центроиды U_3 (рис. 596). Требуется построить профиль U_2 подвижной центроиды звена 2. Звенья 2 и 1 входят во вращательную пару B , а звено 1 в поступательную пару A с неподвижным звеном 3. На прямой $k-k$, являющейся траекторией точки B , отмечаем ряд положений B^I, B^{II}, B^{III} , точки B . Положения мгновенных центров вращения $P_2^I, P_2^{II}, P_2^{III}$, звена 2 определяются точными пересечениями перпендикуляров к прямой $k-k$, проведенных из точек B^I, B^{II}, B^{III} , с заданным профилем центроиды U_3 . Точки $\pi_2^I, \pi_2^{II}, \pi_2^{III}$ профиля центроиды U_2 можно найти из условия, что при перекачивании центроиды U_2 по центроиде U_3 должно удовлетвориться условие равенства дуг

$$\cup P_2^I P_2^{II} = \cup P_2^I \pi_2^I, \quad \cup P_2^{II} P_2^{III} = \cup \pi_2^{II} \pi_2^{III},$$

Кроме того, должно удовлетвориться равенство отрезков

$$B^I \pi_2^I = B^{II} P_2^{II}, \quad B^I \pi_2^{III} = B^{III} P_2^{III},$$

Например, точку π_2^{III} найдем на пересечении двух окружностей: первой окружности радиуса, равного дуге $P_2^I P_2^{II}$, проведенной из центра π_2^{II} , и второй окружности радиуса $B^{III} P_2^{III}$, проведенной из центра B^I .

В частном случае при профиле центроиды U_3 в виде прямой $x-x$ (рис. 597) профиль центроиды U_3 получается в виде логарифмической спирали, асимптотический полюс которой располагается в точке B , и уравнение профиля центроиды U_3 такое:

$$r = ae^{m\varphi},$$

где $a = r_0$ при угле $\varphi = 0$ и $m > 0$.

10°. Из примеров следует, что при передаче движения центроидами в относительном движении соприкосновение этих центроид происходит всегда в точках, лежащих на бицентроиде. Таким образом, бицентроид является не только геометрическим местом центров мгновенного вращения в относительном движении, но и геометрическим местом точек, принадлежащих неподвижной плоскости, в которых происходит соприкосновение (зацепление) центроид. Поэтому это геометрическое место является *линией зацепления центроид*. Если мы перейдем к рассмотрению последней задачи из поставленных нами выше, т. е. задачи о воспроизведении передачи двух поступательных движений, то обнаружим, что в этом случае воспроизведение движения центроидами является невозможным, так как при рассмотрении относительного движения звеньев мы получим поступательное результирующее движение одного звена относительно другого, и следовательно, все точки бицентроида будут находиться в бесконечности.

§ 107. Синтез трехзвенных механизмов с парой качения и скольжения

1°. К этим механизмам относится очень большая группа механизмов, широко применяемых в технике. Это кулачковые механизмы (рис. 37—45), различные виды зубчатых механизмов (рис. 46—55), механизмы перекачивающихся со скольжением рычагов (рис. 42) и т. д. Для всех этих механизмов общей задачей является задача о проектировании профилей сопряженных элементов пары качения и скольжения, обеспечивающих заданный закон ведущего и ведомого звеньев механизма.

Методы проектирования сопряженных профилей всех указанных видов механизмов общие, но виды движения, которые должны воспроизводить эти механизмы, их конструктивное оформление, динамические условия их работы являются различными. Например, кулачковыми механизмами мы в основном воспроизводим возвратно-поступательное или возвратно-качательное движение ведомого звена; зубчатыми механизмами мы чаще всего воспроизводим непрерывное вращательное движение как ведомого, так и ведущего звеньев, механизмами перекачивающихся со скольжением рычагов воспроизводится движение одной из точек рычага по заданной траектории и т. д. Поэтому в дальнейшем мы будем с известной условностью пользоваться той терминологией и тем делением механизмов указанных выше видов, которые установились в современной теории механизмов. Начнем с рассмотрения методов проектирования профилей элементов пары качения и скольжения в кулачковых механизмах.

Ведущее звено кулачковых механизмов называется *кулачком*, а ведомое — *толкателем* или *штангой*. Закон движения толкателя задается обычно в виде функции положения, при этом задается также профиль элемента пары качения и скольжения, принадлежащей толкателю. Толкатели кулачковых механизмов, как правило, имеют возвратно-качательное или возвратно-поступательное движение; поэтому профили элементов высшей пары, им принадлежащие, являются незамкнутыми. Профили элементов высшей пары, принадлежащие кулачкам, совершающим полный оборот вокруг своей оси вращения, замкнутые. У кулачков, имеющих возвратно-поступательное движение, профили элементов высшей пары, естественно,

незамкнутые. Проектирование кулачкового механизма сводится к построению сопряженного элемента кулачка по заданному перемещению толкателя и профилю элемента его высшей пары. Ниже мы рассмотрим только общую теорию проектирования профилей кулачков с точки зрения осуществления требуемого закона движения и покажем, как определяется форма элемента высшей пары, принадлежащей кулачку. Мы не будем учитывать влияния на работу механизма конструктивных элементов, входящих в состав кулачкового механизма (ролика толкателя, пружины, направляющих толкателя и т. д.). Эти задачи будут рассмотрены ниже, в главе XXVII.

2°. Пусть требуется спроектировать профиль K_2 кулачка 2 (рис. 598), если заданы профиль K_3 толкателя 3 и функция положения $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2)$.

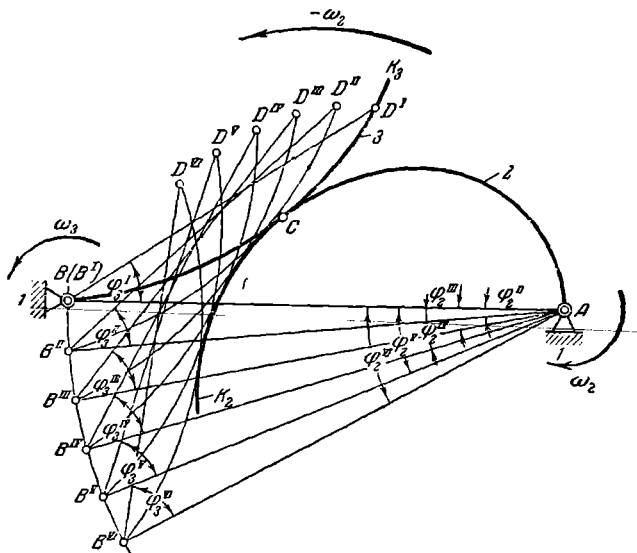


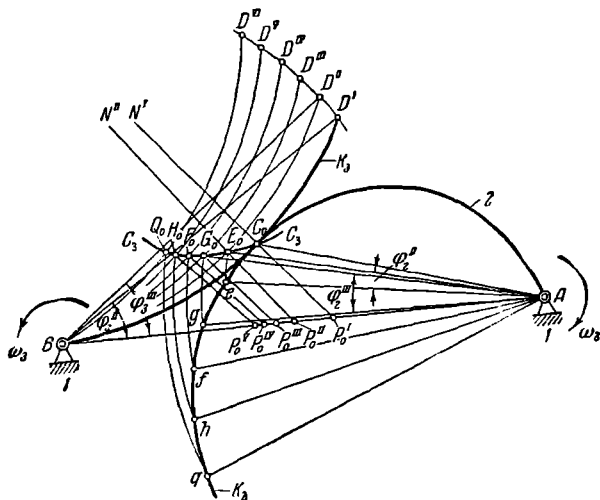
Рис. 598. Построение профиля кулачка кулачкового механизма с криволинейным вращающимся толкателем.

Кулачок 2 и толкатель 3 вращаются вокруг центров A и B . Для построения профиля кулачка 3 применим метод обращения движения. Сообщим всему механизму угловую скорость $-\omega_2$ вокруг оси A , равную и противоположную по знаку угловой скорости ω_2 кулачка 2. Тогда точка B вращения толкателя будет занимать последовательные положения $B^I, B^{II}, B^{III}, \dots$ на окружности, описанной из точки A , как из центра. Положения точки B на этой окружности определяются выбранными нами углами поворота кулачка 2, равными $\varphi_2^I, \varphi_2^{II}, \varphi_2^{III}, \dots$.

Для определения последовательных положений толкателя 3 отмечаем на профиле K_3 какую-либо точку D^I . Обозначаем угол, образованный прямой BD^I с линией центров BA , через φ_3^I . Угол φ_3^I фиксирует начальное положение профиля K_3 относительно линии центров BA . Далее, по заданной функции положения $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2)$ находим углы φ_3 поворота звена 3. Это — углы $\varphi_3^I, \varphi_3^{II}, \varphi_3^{III}, \dots$, отсчитываемые от направлений $AB^I, AB^{II}, AB^{III}, \dots$ в сторону, соответствующую направлению угловой скорости ω_3 . Строим ряд положений кривой K_3 , соответствующих углам $\varphi_3^I, \varphi_3^{II}, \varphi_3^{III}, \dots$, и про-

водим к полученным положениям кривой K_3 огибающую K_2 . Кривые K_2 и K_3 как взаимноогibaемые кривые представляют собой профили элементов пары качения и скольжения, в которую входят звенья 2 и 3.

3°. Построение профиля K_2 элемента пары, принадлежащего кулачку, может быть выполнено и иначе, с помощью так называемой *линии зацепления* и заданной функции положения. Пусть профиль элемента пары, принадлежащего толкателю, задан в виде кривой (рис. 599) K_3 и задана функция



Таким образом, линией зацепления взаимноогibaемых кривых называется геометрическое место точек последовательного соприкасания этих кривых, принадлежащее неподвижной плоскости.

Для нахождения точек $e, g, f, \dots, q$ профиля K_2 соединяем точку A с точками $E_0, G_0, \dots, Q_0$ и откладываем от этих направлений известные углы $\varphi_2, \varphi_2, \dots$. Проводя под этими углами соответствующие лучи, делаем на них засечки из центра A радиусами $AE_0, AG_0, \dots, AQ_0$. Соединив точки $C_0, e, f, g, \dots, q$ плавной кривой, получаем профиль K_2 кулачка 2.

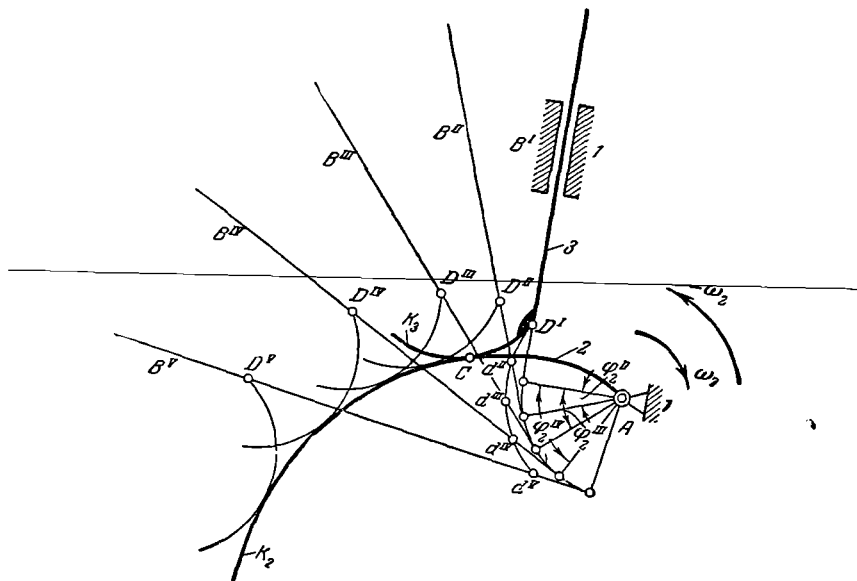


Рис. 600. Построение с помощью линии зацепления профиля кулачка кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

Указанное построение позволяет строить сопряженные профили более точно по точкам, чем это можно сделать по способу, указанному в § 107,2°.

4°. Переходим к рассмотрению кулачковых механизмов с одной вращательной и одной поступательной парой. Пусть требуется спроектировать профиль K_2 кулачка 2 (рис. 600), если задан профиль K_3 толкателя 3, движущегося в прямолинейных направляющих 1, и задана функция положения $s_3 = s_3(\varphi_2)$. На рис. 600 построение профиля кулачка показано методом обращения движения. Ось движения толкателя 3 занимает в этом движении последовательные положения $B^I, B^{II}, B^{III}, \dots$. Точка D в движении с угловой скоростью ω_2 описывает окружность радиуса AD^I , занимая положения $d^{II}, d^{III}, d^{IV}, \dots$. Ось движения толкателя поворачивается на углы, соответственно равные $\varphi_2, \varphi_2, \varphi_2, \dots$. Перемещения толкателя вдоль оси движения определяются по заданной функции положения $s_3 = s_3(\varphi_2)$. Эти перемещения представляют собой отрезки $(d^{II}D^{II}), (d^{III}D^{III}), \dots$. Обогнув плавной кривой построенные положения кривой K_3 , находим профиль кулачка 2.

Та же задача может быть решена с помощью построения линии зацепления (рис. 601). По заданной функции положения $s_3 = s_3(\varphi_2)$ находим последовательные положения кривой K_3 . Далее, находим функцию передаточ-

ного отношения $k_{32} = k_{32}(\varphi_2)$ дифференцированием функции $s_3 = s_3(\varphi_2)$:

$$k_{32} = \frac{ds_3}{d\varphi_2} = \frac{d[s_3(\varphi_2)]}{d\varphi_2}.$$

По функции $k_{32} = k_{32}(\varphi_2)$ находим на перпендикуляре, восстановленном в точке A к направлению оси движения звена 3, мгновенные центры вращения $P_0^I, P_0^{II}, \dots$ в относительном движении, для чего можно воспользо-

ваться условием (22.15). Проводим нормали к кривой K_3 в соответствующих ее положениях, проходящие через точки P_0^I, P_0^{II} . Тогда определяются точки $C, E_0, G_0, \dots$ линии зацепления $C_3 - C_2$. Для определения точек $e, g, f, \dots$ профиля K_2 кулачка 2 из

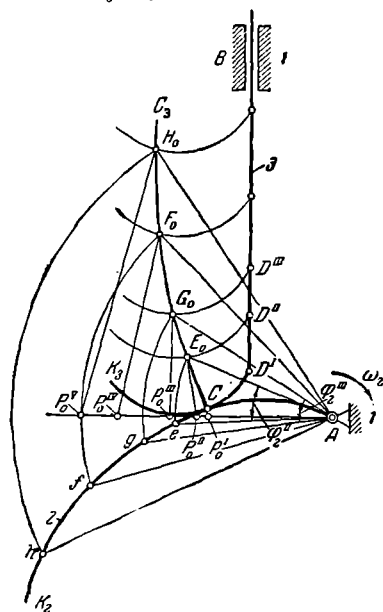


Рис. 601. Построение с помощью линии зацепления профиля кулачка кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

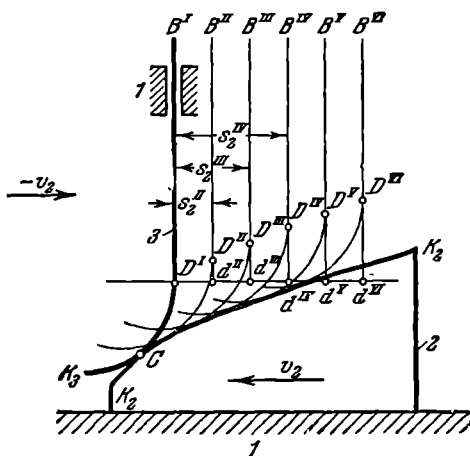


Рис. 602. Построение профиля кулачка кулачкового механизма с двумя поступательными парами.

точки A проводим дуги радиусов $AE_0, AG_0, \dots$ до пересечения с соответствующими лучами, проведенными из точки A под углами $\varphi_2^I, \varphi_2^{II}, \varphi_2^{IV}, \dots$ к прямым, соединяющим точку A с точками $E_0, G_0, \dots$ линии зацепления.

5°. Переходим к рассмотрению кулачковых механизмов с двумя поступательными парами. Пусть требуется спроектировать профиль K_2 кулачка 2, если заданы профиль K_3 толкателя 3, движущегося в прямолинейных направляющих 1, и функция положения $s_3 = s_3(s_2)$, где s_2 — перемещение кулачка 2. На рис. 602 показано построение профиля K_2 кулачка 2 методом обращения движения. Ось движения толкателя занимает последовательно

положения $B^I, B^{II}, B^{III}, \dots$, перемещаясь поступательно со скоростью $-v_2$ в обратном движении на величины, равные $s_2^I, s_2^{II}, s_2^{IV}, \dots$. Точка профиля D^I занимает при этом положения $d^{II}, d^{III}, d^{IV}, \dots$. Перемещения толкателя 3 вдоль оси движения определяются по заданной функции $s_3 = s_3(s_2)$. Эти перемещения представляют собой отрезки $(d^{II}D^{II}), (d^{III}D^{III}), (d^{IV}D^{IV})$. Обогнув плавной кривой построенные положения кривой K_3 , находим профиль K_2 кулачка 2.

§ 108. Условия, обеспечивающие передачу сил в механизмах

1°. В § 105 было указано, что при проектировании кинематических схем механизмов необходимо учитывать возможность движения проектируемого механизма под действием приложенных к нему сил с возможно большим коэффициентом полезного действия. Выполнение этого условия в значительной мере зависит от выбранных размеров и формы звеньев механизма.

Пусть ведущее звено действует на ведомое звено силой P , и пусть направление абсолютной скорости v_C точки C ведомого звена, к которой приложена сила P , образует с линией действия этой силы острый угол α . Тогда работа A силы P на некотором пути s будет

$$A = \int_0^s P \cos \alpha \, ds. \quad (22.40)$$

Из формулы (22.40) следует, что чем меньше угол α , тем больше работа силы P . Работа A будет максимальной при $\alpha = 0$. Угол α ,

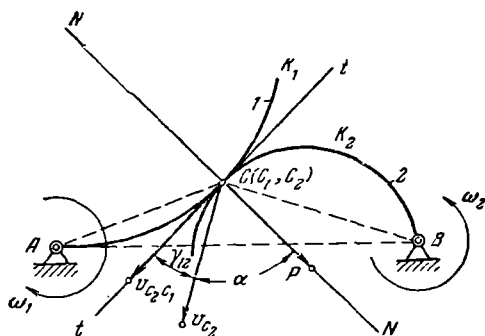


Рис. 603. К определению угла передачи в кулачковом механизме.

образованный направлением действия силы P , приложенной к ведомому звену в точке C , и скоростью v_C точки C , называется *углом давления*. Таким образом, чтобы вся работа силы P расходовалась на движение ведомого звена, нужно обеспечить совпадение направления этой силы с направлением абсолютной скорости той точки ведомого звена, к которой приложена сила P . Обычно в механизмах угол

давления α не равен нулю, вследствие чего только одна составляющая силы P сообщает движение ведомому звену, другая же вызывает дополнительные вредные сопротивления трения в кинематических парах. Мало того, при большом угле давления α сопротивления с трения настолько велики, что работа силы P оказывается недостаточной, чтобы привести в движение ведомое звено. Это явление носит название *заклинивания механизма* и наблюдается в неправильно спроектированных механизмах.

Рассмотрим, как изложенные условия могут быть учтены при решении задач синтеза механизмов. Для этого введем понятие о так называемом *угле передачи движения*. Пусть звено 1 (рис. 603), входящее в точке C со звеном 2 в высшую пару качения и сколь-

жения, действует на это звено силой P . Пусть, далее, абсолютная скорость точки C звена 2 равна v_{C_2} .

В том случае, когда сила трения в высшей паре не учитывается, направление силы P совпадает с направлением нормали $N-N$. Тогда углом давления будет угол между нормалью $N-N$ и направлением скорости v_{C_2} . В том случае, когда учитывается трение скольжения звеньев высшей пары, необходимо силу давления (силу реакции) одного звена на другое отклонять от нормали на угол трения.

Проведем касательную $t-t$ к кривым K_1 и K_2 и обозначим угол, образованный касательной $t-t$ с вектором скорости v_{C_2} , через γ_{12} . Угол γ_{12} равен

$$\gamma_{12} = 90^\circ - \alpha. \quad (22.41)$$

Угол γ_{12} называется *углом передачи движения*, или, для краткости, *углом передачи*.

Таким образом, угол передачи γ_{12} является углом добавочным до 90° к углу давления α .

Так как направление касательной $t-t$ совпадает с направлением скорости $v_{C_2C_1}$ точки C_2 звена 2 относительно звена 1, то угол передачи в высших парах есть угол между направлением абсолютной и относительной скоростей точки соприкосновения ведомого звена. Чем меньше угол γ_{12} , тем больше возможность появления заклинивания.

Условимся угол передачи обозначать с двумя индексами, причем первый индекс будет обозначать номер ведущего звена, а второй индекс — номер ведомого звена. Так как на рис. 603 ведущим является звено 1, а ведомым — звено 2, то угол передачи обозначен через γ_{12} . При ведущем звене 2 и ведомом звене 1 угол передачи будем обозначать через γ_{21} .

2°. При синтезе механизмов с парой качения и скольжения необходимо учитывать также и те потери на трение скольжения, которые будут иметь место за счет скольжения взаимооггибаемых кривых друг по другу.

Так как мощность, расходуемая на трение, пропорциональна относительной скорости движения взаимооггибаемых кривых, то чем больше эта скорость, тем больше потери на трение. Пусть, например, передача движения между звеньями 1 и 2 осуществляется посредством взаимооггибаемых кривых K_1 и K_2 (рис. 604, а), соприкасающихся в точке $C(C_1, C_2)$. Мощность N_τ , расходуемая на трение скольжения этих кривых, равна

$$N_\tau = F v_{C_2C_1}, \quad (22.42)$$

где F — сила трения и $v_{C_2C_1}$ — величина скорости точки C_2 кривой K_2 относительно точки C_1 кривой K_1 , или наоборот.

Величина силы трения F равна

$$F = fP, \quad (22.43)$$

где P — реакция в точке C , направленная по нормали $N-N$ и f — коэффициент трения скольжения. Величина скорости скольжения

$$v_{C_2C_1} = \Omega(P_0C), \quad (22.44)$$

где Ω — мгновенная угловая скорость движения звена 2 относительно звена 1, или наоборот.

Угловая скорость Ω согласно формуле (22.8)

$$|\Omega| = |\omega_1| + |\omega_3|. \quad (22.45)$$

Следовательно,

$$v_{C_2C_1} = (|\omega_1| + |\omega_3|)(P_0C). \quad (22.46)$$

Подставляя выражения (22.43) и (22.46) в равенство (22.42), получаем:

$$N_T = fP(|\omega_1| + |\omega_3|)(P_0C). \quad (22.47)$$

Из равенства (22.47) следует, что мощность зависит от расстояния точки соприкосновения C кривых K_1 и K_2 до мгновенного центра

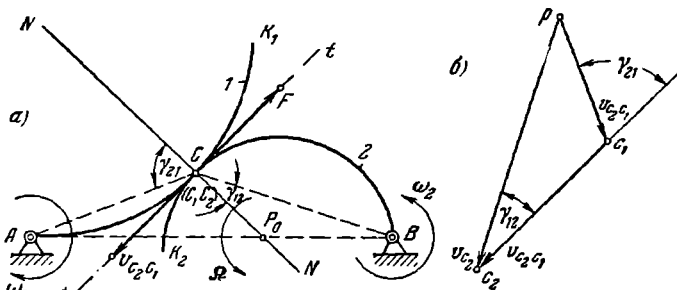


Рис. 604. К определению потерь на трение в кулачковом механизме: а) схема механизма; б) план скоростей.

вращения P_0 в относительном движении и тем больше, чем больше расстояние P_0C .

3°. Как было показано в § 107,3°, точки соприкосновения взаимноогibaемых кривых, принадлежащие неподвижной плоскости, образуют линию зацепления. Следовательно, чем дальше удалены точки линии зацепления от соответствующих мгновенных центров вращения в относительном движении, тем больше потери на трение. В связи с этим при проектировании механизмов необходимо стремиться к тому, чтобы сопряженные профили не имели точек линии зацепления, значительно удаленных от мгновенного центра вращения в относительном движении. Для этого в некоторых случаях передачу движения удобно осуществлять не двумя взаимноогibaемыми кривыми, а многими кривыми, последовательно входящими в соприкосновение.

Можно доказать, что угол между прямыми BC и P_0C (рис. 604, а), соединяющими точку C соприкосновения кривых K_1 и K_2 с мгновенными центрами вращения B и P_0 , всегда равен углу передачи γ_{12} , так как абсолютная скорость v_{C_2} точки C_2 , принадлежащей кривой K_2 , перпендикулярна к прямой BC , а относительная скорость $v_{C_2C_1}$ перпендикулярна к прямой P_0C .

Ясно, что угол передачи γ_{12} может быть также определен и из плана скоростей механизма (рис. 604, б).

Таким образом, чтобы определить угол передачи в механизме, достаточно соединить исследуемую точку зацепления, например точку C (рис. 604, а), с соответствующими мгновенными центрами вращения в абсолютном (точки A и B) и относительном (точка P_0) движениях. В том случае, когда угол, образуемый этими двумя прямыми, больше 90° , то угол передачи является дополнительным до угла в 180° , как это имеет место для угла γ_{21} (рис. 604, а).

Обычно при проектировании механизмов ставят условие, чтобы угол передачи ни в одном из положений механизма не был меньше некоторого заданного угла $\gamma_{\min}$, обеспечивающего нормальную работу механизма.

Выбор допускаемых углов $\gamma_{\min}$ определяется динамическими условиями работы механизма, в первую очередь недопустимостью заклинивания ведомого звена.

4°. Если передача движения осуществляется центроидами, то угол передачи γ (рис. 605) определяется следующим образом. Так как точки P_0 соприкасания центроид имеют равную скорость v_{P_0} , то угол γ оказывается одним и тем же вне зависимости от того, какая из центроид является ведущей. Переменные расстояния точки P_0 от мгновенных центров вращения A и B звеньев 1 и 2 обозначим через ρ_1 и ρ_2 . Пусть за бесконечно малый промежуток времени центроида C_2 повернулась вокруг центра B на угол $d\varphi_2$. Опустим из точки a на AB перпендикуляр aa_1 . Тогда угол a_1aP_0 с точностью до бесконечно малых высших порядков равен углу передачи γ и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{P_0 a_1}{a a_1}.$$

Точно так же с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$P_0 a_1 = d\rho_2 \text{ и } a a_1 = \rho_2 d\varphi_2. \quad (22.48)$$

На этом основании

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{d\rho_2}{d\varphi_2}}{\rho_2}.$$

Из формулы (22.11) следует:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Кроме того,

$$\rho_1 + \rho_2 = AB = l.$$

Из этих равенств получаем:

$$\rho_2 = l \frac{\frac{\omega_1}{\omega_2}}{1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}}.$$

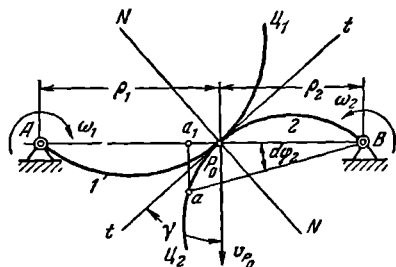


Рис. 605. К определению угла передачи в центроидном механизме.

Так как $\omega_1/\omega_2 = i_{12}$, где i_{12} — передаточная функция центроид, то

$$\rho_2 = l \frac{i_{12}}{1 + i_{12}}, \quad \frac{d\rho_2}{d\varphi_2} = l \frac{(i_{12})'}{(1 + i_{12})^2}. \quad (22.49)$$

Подставляя выражение для ρ_2 и $d\rho_2/d\varphi_2$ из (22.49) в равенство (22.48), получаем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(i_{12})'}{i_{12}(1 + i_{12})}. \quad (22.50)$$

Из формулы (22.50) следует, что при передаче центроидами с неподвижными центрами вращения угол передачи зависит только от передаточной функции этих центроид и не зависит от их размеров.

В рассмотренном случае воспроизведения движения угловые скорости ω_1 и ω_2 были различными по знаку. В том случае, когда угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют одинаковые знаки, формула (22.50) принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(i_{12})'}{i_{12}(1 - i_{12})}. \quad (22.51)$$

Центроиды работают без заклинивания только на тех участках, на которых все значения полученного угла передачи γ больше некоторого минимального значения $\gamma_{\min}$, рекомендуемого для данного механизма, т. е. если удовлетворяется условие

$$\gamma > \gamma_{\min}. \quad (22.52)$$

Величины угла γ , допускаемые в центроидных механизмах, различны и зависят от коэффициента трения в кинематических парах и конструкции самих пар. На участках, где угол γ меньше угла $\gamma_{\min}$, передача работать не будет, и на этих участках придется заменять центроиды взаимноогнбаемыми кривыми и устанавливать дополнительные зубья, кулисы и т. д. Передача посредством центроид относительного движения с замкнутым циклом движения, как это имеет место в центроидных механизмах некруглых колес (рис. 588), не может быть практически осуществлена, так как из формулы (22.50) следует, что угол γ равен нулю при $(i_{12})' = 0$, а это будет иметь место дважды и более за оборот в положениях, где передаточная функция будет достигать экстремальных значений.

Поэтому механизмы некруглых колес всегда снабжаются зубьями (см. рис. 49 и 50). В таких механизмах по периметру профиля центроиды располагают зубья, профили которых представляют собой взаимноогнбаемые кривые.

5° Рассмотрим вопрос об углах передачи для кулачкового механизма с вращающимся толкателем (рис. 606). Угол передачи γ_{23} , образованный вектором скорости v точки C , принадлежащей звену 3, и вектором относительной скорости $v_{отн}$ точки C звена 3 в его движении относительно звена 2, может быть определен, если точку C соприкосновения профилей соединить с точками B и P_0 (см. § 108, 3°). Так как угол BSP_0 на рис. 606 больше 90° , то угол передачи γ_{23} является добавочным углом, равным $\gamma_{23} = 180^\circ - \angle BSP_0$. Выбор точек линии зацепления должен удовлетворять условию, чтобы ни в одном из положений угол передачи γ_{23} не был меньше заданного минимального угла $\gamma_{\min}$. Чтобы удовлетворить этому условию, достаточно выполнить следующее построение. Из точки B (рис. 606) восстанавливаем перпендикуляр mm к направлению BA . Далее, при точке P_0 откладываем угол $90^\circ - \gamma_{\min}$ вверх и вниз от BA и проводим P_0M и P_0M_1 до пересечения с пер-

пендикуляром mBn в точках M и M_1 . Тогда углы BMP_0 и BM_1P_0 получаются равными $\gamma_{\min}$. Через точки B, M, P_0 и B, M_1, P_0 проводим окружности с центрами в O и O_1 . Эти окружности вмеают в себя углы $\gamma_{\min}$.

Можно убедиться, что если точка C линии зацепления выбрана в области, ограниченной двумя окружностями с центрами в O и O_1 , которая на чертеже для наглядности очерчена двумя линиями, то угол γ_{23} будет всегда больше угла $\gamma_{\min}$, т. е. $\gamma_{23} > \gamma_{\min}$.

Естественно, что существует и симметрично расположенная область внизу чертежа, которая не может быть использована, если профиль K_3 располагается выше линии BA . Таким образом, если задан угол $\gamma_{\min}$, то для

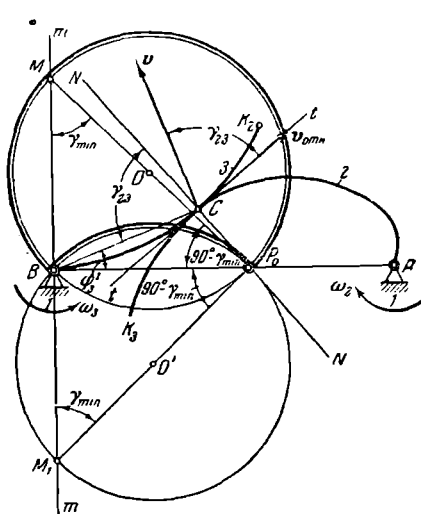


Рис. 606. К определению угла передачи в кулачковом механизме с вращающимся толкателем.

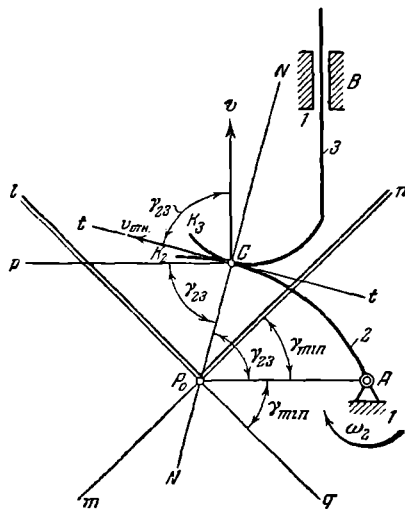


Рис. 607. К определению угла передачи в кулачковом механизме с поступательно движущимся толкателем.

каждого положения точки P_0 на линии BA может быть построена своя область возможного расположения точки соприкосновения профилей и, следовательно, установлена та общая для всех положений точки P_0 область, в которой может быть расположена линия зацепления, соответствующая углам передачи, всегда большим $\gamma_{\min}$.

6°. Рассмотрим вопрос об углах передачи для кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем (рис. 607). На рис. 607 показано, что угол передачи γ_{23} определится, если точку C соединить с мгновенным центром вращения P_0 и провести прямую CP , перпендикулярную к оси движения толкателя 3 .

Из чертежа видно, что $\angle pCP_0 = \angle CP_0A$. Откладываем при точке P_0 вверх и вниз от направления AP_0 угол $\gamma_{\min}$ и проводим прямые $m-n$ и $l-q$. Если точка C выбрана внутри области, образованной углом lP_0n , то угол γ_{23} будет всегда больше угла $\gamma_{\min}$, т. е. $\gamma_{23} > \gamma_{\min}$.

На рис. 607 границы этой области отмечены двумя линиями. Естественно, что такая же область существует в пределах угла mP_0q в случае расположения точки зацепления C ниже линии AP_0 .

7°. Вопрос об углах передачи в кулачковых механизмах с двумя поступательными парами решается весьма просто. На рис. 608 показано, что угол передачи γ_{23} образован нормалью $N-N$ и направлением движения кулачка 2. Следовательно, если задан угол $\gamma_{\min}$

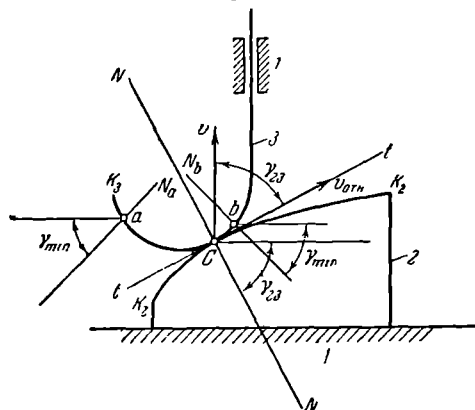


Рис. 608. К определению угла передачи в кулачковом механизме с двумя поступательными парами.

(рис. 609) для ведомого звена 4 угол передачи γ_{34} равен углу между v_C и v_{CB} .

На рис. 610 показан угол передачи γ_{34} для ведомого ползуна 4 кривошипно-ползунного механизма. Угол γ_{34} образован в этом механизме пря-

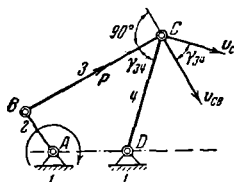


Рис. 609. К определению угла передачи в механизме шарнирного четырехзвенника.

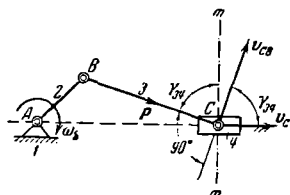


Рис. 610. К определению угла передачи в кривошипно-ползунном механизме.

мой BC и перпендикуляром $m-m$ к оси движения ползуна 4. В рассмотренных механизмах мы полагаем силу P действия звена 3 на звено 4 направленной по оси звена BC .

ГЛАВА XXIII

СИНТЕЗ ТРЕХЗВЕННЫХ ПЛОСКИХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ С КРУГЛЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КОЛЕСАМИ

§ 109. Основные сведения из теории зацеплений

1°. Пусть передача вращения между двумя осями O_1 и O_2 (рис. 611, а) с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 осуществляется посредством двух взаимноогibaемых кривых K_1 и K_2 , принадлежащих звеньям 1 и 2. Проведем в точке соприкосновения C кривых K_1 и K_2 нормаль $n-n$ и касательную $t-t$ к этим кривым.

Согласно уравнению (5.25) скорости v_{C_1} и v_{C_2} точек C_1 и C_2 , принадлежащих звеньям 1 и 2, связаны условием

$$v_{C_2} = v_{C_1} + v_{C_2 C_1}. \quad (23.1)$$

План скоростей механизма, построенный по уравнению (23.1), показан на рис. 611, б.

Из точек O_1 и O_2 (рис. 611, а) опускаем на нормаль $n-n$ перпендикуляры O_1A и O_2B , а из полюса плана скоростей (рис. 611, б)

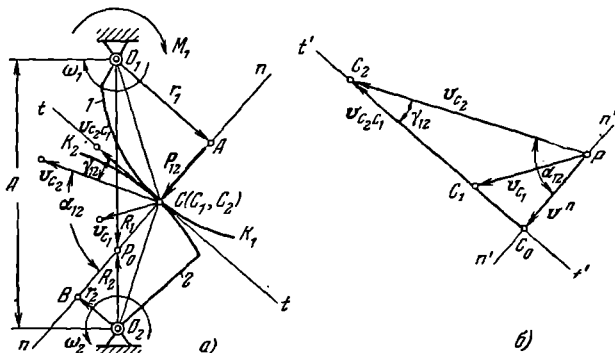


Рис. 611. К определению форм профилей двух взаимногнбасмых кривых: а) схема механизма с высшей парой; б) план скоростей.

перпендикуляр pc_0 на направление $t'-t'$. Отрезок (pc_0) представляет собою нормальную составляющую v^n вектора скоростей v_{C_1} и v_{C_2} .

Из подобия треугольников O_1AC_1 и pc_0c_1 и треугольников O_2BC_2 и pc_0c_2 имеем:

$$\frac{pc_0}{pc_1} = \frac{O_1A}{O_1C_1} \quad \text{и} \quad \frac{pc_0}{pc_2} = \frac{O_2B}{O_2C_2}. \quad (23.2)$$

Отрезки (pc_1) , (pc_2) и (pc_0) представляют собою соответственно скорости v_{C_1} , v_{C_2} и v^n . Тогда пропорции (23.2) могут быть представлены так:

$$\frac{v^n}{v_{C_1}} = \frac{O_1A}{O_1C_1} \quad \text{и} \quad \frac{v^n}{v_{C_2}} = \frac{O_2B}{O_2C_2}$$

или

$$v^n = v_{C_1} \frac{O_1A}{O_1C_1} \quad \text{и} \quad v^n = v_{C_2} \frac{O_2B}{O_2C_2}.$$

Заменяя v_{C_1} и v_{C_2} их значениями, равными

$$v_{C_1} = \omega_1(O_1C_1) \quad \text{и} \quad v_{C_2} = \omega_2(O_2C_2),$$

получаем:

$$v^n = \omega_1 (O_1 A) \quad \text{и} \quad v^n = \omega_2 (O_2 B),$$

откуда

$$\omega_1 (O_1 A) = \omega_2 (O_2 B).$$

Следовательно, передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = - \frac{O_2 B}{O_1 A} = - \frac{r_2}{r_1}. \quad (23.3)$$

Продолжим нормаль $n-n$ до пересечения в точке P_0 с отрезком $O_1 O_2$. Тогда из подобия треугольников $O_1 A P_0$ и $O_2 B P_0$ имеем:

$$\frac{O_2 B}{O_1 A} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{O_2 P_0}{O_1 P_0}.$$

Формула (23.3) принимает окончательный вид

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = - \frac{O_2 P_0}{O_1 P_0} = - \frac{R_2}{R_1}. \quad (23.4)$$

Равенство (23.4) называется *основной теоремой зацепления*. Эта теорема может быть сформулирована так:

Нормаль в точке соприкосновения элементов высшей пары качения и скольжения делит линию центров на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Тот же результат нами был получен в § 25,4° при рассмотрении аналогичного вопроса, связанного с кулачковыми механизмами. Точка P_0 , делящая линию центров $O_1 O_2$ на части, обратно пропорциональные угловым скоростям, является мгновенным центром вращения в относительном движении звеньев 1 и 2, а R_1 и R_2 являются радиусами-векторами центроид в относительном движении звеньев 1 и 2.

Расстояние A между точками O_1 и O_2 равно

$$A = R_1 + R_2. \quad (23.5)$$

Из равенств (23.4) и (23.5) следует, что радиусы R_1 и R_2 центроид равны

$$R_1 = A \frac{1}{1 + i_{12}}, \quad R_2 = A \frac{i_{12}}{1 + i_{12}}. \quad (23.6)$$

Точка P_0 , являющаяся мгновенным центром вращения в относительном движении, называется в теории зацеплений *полюсом зацепления*. При переменном значении передаточной функции i_{12} полюс зацепления P_0 занимает на линии центров $O_1 O_2$ переменные положения. При постоянном значении i_{12} полюс зацепления располагается в одной и той же точке на прямой $O_1 O_2$.

Если угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют разные знаки (см. рис. 611, а), то $i_{12} < 0$, и полюс зацепления P_0 лежит между точками O_1 и O_2 . Этот вид зацепления называется *внешним*.

Если угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют один и тот же знак и полюс зацепления P_0 лежит вне отрезка O_1O_2 , то $l_{12} > 0$. Такой вид зацепления называется *внутренним*.

2°. Если звено 1 является ведущим, а звено 2 ведомым, то угол передачи γ_{12} определяется как угол между векторами скоростей $\mathbf{v}_{C_2}$ и $\mathbf{v}_{C_2C_1}$ (рис. 611, а).

Угол давления α_{12} , равный $\alpha_{12} = 90^\circ - \gamma_{12}$, определяется как угол, образованный нормалью $n - n$ и вектором скорости $\mathbf{v}_{C_2}$.

Углы α_{12} и γ_{12} могут быть определены также из плана скоростей (рис. 611, б), если через полюс p плана скоростей проведем прямую $p' - p'$, параллельную нормали $n - n$.

Сила P_{12} , действующая со стороны звена 1 на звено 2, направлена по нормали $n - n$ и равна

$$P_{12} = \frac{M_1}{r_1},$$

где M_1 — внешний момент, приложенный к ведущему колесу 1.

Таким образом, угол давления α_{12} является углом между направлением действия силы P_{12} и вектором скорости $\mathbf{v}_{C_2}$.

3°. Если при передаче вращения между осями O_1 и O_2 (рис. 612) передаточная функция i_{12} постоянна ($i_{12} = \text{const}$), то полюс зацепления P_0 занимает постоянное положение, удовлетворяющее условию

$$l_{12} = -\frac{O_2P_0}{O_1P_0} = -\frac{R_2}{R_1}, \quad (23.7)$$

где R_1 и R_2 определяются из формул (23.6). Центроидами звеньев 1 и 2 являются окружности $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ с радиусами R_1 и R_2 . Рассмотрим вопрос о том, как могут быть построены сопряженные профили K_1 и K_2 , принадлежащие звеньям 1 и 2, если задана линия зацепления $C_1 - C_2$ (рис. 612).

Находим точки $a_1, b_1, c_1, \dots$ и $a_2, b_2, c_2, \dots$ последовательного соприкосновения центроид, для чего откладываем на центроидах $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ дуги

$$\begin{aligned} \cup P_0a_1 &= \cup P_0a_2, \\ \cup a_1b_1 &= \cup a_2b_2, \\ \cup b_1c_1 &= \cup b_2c_2, \end{aligned}$$

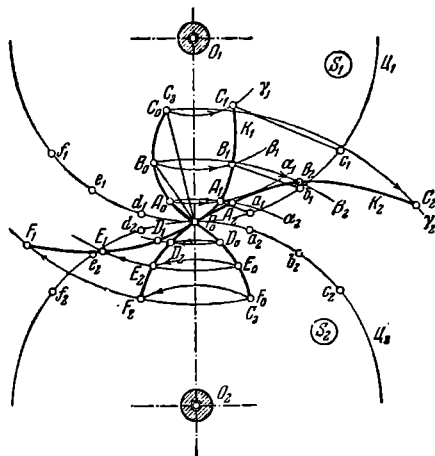


Рис. 612. Построение профилей взаимосогибаемых кривых при заданной линии зацепления.

Пусть указанным точкам соприкасания центроид соответствуют на линии зацепления C_3 точки A_0, B_0, C_0 . Например, когда совместятся точки a_1 и a_2 центроид, то сопряженные профили K_1 и K_2 взаимноогibaемых кривых должны соприкаться в точке A_0 ; когда совместятся точки b_1 и b_2 центроид, то сопряженные профили должны соприкаться в точке B_0 и т. д.

Чтобы найти точки профилей, соприкасающихся в точке A_0 , соединим точку A_0 с точкой P_0 . Когда точки a_1 и a_2 центроид совпадут, их расстояние до точки A_0 линии зацепления будет равно P_0A_0 . Точка A_1 , принадлежащая звену 1 и совмещающаяся в точке A_0 с соответствующей точкой A_2 звена 2, должна лежать на окружности A_0a_1 , проведенной из точки O_1 радиусом O_1A_0 . Соответственно точка A_2 , принадлежащая звену 2, должна лежать на окружности A_0a_2 , проведенной из точки O_2 радиусом O_2A_0 . Проводим окружности A_0a_1 и A_0a_2 . Положение точек A_1 и A_2 на этих окружностях найдем, если из точек a_1 и a_2 сделаем на них засечки радиусами, равными отрезку P_0A_0 .

Аналогично для нахождения точек профилей, совмещающихся в точке B_0 , соединяем точку B_0 с точкой P_0 и радиусом P_0B_0 делаем засечки из

Рис. 613. Построение профилей взаимноогibaемых кривых приближенным способом.

точек b_1 и b_2 на окружностях B_0b_1 и B_0b_2 . Тогда определятся точки B_1 и B_2 профилей K_1 и K_2 , принадлежащие звеньям 1 и 2. Аналогичными построениями находим точки C_1, D_1, E_1 и $C_2, D_2, E_2, \dots$ сопряженных профилей. Соединив полученные точки плавными кривыми K_1 и K_2 , получим сопряженные профили, принадлежащие звеньям 1 и 2. Таким образом, зная центроиды и точки линий зацепления, можно построить по точкам сопряженные профили.

Указанное построение может быть сделано приближенно следующим образом. Проводим из точек $a_1, b_1, c_1, \dots$ (рис 613) несколько окружностей α, β, γ , радиусами, равными P_0A, P_0B . Огибающая всех проведенных окружностей и есть кривая профиля K_1 . Аналогично, если из точек a_2, b_2, c_2 , провести ряд окружностей $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, теми же радиусами, то огибающая окружностей $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots$ является кривой профиля K_2 .

4°. Рассмотрим, далее, следующую задачу: построить кривую K_2 , принадлежащую звену 2, если заданы центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ в виде двух

окружностей и кривая K_1 , принадлежащая звену I (рис. 614). Эта задача может быть решена с помощью построения линии зацепления $C_3 - C_3$. Для этого воспользуемся условием, что нормаль в точке соприкосновения сопряженных профилей проходит через мгновенный центр вращения P_0 в их относительном движении. Принимая во внимание, что центроиды Π_1 и Π_3 представляют собой окружности, нормаль, проведенная к сопряженным профилям в точке их соприкосновения, должна проходить через одну и ту же точку P_0 . Отмечаем на заданной кривой K_1 несколько точек $A_1, B_1, C_1, \dots$. В этих точках проводим к кривой нормали $A_1a_1, B_1b_1, C_1c_1, \dots$ до пересечения в точках $a_1, b_1, c_1, \dots$ с центроидой Π_1 . При вращении звена I точка A_1 кривой K_1 описывает дугу окружности A_1a_1 радиуса O_1A_1 , и в тот момент, когда точка a_1 центроиды совпадет с точкой P_0 , точка A_1 будет находиться от точки P_0 на расстоянии $P_0A_0 = A_1a_1$. Из точки P_0 проводим дугу радиусом, равным A_1a_1 , до пересечения в точке A_0 с дугой A_1a_1 . Точка A_0 является той точкой линии зацепления, в которой происходит зацепление точки A_1 кривой K_1 с соответствующей точкой A_2 кривой K_2 . Точка B_0 линии зацепления определится, если на дуге B_1b_1 из точки P_0 сделать засечку радиусом P_0B_0 , равным отрезку B_1b_1 нормали, проведенной к кривой K_1 в точке B_1 . Аналогично определяются и остальные точки $C_0, D_0, E_0, \dots$ линии зацепления $C_3 - C_3$. Соединив точки $A_0, B_0, C_0, \dots$ плавной кривой, получим линию зацепления $C_3 - C_3$.

Построение сопряженной кривой K_2 может быть теперь проведено так, как это было сделано в примере, разобранным на рис. 612.

Отметим (рис. 614), что при рассмотренном построении сопряженных профилей K_1 и K_2 дуги $P_0a_1, a_1b_1, b_1c_1, \dots$ центроиды Π_1 должны быть соответственно равны дугам $P_0a_2, a_2b_2, b_2c_2, \dots$ центроиды Π_2 , но между собой эти дуги могут быть и не равны.

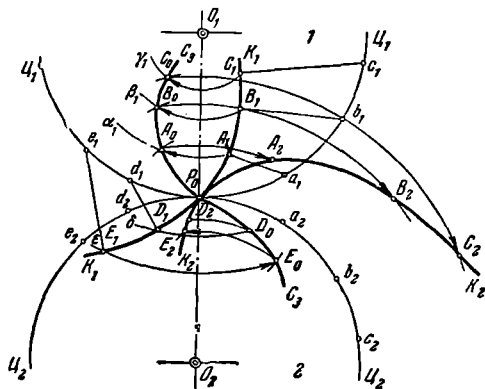


Рис. 614. Построение при заданных центроидах кривой, сопряженной с заданной кривой.

§ 110. Геометрические элементы зубчатых колес

1°. Как было показано в § 109, для построения сопряженных профилей (*профилирования*) зубьев необходимо иметь заданными центроиды в относительном движении проектируемых колес. Тогда профили зубьев, являющиеся взаимоогibaемыми кривыми, могут быть

построены точно или приближенно методами, изложенными выше, если будут заданы либо точки линии зацепления, либо очертание одного из сопряженных профилей. Какими же соображениями необходимо руководствоваться при выборе этих данных?

При выборе заданий для профилирования зубьев на практике приходится руководствоваться соображениями кинематического, динамического, технологического и, наконец, эксплуатационного характера. Соображения кинематического характера заключаются в основном в требовании, чтобы профили сопряженных зубьев могли быть построены достаточно простыми геометрическими приемами и чтобы эти профили удовлетворяли заданной передаточной функции.

Соображения динамического характера заключаются во многих требованиях, из которых можно упомянуть следующие. Необходимо стремиться к тому, чтобы при постоянной мощности, передаваемой зубчатым механизмом, давления на зубья и опоры механизма были постоянными по величине и направлению, далее, чтобы зубья имели форму, обеспечивающую наибольшую их прочность, и, наконец, износ зубьев должен быть минимальным.

Требования технологического характера в основном заключаются в проектировании профилей, которые могли бы быть достаточно просто изготовлены на современных станках.

Требования эксплуатационного характера заключаются в проектировании таких профилей, которые обеспечивали бы долговечность работы механизма, безударность и бесшумность его работы и легкость монтажа механизма. Наконец, важным является требование, чтобы в случае износа одного или двух сопряженных колес их можно было легко заменить новыми. Это условие обычно носит название *условия взаимозаменяемости* зубчатых колес. При массовом выпуске машин взаимозаменяемость зубчатых колес достигается установлением определенных норм на размеры зубчатых колес.

Поэтому, хотя теоретически можно построить зубчатый механизм с самыми различными профилями зубьев, практически выбор очертания их профилей в значительной степени стеснен вышепоставленными требованиями. Вследствие этого в машиностроении обычно пользуются только несколькими видами кривых в качестве профилей зубьев. Из этих кривых мы остановимся на рассмотрении так называемой *эвольвенте круга*, являющейся основным типом кривых, по которым очерчиваются профили зубьев современных зубчатых механизмов, и на некоторых видах *циклоидальных кривых*.

2°. Прежде чем переходить к теории профилирования эвольвентных профилей, условимся об основных терминах, определениях и обозначениях. Центроиды круглых зубчатых колес Π_1 и Π_2 (рис. 615) называются *начальными окружностями*. Профиль каждого зуба имеет часть *ebcf*, выступающую за начальную окружность и называемую *головкой зуба*, и часть *aefd*, находящуюся внутри начальной окружности, называемую *ножкой зуба*.

Так как размеры зубьев колеса одинаковы, то все головки зубьев внешнего зацепления ограничиваются снаружи *окружностями головок* радиусов $R_{г1}$ и $R_{г2}$, а все ножки зубьев ограничиваются изнутри *окружностями ножек* радиусов $R_{н1}$ и $R_{н2}$. В случае внутреннего

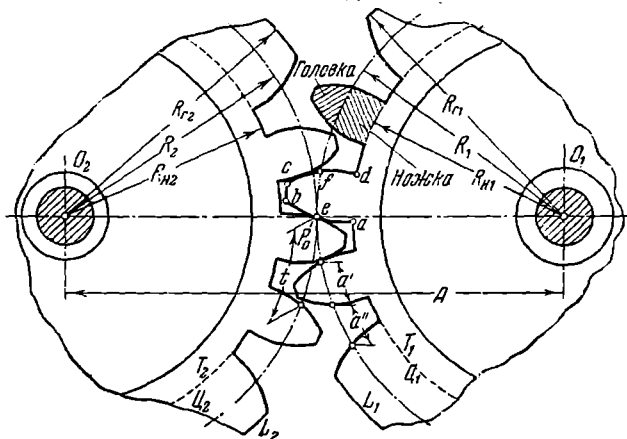


Рис. 615. Схема внешнего зубчатого зацепления.

зацепления зубья колеса с внутренним расположением зубьев ограничиваются снаружи окружностью ножек и изнутри окружностью головок. Расстояние между окружностью головок и начальной окружностью, измеренное по радиусу, носит название *высоты головки зуба* и обозначается через h' (рис. 616). Расстояние между окружностью ножек и начальной окружностью, измеренное по радиусу, носит название *высоты ножки зуба* и обозначается через h'' . Таким образом, полная высота h зуба равна

$$h = h' + h''.$$

Дуга начальной окружности, вмещающая один зуб (без впадины), носит название *толщины зуба* и обозначается через a' (рис. 616). Дуга начальной окружности, вмещающая впадину (расстояние между двумя соседними зубьями) называется *шириной впадины* и обозначается через a'' . Дуга начальной окружности, состоящая из одной толщины зуба и одной ширины впадины, называется *шагом зацепления по начальной окружности* и обозначается через t_n . Таким образом, шаг зацепления t_n равен

$$t_n = a' + a''.$$

При передаче непрерывного движения двумя сопряженными колесами шаг зацепления бывает одинаков для обоих сопряженных колес.

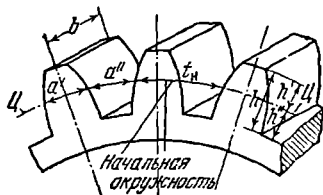


Рис. 616. Часть обода зубчатого колеса с внешними зубьями.

Как было показано выше [см. § 43,1°, (10.25)], передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{R_2}{R_1} = \pm \frac{z_2}{z_1},$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости соответственно колес 1 и 2, R_1 и R_2 — радиусы начальных окружностей этих колес и z_1 и z_2 — числа их зубьев.

Длины начальных окружностей колес 1 и 2 равны

$$2\pi R_1 = z_1 t_n \quad \text{и} \quad 2\pi R_2 = z_2 t_n. \quad (23.8)$$

Из формул (23.8) следует, что шаг зацепления t_n по начальной окружности равен

$$t_n = \frac{2\pi R_1}{z_1} = \frac{2\pi R_2}{z_2}.$$

Аналогично можно вычислить шаг по любой другой окружности.

Отсюда видно, что шаг зацепления всегда выражается через радиус или через диаметр окружности несоизмеримым числом, так как в правую часть входит трансцендентное число π . Это затрудняет подбор размеров зубчатых колес при проектировании колес и практическое их измерение. Поэтому для определения основных размеров зубчатых колес в качестве основной единицы принят некоторый параметр, называемый *модулем зацепления*. Модуль зацепления измеряется в миллиметрах и обозначается буквой m . Величина модуля равна

$$m = \frac{t}{\pi}.$$

Зубья колес нарезаются на специальных станках режущим инструментом, размеры и форма которого зависят от величины модуля. Чтобы не иметь на машиностроительных заводах, изготавливающих зубчатые колеса, большие комплекты режущих инструментов, общесоюзным стандартом (ГОСТ 9563—61) установлены два ряда модулей, до которых должны округляться модули, получаемые из расчета. В первом предпочтительном ряду предусмотрены следующие модули в мм: 0,05; 0,06; 0,08; 0,1; 0,12; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 1,0; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 25; 32; 40; 50; 60; 80; 100.

Во втором ряду предусмотрены модули, промежуточные между модулями первого ряда, например: 3,5; 4,5; 5,5; 7; 9; 11 и др.

Окружность зубчатого колеса, для которой модуль получается стандартным, называется *делительной*. Делительные окружности в зацеплении двух колес часто совпадают с соответствующими начальными окружностями.

3°. Размеры зубчатых колес могут быть выражены в функциях модуля по делительной окружности и числа зубьев. Как указывалось

выше, в некоторых случаях зубчатые колеса имеют начальные окружности, совпадающие с делительными окружностями. Такие колеса иногда называют *стандартными*. Для этих колес согласно формуле (23.8) диаметры D_1 и D_2 начальных окружностей могут быть представлены в виде

$$D_1 = 2R_1 = \left\{ \frac{t}{\pi} z_1 = mz_1, \right. \quad (23.9)$$

$$D_2 = 2R_2 = \left\{ \frac{t}{\pi} z_2 = mz_2, \right. \quad (23.10)$$

где z_1 и z_2 — соответственно числа зубьев колес 1 и 2. Высота h' головки зуба и высота h'' ножки зуба в стандартных колесах обычно принимаются равными $h' = m$ и $h'' = 1,25m$. Большой размер ножки по сравнению с головкой обеспечивает зазор между головкой зуба и впадиной. Диаметры D_{r1} и D_{r2} окружностей L_{r1} и L_{r2} головок (рис. 615) для стандартных колес с нормальной высотой зубьев равны

$$D_{r1} = D_1 + 2h' = mz_1 + 2m = m(z_1 + 2), \quad (23.11)$$

$$D_{r2} = D_2 + 2h' = mz_2 + 2m = m(z_2 + 2). \quad (23.12)$$

Диаметры D_{n1} и D_{n2} окружностей ножек T_1 и T_2 (рис. 615) равны

$$D_{n1} = D_1 - 2h'' = mz_1 - 2,5m = m(z_1 - 2,5), \quad (23.13)$$

$$D_{n2} = D_2 - 2h'' = mz_2 - 2,5m = m(z_2 - 2,5). \quad (23.14)$$

Кроме колес с нормальной высотой зуба применяются колеса с укороченными зубьями. Для колес с укороченной высотой зубьев эти диаметры принимаются равными:

$$D_{r1} = m(z_1 + 1,6), \quad D_{r2} = m(z_2 + 1,6),$$

$$D_{n1} = m(z_1 - 2,2), \quad D_{n2} = m(z_2 - 2,2).$$

Расстояние A между центрами O_1 и O_2 стандартных колес (рис. 615) может быть также выражено через число зубьев и модуль зацепления

$$A = \frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2} = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m}{2} (z_1 + z_2). \quad (23.15)$$

В расчетах, связанных с проектированием зубчатых колес, часто пользуются относительными величинами. В частности, высота h' головки зуба часто выражается через модуль m , помноженный на коэффициент χ' :

$$h' = \chi' m. \quad (23.16)$$

Точно так же высота h'' ножки зуба принимается равной

$$h'' = \chi'' m. \quad (23.17)$$

Величина χ' обычно принимается $\chi' = 1$ для колес с неукороченной высотой зубьев и $\chi' = 0,8$ — для колес с укороченной высотой зубьев. Соответственно χ'' принимается равной $\chi'' = 1,25$ и $\chi'' = 1,1$. Поэтому в общем виде формулы (23.11) имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} D_{r1} &= m(z_1 + 2\chi'), & D_{r2} &= m(z_2 + 2\chi'), \\ D_{n1} &= m(z_1 - 2\chi''), & D_{n2} &= m(z_2 - 2\chi''). \end{aligned} \right\} \quad (23.18)$$

§ 111. Геометрия эвольвентных профилей

1°. Остановимся на вопросе о том, что представляет собой эвольвента круга и какими важными для теории зацепления свойствами она обладает. Пусть задана окружность с центром в точке O (рис. 617). Проведем прямую AB , касательную к этой окружности, и будем катить эту прямую без скольжения по окружности. Для

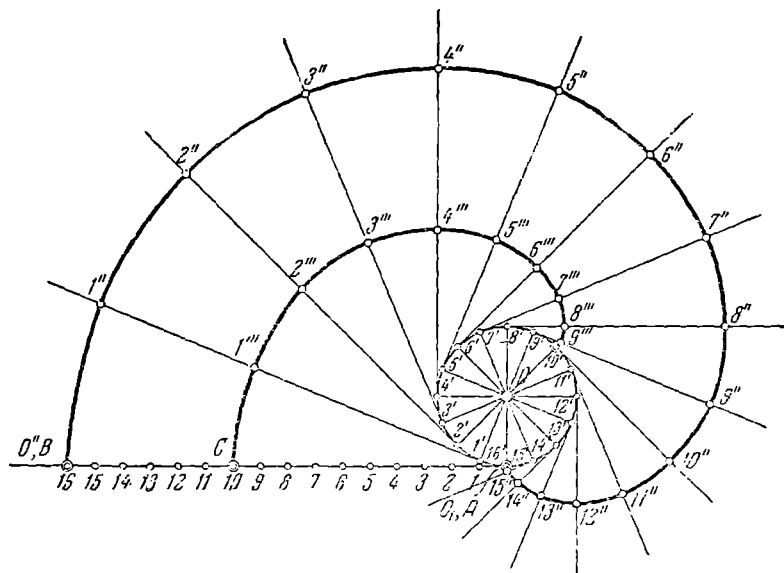


Рис. 617. Эвольвенты круга.

построения эвольвенты круга делим окружность на равные дуги: $\cup A-I'$, $\cup I'-2'$, $\cup 2'-3'$, $\cup 3'-4'$, ... На прямой откладываем точки A участки, равные этим дугам так, что имеем $\cup A-I' = A-I$, $\cup I'-2' = I-2$, $\cup 2'-3' = 2-3$, ..., $\cup 15'-16' = 15-16$.

Тогда при качении прямой AB без скольжения по окружности точки $1, 2, 3, \dots, 16$ прямой AB будут последовательно совпадать с точками $1', 2', 3', \dots, 16'$ окружности. При этом все точки прямой

Высота y эвольвенты над окружностью, измеренная на продолжении радиуса окружности, определяется из равенства

$$(y + r) \cos \alpha = r,$$

откуда

$$y = \frac{r}{\cos \alpha} (1 - \cos \alpha).$$

Наконец, угол ϑ , определяющий направление радиуса-вектора $\overline{OM}$ любой точки M эвольвенты, равен

$$\vartheta = \theta - \alpha,$$

откуда, принимая во внимание равенство (23.22), имеем:

$$\vartheta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha. \quad (23.23)$$

Полученная функция угла α называется *эвольвентной функцией* и обозначается сокращенно inv (*инволюта*). Имеем:

$$\vartheta = \operatorname{inv} \alpha. \quad (23.24)$$

Полученной функцией пользуются для аналитического определения направления радиуса-вектора OM . Для удобства вычислений составляются таблицы $\operatorname{inv} \alpha$ для различных значений угла α *).

3°. Профили зубьев круглых колес, построенные по эвольвентам, всегда обеспечивают передачу движения с постоянным передаточным отношением. Для доказательства покажем, что нормаль к сопряженным профилям, построенным по эвольвентам, всегда проходит через мгновенный центр вращения P_0 в стносительном движении, занимающий постоянное положение на прямой O_1O_2 (рис. 619).

Пусть заданы центры C_1 и C_2 (рис. 619). Через мгновенный центр вращения P_0 проводим прямую $N-N$ под произвольно выбранным углом α к касательной $t-t$. Далее, из точек O_1 и O_2 опускаем на прямую $N-N$ перпендикуляры O_1A и O_2B и проводим радиусами $O_1A = r_1$ и $O_2B = r_2$ окружности. Эти окружности примем за эволюты — за геометрические места центров кривизны эвольвент. Указанные окружности носят название *основных окружностей*. Прямая $N-N$, являющаяся по построению общей касательной к этим окружностям, называется *образующей прямой*. Мгновенный центр P_0 является *полюсом зацепления*, а угол α — *углом зацепления*. Эвольвенты могут быть получены качением образующей прямой $N-N$ по основным окружностям. Для этого, как было показано на рис. 617, делим образующую прямую AB на равные отрезки и откладываем на основных окружностях дуги, равные этим отрезкам. Тогда точка

*) См. Артоболевский И. И., Зинovieв В. А., Эдельштейн Б. В., Сборник задач по теории механизмов и машин, Гостехиздат, 1951.

образующей прямой, совпадающая с центром P_0 , описывает при качении по основной окружности колеса 1 эвольвенту $P_0\mathcal{E}_1$. При качении той же прямой по основной окружности колеса 2 та же точка опишет эвольвенту $P_0\mathcal{E}_2$. Эвольвенты $P_0\mathcal{E}_1$ и $P_0\mathcal{E}_2$ имеют крайние точки I' и I'' , лежащие на основных окружностях. В противоположном направлении эвольвенты могут быть продолжены безгранично. Если продолжать катить образующие прямые за точки I' и I'' , то мы получим симметрично расположенные ветви эвольвент.

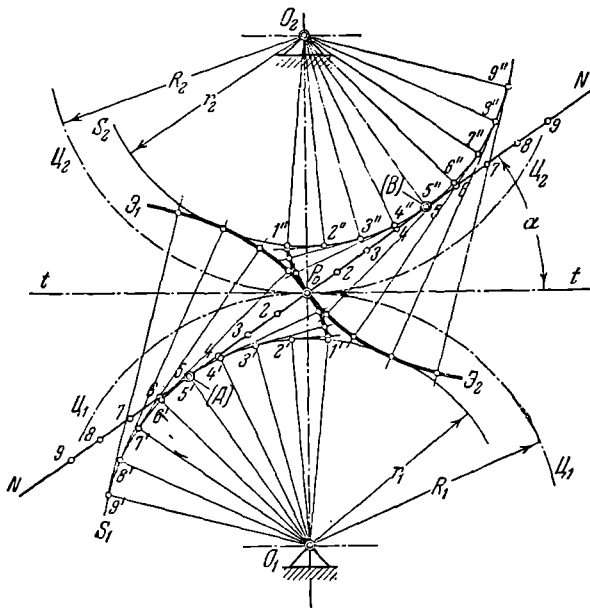


Рис. 619. Схема зацепления двух эвольвентных профилей.

4°. Можно показать, что если указанным способом построены эвольвенты, то общая нормаль в любой точке соприкосновения профилей всегда будет проходить через полюс зацепления P_0 .

Пусть заданы центроиды U_1 и U_2 (рис. 620) и угол α наклона образующей прямой $N-N$ к касательной $t-t$. Строим основные окружности S_1 и S_2 и эвольвенты $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$.

В показанном на рис. 620 исходном положении двух эвольвент $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ их общая нормаль $N-N$ проходит через полюс зацепления P_0 и одновременно касается основных окружностей S_1 и S_2 . Представим себе, что колеса повернулись, и эвольвенты заняли новое положение. Нормаль к эвольвенте $\mathcal{E}_1$ в этом положении должна быть касательной к основной окружности S_1 , а нормаль к эвольвенте $\mathcal{E}_2$ должна касаться окружности S_2 . Так как в точке касания эвольвент

нормаль должна быть общая, то она должна одновременно касаться и той и другой основной окружности, и, таким образом, при вращении колес их общая нормаль не меняет своего положения и все время проходит через полюс зацепления P_0 . Следовательно, передаточное отношение i_{12} от колеса 1 к колесу 2, равное

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{O_2 P_0}{O_1 P_0},$$

при вращении колес остается постоянным.

Таким образом *эвольвентное зацепление обеспечивает постоянство передаточного отношения.*

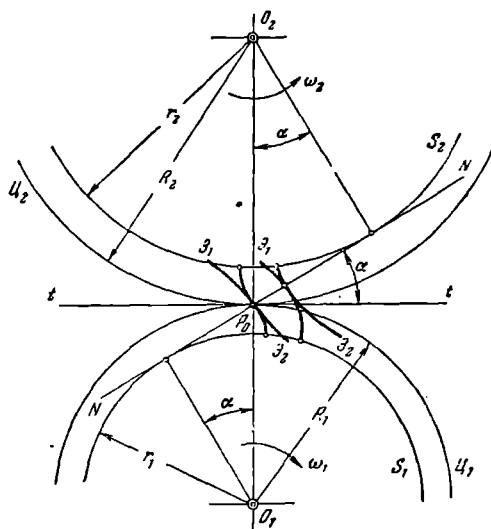


Рис. 620. Зацепление эвольвент в двух положениях касания.

5°. Между радиусами r_1 , R_1 и r_2 , R_2 основных и начальных окружностей (рис. 620) существует простая зависимость

$$r_1 = R_1 \cos \alpha, \quad r_2 = R_2 \cos \alpha, \quad (23.25)$$

откуда в случае внешнего зацепления имеем:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{r_2}{r_1}. \quad (23.26)$$

Таким образом передаточное отношение i_{12} не зависит от угла зацепления α , а только от радиусов основных окружностей.

Из условия (23.26) следует, что при изменении расстояния $O_1 O_2$ (рис. 621) между осями колес с эвольвентным профилем зубьев

передаточное отношение i_{12} не изменяется, если при этом сохранены радиусы основных окружностей. Отступление от расчетного расстояния O_1O_2 может иметь место при монтаже и сборке механизма. На рис. 621 показаны два колеса, с центрами в точках O_1 и O_2 , находящиеся в зацеплении. Пусть центр O_2 переместится в положение O'_2 . Тогда прямая $N-N$ займет положение $N'-N'$. Полус зацепления будет не в точке P_0 , а в точке P'_0 . Тем самым изменятся радиусы начальных окружностей. Вместо радиусов R_1 и R_2 будем иметь соответственно R'_1 и R'_2 .

Наконец, изменится и угол зацепления α , который примет значение α' . Передаточное же отношение i_{12} окажется по-прежнему равно

$$i_{12} = -\frac{r_2}{r_1},$$

так как радиусы r_1 и r_2 основных окружностей не изменились.

Из указанного свойства колес с эвольвентными профилями зубьев следует, что угол зацепления α определяется только после сборки и монтажа сопряженных колес. Поэтому различают расчетный угол зацепления α и угол α' , который называют *монтажным углом зацепления* и обозначают α_3 .

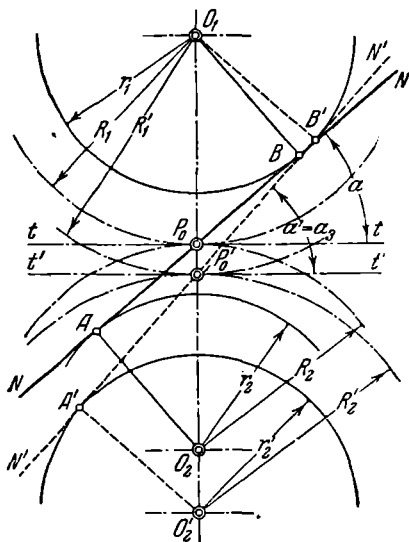


Рис. 621. К вопросу об изменении межцепного расстояния двух колес с эвольвентным зацеплением.

§ 112. Проектирование эвольвентных профилей

1°. Вопрос о построении эвольвентных профилей зубьев начнем с рассмотрения внешнего зацепления. Определим радиусы R_1 и R_2 начальных окружностей по заданному передаточному отношению i_{12} и расстоянию A между центрами колес из следующих соотношений:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad A = R_1 + R_2,$$

где z_1 и z_2 — числа зубьев колес.

Здесь мы рассмотрим тот случай, когда $A = \frac{m}{2} (z_1 + z_2)$ [см. формулу (23.15) § 110,3°], т. е. когда колеса являются стандартными. Пусть Π_1 и Π_2 на рис. 622 суть начальные окружности. В полюсе зацепления P_0 проводим касательную $t-t$ к этим окружностям. Далее, проводим образующую прямую $N-N$ под углом зацепления α

к касательной $t-t$. В стандартных колесах угол зацепления α обычно принимается $\alpha = 20^\circ$. Все соотношения размеров зубьев принимаем в соответствии с § 110. Опускаем из точек O_1 и O_2 перпендикуляры

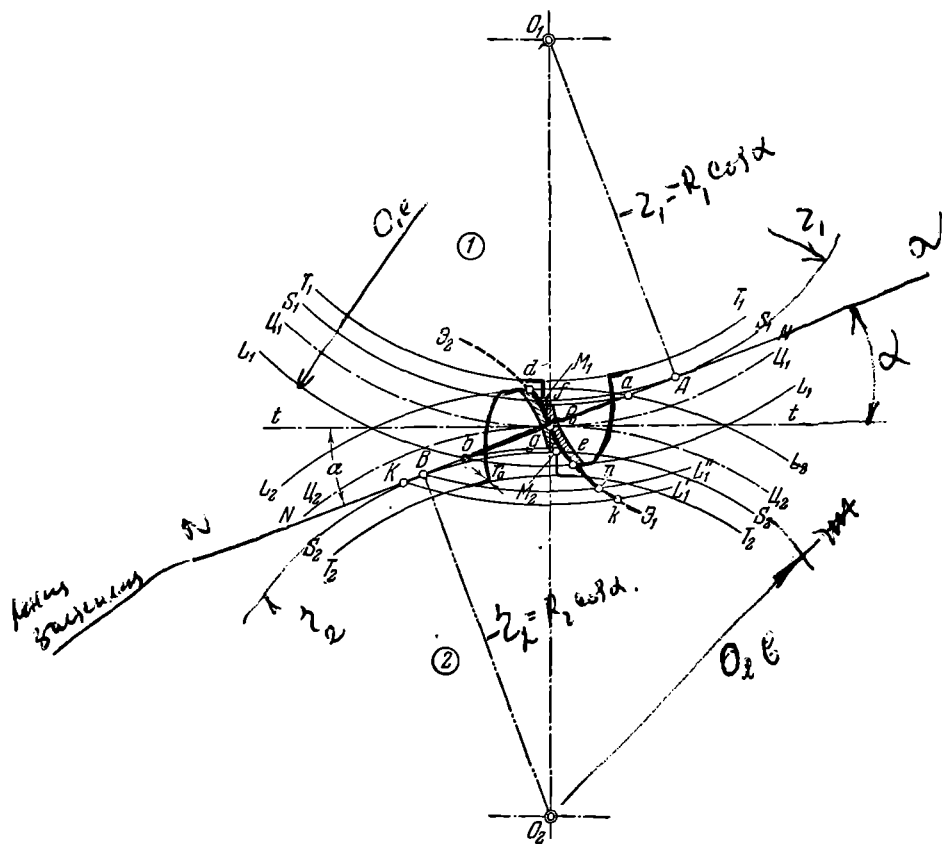


Рис. 622. К определению основных параметров внешнего эвольвентного зацепления.

O_1A и O_2B на образующую прямую $N-N$. Обозначая длины этих перпендикуляров через r_1 и r_2 , получаем согласно формулам (23.25)

$$r_1 = R_1 \cos \alpha, \quad r_2 = R_2 \cos \alpha. \quad (23.27)$$

Построим радиусами r_1 и r_2 основные окружности S_1 и S_2 . Проводим, далее, окружности головок L_1 и L_2 и окружности ножек T_1 и T_2 , радиусы которых вычисляем по формулам (23.11) — (23.14). Перекатывая образующую прямую по основным окружностям, находим эвольвенты M_1A_1 и M_2A_2 . Как видно из чертежа, эвольвенты начи-

наются в точках M_1 и M_2 , лежащих на основных окружностях S_1 и S_2 , и кончаются в точках e и d , лежащих на окружностях L_1 и L_2 головок.

2°. Определим крайние точки, в которых соприкасаются сопряженные профили зубьев. Так как линией зацепления служит сама образующая прямая $N-N$, то радиусом O_1e делаем на прямой $N-N$ засечку в точке b . Так как точка e лежит на окружности головок, то точка b и является крайней точкой линии зацепления, в которой зубья могут соприкасаться. Радиусом O_2b на профиле M_2d засекаем точку g . Точка g будет той точкой, которая приходит в совпадение с точкой e в точке b ; тогда часть профиля зуба колеса 2, участвующего в зацеплении, есть отрезок кривой, расположенный между точками g и d .

Аналогичным построением определим часть профиля зуба колеса 1, участвующего в зацеплении. Это — часть кривой между точками f и e . Отрезки профилей gd и fe носят название *рабочих участков профилей зубьев*. Из построения следует, что участки M_2g и M_1f эвольвент являются *нерабочими* точно так же, как и остальные части ножек. Нерабочие участки профилей зубьев в общем случае могут быть очерчены любым образом, но так, чтобы сопряженные зубья свободно выходили из зацепления. Участок кривой, по которой очерчены нерабочий участок профиля зуба, называется *галтелью*. Можно, например, от точек M_1 и M_2 очерчивать ножки по радиальным прямым M_1O_1 и M_2O_2 . В местах сопряжения ножек с окружностями T_1 и T_2 делают обычно небольшое закругление радиусом r_0 , равным от 0,3 до 0,4 модуля m . Симметричные части зубьев строятся по законам симметрии.

Таким образом, в общем случае действительная линия зацепления эвольвентных профилей представляется в виде участка ab образующей прямой, заключенного между окружностями головок. Указанный участок носит название *практической линии зацепления*.

Длина ab практической линии зацепления зависит от высоты головок зубьев или иначе от диаметров окружностей головок. Размеры высоты головок, вообще говоря, могут быть больше, чем показано на рис. 622, но не должны выходить за пределы окружностей, описанных из центров O_1 и O_2 и проходящих через точки A и B образующей прямой $N-N$. Отрезок AB , определяющий предельную длину линии зацепления, называется *теоретической линией зацепления*.

Таким образом увеличение рабочих участков профилей зубьев возможно за счет увеличения диаметров окружностей головок. Однако если окружность головок одного из колес пересекает линию зацепления за пределами теоретической линии зацепления, то весь участок профиля, точки которого лежат вне линии зацепления, оказывается нерабочим. Например, если окружностью головок колеса 1 есть окружность L'_1 (рис. 622), то на участке kn профиль получается нерабочим. На участке ne профиль будет рабочим только в том

случае, если окружностью головок колеса 1 будет окружность L_1'' , пересекающая линию зацепления в точке B .

3°. Аналогично могут быть построены эвольвентные профили зубьев внутреннего зацепления. На рис. 623 показаны соприкасающиеся в точке P_0 центры $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$. Через точку P_0 проводим образующую прямую $N-N$ под углом зацепления α к касательной

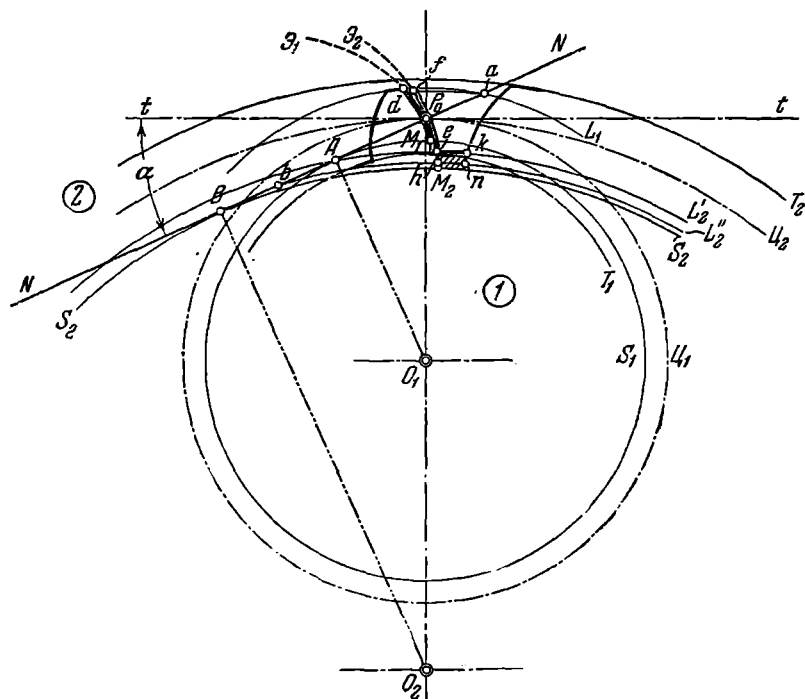


Рис. 623. К определению основных параметров внутреннего эвольвентного зацепления.

$t-t$. Из точек O_1 и O_2 опускаем перпендикуляры O_1A и O_2B и проводим основные окружности S_1 и S_2 . Далее, перекачивая прямую $N-N$ по основной окружности S_1 , получаем эвольвенту $M_1\mathcal{E}_1$. При перекачивании прямой $N-N$ по основной окружности S_2 получаем эвольвенту $M_2\mathcal{E}_2$. Проводим, далее, окружность L_1 головок и окружность T_1 ножек малого зубчатого колеса 1 и строим профиль зуба так, как это было показано выше при построении внешнего зацепления. Для большого колеса 2, имеющего зубья, расположенные по внутренней поверхности, формулы для диаметров окружностей головок и ножек, для зубьев со стандартной высотой головки имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} D_{r2} &= D_2 - 2h' = m(z_2 - 2), \\ D_{v2} &= D_2 + 2h'' = m(z_2 + 2,5). \end{aligned} \right\} \quad (23.28)$$

Из построения видно, что окружность головок колеса 2 может пересечь линию зацепления $N—N$ правее точки A , левее нее или может пройти через точку A . В первом случае весь участок головки зуба колеса 2 получается рабочим. При пересечении указанной окружности с линией $N—N$ левее точки A , например, окружность головок L'' пересекает прямую $N—N$ в точке b , участок профиля he не может быть использован для целей зацепления, а потому практически не выполняется. Таким образом, головка зуба колеса 2 ограничена по высоте отрезком эвольвенты P_0e , где точка e есть пересечение окружности головок, проходящей через предельную точку A на линии зацепления с профилем зуба. Участок же профиля M_2e эвольвенты в качестве профиля зуба колеса 2 использовать нельзя. Другой предельной точки теоретической линии зацепления быть не может, потому что обе эвольвенты могут быть безгранично продолжены за точки d и f .

Таким образом, фактическая линия зацепления представляет собой отрезок Aa . Рабочей частью профиля зуба малого колеса 1 есть участок M_1d профиля, а рабочей частью профиля зуба большого колеса 2 — участок fe профиля.

4°. Переходим к проектированию реечного зацепления между рейкой и колесом. Центроидами в этом зацеплении являются прямая $\mathcal{U}_1$ и окружность $\mathcal{U}_2$ (рис. 624). Через точку P_0 проводим образующую прямую $N—N$ под углом зацепления α к прямой $\mathcal{U}_1$. Из точки O_2 опускаем на образующую прямую перпендикуляр O_2A и проводим основную окружность S_2 колеса. Далее, по общим правилам строим профили зубьев колеса так, как это было изложено для зубчатых колес с внешним зацеплением. По свойствам эвольвентных профилей профили зубьев рейки должны соприкасаться с профилями зубьев колеса на прямой $N—N$, и общая нормаль к точке соприкосновения должна проходить через полюс зацепления P_0 . Так как рейка имеет только поступательное движение, то, чтобы зацепление происходило на прямой $N—N$ и нормаль к соприкасающимся профилям проходила через постоянную точку P_0 , необходимо, чтобы все нормали к профилю зуба рейки были параллельны прямой $N—N$. Но если все нормали к профилю параллельны одной и той же прямой $N—N$, то, очевидно, сам профиль представляет собой прямую линию, перпендикулярную к этой прямой. Поэтому профиль зуба рейки может

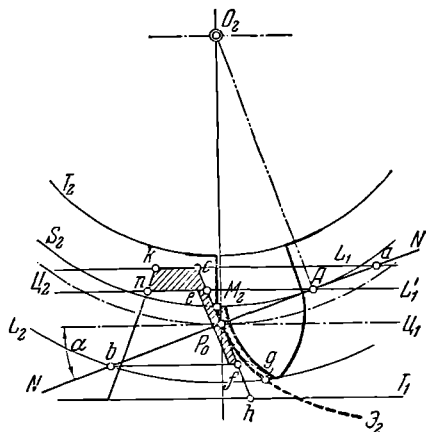


Рис. 624. Схема реечного зубчатого зацепления.

быть получен, если через точку P_0 провести прямую ch , перпендикулярную к образующей прямой $N-N$. Головка зуба рейки заканчивается на прямой головок L_1 , а ножка на прямой ножек T_1 . Высота головок и ножек подсчитывается по формулам, указанным в § 110. Теоретическая линия зацепления так же, как и при внутреннем зацеплении, имеет только одну предельную точку — точку A . В самом деле, эвольвента $M_2\Xi_2$ и прямая ch теоретически могут быть безгранично продолжены за точки g и h . Практическая линия зацепления заключена между окружностью головок L_2 и прямой головок L_1 . Так как на рис. 624 точка a практической линии зацепления оказалась за точкой A , то, проведя прямую AL'_1 , параллельную прямой Cl_1 , видим, что участок se профиля зуба рейки оказывается нерабочим и, следовательно, часть $nkse$ зуба не должна выполняться. Для определения второй точки рабочего участка профиля зуба проводим через точку b линии зацепления прямую, параллельную прямой Cl_1 , до пересечения в точке f с профилем зуба рейки. Рабочий участок профиля рейки есть участок профиля fe .

Из рассмотренных примеров следует, что чем больше теоретическая линия зацепления, тем большими могут быть выбраны высоты головки зубьев и, следовательно, увеличены рабочие участки профилей. Теоретическая же линия зацепления будет тем больше, чем больше угол зацепления α . Необходимо только помнить, как это было показано в § 108,2°, что увеличение практической линии зацепления будет увеличивать расстояния от точек касания до полюса зацепления. Увеличение этого расстояния вызовет увеличение относительной скорости скольжения профилей и, следовательно, увеличит мощность, идущую на трение между зубьями [см. формулу (22.47) в § 108], а это будет вызывать большой износ профилей зубьев.

§ 113. Дуга зацепления и коэффициент перекрытия

1°. Найдем теперь путь, пройденный любой точкой начальной окружности за время зацепления одной пары сопряженных профилей зубьев. Пусть практическая линия зацепления заключается между точками a и b (рис. 625). В момент начала зацепления профиль зуба колеса I занимает положение I . В момент конца зацепления тот же профиль находится в положении II . Дуга dd' есть дуга, на которую перекажутся начальные окружности за время зацепления одной пары сопряженных профилей. Дуга dd' носит название *дуги зацепления*. Длина дуги зацепления может быть выражена через длину линии зацепления и угол зацепления. Для этого соединим точки d и d' с центром O_1 и обозначим угол dO_1d' через θ_1 . Отметим, далее, начальные точки s и s' эвольвенты зуба. Эти точки лежат на основной окружности, и угол sO_1s' также равен углу θ_1 . Длина дуги dd' :

$$\cup dd' = R_1\theta_1. \quad (23.29)$$

Длина дуги cc'

$$\cup cc' = r_1 \theta_1,$$

откуда

$$\theta_1 = \frac{\cup cc'}{r_1}. \quad (23.30)$$

Подставляя выражение (23.30) в равенство (23.29), получаем:

$$\cup dd' = \frac{R_1}{r_1} \cup cc_1. \quad (23.31)$$

Из свойств эвольвенты следует:

$$\cup cc' = \cup Ac' - \cup Ac = Ab - Aa = ab.$$

Далее, из формулы (23.27) имеем:

$$r_1 = R_1 \cos \alpha,$$

где α есть угол зацепления. Теперь равенство (23.31) можно написать так:

$$\cup dd' = \frac{R_1 (ab)}{R_1 \cos \alpha} = \frac{(ab)}{\cos \alpha}. \quad (23.32)$$

Таким образом, длина дуги зацепления на начальной окружности равна длине линии зацепления, деленной на косинус угла зацепления.

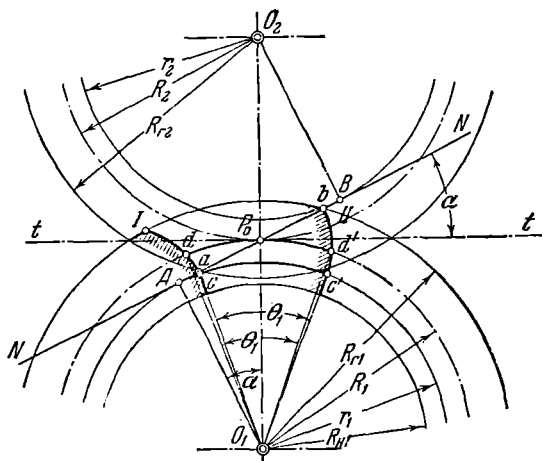


Рис. 625. К определению дуги зацепления и коэффициента перекрытия.

Аналогичным путем можно определить дугу зацепления по любой другой окружности. Если дугу зацепления измерять по основной окружности, то мы получим длину, равную длине рабочего участка линии зацепления.

2°. Если дуга зацепления равна шагу зацепления t , то при перекатывании начальных окружностей на эту дугу только одна пара сопряженных профилей зубьев находится одновременно в зацеплении. Если дуга зацепления будет меньше шага зацепления, то в зацеплении произойдет перерыв, и передача будет работать с ударом. Если наоборот, дуга зацепления будет больше шага зацепления, то некоторое время в зацеплении будет находиться одна пара профилей, а остальное время — две пары, может быть, и более.

Так как при изготовлении зубьев возникают некоторые неточности в очертании профилей, то не рекомендуется при проектировании ограничиваться тем предельным случаем, когда дуга зацепления равняется шагу зацепления. Желательно, чтобы дуга зацепления всегда была несколько больше шага зацепления. Тогда передача будет работать плавно, без ударов. Таким образом, в правильно спроектированной передаче желательно, чтобы отношение дуги зацепления к шагу t было больше единицы, т. е.

$$\epsilon = \frac{\text{дуга зацепления}}{t} > 1.$$

Отношение дуги зацепления к шагу, которое обозначим буквой ϵ , называется *коэффициентом перекрытия*.

Принимая во внимание формулу (23.32), получаем:

$$\epsilon = \frac{\cup dd_1}{t} = \frac{(ab)}{t \cos \alpha} = \frac{(ab)}{\pi m \cos \alpha}, \quad (23.33)$$

так как шаг зацепления $t = \pi m$.

В современной практике для внешнего зубчатого зацепления коэффициент перекрытия обычно получается в пределах

$$1 < \epsilon < 2.$$

3°. Величина $t \cos \alpha$, стоящая в формуле (23.33), носит название *основного шага зацепления* и обозначается буквой t_0 . Таким образом, основной шаг зацепления связан с шагом зацепления t условием

$$t_0 = t \cos \alpha = \pi m \cos \alpha. \quad (23.34)$$

Из формулы (23.34) следует, что основной шаг представляет собой дугу, измеренную по основной окружности и вмещающую один зуб и одну впадину. Коэффициент перекрытия ϵ может быть тогда представлен как отношение линии зацепления к основному шагу зацепления

$$\epsilon = \frac{(ab)}{t_0}. \quad (23.35)$$

Коэффициент перекрытия ϵ может быть определен и аналитически. В самом деле, из рис. 625 имеем:

$$\begin{aligned} (ab) &= (AB) - (Bb) - (Aa) = (AB) - (AB - Ab) - (AB - Ba) = \\ &= (AB) - (AB) + (Ab) - (AB) + (Ba) = (Ab) + (Ba) - (AB). \end{aligned}$$

Но так как $(Ab) = \sqrt{R_{r1}^2 - r_1^2}$, $(Ba) = \sqrt{R_{r2}^2 - r_2^2}$ и $(AB) = A \sin \alpha$, где R_{r1} и R_{r2} — радиусы окружностей головок колес и A — расстояние между осями O_1 и O_2 колес, то

$$(ab) = \sqrt{R_{r1}^2 - r_1^2} + \sqrt{R_{r2}^2 - r_2^2} - A \sin \alpha.$$

Подставляя последнее выражение в соотношение (23.33), получаем:

$$\epsilon = \frac{\sqrt{R_{r1}^2 - r_1^2} + \sqrt{R_{r2}^2 - r_2^2} - A \sin \alpha}{\pi m \cos \alpha}. \quad (23.36)$$

4°. В некоторых случаях удобно выразить коэффициент перекрытия через углы, соответствующие дуге зацепления и основному шагу зацепления. Из соотношения (23.30) следует, что угол θ_1 равен

$$\theta_1 = \frac{\cup cc'}{r_1} = \frac{(ab)}{r_1},$$

откуда получается длина практической линии зацепления

$$(ab) = \theta_1 r_1.$$

Величина основного шага зацепления t_0 равна

$$t_0 = r_1 \psi_1,$$

где ψ_1 есть угол, дуга которого, измеренная по основной окружности, равна t_0 . Дуга t_0 вмещает один зуб и одну впадину. Угол θ_1 есть угол, на который поворачивается зубчатое колесо I за то время, в течение которого пара сопряженных профилей находится в зацеплении.

Из равенства (23.35) следует:

$$\epsilon = \frac{(ab)}{t_0} = \frac{\theta_1 r_1}{r_1 \psi_1} = \frac{\theta_1}{\psi_1}. \quad (23.37)$$

Коэффициент перекрытия может быть также выражен через углы θ_2 и ψ_2 , относящиеся к колесу 2:

$$\epsilon = \frac{\theta_2}{\psi_2}.$$

Так как $\psi_1 z_1 = 2\pi$ и $\psi_2 z_2 = 2\pi$, то

$$\epsilon = \frac{\theta_1 z_1}{2\pi} = \frac{\theta_2 z_2}{2\pi}. \quad (23.38)$$

Из формулы (23.35) следует, что с увеличением практической линии зацепления (ab) увеличивается и коэффициент перекрытия. Таким образом, для увеличения коэффициента перекрытия следует увеличивать практическую линию зацепления, что может быть достигнуто увеличением высот головок зубьев в пределах теоретической линии зацепления. Формула (23.36) может быть использована для определения коэффициента перекрытия профилей зубьев и различных очертаний профилей.

5°. Из равенства (23.38) следует, что коэффициент перекрытия увеличивается при увеличении числа зубьев колес. На рис. 626 изображена диаграмма зависимости коэффициента перекрытия ϵ стандартных колес от числа зубьев z_1 малого колеса и передаточного отношения i_{21} . Диаграмма построена в предположении, что высота головки $h' = m$ и угол зацепления $\alpha = 20^\circ$. Значения передаточного отношения i_{21} , отложенные влево от оси ординат

$O\epsilon$, относятся к внешнему зацеплению, а значения i_{21} , отложенные вправо от оси $O\epsilon$, относятся к внутреннему зацеплению.

Для $z_1=20$ кривая доведена только до точки A , соответствующей $i_{21}=1/5$. Для $z_1=25$, $z_1=30$, $z_1=40$, $z_1=45$ кривые даны в интервале, где передаточное отношение i_{21} изменяется от -1 до $+1/2$. Из диаграммы следует, что коэффициент перекрытия ϵ при этом изменении передаточного отношения непрерывно растет. При внутреннем зацеплении коэффи-

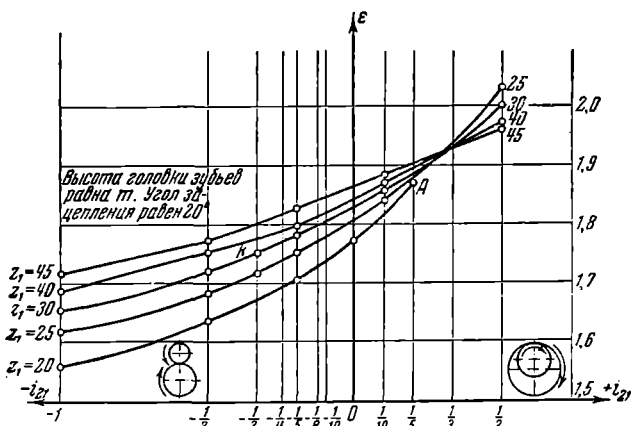


Рис. 626. Диаграмма зависимости коэффициента перекрытия от числа зубьев малого колеса передачи и передаточного отношения.

сент ϵ имеет значения большие, чем при внешнем. Коэффициент ϵ , взятый для значения $i_{21}=0$, соответствует зацеплению колеса с рейкой.

Пример. Пусть требуется определить с помощью данной диаграммы (рис. 626) коэффициент перекрытия ϵ стандартной зубчатой передачи с внешним зацеплением, имеющей числа зубьев $z_1=30$ и $z_2=90$. Передаточное отношение i_{21} равно $i_{21}=-z_1/z_2=-1/3$. По оси абсцисс влево отсчитываем значение передаточного отношения $i_{21}=-1/3$ и на кривой $z_1=30$ находим точку k , которой соответствует на оси ординат коэффициент перекрытия $\epsilon=1,75$.

§ 114. Коэффициент скольжения зубьев

1°. Рассмотрим два сопряженных эвольвентных профиля $M_1\mathcal{A}_1$ и $M_2\mathcal{A}_2$ (рис. 627), принадлежащих колесам 1 и 2. Пусть эти профили касаются в точке C , лежащей на образующей прямой $N-N$. Если на этих профилях выбрать точки m_1 и m_2 , лежащие на начальных окружностях, то отрезок Cm_1 профиля $M_1\mathcal{A}_1$ зуба колеса 1 и отрезок Cm_2 профиля $M_2\mathcal{A}_2$ зуба колеса 2 не равны между собой. В процессе зацепления профилей $M_1\mathcal{A}_1$ и $M_2\mathcal{A}_2$ наблюдается не только качение профиля по профилю, но и их скольжение друг по другу. В самом деле, при движении точек m_1 и m_2 к полюсу P_0 они проходят равные пути m_1P_0 и m_2P_0 . Одновременно с этим дуга Cm_2 профиля $\mathcal{A}_2$ перемещается по дуге Cm_1 профиля $\mathcal{A}_1$. Так как эти

дуги не равны, то качение профилей сопровождается скольжением, которое можно измерить разностью длин указанных дуг. Скольжение профилей влияет на износ зубьев, уменьшает износостойкость передачи и тем самым ухудшает показатель работы зубчатой передачи. Для оценки взаимного скольжения профилей зубьев пользуются понятием *коэффициента скольжения зубьев*. Под коэффициентом скольжения понимается отношение скорости скольжения точек контакта зубьев к касательным составляющим скоростей точек контакта сопряженных профилей, т. е. выражение

$$\lambda = \frac{v_{\text{ск}}}{v^t}. \quad (23.39)$$

2°. Рассмотрим вопрос об определении коэффициентов скольжения λ_1 и λ_2 сопряженных зубьев (рис. 627). Для определения скоростей $v_{\text{ск}}$ и тангенциальных составляющих $v_{C_1}^t$ и $v_{C_2}^t$ скоростей точек C_1 и C_2 контакта сопряженных профилей $M_1\Xi_1$ и $M_2\Xi_2$ построим план скоростей механизма, приняв для наглядности за полюс плана скоростей точку C .

Скорость скольжения $v_{\text{ск}}$ определяется из плана скоростей как вектор, пропорциональный отрезку (c_1c_2) . Скорость $v_{C_1}^t$ пропорциональна отрезку (c_0c_1) , где точка c_0 — конец вектора v^n нормальной составляющей скоростей v_{C_1} и v_{C_2} . Наконец, скорость $v_{C_2}^t$ пропорциональна отрезку (c_0c_2) .

Скорость скольжения $v_{\text{ск}} = v_{C_2C_1}$ определяется из равенства (22.46) (см. § 108, 2°). Имеем для внешнего зацепления

$$v_{C_2C_1} = (\omega_1 + \omega_2) (P_0C), \quad (23.40)$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости колес 1 и 2 и (P_0C) — расстояние от точки зацепления C до полюса зацепления P_0 . Скорость $v_{C_1}^t$ (см. план скоростей) равна

$$v_{C_1}^t = v^n \operatorname{tg} \beta_1.$$

Скорость v^n согласно § 109, 1° равна

$$v^n = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad (23.41)$$

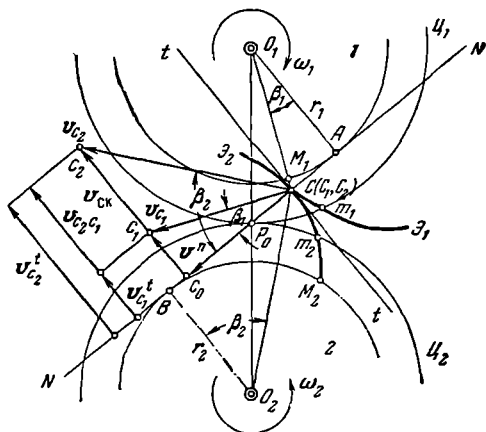


Рис. 627. К определению коэффициента скольжения зубьев.

где r_1 и r_2 — радиусы основных окружностей колес 1 и 2. Тогда для v'_{C_1} получаем:

$$v'_{C_1} = \omega_1 r_1 \operatorname{tg} \beta_1 = \omega_1 r_1 \frac{(AC)}{r_1} = \omega_1 (AC) = \omega_1 \rho_1, \quad (23.42)$$

где $\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{(AC)}{r_1}$, а расстояние (AC) по свойству эвольвенты равно радиусу кривизны $\rho_1 = (AC)$ профиля $M_1\Delta_1$ в точке C_1 .

Аналогично для скорости v'_{C_2} будем иметь:

$$v'_{C_2} = \omega_2 r_2 \operatorname{tg} \beta_2 = \omega_2 r_2 \frac{(BC)}{r_2} = \omega_2 (BC) = \omega_2 \rho_2, \quad (23.43)$$

где $\rho_2 = (BC)$ — радиус кривизны профиля $M_2\Delta_2$ в точке C_2 .

Коэффициент скольжения λ_1 для профиля $M_1\Delta_1$ будет тогда равен

$$\lambda_1 = \frac{v_{C_2 C_1}}{v'_{C_1}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} \left(\frac{P_0 C}{\rho_1} \right) = \left(1 + \frac{1}{i_{12}} \right) \frac{(P_0 C)}{\rho_1}. \quad (23.44)$$

Соответственно для профиля $M_2\Delta_2$ коэффициент скольжения λ_2 :

$$\lambda_2 = \frac{v_{C_2 C_1}}{v'_{C_2}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2} \left(\frac{P_0 C}{\rho_2} \right) = (1 + i_{12}) \frac{(P_0 C)}{\rho_2}. \quad (23.45)$$

При подсчете коэффициентов λ_1 и λ_2 надо иметь в виду, что если колеса 1 и 2 разные, то зубья большего колеса зацепляются в i_{12} раза меньше, чем зубья меньшего колеса. Следовательно, надо при подсчете коэффициентов скольжения помножить или разделить один из коэффициентов λ_1 или λ_2 на величину i_{12} . Если мы, например, имеем, что большим колесом будет колесо 2, то коэффициенты скольжения λ'_1 и λ'_2 должны подсчитываться по формулам

$$\lambda'_1 = \lambda_1 = \left(1 + \frac{1}{i_{12}} \right) \frac{(P_0 C)}{\rho_1}, \quad (23.46)$$

$$\lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{i_{12}} = \frac{1 + i_{12}}{i_{12}} \frac{(P_0 C)}{\rho_2} = \left(1 + \frac{1}{i_{12}} \right) \frac{(P_0 C)}{\rho_2}. \quad (23.47)$$

В формулах (23.46) и (23.47) следует подставлять абсолютное значение передаточного отношения i_{12} , ибо знаки учтены в формуле (23.40).

Для внутреннего зацепления формула (23.40) имеет вид

$$v_{C_2 C_1} = (\omega_1 - \omega_2) (P_0 C). \quad (23.48)$$

Соответственно формулы для определения коэффициентов скольжения λ'_1 и λ'_2 для внутреннего зацепления имеют вид

$$\lambda'_1 = \left(1 - \frac{1}{i_{12}} \right) \frac{(P_0 C)}{\rho_1}, \quad (23.49)$$

$$\lambda'_2 = \left(1 - \frac{1}{i_{12}} \right) \frac{(P_0 C)}{\rho_2}. \quad (23.50)$$

3°. Из формул (23.46) и (23.47) следует, что коэффициенты скольжения λ'_1 и λ'_2 возрастают с увеличением расстояния $(P_0 C)$ от

точки зацепления C до полюса зацепления и уменьшением радиусов кривизны ρ_1 и ρ_2 профилей. В крайних точках A и B теоретической линии зацепления (рис. 627) радиусы ρ_1 и ρ_2 равны нулю, т. е. в этих точках коэффициенты λ'_1 и λ'_2 равны теоретически бесконечности. Из сравнения формул (23.46), (23.47) и (23.49), (23.50) также видно, что коэффициенты скольжения для внутреннего зацепления при том же передаточном отношении могут быть получены меньшими, чем для внешнего зацепления.

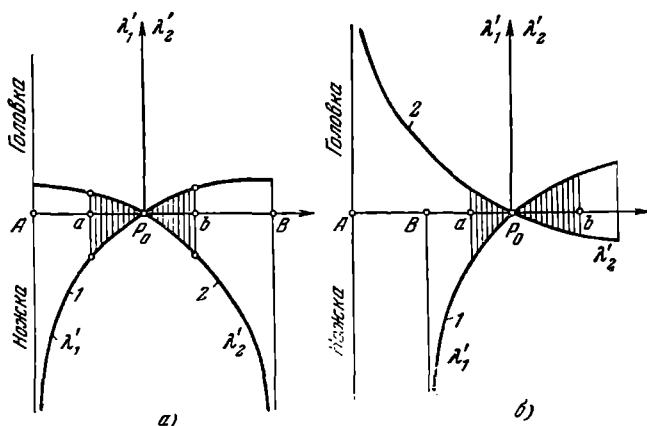


Рис. 628. Диаграмма коэффициентов скольжения зубьев зубчатой передачи: а) диаграмма для внешнего зацепления; б) диаграмма для внутреннего зацепления.

На рис. 628 схематично показаны кривые изменения коэффициентов скольжения λ'_1 и λ'_2 . На рис. 628, а по оси абсцисс отложена теоретическая линия зацепления AB для колес с внешним зацеплением. По оси ординат отложены коэффициенты скольжения λ'_1 и λ'_2 . Участки кривых λ'_1 и λ'_2 , расположенные выше оси абсцисс, относятся к головкам зубьев, а участки ниже оси абсцисс — к ножкам зубьев. Чтобы избежать больших потерь на скольжение профилей и уменьшить их износ, практическая линия зацепления ab (рис. 628, а) должна располагаться в зоне относительно малых коэффициентов скольжения. Эта зона на рис. 628, а заштрихована. На рис. 628, б аналогичные кривые построены для внутреннего зацепления. Кривая 2 изображает изменение коэффициента скольжения λ'_2 внешнего колеса внутреннего зацепления.

§ 115. Некоторые сведения по методам обработки эвольвентных профилей зубьев

1°. В данном параграфе мы рассмотрим в самых общих чертах методы нарезания зубчатых колес, так как этот вопрос тесно связан с теорией профилирования зубьев.

Зубчатые колеса с эвольвентным профилем зубьев обычно нарезаются на специальных зуборезных станках двумя методами: 1) методом копирования и 2) методом обкатки.

Метод копирования состоит в том, что по чертежам тщательно построенных профилей зубьев изготавливается дисковая фреза

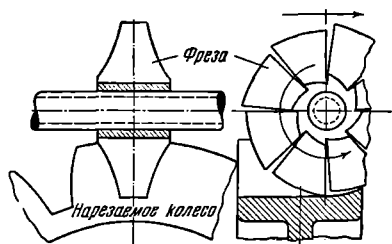


Рис. 623. Дисковая фреза для нарезания зубьев методом копирования.

(рис. 629). Режущая кромка фрезы имеет очертание впадины между зубьями. Вращаясь, фреза перемещается в направлении боковой образующей зуба. За каждый ход фрезы вдоль оси колеса получается нарезанная одна впадина. По прохождении всей впадины фреза возвращается в исходное положение. После этого нарезаемое колесо поворачивается на величину угла $\tau = 2\pi/z$, где z — число зубьев на-

резаемого колеса, и процесс повторяется. На рис. 630 показан процесс нарезания колеса дисковой фрезой.

2°. *Метод обкатки* заключается в том, что режущему инструменту и заготовке сообщают то относительное движение, которое

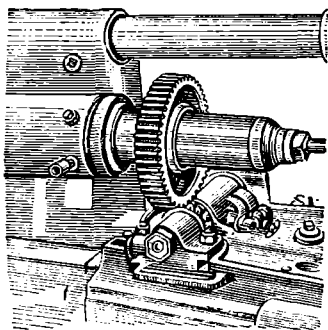


Рис. 630. Нарезание зубьев зубчатого колеса дисковой фрезой.

имели бы два зубчатых колеса, находящихся в правильном зацеплении. В таком случае режущий инструмент должен представлять собой также зубчатое колесо, т. е. колесо-инструмент может быть сделано в виде колеса или рейки. На рис. 631 показано такое колесо-инструмент, которое носит название *долбяка*. Долбяк совершает поступательное движение параллельно оси $x-x$ нарезаемого колеса (рис. 632). Одновременно долбяку и колесу сообщается вращательное движение с тем же отношением угловых скоростей, как если бы долбяк и колесо находились в зацеплении. Практически процесс долбления происходит не непрерывно, а имеет ряд последовательных операций, состоящих в движении долбяка вверх и вниз, поворота нарезаемого колеса и т. д. Но все эти движения строго согласованы с кинематическими соотношениями, определяющими долбяк и колесо как два колеса, находящихся в зацеплении. Тогда профиль нарезаемого зуба получается как огибающая всех положений режущей кромки долбяка (рис. 633), т. е. инструмент как бы обкатывает нарезаемое колесо. Особенность этого способа

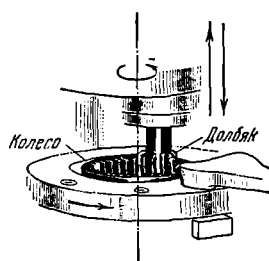


Рис. 631. Нарезание долбяком колеса с внутренними зубьями.

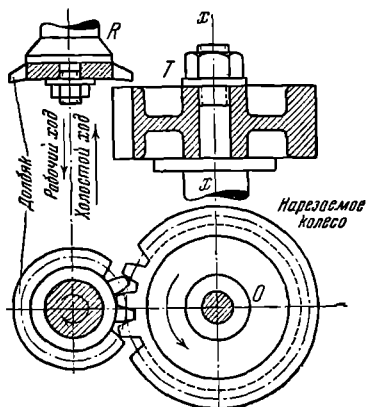


Рис. 632. К вопросу о нарезании зубчатого колеса долбяком.

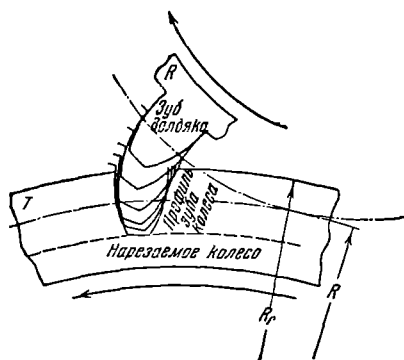


Рис. 633. Последовательные относительные положения зуба долбяка при нарезании.

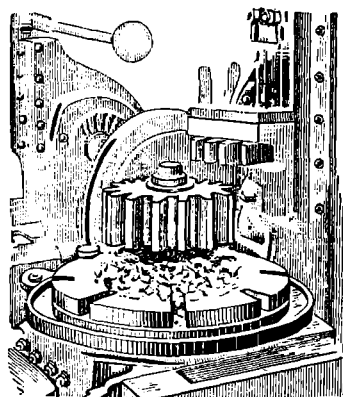


Рис. 634. Нарезание зубчатого колеса зубчатой рейкой.

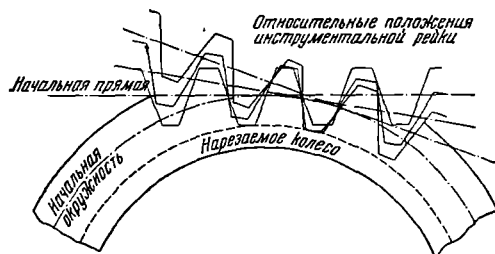


Рис. 635. Последовательные положения зубьев рейки при нарезании зубчатого колеса.

заключается в том, что он позволяет нарезать по методу обкатки колеса с внутренним зацеплением (рис. 631).

3°. Так как для любого зубчатого колеса может быть спроектирована сопряженная с колесом рейка (см. § 112, 4°), то вместо колеса-инструмента может быть в качестве инструмента использована также и рейка. Рейка совершает в вертикальном направлении возвратно-поступательное движение, параллельное оси нарезаемого колеса (рис. 634). Заготовка имеет двойное движение в горизонтальной плоскости. Вращаясь вокруг своей оси, она одновременно

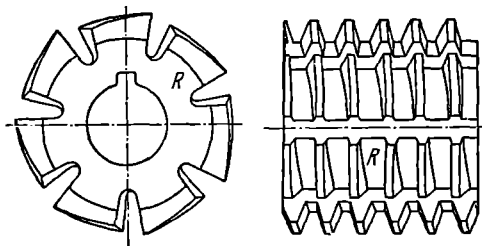


Рис. 636. Червячная фреза.

перемещается вдоль рейки (рис. 635). Таким образом, заготовка осуществляет движение колеса относительно рейки, и профили зубьев нарезаемого колеса получаются процессом обкатывания. Весь указанный процесс изготовления выполняется на специальных зуборезных станках.

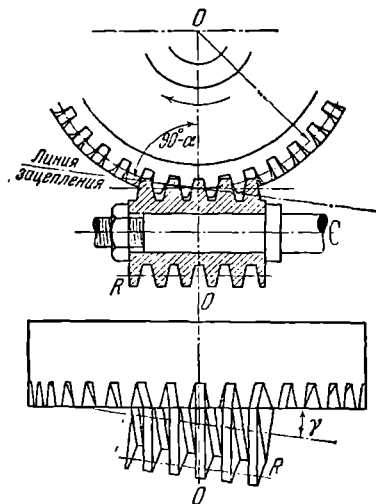


Рис. 637. Осевое сечение червячной фрезы.

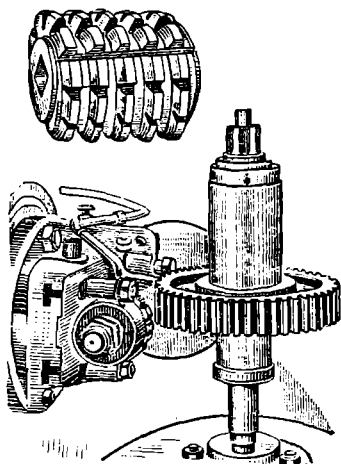


Рис. 633. Нарезание зубчатого колеса червячной фрезой.

4°. Вместо инструмента-рейки можно применять червячную фрезу (рис. 636), профиль которой может быть получен из рейки. В самом деле, если провести сечение червячной фрезы плоскостью, содержащей ось фрезы, то в сечении мы получим рейку (рис. 637). Таким

образом, профиль червячной фрезы может быть получен путем перемещения рейки по винтовой линии с некоторым постоянным углом подъема. Обычно угол подъема γ не превышает 5° .

При одноходовой фрезе за каждый оборот фрезы вокруг своей оси заготовка поворачивается на угол, вмещающий один зуб и одну впадину. Одновременно с вращением червячная фреза имеет еще поступательное движение подачи параллельно оси колеса. Процесс нарезания показан на рис. 638. Фреза устанавливается в плоскости колеса под углом γ , равным углу подъема (рис. 637).

Из рассмотрения приемов нарезания методом обкатки следует, что в основе этих приемов нарезания лежат свойства зацепления рейки с колесом или колеса с колесом.

§ 116. Подрезание профилей зубьев

1°. При производстве зубчатых колес по методу обкатки в некоторых случаях получается, что головки режущего инструмента врезаются в ножки зубьев нарезаемого колеса. В результате этого ножки зубьев нарезаемого колеса оказываются как бы подрезанными (рис. 639), откуда и само явление получило название *подрезания*. При подрезании ножки зубьев ослабляются. Кроме того, при этом срезается часть эвольвенты, образующей профиль ножки зуба. Поэтому подрезание является нежелательным при изготовлении зубчатых колес. Выясним вопрос о том, в каком случае будет иметь место явление подрезания.

Явление подрезания объясняется тем, что эвольвента является кривой, ограниченной с одной стороны начальной точкой, которая, как известно, располагается на основной окружности.

Если представить себе зацепление двух эвольвент, скрепленных с двумя основными окружностями, вращающимися вокруг двух неподвижных центров O_1 и O_2 (рис. 640), то при непрерывном зацеплении точка касания будет перемещаться по одной из эвольвент, удаляясь от начальной точки. Наоборот, по другой эвольвенте точка соприкосновения будет перемещаться, приближаясь к начальной точке. При продолжающемся вращении основных окружностей точка касания в определенный момент времени совпадает с начальной точкой одной из эвольвент, что произойдет в конце B теоретической линии зацепления AB . Такое относительное расположение двух рассматриваемых эвольвент является пределом, далее которого эвольвентное зацепление невозможно. В самом деле, если вращение основных окружностей будет продолжаться и дальше, то общей точкой двух зацепляющихся кривых останется начальная точка одной из них (точка b на рис. 640).



Рис. 639. Зубчатое колесо с подрезанными ножками зубьев.

В таком случае общая нормаль $N_0 - N_0$ не будет проходить через полюс зацепления P_0 , вследствие чего передаточное отношение, ранее установленное парой зацепляющихся эвольвент, изменится и станет переменным. Итак, *за пределами теоретической линии зацепления не удовлетворяется основной закон зацепления.*

2°. Только что было рассмотрено зацепление двух эвольвентных профилей неограниченной длины. Практически при работе двух зубчатых колес в зацеплении находится пара зубьев ограниченной высоты, имеющих внутри своих основных окружностей ножки, очерченные не по эвольвентам. Пусть, например, у колеса 2 (рис. 640) неэвольвентная часть ножки очерчена по прямой M_0O_2 , направленной от начальной точки M_0 к центру O_2 .

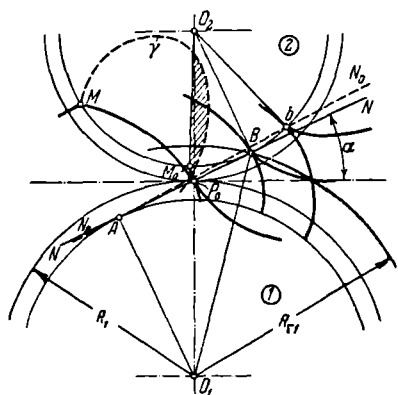


Рис. 640. К вопросу о подрезании зубьев зубчатого колеса.

При движении колеса 1 относительно колеса 2 конец зуба (точка M) описывает кривую γ , которая пересекает указанную нами неэвольвентную и часть эвольвентной ножки зуба. Если колеса 1 и 2 начнут вращаться из положения, показанного на чертеже, то при повороте на небольшой угол зубья неизбежно заклинятся. Если же колесо 1 является нарезающим колесом, то его точка M подрежет заштрихованную на рис. 640 часть зуба колеса 2, вследствие чего ножка зуба такого колеса будет ослаблена и будет срезана часть эвольвентного профиля.

Явлением подрезания в теории зацепления называется пересечение траектории относительного движения конца профиля зуба одного колеса с эвольвентной частью профиля зуба сопряженного с ним колеса.

На основании изложенного можно сделать заключение, что эвольвентное зацепление возможно только при том условии, что окружность головок зубьев нарезающего колеса пересекает нормаль не далее точки B (конец теоретической линии зацепления AB). При большой высоте зубьев может наступить явление подрезания. Так как размеры зуба колеса-инструмента стандартизированы и выполняются при одном и том же модуле у разных колес-инструментов одной и той же высоты, то при прочих равных условиях возможность подрезания определяется положением точки B на нормали $N - N$ (рис. 640), т. е. размерами колеса 2 и, следовательно, его числом зубьев.

3°. Рассмотрим теперь вопрос о наименьшем числе зубьев $z_{\min}$ на колесе, при котором явление подрезания будет отсутствовать. Для этого рассмотрим тот предельный случай, когда окружности головок проходят через крайние точки A и B практической линии

зацепления (рис. 640), т. е. когда вся возможная линия зацепления является рабочей.

Будем предполагать, что число зубьев нарезающего колеса больше числа зубьев нарезаемого.

Если нарезаемым колесом будет колесо 2, то предельный радиус R_{r1} окружности головок нарезающего колеса 1, при котором зацепление происходит без подрезания, равен (см. § 110, 3°)

$$R_{r1} = O_1B = R_1 + \chi'm = \frac{m}{2} (z_1 + 2\chi'), \quad (23.51)$$

где $\chi'm$ есть высота h' головки. Расстояние O_1O_2 между центрами колес

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 = \frac{m}{2} (z_1 + z_2); \quad (23.52)$$

наконец, перпендикуляр O_2B

$$O_2B = R_2 \cos \alpha = \frac{m}{2} z_2 \cos \alpha. \quad (23.53)$$

Из треугольника O_1O_2B имеем:

$$(O_1B)^2 = (O_1O_2)^2 + (O_2B)^2 - 2(O_1O_2)(O_2B) \cos \alpha.$$

Подставляя вместо (O_1B) , (O_1O_2) и (O_2B) их значения из равенств (23.51)—(23.53), получаем:

$$(z_1 + 2\chi')^2 = (z_1 + z_2)^2 + z_2^2 \cos^2 \alpha - 2(z_1 + z_2)z_2 \cos^3 \alpha. \quad (23.54)$$

Раскрывая скобки, после несложных преобразований, имеем:

$$z_1 = \frac{z_2 \sin^2 \alpha - 4\chi'^2}{4\chi' - 2z_2 \sin^2 \alpha}. \quad (23.55)$$

Из формулы (23.55) следует, что наименьшее число зубьев z_1 , при котором на малом колесе не будет явления подрезания, зависит от угла зацепления α и коэффициента χ' высоты головки.

Выбирая большие значения угла зацепления α и меньшие значения коэффициента χ' , можно получить колеса без подрезания с меньшим числом зубьев z_1 . Этим объясняется применение в некоторых случаях не стандартного угла зацепления $\alpha = 20^\circ$, а увеличенного до $\alpha = 22^\circ,5$ и применение зубьев с укороченными головками, у которых $\chi' = 0,8$.

Для стандартных колес, у которых угол зацепления $\alpha = 20^\circ$ и коэффициент $\chi' = 1$, формула (23.55) принимает вид

$$z_1 \leq \frac{z_2^2 - 34}{34 - 2z_2}. \quad (23.56)$$

Так как выше мы условились нарезающим колесом считать большее колесо 1, то z_2 должно быть всегда меньше z_1 , т. е. $z_2 < z_1$. Наименьшее число z_2 зубьев малого колеса 2, удовлетворяющее равенству (23.56) и условию $z_2 < z_1$, равно $z_2 = 13$. При этом число зубьев z_1 большего колеса равно $z_1 \approx 17$.

Из равенства (23.56) также следует, что если число зубьев $z_2 \approx 17$, то число зубьев z_1 большего колеса может иметь любое число зубьев $z_1 \geq 17$ и при этом явления подрезания или заклинивания не будет. Явление заклинивания, при котором головка зуба большого колеса вдавливается в ножку зуба малого колеса, может иметь место и при внутреннем зацеплении. Для стандартных колес с внутренним зацеплением формула для определения числа зубьев z_1 большего колеса имеет вид, аналогичный формулам (23.55) и (23.56):

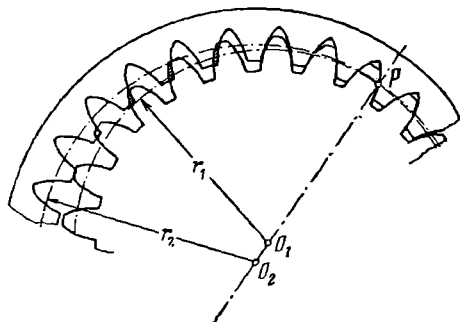


Рис. 641. Явление интерференции во внутреннем зубчатом зацеплении.

$$z_1 = \frac{z_2 \sin^2 \alpha - 4\chi'^2}{2z_2 \sin^2 \alpha - 4\chi'},$$

$$z_1 \geq \frac{z_2^2 - 34}{2z_2 - 34}. \quad (23.57)$$

Из формулы (23.57) следует, что наименьшее число зубьев z_2 малого колеса равняется $z_2 = 17$, при этом большее число зубьев $z_1 = \infty$, т. е. большее колесо превращается в зубчатую рейку.

Ниже дается таблица для выбора допустимого числа зубьев колес при отсутствии подрезания или заклинивания передачи.

Внешнее зацепление		Внутреннее зацепление			
z_2	z_1		z_1	z_2	z_1
13	< 17	17	∞	23	> 41
14	< 27	18	> 144	24	> 38
15	< 48	19	> 81	25	> 36
16	< 112	20	> 60	26	> 35
17 и выше	Любое	21	> 50	27—79	$> z_2 + 8$
		22	> 44	80 и выше	$> z_2 + 7$

Подсчеты по формуле (23.57) сделаны до числа зубьев $z_2 = 26$, так как при числе зубьев $z_2 > 26$ для внутреннего зацепления не менее опасным становится явление интерференции зубьев, при которой головка зуба малого колеса вдавливается в головку зуба большого колеса вне области зацепления (рис. 641). На рис. 641 участки интерференции заштрихованы. Мы не приводим вывода формулы для установления числа зубьев колес, при которых не будет иметь место

явление *интерференции*, а даем в таблице дополнительно сведения по подбору числа зубьев, если $z_2 > 26$.

Из формулы (23.55) можно получить и общую формулу для выбора числа зубьев z_2 колеса 2, входящего в зацепление с рейкой 1, т. е. для реечного зацепления. Рассматривая рейку как колесо, у которого радиус бесконечно велик и, следовательно, $z_1 = \infty$, получаем:

$$4\chi' - 2z_2 \sin^2 \alpha = 0,$$

откуда наименьшее число z_2 зубьев колеса при отсутствии подрезания

$$z_2 = \frac{2\chi'}{\sin^2 \alpha}. \quad (23.58)$$

Для стандартных колес, у которых $\alpha = 20^\circ$ и $\chi' = 1$, число z_2 зубьев зубчатого колеса реечного зацепления $z_2 = 17$.

§ 117. Определение основных размеров зубчатых колес, нарезанных методом обкатки

1°. В § 110 были даны формулы для определения основных размеров зубчатых колес при условии, что стандартный модуль соответствует их начальным окружностям, совпадающим с делительными окружностями. Однако это условие накладывает и целый ряд стеснений, затрудняющих конструирование зубчатых передач. Например, это относится к выбору числа зубьев на колесе. Уменьшение числа зубьев, как указывалось, удешевляет производство зубчатых колес, уменьшает размеры конструкции и т. д. Но уменьшение числа зубьев может вызвать их подрез, увеличение износа контактных поверхностей и т. д.; поэтому в тех случаях, когда необходимо по каким-либо причинам все же иметь малое число зубьев, проектируют зубчатые колеса с иными размерами.

Основной целью, которая при этом преследуется, является улучшение условий работы зубчатых колес за счет отклонения размеров этих колес от указанных в § 110.

Как это было показано выше, изменяя отдельные параметры зубчатых колес: модуль m , коэффициент χ' высоты головки зуба, угол зацепления α и т. д., можно получать зубчатые колеса с различными соотношениями размеров зубьев. Например, в некоторых случаях применяют так называемый *укороченный зуб*, у которого коэффициент χ' равен 0,8, а коэффициент χ'' равен 1. Укороченный зуб, следовательно, имеет головку, высота которой равна $h' = 0,8 m$, и ножку, высота которой равна $h'' = m$. Тогда общая высота h зуба вместо 2,2 m оказывается равной 1,8 m . При этом уменьшается коэффициент перекрытия ϵ ; в некоторых случаях увеличивают угол зацепления α . Как следует из формулы (23.55), чем больше угол зацепления α , тем меньшее число зубьев z_2 может быть выбрано на малом колесе 2.

Часть инструментальной рейки, ограниченную высотой головки h' , высотой ножки h'' и прямолинейными участками зубьев, будем называть *исходным контуром рейки* (на рис. 642 этот контур заштрихован). Эвольвентную часть зуба нарезаемого колеса нарезает только исходный контур, а часть зуба рейки выше исходного контура образует галтель зуба колеса (см. § 112, 2°). Поэтому в дальнейшем мы будем изучать вопрос об образовании профилей зубьев колеса, рассматривая взаимодействие исходного контура рейки с нарезаемым колесом.

Как уже говорилось выше, нарезание зубчатых колес по методу обкатки производится перекатыванием рабочего инструмента (рейки) по центроиде заготовки нарезаемого колеса. Если зубья рейки пересечь прямыми, параллельными прямой головок (рис. 643), то все расстояния: ab , $a'b'$, $a''b''$, будут равны шагу зацепления ($t = \pi m$). Одна из этих прямых и может быть выбрана за начальную прямую зуборезного инструмента рейки, которая в процессе обкатки катится без скольжения по начальной окружности колеса. При этом ширина

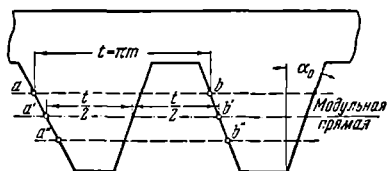


Рис. 643. К выбору начальной прямой рейки при нарезании зубьев зубчатого колеса.

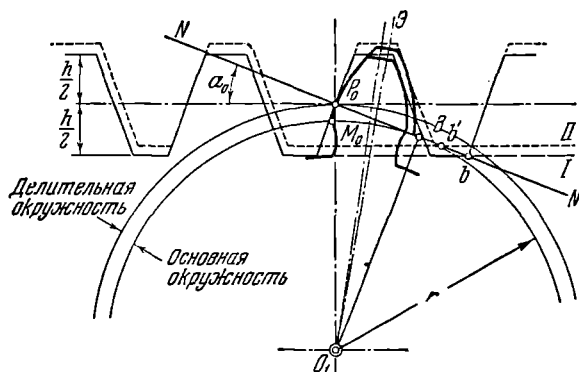


Рис. 644. Изменение толщины зуба колеса при изменении относительного расположения рейки.

впадины и толщина зуба будут различны в зависимости от того, какая из прямых ab , $a'b'$, $a''b''$, ... выбрана за начальную прямую. Очевидно, что ширина впадины и толщина зуба будут равны в том случае, когда за начальную прямую выбрана модульная прямая, делящая высоту h зуба пополам. Этот случай зацепления колеса с рейкой показан на рис. 644 (положение I). Здесь изображена рейка, занимающая положение I, и профиль $M_0Э$ зуба колеса, нарезанного этой рейкой; толщина зуба колеса, измеренная по начальной окружности, и ширина впадины между зубьями рейки, измеренная по

начальной прямой, равны между собой. Если теперь передвинуть рейку из положения *I* в положение *II*, то ширина впадины между зубьями колеса будет меньше толщины зуба. При этом профиль зуба колеса будет описан по той же эвольвенте и будет при этом несколько увеличен. Из чертежа видно, что при отодвигании рейки от центра нарезаемого колеса точка *b* практической линии зацепления переходит в точку *b'* и возможность подрезания зуба колеса уменьшается. При этом зуб получает большие размеры, измеряемые по начальной окружности. Таким образом, *при сдвиге рейки эвольвента не изменяется*. Если сдвига рейки нет, то колеса носят название *нулевых колес*. Если сдвиг рейки направлен в сторону оси нарезаемого колеса, то колесо называется *отрицательным колесом*. Если сдвиг производится в сторону от оси нарезаемого колеса, то колесо называется *положительным колесом*. Соответственно и сдвигу рейки приписывают отрицательное или положительное значение.

Окружность, по которой при обработке колеса перекачивается соответствующая выбранная прямая рейки, носит название *начальной окружности обработки* или *делительной окружности колеса* (рис. 644). Таким образом, начальная окружность обработки колеса в общем случае нарезания зубчатых колес может не совпадать с начальной окружностью колеса. Необходимо отметить, что при сдвиге рейки радиус *r* основной окружности не изменяется.

3°. Несовпадение начальной окружности обработки с начальной окружностью колеса не препятствует воспроизведению колесами требуемого передаточного отношения. Это условие вытекает из важного свойства эвольвентного зацепления, рассмотренного нами в § 111,5° заключающегося в том, что изменение межосевого расстояния O_1O_3 (рис. 621) не влияет на передаточное отношение i_{13} , так как передаточное отношение представляет собой отношение радиусов r_3 и r_1 основных окружностей [см. формулу (23.27)].

Таким образом, два колеса с эвольвентными профилями зубьев могут быть собраны с различными межосевыми расстояниями. При этом меняется положение полюса зацепления P_0 и величина угла зацепления α . Отсюда можно сделать и тот вывод, что для зубчатых колес с эвольвентными профилями зубьев величины радиусов начальных окружностей определяются только после сборки этих колес. Указанное свойство позволяет вводить в правильное зацепление два любых колеса, нарезанных одной и той же инструментальной рейкой.

4°. Как было сказано выше, одной из основных задач, с которой встречаются конструкторы при проектировании зубчатых колес, является избежание подреза зубьев, увеличение прочности зубьев и уменьшение их износа путем соответствующего подбора очертания их профилей. Величина абсолютного сдвига *b* (рис. 645) производящей рейки, нарезающей колесо, обычно вычисляется в долях модуля и равна

$$b = \xi m, \quad (23.60)$$

где ξ — коэффициент, носящий название *относительного сдвига* или *коэффициента сдвига*.

На практике чаще всего можно встретиться со следующими комбинациями колес, находящихся в зацеплении и образующих следующие передачи:

1) нулевая передача, когда оба колеса нарезаны без сдвига или когда одно колесо положительное, а второе отрицательное при равном для обоих колес коэффициенте сдвига ξ , т. е. одно колесо нарезано с положительным сдвигом, а другое с равным ему по абсолютной величине отрицательным сдвигом (компенсация сдвига);

2) положительная передача:

а) нулевое колесо с положительным колесом;

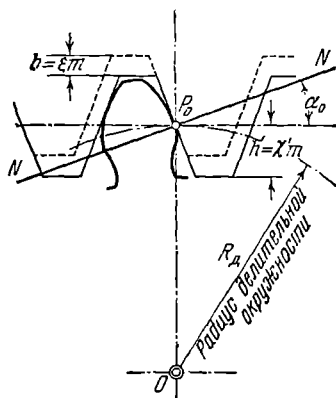


Рис. 645. Относительное положение инструментальной рейки при нарезании зубьев колеса со сдвигом.

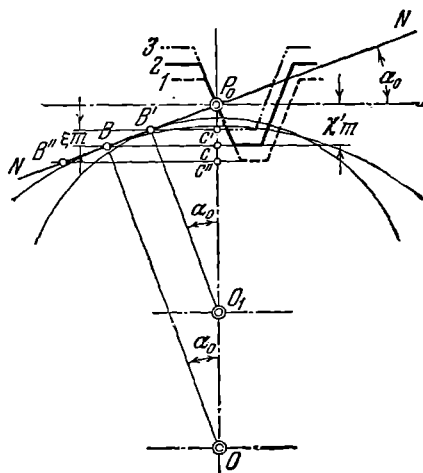


Рис. 646. К вопросу о подрезании зубьев колеса.

б) положительное колесо с отрицательным колесом (при неравных коэффициентах ξ , но при положительной сумме сдвигов).

Все остальные комбинации встречаются сравнительно редко.

5°. Рассмотрим теперь, как связан коэффициент сдвига ξ рейки с числом зубьев, которое может быть нарезано рейкой на колесе. Пусть рейка установлена в положении 1 (рис. 646). В этом случае прямая головок рейки пересечет линию зацепления $N-N$ в точке B'' , и нарезаемое колесо будет подрезано. Отодвинем рейку, сохраняя положение полюса зацепления, в положение 2 так, чтобы прямая головок проходила через крайнюю точку B теоретической линии зацепления. В этом случае колесо не будет подрезано, и минимальное число зубьев $z_{\min}$, которое может быть нарезано, определится по формуле (23.58):

$$z_{\min} = \frac{2\chi'}{\sin^2 \alpha}. \quad (23.61)$$

Отодвинем рейку еще дальше от оси колеса в положение 3 на величину ξm . Тогда прямая головок рейки пройдет через точку B' , и следовательно, на колесе может быть без подрезания нарезано некоторое число зубьев z , меньшее чем $z_{\min}$, подсчитанное по формуле (23.61).

Выведем зависимость между $z_{\min}$, $z\chi'$ и ξ . Так как мы предположили, что полюс зацепления P_0 при сдвиге рейки не изменял своего положения, то из рис. 646 следует, что основная окружность после сдвига будет иметь в качестве центра точку, которую мы получим, если в точке B' восставим перпендикуляр к линии зацепления $N-N$ и найдем точку O_1 как точку пересечения этого перпендикуляра с линией P_0O .

Из подобия треугольников получаем:

$$\frac{P_0C}{P_0C'} = \frac{OB}{O_1B'}.$$

Так как

$$P_0C = \chi' m, \quad P_0C' = \chi' m - \xi m,$$

$$OB = OP_0 \cos \alpha_0 = \frac{mz_{\min}}{2} \cos \alpha_0$$

и

$$OB' = O_1P_0 \cos \alpha_0 = \frac{mz}{2} \cos \alpha_0,$$

то

$$\frac{\chi' m}{\chi' m - \xi m} = \frac{z_{\min}}{z}, \quad \text{или} \quad \frac{\chi'}{\chi' - \xi} = \frac{z_{\min}}{z}.$$

Отсюда

$$\xi = \frac{\chi' (z_{\min} - z)}{z_{\min}}, \quad (23.62)$$

где $z_{\min}$ подсчитывается по формуле (23.61).

Для угла зацепления $\alpha_0 = 20^\circ$ и коэффициента $\chi' = 1$ имеем:

$$z_{\min} = 17; \quad (23.63)$$

для угла зацепления $\alpha_0 = 20^\circ$ и $\chi' = 0,8$

$$z_{\min} = 14 \quad (23.64)$$

и для угла $\alpha_0 = 15^\circ$ и $\chi' = 1$

$$z_{\min} = 30. \quad (23.65)$$

Для стандартного угла зацепления $\alpha_0 = 20^\circ$ и $\chi' = 1$, воспользовавшись формулами (23.62) и (23.63), получаем следующее выражение для коэффициента сдвига ξ :

$$\xi = \frac{17 - z}{17}. \quad (23.66)$$

Формула (23.66) позволяет определять требуемую величину сдвига рейки для нарезания желательного числа зубьев без всякого их подрезания при угле зацепления $\alpha_0 = 20^\circ$ и $\chi' = 1$.

В современных практических расчетах допускают некоторый малый подрез, при котором срезается незначительная часть эвольвенты, и часто пользуются формулой

$$\xi = \frac{14 - z}{14}. \quad (23.67)$$

6°. Переходим к определению некоторых основных размеров зубчатых колес, нарезанных со сдвигом. Начнем с определения толщины зуба. Толщина зуба a' (рис. 647) у нулевого колеса ($\xi = 0$), измеренная по начальной окружности,

$$a' = \frac{t}{2} = \frac{\pi m}{2} \quad (23.68)$$

и соответствует ширине впадины на рейке, измеренной по прямой, перекапывающейся по начальной окружности обработки (делительной окружности), которая в этом случае совпадает с начальной окружностью колеса. Дадим рейке смещение вдоль оси x — x , равное ξm (положение, показанное на рис. 647 штриховой линией). Тогда толщина зуба колеса (или ширина впадины на производящей рейке), измеренная по делительной окружности,

$$a'_d = a' \pm 2\Delta a, \quad (23.69)$$

где знак плюс соответствует положительному сдвигу, а знак минус соответствует отрицательному сдвигу.

При сдвиге рейки точка B переместится в положение B' , а точка C в положение C' . Очевидно, что отрезки BB' и CC' равны: $BB' = CC' = \xi m$.

Из прямоугольного треугольника $B'C'C$ имеем:

$$\frac{B'C}{CC'} = \operatorname{tg} \alpha_0,$$

где α_0 — выбранный угол зацепления при нарезании колеса (обычно 20°), или, так как $B'C = \Delta a$ и $CC' = \xi m$, то

$$\Delta a = \xi m \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (23.70)$$

Подставляя полученное выражение в равенство (23.69) и учитывая выражение (23.68), получаем:

$$a'_d = m \left(\frac{\pi}{2} \pm 2\xi \operatorname{tg} \alpha_0 \right). \quad (23.71)$$

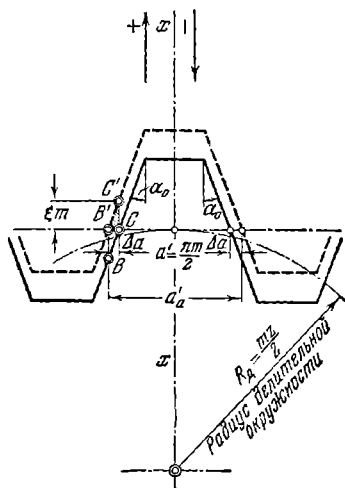


Рис. 647. К определению толщины зуба по делительной окружности.

Толщина зуба a'_i измеренная по любой окружности радиуса R_i (рис. 648), определяется из следующих условий. Сумма углов ϑ_i и γ_i равна

$$\vartheta_i + \gamma_i = \vartheta_d + \gamma_d$$

откуда при

$$\gamma_i = \frac{a'_i}{2R_i} \text{ и } \gamma_d = \frac{a'_d}{2R_d}$$

получаем:

$$\vartheta_i + \frac{a'_i}{2R_i} = \vartheta_d + \frac{a'_d}{2R_d}.$$

Далее, так как согласно формуле (23.24)

$$\vartheta_i = \text{inv } \alpha_i \text{ и } \vartheta_d = \text{inv } \alpha_0,$$

то

$$\frac{a'_i}{2R_i} + \text{inv } \alpha_i = \frac{a'_d}{2R_d} + \text{inv } \alpha_0, \quad (23.72)$$

откуда

$$a'_i = 2R_i \left(\frac{a'_d}{2R_d} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_i \right). \quad (23.73)$$

Подставляя в формулу (23.73) вместо a'_d выражение (23.71), получаем окончательно

$$a'_i = m \frac{R_i}{R_d} \left(\frac{\pi}{2} \pm 2z \text{tg } \alpha_0 \right) + 2R_i (\text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_i), \quad (23.74)$$

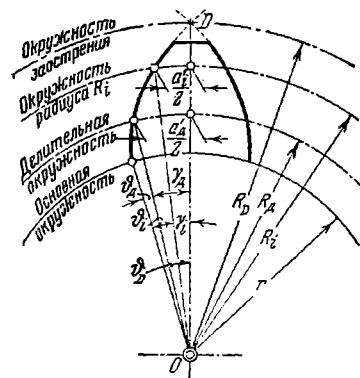


Рис. 648. К определению толщины зуба колеса по окружности произвольно заданного радиуса.

где угол α_i определяется из условия $\cos \alpha_i = r/R_i$ (рис. 648).

С помощью формулы (23.74) может быть определена толщина зуба на окружности любого заданного радиуса R_i .

Формулы (23.73) или (23.74) позволяют проверить, не имеет ли зуб заострения, т. е. не пересекаются ли боковые профили зуба в точке D (рис. 648), лежащей на окружности головок или внутри этой окружности. На окружности заострения (рис. 648) толщина зуба равна нулю. Следовательно, в равенстве (23.73) следует положить $a'_i = 0$, $R_i = R_D$, где R_D — радиус окружности заострения и $\text{inv } \alpha_i = \text{inv } \alpha_D = \vartheta_D$ (рис. 648). Тогда получаем уравнение

$$a'_d + 2R_d \vartheta_d - 2R_d \vartheta_D = 0,$$

откуда угол ϑ_D равен

$$\vartheta_D = \frac{a'_d + 2R_d \vartheta_d}{2R_d}.$$

Так как $\vartheta_D = \text{inv } \alpha_D$, то, определив угол α_D , можно найти величину радиуса R_D окружности заострения из условия

$$R_D = \frac{r}{\cos \alpha_D}.$$

Обычно толщина зуба по окружности головок не должна быть меньше 0,25—0,3 m .

7°. Переходим теперь к определению угла зацепления α_3 колес, нарезанных со сдвигом рейки. Как было указано выше, угол зацепления α_3 совпадает с углом зацепления α_0 нарезающей рейки только для нулевых колес. Во всех остальных случаях угол α_3 имеет иные значения. Величину этого угла можно определить из следующих условий.

Согласно формуле (23.73) размеры толщины a'_1 и a'_2 зубьев колес 1 и 2 (рис. 649), измеренные по начальным окружностям, соответственно равны

$$\begin{aligned} a'_1 &= 2R_1 \left(\frac{a'_{d1}}{2R_{d1}} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_3 \right), \\ a'_2 &= 2R_2 \left(\frac{a'_{d2}}{2R_{d2}} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_3 \right), \end{aligned} \quad (23.75)$$

где a'_{d1} и a'_{d2} — толщины зубьев колес 1 и 2, измеренные по их делительным окружностям радиусов R_{d1} и R_{d2} .

Так как при безззорном зацеплении толщина зуба по начальной окружности одного колеса равна ширине впадины другого колеса и

$$a'_1 + a'_2 = t = \frac{2\pi R_1}{z_1} = \frac{2\pi R_2}{z_2}, \quad (23.76)$$

то, подставляя в равенство (23.76) вместо a'_1 и a'_2 их значения из формул (23.75), получаем:

$$\frac{2\pi R_1}{z_1} = 2R_1 \left(\frac{a'_{d1}}{2R_{d1}} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_3 \right) + 2R_2 \left(\frac{a'_{d2}}{2R_{d2}} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_3 \right). \quad (23.77)$$

Принимая во внимание, что $R_2 = R_1 z_3/z_1$ и $R_{d2} = R_{d1} z_3/z_1$, после преобразований, разрешив уравнение (23.77) относительно величины $\text{inv } \alpha_3$, получим:

$$\text{inv } \alpha_3 = \frac{(a'_{d1} + a'_{d2}) z_1 - 2\pi R_{d1}}{2R_{d1} (z_1 + z_2)} + \text{inv } \alpha_0. \quad (23.78)$$

Подставляя в формулу (23.78) величины a'_{d1} и a'_{d2} , определяемые по

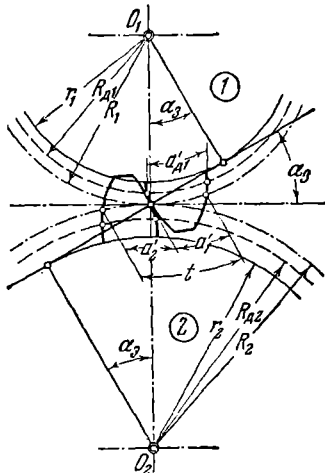


Рис. 649. К выводу формулы для определения монтажного угла зацепления.

формуле (23.71):

$$a'_{a1} = m \left(\frac{\pi}{2} + 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha_0 \right), \quad a'_{a2} = m \left(\frac{\pi}{2} + 2\xi_2 \operatorname{tg} \alpha_0 \right)$$

и величину R_{a1} , равную

$$R_{a1} = \frac{mz_1}{2},$$

окончательно имеем:

$$\operatorname{inv} \alpha_3 = \frac{2(\xi_1 + \xi_2) \operatorname{tg} \alpha_0}{(z_1 + z_2)} + \operatorname{inv} \alpha_0. \quad (23.79)$$

Анализ зависимости (23.79) показывает, что с увеличением суммарного сдвига $(\xi_1 + \xi_2)$ увеличивается и монтажный угол зацепления.

Из формулы (23.79) также следует, что для нулевой передачи либо $\xi_1 = \xi_2 = 0$, и поэтому

$$\operatorname{inv} \alpha_3 = \operatorname{inv} \alpha_0,$$

т. е. $\alpha_3 = \alpha_0$, либо $\xi_1 = -\xi_2$ и, следовательно, всегда имеем:

$$\operatorname{inv} \alpha_3 = \operatorname{inv} \alpha_0,$$

т. е. $\alpha_3 = \alpha_0$.

Расстояние A (рис. 650) между осями колес, нарезанных со сдвигом,

$$A = O_1O_2 = O_1P_0 + O_2P_0 = \frac{r_1 + r_2}{\cos \alpha_3},$$

или так как для колес с углом зацепления α_0 расстояние A_0 между осями

$$A_0 = \frac{r_1 + r_2}{\cos \alpha_0}, \quad \text{то} \quad A = A_0 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_3},$$

Рис. 650. К определению расстояния между центрами колес.

откуда, так как [см. § 110,3° формула (23.15)]

$$A_0 = \frac{m}{2} (z_1 + z_2),$$

окончательно получаем:

$$A = \frac{m}{2} (z_1 + z_2) \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_3}. \quad (23.80)$$

Радиусы R_{r1} и R_{r2} окружностей головок колес 1 и 2

$$R_{r1} = A - R_{a2} - \xi_2 m + \chi' m, \quad (23.81)$$

$$R_{r2} = A - R_{a1} - \xi_1 m + \chi' m. \quad (23.82)$$

Радиусы R_{n1} и R_{n2} окружностей ножек (окружностей впадин)

$$R_{n1} = R_{a1} - \chi'' m + \xi_1 m - c m, \quad (23.83)$$

$$R_{n2} = R_{a2} - \chi'' m + \xi_2 m - c m, \quad (23.84)$$

где $c = 0,25$ — коэффициент радиального зазора.

Коэффициент перекрытия ϵ может быть определен по формуле, аналогичной формуле (23.36), но при этом величина шага t по начальной окружности при условии нарезания колеса со сдвигом должна быть принята равной $t = \frac{\pi m \cos \alpha_0}{\cos \alpha_3}$ и угол α должен быть принят равным α_3 .

Таким образом, формула для определения коэффициента перекрытия ϵ для колес, нарезанных со сдвигом,

$$\epsilon = \frac{\sqrt{R_{r1}^2 - r_1^2} + \sqrt{R_{r2}^2 - r_2^2} - A \sin \alpha_3}{\pi m \cos \alpha_0}. \quad (23.85)$$

8°. Как это видно из рассмотрения теории зубчатых колес, зубья которых нарезаны со сдвигом, величины сдвигов влияют на некоторые геометрические параметры зубчатой передачи: увеличиваются толшины зубьев, увеличиваются радиусы кривизны профилей зубьев, изменяется расположение практической линии зацепления относительно полюса зацепления, изменяются коэффициенты удельного скольжения зубьев и т. д. Все эти обстоятельства влияют на прочность и износ зубьев, плавность зацепления и т. д. Выбор того или иного сдвига зависит от назначения зубчатой передачи, условий, в которых она работает, нагрузок на элементы зубчатой передачи и т. д. Подробно эти вопросы рассмотрены в специальных монографиях*). В этих монографиях можно также получить сведения о геометрии колес, нарезаемых долбяком, и, в частности, зубчатых передач с внутренним зацеплением.

Пример 1. Определить необходимый сдвиг $b = \xi m$ рейки (рис. 645) для нарезания зубчатого колеса с числом зубьев $z = 10$ и модулем $m = 10$ мм. Угол зацепления рейки $\alpha_0 = 20^\circ$. Коэффициент высоты головки зубьев рейки $\chi' = 1$.

Величина коэффициента сдвига определяется по формуле (23.66)

$$\xi = \frac{17 - z}{17} = \frac{17 - 10}{17} = \frac{7}{17}.$$

Величина b определяется по формуле (23.60):

$$b = \xi m = \frac{7 \cdot 10}{17} = 4,12 \text{ мм.}$$

Пример 2. Определить основные размеры зубчатой передачи из условия отсутствия подрезания зуба у малого колеса: числа зубьев колес равны $z_1 = 12$, $z_2 = 36$. Модуль инструментальной рейки равен $m = 10$ мм. Коэффициент высоты головки и ножки зуба $\chi' = \chi'' = \chi = 1$. Угол зацепления α_0 при нарезании (угол наклона образующей прямой рейки $\alpha_0 = 20^\circ$). Коэффициент радиального зазора $c = 0,25$.

*) Гавриленко В. А., Зубчатые передачи в машиностроении, Машгиз, М., 1962, и Кудрявцев В. Н., Зубчатые передачи, Машгиз, М., 1957.

Порядок расчета:

1. Выбираем коэффициенты сдвига рейки ξ_1 и ξ_3 из условия отсутствия подрезания зубов по формуле (23.66):

$$\xi_1 = \frac{17 - z_1}{17} = \frac{17 - 12}{17} = 0,2941.$$

Так как число зубьев z_3 больше 17, то принимаем сдвиг ξ_3 на колесе 2 равным нулю: $\xi_3 = 0$.

2. Определяем по формуле (23.79) угол зацепления α_3 в сборке при безазорном зацеплении

$$\text{inv } \alpha_3 = \frac{2(\xi_1 + \xi_3) \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1 + z_3} + \text{inv } \alpha_0 = \frac{2 \cdot 0,2941 \cdot 0,364}{12 + 36} + 0,0149 = 0,01936,$$

откуда находим по таблицам значение угла α_3 . Имеем $\alpha_3 \approx 21^\circ 45'$.

3. Определяем по формуле (23.80) межцентровое расстояние:

$$A = \frac{m}{2}(z_1 + z_3) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_3} = \frac{10}{2}(12 + 36) \cdot \frac{0,9397}{0,9288} = 242,81 \text{ мм.}$$

4. Определяем радиусы R_{d1} и R_{d3} делительных окружностей:

$$R_{d1} = \frac{mz_1}{2} = 60 \text{ мм и } R_{d3} = \frac{mz_3}{2} = 180 \text{ мм.}$$

5. Подсчитываем по формулам (23.81) и (23.82) радиусы R_{r1} и R_{r3} окружностей головок (радиусы заготовок):

$$\begin{aligned} R_{r1} &= A - R_{d3} - \xi_3 m + \chi m = 242,81 - 180 + 10 = 72,81 \text{ мм,} \\ R_{r3} &= A - R_{d1} - \xi_1 m + \chi m = 242,81 - 60 - 2,94 + 10 = 189,87 \text{ мм.} \end{aligned}$$

6. Определяем радиусы r_1 и r_3 основных окружностей:

$$\begin{aligned} r_1 &= R_{d1} \cos \alpha_0 = 60 \cdot 0,94 = 56,4 \text{ мм, } r_3 = R_{d3} \cos \alpha_0 = 180 \cdot 0,94 = \\ &= 169,2 \text{ мм.} \end{aligned}$$

7. Проверяем зуб малого колеса на отсутствие заострения, для чего подсчитываем по формуле (23.74) толщину зуба a'_{r1} по окружности головок, положив $R_i = R_{r1}$ и $\alpha_i = \alpha_{r1}$, причем угол α_{r1} находим из условия

$$\cos \alpha_{r1} = \frac{r_1}{R_{r1}} = \frac{56,4}{72,81} = 0,7745.$$

Следовательно, $\alpha_{r1} = 39^\circ 15'$.

По таблицам имеем $\text{inv } \alpha_{r1} = 0,1312$. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} a'_{r1} &= m \frac{R_{r1}}{R_{d1}} \left(\frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg} \alpha_0 \right) + 2R_{r1} (\text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_{r1}) = 10 \frac{72,81}{60} (1,5708 + \\ &+ 2 \cdot 0,2941 \cdot 0,364) + 2 \cdot 72,81 \cdot (0,0149 - 0,1312) \approx 4,5 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Следовательно, на окружности головок ширина зуба a'_{r1} не равна нулю и зуб не имеет заострения, и $a'_{r1} > 0,3m$.

кривую), касающуюся центроид $Ц_1$ и $Ц_2$ в точке P_0 . На окружности S возьмем произвольную точку M_1 и найдем ее траекторию $M_1M_2M_3 \dots$ при качении без скольжения окружности S по центроиде $Ц_1$. При качении без скольжения дуги $P_0a_1, a_1\beta_1, \beta_1\gamma_1, \dots$ соответственно равны дугам $P_0a_1, a_1b_1, b_1c_1, \dots$. Далее, найдем траекторию $M_1M_2^*M_3^* \dots$ точки M_1 при качении без скольжения окружности S по центроиде $Ц_2$. При этом качении дуги $P_0a_1, a_1\beta_1, \beta_1\gamma_1, \dots$ соответственно равны дугам $P_0a_2, a_2b_2, b_2c_2, \dots$.

Покажем, что кривые $M_1M_2M_3M_4$ и $M_1M_2^*M_3^*M_4^*$ являются взаимогобируемыми, принадлежащими первой центроиде $Ц_1$, а вторая — центроиде $Ц_2$. Соединяя прямыми точку M_1 с точками P_0 и γ_1 , получаем треугольник $M_1\gamma_1P_0$, который в тот момент, когда точка γ_1 совпадает с точкой c_1 , занимает положение $M_1c_1P_0$. При этом дуга P_0c_1 по условию равна дуге $P_0\gamma_1$. Можно, далее, показать, что некоторая точка M_1^* кривой $M_1M_2^*M_3^*M_4^* \dots$ есть точка огибающей, соответственная точке M_1 огибаемой $M_1M_2M_3M_4$. Для этого, соединяя прямыми точку M_1^* с точками P_0 и c_2 , получаем треугольник $M_1^*c_2P_0$, равный треугольнику $M_1\gamma_1P_0$, так как по построению $\cup c_2P_0 = \cup P_0c_2 = \cup P_0c_1 = \cup P_0\gamma_1$; отрезок $M_1^*c_2$ равен отрезку $M_1\gamma_1$; вершины этих треугольников лежат на окружностях S и S' одного и того же диаметра. Прямые $c_2M_1^*$ и c_1M_1 суть нормали к кривым $M_1M_2M_3M_4$ и $M_1M_2^*M_3^*M_4^*$. Эти нормали образуют с прямыми O_2c_2 и O_1c_1 один и тот же угол ϕ . Следовательно, в тот момент, когда центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ будут соприкасаться точками c_1 и c_2 , направления нормалей $c_2M_1^*$ и c_1M_1 совпадут, и точки $M_1M_1^*$ окажутся точками соприкосновения кривых $M_1M_2M_3M_4$ и $M_1M_2^*M_3^*M_4^*$. Аналогичным путем можно показать, что точками соприкосновения последовательно будут и остальные точки построенных кривых $M_1M_2M_3M_4 \dots$ и $M_1M_2^*M_3^*M_4^* \dots$, причем нормали в точках соприкосновения будут совпадать и проходить через точку P_0 . Таким образом, кривые, построенные качением окружности S , являются взаимогобируемыми. Кривые $M_1M_2M_3M_4$ и $M_1M_2^*M_3^*M_4^* \dots$, получаемые указанным способом, являются рулетками.

Можно показать, что линией зацепления рассматриваемых сопряженных кривых есть сама окружность S . В самом деле, чтобы, например, найти точку M_0 линии зацепления, в которой совпадают точки M_1' и M_1^* , необходимо совместить окружности S' и S'' . Вследствие равенства окружностей S, S' и S'' , равенства треугольников $P_0c_1M_1'$ и $P_0c_2M_1^*$ и углов ϕ , точки M_1' и M_1^* при совмещении окружностей совпадут одна с другой и с точкой M_0 , лежащей на окружности S . Совмещенное положение $P_0P_0M_0$ упомянутых треугольников на окружности S показано на рис. 651 пунктиром.

Точки линии зацепления, соответствующие совмещению точек M_2' и M_2^* , M_3' и M_3^* , $\dots$, могут быть всегда найдены следующим образом. Пусть, например, требуется определить на линии зацепления точку совмещения точек M_4' и M_4^* . Для этого из точек O_1 и O_2 проводим радиусами O_1M_4' и $O_2M_4^*$ окружности до их пересечения в точке M_0 , лежащей на окружности S .

Построения, аналогичные рассмотренным, могут быть применены и для некруглых центроид с произвольно выбранными вспомогательными кривыми.

2°. *Циклоидальным зубчатым зацеплением называется такое зубчатое зацепление, у которого профили зубьев очерчены по циклическим кривым.*

Рассмотрим некоторые виды этих кривых. Пусть окружность S_1 катится без скольжения по прямой $x-x$ (рис. 652). Тогда любая точка, лежащая на окружности S_1 , описывает циклоиду. Циклоида строится следующим образом. По прямой $x-x$ от точки A откладываем отрезок AB , равный πr_1 , где r_1 есть радиус окружности S_1 . Полученный отрезок делим, например, на восемнадцать равных частей в точках $1', 2', 3', \dots, 18'$. Из этих точек составляем перпендикуляры до пересечения с прямой, проходящей через точку O , параллельно оси $x-x$. На этой прямой получаем точки O_1 и $O_2, \dots, O_{18}$. Затем делим половину окружности S_1 на восемнадцать равных дуг в точках $1, 2, 3, \dots, 18$. Из точек $1, 2, 3, \dots, 18$ окружности S_1 проводим прямые $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_{18}B_{18}$, параллельные оси $x-x$. Из точек $O_1, O_2,$

$O_2, \dots, O_{18}$ радиусом r_1 проводим дуги до пересечения с прямыми $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_{18}B_{18}$. Точки пересечения определяют точки *циклоиды*. Нормаль к циклоиде в любой ее точке всегда проходит через точку соприкосновения в рассматриваемом положении окружности S_1 , образующей циклоиду, с прямой. Аналогично, если катить без скольжения окружность S_2 по той же прямой $x-x$, то мы получаем также циклоиду. Определенный участок этих циклоид может быть принят за профиль зуба.

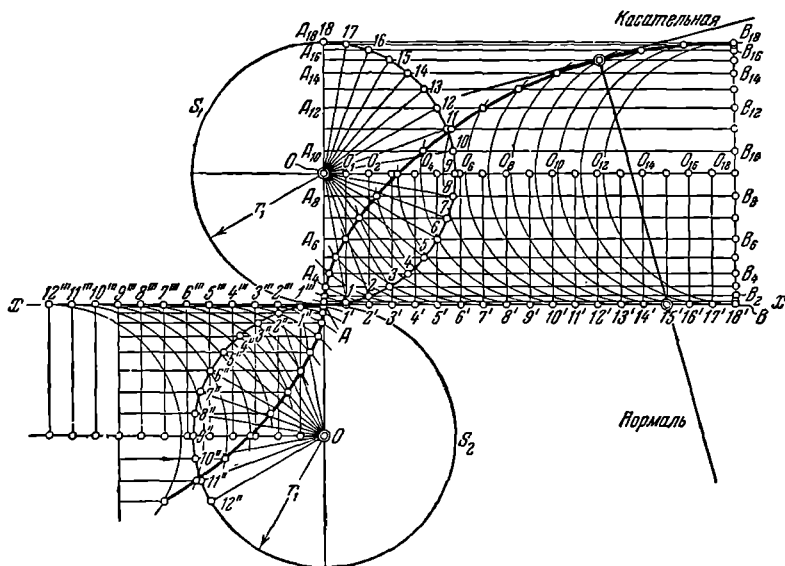


Рис. 652. Построение циклоиды.

3°. Если окружность S_1 катится без скольжения по окружности радиуса R (рис. 653) вне круга, то любая точка, лежащая на этой окружности, описывает циклическую кривую, называемую *эпициклоидой*. Если окружность S_2 катится без скольжения по окружности радиуса R внутри круга, то любая точка, лежащая на этой окружности, описывает циклическую кривую, называемую *гипоциклоидой*. Построение эпициклоиды и гипоциклоиды аналогично построению циклоиды. Это построение показано на рис. 653.

При профилировании циклоидального зубчатого зацепления пользуются отдельными участками циклоид, эпициклоид и гипоциклоид.

4°. Рассмотрим, каким образом профилируются зубья колес внешнего циклоидального зубчатого зацепления. Пусть задано передаточное отношение i_{12} зубчатого механизма. По формулам

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{z_2}{z_1}$$

и

$$A = R_1 + R_2,$$

где A — расстояние между центрами O_1 и O_2 начальных окружностей, находим радиусы R_1 и R_2 начальных окружностей (рис. 654). Задаемся, далее, двумя вспомогательными окружностями S_1 и S_2 радиусов r_1 и r_2 . Пусть эти

окружности касаются начальных окружностей в полюсе зацепления P_0 . Окружность S_1 катит без скольжения по начальной окружности Π_2 второго

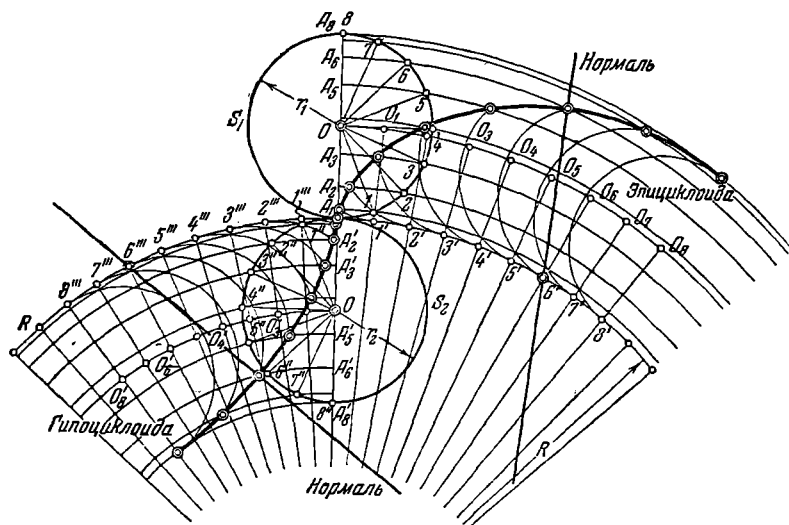


Рис. 653. Построение эпициклоиды и гипоциклоиды.

колеса. Тогда точка окружности S_1 , совпадающая в начальном положении с точкой P_0 , опишет эпициклоиду $P_0\mathcal{E}_2$. Если ту же окружность прокатить без скольжения по начальной окружности Π_1 , то эта же точка вспомогательной окружности S_1 опишет гипоциклоиду $P_0\Gamma_1$. Построенные эпициклоида и гипоциклоида являются взаимноогibaемыми и, следовательно, могут быть использованы в качестве сопряженных профилей зубьев.

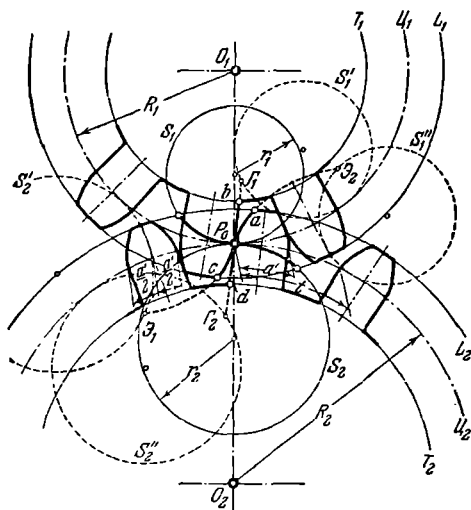


Рис. 654. Внешнее циклоидальное зубчатое зацепление.

Аналогично вторую вспомогательную окружность S_2 прокатываем без скольжения по начальным окружностям Π_1 и Π_2 . Тогда точка окружности S_2 , первоначально совпадающая с точкой P_0 , опишет эпициклоиду $P_0\mathcal{E}_1$ и гипоциклоиду $P_0\Gamma_2$. Чтобы определить участки эпициклоид и гипоциклоид, которые могут быть использованы в качестве профилей зубьев, проводим окружности L_1 и L_2 головок и окружности T_1 и T_2 ножек. Эти окружности ограничат действительные практические профили зубьев. Так, участок P_0a эпициклоиды $P_0\mathcal{E}_2$ есть профиль головки зуба второго колеса, а уча-

сток P_0b гипоциклоиды $P_0\Gamma_1$ — профиль ножки зуба первого колеса. Точно так же участок P_0c эпициклоиды $P_0\mathcal{E}_1$ является профилем головки зуба первого колеса, а участок P_0d гипоциклоиды $P_0\Gamma_2$ — профилем ножки зуба второго колеса. Таким образом, профиль каждого зуба очерчен по эпициклоиде и гипоциклоиде, причем эпициклоида все время соприкасается с гипоциклоидой.

5°. На рис. 655 показано построение профилей зубьев для внутреннего зацепления. В этом случае головка зуба первого колеса описана

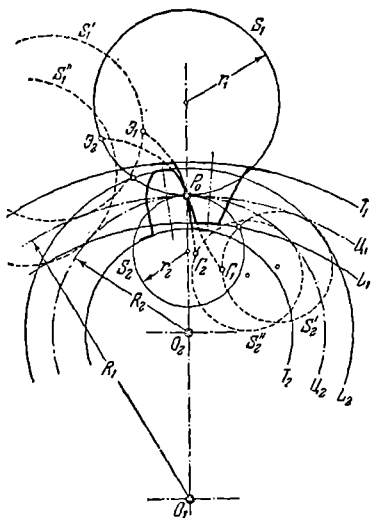


Рис. 655. Внутреннее циклоидальное зубчатое зацепление.

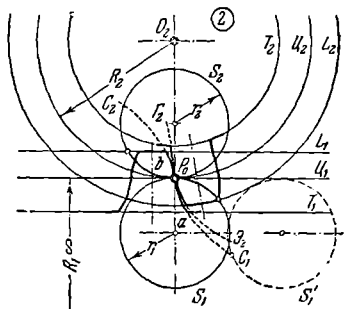


Рис. 656. Реечное циклоидальное зубчатое зацепление.

по гипоциклоиде $P_0\Gamma_1$, а ножка зуба — по эпициклоиде $P_0\mathcal{E}_1$. Таким образом, при внутреннем зацеплении эпициклоида постоянно находится в соприкосновении с эпициклоидой и гипоциклоида с гипоциклоидой.

В случае реечного зацепления (рис. 656) начальная окружность $\mathcal{C}_1$ превращается в прямую $\mathcal{C}_1$, и участок P_0a профиля зуба рейки очерчивается по циклоиде $P_0\mathcal{C}_1$, а участок P_0b — по циклоиде $P_0\mathcal{C}_2$. Профили зубьев зубчатого колеса 2 очерчиваются по эпициклоиде $P_0\mathcal{E}_2$ и гипоциклоиде $P_0\Gamma_2$.

Радиус r вспомогательной окружности с точки зрения кинематики может быть выбран произвольно в пределах радиуса начальной окружности, но с точки зрения обеспечения достаточной прочности зуба рекомендуется выбирать радиус вспомогательной окружности меньше половины радиуса начальной окружности. В самом деле, если выбрать радиус вспомогательной окружности r_1 больше половины радиуса R_1 начальной окружности, то ножка зуба будет очерчена по гипоциклоиде $P_0\Gamma_1$ (рис. 657). Если радиус r вспомогательной окружности будет равен $1/2 R_1$, то гипоциклоида по свойству этих кривых перейдет в прямую $P_0\Gamma_2$, т. е. ножка зуба будет очерчена по прямой. Если радиус вспомогательной окружности r выбран меньше $1/2 R_1$,

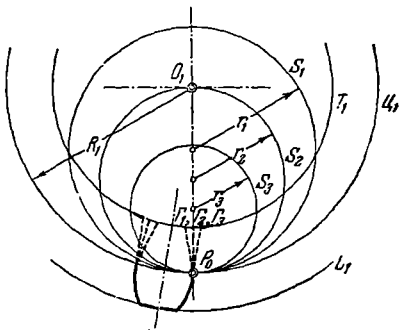


Рис. 657. Различные виды формы ножки зуба в зависимости от радиуса вспомогательной окружности.

то ножка зуба будет очерчена по гипоциклоиде $P_0\Gamma_3$. Из рис. 657 видно, что при ножке, очерченной по гипоциклоиде $P_0\Gamma_1$, соответствующей радиусу вспомогательной окружности $r_1 > \frac{1}{2}R_1$, зуб получается с сильно ослабленным сечением ножки и, следовательно, прочность его будет меньшей, чем при ножке, очерченной по гипоциклоиде $P_0\Gamma_3$. Обычно рекомендуется выбирать радиус вспомогательной окружности в пределах от 0,35 до 0,4 R_1 .

6°. Выше было показано, что, когда в качестве рулетт применяются эпициклоида и гипоциклоида, линией зацепления служит сама вспомогательная окружность (рис. 651). Пусть, например, заданы два зуба циклоидального зацепления (рис. 658). Чтобы определить фактическую длину линии зацепления, необходимо найти на вспомогательных окружностях S_1 и S_2 крайние точки A и B , в которых сопряженные профили зубьев. Для этого из точки O_1 радиусом O_1a делаем засечку на окружности S_2 . Полученная точка A является крайней точкой зацепления профилей. Чтобы найти точку d , принадлежащую профилю зубчатого колеса 2, которая при вращении колеса 2 придет в точку A , делаем из точки O_2 радиусом O_2a засечку на профиле зуба колеса 2 и получаем точку d . Для нахождения второй крайней точки B линии зацепления делаем из точки O_2 на окружности S_1 засечку радиусом O_2b . Точка c профиля зуба колеса 1, в которой этот зуб соприкасается с зубом колеса 2 в точке B , найдем, если из точки O_1 сделаем засечку на профиле зуба колеса 1 радиусом O_1B . Фактическая линия зацепления будет равна сумме дуг AP_0 и P_0B . Части профиля

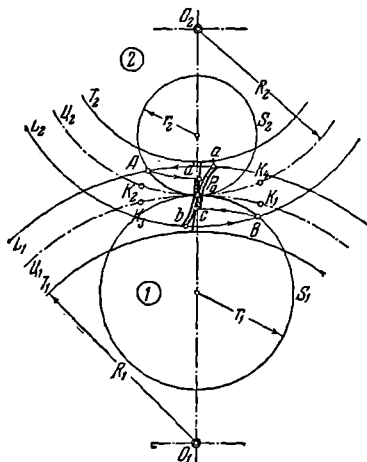


Рис. 658. К определению длины линии зацепления и рабочего профиля зубьев для циклоидального зацепления.

зуба первого колеса на участке ac и зуба второго на участке bd будут рабочими профилями зубьев. Легко видеть, что рабочие профили зубьев будут тем большими, чем больше линия зацепления. Линия же зацепления будет тем больше, чем больше радиусы вспомогательных окружностей. Но, как мы видели выше, увеличение радиуса вспомогательной окружности ведет к уменьшению толщины ножки зуба. Поэтому не может быть рекомендовано значительное увеличение радиуса вспомогательной окружности.

Найдем теперь путь, пройденный любой точкой начальной окружности за время зацепления одной пары сопряженных профилей зубьев. Для этого воспользуемся условием, что вспомогательные окружности S_1 и S_2 катятся по начальным окружностям без скольжения. Отложим на начальных окружностях дуги P_0K_2 и P_0K_3 , равные дуге P_0A , и дуги P_0K_1 и P_0K_4 , равные дуге P_0B (рис. 658). Дуга K_1K_3 начальной окружности Γ_1 и дуга K_2K_4 начальной окружности Γ_2 являются теми дугами, по которым прокатятся начальные окружности за время нахождения одной пары сопряженных профилей в зацеплении. Дуги K_1K_3 и K_2K_4 носят название дуг зацепления. Из построения дуг зацепления следует, что длина дуги зацепления циклоидального зацепления равняется длине линии зацепления.

Коэффициент перекрытия

$$\epsilon = \frac{\cup P_0A + \cup P_0B}{t},$$

где t — шаг зацепления.

7°. Укажем на некоторые достоинства и недостатки циклоидального зацепления.

К достоинствам циклоидального зацепления надо отнести то, что в этом зацеплении может быть достигнута большая плавность зацепления (большой коэффициент перекрытия). Далее, метод круглых вспомогательных центроид может быть удобно использован и для профилирования зубьев некруглых цилиндрических колес.

Недостатком этих профилей является их чувствительность к изменению расстояния между центрами колес. Если, например, изменяется расстояние между центрами двух колес с внешним зацеплением (рис. 654), то эпициклоида одного зуба придет в соприкосновение не с гипоциклоидой, а с эпициклоидой сопряженного зуба и правильность зацепления нарушится. К числу недостатков циклоидального зацепления надо также отнести трудности замены износившихся колес новыми. Если нужно заменить старое колесо новым, то необходимо, чтобы новое колесо не только обладало тем же модулем, как и старое, но должны быть также вполне определенными те вспомогательные окружности, с помощью которых был образован его профиль. Это следует из того, что головка зуба и его ножка профилируются различными вспомогательными окружностями. Поэтому при замене старого колеса новым предварительно необходимо определить, какие вспомогательные окружности были выбраны при проектировании этих колес. Таким образом, колеса с циклоидальными профилями зубьев неудобны с точки зрения взаимозаменяемости. Наконец, изготовление колес с циклоидальным зацеплением представляет значительные трудности. Все это привело к тому, что колеса с циклоидальными профилями зубьев почти не применяются в машинах общего машиностроения и применяются только в некоторых специальных машинах и приборах. Более широкое применение получили некоторые частные виды зацеплений с циклоидальными профилями.

8°. Из частных видов циклоидального зацепления остановимся на цевочном зацеплении. Пусть заданы центроиды Π_1 и Π_2 (рис. 659). За первую вспомогательную окружность S_1 выбираем самую центроиду S_1 . Тогда точка этой центроиды, совпадающая с точкой P_0 , опишет при качении по центроиде Π_2 эпициклоиды $P_0\mathcal{E}$ (показаны пунктиром). Вторая вспомогательная окружность пусть будет точкой, совпадающей с точкой P_0 . Чтобы обеспечить передачу движения, вместо выбранной точки сцепляют с центроидой Π_2 ролики F радиуса r , а профили зубьев смещают на величину радиуса r ролика, т. е. проводят эквидистанты $\mathcal{E}'\mathcal{E}'$ эпициклоиды. Тогда получаем так называемое *цевочное зацепление*. Ролики F носят название *цевок*. Пример цевочного зацепления показан на рис. 660. Представленный механизм называется *звездчатым механизмом*. Задачей этого механизма

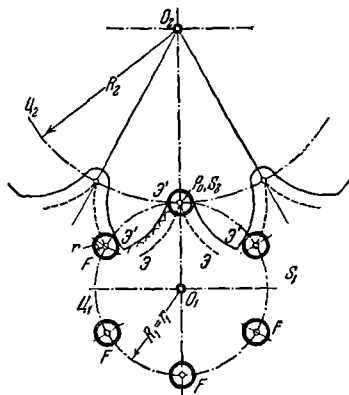


Рис. 659. Цевочное зацепление.

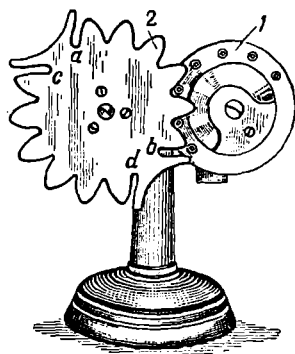


Рис. 660. Звездчатый механизм.

является воспроизведение движения с остановками; цевочное зацепление выполнено на участках ab и cd . Цевочное зацепление обладает тем недостатком, что в нем быстро изнашиваются цевки. Практическое применение получило так называемое внецентроидное цевочное зацепление, являющееся частным видом цевочного зацепления, когда центры цевки цевочного колеса вынесены за пределы центроиды $Ц_1$. При этом соответственно смещаются зубья зубчатого колеса, что позволяет увеличить шаг зацепления.

§ 119. Проектирование передач с косыми зубьями

1°. В цилиндрических колесах с прямыми зубьями соприкосновение двух сопряженных профилей происходит по прямой, параллельной осям колес. Проведем касательную плоскость S к основному цилиндру (рис. 661). Пусть плоскость S касается цилиндра по некоторой прямой MM , представляющей собой одну из образующих цилиндра; эта плоскость пересекает боковую поверхность зуба по некоторой прямой AA , параллельной образующей цилиндра. Соприкасание зубьев происходит по прямой AA в тот момент, когда плоскость S совпадает с плоскостью зацепления. Таким образом, в цилиндрических колесах с прямыми зубьями соприкосновение происходит одновременно по всей длине зуба по прямым, параллельным образующим цилиндра.

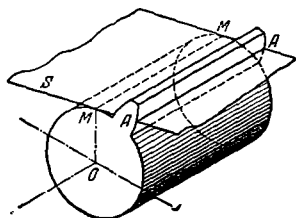


Рис. 661. Цилиндрическое колесо с прямыми зубьями.

Если при изготовлении зуба были допущены какие-либо погрешности (неточность профиля, непостоянство шага и т. д.), то эти погрешности могут значительно ухудшить условия работы зубчатой передачи, в частности, например, усиливают шум. Кроме того, как было показано выше, коэффициент перекрытия

зубчатых колес с прямыми зубьями ограничен весьма узкими пределами, вследствие чего вся нагрузка распределяется не более чем на две пары зубьев. С целью уменьшения влияния погрешностей при изготовлении колес на их работу и увеличения коэффициента перекрытия можно прямые зубья заменить ступенчатыми. Образование ступенчатых зубчатых колес можно представить следующим образом.

Рассечем (на равные части) зубчатое колесо с прямыми зубьями плоскостями, перпендикулярными к оси колеса (рис. 662). Тогда получим несколько дисков равной толщины. Каждый из полученных дисков сдвинем один относительно другого на один и тот же угол. Тогда если два таких колеса привести в соприкосновение, то одновременно в зацеплении будут находиться различные участки профилей зубьев. Первый зуб будет соприкасаться по прямой $A_1 - A_1$, второй зуб будет соприкасаться по прямой $A_2 - A_2$, третий зуб — по прямой $A_3 - A_3$ и т. д.

Таким образом, влияние возможных погрешностей уменьшится. Отдельные участки профилей зубьев будут последовательно прихо-

доть в зацепление; дуга зацепления увеличится на величину смещения зубьев по начальной окружности, и следовательно, увеличится коэффициент перекрытия передачи.

2°. Зубчатые колеса редко выполняются так, как это указано на рис. 662. Обычно вместо колес со ступенчатыми зубьями применяются

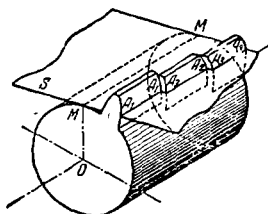


Рис. 662. Цилиндрическое колесо со ступенчатыми зубьями.

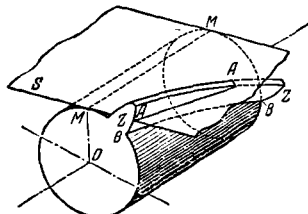


Рис. 663. Цилиндрическое колесо с винтовыми зубьями.

колеса с винтовыми или косыми зубьями (рис. 663). Образование боковой поверхности косо́го зуба можно себе представить, если рассмотреть качение без скольжения плоскости S (рис. 663) по основному цилиндру с осью O . Если на плоскости S выбрать прямую AA , составляющую с образующей цилиндра некоторый угол, то каждая из точек прямой AA опишет эвольвенту, а сама прямая опишет поверхность, называемую *развертывающимся геликоидом*. Эвольвенты каждого из поперечных сечений развертывающегося геликоида имеют основания, расположенные по винтовой линии BB (рис. 663). Для получения сопряженных поверхностей двух цилиндрических колес с косыми зубьями необходимо последовательно производить качение общей касательной плоскости сначала по одному, а потом по другому основному цилиндру, при этом прямая AA , выбранная в этой плоскости, опишет поверхности двух взаимогнбаемых геликоидов. Касание геликоидов будет происходить по сби́гней образующей, которая будет всегда располагаться на общей касательной плоскости.

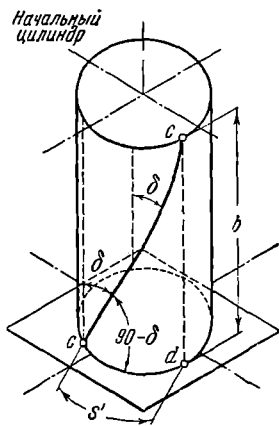


Рис. 664. Угол скручивания и дуга скручивания винтовой линии косозубого колеса.

Угол δ (рис. 664), образованный осью колеса и винтовой линией, постоянный. Угол δ обычно носит название *угла скручивания*. Дуга s' , измеренная по окружности начального цилиндра, называется *дугой скручивания*. Два сопряженных колеса должны иметь равные углы скручивания. При внешнем зацеплении винтовая линия на одном колесе должна быть правой, а на другом — левой. При внутреннем зацеплении

винтовые линии должны быть либо обе правыми, либо обе левыми. В плоскостях, перпендикулярных к оси колеса, зацепление происходит так же, как и в обыкновенных зубчатых колесах, но в каждый рассматриваемый момент в зацеплении участвуют различные точки профилей. Поэтому влияние погрешностей при изготовлении этих колес сказывается гораздо меньше, чем у колес с прямыми зубьями. Кроме того, вследствие скручивания зуба на угол δ длина дуги зацепления увеличивается на величину (рис. 664)

$$s' = \cup cd.$$

Величина добавочной дуги зацепления

$$s' = b \operatorname{tg} \delta.$$

Если обозначить основную дугу зацепления через s'' , то, очевидно, полная дуга зацепления выразится так:

$$s = s'' + s'.$$

Таким образом, коэффициент перекрытия ϵ' колес с косыми зубьями

$$\epsilon' = \frac{s}{t} = \frac{s''}{t} + \frac{s'}{t} = \epsilon + \frac{b}{t} \operatorname{tg} \delta, \quad (23.86)$$

где ϵ — коэффициент перекрытия для того случая, когда при том же числе зубьев колеса имеют прямые зубья.

Из формулы (23.86) следует, что коэффициент перекрытия косозубых колес может быть значительно больше, чем у прямозубых.

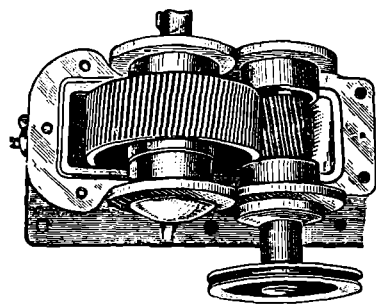


Рис. 665. Зубчатый редуктор с косозубыми колесами.

Таким образом, при передаче косозубыми колесами одновременно в зацеплении может находиться уже не одна или две пары зубьев. В некоторых случаях число пар зубьев, находящихся одновременно в зацеплении, может достигать десяти. Нагрузка в этих передачах распределяется на несколько зубьев, благодаря чему плавность передачи повышается. Поэтому косозубые колеса широко применяются для передач с большими скоростями и большими мощностями. На рис. 665 приведен фотоснимок механизма с косозубыми колесами.

Как это видим из схематического изображения развертки обода косозубого колеса (рис. 666), в колесах с косыми зубьями следует различать три шага зацепления, измеряемых по начальному цилиндру: *окружной шаг* t , получаемый в пересечении колеса плоскостью, перпендикулярной к оси $O-O$ начального цилиндра в торцовом сечении; *нормальный шаг* t_n , получаемый пере-

сечением колеса плоскостью, нормальной к винтовой линии на начальном цилиндре; *аксиальный шаг* t_a , получаемый пересечением колеса плоскостью, проходящей через ось $O-O$ начального цилиндра.

Связь между этими шагами, как это следует из рис. 666, имеет следующий вид:

$$t = \frac{t_n}{\cos \delta} = \frac{t_a}{\operatorname{ctg} \delta}. \quad (23.87)$$

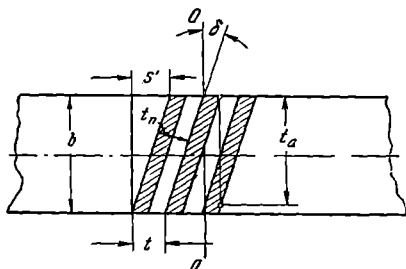


Рис. 666. Развертка обода косозубого колеса.

Соответственно может быть установлена и связь между модулем m в торцовом сечении, равным $m = t/\pi$, модулем m_n в нормальном сечении, равным $m_n = t_n/\pi$, и модулем m_a в аксиальном сечении, равным $m_a = t_a/\pi$. Стандартным модулем является модуль m_n , так как нарезание зубьев косозубого колеса может быть сделано стандартным реечным инструментом, устанавливаемым под углом δ к оси колеса. Из рис. 666 следует:

$$m = \frac{m_n}{\cos \delta}, \quad m_a = \frac{m_n}{\sin \delta}. \quad (23.88)$$

Диаметр D_d делительной окружности, измеренной в торцовом сечении, равен

$$D_d = mz = \frac{m_n z}{\cos \delta}. \quad (23.89)$$

3°. Рассмотрим вопрос о действии сил в зубчатой передаче с косыми зубьями. На зуб ведомого колеса 2 действует сила P_{12} , расположенная в нормальной к зубу плоскости, содержащей прямую O_1O_2 (рис. 667, в) и отклоненную на угол скручивания δ (рис. 667, б) от торцового сечения. В этой плоскости сила P_{12} направлена под углом зацепления α_n в нормальной плоскости (рис. 667, в). Сила P_{12} может быть представлена как сумма трех составляющих, лежащих в трех перпендикулярных плоскостях: силы P'_{12} , направленной по касательной к начальным цилиндрам, силы P''_{12} , направленной по радиусу колеса 2,

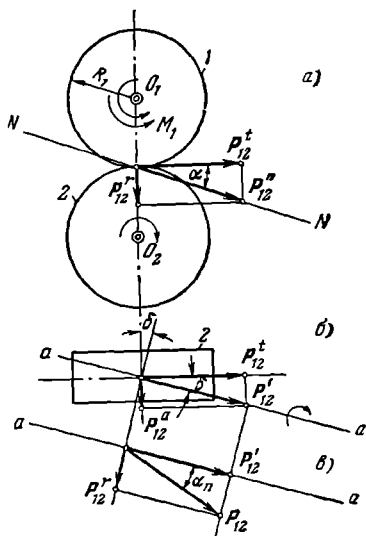


Рис. 667. Силы, действующие на зуб косозубого колеса: а) слагающая силы, расположенная в торцовой плоскости; б) слагающая силы, расположенная в горизонтальной плоскости; в) слагающая силы, расположенная в нормальной плоскости.

и силы P_{12}^a , направленной параллельно оси колеса 2:

$$P_{12} = P_{12}' + P_{12}^r + P_{12}^a. \quad (23.90)$$

Из рис. 667, а следует, что сила P_{12}^r равна

$$P_{12}^r = P_{12}' \operatorname{tg} \alpha. \quad (23.91)$$

Далее, из рис. 667, б имеем:

$$P_{12}^a = P_{12}' \operatorname{tg} \delta. \quad (23.92)$$

Тогда результирующая сила P_{12} согласно уравнению (23.90) и формулам (23.91) и (23.92) равна

$$\begin{aligned} P_{12} &= \sqrt{(P_{12}')^2 + (P_{12}')^2 + (P_{12}')^2} = \sqrt{(P_{12}')^2 + (P_{12}' \operatorname{tg} \alpha)^2 + (P_{12}' \operatorname{tg} \delta)^2} = \\ &= P_{12}' \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \delta} + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{M_1}{R_1} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \delta} + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (23.93)$$

где M_1 — момент, приложенный к колесу 1, и R_1 — радиус колеса 1.

Аналогично определяются и силы, действующие на ведущее колесо 1. Для получения уравнения, связывающего углы α , δ и α_n , повернем на угол 90° плоскость, содержащую силу $P_{12}' = P_{12}' + P_{12}^a$, и повернем силу P_{12}^r (рис. 667, в) вокруг прямой $a-a$ до совпадения с плоскостью чертежа. Сила P_{12} будет также лежать в этой плоскости и будет образовывать угол α_n с силой P_{12}' .

Из рис. 667, в получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{P_{12}^r}{P_{12}'}. \quad (23.94)$$

Из рис. 667, б имеем:

$$P_{12}^r = P_{12}' \frac{1}{\cos \delta}. \quad (23.95)$$

Подставляя в равенство (23.94) значения для сил P_{12}' и P_{12}^r из формул (23.91) и (23.95), получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha \cos \delta. \quad (23.96)$$

Особенностью колес с косыми зубьями является то, что кроме передачи окружного усилия P_{12}' (рис. 668) в этих колесах появляется осевое усилие P_{12}^a . Это усилие вызывает необходимость устройства упорного осевого подшипника и, кроме того, вызывает в нем дополнительные потери на трение. Для устранения указанного недостатка применяют колеса с шевронными зубьями (рис. 669), представляющими собой как бы

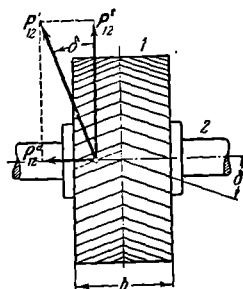


Рис. 668. Зубчатое колесо с шевронными зубьями.

два косозубых колеса с симметричным расположением зубьев. У этих колес осевые усилия взаимно уравниваются, и следовательно, отпадает необходимость в установке упорных подшипников.

Для большего удобства изготовления шевронное колесо делают иногда с промежуточным желобком a посередине (рис. 669). На рис. 670 приведен фотоснимок механизма с шевронными зубьями для передачи больших мощностей.

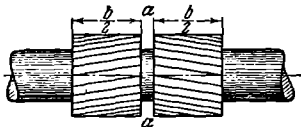


Рис. 669. Шевронное колесо с промежуточным желобком.

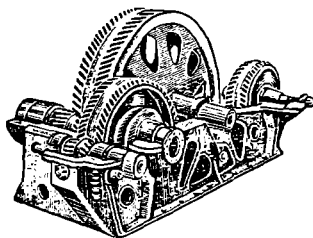


Рис. 670. Редуктор большой мощности с шевронными колесами.

4°. Как было показано выше, при зацеплении колес с косыми зубьями с эвольвентным профилем соприкосновение зубьев происходит по прямой линии.

Геометрическое место прямых соприкосновения представляет собой плоскость, являющуюся плоскостью зацепления. Плоскость зацепления образует угол, равный углу зацепления α с плоскостью, касательной к начальным цилиндрам колес.

М. Л. Новиков предложил косозубое зацепление с неэвольвентными профилями зубьев. Зубья располагаются по некоторым винтовым ли-

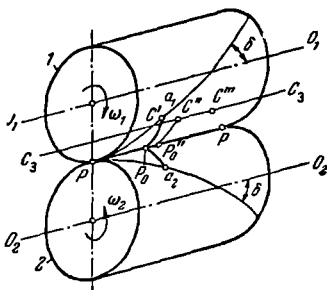


Рис. 671. Винтовые линии косозубого зацепления Новикова.

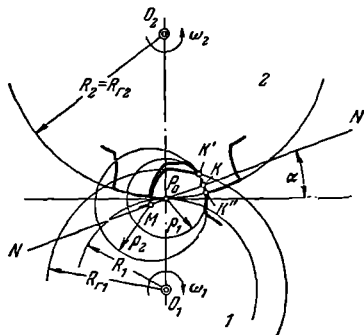


Рис. 672. Построение профилей зубьев зацепления Новикова.

ниям, имеющим равные углы скручивания δ (рис. 671). На рис. 671 показаны две винтовые линии, лежащие на начальных цилиндрах колес 1 и 2. Дуги P_0a_1 и P_0a_2 , на которые перекачиваются цилиндры, всегда равны между собой. Вместо плоскости зацепления М. Л. Новиков

ввел линию зацепления $C_3 - C_3$ (рис. 671), расположенную параллельно осям начальных цилиндров. Сопряженные профили зубьев колес 1 и 2 последовательно входят в зацепление в точках C' , C'' , C''' , ..., и, таким образом, в этом случае применяется не линейное, а точечное зацепление. При этом нормаль в точке соприкосновения пересекает в соответствующей точке, например P'_0 , прямую $P - P$ соприкосновения начальных цилиндров, и тем самым всегда сохраняется заданное передаточное отношение.

Профили зубьев зубчатого зацепления Новикова вообще могут быть выполнены по различным кривым. Наиболее простыми, как показали исследования, являются профили, очерченные в торцовом сечении по окружностям.

Построение профилей указанного вида производится следующим образом. На прямой $N - N$ (рис. 672), образующей с начальными

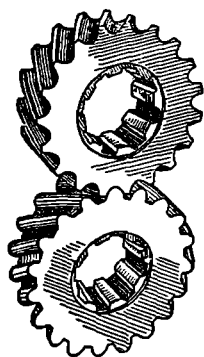


Рис. 673. Зацепление двух зубчатых колес зацепления Новикова.

окружностями угол α , выбирается точка K . Профиль зуба малого колеса 1 очерчивается по дуге окружности радиуса $\rho_1 = P_0K$ и является выпуклым. Профиль зуба большего колеса 2 очерчивается по дуге окружности радиуса ρ_2 , несколько большего радиуса ρ_1 . Дуга окружности радиуса ρ_2 очерчивается из точки M как из центра. Точка M лежит также на прямой $N - N$. Профиль зуба большего колеса 2 является вогнутым. Нетрудно видеть (рис. 672), что при малой разнице радиусов ρ_1 и ρ_2 профили зубьев на некотором участке $K' - K''$ почти совпадают, что понижает удельные давления на зубья, несмотря на точечный их контакт. Толщина зуба одного из колес может быть выбрана произвольной, а толщина другого определяется построением. Толщины зубьев a_1 и a_2

колес 1 и 2 в данном зацеплении выбираются по условию $a_1 = (1,3 - 1,5)a_2$ и $(a_1 + a_2)$ несколько меньше шага t . При проектировании колес Новиков рекомендует придерживаться следующих соотношений: угол $\alpha = 20^\circ - 30^\circ$, угол скручивания $\delta = 5^\circ - 40^\circ$, радиус $\rho_1 = 1,35t$, радиус $\rho_2 = (1,03 - 1,10)\rho_1$. Радиус R_{p2} окружности головок большего колеса следует выбирать равным радиусу R_2 начальной окружности.

К недостаткам зацепления Новикова надо отнести то, что коэффициент перекрытия ϵ зацепления меньше, чем в косозубых колесах с эвольвентным профилем. Коэффициент перекрытия ϵ

$$\epsilon = \frac{b}{t} \operatorname{tg} \delta, \quad (23.97)$$

и он меньше коэффициента перекрытия ϵ' , определяемого по формуле (23.86), на величину коэффициента перекрытия в торцовом сечении. На рис. 673 показана передача с зацеплением Новикова.

ГЛАВА XXIV

СИНТЕЗ ТРЕХЗВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 120. Проектирование конической зубчатой передачи

1°. При проектировании конической зубчатой передачи обычно задают передаточное отношение i_{12} и угол δ между осями колес 1 и 2 (рис. 674).

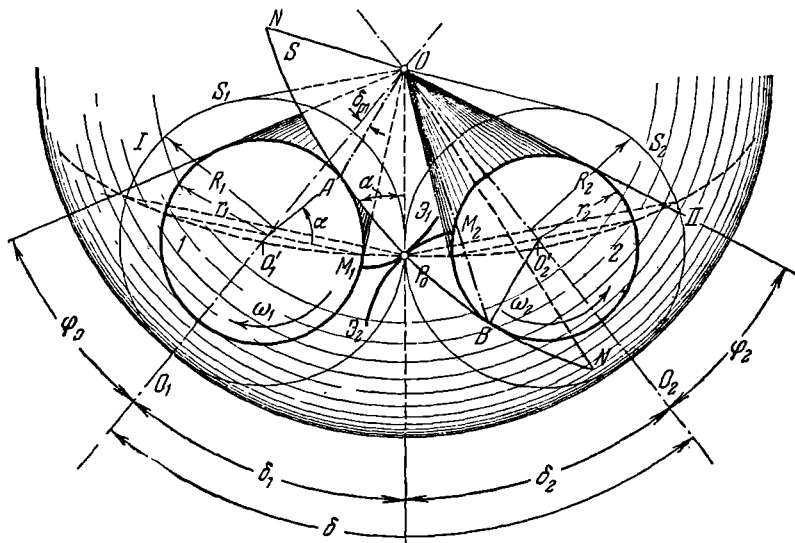


Рис. 674. Построение конического зацепления на сфере.

Тогда углы δ_1 и δ_2 половины раствора начальных конусов (аксOID) могут быть определены, если воспользоваться формулой (10.6)

$$i_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \quad (24.1)$$

и условием

$$\delta = \delta_1 + \delta_2. \quad (24.2)$$

Подставив в формулу (24.1) значение угла δ из равенства (24.2), получим:

$$i_{12} = \frac{\sin (\delta - \delta_1)}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \delta \cos \delta_1 - \cos \delta \sin \delta_1}{\sin \delta_1} = \sin \delta \operatorname{ctg} \delta_1 - \cos \delta. \quad (24.3)$$

Отсюда получаем, что угол δ_1 равен

$$\delta_1 = \operatorname{arccctg} \frac{i_{12} + \cos \delta}{\sin \delta}. \quad (24.4)$$

Угол δ_2 будет тогда равен

$$\delta_2 = \delta - \delta_1 = \delta - \operatorname{arccctg} \frac{i_{12} + \cos \delta}{\sin \delta}. \quad (24.5)$$

Если угол $\delta = 90^\circ$, то формулы (24.4) и (24.5) принимают вид

$$\delta_1 = \operatorname{arccctg} i_{12}, \quad \delta_2 = \delta - \operatorname{arccctg} i_{12}. \quad (24.6)$$

В равенствах (24.1) — (24.6) передаточное отношение i_{12} входит как абсолютная величина без учета знака.

Образование зубьев конических колес можно представить себе следующим образом. Пусть построены конусы S_1 и S_2 (рис. 674), являющиеся аксоидами в относительном движении. По аналогии с цилиндрическим зацеплением будем их называть *начальными конусами*. Пересечем эти конусы какой-либо сферой с центром в точке O . Тогда в пересечении получим две окружности I и II , соприкасающиеся в точке P_0 . Исследование перекатывания без скольжения начальных конусов может быть заменено рассмотрением перекатывания окружностей I и II одной по другой без скольжения. Так как окружности I и II лежат на сфере, то вместо образующей прямой мы получаем образующую дугу $N-N$ большого круга на построенной сфере. Число сфер, которыми мы можем пересечь указанные конусы, бесконечно велико, и для каждой сферы можно получить соответствующие окружности, аналогичные окружностям I и II , и образующие дуги, аналогичные дуге $N-N$. Геометрическим местом всех образующих дуг $N-N$ есть некоторая плоскость S , содержащая прямую OP_0 и наклоненная к плоскости, касательной к начальным конусам, под углом α ; угол α , обычно принимаемый равным 20° , является *углом зацепления*, а плоскость S — *образующей плоскостью*. Если из точек оси OO_1 опустить перпендикуляры на плоскость S , то эти перпендикуляры образуют плоскость, содержащую ось OO_1 . Эта плоскость перпендикулярна к плоскости S . В пересечении этой плоскости с плоскостью S получаем прямую AO . Вращением прямой AO вокруг оси OO_1 получается конус I , который назовем *основным конусом*. Плоскость S касательна к основному конусу. Аналогично может быть построен второй основной конус 2. Профили зубьев могут быть образованы перекатыванием без скольжения плоскости S по основным конусам. В результате этого перекатывания на поверхности сферы получаются сферические эвольвенты.

При качении плоскости S по основному конусу 1 точка плоскости S , совпадающая с точкой P_0 , опишет сферическую эвольвенту $M_1\mathcal{E}_1$, а при качении по основному конусу 2 — сферическую эвольвенту $M_2\mathcal{E}_2$. При качении окружностей I и II эвольвенты $M_1\mathcal{E}_1$ и $M_2\mathcal{E}_2$ перекатываются со скольжением одна по другой. Если такие же сферические эвольвенты построить для других точек плоскости S , расположенных на прямой OP_0 , то эти эвольвенты будут образовывать поверхности зубьев эвольвентного конического зацепления. Таким образом, передача вра-

шения между колесами 1 и 2 осуществляется качением со скольжением сопряженных сферических эвольвентных поверхностей. Данное построение позволяет получить теоретически точное коническое эвольвентное зацепление.

2°. Переходим к рассмотрению основных размеров конических зубчатых колес (рис. 675).

Размеры зубьев конических зубчатых колес в различных сечениях неодинаковы. Стандартный модуль m принято назначать для внешнего

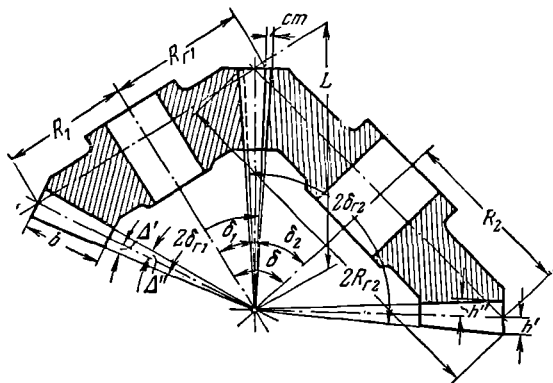


Рис. 675. Конструктивная схема зацепления двух конических колес.

торцового сечения зубьев. Радиусы начальных окружностей колес для внешнего сечения определяются по известным формулам

$$R_1 = \frac{mz_1}{2}, \quad R_2 = \frac{mz_2}{2}. \quad (24.7)$$

Высота h' головки зуба стандартного колеса $h' = m$ и для укороченного зуба $h' = 0,8m$. Высота ножки $h'' = h' + cm$, где $c = (0,2-0,3)$ — коэффициент зазора в направлении, перпендикулярном к общей образующей начальных конусов. Длина L образующей начальных конусов

$$L = \frac{R_1}{\sin \delta_1} = \frac{R_2}{\sin \delta_2}. \quad (24.8)$$

Углы Δ' и Δ'' головки и ножки зубьев определяются по соответствующим тангенсам

$$\operatorname{tg} \Delta' = \frac{h'}{L}, \quad \operatorname{tg} \Delta'' = \frac{h''}{L}. \quad (24.9)$$

Радиусы R_{r1} и R_{r2} конусов головок

$$R_{r1} = R_1 + h' \cos \delta_{r1}, \quad R_{r2} = R_2 + h' \cos \delta_{r2}, \quad (24.10)$$

где углы δ_{r1} и δ_{r2}

$$\delta_{r1} = \delta_1 + \Delta', \quad \delta_{r2} = \delta_2 + \Delta'. \quad (24.11)$$

3°. Проектирование и выполнение точного эвольвентного конического зацепления представляют собой много практических трудностей, так как сфера не разворачивается на плоскость. Поэтому проектирование и изготовление колес этого зацепления не могут быть сведены к аналогичной задаче с плоскими цилиндрическими колесами.

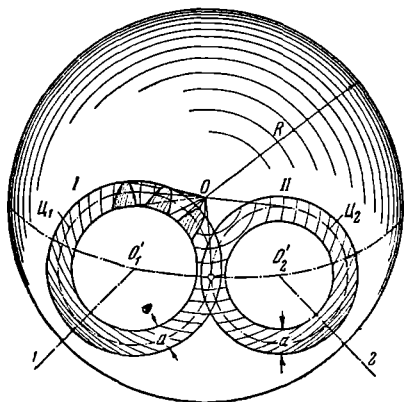


Рис. 676. Расположение профилей зубьев конических колес на сферической поверхности.

Это обстоятельство заставило применять *приближенный метод* профилирования зубьев эвольвентных конических колес. Этот метод заключается в следующем. Рассматривая точное очертание зубьев конических колес (рис. 676), можно увидеть, что торцовые поверхности зубьев, расположенные между окружностями головок и ножек (на рис. 676 эти поверхности заштрихованы), образуют на сфере некоторые сферические пояса шириной a . Ширина a этих поясов весьма мала по сравнению с радиусом R той сферы, на которой эти пояса расположены.

Поэтому можно с достаточной точностью заменить эти сферические пояса поясами, лежащими на конусах, образующие которых касательны к сфере радиуса R в точках, принадлежащих окружностям I и II.

Если теперь представить два начальных конуса в их проекции на плоскость, содержащую оси начальных конусов (рис. 677), то построение конусов, на поверхности которых лежат торцовые поверхности зубьев, может быть сделано следующим образом.

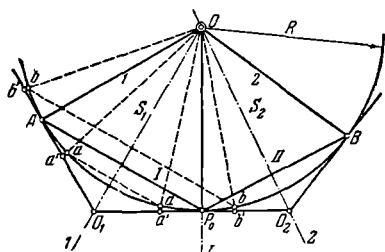


Рис. 677. Проекция начальных конусов на плоскости.

Пусть начальный конус S_1 проектируется в виде треугольника AOP_0 . При точном построении профилей конус головок проектируется в виде треугольника bOb , а конус ножек в виде треугольника aOa . При точном проектировании сечения торцовых поверхностей зубьев плоскость проекций

представляется в виде дуг ab , лежащих на проекции сферы радиуса R . Так как конусы, на которых должны лежать торцовые поверхности приближенных профилей зубьев, должны касаться сферы по начальным окружностям, то для нахождения проекций этих конусов через точку P_0 проводим прямую O_1O_2 , перпендикулярную к прямой OP_0 . В пересечении с осями 1 и 2 получаем точки O_1 и O_2 , представляющие собой

вершины искомых конусов. Проекцией конуса первого колеса есть треугольник O_1AP_0 , а проекцией конуса второго колеса — треугольник O_2BP_0 . Соответствующие сечения профилей торцов изображаются прямыми $a'b'$, лежащими на построенном конусе. Таким образом, вместо кривых ab мы получаем в сечении прямые $a'b'$. Совершенно очевидно, что чем больше отношение радиуса сферы к модулю зубьев, тем меньше та ошибка, которую мы допускаем, заменяя построение профилей зубьев, образованных сферическими эвольвентами, построением зубьев на поверхностях конусов O_1AP_0 и O_2BP_0 .

Конусы с вершинами в точках O_1 и O_2 носят название *дополнительных конусов*. Построение профилей торцовых поверхностей зубьев не встретит теперь никаких трудностей, так как дополнительные конусы могут быть развернуты на плоскость, и следовательно, все построение сведется к построению на плоскости.

4°. Пусть заданы начальные конусы S_1 и S_2 (рис. 678). Проводим плоскости DE и EC , ограничивающие длины зубьев. Далее, строим дополнительные конусы O_1AP_0 и O_2BP_0 и разворачиваем эти конусы из точек O_1 и O_2 проводим окружности I и II радиусами r_1 и r_2 . Полученные дуги P_0KL и P_0NM представляют собой развернутые начальные окружности радиусов R_1 и R_2 . Эти дуги и могут быть приняты за *начальные окружности условных цилиндрических колес с центрами в точках O_1 и O_2* . Далее, профилируем эвольвентные зубья (рис. 679) по нормам, указанным выше (§ 110). Тогда получаем два зубчатых сектора I и II . Затем наворачиваем эти зубчатые секторы на дополнительные конусы. Соединив все точки полученных профилей прямыми с точкой O (рис. 678), будем иметь боковые поверхности зубьев. Таким образом, могут быть построены зубья конических колес, соответствующие заданным начальным конусам.

Радиусы r_1 и r_2 условных начальных окружностей (рис. 678) определяются по формулам

$$r_1 = \frac{R_1}{\cos \delta_1}, \quad r_2 = \frac{R_2}{\cos \delta_2}. \quad (24.12)$$

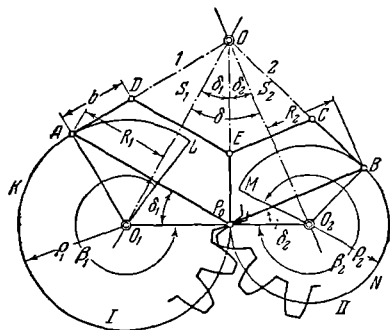


Рис. 678. К профилированию зубьев конических колес на поверхностях дополнительных конусов.

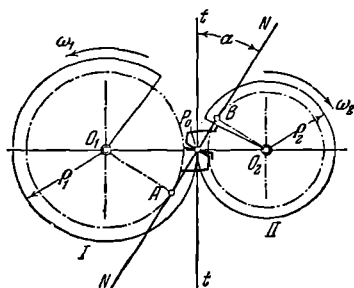


Рис. 679. Цилиндрические колеса, эквивалентные соответствующим им коническим колесам.

Если обозначить углы зубчатых секторов через β_1 и β_2 (рис. 678), то величины этих углов могут быть получены из условий

$$\rho_1 \beta_1 = 2\pi R_1 \quad \text{и} \quad \rho_2 \beta_2 = 2\pi R_2,$$

откуда, учитывая соотношения (24.12),

$$\beta_1 = \frac{2\pi R_1}{\rho_1} = 2\pi \cos \delta_1 \quad \text{и} \quad \beta_2 = \frac{2\pi R_2}{\rho_2} = 2\pi \cos \delta_2. \quad (24.13)$$

Для определения коэффициента перекрытия и рассмотрения вопроса о подрезании зубьев можно применить формулы для круглых цилиндрических зубчатых колес, но для этого необходимо перейти от зубчатых секторов к зубчатым колесам, так как число зубьев z_1 и z_2 секторов I и II не будет равно числу зубьев z'_1 и z'_2 цилиндрических колес радиусов ρ_1 и ρ_2 . Связь между числами зубьев z_1 , z_2 и z'_1 , z'_2 может быть получена из условия, что шаг зацепления t является одним и тем же для условных и действительных колес. Имеем:

$$z_1 t = \rho_1 \beta_1, \quad z_2 t = \rho_2 \beta_2, \quad z'_1 t = 2\pi \rho_1, \quad z'_2 t = 2\pi \rho_2, \quad (24.14)$$

откуда

$$\frac{z'_1}{z_1} = \frac{2\pi}{\beta_1} \quad \text{и} \quad \frac{z'_2}{z_2} = \frac{2\pi}{\beta_2}.$$

Из этих уравнений получаем:

$$z'_1 = \frac{2\pi}{\beta_1} z_1 = \frac{2\pi}{2\pi \cos \delta_1} z_1 = \frac{z_1}{\cos \delta_1}, \quad z'_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} z_2 = \frac{2\pi}{2\pi \cos \delta_2} z_2 = \frac{z_2}{\cos \delta_2}.$$

Таким образом, числа зубьев z'_1 и z'_2 колес, которые называются *эквивалентными цилиндрическими колесами*, всегда больше чисел зубьев соответствующих секторов в отношении $1/\cos \delta_1$ и $1/\cos \delta_2$. Очевидно также, что передаточное отношение эквивалентных цилиндрических колес не равно передаточному отношению проектируемых колес.

Имеем для передаточного отношения i_{12} конических колес

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Для передаточного отношения i'_{12} эквивалентных цилиндрических колес имеем:

$$i'_{12} = \frac{z'_2}{z'_1} = \frac{z_2 \cos \delta_1}{z_1 \cos \delta_2} = i_{12} \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2}. \quad (24.15)$$

Для случая, когда угол $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$, имеем:

$$i'_{12} = i_{12} \frac{\cos (90^\circ - \delta_2)}{\cos \delta_2} = i_{12} \operatorname{tg} \delta_2,$$

или так как согласно формуле (24.1)

$$i_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin (90^\circ - \delta_2)} = \operatorname{tg} \delta_2,$$

то

$$i'_{12} = \operatorname{tg}^2 \delta_2 = i_{12}^2. \quad (24.16)$$

Таким образом, зацепление конических колес эквивалентно зацеплению цилиндрических колес, но с большим числом зубьев. Поэтому при равных условиях конические колеса обладают большим, чем цилиндрические, коэффициентом перекрытия ϵ и меньшим числом зубьев $z_{\min}$, которое может быть выбрано без подрезания на малом колесе стандартного зацепления.

5°. В практике машиностроения широкое распространение получили конические колеса не только с прямыми зубьями, но и с зубьями

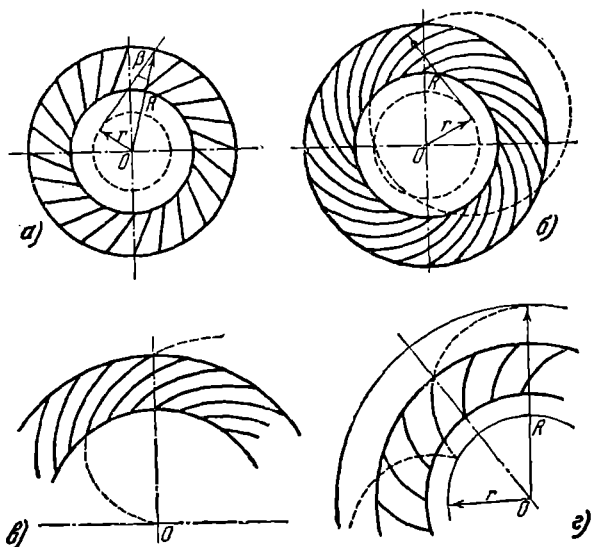


Рис. 680. Различные виды конических колес с фигурными зубьями: а) с косыми зубьями; б) с дугowymi зубьями; в) со спиральными зубьями; г) с эвольвентными зубьями.

других форм. Различные формы зубьев получаются при нарезании их по методу обкатки путем придания режущему инструменту различных движений. Так, если режущий инструмент (резец) имеет прямолинейное движение, но под некоторым углом β к радиусу R , то можно нарезать колесо с косыми зубьями (рис. 680, а). При вращательном движении резцовой головки вокруг оси, не проходящей через вершину конуса, можно нарезать колесо с дугowymi зубьями (рис. 680, б), могут быть также нарезаны колеса с зубьями, образованными движением резца по архимедовой спирали (рис. 680, в), по эвольвенте (рис. 680, г) и т. д.

Нарезание зубьев конических колес ведется также методом обкатки инструментом с прямолинейной режущей кромкой (гранью), связанной с некоторой плоскостью, называемой плоскостью производящего колеса. Эта плоскость перекачивается в процессе обработки по дели-

тельному конусу заготовки, что дает иногда повод проводить аналогию с процессом нарезания зубьев цилиндрических колес прямолинейной зуборезной рейкой, которая воспроизводит эвольвентное зацепление. В действительности, так как режущая грань поставлена под некоторым углом к плоскости производящего колеса, то она нарезает более сложную поверхность.

Для колес с прямыми зубьями получают так называемое *октоидальное зацепление*, у которого линия зацепления имеет форму восьмерки.

6°. Рассмотрим действие сил в конической зубчатой передаче. Силы P_{12} и P_{21} давления зубьев колес 1 и 2 друг на друга будем считать условно приложенными в середине контактной линии, в точке K

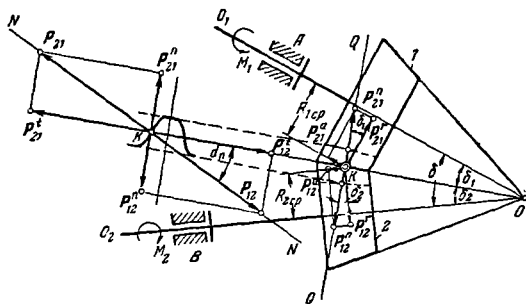


Рис. 681. Силы, действующие в конической передаче.

(рис. 681), отстоящей от осей OO_1 и OO_3 на средних радиусах R_{1cp} и R_{2cp} . Силы P_{12} и P_{21} лежат в плоскости $Q-Q$, перпендикулярной к общей образующей начальных конусов 1 и 2 (рис. 681). Повернем плоскость $Q-Q$ на 90° до совпадения с плоскостью чертежа (рис. 681). Тогда силы P_{12} и P_{21} будут проектироваться в натуральную величину. Направлены эти силы по нормали $N-N$ под углом зацепления α . Раскладываем эти силы на составляющие $P_{12}^t = -P_{21}^t$ и $P_{12}^n = -P_{21}^n$. Силы P_{12}^t и P_{21}^t связаны с моментами M_1 и M_2 , приложенными на валах OO_1 и OO_3 , условиями

$$P_{12}^t = \frac{M_1}{R_{1cp}}, \quad P_{21}^t = \frac{M_2}{R_{2cp}}. \quad (24.17)$$

Из равенств (24.17) следует

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{R_{1cp}}{R_{2cp}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = i_{21}. \quad (24.18)$$

Силы P_{12}^n и P_{21}^n пересекаются с осями OO_1 и OO_3 и могут быть разложены (рис. 681) на радиальные составляющие P_{12}^r и P_{21}^r и осевые составляющие P_{12}^a и P_{21}^a . Силы P_{12}^r и P_{21}^r будут нагружать радиальные подшипники A и B , а силы P_{12}^a и P_{21}^a будут действовать на

колеса 1 и 2, стремясь переместить их вдоль осей OO_1 и OO_2 , и должны восприниматься упорными подшипниками.

Силы P_{12}^n и P_{21}^n равны

$$\left. \begin{aligned} P_{12}^n &= P_{12}^t \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_1}{R_{1\text{ср}}} \operatorname{tg} \alpha, \\ P_{21}^n &= P_{21}^t \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_2}{R_{2\text{ср}}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_1}{i_{21} R_{2\text{ср}}} \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (24.19)$$

так как согласно соотношению (24.18) $M_2 = M_1/i_{21}$.

Радиальные силы P'_{12} и P'_{21} (рис. 681)

$$\left. \begin{aligned} P'_{12} &= P_{12}^n \cos \delta_2 = P_{12}^t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_2 = \frac{M_1}{R_{1\text{ср}}} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_2, \\ P'_{21} &= P_{21}^n \cos \delta_1 = P_{21}^t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1 = \frac{M_2}{R_{2\text{ср}}} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1 = \frac{M_1}{i_{21} R_{2\text{ср}}} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (24.20)$$

Осевые силы P_{12}^a и P_{21}^a :

$$\left. \begin{aligned} P_{12}^a &= P_{12}^n \sin \delta_2 = P_{12}^t \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_2 = \frac{M_1}{R_{1\text{ср}}} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_2, \\ P_{21}^a &= P_{21}^n \sin \delta_1 = P_{21}^t \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1 = \frac{M_2}{R_{2\text{ср}}} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1 = \frac{M_1}{i_{21} R_{2\text{ср}}} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (24.21)$$

Пример. Определить основные параметры конической зубчатой передачи, если торцовый модуль $m = 5$ мм, угол между осями колес $\delta = 90^\circ$, числа зубьев колес $z_1 = 20$ и $z_2 = 40$, угол зацепления $\alpha = 20^\circ$, длина зуба $b = L/3$, где L — длина образующей начальных конусов (см. рис. 675).

Передаточное отношение

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{40}{20} = 2.$$

Так как угол $\delta = 90^\circ$, то углы δ_1 и δ_2 определяются по формуле (24.6):

$$\delta_1 = \operatorname{arcctg} i_{12} = \operatorname{arcctg} 2 \approx 26^\circ 30',$$

$$\delta_2 = \delta - \operatorname{arcctg} i_{12} = 90^\circ - \operatorname{arcctg} 2 \approx 63^\circ 30'.$$

Радиусы R_1 и R_2 начальных окружностей согласно формулам (24.7) равны

$$R_1 = \frac{mz_1}{2} = 50 \text{ мм} \text{ и } R_2 = \frac{mz_2}{2} = 100 \text{ мм}.$$

Длина L общей образующей конусов согласно формуле (24.8) равна

$$L = \frac{R_1}{\sin \delta_1} = \frac{50}{\sin 26^\circ 30'} = \frac{50}{0,446} = 112,1 \text{ мм}.$$

Угол Δ' головки и угол Δ'' ножки зубьев определяются из условий (24.9):

$$\operatorname{tg} \Delta' = \frac{h'}{L} = \frac{m}{L} = \frac{5}{112,1} = 0,0558,$$

$$\operatorname{tg} \Delta'' = \frac{h''}{L} = \frac{h' + ct}{L} = \frac{m + 0,25m}{L} = \frac{5 + 0,25 \cdot 5}{112,1} = 0,0549.$$

Следовательно, углы Δ' и Δ'' равны $\Delta' = 2^\circ 34'$ и $\Delta'' = 3^\circ 11'$.

Углы δ_{r1} и δ_{r2} конусов головок определяются из формул (24.11):

$$\delta_{r1} = \delta_1 + \Delta' = 26^\circ 30' + 2^\circ 34' = 29^\circ 04',$$

$$\delta_{r2} = \delta_2 + \Delta' = 63^\circ 30' + 2^\circ 34' = 66^\circ 04'.$$

Радиусы R_{r1} и R_{r2} конусов головок вычисляются по формулам (24.10):

$$R_{r1} = R_1 + h' \cos \delta_{r1} = 50 + 5 \cos 29^\circ 04' = 54,37 \text{ мм},$$

$$R_{r2} = R_2 + h' \cos \delta_{r2} = 100 + 5 \cos 66^\circ 04' = 102,03 \text{ мм}.$$

Радиусы ρ_1 и ρ_2 начальных окружностей условных цилиндрических колес определяем по формулам (24.12) (см. также рис. 679)

$$\rho_1 = \frac{R_1}{\cos \delta_1} = \frac{50}{0,895} = 55,8 \text{ мм} \text{ и } \rho_2 = \frac{R_2}{\cos \delta_2} = \frac{100}{0,446} = 224,2 \text{ мм}.$$

Расстояние A между осями условных цилиндрических колес равно

$$A = \rho_1 + \rho_2 = 55,8 + 224,2 = 280,0 \text{ мм}.$$

Радиусы r_1^0 и r_2^0 основных окружностей условных цилиндрических колес

$$r_1^0 = \rho_1 \cos \alpha = 55,8 \cdot 0,94 = 52,6 \text{ мм}, \quad r_2^0 = \rho_2 \cos \alpha = 224,2 \cdot 0,94 = 210,7 \text{ мм}.$$

Радиусы R_{r1}^0 и R_{r2}^0 окружностей головок условных цилиндрических колес

$$R_{r1}^0 = \rho_1 + h' = \rho_1 + m = 55,8 + 5 = 60,8 \text{ мм},$$

$$R_{r2}^0 = \rho_2 + h' = \rho_2 + m = 224,2 + 5 = 229,2 \text{ мм}.$$

Коэффициент перекрытия ϵ рассматриваемых колес определяется по формулам (23.36)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sqrt{(R_{r1}^0)^2 - (r_1^0)^2} + \sqrt{(R_{r2}^0)^2 - (r_2^0)^2} - A \sin \alpha}{\pi m \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{(60,8)^2 - (52,6)^2} + \sqrt{(229,2)^2 - (210,7)^2} - 280 \cdot 0,342}{3,14 \cdot 5 \cdot 0,94} \approx 1,77. \end{aligned}$$

§ 121. Проектирование винтовой и червячной передач

1°. В § 41,4° была рассмотрена кинематика механизма передачи движения с постоянным передаточным отношением между двумя перекрещивающимися в пространстве осями. Аксоидами в относительном движении звеньев такой передачи являются гиперболоиды 1 и 2

(рис. 682). Для получения гиперболоидных зубчатых колес поверхности гиперboloидов снабжаются зубьями. Нет необходимости эти зубья располагать по всей поверхности гиперboloидов. Достаточно снабдить зубьями только некоторые участки гиперboloидов, получаемые при пересечении гиперboloидов плоскостями, перпендикулярными к их осям. Например, если на гиперboloиде 1 (рис. 682) выбрать в качестве колеса часть 1' гиперboloида, то на гиперboloиде 2 получаем сопряженное колесо в виде части 2'. Чем дальше от горлового сечения выбраны части гиперboloидов, снабженные зубьями, тем меньше будет отношение скорости скольжения вдоль осей к окружной скорости колеса. Следовательно, с точки зрения износа и коэффициента полезного действия передачи предпочтительнее выбирать в качестве колес части гиперboloидов, более удаленные от горлового сечения. При замене участков гиперboloидов, удаленных от горлового сечения коническими поверхностями, получаем *гипоидные* колеса (см. § 5,5°, рис. 62).

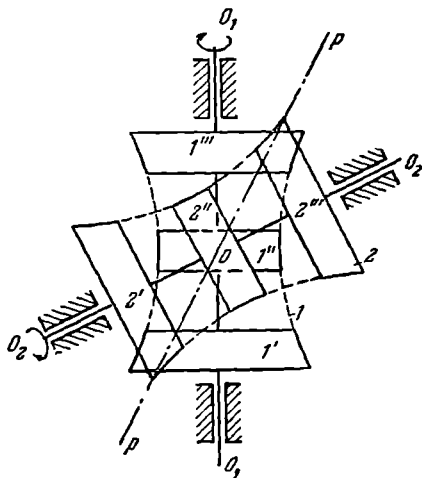


Рис. 682. Схема гиперболической передачи между двумя пересекающимися осями.

2°. Вместо гиперболических зубчатых механизмов, нарезание зубьев которых представляет большие трудности, для передачи движения между непересекающимися осями применяются винтовые зубчатые механизмы, представляющие собой участки 1'' и 2'' гиперboloидов 1 и 2 (рис. 682), приближенно замененные двумя круглыми цилиндрическими поверхностями. Пример винтового зубчатого механизма показан на рис. 59 (см. § 5,5°). Выведем основные соотношения между параметрами этих колес. Рассмотрим передачу между двумя цилиндрами 1 и 2 (рис. 683), вращающимися вокруг осей I и II с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Пусть цилиндры касаются друг друга в точке P_0 . Если радиусы цилиндров суть R_1 и R_2 , то кратчайшее расстояние A между осями I и II равно $A = O_1O_2 = R_1 + R_2$.

Через точку P_0 проведем плоскость T , перпендикулярную к кратчайшему расстоянию O_1O_2 . Эта плоскость будет касаться цилиндра 1 по образующей $a_1 - a_1$, а цилиндра 2 — по образующей $a_2 - a_2$ и будет являться общей касательной плоскостью к этим двум цилиндрам. Проведем в плоскости T через точку P_0 прямую $t - t$. Эта прямая составит с образующими $a_1 - a_1$ и $a_2 - a_2$ углы δ'_1 и δ'_2 , причем

$$\delta'_1 + \delta'_2 = \delta, \quad (24.22)$$

где δ есть угол между образующими $a_1 — a_1$ и $a_2 — a_2$, равный углу скрещивания между осями I и II цилиндров.

Навернем плоскость T последовательно на цилиндры 1 и 2. Тогда прямая $t — t$ на поверхности цилиндра 1 расположится по винтовой линии $s_1 — s_1$ с углом скручивания δ'_1 , а на поверхности цилиндра 2 —

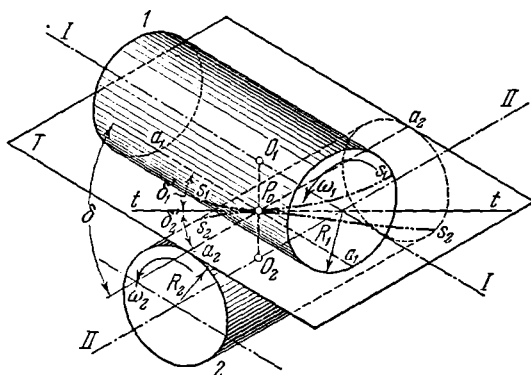


Рис. 683. Образование зубьев винтовых колес.

по винтовой линии $s_2 — s_2$ с углом скручивания δ'_2 . Обе эти линии будут соприкасаться в точке P_0 , и прямая $t — t$ будет их общей касательной.

Как правило, точка касания начальных цилиндров не будет принадлежать мгновенной оси вращения — скольжения, и углы δ'_1 и δ'_2 окажутся отличными от углов δ_1 и δ_2 , образуемых осями колес с мгновенной осью вращения — скольжения.

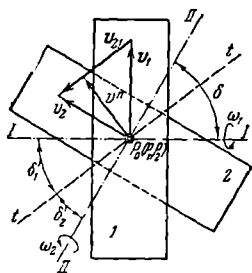


Рис. 684. План скоростей для колес винтовой передачи.

Если считать цилиндры 1 и 2 начальными, то винтовые линии $s_1 — s_1$ и $s_2 — s_2$ могут быть приняты за боковые линии зубьев. *Боковой поверхностью зубьев винтовых колес является линейчатая поверхность развортывающегося геликоида.*

Нетрудно установить некоторые основные соотношения между различными параметрами винтовых колес.

Спроектируем начальные цилиндры винтовых колес на плоскость T (рис. 683). Оси I и II и углы δ'_1 и δ'_2 при этом будут проектироваться без искажения (рис. 684). Скорость точки P_1 колеса 1 изобразится вектором v_1 , перпендикулярным к оси I. Скорость точки P_2 колеса 2 представится вектором v_2 , перпендикулярным к оси II. Относительная скорость v_{21} точки P_2 цилиндра 2 относительно точки P_1 цилиндра 1 будет направлена параллельно общей касательной $t — t$ к винтовым линиям со-

пряженных зубцов. План скоростей передачи представляет собой треугольник, образуемый векторами v_1 , v_2 и v_{21} , лежащими в плоскости T . Опустим из точки P_0 перпендикуляр v^n на направление вектора v_{21} . Будем иметь:

$$v^n = v_1 \cos \delta'_1, \quad v^n = v_2 \cos \delta'_2,$$

где δ'_1 и δ'_2 суть углы закручивания винтовых линий на цилиндрах 1 и 2. Из этих равенств следует:

$$v_1 \cos \delta'_1 = v_2 \cos \delta'_2.$$

Модули скоростей v_1 и v_2 :

$$v_1 = \omega_1 R_1, \quad v_2 = \omega_2 R_2,$$

где R_1 и R_2 суть радиусы начальных цилиндров. Тогда

$$\omega_1 R_1 \cos \delta'_1 = \omega_2 R_2 \cos \delta'_2,$$

откуда

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2 \cos \delta'_2}{R_1 \cos \delta'_1}, \quad (24.23)$$

где z_1 и z_2 суть числа зубьев соответственно колес 1 и 2.

В частном случае, когда $\delta = 90^\circ$, имеем:

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2}{R_1} \operatorname{tg} \delta'_1. \quad (24.23')$$

Из формулы (24.23), следует, что, в отличие от цилиндрических и конических колес, при передаче вращения винтовыми колесами мы имеем возможность воспроизводить необходимое передаточное отношение подбором не двух, а четырех величин (R_1 , R_2 , δ'_1 и δ'_2).

К недостаткам зубчатых винтовых механизмов надо отнести то, что в них сопряженные профили соприкасаются в точке. Следовательно, удельные давления оказываются значительными. Кроме того, значительное скольжение зубьев друг по другу вызывает быстрый их износ.

При проектировании винтовой зубчатой передачи обычно задают передаточное отношение i_{12} , угол δ перекрещивания осей колес и кратчайшее расстояние A между осями. Из равенства (24.23) следует, что заданное передаточное отношение может получиться при различных сочетаниях отношений R_2/R_1 и $\cos \delta'_2/\cos \delta'_1$. Поэтому задача проектирования винтовой зубчатой передачи не приводит к однозначному решению. При проектировании конструктор должен задаться дополнительной зависимостью, связывающей либо углы δ'_1 и δ'_2 закручивания винтовых линий, либо отношение радиусов.

Если при проектировании добиваться, чтобы скорость скольжения в точке касания начальных цилиндров была минимальной, надо обеспечить условие, согласно которому эта точка оказалась бы точкой

пересечения оси мгновенного вращения скольжения с линией кратчайшего расстояния между осями колес. В таком случае будем иметь:

$$\delta'_1 = \delta_1; \quad \delta'_2 = \delta_1,$$

и сами углы δ_1 и δ_2 должны удовлетворять отношению (10.10)

$$i_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (24.24)$$

Так как согласно равенству (24.22) $\delta = \delta_1 + \delta_2$, то формула (24.24) принимает вид

$$i_{12} = \frac{\sin(\delta - \delta_1)}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \delta \cos \delta_1 - \cos \delta \sin \delta_1}{\sin \delta_1} = \frac{\sin \delta - \cos \delta \operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_1}. \quad (24.25)$$

Исключая из равенства (24.25) угол закручивания δ_1 колеса 1, получаем:

$$\delta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sin \delta}{i_{12} + \cos \delta}. \quad (24.26)$$

Далее, из формулы (24.24) имеем:

$$i_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin(\delta - \delta_2)} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta \cos \delta_2 - \cos \delta \sin \delta_2} = \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\sin \delta - \cos \delta \operatorname{tg} \delta_2}. \quad (24.27)$$

Исключая из равенства (24.27) угол закручивания δ_2 , получаем:

$$\delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{i_{12} \sin \delta}{1 + i_{12} \cos \delta}. \quad (24.28)$$

Для определения радиусов R_1 и R_2 начальных цилиндров 1 и 2 (рис. 683) воспользуемся равенством (24.23) и условием

$$A = R_1 + R_2.$$

Тогда имеем:

$$R_1 = \frac{A \cos \delta_2}{i_{12} \cos \delta_1 + \cos \delta_2}, \quad (24.29)$$

$$R_2 = \frac{A i_{12}}{i_{12} \cos \delta_1 + \cos \delta_2}. \quad (24.30)$$

В равенствах (24.23) — (24.30) передаточное отношение i_{12} входит как абсолютная величина без учета знака.

Остальные параметры винтовых колес определяются по нормам, принятым для цилиндрических колес с косыми зубьями.

3°. Большое распространение в машинах имеет один частный вид зубчатых винтовых механизмов, когда угол δ между осями колес равен 90° , а углы закручивания δ'_1 и δ'_2 значительно отличаются друг от друга. Пусть на колесе 1 угол δ'_1 выбран большим, а на колесе 2 угол δ'_2 выбран малым (рис. 685). Тогда винтовые линии $a_2 - a_3$ зубьев колеса 2 располагаются своей сравнительно небольшой частью на поверхности цилиндра 2. Наоборот, винтовые линии $a_1 - a_1$ зу-

бьев колеса I могут несколько раз обогнуть поверхность цилиндра I . Как это было указано в § 43,4°, винтовое колесо, у которого зуб имеет по высоте цилиндра несколько оборотов, называется *червяком*, а сопряженное с ним винтовое колесо носит название *червячного колеса*. Все зацепление называется *червячным зацеплением*. Червячное зацепление является частным видом винтового и, следовательно, обладает теми же недостатками, какими обладает винтовое зацепление.

Недостатки червячного зацепления могут быть в значительной степени устранены, если нарезать зубья червячного колеса червячной фрезой, представляющей собой точную копию червяка. При нарезании червячного колеса между червячной фрезой и нарезаемым колесом должно быть осуществлено то относительное движение, которое имеют червяк и колесо при правильном зацеплении. В этом случае соприкасание червяка с колесом будет происходить по некоторой линии. Для увеличения соприкасания ободу червячного колеса придается форма, при которой колесо охватывает червяк (рис. 338).

Точки соприкосновения сопряженных профилей червячного зацепления образуют весьма сложную линию зацепления, которая может быть всегда построена, если рассечь червячную передачу плоскостями, параллельными плоскости главного сечения, и рассмотреть полученные таким образом реечные зацепления.

С целью улучшения червячного зацепления в некоторых случаях нарезание червяка производится не на цилиндре, а на поверхности вращения, образованной дугой круга Π_2 (рис. 686) с центром в точке O_2 на оси червячного колеса. Эта поверхность получила название *глобоида (тороида)*, а зацепление называется *глобоидным или тороидным зацеплением*.

Форма винтовой поверхности зуба червяка зависит от установки инструмента, нарезающего профиль зуба. Так, если направление режущей грани (рис. 687) инструмента резца, установленного на винторезном

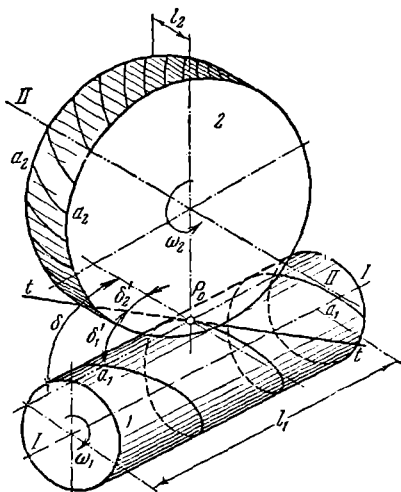


Рис. 685. Винтовые линии на цилиндрах червяка и червячного колеса.

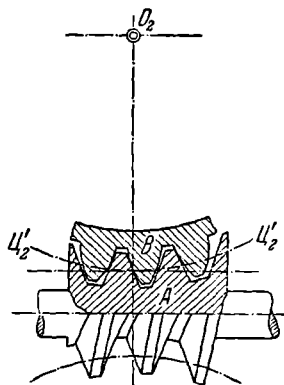


Рис. 686. Глобоидная червячная передача.

станке, проходит через ось червяка, то получается линейчатая винтовая поверхность, образующие ba которой пересекают ее ось. Сечение этой поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси, дает архи-

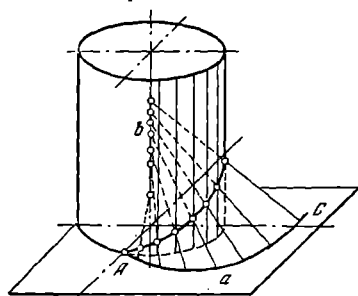


Рис. 687. Архимедова винтовая поверхность.

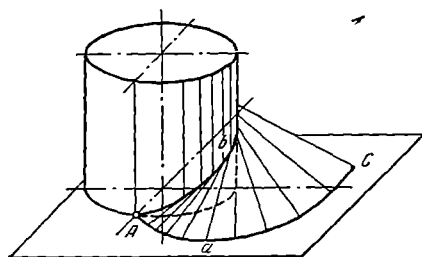


Рис. 638. Эвольвентная винтовая поверхность.

медову спираль AC . Соответственно червяк носит название *архимедова червяка*.

Если плоскость режущей грани в относительном движении касается винтовой линии, принадлежащей червяку, то сечение плоскостью, перпендикулярной к оси, дает эвольвенту AC круга (рис. 688). Соответственно червяк называется *эвольвентным*.

4°. Переходим к рассмотрению вопроса об определении основных параметров червячной передачи (рис. 689). Согласно формуле (24.23') передаточное отношение $i_{чк}$ от червяка к колесу так же, как и для ортогональной винтовой передачи, равно

$$i_{чк} = \frac{\omega_ч}{\omega_к} = \frac{R_к}{R_ч} \operatorname{tg} \delta'_1 = \frac{z_к}{z_ч}, \quad (24.31)$$

где $\omega_ч$ и $\omega_к$ — угловые скорости червяка и колеса, $R_ч$ и $R_к$ — радиусы их начальных цилиндров, $z_к$ — число зубьев колеса, $z_ч$ — число ниток или

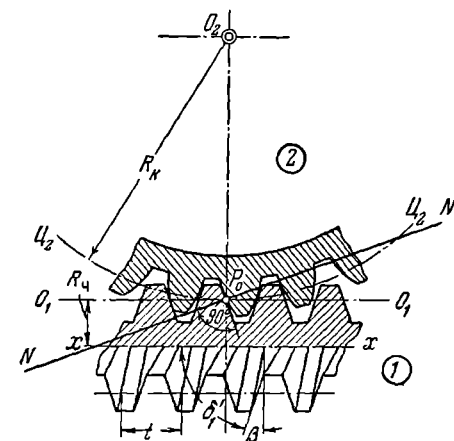


Рис. 689. К определению основных параметров червяка и червячного колеса.

ходов червяка и δ'_1 — угол закручивания винтовой линии червяка на начальном цилиндре.

Угол закручивания δ'_1 удобнее заменять углом β подъема нитки червяка, равным $90^\circ - \delta'_1$. Тогда получаем:

$$i_{чк} = \frac{R_к}{R_ч} \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (24.32)$$

Тангенс угла β может быть выражен через шаг зацепления. В самом деле, если развернуть начальный цилиндр червяка на плоскость, то мы получим вместо винтовой линии прямую линию AB , наклоненную к оси абсцисс под углом β подъема нитки (см., например, рис. 102). Высота подъема h нитки будет зависеть от числа ниток червяка. В общем случае высота подъема

$$h = z_q t,$$

тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{2\pi R_q} = \frac{z_q t}{2\pi R_q}. \quad (24.33)$$

Из формулы (24.33) получаем радиус R_q червяка

$$R_q = \frac{z_q t}{2\pi \operatorname{tg} \beta},$$

или так как $t/\pi = m$, то

$$R_q = \frac{m z_q}{2 \operatorname{tg} \beta} = \frac{q m}{2},$$

где $q = \frac{2R_q}{m}$ — число модулей в начальном цилиндре червяка. Радиус R_k колеса

$$R_k = \frac{m z_k}{2}.$$

Следует иметь в виду, что в ортогональной червячной передаче осевой модуль червяка равен торцовому модулю колеса.

Обычно из условий расчета на прочность величина q выбирается равной $q = (8 \div 13)$. Остальные размеры червячного колеса и червяка определяются по нормам для цилиндрических зубчатых колес.

5°. Рассмотрим действие сил в червячной передаче. К валу червяка I приложен движущий момент M_1 , а на валу червячного колеса действует момент M_2 сил сопротивления. Со стороны червячного колеса на грань витков резьбы червяка под углом α_z действует нормальная сила P_{21}^n , вектор которой располагается в плоскости, нормальной к винтовой поверхности резьбы. Эта плоскость наклонена к плоскости, в которой находится ось вращения червяка, под углом β , равным углу подъема винтовой линии (рис. 690).

На рис. 690 представлены сечения резьбы червяка и зубьев червячного колеса плоскостью, перпендикулярной к оси червячного колеса. В плоскости указанных сечений лежит ось вращения червяка.

Разложим силу P_{21}^n по трем взаимно перпендикулярным направлениям и напишем следующее равенство:

$$P_{21}^n = P_{21}^t + P_{21}^r + P_{21}^a, \quad (24.34)$$

где P_{21}^t — окружное усилие червячного колеса, равное P_{12}^a — осевому усилию червяка, векторы которых расположены в плоскости, перпендикулярной оси червячного колеса; P_{21}^r — радиальное усилие, направ-

ленное к оси червяка по его радиусу; P_{21}^a — осевое усилие червячного колеса, равное P_{12}^t — окружному усилию червяка.

Так как при расчете червячной передачи бывает задан момент M_2 сопротивления, приложенный к ведомому червячному колесу 2, то сначала определим окружное усилие P_{21}^t червячного колеса

$$P_{21}^t = \frac{M_2}{R_2}, \quad (24.35)$$

где R_2 — радиус начальной окружности червячного колеса.

После этого можно определить радиальное усилие P_{21}^r червячного колеса

$$P_{21}^r = P_{21}^t \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_2}{R_2} \operatorname{tg} \alpha, \quad (24.36)$$

где α — угол наклона боковой грани осевого сечения резьбы червяка, равный углу зацепления реечного инструмента. Для стандартных зацеплений этот угол принимается равным 20° .

Третья слагающая P_{21}^n нормальной силы P_{21}^n согласно рис. 690 равна

$$P_{21}^n = P_{21}^t \operatorname{tg} \beta = \frac{M_2}{R_2} \operatorname{tg} \beta. \quad (24.37)$$

Наконец, нормальную силу P_{21}^n можно выразить через P_{21}^t так:

$$\begin{aligned} P_{21}^n &= \frac{P_{21}^t}{\cos \alpha_n} = \frac{P_{21}^t}{\cos \alpha_n \cos \beta} = \\ &= \frac{M_2}{R_2 \cos \alpha_n \cos \beta}. \end{aligned} \quad (24.38)$$

Рис. 690. К силовому анализу червячной передачи.

В этом равенстве нам неизвестен угол α_n наклона вектора P_{21}^n в нормальной плоскости к винтовой поверхности резьбы червяка. Этот угол можно определить следующим образом:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{P_{21}^r}{P_{21}^t},$$

но так как $P_{21}^r = P_{21}^t / \cos \beta$, то

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{P_{21}^r}{P_{21}^t} \cos \beta = \operatorname{tg} \alpha \cos \beta. \quad (24.39)$$

Проведенное нами исследование справедливо для идеального механизма, в котором отсутствует трение. В червячном механизме трение имеет место при относительном движении вдоль винтовой линии червяка и вдоль профиля зуба колеса. Трение вдоль профиля зуба

колеса незначительно по сравнению с трением вдоль винтовой линии, вследствие чего мы будем учитывать только трение этого последнего вида.

Из рис. 690 видно, что осевое усилие P_{21}^a червяка равно

$$P_{21}^a = P_{21}^t \operatorname{tg}(\beta + \varphi') = \frac{M_2}{R_2} \operatorname{tg}(\beta + \varphi'), \quad (24.40)$$

где φ' — угол трения в клинчатых направляющих (§ 61,5°), каковыми являются впадины зубьев червячного колеса. Если коэффициент трения в зацеплении равен f , то угол φ' трения можно определить по следующей формуле:

$$\varphi' = \operatorname{arctg} \frac{f}{\cos \alpha_n}. \quad (24.41)$$

Для силы P_{21} давления зуба червячного колеса на резьбу червяка можно воспользоваться формулой, аналогичной формуле (24.38):

$$P_{21} = \frac{P_{21}^t}{\cos \alpha_1 \cos(\beta + \varphi')} = \frac{M_2}{R_2 \cos \alpha_1 \cos(\beta + \varphi')}. \quad (24.42)$$

Угол α_1 определяется по формуле, аналогичной формуле (24.39):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha \cos(\beta + \varphi'). \quad (24.43)$$

P_{21}^a есть окружное усилие червяка, и потому его величиной можно воспользоваться для определения движущего момента, приложенного к червяку

$$M_1 = P_{21}^a R_1 = M_2 \frac{R_1}{R_2} \operatorname{tg}(\beta + \varphi'), \quad (24.44)$$

где R_1 — радиус начальной окружности червяка.

Если ведущим является червячное колесо 2, то со стороны червяка возникает осевое усилие P_{12}^a , которое представляет собой сопротивление, приложенное к валу червяка (рис. 690).

Если задан момент M_1 силы сопротивления на валу червяка, то усилие P_{12}^t на начальной окружности червяка

$$P_{12}^t = \frac{M_1}{R_1}.$$

Из рис. 690 определяем силу P_{12}^a . Имеем:

$$P_{12}^a = \frac{P_{12}^t}{\operatorname{tg}(\beta - \varphi')} = \frac{M_1}{R_1 \operatorname{tg}(\beta - \varphi')}. \quad (24.45)$$

Движущий момент M_2 на валу червячного колеса

$$M_2 = P_{12}^a R_2 = \frac{M_1 R_2}{R_1 \operatorname{tg}(\beta - \varphi')}. \quad (24.46)$$

Радиальная сила P_{12}^r равна силе P_{21}^r , но действует в противоположном направлении.

Наконец, силу P_{12} можно определить так:

$$P_{12} = \frac{P_{12}^a}{\cos \alpha_2 \cos (\beta - \varphi)}, \quad (24.47)$$

где α_2 определяется аналогично углу α_1 по тангенсу

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha \cos (\beta - \varphi). \quad (24.48)$$

ГЛАВА XXV

СИНТЕЗ МНОГОЗВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 122. Проектирование зубчатых передач с неподвижными осями

1°. Многозвенные зубчатые механизмы могут быть весьма разнообразны по своей кинематической схеме и структуре.

Как это было показано в § 44, многозвенный зубчатый механизм можно рассматривать состоящим из нескольких простейших зубчатых механизмов, и общее передаточное отношение i_{1n} для механизма, состоящего из n звеньев, согласно формулам (10.35) и (10.36) равно

$$i_{1n} = (-1)^m i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} \cdot \dots \cdot i_{(n-1)'n} \quad (25.1)$$

или

$$i_{1n} = (-1)^m \frac{r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot \dots \cdot r_n}{r_1 \cdot r_{2'} \cdot r_{3'} \cdot \dots \cdot r_{(n-1)'}} = (-1)^m \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot z_{3'} \cdot \dots \cdot z_{(n-1)'}} \quad (25.2)$$

где m — число внешних зацеплений в зубчатом механизме.

Проектирование кинематической схемы многозвенного зубчатого механизма заключается в подборе по заданному общему передаточному отношению основных размеров колес и чисел их зубьев. При этом необходимо учитывать и некоторые дополнительные условия, связанные с конструктивными требованиями. Рассмотрим эти условия на примере двухступенчатых зубчатых механизмов редукторов, показанных на рис. 691. На рис. 691, а показан механизм, у которого на расположение осей колес не наложено никаких условий. На рис. 691, б и в оси колес 1 и 3 являются соосными, и следовательно, должно удовлетворяться условие соосности, которое может быть выражено через очевидные соотношения. Для механизма (рис. 691, б)

$$R_1 + R_2 = R_{2'} + R_3, \quad (25.3)$$

и для механизма (рис. 691, в)

$$R_1 + R_2 = R_3 - R_{2'}, \quad (25.4)$$

где R_1 , R_2 , $R_{2'}$ и R_3 — радиусы колес 1, 2, 2' и 3. Равенства (25.3) и (25.4) называются *условиями соосности*.

Передаточное отношение i для каждой ступени цилиндрических колес рекомендуется принимать $i \leq 8 \div 10$, а для конических колес $i \leq 5$. Если во всех механизмах, показанных на рис. 691, считать ведущими колеса номер 1 и условиться, что $R_1 < R_2$ и $R_2' < R_3$, то ступень I, состоящая из колес 1 и 2, будет быстроходной, а ступень, состоящая из колес 2' и 3, тихоходной. Из расчета зубьев на прочность выявляется, что модули зацепления ступеней получаются различными. Обозначим их соответственно m_1 и m_{11} . Обычно m_{11} оказывается больше m_1 . Далее, для редукторов рекомендуется радиусы R_2 и R_3 ведомых колес каждой передачи выбирать так, чтобы $R_3 \geq 1,1 R_2$. Число зубьев z_1 и z_2' малых колес 1 и 2', если они нарезаются без смещения режущего инструмента, рекомендуется выбирать так, чтобы

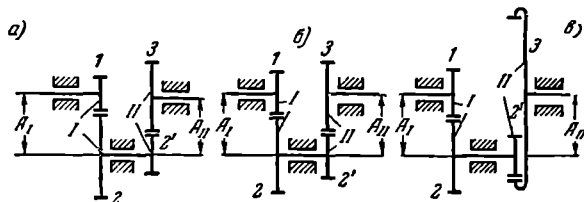


Рис. 691. Схема двухступенчатых зубчатых редукторов: а) несоосный с двумя внешними зацеплениями; б) соосный с двумя внешними зацеплениями; в) соосный с одним внешним и одним внутренним зацеплениями.

отсутствовало подрезание. Желательно также, чтобы межосевые расстояния A , A_1 и A_{11} (рис. 691) выражались целыми числами. Для быстроходных редукторов рекомендуется числа зубьев колес принимать большими.

2°. Рассмотрим вопрос о проектировании схемы редуктора, которая изображена на рис. 691, а. Для такого редуктора можно зафиксировать следующие условия:

$$i_{13} = i_{12} i_{2'3}, \quad R_3 \geq 1,1 R_2. \quad (25.5)$$

При проектировании приходится определять четыре неизвестных радиуса колес R_1 , R_2 , R_2' и R_3 . Для решения мы имеем два соотношения (25.5), из которых второе соотношение представляет собой неравенство. Таким образом, задача имеет бесчисленное множество решений. Число неизвестных можно уменьшить до трех, если решать задачу в относительных единицах, например, считая предварительно радиус R_1 колеса 1 равным единице. В таком случае будем иметь:

$$\rho_1 = \frac{R_1}{R_1} = 1, \quad \rho_2 = \frac{R_2}{R_1}, \quad \rho_{2'} = \frac{R_{2'}}{R_1}, \quad \rho_3 = \frac{R_3}{R_1}. \quad (25.6)$$

При проектировании передаточное отношение i_{13} должно быть задано. С самого начала возникает вопрос, как его распределить между двумя ступенями редуктора? Так как сила, приложенная к зубьям колес второй ступени, больше, чем сила, приложенная к колесам

первой ступени, то передаточное отношение i_{12} целесообразно сделать больше передаточного отношения $i_{2'3}$. Этим самым можно добиться того, что размеры колес второй ступени окажутся приблизительно равными размерам колес первой ступени. Можно поставить, например, дополнительное условие

$$i_{12} \approx 1,44 i_{2'3}. \quad (25.7)$$

В этом случае, имея в виду равенство (25.5), получаем:

$$1,44 i_{2'3}^2 = i_{13},$$

откуда

$$i_{2'3} = \frac{\sqrt{i_{13}}}{1,2} = 0,83 \sqrt{i_{13}}, \quad i_{12} = 1,2 \sqrt{i_{13}}. \quad (25.8)$$

После этого можно определить относительные размеры радиусов колес. Для колеса 2 имеем:

$$\rho_2 = 1,2 \sqrt{i_{13}}. \quad (25.9)$$

Принимая во внимание неравенство (25.5), получаем:

$$\rho_3 = 1,1 \rho_2 \quad (25.10)$$

и, наконец, для $\rho_{2'}$ имеем:

$$\frac{\rho_2}{\rho_{2'}} = 0,83 \sqrt{i_{13}}$$

или

$$\rho_{2'} = \frac{1,2 \rho_2}{\sqrt{i_{13}}}. \quad (25.11)$$

Итак, мы получили необходимые соотношения между радиусами колес, а это значительно облегчает дальнейшее проектирование.

Пример 1. Дано: передаточное отношение $i_{13} = 16$, модуль первой ступени $m_I = 1$ мм, модуль второй ступени $m_{II} = 1,25$ мм. Спроектировать схему редуктора.

Из первого соотношения (25.8) имеем:

$$i_{2'3} = 0,83 \sqrt{16} = 3,32.$$

Для определения ρ_2 пользуемся формулой (25.9)

$$\rho_2 = 1,2 \sqrt{16} = 4,8.$$

Из равенства (25.10) имеем:

$$\rho_3 \geq 1,1 \cdot 4,8 = 5,28.$$

Наконец, из (25.11) получаем:

$$\rho_{2'} = \frac{1,2 \cdot 5,28}{\sqrt{16}} = 1,58.$$

Теперь зададимся числом зубьев z_1 колеса I из условия, в соответствии с которым подрезание должно отсутствовать, т. е. должно быть $z_1 \geq 17$. Примем $z_1 = 20$. Тогда

$$R_1 = 0,5m_1z_1 = 0,5 \cdot 1 \cdot 20 = 10 \text{ мм.}$$

Пользуясь равенствами (25.6), получаем:

$$R_2 = p_2 R_1 = 4,8 \cdot 10 = 48 \text{ мм,}$$

$$R_{2'} = p_{2'} R_1 = 1,58 \cdot 10 = 15,8 \text{ мм,}$$

$$R_3 = p_3 R_1 = 5,28 \cdot 10 = 52,8 \text{ мм.}$$

Зная величины модулей $m_1 = 1 \text{ мм}$ и $m_{11} = 1,25 \text{ мм}$, определим числа зубьев колес

$$z_1 = \frac{2 \cdot 48}{1} = 96, \quad z_{2'} = \frac{2 \cdot 15,8}{1,25} = 25,25, \quad z_3 = \frac{2 \cdot 52,8}{1,25} = 84,5.$$

На колесах второй ступени числа зубьев получились дробные, вследствие чего в расчет надо внести поправки. Примем $z_{2'} = 25$ и $z_3 = 84$. Из-за этого передаточное отношение $i_{2'3}$ изменится

$$i_{2'3} = \frac{z_3}{z_{2'}} = \frac{84}{25} = 3,36.$$

Выше мы имели $i_{2'3} = 3,32$ и $i_{13} = 16$. В данном случае $i_{2'3} = 3,36$ и $i_{13} = 4,8 \cdot 3,36 = 16,14$. Ошибка в процентах

$$\Delta i_{13} = \left(\frac{16,14 - 16}{16} \right) 100\% \cong 1\%,$$

что не имеет практического значения.

3°. Переходим к рассмотрению редуктора типа показанного на рис. 691, б. Для этого типа редуктора должно удовлетворяться условие соосности (25.3). Подставляя в равенство (25.3) значения $R_2 = R_1 i_{12}$ и $R_3 = R_2 i_{2'3}$, получаем:

$$R_1 + R_1 i_{12} = R_2 + R_2 i_{2'3},$$

откуда имеем:

$$R_2 = R_1 \frac{1 + i_{12}}{1 + i_{2'3}}. \quad (25.12)$$

Из формулы (25.12) следует, что если передаточные отношения i_{12} и $i_{2'3}$ равны, т. е. $i_{12} = i_{2'3} = \sqrt{i_{13}}$, то удовлетворяется условие $R_2 = R_1$, а следовательно и условие $R_3 = R_2$. Условие соосности (25.3) может быть также выражено через числа зубьев колес и модули m_1 и m_{11} первой и второй ступеней редуктора. Имеем:

$$m_1 z_1 + m_{11} z_2 = m_{11} z_{2'} + m_{11} z_3. \quad (25.13)$$

Из равенства (25.13) получаем:

$$\frac{m_{11}}{m_1} = \frac{z_1 + z_3}{z_{2'} + z_3} > 1, \quad (25.14)$$

так как модуль m_{II} рекомендуется выбирать большим модуля m_I (см. § 122,1°). Если передаточные отношения удовлетворяют равенству

$$i_{13} = i_{2'3} = \sqrt{i_{13}},$$

то числа зубьев $z_1, z_2, z_{2'}$ и z_3 определяются по известным формулам

$$z_1 = \frac{2R_1}{m_I}, z_2 = z_1 i_{13} = z_1 \sqrt{i_{13}}, \quad z_{2'} = \frac{2R_{2'}}{m_{II}} \text{ и } z_3 = z_{2'} \sqrt{i_{13}}. \quad (25.15)$$

Межосевые расстояния A_I и A_{II} равны

$$A_I = A_{II} = R_1 + R_2 = R_{2'} + R_3. \quad (25.16)$$

4°. Для редуктора типа, показанного на рис. 691, в, с внутренним зацеплением соответственно имеем условие соосности в форме равенства (25.4). Кроме этого, имеем:

$$R_2 = R_1 i_{13} \quad \text{и} \quad R_3 = R_{2'} i_{2'3},$$

откуда

$$R_1 + R_1 i_{13} = R_{2'} i_{2'3} - R_{2'}$$

или

$$R_{2'} = R_1 \frac{1 + i_{13}}{i_{2'3} - 1}. \quad (25.17)$$

Условие соосности (25.4), выраженное через числа зубьев колес и модули m_I и m_{II} первой и второй ступеней редуктора, имеет вид

$$m_I z_1 + m_{II} z_3 = m_{II} z_2 - m_{II} z_{2'}, \quad (25.18)$$

откуда получаем:

$$\frac{m_{II}}{m_I} = \frac{z_1 + z_2}{z_3 - z_{2'}} > 1, \quad (25.19)$$

так как модуль m_{II} рекомендуется выбирать больше модуля m_I . Если передаточные отношения i_{13} и $i_{2'3}$ удовлетворяют условию

$$i_{13} = i_{2'3} = \sqrt{i_{13}},$$

то числа зубьев $z_1, z_2, z_{2'}$ и z_3 определяются по формулам (25.15). Межосевые расстояния A_I и A_{II} равны

$$A_I = A_{II} = R_1 + R_2 = R_3 - R_{2'}. \quad (25.20)$$

Пример 2. Определить радиусы колес и числа зубьев соосного редуктора с двумя ступенями, если заданы передаточное отношение $i_{13} = 20$ и модули первой ступени $m_I = 1$ мм и второй — $m_{II} = 1,25$ мм. Схема редуктора показана на рис. 691, б.

Для этого редуктора имеем следующие условия:

$$R_{2'} = R_1 \frac{1 + i_{13}}{1 + i_{2'3}}, \quad \frac{m_{II}}{m_I} = \frac{z_1 + z_2}{z_{2'} + z_3}$$

или в соответствии с заданными условиями

$$z_{2'} = \frac{m_1}{m_{11}} z_1 \frac{1+i_{12}}{1+i_{2'3}} = \frac{1}{1,25} z_1 \frac{1+i_{12}}{1+i_{2'3}} = 0,8 z_1 \frac{1+i_{12}}{1+i_{2'3}},$$

$$\frac{z_1 + z_2}{z_{2'} + z_3} = \frac{1,25}{1} = 1,25, \quad i_{12} i_{2'3} = i_{13} = 20.$$

Если вести расчет в относительных единицах — в числах зубьев колеса I , то неизвестными будут z_2 , $z_{2'}$, z_3 и i_{12} , $i_{2'3}$. Если дополнительно принять

$$i_{12} = i_{2'3} = \sqrt{i_{13}} = \sqrt{20} = 4,47,$$

то

$$z_{2'} = 0,8 z_1 \frac{1+4,47}{1+4,47} = 0,8 z_1,$$

$$z_2 = i_{12} z_1 = 4,47 z_1,$$

$$z_3 = i_{2'3} z_{2'} = 0,8 \cdot 4,47 z_1 = 3,58 z_1.$$

Задаемся теперь числом зубьев колеса I , причем выберем такое число z_1 , при котором получатся числа $z_{2'}$, z_2 и z_3 , по крайней мере близкие к числам целым, потому что равенство межосевых расстояний первой и второй ступеней должно быть выдержано точно.

Так как $z_{2'} = 0,8 z_1$, то для z_1 надо взять число 25 или 30, ибо при меньших числах для z_1 получаются числа для $z_{2'}$, меньше 17. Таким образом, мы намечаем решение задачи в двух вариантах.

Для первого варианта имеем:

$$z_{2'} = 0,8 \cdot 25 = 20,$$

$$z_2 = 4,47 \cdot 25 = 111,75 \approx 112,$$

$$z_3 = 3,58 \cdot 25 = 89,5 \approx 89.$$

Подставляя теперь округленные до целых чисел результаты в формулу для передаточного отношения i_{13} , получаем:

$$i_{13} = \frac{112 \cdot 89}{25 \cdot 20} = 19,95,$$

что для целей практики вполне допустимо.

Проверим, далее, второй вариант:

$$z_1 = 30, \quad z_{2'} = 24, \quad z_2 = 4,47 \cdot 30 = 134,1, \quad z_3 = 3,58 \cdot 30 = 107,4.$$

После округления до целых чисел имеем:

$$z_1 = 30, \quad z_{2'} = 24, \quad z_2 = 134, \quad z_3 = 107.$$

Передаточное отношение

$$i_{13} = \frac{134 \cdot 107}{30 \cdot 24} = 19,9,$$

что также вполне допустимо.

Теперь проверяем условие соосности.

Первый вариант:

$$\begin{aligned}m_{\text{I}}(z_1 + z_2) &= 1 \cdot (25 + 112) = 137, \\m_{\text{II}}(z_2' + z_3) &= 1,25(20 + 89) = 136,25.\end{aligned}$$

Второй вариант:

$$\begin{aligned}m_{\text{I}}(z_1 + z_2) &= 1 \cdot (30 + 134) = 164, \\m_{\text{II}}(z_2' + z_3) &= 1,25 \cdot (24 + 107) = 163,75.\end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, полного совпадения размеров межосевых расстояний не получилось, причем во втором варианте неточность оказалась меньше, чем в варианте первом. Остановимся на втором варианте.

Чтобы привести межосевое расстояние A_{II} второй ступени к числу 164, надо предусмотреть нарезание колеса $2'$ с положительным сдвигом. Для определения необходимого коэффициента сдвига воспользуемся формулой (23.80) в таком виде:

$$\cos \alpha_3 = \frac{A_0}{A_{\text{II}}} \cos \alpha_0,$$

в которой A_0 — межосевое расстояние, полученное нами из расчета, α_0 — угол зацепления режущего инструмента, равный 20° , α_3 — угол зацепления, получаемый при монтаже.

После подстановки известных нам величин, имеем:

$$\cos \alpha_3 = \frac{163,75}{164} 0,94 = 0,938; \quad \alpha_3 = 20^\circ 20'.$$

Далее, воспользуемся формулой (23.79) для определения сдвига $\xi_{2'}$, который необходим при нарезании зубьев колеса $2'$. Эту формулу представим так:

$$\xi_{2'} = \frac{(\text{inv} \alpha_3 - \text{inv} \alpha_0)(z_2' + z_3)}{2 \text{tg} \alpha_0}.$$

Подставим в эту формулу числовые величины и произведем вычисления

$$\xi_{2'} = \frac{(0,01569 - 0,01490)(24 + 107)}{2 \cdot 0,364} = 0,141.$$

Абсолютный сдвиг, выраженный в миллиметрах:

$$\chi_{2'} = m_{\text{II}} \xi_{2'} = 1,25 \cdot 0,141 = 0,176 \text{ мм.}$$

§ 123. Проектирование зубчатых передач с подвижными осями

1°. К многозвенным зубчатым механизмам с подвижными осями относятся так называемые планетарные механизмы (планетарные передачи), кинематика которых была нами рассмотрена в § 45, а силовой расчет и определение коэффициента полезного действия в § 82. Рас-

смотрим вопрос о проектировании схем планетарных передач, состоящих из четырех звеньев. На рис. 692 показаны четыре типовые схемы таких передач.

Рассмотрим вопрос о том, какие передаточные отношения могут быть воспроизводимы указанными передачами. Для этого воспользуемся формулами для передаточных отношений планетарных механизмов, выведенными в § 45.

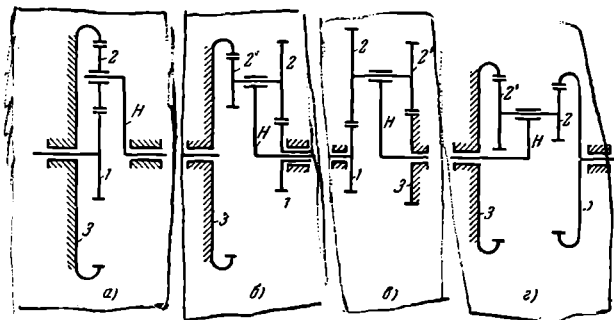


Рис. 692. Типовые схемы планетарных редукторов: а) с внутренним зацеплением и паразитным колесом; б) с одним внутренним и одним внешним зацеплениями; в) с двумя внешними зацеплениями; г) с двумя внутренними зацеплениями.

Имеем для передаточного отношения $i_{1H}^{(3)}$ от колеса 1 к водилу при неподвижном колесе 3 формулу

$$i_{1H}^{(3)} = 1 - i_{13}^H, \quad (25.21)$$

где i_{13}^H — передаточное отношение от колеса 1 к колесу 3 при неподвижном водиле H .

Соответственно имеем:

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{i_{1H}^{(3)}} = \frac{1}{1 - i_{13}^H}. \quad (25.22)$$

Если неподвижным колесом является колесо 1, то формулы (25.21) и (25.22) принимают вид

$$i_{3H}^{(1)} = 1 - i_{31}^H, \quad (25.23)$$

и

$$i_{H3}^{(1)} = \frac{1}{i_{3H}^{(1)}} = \frac{1}{1 - i_{31}^H}. \quad (25.24)$$

Для сопоставления формул (25.21) — (25.24) составим таблицу для передаточных отношений, выраженных через числа зубьев, для четырех типов передач, показанных на рис. 692.

**Формулы для определения передаточных отношений типовых
планетарных механизмов**

Передаточные отношения	Тип <i>a</i>	Тип <i>б</i>	Тип <i>в</i>	Тип <i>г</i>
i_{13}^H	$-\frac{z_3}{z_1}$	$-\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$	$\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$	$\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$
i_{31}^H	$-\frac{z_1}{z_3}$	$-\frac{z_1 \cdot z_2'}{z_2 \cdot z_3}$	$\frac{z_1 \cdot z_2'}{z_2 \cdot z_3}$	$\frac{z_1 \cdot z_2'}{z_2 \cdot z_3}$
$i_{1H}^{(3)}$	$1 + \frac{z_3}{z_1}$	$1 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$	$1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$	$1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$
$i_{H1}^{(3)}$	$\frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}}$	$\frac{1}{1 + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}}$	$\frac{1}{1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}}$	$\frac{1}{1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}}$
$i_{3H}^{(1)}$	$1 + \frac{z_1}{z_3}$	$1 + \frac{z_1 \cdot z_2'}{z_2 \cdot z_3}$	$1 - \frac{z_1 \cdot z_2'}{z_2 \cdot z_3}$	$1 - \frac{z_1 \cdot z_2'}{z_2 \cdot z_3}$
$i_{H3}^{(1)}$	$\frac{1}{1 + \frac{z_1}{z_3}}$	$\frac{1}{1 + \frac{z_1 \cdot z_2'}{z_2 \cdot z_3}}$	$\frac{1}{1 - \frac{z_1 \cdot z_2'}{z_2 \cdot z_3}}$	$\frac{1}{1 - \frac{z_1 \cdot z_2'}{z_2 \cdot z_3}}$

Из анализа данной таблицы видно, что тип *в* и тип *г* могут осуществлять одинаковые передаточные отношения и отличаются друг от друга только конструктивно наличием в типе *в* только внешних зацеплений, а в типе *г* только внутренних зацеплений. При этом диапазон передаточных отношений, осуществляемых этими типами передач, теоретически безграничен. В самом деле, если подобрать отношение чисел зубьев так, чтобы общее передаточное отношение i_{13}^H было близким к единице, то передаточные отношения $i_{1H}^{(3)}$ или $i_{3H}^{(1)}$ будут стремиться к нулю, а передаточные отношения $i_{H1}^{(3)}$ или $i_{H3}^{(1)}$ — к бесконечности.

Диапазон передаточных отношений передач типа *a* и *б* достаточно близок между собой и определяется габаритами передачи и конструктивными соображениями. В нижеследующей таблице даны принятые в практике диапазоны передаточных отношений, принимаемые при практических расчетах.

Следует отметить, что при малых значениях передаточного отношения передач типа *в* и *г* коэффициент их полезного действия будет очень малым, а для случая, когда передача осуществляется от колеса к водилу, может иметь место самоторможение. Таким образом, применение передач типа *в* и *г* в силовых мощных редукторах нецелесообразно.

Наоборот, передачи типа *a* и *б* обладают, как правило, высоким коэффициентом полезного действия от 0,96 до 0,98.

Ориентировочные интервалы передаточных отношений при различных неподвижных звеньях

Передаточные отношения		Тип а	Тип б	Тип в	Тип г
Обыкновенные передачи	i_{13}^H	$-1,3 \div -8$	$-1 \div -14$		
	i_{31}^H	$-0,77 \div -0,125$	$-1 \div -0,071$		
	$i_{1H}^{(3)}$	$2,3 \div 9,0$	$2,0 \div 15$	От 32 до 1500 и более	От 32 до 1500 и более
Планетарные передачи	$i_{H1}^{(3)}$	$0,445 \div 0,111$	$0,5 \div 0,067$		
	$i_{3H}^{(1)}$	$1,77 \div 1,125$	$2,0 \div 1,071$		
	$i_{H3}^{(1)}$	$0,565 \div 0,888$	$0,5 \div 0,933$		

Пользуясь таблицей ориентировочных интервалов передаточных отношений, можно устанавливать, какая схема передачи должна быть принята. Пусть, например, требуется спроектировать планетарную передачу, осуществляющую передаточное отношение i , равное $i=0,5$. Таблица показывает, что $i=0,5$ не лежит в интервалах планетарных передач типа а. Но данное передаточное отношение может быть воспроизведено передачей типа б, у которой это число входит в интервалы передаточных отношений.

В том случае, когда заданное передаточное отношение не входит в интервалы передач типа а и б, необходимо применять более сложного типа планетарные передачи или устанавливать несколько последовательно соединенных передач.

2°. Переходим к рассмотрению вопроса о подборе чисел зубьев планетарных передач. Рассмотрение этого вопроса проведем на примере передачи типа а (рис. 692). Обычно в редукторах для уменьшения нагрузок на зубья колес и из условий требований к динамической уравновешенности механизма устанавливают не один, а несколько сателлитов (рис. 693, б). Эти сателлиты устанавливаются под равными углами. На рис. 693, б показано три сателлита 2, 2' и 2'' под углами в 120° , но, вообще говоря, их число может быть и больше. Сателлиты располагаются в одной плоскости, и окружности головок сателлитов должны не пересекаться. На рис. 693, б показаны

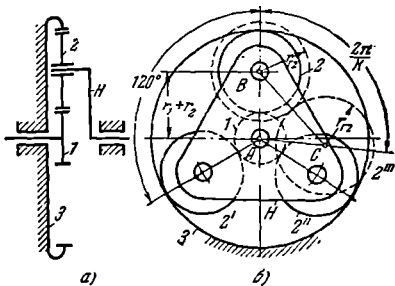


Рис. 693. К определению условия соседства сателлитов: а) схема планетарного механизма с одним сателлитом; б) схема с тремя сателлитами.

сателлиты 2 и 2''' в предельном соседстве, когда окружности их головок радиуса R_{r2} соприкасаются. Из треугольника ABC следует: чтобы окружности головок не соприкасались, надо удовлетворить неравенство

$$2(R_1 + R_2) \sin \frac{\pi}{k} > 2R_{r2}, \quad (25.25)$$

где k — число сателлитов и R_1 и R_2 — радиусы начальных окружностей колес 1 и 2. Если передача имеет стандартные колеса, то радиусы R_1 , R_2 и R_{r2} могут быть выражены через числа зубьев z_1 и z_2 . Имеем:

$$(z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{k} > (z_2 + 2), \quad (25.26)$$

откуда

$$\sin \frac{\pi}{k} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}. \quad (25.27)$$

Условие (25.27) называется *условием соседства*.

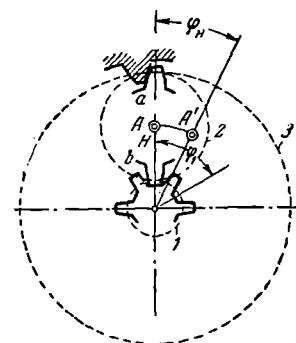


Рис. 694. К определению условия сборки планетарного механизма.

3°. При сборке планетарного редуктора первый поставленный сателлит полностью определяет взаимное расположение центральных колес. Пусть, например, сателлит 2 имеет четное число зубьев (рис. 694). Тогда зубья a и b будут расположены симметрично и центральные колеса 1 и 3 займут вполне определенное расположение друг относительно друга.

Повернем колесо 1 на угол φ_1 , равный одному угловому шагу; тогда если число зубьев колеса 1 равно z_1 , то угол φ_1 будет равен

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{z_1}. \quad (25.28)$$

После поворота центрального колеса 1 на угол φ_1 ось A сателлита займет положение A' ; а водило H повернется на угол φ_H , равный

$$\varphi_H = \varphi_1 i_{H1}^{31}. \quad (25.29)$$

При этом место первого зуба колеса 1 займет второй зуб этого колеса. Таким образом, после этого поворота оси симметрии зубьев центральных колес 1 и 3 будут на одной общей прямой. Тогда между центральными колесами 1 и 3 можно вставить еще один сателлит, конечно, расположенный в плоскости, не совпадающей с плоскостью первого сателлита.

Очевидно, что, теоретически, число сателлитов n , которое можно вставить, равно

$$n = \frac{2\pi}{\varphi_H}. \quad (25.30)$$

Формула (25.30) с учетом выражения (25.29) может быть представлена так:

$$n = \frac{2\pi z_1}{2\pi i_{H1}^{(3)}} = \frac{z_1}{i_{H1}^{(3)}}. \quad (25.31)$$

Из приведенной выше таблицы (стр. 616) имеем:

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1 + z_3}. \quad (25.32)$$

Вставляя выражение (25.32) в равенство (25.31), получаем:

$$n = \frac{z_1(z_1 + z_3)}{z_1} = z_1 + z_3. \quad (25.33)$$

Число n является числом теоретически возможных сателлитов. Практически число сателлитов k будет, конечно, меньше. Так, если повернуть колесо I не на один зуб, а на m зубьев, то число k сателлитов будет меньше в m раз

$$k = \frac{2\pi}{m\varphi_H} = \frac{z_1 + z_3}{m}. \quad (25.34)$$

Условие (25.34) носит название *условия сборки*. Оно действительно и для случая, когда число зубьев сателлита нечетное. Таким образом, при проектировании схемы планетарной передачи необходимо, чтобы удовлетворялось заданное передаточное отношение, заданный модуль, условие сборки, условие соседства и соосность передачи, которая для механизма, показанного на рис. 693, имеет следующий вид:

$$z_3 = 2z_1 + z_1, \quad (25.35)$$

так как колеса I , 2 и 3 имеют равный модуль. Кроме того, для стандартных колес необходимо, чтобы отсутствовало подрезание зубьев, а для внутреннего зацепления отсутствовала интерференция зубьев.

Пример. Пусть требуется спроектировать схему планетарной передачи, воспроизводящей передаточное отношение $i = 4,5$. Для выбора схемы механизма обращаемся к таблице ориентировочных интервалов передаточных отношений. Из этой таблицы видим, что это передаточное отношение может быть осуществлено передачами типа a и b . Выбираем тип a с передаточным отношением $i_{1H}^{(3)}$ — схему с ведущим колесом I и ведомым водилом H . Имеем $i_{1H}^{(3)} = 4,5$. Следовательно, $i_{13}^H = 1 - i_{1H}^{(3)} = 1 - 4,5 = -3,5$.

Так как i_{13}^H из таблицы для определения передаточных отношений равно

$$i_{13}^H = -\frac{z_3}{z_1} = -3,5, \quad (a)$$

то

$$z_3 = 3,5z_1. \quad (б)$$

Из условия соосности (25.35) имеем:

$$z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2} \quad (\text{в})$$

или, учитывая условие (б),

$$z_2 = \frac{3,5z_1 - z_1}{2} = \frac{2,5z_1}{2} = 1,25z_1. \quad (\text{г})$$

Из равенств (б) и (г) получаем:

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{3,5z_1}{1,25z_1} = 2,8. \quad (\text{д})$$

Число зубьев z_3 должно быть выбрано так, чтобы отсутствовали подрезание и интерференция зубьев. Из таблицы, помещенной в § 116, 3°, видно: если число z_2 выбрать равным $z_2 = 20$, то число зубьев z_3 будет равно $z_3 = 2,8z_2 = 2,8 \cdot 20 = 56$, т. е. будет меньше 60, а для отсутствия подрезания необходимо иметь $z_3 > 60$. Минимальное число зубьев $z_{3\min} = 22$, ибо в этом случае $z_3 = 2,8z_2 = 2,8 \cdot 22 = 61,5$, т. е. $z_3 > 60$. Таким образом, может быть выбрано $z_3 = 22$.

Условие (д) в целых наименьших числах удовлетворяется, если выбрать $z_2 = 25$ и $z_3 = 70$. Имеем:

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{70}{25} = 2,8.$$

Из формулы (б) получаем $z_1 = \frac{z_3}{3,5} = \frac{70}{3,5} = 20$.

Из таблицы (§ 116, 3°) следует, что при числе $z_1 = 20$ подрезание зубьев отсутствует.

Таким образом, число зубьев редуктора

$$z_1 = 20, \quad z_2 = 25, \quad z_3 = 70.$$

Переходим к определению возможного числа k сателлитов. Из условия соседства (25.27)

$$k < \frac{\pi}{\arcsin \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}} = \frac{\pi}{\arcsin \frac{25 + 2}{20 + 25}} = \frac{\pi}{\arcsin \frac{27}{45}} = \frac{\pi}{\arcsin 0,6} = 4,87, \quad (\text{е})$$

т. е. должно быть $k \leq 4$. Далее, из условия сборки (25.34)

$$k = \frac{z_1 + z_3}{m} = \frac{20 + 70}{m} = \frac{90}{m}. \quad (\text{ж})$$

Так как числа k и m должны быть целыми, то условие (ж) при выборе числа сателлитов $k = 4$ не может быть удовлетворено. Условию (ж) удовлетворяет число сателлитов $k = 3$, так как в этом случае число $m = 30$.

Можно, далее, определить радиусы начальных окружностей колес, если задан модуль m . Выберем модуль m равным $m = 10$ мм.

Тогда имеем:

$$R_1 = \frac{mz_1}{2} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ мм},$$

$$R_2 = \frac{mz_2}{2} = \frac{10 \cdot 25}{2} = 125 \text{ мм},$$

$$R_3 = \frac{mz_3}{2} = \frac{10 \cdot 70}{2} = 350 \text{ мм}.$$

Проверим условие соосности. Имеем:

$$r_3 = 2r_2 + r_1 = 2 \cdot 125 + 100 = 350 \text{ мм}.$$

Определяем далее коэффициент полезного действия механизма по формуле (17.46) (см. § 82,6°). Коэффициент потерь φ_H принимаем равным $\varphi_H = 0,05$. Тогда имеем коэффициент полезного действия η_{1H} равным

$$\begin{aligned} \eta_{1H} &= 1 - |(1 - i_{H1}^{(3)})| \varphi_H = 1 - \left| \left(1 - \frac{1}{i_{1H}^{(3)}} \right) \right| \varphi_H = \\ &= 1 - \left| \left(1 - \frac{1}{4,5} \right) \right| 0,05 \approx 0,96. \end{aligned}$$

ГЛАВА XXVI

СИНТЕЗ МАЛЬТИЙСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 124. Проектирование механизмов с внешним зацеплением

1° В § 52,3° нами были рассмотрены схемы механизмов мальтийских крестов и некоторые вопросы их кинематики. Мальтийские механизмы широко применяются в машинах-автоматах и приборах, когда необходимо воспроизведение движения, постоянного по направлению, но с периодической остановкой ведомого звена. Обычно при этом задается отношение k времени t_d движения ведомого звена к времени t_n его покоя, называемое *коэффициентом времени работы механизма*.

В простейшем механизме мальтийского креста с внешним зацеплением (рис. 695) профиль симметрично расположенных пазов является прямолинейным и радиальным, и ведущим является кривошип 1, снабженный одной цевкой А. Время t_d движения звена 2 и время t_n его покоя определяются, как это было показано в § 52,3°, из формул

$$t_d = \frac{30}{\pi n_1} 2\varphi_1 = \frac{30}{n_1} \left(1 - \frac{2}{z} \right) \quad (26.1)$$

и

$$t_n = \frac{30}{\pi n_1} (2\pi - 2\varphi_1) = \frac{30}{n_1} \left(1 + \frac{2}{z} \right), \quad (26.2)$$

так как из рис. 695 видно, что

$$\left. \begin{aligned} 2\varphi_2 &= \frac{2\pi}{z}, \\ 2\varphi_1 &= \pi - 2\varphi_2 = \pi \left(1 - \frac{2}{z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (26.3)$$

где z — число пазов и n — число оборотов в минуту звена I . Время T полного оборота звена I

$$T = t_{\pi} + t_{\pi} = \frac{60}{n_1}. \quad (26.4)$$

Наименьшее число z пазов для возможности осуществления поворота креста 2 (рис. 695) на полный поворот должно быть не меньшим $z \geq 3$.

При проектировании механизмов мальтийских крестов обычно промежутки времени движения и покоя креста выражают в относительных единицах p и q , соответственно равных

$$p = \frac{t_{\pi}}{T} = \frac{1}{2} - \frac{1}{z} \quad \text{и} \quad q = \frac{t_{\pi}}{T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z}.$$

Коэффициент k времени работы механизма

$$k = \frac{p}{q} = \frac{z-2}{z+2}. \quad (26.5)$$

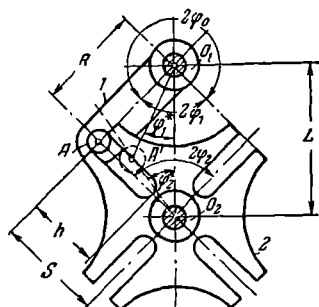


Рис. 695. Схема механизма мальтийского креста с внешним зацеплением.

метричном их расположении определяется из следующего условия:

$$m \leq \frac{2\pi}{2\varphi_1} = \frac{2}{1 - \frac{2}{z}}. \quad (26.6)$$

При проектировании мальтийских механизмов по заданному углу $2\varphi_1$ поворота креста и относительным величинам p , q и k можно пользоваться следующей таблицей, составленной для числа пазов $z = 3 \div 12$, так как кресты обычно не имеют большего числа пазов.

Расчетные параметры мальтийских механизмов с внешним зацеплением и одной цевкой

Число пазов креста z	Угол поворота звена I , соответствующий		Угол поворота креста $2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z}$	$p = \frac{t_{\pi}}{T}$	$q = \frac{t_{\pi}}{T}$	Коэффициент времени работы $k = \frac{p}{q}$
	покою креста, $2\varphi_0 = \pi \left(1 + \frac{2}{z}\right)$	движению креста, $2\varphi_1 = \pi - 2\varphi_2$				
3	300°	60°	120°	0,1667	0,8333	0,20
4	270°	90°	90°	0,2500	0,7500	0,33
5	252°	108°	72°	0,3000	0,7000	0,43
6	240°	120°	60°	0,3333	0,6667	0,50
7	231°26'	128°34'	51°26'	0,3571	0,6429	0,56
8	225°	135°	45°	0,3750	0,6250	0,60
9	220°	140°	40°	0,3889	0,6111	0,64
10	216°	144°	36°	0,4000	0,6000	0,67
11	212°44'	147°16'	32°44'	0,4090	0,5910	0,69
12	210°	150°	30°	0,4167	0,5833	0,71

Из рассмотрения приведенной таблицы видно, что для мальтийского механизма с одной цевкой при числе пазов $z=3$ коэффициент времени работы k , равен $k=0,20$. С увеличением числа z пазов коэффициент k возрастает, достигая при $z=12$ величины $k=0,71$.

2°. При выборе параметров мальтийских механизмов необходимо учитывать и кинематические характеристики механизмов. Если текущие углы поворота звена 1 и креста 2 обозначить через φ_1^* и φ_2^* , то для произвольного положения A' цевки в пазу (рис. 695) будем иметь:

$$\frac{R}{L} = \frac{\sin \varphi_2^*}{\sin (\varphi_1^* + \varphi_2^*)}. \quad (26.7)$$

Так как согласно рис. 695

$$\frac{R}{L} = \sin \varphi_2 = \sin \frac{\pi}{z} = \lambda, \quad (26.8)$$

то уравнение (26.7) примет вид

$$\lambda = \frac{\sin \varphi_2^*}{\sin (\varphi_1^* + \varphi_2^*)},$$

откуда получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi_2^* = \frac{\lambda \sin \varphi_1^*}{1 - \lambda \cos \varphi_1^*}$$

и

$$\varphi_2^* = \operatorname{arctg} \frac{\lambda \sin \varphi_1^*}{1 - \lambda \cos \varphi_1^*}. \quad (26.9)$$

Аналог $\omega_{2\varphi_1^*}$ угловой скорости креста 2 равен •

$$\omega_{2\varphi_1^*} = \frac{d\varphi_2^*}{d\varphi_1^*} = \frac{\lambda (\cos \varphi_1^* - \lambda)}{1 - 2\lambda \cos \varphi_1^* + \lambda^2}. \quad (26.10)$$

Аналог $\epsilon_{2\varphi_1^*}$ углового ускорения креста 2 будет равен

$$\epsilon_{2\varphi_1^*} = \frac{d(\omega_{2\varphi_1^*})}{d\varphi_1^*} = - \frac{\lambda (1 - \lambda^2) \sin \varphi_1^*}{(1 - 2\lambda \cos \varphi_1^* + \lambda^2)^2}. \quad (26.11)$$

Угловая скорость ω_2 креста

$$\omega_2 = \omega_{2\varphi_1^*} \omega_1, \quad (26.12)$$

а угловое ускорение ϵ_2 креста

$$\epsilon_2 = \epsilon_{2\varphi_1^*} \omega_1^2, \quad (26.13)$$

где ω_1 — угловая скорость звена 1.

Из формул (26.10) и (26.12) следует, что угловая скорость ω_2 креста равна нулю, если равен нулю числитель выражения (26.10). Имеем:

$$\lambda (\cos \varphi_1^* - \lambda) = 0$$

или

$$\cos \varphi_1^* = \lambda$$

и, далее, учитывая равенство (26.8),

$$\cos \varphi_1^* = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1^* \right) = \sin \frac{\pi}{z},$$

откуда получаем:

$$\varphi_1^* = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z} = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z} \right) = \varphi_1, \quad (26.14)$$

т. е. угловая скорость ω_2 креста равна нулю при входе и выходе цевки из паза и, следовательно, жесткие удары в механизме отсутствуют.

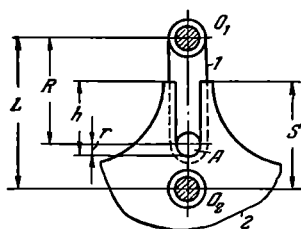


Рис. 696. Деталь схемы механизма мальтийского креста с внешним зацеплением.

Угловая скорость ω_2 креста будет максимальной и равной $\omega_{2\max}$, когда угол φ_1^* будет равен $\varphi_1^* = 0$, т. е. в положении, когда ось паза совпадает с прямой O_1O_2 (рис. 696). Из формулы (26.10) следует, что в этом положении аналог угловой скорости $\omega_{2\varphi_1^*}(\max)$ равен

$$\omega_{2\varphi_1^*}(\max) = \frac{\lambda}{1-\lambda}. \quad (26.15)$$

В этом положении угловое ускорение ϵ_2 креста равно нулю. Угловые ускорения ϵ_2' креста в моменты входа и выхода цевки из зацепления

$$\epsilon_2' = \epsilon_{2\varphi_1}' \omega_1^2, \quad (26.16)$$

где аналог $\epsilon_{2\varphi_1}'$ углового ускорения ϵ_2' согласно формуле (26.11) равен

$$\epsilon_{2\varphi_1}' = \frac{\sin \frac{\pi}{z} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{z}\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z}\right)}{\left[1 - 2 \sin \frac{\pi}{z} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z}\right) + \sin^2 \frac{\pi}{z}\right]^3} = \pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{z}. \quad (26.17)$$

Из формулы (26.17) следует, что так как $\pi/z > 0$, то в моменты начала и конца поворота креста он имеет некоторые ускорения $\epsilon_{2\varphi_1}'$, которые определяют мягкий удар.

Некоторые кинематические характеристики механизмов с внешним зацеплением даны в следующей таблице.

Кинематические параметры мальтийских механизмов с внешним зацеплением и одной цевкой

Число пазов z	Максимальное значение аналога угловой скорости $\omega_{2\varphi_1}(\max)$	Значение аналога углового ускорения в моменты входа и выхода цевки из зацепления $\pm \epsilon_{2\varphi_1}'$	Число пазов z	Максимальное значение аналога угловой скорости $\omega_{2\varphi_1}(\max)$	Значение аналога углового ускорения в моменты входа и выхода цевки из зацепления $\pm \epsilon_{2\varphi_1}'$
3	6,46	1,73	8	0,620	0,414
4	2,41	1,00	9	0,520	0,364
5	1,43	0,727	10	0,447	0,325
6	1,00	0,577	11	0,392	0,294
7	0,766	0,482	12	0,349	0,268

Из рассмотрения данной таблицы следует, что при уменьшении числа пазов возрастают максимальные угловые скорости креста и угловые ускорения в моменты входа и выхода цевки из зацепления. Резкое возрастание ускорений, а с ним и динамических нагрузок является существенным недостатком мальтийских механизмов с малым числом пазов.

3°. Основные размеры звеньев мальтийского механизма (рис. 695) легко определяются. Если задано межосевое расстояние $O_1O_2 = L$ и выбрано число z пазов креста, то радиус R ведущего кривошипа равен

$$R = L \sin \varphi_1 = L \sin \frac{\pi}{z}.$$

**Расчетные параметры мальтийских механизмов с внешним зацеплением
и числом цевок m от 2 ÷ 5**

Число пазов креста z	Угол поворота звена 1, соответствующий покою креста				Угол поворота звена 1, соответ- ствующий движению креста, $2\varphi_1$	Угол поворота креста $2\varphi_2$	$p = \frac{t_p}{T}$	$q = \frac{t_p}{T}$				Коэффициент времени работы $k = \frac{p}{q}$			
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$				$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
3	120°	60°	30°	12°	60°	120°	0,1667	0,333	0,1667	0,0833	0,0333	0,50	1,00	2,00	5,0
4	90°	30°	—	—	90°	90°	0,2500	0,2500	0,0833	—	—	1,00	3,00	—	—
5	72°	12°	—	—	108°	72°	0,3000	0,2000	0,0333	—	—	1,50	9,00	—	—
6	60°	—	—	—	120°	60°	0,3333	0,1667	—	—	—	2,00	—	—	—
7	51°26'	—	—	—	128°34'	51°26'	0,3571	0,1420	—	—	—	2,50	—	—	—
8	45°	—	—	—	135°	45°	0,3750	0,1250	—	—	—	3,00	—	—	—
9	40°	—	—	—	140°	40°	0,3889	0,1111	—	—	—	3,50	—	—	—
10	36°	—	—	—	144°	36°	0,4000	0,1000	—	—	—	4,00	—	—	—
11	32°44'	—	—	—	147°16'	32°44'	0,4090	0,0909	—	—	—	4,50	—	—	—
12	30°	—	—	—	150°	30°	0,4167	0,0833	—	—	—	5,00	—	—	—

При несимметричном расположении центров цевок на окружности звена 1 периоды покоя креста не равны между собой.

Расстояние S от оси вращения креста до торцов его пазов

$$S = L \cos \varphi_1 = L \cos \frac{\pi}{z}.$$

Длина h паза креста определится из рис. 696, на котором показано положение механизма мальтийского креста, когда ось паза совпадает с линией O_1O_2 . Имеем:

$$h = S + R - L + r,$$

где r — радиус цевки, и, далее,

$$h = L \left(\cos \frac{\pi}{z} + \sin \frac{\pi}{z} - 1 \right) + r.$$

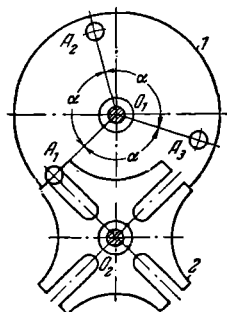


Рис. 697. Схема механизма мальтийского креста с внешним зацеплением и тремя цевками.

4°. Если ведущее звено 1 (рис. 697) имеет несколько симметрично расположенных цевок, то число m этих цевок может быть определено из неравенства (26.6). Из этого неравенства следует, что число m цевок может быть в пределах $m = 1 \div 5$.

На рис. 697 показан мальтийский механизм с числом цевок $m = 3$ и числом пазов z , равным 4, что удовлетворяет неравенству (26.6). Угол $2\varphi_1$ поворота звена, на котором происходит поворот креста 2, равен по формуле (26.3)

$$2\varphi_1 = \pi \left(1 - \frac{2}{z} \right). \quad (26.18)$$

Угол поворота $2\varphi_0$ звена 1, при котором крест 2 находится в покое, равен

$$2\varphi_0 = \frac{2\pi}{m} - 2\varphi_1 = \frac{2\pi}{m} - \pi + \frac{2\pi}{z} = \pi \left(\frac{2}{m} + \frac{2}{z} - 1 \right). \quad (26.19)$$

Коэффициент k времени работы

$$k = \frac{t_d}{t_n} = \frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{1 - \frac{2}{z}}{\frac{2}{m} + \frac{2}{z} - 1}. \quad (26.20)$$

При проектировании мальтийского механизма с числом цевок $m = 2 \div 5$ можно пользоваться таблицей, приведенной на стр. 625.

§ 125. Проектирование механизмов с внутренним зацеплением

1°. В § 52,3° на рис. 380 был показан мальтийский механизм с внутренним зацеплением. Кинематическая схема этого механизма показана на рис. 698. Мальтийский механизм с внутренним зацеплением имеет ту же кинематическую схему, что и механизм с внешним зацеплением. Различие заключается в том, что цевка A находится в зацеплении на участке b паза, а не на участке a , благодаря чему угловые скорости ω_1 и ω_2 звеньев 1 и 2 имеют один и тот же знак. Угол $2\varphi_2$ поворота креста 2 равен

$$2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z}. \quad (26.21)$$

Угол $2\varphi_1$ поворота звена 1, соответствующий движению креста 2,

$$2\varphi_1 = \pi + 2\varphi_2 = \pi \left(1 + \frac{2}{z} \right). \quad (26.22)$$

При проектировании мальтийских механизмов с внутренним зацеплением по заданному углу $2\varphi_2$ поворота креста и относительным величинам p , q и k можно воспользоваться следующей таблицей, составленной для числа пазов $z = 3 \div 12$.

Расчетные параметры мальтийских механизмов с внутренним зацеплением и одной цевкой

Число пазов креста z	Угол поворота звена I, соответствующий		Угол поворота креста 2 $2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z}$	$p = \frac{t_1}{T}$	$q = \frac{t_{II}}{T}$	Коэффициент времени работы $k = \frac{p}{q}$
	покою креста, $2\varphi_0 = \pi \left(1 - \frac{2}{z}\right)$	движению креста, $2\varphi_1 = \pi + 2\varphi_2$				
3	60°	300°	120°	0,8333	0,1667	5,00
4	90°	270°	90°	0,7500	0,2500	3,00
5	108°	252°	72°	0,7000	0,3000	2,33
6	120°	240°	60°	0,6667	0,3333	2,00
7	128°34'	231°26'	51°26'	0,6429	0,3571	1,80
8	135°	225°	45°	0,6250	0,3750	1,67
9	140°	220°	40°	0,6111	0,3889	1,57
10	144°	216°	36°	0,6000	0,4000	1,50
11	147°16'	212°44'	32°44'	0,5910	0,4090	1,44
12	150°	210°	30°	0,5833	0,4167	1,40

Как это видно из приведенной таблицы, с увеличением числа пазов коэффициент k времени работы уменьшается.

2°. Рассмотрим некоторые кинематические характеристики мальтийских механизмов с внутренним зацеплением. Для этого выберем текущие углы φ_1^* и φ_2^* поворота звена I и креста 2 так, как это показано на рис. 698, т. е. угол φ_1^* будем отсчитывать от продолжения прямой O_1O_2 , лежащей ниже точки O_1 . Тогда можно применить ранее выведенные нами формулы кинематики мальтийских механизмов с внешним зацеплением. Для более ясного сопоставления мальтийских механизмов с внешними и внутренними зацеплениями на рис. 699 показаны кривые аналогов угловых скоростей и ускорений $\omega_{2\varphi_1}$ и $\epsilon_{2\varphi_1}$ для внешнего зацепления, а на рис. 700 — те же зависимости для внутреннего зацепления. Кривые построены для четырехпазовых механизмов с одной цевкой. Угловое ускорение креста с внутренним зацеплением достигает своего максимума в моменты входа и выхода цевки из паза. Различным является также и характер изменения углового ускорения $\epsilon_{2\varphi_1}$ по углу поворота φ_1 . Некоторые кинематические характеристики механизмов с внутренним зацеплением даны в таблице на стр. 629.

Основные размеры механизмов с внутренним зацеплением определяются согласно рис. 698. Имеем $R = L \sin \varphi_2 = L \sin \frac{\pi}{z}$, $S = L \cos \varphi_2 = L \cos \frac{\pi}{z}$ и длина h паза равна

$$h = R + L - S + r,$$

где r — радиус цевки A. Следовательно,

$$h = L \left(\sin \frac{\pi}{z} - \cos \frac{\pi}{z} + 1 \right) + r.$$

Мальтийских механизмов с внутренними зацеплениями с несколькими цевками мы не рассматриваем, ибо в практике они применяются редко.

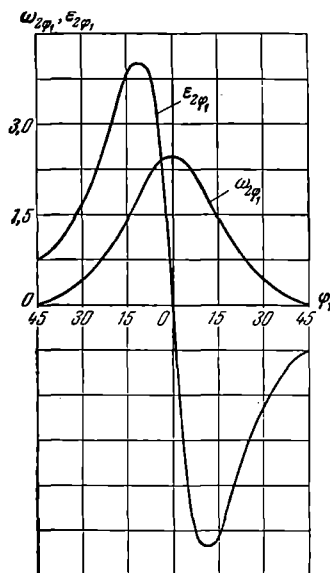


Рис. 699. Графики аналогов угловой скорости и углового ускорения креста мальтийского механизма с внешним зацеплением.

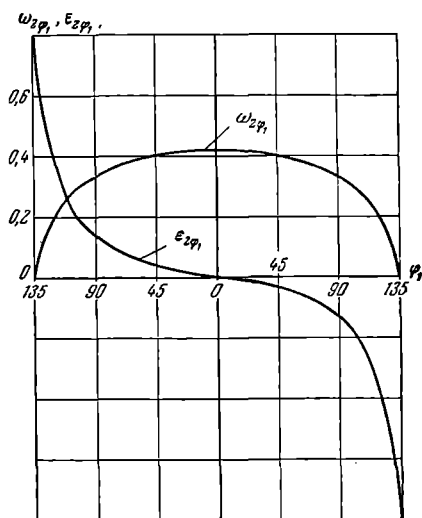


Рис. 700. Графики аналогов угловой скорости и углового ускорения креста мальтийского механизма с внутренним зацеплением.

Точно так же редко применяются и мальтийские кресты (рис. 385) с несимметрично расположенными пазами и цевками, потому и их мы не рассматриваем.

Кинематические параметры мальтийских механизмов с внутренним зацеплением и одной цевкой

Число пазов z	Максимальное значение аналога угловой скорости $\omega_{2\varphi_1}$ шах	Значение аналога углового ускорения в момент входа и выхода цевки из зацепления $\pm \epsilon_{2\varphi_1}$	Число пазов z	Максимальное значение аналога угловой скорости $\omega_{2\varphi_1}$ шах	Значение аналога углового ускорения в момент входа и выхода цевки из зацепления $\pm \epsilon_{2\varphi_1}$
3	0,464	1,729	8	0,277	0,414
4	0,414	1,000	9	0,255	0,364
5	0,370	0,727	10	0,236	0,325
6	0,333	0,577	11	0,220	0,294
7	0,303	0,481	12	0,206	0,268

ГЛАВА XXVII

СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 126. Основные типы плоских кулачковых механизмов

1°. В настоящем параграфе мы рассмотрим основные типы кулачковых механизмов, причем для удобства рассмотрения разобьем эти механизмы в зависимости от движения ведомого звена на следующие три вида:

- 1) ведомое звено движется *поступательно*,
- 2) ведомое звено *вращается*,
- 3) ведомое звено совершает *сложное движение*.

Примером первого вида кулачковых механизмов может служить механизм, кинематическая схема которого показана на рис. 701, а.

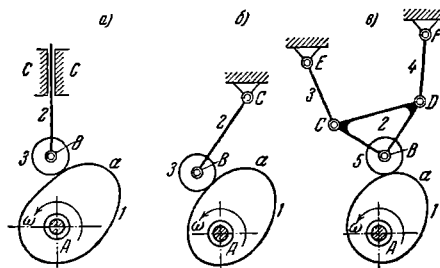


Рис. 701. Схемы кулачковых механизмов: а) с поступательно движущимся ведомым звеном; б) с возвратно-вращающимся ведомым звеном; в) со сложно движущимся ведомым звеном.

Цилиндр, ограниченный в сечении плоской кривой I , вращается вокруг оси A с заданной угловой скоростью ω . Действуя на ролик $З$, свободно вращающийся вокруг оси, цилиндр I заставляет звено 2 двигаться поступательно в направлениях $C—C$. Условимся в кулачковых механизмах называть кулачком то звено высшей пары, элемент которого имеет переменную кривизну.

Профилем плоского кулачка

условимся называть сечение кулачка плоскостью, параллельной плоскости движения кулачка. Тогда в механизме, показанном на рис. 701, а, звено I является кулачком, а кривая a — профилем кулачка.

На рис. 701, б показан второй вид кулачкового механизма. Кулачок I вращается с заданной угловой скоростью ω . Действуя на ролик $З$, кулачок I заставляет звено 2 вращаться вокруг точки C .

На рис. 701, в показан третий вид кулачкового механизма. Кулачок I вращается вокруг оси с угловой скоростью ω . Действуя на ролик $Б$, кулачок I заставляет звено 2 совершать сложное движение, в то время как звенья $З$ и 4 вращаются соответственно вокруг точек E и F .

2°. Внутри каждого вида кулачковых механизмов мы можем получить различные разновидности этих механизмов в зависимости от характера движения кулачка, взаимного расположения кулачка и ведомого звена, геометрических форм элемента, принадлежащего ведомому звену. Например, кулачковые механизмы с поступательно дви-

жущимся ведомым звеном вида, показанного на рис. 701, а, могут иметь различные кинематические схемы, показанные на рис. 702, так как кулачок может вращаться вокруг неподвижной оси A (рис. 702, а, б и в) или двигаться поступательно (рис. 702, г и д) вдоль оси $x-x$ и т. д. Ось $y-y$ ведомого звена может пересекать ось A вращения

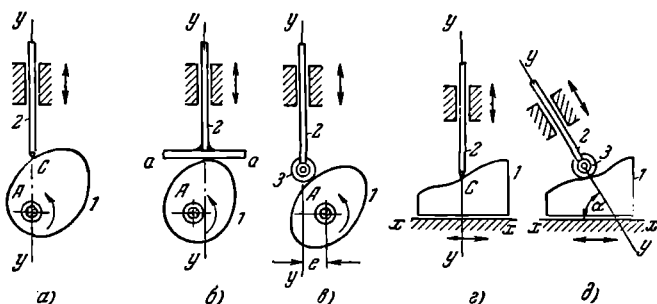


Рис. 702. Схемы кулачковых механизмов: а) с поступательно движущимся толкателем с острием на конце; б) с плоским толкателем; в) с поступательно движущимся толкателем и роликом; г) с поступательно движущимися кулачком и толкателем с острием; д) с поступательно движущимися кулачком и толкателем и роликом.

кулачка (рис. 702, а) и не пересекать ее (рис. 702, в), образуя некоторое кратчайшее расстояние, равное e . Ось $y-y$ движения звена 2 может быть перпендикулярна к оси $x-x$ движения кулачка (рис. 702, г) или образовывать некоторый угол α с осью $x-x$ (рис. 702, д). Наконец, ведомое звено может оканчиваться точкой C (острием) (рис. 702, а и г), круглым роликом 3 (рис. 702, в и д) или прямой $a-a$ (плоской тарелкой) (рис. 702, б). Ведомое звено 2,двигающееся поступательно, носит название *толкателя* или *штанги*.

Ведомое звено 2, вращающееся вокруг неподвижной оси (рис. 701, б), носит название *коромысла* и ведомое звено 2, имеющее сложное движение (рис. 701, в), называется *шатун*ом. Если ось $y-y$ толкателя проходит через ось A вращения кулачка (рис. 702, а), то такой механизм обычно называется *кулачковым механизмом с центральным толкателем*. Если ось $y-y$ образует кратчайшее расстояние e с осью A вращения кулачка (рис. 702, в), то такой механизм называется *кулачковым механизмом со смещенным толкателем*. Механизм, показанный на рис. 701, б, носит название *кулачкового механизма с коромыслом* и т. д. В зависимости от характера движения ведомых и ведущих звеньев, геометрических форм элементов звеньев, расположения низших кинематических пар, в которые входят звенья кулачковых механизмов, мы можем получить самые различные типы кулачковых механизмов. Наибольшее распространение в машинах

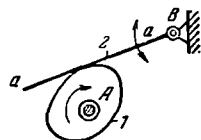


Рис. 703. Схема кулачкового механизма с коромыслом, касающимся кулачка.

получили типы кулачковых механизмов, показанные на рис. 701, *а* и *б*, и кулачковые механизмы, схемы которых показаны на рис. 702 и 703.

3°. При работе кулачкового механизма необходимо, чтобы было постоянное соприкосновение ведущего и ведомого звеньев. Это соприкосновение может быть обеспечено, например, чисто геометрически, если выполнить профиль кулачка в форме паза *а — а* (рис. 704, *а*), боковые поверхности которого огибают ролик 3. Пазовый кулачок обеспечивает геометрическое замыкание высшей пары кулачкового механизма.

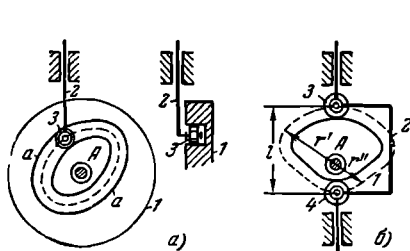


Рис. 704. Схемы кулачковых механизмов с геометрическим замыканием: *а*) с пазовым кулачком; *б*) с двумя толкателями в рамке.

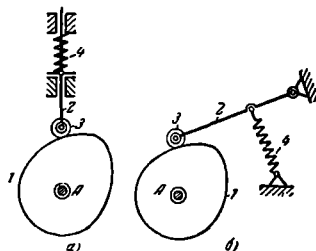


Рис. 705. Схемы кулачковых механизмов с силовым замыканием: *а*) с поступательно движущимся толкателем; *б*) с нозератно-вращающимся коромыслом.

На рис. 704, *б* показан другой способ кинематического замыкания с помощью двух роликов 3 и 4. При таком замыкании на профиль кулачка накладывается дополнительное условие равенства суммы противоположных радиусов-векторов r' и r'' центрального профиля кулачка расстоянию l между осями вращения роликов 3 и 4. Чаще всего применяется силовое замыкание с помощью пружины 4 (рис. 705, *а* и *б*).

§ 127. Исходные данные для проектирования кулачковых механизмов

1°. Чтобы спроектировать профиль кулачка кулачкового механизма, необходимо выбрать

- а) кинематическую схему механизма (вид кулачкового механизма);
- б) закон движения ведомого звена в функции ведущего (функция обобщенной координаты);
- в) некоторые основные размеры звеньев.

Выбор той или иной кинематической схемы механизма определяется в первую очередь из конструктивных соображений необходимостью воспроизведения требуемого по условиям технологического процесса движения ведомого звена. Выбор закона движения ведомого звена в функции обобщенной координаты является основным этапом в проектировании кулачкового механизма. При выборе закона дви-

жения необходимо, чтобы этот закон удовлетворял требованиям того технологического процесса, для выполнения которого проектируется кулачковый механизм.

Например, на рис. 706 показан кулачковый механизм ножниц конфетно-оберточного автомата. При вращении пазового кулачка 1 угловой рычаг 2, ролик которого перекачивается в пазу кулачка, поворачивается вокруг оси A , производя открытие и закрытие ножниц, лезвия которых представляют собой звенья 3 и 4. Таким образом, время T полного цикла движения механизма состоит из времени t_3 — закрытия ножниц, времени t_o — открытия и времени t_b — выстоя — покоя ножниц. Таким образом, полное время T движения механизма равно

$$T = t_3 + t_o + t_b. \quad (27.1)$$

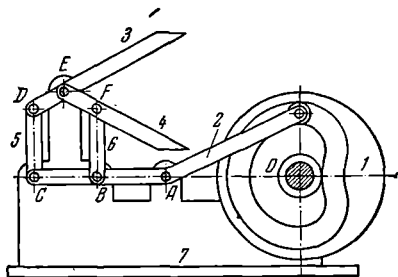


Рис. 706. Схема кулачкового механизма ножниц.

Промежутки времени t_3 , t_o , и t_b выбираются в соответствии с требованиями технологического процесса и максимальной производительности механизма. Зная размеры звеньев механизма, можно определить рабочий угол φ_p поворота рычага 2, соответствующий периодам времени t_3 и t_o или соответственно углам φ_{13} и φ_{10} поворота кулачка. Таким образом, рычаг 2 поворачивается на угол φ_p за время t_3 или при повороте кулачка на угол φ_{13} в одном направлении, производя закрытие ножниц. Далее, рычаг 2 поворачивается на тот же угол φ_p за время t_o или при повороте кулачка на угол φ_{10} в противоположном направлении, производя открытие ножниц. Наконец, за время t_b при повороте на угол φ_{1b} выстоя рычаг 2 должен быть неподвижен.

Имея эти данные, можно построить условную диаграмму движения рычага 2 и так называемую циклограмму механизма (рис. 707). На рис. 707, a построена условная функция положений, т. е. зависимость $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$. Условность диаграммы (рис. 707, a) заключается в том, что изменение угла φ_2 в функции угла φ_1 принято линейным. Рис. 707, b представляет собой циклограмму механизма. На ней показаны углы φ_3 , φ_o и φ_b , соответствующие повороту кулачка 1 за время t_3 , t_o и t_b .

2°. Рассмотрим некоторую типовую функцию положения, заданную в виде графика зависимости $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 708, b), где s_2 — линей-

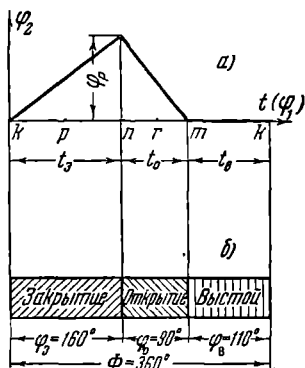


Рис. 707. Циклограмма механизма, изображенного на рис. 706.

ное перемещение толкателя 2, а φ_1 — угол поворота кулачка (рис. 708, а). Пусть угол поворота кулачка $\Phi = 2\pi$ соответствует полному циклу движения механизма. На угле поворота φ_1^I происходит подъем толкателя на величину h^I . Далее, на угле поворота φ_1^{II} толкатель имеет выстой. На угле поворота φ_1^{III} происходит опускание толкателя на величину $h^{III} = h^I - h^{IV}$. На угле поворота φ_1^{IV} толкатель имеет второй выстой. На угле поворота φ_1^V толкатель опустится на величину h^V ,

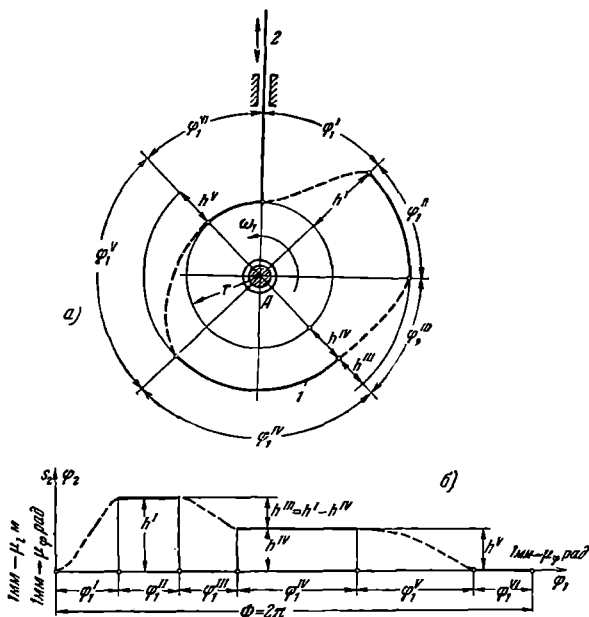


Рис. 708. Кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем: а) схема механизма; б) закон движения ведомого звена.

и на угле поворота φ_1^{VI} толкатель вновь имеет выстой. Углы φ_1^I , φ_1^{II} , φ_1^{III} , носят название *фазовых углов*. Участок кривой $s_2 = s_2(\varphi_1)$, соответствующий фазовому углу φ_1^I , называется *фазой подъема*, потому что при повороте кулачка на этот угол график движения толкателя 2 поднимается (рис. 708, б). Участки кривой $s_2 = s_2(\varphi_1)$, соответствующие углам φ_1^{II} , φ_1^{IV} и φ_1^V , называются *фазами выстоя* и, наконец, участки φ_1^{III} и φ_1^V — *фазой опускания*, ибо на этих участках график движения толкателя опускается. Нетрудно видеть (рис. 708, а), что на углах φ_1^{II} , φ_1^{IV} и φ_1^{VI} , соответствующих фазам выстоя, профиль кулачка 1 должен быть очерчен по дугам окружностей с радиусами $r + h^I$, $r + h^{IV}$ и r , где r — наименьший радиус-вектор кулачка. На

углах φ_1^I , φ_1^{III} и φ_1^V , соответствующих фазам подъема или опускания, профиль кулачка должен соответствовать выбранным на этих фазах законам движения $s_2 = s_2(\varphi_1)$. На рис. 708, *а* участки кулачка, соответствующие этим фазам, показаны условно пунктиром. На рис. 708, *а* и *б* был рассмотрен кулачковый механизм с поступательно движущимся звеном, но все определения и положения применимы и для кулачковых механизмов с коромыслом (например, вида, показанного на рис. 701, *б* или рис. 703). В этих случаях по оси ординат (рис. 708, *б*) следует отложить углы φ_2 поворота коромысла 2, и тогда получается зависимость $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$. Выбор наиболее рациональных законов движения ведомых звеньев зависит от многих требований кинематического, динамического, конструктивного и технологического характера, на некоторых из которых мы остановимся в следующем параграфе.

3°. К исходным данным для проектирования кулачковых механизмов относятся также выбор основных размеров их звеньев. Здесь сначала надо отметить желательность получения наименьших габаритов механизма, достаточно высокого его коэффициента полезного действия, установление размеров направляющих для толкателей, определение диаметра ролика или размеров плоской тарелки толкателя и коромысла и т. д. Основные конструктивные размеры звеньев кулачковых механизмов также связаны и с расчетом на прочность этих звеньев, износом профилей элементов высшей кинематической пары, надежности работы механизма и т. д. Как всегда, при конкретном проектировании трудно спроектировать кулачковый механизм, который удовлетворял бы всем требуемым показателям в одинаковой степени. Поэтому в процессе проектирования конструктор обычно просчитывает несколько вариантов схем механизма и выбирает из них оптимальный вариант или стремится, учитывая технологическое задание, удовлетворить в той или иной степени основным кинематическим, динамическим, конструктивным и технологическим требованиям к рациональной конструкции механизма. Ниже, в особом параграфе будут более подробно рассмотрены некоторые вопросы выбора основных размеров звеньев кулачковых механизмов.

§ 128. Законы движения ведомых звеньев

1°. Теоретически кулачковыми механизмами можно осуществлять любые законы движения, но на практике пользуются только теми, которые обеспечивают более простую технологию обработки профиля кулачка и удовлетворяют кинематическим и динамическим требованиям к кулачковому механизму. Рассмотрение этих законов будем вести для четырех характерных фаз движения ведомого звена: фазы подъема φ_n , фазы верхнего выстоя $\varphi_{вв}$, фазы опускания φ_o и фазы нижнего выстоя $\varphi_{вн}$. Наиболее простым законом $s_2 = s_2(\varphi_1)$ является линейный закон движения на фазах подъема и опускания (рис. 709).

Углы φ_1 , соответствующие фазам подъема, выстоя и опускания, обозначены соответственно через φ_n , $\varphi_{вв}$, φ_o и $\varphi_{нв}$. Сумма этих углов обозначена через Φ . Имеем $\Phi = \varphi_n + \varphi_{вв} + \varphi_o + \varphi_{нв} = 2\pi$. Полный подъем ведомого звена обозначен через h .

Закон движения ведомого звена на фазе подъема представляет собой зависимость

$$s_2 = \frac{h}{\varphi_n} \varphi_1 \quad (27.2)$$

и на фазе опускания

$$s_2 = [(\Phi - \varphi_{нв}) - \varphi_1] \frac{h}{\varphi_o} = \frac{h}{\varphi_o} (\Phi - \varphi_{нв}) - \frac{h}{\varphi_o} \varphi_1. \quad (27.3)$$

Аналог $v_{2\varphi_1}$ скорости ведомого звена соответственно равен для фазы подъема

$$v_{2\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{h}{\varphi_n} = \text{const} \quad (27.4)$$

и для фазы опускания

$$v_{2\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{d}{d\varphi_1} \left[\frac{h}{\varphi_o} (\Phi - \varphi_{нв}) - \frac{h}{\varphi_o} \varphi_1 \right] = -\frac{h}{\varphi_o} = \text{const}. \quad (27.5)$$

Диаграмма $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ показана на рис. 709, б.

Скорость движения толкателя на обеих фазах постоянна. Аналоги ускорений $a_{2\varphi_1}$ на обеих фазах равны нулю, кроме положений a , b ,

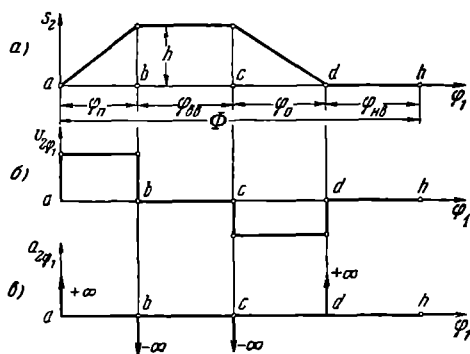


Рис. 709. Закон движения ведомого звена кулачкового механизма: а) диаграмма пути; б) диаграмма аналога скорости; в) диаграмма аналога ускорения.

с и d , где функция $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ имеет разрывы. В этих положениях теоретически ускорения $a_{2\varphi_1}$ ведомого звена являются равными бесконечности. Это вызывает появление в механизме так называемых жестких ударов, при которых силы инерции, действующие на звенья механизма, теоретически достигают бесконечности. Практически ускорения $a_{2\varphi_1}$ в указанных положениях не равны бесконечности, потому что обычно действительным про-

филем кулачка является профиль, построенный как эквидистантная кривая к ролику ведомого звена, что вызывает изменение в этих положениях не только теоретического ускорения, но и скорости. Кроме того, если даже толкатель не имеет ролика, а оканчивается острием, то вследствие упругости звеньев кулачкового механизма ускорения $a_{2\varphi_1}$ не могут получаться равными бесконечности благодаря амортизирующему эффекту упругости звеньев. Несмотря

на это, все же в указанных положениях мы можем получить размыкание элементов высшей пары и соударение ведомого звена с ведущим. Поэтому обычно линейным законом пользуются только на части фаз подъема или опускания и в закон движения вводятся переходные кривые, позволяющие осуществлять плавный переход на участках сопряжения двух линейных законов движения. Такими переходными кривыми могут быть дуги окружностей, участки парабол, участки синусоид и т. д. На рис. 710 показан линейный закон движения с переходными участками, очерченными по дугам окружностей радиусов r на участках φ_n и φ_o фаз подъема и опускания. Чтобы не имел место скачок в кривой аналога скоростей $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ (рис. 710, б), необходимо линейный участок диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$ выполнить по касательным к окружностям

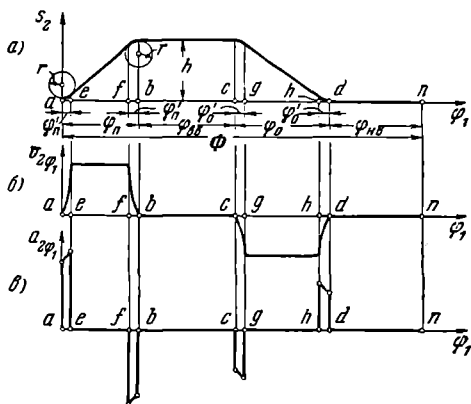


Рис. 710. Закон движения ведомого звена кулачкового механизма с плавными переходами на сопряжениях линейных участков: а) диаграмма пути; б) диаграмма аналога скорости; в) диаграмма аналога ускорения.

радиуса r . Это может быть всегда сделано, если воспользоваться построением, показанным на рис. 711, где рассмотрен в большом масштабе участок φ_n фазы подъема. Из точек A и B , лежащих на расстояниях r и $h - r$ на ординатах, проведенных в точках a и b , проводим окружности выбранного радиуса r . Далее, соединяем точки A и B прямой. Из точек D и E , лежащих на прямой AB , радиусами R , равными $R = AB/4$, проводим окружности до пересечения в точках m и k с окружностями радиусов, равных r . Прямая km получается касательной к окружностям радиуса r . Таким образом, кривая $s_2 = s_2(\varphi_1)$ будет состоять на участках φ_n из дуг ak и mn окружностей, а на участке $\varphi_n - 2\varphi_n'$ из прямой km . Диаграмма аналога скоростей $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ показана на рис. 710, б, а диаграмма аналога ускорения $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ — на рис. 710, в. Из этих диаграмм видно, что на участках φ_n фазы подъема и φ_o фазы опускания аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ не претерпевает разрывов. Аналог ускорений $a_{2\varphi_1}$ в начале и конце каждого интервала φ_n и φ_o претерпевает мгновенное изменение своей

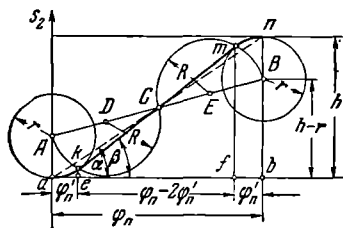


Рис. 711. Способ построения плавных переходов на диаграмме с двумя линейными участками.

величины на конечную величину. Следовательно, в точках a, e, f, b, c, g, h и d будут иметь место удары, но меньшие, чем в случае, рассмотренном на рис. 709. Эти удары при мгновенном изменении ускорений на конечную величину носят название *мягких ударов*. Мягкие удары менее опасны для работы кулачковых механизмов, поэтому многие тихоходные кулачковые механизмы работают в условиях мягких ударов. Из рис. 711 также следует, что угол наклона β прямой km больше угла α наклона прямой an , т. е. при задании одних и тех же значений h подъема толкателя и φ_n — фазы подъема

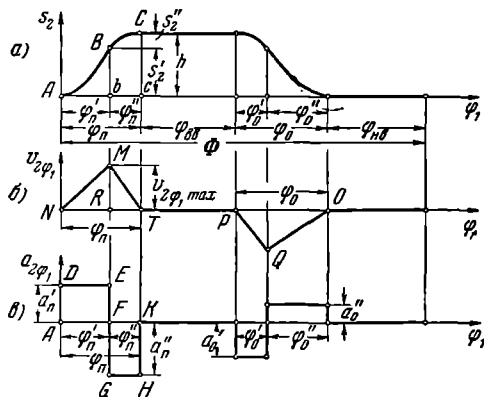


Рис. 712. Равноускоренный закон движения ведомого звена кулачкового механизма: а) диаграмма пути; б) диаграмма аналога скорости; в) диаграмма аналога ускорения.

аналог скоростей $v_{2\varphi_1}$ на участках подъема и опускания для закона, показанного на рис. 710, будет всегда больше, чем для закона, показанного на рис. 709. Из рассмотренных примеров законов движения следует, что при выборе того или иного закона необходимо знание аналогов скоростей и ускорений движения ведомого звена. Обычно при проектировании кулачковых механизмов задаются аналогами ускорений ведомого звена. По заданным аналогам ускорений и начальным условиям опре-

деляют аналогии скоростей и закон движения ведомого звена. Рассмотрим следующие законы изменения аналогов ускорений на фазе подъема:

а) равноускоренный, б) синусоидальный, в) косинусоидальный, г) линейно-убывающий, д) линейно-возрастающий, е) трапецидальный.

2°. Равноускоренный закон аналога ускорения $a_{2\varphi_1}$ ведомого звена 2 показан в виде диаграммы $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ на рис. 712, в для четырех фаз движения, соответствующих углам $\varphi_n, \varphi_{vv}, \varphi_0$ и φ_{nv} . Построение диаграмм $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ и $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 712, а и б) может быть сделано методами графического интегрирования, изложенными в § 35,3°. Чтобы исследовать все характеристики рассматриваемого закона движения, удобно рассмотреть его в аналитической форме. Рассмотрим фазу подъема, соответствующую углу φ_n (рис. 712, в). Угол φ_1 на этой фазе изменяется в пределах

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi'_n \quad (27.6)$$

и

$$\varphi'_n \leq \varphi_1 \leq \varphi_n \quad (27.7)$$

Зависимость для аналога ускорений $a_{2\varphi_1}$ (рис. 712, в) для первого предела (27.6) такая:

$$a_{2\varphi_1} = a'_n = \text{const} \quad (27.8)$$

и второго предела

$$a_{2\varphi_1} = -a''_n = \text{const}. \quad (27.9)$$

Интегрируя дважды выражение (27.8), зависимость для аналога ускорений $a_{2\varphi_1}$, изменяющегося в пределах $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi'_n$, получаем выражение для аналога скоростей $v_{2\varphi_1}$ и перемещения s_2 . Имеем:

$$v_{2\varphi_1} = \int a_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_1 = \int a'_n d\varphi_1 + C_1 = a'_n \varphi_1 + C_1 \quad (27.10)$$

и

$$s_2 = \int v_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_2 = \int (a'_n \varphi_1 + C_1) d\varphi_1 + C_2 = \frac{a'_n \varphi_1^2}{2} + C_1 \varphi_1 + C_2. \quad (27.11)$$

Начальными условиями для определения постоянных C_1 и C_2 интегрирования являются условия, в соответствии с которыми при $\varphi_1 = 0$ $v_{2\varphi_1} = 0$ и $s_2 = 0$. Отсюда следует, что $C_1 = C_2 = 0$ и равенства (27.10) и (27.11) имеют вид

$$v_{2\varphi_1} = a'_n \varphi_1 \quad (27.12)$$

и

$$s_2 = \frac{a'_n \varphi_1^2}{2}. \quad (27.13)$$

Из равенств (27.12) и (27.13) следует, что на интервале $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi'_n$ аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ изменяется по линейному закону (рис. 712, б), а перемещения s_2 — по закону параболы, имеющей вершину в точке А (рис. 712, а).

Аналогично можно показать, что на интервале $\varphi'_n \leq \varphi_1 \leq \varphi_n$ аналог скоростей $v_{2\varphi_1}$ изменяется по линейному закону, а перемещение s_2 — по закону параболы, имеющей вершину в точке С (рис. 712, а). Обе параболы сопрягаются в точке В. Отметим некоторые условия, которым должны удовлетворять зависимости $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ и $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$. Так как аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ в начале и конце фазы φ_1 равен нулю (рис. 712, б), то площади прямоугольников $ADEF$ и $FGHK$ (рис. 712, в) должны быть равны, т. е.

$$a'_n \varphi'_n = a''_n \varphi''_n \quad (27.14)$$

или

$$\frac{\varphi'_n}{\varphi''_n} = \frac{a''_n}{a'_n} = k_n. \quad (27.15)$$

Так как $\varphi'_n + \varphi''_n = \varphi_n$, то, учитывая равенство (27.15), получаем:

$$\varphi'_n = \varphi_n \frac{k_n}{1 + k_n}, \quad (27.16)$$

$$\varphi''_n = \varphi_n \frac{1}{1 + k_n}. \quad (27.17)$$

Перемещения s'_2 и s''_2 (рис. 712, а) звена 2 пропорциональны площадям треугольников NMR и RMT (рис. 712, б). Тогда, обозначая максимальное значение аналога скорости через $v_{2\varphi_1 \max}$, получаем:

$$s'_2 = \frac{v_{2\varphi_1 \max} \varphi'_n}{2}, \quad (27.18)$$

$$s''_2 = \frac{v_{2\varphi_1 \max} \varphi''_n}{2}. \quad (27.19)$$

Делим равенство (27.18) на равенство (27.19)

$$\frac{s'_2}{s''_2} = \frac{\varphi'_n}{\varphi''_n} = k_n. \quad (27.20)$$

Так как $s'_2 + s''_2 = h$, то из равенства (27.20) получаем:

$$s'_2 = \frac{k_n h}{1 + k_n}, \quad (27.21)$$

$$s''_2 = \frac{h}{1 + k_n}. \quad (27.22)$$

Из равенства (27.13) следует:

$$a'_n = \frac{2s'_2}{(\varphi'_n)^2}, \quad (27.23)$$

$$a''_n = \frac{2s''_2}{(\varphi''_n)^2}. \quad (27.24)$$

Подставляя в уравнения (27.23) и (27.24) значения для s'_2 , s''_2 и φ'_n , φ''_n из равенств (27.21), (27.22) и (27.16), (27.17), получаем:

$$a'_n = \frac{2h(1 + k_n)}{k_n^2 \varphi_n^2}, \quad (27.25)$$

$$a''_n = \frac{2h(1 + k_n)}{\varphi_n^2}. \quad (27.26)$$

Далее, пользуясь равенствами (27.25) и (27.16), имеем:

$$v_{2\varphi_1 \max} = a'_n \varphi'_n = \frac{2h(1 + k_n)}{k_n^2 \varphi_n^2} \varphi_n \frac{k_n}{1 + k_n} = \frac{2h}{\varphi_n}. \quad (27.27)$$

Из полученных равенств следует: если задан полный подъем h ведомого звена, фазовый угол φ_n и коэффициент k_n , то можно по формулам (27.16) и (27.17) определить углы φ'_n и φ''_n , по формуле (27.27) — максимальное значение аналога скорости $v_{2\varphi_1 \max}$ и по (27.25) и (27.26) — значения аналогов ускорения a'_n и a''_n .

Из равенства (27.27) следует, что максимальное значение аналога скоростей $v_{2\varphi_1 \max}$ не зависит от коэффициента k_n , т. е. от распределения фазового угла φ_n по участкам положительного a'_n и отрицательного a''_n ускорений.

Если коэффициент k_n принят равным $k=1$, то мы получаем симметричный закон движения, для которого имеем на интервалах $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_n/2$ и $\varphi_n/2 \leq \varphi_1 \leq \varphi_n$

$$a'_n = a''_n = \frac{4h}{\varphi_n^2}. \quad (27.28)$$

Принимая во внимание равенство (27.12), аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ для этого движения определяем так:

$$v_{2\varphi_1} = \frac{4h}{\varphi_n^2} \varphi_1, \quad (27.29)$$

а перемещение s_2 из равенства (27.13) равно

$$s_2 = \frac{2h}{\varphi_n^2} \varphi_1^2. \quad (27.30)$$

Из (рис. 712, в) следует, что при рассмотренном законе движения механизм испытывает мягкие удары. Для фазы опускания, соответствующей углу φ_0 (рис. 712, а), расчет всех параметров движения может быть сделан по уже выведенным формулам с заменой коэффициента k_n для фазы подъема коэффициентом k_0 для фазы опускания.

3°. Движение ведомого звена 2 происходит без жестких и мягких ударов, если кривая аналога ускорений $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ синусоидальная (рис. 713, в). Если коэффициент k_n выбран равным единице, то мы получаем симметричную синусоиду, для которой $a'_n = a''_n = a_n$ (рис. 713, в).

Зависимость для аналога ускорений $a_{2\varphi_1}$ следующая:

$$a_{2\varphi_1} = a_n \sin \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1. \quad (27.31)$$

Интегрируя в пределах $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_n$ дважды выражение (27.31) для аналога ускорений $a_{2\varphi_1}$, получаем выражения для аналога скоростей $v_{2\varphi_1}$ и перемещения s_2

$$\begin{aligned} v_{2\varphi_1} &= \int a_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_1 = \int a_n \sin \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1 d\varphi_1 + C_1 = \\ &= -a_n \frac{\varphi_n}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1 + C_1 \end{aligned} \quad (27.32)$$

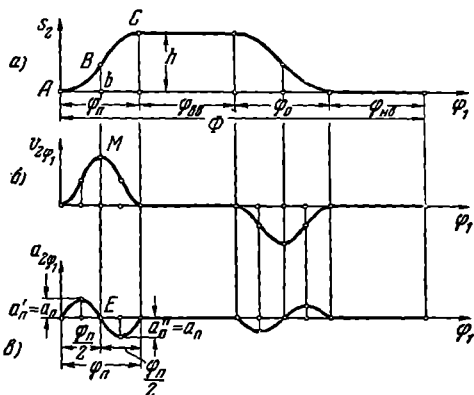


Рис. 713. Синусоидальный закон изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма: а) диаграмма пути; б) диаграмма аналога скорости; в) диаграмма аналога ускорения.

и

$$s_2 = \int v_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_2 = \int \left(-a \frac{\varphi_n}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1 + C_1 \right) d\varphi_1 + C_2 = \\ = -a_n \frac{\varphi_n^2}{4\pi^2} \sin \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1 + C_1 \varphi_1 + C_2. \quad (27.33)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий, в соответствии с которыми при $\varphi_1 = 0$ $v_{2\varphi_1} = 0$ и $s_2 = 0$. Из зависимости (27.32) получаем:

$$C_1 = a_n \frac{\varphi_n}{2\pi}.$$

Одновременно из (27.33) имеем:

$$C_2 = 0.$$

Подставляем полученные выражения для C_1 и C_2 в равенства (27.32) и (27.33)

$$v_{2\varphi_1} = a_n \frac{\varphi_n}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1 \right), \quad (27.34)$$

$$s_2 = a_n \frac{\varphi_n^2}{2\pi} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_n} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1 \right). \quad (27.35)$$

Амплитуда a_n аналога ускорений (рис. 713, в) определяется из равенства (27.35) на основании условия, по которому при $\varphi_1 = \varphi_n$ перемещение $s_2 = h$:

$$h = a_n \frac{\varphi_n^2}{2\pi}. \quad (27.36)$$

Отсюда следует:

$$a_n = \frac{2\pi}{\varphi_n^2} h. \quad (27.37)$$

Теперь зависимости (27.35), (27.34) и (27.31) окончательно принимают следующий вид:

$$s_2 = h \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_n} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1 \right), \quad (27.38)$$

$$v_{2\varphi_1} = h \frac{1}{\varphi_n} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1 \right), \quad (27.39)$$

$$a_{2\varphi_1} = h \frac{2\pi}{\varphi_n^2} \sin \frac{2\pi}{\varphi_n} \varphi_1. \quad (27.40)$$

Из равенств (27.39) и (27.40) следует, что аналог скоростей $v_{2\varphi_1}$ и аналог ускорения $a_{2\varphi_1}$ зависят не только от выбранного подъема h ведомого звена, но и фазового угла φ_n . Аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ обратно пропорционален углу φ_n , а аналог ускорения обратно пропорционален φ_n^2 .

Вывод расчетных зависимостей для фазы опускания, соответствующей углу φ_0 , получается аналогичным.

4°. Если зависимость аналога ускорений $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ косинусоидальная (рис. 714, в), то движение ведомого звена происходит с мягким ударом в начале и конце хода ведомого звена. Коэффициент k_n принимаем равным $k_n = 1$. Тогда $a'_n = a''_n = a_n$.

Зависимости для перемещения s_2 и аналога скорости $v_{2\varphi_1}$ получаются, если дважды проинтегрировать в пределах $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_n$ выражение для аналога ускорения, равное

$$a_{2\varphi_1} = a_n \cos \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1. \quad (27.41)$$

Имеем

$$v_{2\varphi_1} = \int a_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_1 = \int a_n \cos \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1 = a_n \frac{\varphi_n}{\pi} \sin \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1 + C_1 \quad (27.42)$$

и

$$\begin{aligned} s_2 &= \int v_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_2 = \int \left(a_n \frac{\varphi_n}{\pi} \sin \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1 + C_1 \right) d\varphi_1 + C_2 = \\ &= -a_n \frac{\varphi_n^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1 + C_1 \varphi_1 + C_2. \end{aligned} \quad (27.43)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий

$$\varphi_1 = 0, \quad v_{2\varphi_1} = 0$$

и

$$s_2 = 0.$$

Получаем $C_1 = 0$ и $C_2 =$

$$= a_n \frac{\varphi_n^2}{\pi^2}.$$

Зависимости (27.42) и (27.43) принимают тогда следующий вид:

$$v_{2\varphi_1} = a_n \frac{\varphi_n}{\pi} \sin \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1, \quad (27.44)$$

$$s_2 = a_n \frac{\varphi_n^2}{\pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1 \right). \quad (27.45)$$

Амплитуда a_n аналога ускорений (рис. 714, в) определяется из равенства (27.45) — из условия, по которому при $\varphi_1 = \varphi_n$ перемещение $s_2 = h$. Имеем:

$$h = a_n \frac{2\varphi_n^2}{\pi^2}.$$

Следовательно, a_n равно

$$a_n = \frac{\pi^2}{2\varphi_n^2} h. \quad (27.46)$$

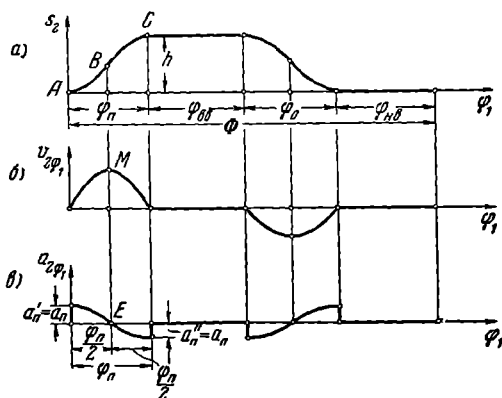


Рис. 714. Косинусоидальный закон изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма: а) диаграмма пути; б) диаграмма аналога скорости; в) диаграмма аналога ускорения.

Тогда зависимости (27.45), (27.44) и (27.41) принимают следующий окончательный вид:

$$s_2 = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1 \right), \quad (27.47)$$

$$v_{2\varphi_1} = \frac{h}{2} \frac{\pi}{\varphi_n} \sin \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1, \quad (27.48)$$

$$a_{2\varphi_1} = \frac{h}{2} \frac{\pi^2}{\varphi_n^2} \cos \frac{\pi}{\varphi_n} \varphi_1. \quad (27.49)$$

Вывод расчетных зависимостей для фазы опускания, соответствующих углу φ_0 , получится аналогичным.

5°. На рис. 715, в показан линейно-убывающий закон аналога ускорений $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$. При этом законе движение ведомого звена происходит с мягким ударом в начале и конце хода ведомого звена.

Если принять коэффициент $k_n = 1$, то $a'_n = a''_n = a_n$.

Зависимости для перемещения s_2 и аналога скоростей $v_{2\varphi_1}$ получаются, если дважды проинтегрировать в пределах $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_n$ выражение для аналога ускорений $a_{2\varphi_1}$, равное

$$a_{2\varphi_1} = a_n \left(1 - 2 \frac{\varphi_1}{\varphi_n} \right). \quad (27.50)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} v_{2\varphi_1} &= \int a_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_1 = \int a_n \left(1 - 2 \frac{\varphi_1}{\varphi_n} \right) d\varphi_1 + C_1 = \\ &= a_n \varphi_1 - \frac{a_n \varphi_1^2}{\varphi_n} + C_1 \end{aligned} \quad (27.51)$$

и

$$\begin{aligned} s_2 &= \int v_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_2 = \int \left(a_n \varphi_1 - \frac{a_n \varphi_1^2}{\varphi_n} + C_1 \right) d\varphi_1 + C_2 = \\ &= \frac{a_n \varphi_1^2}{2} - \frac{a_n \varphi_1^3}{3\varphi_n} + C_1 \varphi_1 + C_2. \end{aligned} \quad (27.52)$$

Из начальных условий $\varphi_1 = 0$ $v_{2\varphi_1} = 0$ и $s_2 = 0$, и поэтому

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Зависимости (27.51) и (27.52) принимают тогда следующий вид:

$$v_{2\varphi_1} = a_n \varphi_1 \left(1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_n} \right) \quad (27.53)$$

и

$$s_2 = a_n \varphi_1^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{\varphi_1}{\varphi_n} \right). \quad (27.54)$$

Полученные зависимости показывают, что кривая аналога скоростей $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ (рис. 715, б) представляет собой параболу с вершиной в точке М. Кривая перемещения $s_2 = s_2(\varphi_1)$ представляет собой две параболы третьей степени, сопрягающиеся в точке В.

Величина a_n аналога ускорений (рис. 715, в) определится из условия, что при $\varphi_1 = \varphi_n$ перемещение $s_2 = h$. Тогда из равенства (27.54)

имеем:

$$h = a_n \varphi_n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{\varphi_n}{\varphi_n} \right) = \frac{a_n \varphi_n^3}{6},$$

откуда

$$a_n = \frac{6h}{\varphi_n^3}.$$

Подставляя полученное значение для величины a_n в равенства (27.54), (27.53) и (27.50), получаем:

$$s_2 = h \frac{\varphi_1^3}{\varphi_n^3} \left(3 - 2 \frac{\varphi_1}{\varphi_n} \right), \quad (27.55)$$

$$v_{2\varphi_1} = 6h \frac{\varphi_1}{\varphi_n^3} \left(1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_n} \right) \quad (27.56)$$

и

$$a_{2\varphi_1} = 6h \frac{1}{\varphi_n^3} \left(1 - 2 \frac{\varphi_1}{\varphi_n} \right). \quad (27.57)$$

Вывод расчетных зависимостей для фазы опускания, соответствующей углу φ_0 (рис. 715, а), является аналогичным.

6°. На рис. 716, в показан линейно-возрастающий закон аналога ускорений $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$. При этом законе движение ведомого звена происходит с мягким ударом в середине хода. При этом ускорение $a_{2\varphi_1}$ мгновенно меняет свой знак. Примем коэффициент $k_n = 1$. Тогда $a_n = a_n'' = a_n$.

Зависимости для перемещения s_2 и аналога скорости $v_{2\varphi_2}$ получаются, если дважды проинтегрировать в пределах $0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\varphi_n}{2}$ выражение для аналога ускорения

$$a_{2\varphi_1} = 2a_n \frac{\varphi_1}{\varphi_n}. \quad (27.58)$$

Имеем:

$$v_{2\varphi_1} = \int a_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_1 = \int 2a_n \frac{\varphi_1}{\varphi_n} d\varphi_1 + C_1 = a_n \frac{\varphi_1^2}{\varphi_n} + C_1 \quad (27.59)$$

и

$$s_2 = \int v_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_2 = \int \left(a_n \frac{\varphi_1^2}{\varphi_n} + C_1 \right) d\varphi_1 = \frac{1}{3} a_n \frac{\varphi_1^3}{\varphi_n} + C_1 \varphi_1 + C_2. \quad (27.60)$$

Из начальных условий $\varphi_1 = 0$, $v_{2\varphi_1} = 0$ и $s_2 = 0$ получаем:

$$C_1 = C_2 = 0.$$

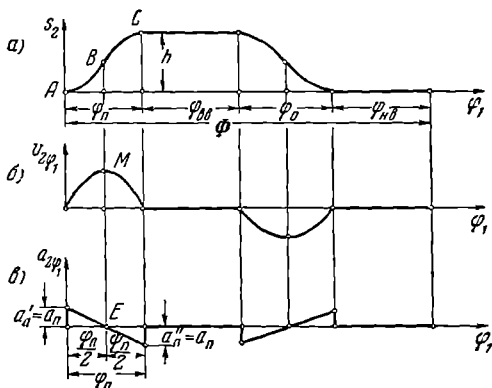


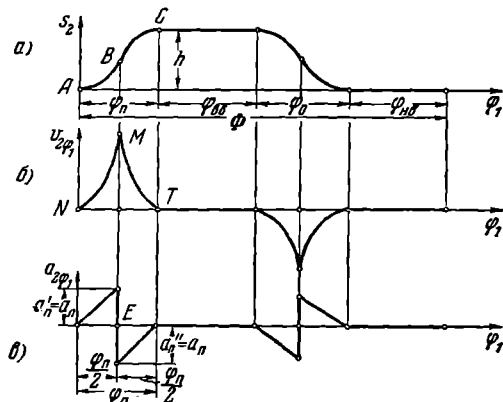
Рис. 715. Линейно-убывающий закон изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма: а) диаграмма пути; б) диаграмма аналога скорости; в) диаграмма аналога ускорения.

Зависимости (27.59) и (27.60) принимают тогда следующий вид:

$$v_{2\varphi_1} = a_n \frac{\varphi_1^3}{\varphi_n^3}, \quad (27.61)$$

$$s_3 = \frac{1}{3} a_n \frac{\varphi_1^3}{\varphi_n^3}. \quad (27.62)$$

Выведенные зависимости показывают, что кривая аналога скоростей $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ (рис. 716, б) на интервале $0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\varphi_n}{2}$ представляет собой параболу NM с вершиной в точке N . Кривая перемещений $s_3 = s_3(\varphi_1)$ (рис. 716, а) представляет собой параболу AB третьей степени.



Величина a_n аналога ускорений (рис. 716, в) определяется из условия, что при $\varphi_1 = \varphi_n/2$ перемещение $s_3 = h/2$. Тогда из равенства (27.62) получаем:

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{3} a_n \left(\frac{\varphi_n}{2} \right)^3 = \frac{1}{24} a_n \varphi_n^3$$

откуда a_n равно

$$a_n = 12h \frac{1}{\varphi_n^3}. \quad (27.63)$$

Рис. 716. Линейно-возрастающий закон изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма: а) диаграмма пути; б) диаграмма аналога скорости; в) диаграмма аналога ускорения.

Подставляя полученное значение (27.63) для вели-

чины a_n в равенства (27.62), (27.61) и (27.58), получаем:

$$s_3 = 4h \frac{1}{\varphi_n^3} \varphi_1^3, \quad (27.64)$$

$$v_{2\varphi_1} = 12h \frac{1}{\varphi_n^3} \varphi_1^2, \quad (27.65)$$

$$a_{2\varphi_1} = 24h \frac{1}{\varphi_n^3} \varphi_1. \quad (27.66)$$

Вследствие линейности закона $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ (рис. 716, в) кривая аналога скорости $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ на интервале $\varphi_n/2 \leq \varphi_1 \leq \varphi_n$ (рис. 716, б) является параболой TM , симметричной параболе NM с вершиной в точке N . Точно так же кривая $s_3 = s_3(\varphi_2)$ на том же интервале (рис. 716, а) представляет собой параболу BC третьей степени, сопрягающуюся с параболой AB в точке B .

7°. Как мы уже указали выше, возможны и другие законы движения ведомого звена кулачкового механизма. Определение их кинематических характеристик может быть сделано теми же методами, какими мы пользовались для разобранных примеров. Отметим только, что в некоторых случаях применяются законы движения, являющиеся

комбинацией простейших законов. В качестве примера приведем трапецеидальный закон изменения аналога ускорений $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$, показанный на рис. 717, в. На участке ab угла φ_n ускорение $a_{2\varphi_1}$ изменяется, линейно возрастая; на участке bc оно постоянно; на участке cde оно линейно убывает; на участке ef вновь постоянно и на участке fg изменяется, линейно возрастая. Соответственно кривая $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ (рис. 717, б) на участках $a'b'$, $c'd'e'$ и $f'g'$ состоит из парабол, а на участках $b'c'$ и $e'f'$ прямолинейна. Кривая $s_2 = s_2(\varphi_1)$ на участках $a''b''$, $c''d''e''$ и $f''g''$ состоит из парабол третьей степени, а на участках $b''c''$ и $e''f''$ — из парабол второй степени. При трапецеидальном законе изменения аналога ускорения жесткие и мягкие удары отсутствуют.

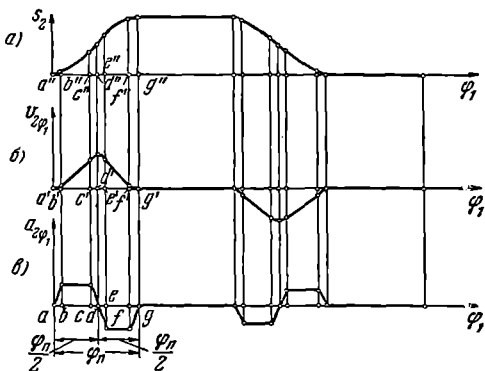


Рис. 717. Трапецеидальный закон изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма: а) диаграмма пути; б) диаграмма аналога скорости; в) диаграмма аналога ускорения.

Сопоставление различных законов движения можно вести, сравнивая максимальные значения аналогов скоростей и аналогов ускорений. В нижеследующей таблице приводятся значения максимальных скоростей $v_{2\varphi_1 \max}$ и ускорений $a_{2\varphi_1 \max}$ для основных законов движения симметричного вида в функции основных параметров: высоты подъема h и фазы подъема φ_n и в относительных единицах к значениям $\frac{h}{\varphi_n}$ и $\frac{h}{\varphi_n^2}$.

Закон движения	Максимальная скорость ведомого звена $v_{2\varphi_1 \max}$		Максимальное ускорение ведомого звена $a_{2\varphi_1 \max}$	
	в функции основных параметров	в относительных единицах	в функции основных параметров	в относительных единицах
Равноускоренный	$\frac{2h}{\varphi_n}$	2,00	$\frac{4h}{\varphi_n^2}$	4,00
Синусоидальный	$\frac{2h}{\varphi_n}$	2,00	$\frac{2\pi h}{\varphi_n^2}$	6,28
Косинусоидальный	$\frac{\pi h}{2\varphi_n}$	1,57	$\frac{\pi^2 h}{2\varphi_n^2}$	4,93
Линейно-убывающий	$\frac{1,5h}{\varphi_n}$	1,50	$\frac{6h}{\varphi_n^2}$	6,00
Линейно-возрастающий	$\frac{3h}{\varphi_n}$	3,00	$\frac{12h}{\varphi_n^2}$	12,00

Из таблицы следует, что наибольшее значение ускорения $a_{2\varphi, \max}$ при заданных h и φ_n мы получаем для линейно-возрастающего закона аналога ускорений и наименьшее значение для равноускоренного.

§ 129. Определение основных размеров кулачковых механизмов

1°. Основные размеры кулачковых механизмов определяются из кинематических, динамических и конструктивных условий. Кинематические условия определяются тем, что механизм должен воспроизводить заданный закон движения. Динамические условия весьма многообразны, но основные условия заключаются в том, чтобы механизм имел достаточно высокий коэффициент полезного действия и чтобы не происходило заклинивания механизма. Конструктивные требования определяются из условий

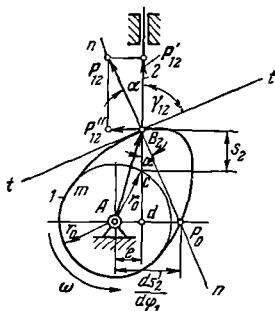


Рис. 718. К силовому анализу кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

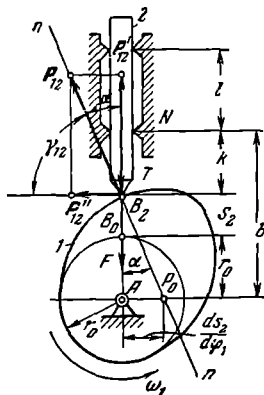


Рис. 719. К исследованию вопроса об угле давления в кулачковом механизме.

достаточной прочности отдельных деталей механизма, сопротивляемости износу соприкасающихся элементов кинематических пар и др. Наконец, проектировать механизм желательно так, чтобы он обладал наименьшими габаритами.

2°. Чтобы выявить влияние отдельных требований к выбору размеров кулачковых механизмов, рассмотрим отдельные их виды. На рис. 718 показан кулачковый механизм с толкателем 2, оканчивающимся острием B_2 . Если пренебречь трением в высшей паре, то сила P_{12} , действующая на толкатель 2 со стороны кулачка 1, будет направлена по нормали $n-n$ к профилю кулачка 1. Как это было показано в § 108, 1°, угол α , образованный нормалью $n-n$ с направлением движения толкателя 2, является углом давления, а угол γ_{12} , равный $\gamma_{12} = 90^\circ - \alpha$, является углом передачи. Если рассмотреть равновесие толкателя 2 (рис. 719) и привести все силы к точке B_2 ,

то толкатель будет находиться под действием движущей силы P'_{12} , приведенной силы сопротивления T , учитывающей полезные сопротивления, силу пружины, силы инерции и приведенной силы трения F . Из уравнения равновесия сил, действующих на толкатель 2, имеем:

$$P_{12} \cos \alpha - T - F = 0.$$

Приведенная сила T на основании равенства (14.13) (см. § 61,4°) равна

$$T = P_{12} \cos \alpha - f P_{12} \sin \alpha \left(1 + \frac{2k}{l} \right),$$

где f — коэффициент трения в направляющих, l — длина направляющих и k — вылет толкателя. Тогда из уравнения равновесия сил получаем, что сила трения равна

$$F = P_{12} \cos \alpha - T = f P_{12} \sin \alpha \left(1 + \frac{2k}{l} \right). \quad (27.67)$$

Как это было показано в § 61,4°, выражение (27.67) для силы трения F является приближенным. Мгновенный коэффициент полезного действия η механизма без учета трения в высшей паре и подшипнике вала кулачка можно определить по формуле

$$\eta = 1 - \frac{N_{\tau}}{N_d} = 1 - \frac{F v_2}{P_{12} v_2 \cos \alpha} = 1 - \frac{F}{P_{12} \cos \alpha},$$

где N_{τ} — мощность, затрачиваемая на преодоление сил трения, и N_d — мощность движущих сил. Тогда, учитывая формулу (27.67), получаем:

$$\eta = 1 - \frac{f P_{12} \sin \alpha \left(1 + 2 \frac{k}{l} \right)}{P_{12} \cos \alpha} = 1 - f \operatorname{tg} \alpha \left(1 + 2 \frac{k}{l} \right). \quad (27.68)$$

Величина вылета k толкателя равна (рис. 719)

$$k = b - (r_0 + s_2),$$

где b — постоянное расстояние от точки N опоры толкателя 2 до оси A вращения кулачка, r_0 — наименьший радиус-вектор кулачка 1 и s_2 — перемещение толкателя 2. Имеем:

$$\eta = 1 - f \operatorname{tg} \alpha \left[1 + 2 \frac{b - (r_0 + s_2)}{l} \right].$$

Из рис. 719 получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AP_0}{r_0 + s_2} = \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1}}{r_0 + s_2}, \quad (27.69)$$

так как согласно равенству (5.15) (см. § 25,4°)

$$AP_0 = \frac{v_2}{\omega_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1}.$$

Из уравнения (27.69) получаем:

$$r_0 + s_2 = \frac{ds_2}{d\varphi_1} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Тогда коэффициент полезного действия будет равен

$$\eta = 1 - f \left(\frac{l+2b}{l} \operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{l} \frac{ds_2}{d\varphi_1} \right). \quad (27.70)$$

Из равенства (27.70) следует, что коэффициент полезного действия уменьшается с увеличением угла давления α . Кулачковый механизм может заклинить, если сила $P'_{12} = P_{12} \cos \alpha$ (рис. 719) будет $P'_{12} \leq F$. Заклинивание произойдет, если коэффициент полезного действия η будет равен нулю. В таком случае из равенства (27.70) получим:

$$1 - f \left[\frac{l+2b}{l} \operatorname{tg} \alpha_k - \frac{2}{l} \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1} \right)_k \right] = 0.$$

В этом равенстве α_k обозначен критический угол, при котором возникает заклинивание механизма, и $(ds_2/d\varphi_1)_k$ — соответствующий этому углу аналог скорости. Тогда для угла критического давления α_k будем иметь:

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{l}{f(l+2b)} + \frac{2 \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1} \right)_k}{l+2b} = \frac{l + 2f \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1} \right)_k}{f(l+2b)}. \quad (27.71)$$

Из равенства (27.71) следует, что критический угол давления α_k уменьшается с увеличением расстояния b , т. е. с увеличением габаритов механизма. Приближенно можно считать, что значение $(ds_2/d\varphi_1)_k$ аналога скоростей, соответствующее критическому углу α_k , равно максимальному значению этого аналога

$$\left(\frac{ds_2}{d\varphi_1} \right)_k \approx \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1} \right)_{\max}.$$

Тогда, если заданы размеры механизма и закон движения толкателя, можно определить значение критического угла давления α_k . Необходимо иметь в виду, что заклинивание механизма обычно имеет место только на фазе подъема, соответствующей преодолению полезных сопротивлений, силы инерции толкателя и силы пружины, т. е. когда преодолевается некоторая приведенная сила сопротивления T (рис. 719). На фазе опускания обычно явление заклинивания не возникает.

Для устранения возможности заклинивания механизма при проектировании ставят условие, чтобы угол давления α во всех положениях механизма был меньше критического угла α_k . Если максимально допустимый угол давления обозначить через $\alpha_{\max}$, то этот угол должен всегда удовлетворять условию

$$\alpha_{\max} < \alpha_k. \quad (27.72)$$

В практике угол давления $\alpha_{\max}$ для кулачковых механизмов с поступательно движущимся толкателем принимается равным

$$\alpha_{\max} = 30^\circ \div 40^\circ.$$

Для кулачковых механизмов с вращающимся коромыслом, в которых заклинивание является менее возможным, максимальный угол давления $\alpha_{\max}$ принимается равным

$$\alpha_{\max} = 45^\circ \div 50^\circ.$$

Как это было показано в § 108, при проектировании кулачковых механизмов можно применять в расчетах не угол давления α , а угол передачи γ_{12} (рис. 718). Очевидно, что этот угол должен удовлетворять условиям

$$(\gamma_{12})_{\min} > \gamma_k, \quad \text{где} \quad \gamma_k = 90^\circ - \alpha_k.$$

3°. Угол давления α может быть выражен через основные параметры кулачкового механизма. Для этого рассмотрим кулачковый механизм (рис. 718) с поступательно движущимся толкателем 2. Проводим в точке B_2 нормаль $n-n$ и находим мгновенный центр вращения P_0 в относительном движении звеньев 1 и 2.

Из треугольника dB_2P_0 имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(dP_0)}{(dB_2)} = \frac{(AP_0) - (Ad)}{(dc) + (cB_2)}. \quad (27.73)$$

Согласно равенству (5.15) $AP_0 = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = v_{2\varphi_1}$, $Ad = e$, где e — кратчайшее расстояние от оси A кулачка до оси толкателя, $dc = \sqrt{r_0^2 - e^2}$, где r_0 — минимальный радиус-вектор кулачка, и $cB_2 = s_2$, где s_2 — перемещение толкателя, заданное его законом движения $s_2 = s_2(\varphi_1)$.

Подставляя указанные параметры в равенство (27.73), получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1} \pm e}{\sqrt{r_0^2 - e^2} + s_2}. \quad (27.74)$$

Знак плюс у кратчайшего расстояния e соответствует левому от оси A его расположению, знак минус — правому (рис. 718) при условии, что толкатель движется вверх, а кулачок вращается против часовой стрелки.

Из равенства (27.74) следует, что при выбранном законе движения $s_2 = s_2(\varphi_1)$ и размере e габариты кулачка определяются радиусом r_0 окружности минимального радиуса-вектора кулачка. Увеличивая r_0 , мы получаем меньшие углы давления α , но большие габариты кулачкового механизма. Обратно, если уменьшить r_0 , то возрастают углы давления α и уменьшается коэффициент полезного действия механизма.

Если в механизме (рис. 719) ось движения толкателя проходит через ось вращения кулачка и $e=0$, то равенство (27.74) имеет вид:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1}}{r_0 + s_2}. \quad (27.75)$$

4°. Величины углов давления α для всего цикла движения кулачкового механизма могут быть определены графически с помощью следующего построения (рис. 720). Построим кривую $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(s_2)$ зависимости аналога скорости $v_{2\varphi_1}$ от перемещения s_2 . Перемещения s_2 будем откладывать от точки B_0 , соответствующей нижнему начальному положению толкателя в направлении его движения, а аналоги скоростей $v_{2\varphi_1} = ds_2/d\varphi_1$ — в перпендикулярном направлении. Тогда если соединить какую-либо точку b построенной кривой с осью вращения A кулачка, то из построения следует, что направление Ab образует с осью B_0s_2 угол давления α . В самом деле, из рис. 720 имеем:

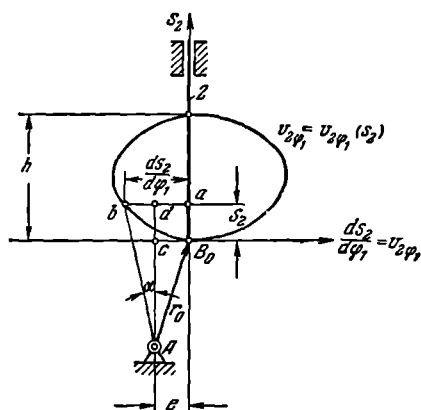


Рис. 720. Определение угла давления по диаграмме аналога скорости в функции пути толкателя.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{bd}{Ad} = \frac{ab - ad}{Ac + cd} = \\ &= \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1} - e}{\sqrt{r_0^2 - e^2} + s_2}, \quad (27.76) \end{aligned}$$

и условие (27.74) удовлетворяется.

Решим обратную задачу об определении величины наименьшего радиуса-вектора r_0 кулачка, если задан закон движения $s_2 = s_2(\varphi_1)$ толкателя 2, смещение e и максимально допустимый угол давления $\alpha_{\max}$. Для этого (рис. 721) строим кривую $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(s_2)$ как для фазы подъема, так и для фазы опускания. Далее, проводим к кривой $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(s_2)$ касательные $t_1 - t_1$ и $t_2 - t_2$ под углами $\alpha_{\max}$ к оси s_2 . Точка A' пересечения этих касательных определит положение оси вращения кулачка, имеющего наименьший радиус-вектор $r_{0\min}$. При выборе оси вращения в точке A' получается вполне определенная величина смещения e' . Если величина смещения e задана, то, проведя прямую $q - q$ на расстоянии e от оси B_0s_2 , найдем точку A'' пересечения этой прямой с касательной $t_1 - t_1$. Если точку A'' выбрать за ось вращения кулачка, то наименьший радиус-вектор кулачка будет равен r''_0 . Если смещение $e=0$, то мы получаем кулачковый механизм с центром вращения в точке A^0 и наименьший радиус-вектор кулачка равен r_0 . При выборе оси вращения ку-

Рис. 722. Кулачковый механизм с коромыслом.

в данном случае имеет следующий вид:

$$l_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{AP_0}{EP_0}. \quad (27.77)$$

Соединим точку P_0 с точкой B и через точку A проведем прямую $q-q$, параллельную нормали $n-n$. Тогда из подобных треугольников EP_0B и EAC получим:

$$l_{21} = \frac{AP_0}{EP_0} = \frac{BC}{BE},$$

откуда будем иметь:

$$BC = l_{12}l_2 = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} l_2, \quad (27.78)$$

где l_2 — длина коромысла 2. Опустим из точки A перпендикуляр AK на направление EB . Тогда угол CAK будет равен углу давления α . Величина угла α определится из равенства

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KC}{KA} = \frac{BC - BK}{KA}. \quad (27.79)$$

Отрезок BK равен

$$BK = l_2 - l_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_0), \quad (27.80)$$

где l_3 — расстояние между точками A и E , φ_0 — угол, образованный коромыслом 2 с линией AE в начальном положении, и φ_2 — текущий угол поворота, заданный законом движения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ коромысла 2.

Отрезок KA равен

$$KA = l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_0). \quad (27.81)$$

Подставляя значения величин отрезков (BC) , (BK) и (KA) из равенств (27.78), (27.80) и (27.81) в равенство (27.79), получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm l_{21}l_2 - [l_2 - l_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_0)]}{l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_0)}. \quad (27.82)$$

Знаки плюс и минус у передаточного отношения l_{21} поставлены потому, что угловая скорость ω_2 коромысла 2 имеет различные направления на фазе подъема и фазе опускания. В равенство (27.82) не входит минимальный радиус-вектор r_0 кулачка (рис. 722). Для его определения можно воспользоваться очевидным условием

$$r_0 = \sqrt{l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3 \cos \varphi_0}. \quad (27.83)$$

Равенство (27.82) можно представить еще в следующей форме:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\pm l_{21} - 1)}{\sin(\varphi_2 + \varphi_0)} \frac{l_2}{l_3} + \operatorname{ctg}(\varphi_2 + \varphi_0). \quad (27.84)$$

Из равенства (27.84) следует: если задан закон движения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ коромысла 2, начальный угол φ_0 и длина коромысла l_2 , то при уве-

личении расстояния l_3 угол давления α уменьшается, но габариты механизма увеличиваются.

6°. Рассмотрим теперь вопрос о том, как определить положение оси A кулачка 1, если задан закон движения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ коромысла 2, его длина l_2 и максимально допустимый угол давления $\alpha_{\max}$. Для этого по заданному закону движения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ производим разметку положений точки B коромысла 2 (рис. 723). Пусть это точки B_1, B_3, B_5 . Разметку производим как для фазы подъема, так и для фазы опускания. Далее, на лучах EB_2, EB_3, EB_4 , от точек B_2, B_3, B_4 , откладываем отрезки $(B_2C_2), (B_3C_3), \dots$, равные согласно равенству (27.78)

$$(B_2C_2) = \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)_2 l_2, \quad (B_3C_3) = \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)_3 l_3, \dots,$$

где $(d\varphi_2/d\varphi_1)_2, (d\varphi_2/d\varphi_1)_3, \dots$ — соответствующие передаточные отношения l_{21} в положениях 2, 3. Отрезки $(B_2C_2), (B_3C_3)$, для фазы подъема откладываем от точек $B_2, B_3, B_4, \dots$ вправо, а отрезки $B_6C_6, B_7C_7, \dots$, соответствующие фазе опускания, откладываем влево от точек $B_6, B_7, \dots$

Если, далее, например, через точку C_4 провести прямую $q_4 - q_4$ под углом $90^\circ - \alpha_{\max}$ к направлению EB_4 , где $\alpha_{\max}$ — выбранный максимальный угол давления, то прямая $q_4 - q_4$ является геометрическим местом возможных положений оси A кулачка, что видно из рис. 722. В самом деле, если, например, выбрать ось кулачка в положении A_6 , то в положении 4 угол давления α будет равен $\alpha_{\max}$. Если ось кулачка выбрать левее прямой $q_4 - q_4$, то угол α будет больше $\alpha_{\max}$. Если ось кулачка выбрать правее прямой $q_4 - q_4$, то угол давления α будет меньше $\alpha_{\max}$. Следовательно, областью возможных положений оси кулачка является область, лежащая правее прямой $q_4 - q_4$. Наоборот, если через точку C_6 провести прямую $q_6 - q_6$, то областью возможных положений оси A кулачка окажется область, лежащая влево от прямой $q_6 - q_6$. Если для всех точек $C_2, C_3, C_4, \dots$ построить прямые $q_2 - q_2, q_3 - q_3, q_4 - q_4, \dots$, образующие с лучами $EC_2, EC_3, EC_4, \dots$ углы $90^\circ - \alpha_{\max}$, то можно найти некоторую область, заштрихованную на рис. 723, в пределах которой можно располагать ось A кулачка. Из рис. 723 видно, что механизм будет обладать наименьшими

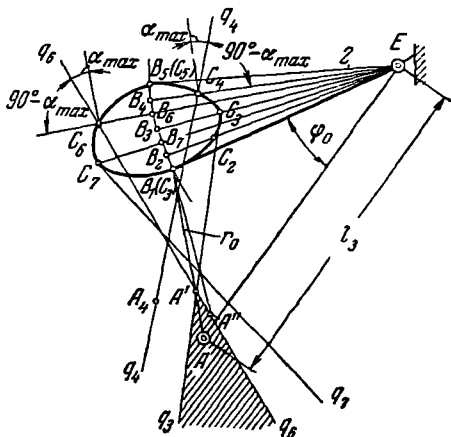


Рис. 723. К определению минимального радиуса профиля кулачка с коромыслом.

габаритами, если выбрать ось вращения кулачка в точке A' . Если поставить условие, чтобы ось кулачка лежала на прямой B_2B_1 , соединяющей крайние положения точки B коромысла 2, то ось кулачка может быть выбрана в точке A'' .

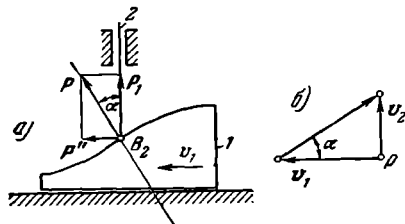


Рис. 724. Кулачковый механизм с поступательно движущимися кулачком и толкателем; а) схема механизма; б) план скоростей.

Если выбрана точка A (рис. 723), то, соединив точку A с точками B_1 и E , определим начальный угол φ_0 и минимальный радиус-вектор $r_0 = AB_1$ кулачка. Величина r_0 определится из формулы (27.83).

7°. Для кулачкового механизма с поступательно движущимся кулачком 1 (рис. 724, а) можно также установить связь между углом давления α и параметрами кулачка

ка 1. Для этого строим план скоростей механизма (рис. 724, б). Из плана скоростей получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{ds_2}{ds_1}, \quad (27.85)$$

где s_2 и s_1 — перемещения звеньев 1 и 2, заданные зависимостью $s_2 = s_2(s_1)$.

Следовательно, если угол давления $\alpha_{\max}$ задан, то в любом положении механизма должно удовлетворяться условие

$$\frac{ds_2}{ds_1} < \operatorname{tg} \alpha_{\max}, \quad (27.86)$$

и тогда

$$\int_0^h ds_2 < \operatorname{tg} \alpha_{\max} \int_0^s ds_1, \quad (27.87)$$

где h — подъем толкателя 2 на фазе подъема, а s — перемещение кулачка 1 на той же фазе. Следовательно, для кулачковых механизмов с поступательно движущимся кулачком необходимо, чтобы удовлетворялось условие

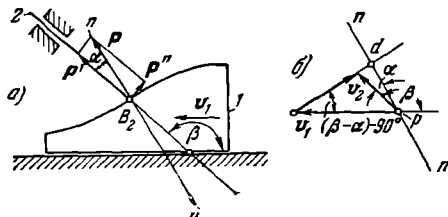


Рис. 725. Кулачковый механизм с поступательно движущимися кулачком и толкателем; а) схема механизма; б) план скоростей.

$$\frac{h}{s} < \operatorname{tg} \alpha_{\max}. \quad (27.88)$$

Из неравенства (27.88) следует, что для этого вида кулачковых механизмов размеры самого кулачка функционально не связаны с углом давления.

Если направление движения толкателя 2 (рис. 725, а) образует некоторый угол β с направлением движения кулачка, то, построив план скоростей (рис. 725, б) механизма, получим:

$$v_2 \cos \alpha = v_1 \{ \sin - [90^\circ - (\beta - \alpha)] \} = (pd), \quad (27.89)$$

где (pd) — отрезок в направлении нормали $n - n$. Из уравнения (27.89) получаем:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{ds_2}{ds_1} = \cos \beta + \operatorname{tg} \alpha \sin \beta. \quad (27.90)$$

Следовательно, тангенс угла давления α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{ds_2}{ds_1} - \cos \beta}{\sin \beta}. \quad (27.91)$$

Из формулы (27.91) следует: если угол давления $\alpha_{\max}$ задан, то должно удовлетворяться условие

$$\frac{h}{s_n} < (\cos \beta + \operatorname{tg} \alpha_{\max} \sin \beta), \quad (27.92)$$

где h — подъем толкателя 2 на фазе подъема, а s_n — путь кулачка 1 на той же фазе. Если угол $\beta = 90^\circ$, то мы получаем случай, показанный на рис. 724, и неравенство (27.92) переходит в неравенство (27.88).

8°. Рассмотрим некоторые дополнительные условия, необходимые для проектирования кулачковых механизмов, у которых элементом ведомого звена является прямая (рис. 726). Пусть прямая $\alpha - \alpha$ образует с направлением движения звена 2 постоянный угол передачи $\gamma_{12} = 90^\circ$. Для кулачковых механизмов данного вида должно еще удовлетворяться дополнительное условие, чтобы профиль кулачка был всегда выпуклым, так как профиль есть огибающая кривой к положениям прямой $\alpha - \alpha$, являющейся огибаемой. Для этого, как это будет показано ниже, необходимо, чтобы значения $d_1, d_2, d_3, \dots$ величины d , представляющей собой сумму наименьшего радиуса r_0 кулачка и перемещения s_2 звена 2, т. е. $d_1 = r_0 + s'_2$, $d_2 = r_0 + s''_2$, $d_3 = r_0 + s'''_2, \dots$ были в каждом положении больше второй производной величины s_2 по углу поворота φ_1 , взятой со знаком минус, а это значит больше аналога ускорений $a_{2\varphi_1} = d^2 s_2 / d\varphi_1^2$, т. е.

$$r_0 + s'_2 > -a'_{2\varphi_1}, \quad r_0 + s''_2 > -a''_{2\varphi_1},$$

где s'_2 и s''_2 — текущие значения функции перемещения $s_2 = s_2(\varphi_1)$.

Это можно установить из следующих соображений. Пусть центр кривизны соприкасающегося участка профиля в рассматриваемом положении находится в точке B (рис. 726). Строим заменяющий механизм $ABCD$ и при точке $B(\pi)$ строим план ускорений. Отрезок (πb_2)

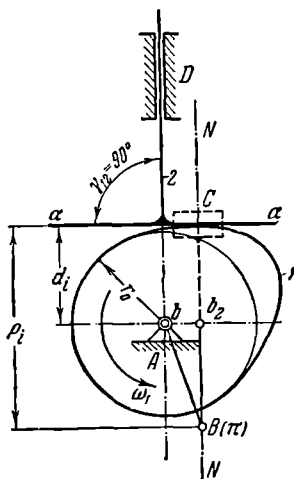


Рис. 726. Кулачковый механизм с поступательно движущимся плоским толкателем.

представляет собой аналог $(a_{2\varphi_1})_i$ ускорения a_2 звена 2 в рассматриваемом положении i механизма, т. е.

$$(a_{2\varphi_1})_i = (\pi b_2)_i = \left(\frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2} \right)_i. \quad (27.93)$$

Таким образом, радиус кривизны ρ_i профиля кулачка I в точке соприкосновения C равен

$$\rho_i = d_i + (\pi b_2)_i = r_0 + s_{2i} + (a_{2\varphi_1})_i, \quad (27.94)$$

где s_{2i} принимает последовательно значения s_2', s_2'', s_2''' . Кулачок I будет выпуклым, если центр кривизны его профиля в каждом положении будет удовлетворять условию

$$\rho > 0 \quad (27.95)$$

или

$$r_0 + s_{2i} + (a_{2\varphi_1})_i > 0, \quad (27.96)$$

откуда получаем:

$$r_0 + s_{2i} > -(a_{2\varphi_1})_i. \quad (27.97)$$

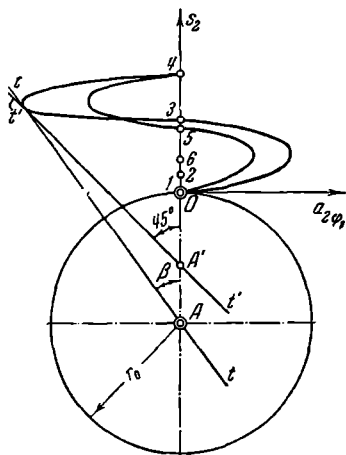


Рис. 727. К определению минимального радиуса профиля кулачка с поступательно движущимся плоским толкателем.

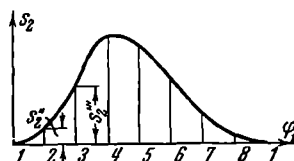


Рис. 728. Диаграмма пути плоского толкателя в функции угла поворота кулачка.

Разделив правую и левую части неравенства (27.97) на величину $r_0 + s_{2i}$, получим:

$$\frac{-(a_{2\varphi_1})_i}{r_0 + s_{2i}} < 1 \quad (27.98)$$

или

$$\frac{-(a_{2\varphi_1})_i}{r_0 + s_{2i}} < \operatorname{tg} 45^\circ. \quad (27.99)$$

Условие (27.99) позволяет провести следующее графическое построение (рис. 727) для удовлетворения условия выпуклости профиля кулачка.

По заданной диаграмме $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 728) определяем значения $a_{2\varphi_1}$ и строим диаграмму $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(s_2)$ (рис. 727). Для этого производим разметку перемещений звена 2 по оси Os_2 и откладываем на

рается по заданному подъему h толкателя и углу давления $\alpha_{\max}$ по условию (27.88). При графическом построении профиля обычно диаграмма закона движения строится в тех же масштабах, как и кулачковый механизм. Для построения профиля кулачка 2 (рис. 730) воспользуемся методом обращения движения. Для этого сообщим толкателю 2 и кулачку 1 скорость, равную $-v_1$. Тогда кулачок 1 будет как бы неподвижным, а толкатель 2 будет двигаться поступательно с постоянной скоростью $-v_1$ вдоль направляющей $q-q$ и поступательно со скоростью $\pm v_2$ вдоль направляющих $p-p$. Выбираем на

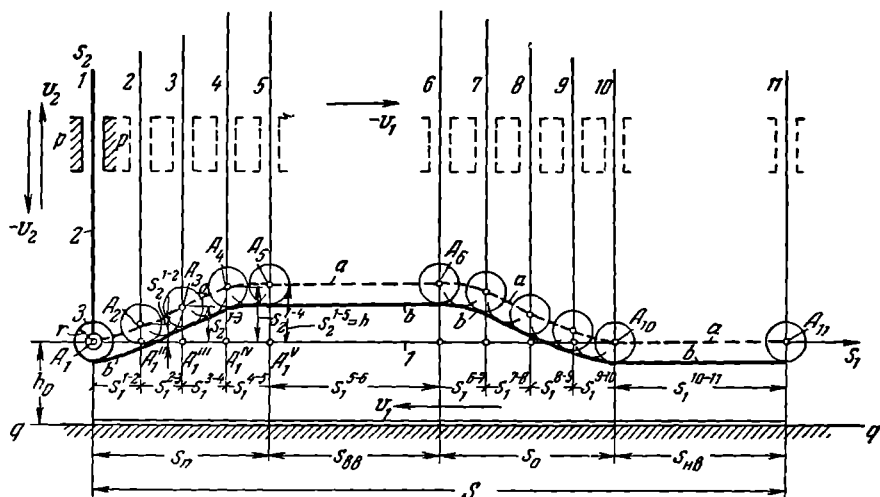


Рис. 730. Построение профиля кулачка для механизма с поступательно движущимися кулачком и толкателем.

толкателе 2 точку A_1 , лежащую на некотором конструктивно выбранном расстоянии h_0 от направляющих $q-q$. В движении со скоростью $-v_1$ толкатель 2 последовательно занимает положения 1, 2, 3, 4 и 5, а точка A_1 толкателя — положения A_1 , A_1^I , A_1^{II} , A_1^{IV} , A_1^V , лежащие на равных расстояниях $s_1^{1-2} = s_1^{2-3} = s_1^{3-4} = s_1^{4-5}$. Так как масштабы диаграммы и кулачкового механизма одинаковы, то отрезки s_1^{1-2} , s_1^{2-3} , могут быть взяты прямо с диаграммы $s_2 = s_2(s_1)$ (рис. 729), для чего участок s_n фазы подъема разбивается на ряд равных отрезков. Обычно при проектировании профилей кулачков рекомендуется для точности построения выбрать малые интервалы между соседними положениями. На рис. 730 отрезок s_n разбит только на четыре участка, чтобы можно было яснее изложить метод построения. Чтобы определить положения A_2, A_3, A_4, A_5 точки A_1 в движении толкателя 2 со скоростью $\pm v_2$, откладываем: от точки A_1^V в направлении движения толкателя 2 отрезок s_2^{1-2} , взятый с диаграммы $s_2 = s_2(s_1)$, от точки A_1^{IV} отрезок s_2^{2-3} , от точки A_1^{II} отрезок s_2^{3-4} и т. д.

Соединив полученные точки $A_1, A_2, A_3, \dots$, получим профиль $a-a$ кулачка I , показанный на рис. 730 пунктирной линией. Этот профиль будет действительным профилем кулачка, если толкатель оканчивается острием и центровым профилем, если толкатель снабжен круглым роликом 3 радиуса r .

Для построения действительного профиля при наличии ролика 3 необходимо из точек, лежащих на центровом профиле, провести ряд окружностей радиуса r и затем построить огибающую $b-b$ положений ролика 3 . Из построения следует, что при выбранных масштабах центральной профиль $a-a$ кулачка представляет собой и диаграмму $s_3 = s_2(s_1)$, а действительный профиль $b-b$ является эквидистантной кривой к кривой $a-a$, точки которой лежат на расстояниях, равных r по нормальным к кривой $a-a$.

3°. В практических расчетах часто требуется аналитическое вычисление координат действительного профиля кулачка для получения более точного очертания этого профиля. Для составления уравнения огибаемых $b-b$ или $b'-b'$ (рис. 731) положений ролика радиуса r напомним уравнение семейства окружностей радиуса r , центры A которых образуют центральной профиль $a-a$:

$$(x_b - x)^2 + (y_b - y)^2 - r^2 = 0, \quad (27.100)$$

где x_b и y_b — координаты действительного профиля $b-b$ или $b'-b'$, а координаты x и y центрального профиля являются функциями некоторого общего параметра θ :

$$x = x(\theta) \quad \text{и} \quad y = y(\theta).$$

Для получения уравнений огибающей в параметрической форме продифференцируем уравнение (27.100) по параметру θ :

$$(x_b - x) \frac{dx}{d\theta} + (y_b - y) \frac{dy}{d\theta} = 0. \quad (27.101)$$

Решая совместно уравнения (27.100) и (27.101), получаем координаты действительного профиля

$$\left. \begin{aligned} x_b &= x \pm \frac{r \frac{dy}{d\theta}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}, \\ y_b &= y \pm \frac{r \frac{dx}{d\theta}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (27.102)$$

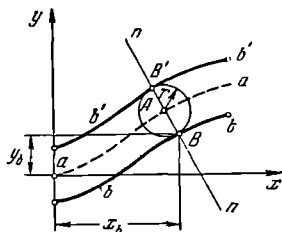


Рис. 731. К определению координат огибающей ролика кулачкового механизма, изображенного на рис. 730.

Из равенств (27.101) следует, что координаты x_b и y_b действительного профиля имеют два значения, соответствующие двум возможным профилям $b-b$ и $b'-b'$.

Для кулачкового механизма, показанного на рис. 730, имеем уравнения центрального профиля в параметрической форме $x = s_1$ и $y = s_2$. Общим параметром θ удобно выбрать s_1 , ибо

$$s_2 = s_2(s_1).$$

В таком случае получаем:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{ds_1}{ds_1} = 1, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{ds_2}{ds_1}$$

Следовательно, координаты x_b и y_b действительного профиля $b-b$ равны

$$x_b = s_1 + \frac{r \frac{ds_2}{ds_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2}} \quad (27.103)$$

и

$$y_b = s_2 - \frac{r}{\sqrt{1 + \left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2}}. \quad (27.104)$$

4°. Переходим к рассмотрению вопроса о проектировании профиля кулачка механизма, показанного на рис. 702, а. Закон движения толкателя 2 задан в виде диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 732), на которой

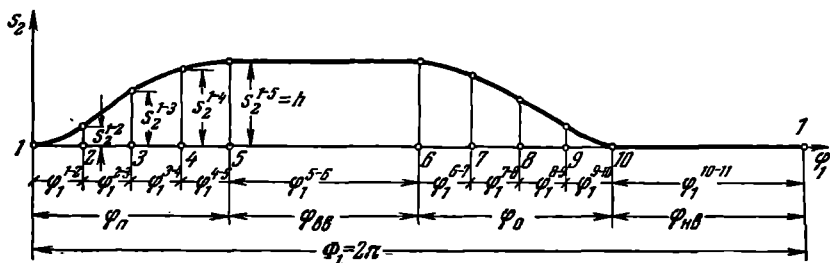


Рис. 732. Диаграмма пути толкателя для кулачкового механизма, изображенного на рис. 702, а.

показаны все фазы движения толкателя при полном угле поворота Φ_1 кулачка 1, равном $\Phi_1 = 2\pi$. Определяем по методу, указанному в § 129,4°, минимальный радиус r_0 кулачка 1 и проводим окружность этим радиусом из точки А (рис. 733). Тогда определится начальное положение B_1 точки касания острия толкателя 2 с кулачком 1. Для построения центрального профиля $a-a$ кулачка воспользуемся методом обращения движения, для чего сообщим кулачку и толкателю общую угловую скорость ω_1 , равную и обратно направленную угло-

вой скорости ω_1 кулачка 1. Тогда толкатель 2 займет на фазе подъема положения 1, 2, 3, 4 и 5, а точка B_1 займет последовательно положения B_1^I , B_1^{II} , B_1^{III} и B_1^{IV} , лежащие на лучах, образующих равные углы $\varphi_1^{1-2} = \varphi_1^{2-3} = \varphi_1^{3-4} = \varphi_1^{4-5}$. Если масштаб перемещений s_2 (рис. 732) выбран равным масштабу чертежа, то, откладывая от точек B_1^{II} , B_1^{III} , B_1^{IV} , B_1^V отрезки, соответственно равные $B_1^{II}B_2 = s_2^{1-2}$, $B_1^{III}B_3 = s_2^{1-3}$,

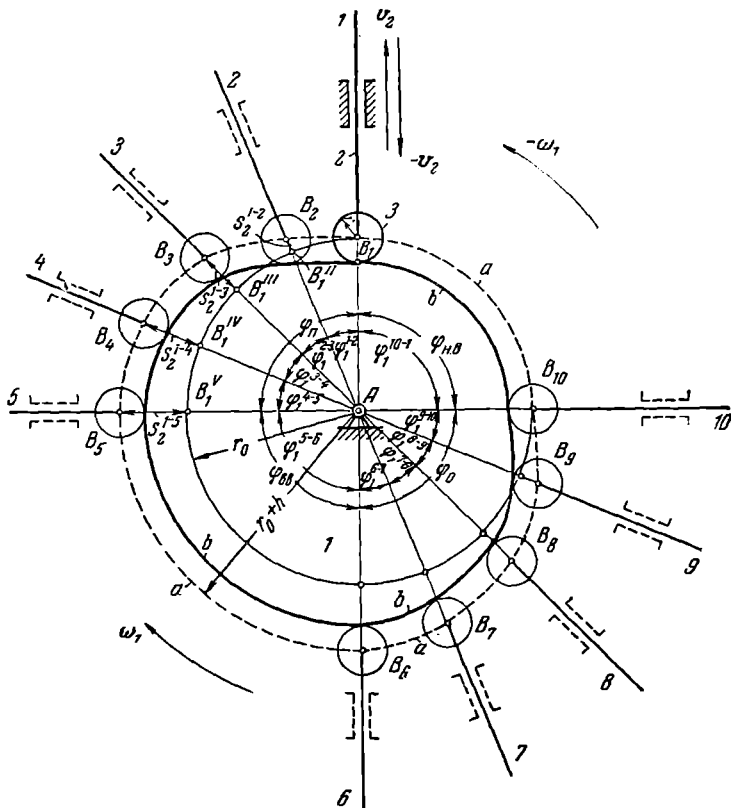


Рис. 733. Построение профиля кулачка для кулачкового механизма, изображенного на рис. 702, а.

$B_1^IV B_4 = s_2^{1-4}$ и $B_1^V B_5 = s_2^{1-5}$, получим центральный профиль $a-a$ кулачка на фазе подъема φ_n , если соединим плавной кривой точки B_1 , B_2 , B_3 , B_4 и B_5 . На угле $\varphi_{нв}$ верхнего выстоя профиль кулачка будет дугой окружности радиуса, равного $r_0 + h$. Пользуясь диаграммой $s_2 = s_2(s_1)$ (рис. 732), с помощью аналогичных построений можем построить точки $B_6 - B_{10}$, соответствующие фазе опускания φ_0 . На фазе нижнего выстоя $\varphi_{нв}$ профиль кулачка будет дугой окружности радиуса r_0 . Если толкатель 2 оканчивается роликом 3 радиуса r , то

построение действительного профиля $b-b$ сводится к построению эквидистантной кривой как огибающей положений ролика 3.

5°. Уравнения центрального профиля $a-a$ (рис. 734) в полярной форме такие:

$$\vartheta = \varphi_1, \quad R = r_0 + s_2, \quad (27.105)$$

где R — радиус-вектор кулачка 2 в положении, в котором точка B занимает произвольно выбранное положение B' . Если оси x и y выбрать так, как это показано на рис. 734, выражения для координат центрального профиля в параметрической форме будут иметь вид

$$x = R \cos \varphi_1 = (r_0 + s_2) \cos \varphi_1 \quad (27.106)$$

и

$$y = R \sin \varphi_1 = (r_0 + s_2) \sin \varphi_1. \quad (27.107)$$

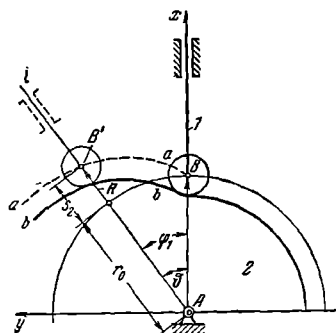


Рис. 734. К определению координат центрального профиля кулачка кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

Выражения для координат действительного профиля $b-b$ (рис. 734) могут быть получены из равенств (27.102), если за параметр θ принять угол φ_1 поворота кулачка

$$\frac{dx}{d\varphi_1} = -(r_0 + s_2) \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \frac{ds_2}{d\varphi_1} \quad (27.108)$$

и

$$\frac{dy}{d\varphi_1} = (r_0 + s_2) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \frac{ds_2}{d\varphi_1}. \quad (27.109)$$

Подставляя в равенства (27.102) значения x и y из равенств (27.106) и (27.107) и $dx/d\varphi_1$ и $dy/d\varphi_1$ из (27.108) и (27.109), после преобразований получаем:

$$x_b = (r_0 + s_2) \cos \varphi_1 \pm r \frac{(r_0 + s_2) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \frac{ds_2}{d\varphi_1}}{\sqrt{(r_0 + s_2)^2 + \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)^2}} \quad (27.110)$$

и

$$y_b = (r_0 + s_2) \sin \varphi_1 \pm r \frac{\cos \varphi_1 \frac{ds_2}{d\varphi_1} - (r_0 + s_2) \sin \varphi_1}{\sqrt{(r_0 + s_2)^2 + \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)^2}}. \quad (27.111)$$

Уравнения действительного профиля $b-b$ в полярной форме могут быть получены из известных соотношений

$$R_b = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} \quad (27.112)$$

и

$$\operatorname{tg} \vartheta_b = \frac{y_b}{x_b}. \quad (27.113)$$

Из рис. 734 следует, что для кулачковых механизмов рассматриваемого вида фазовый угол φ_1 совпадает с полярным углом ϑ .

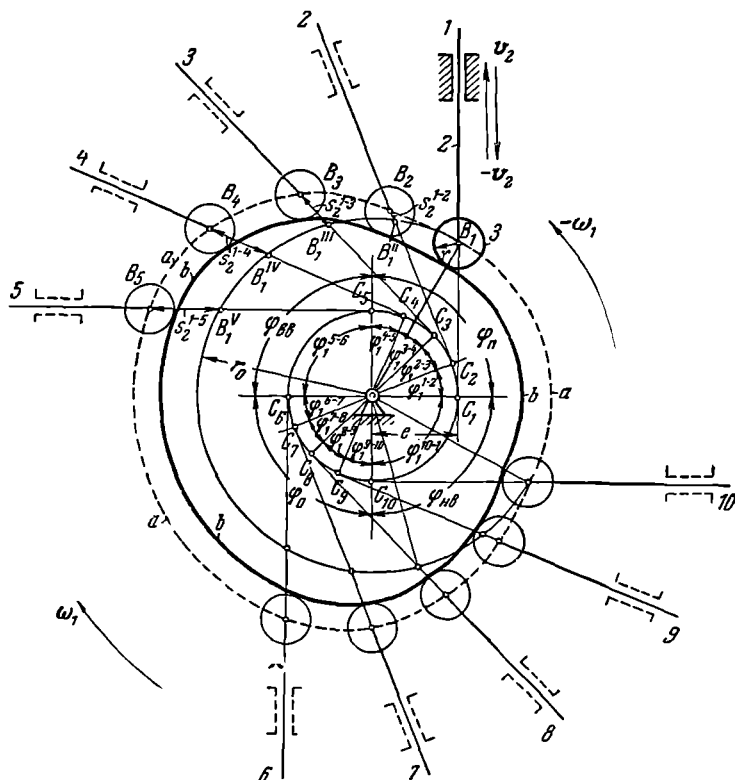


Рис. 735. К построению профиля кулачка кулачкового механизма с эксцентрично поставленным толкателем.

6°. Переходим к рассмотрению вопроса о проектировании профиля кулачка механизма, показанного на рис. 702, *в*. Пусть закон движения толкателя 2 задан в виде диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$, показанной на рис. 732. При построении профиля кулачка 1 данного вида из центра вращения кулачка (рис. 735) проводим окружность радиуса, равного выбранному смещению e оси движения толкателя 2. Далее, по методу,

изложенному в § 129,4°, определяем минимальный радиус r_0 кулачка и проводим окружность этого радиуса. В пересечении окружности радиуса r_0 и оси движения толкателя 2 находим точку B_1 . Точка B_1 соответствует начальному положению толкателя. В обратном движении ось толкателя всегда касательна к окружности радиуса e . Последовательные положения толкателя определяются, если окружность разбить на части, соответствующие углам φ_1^{1-2} , φ_1^{2-3} , φ_1^{3-4} , на диаграмме $s_2 = s_2(\varphi_1)$. В соответствии с этим получаем ряд точек $C_1, C_2, C_3, \dots$, в которых ось движения толкателя касательна к окружности радиуса e . Находим, далее, на пересечении оси движения толкателя с окружностью радиуса r_0 точки $B_1^{II}, B_1^{III}, B_1^{IV}, \dots$, являющиеся геометрическим местом точки B_1 в движении толкателя 2 с угловой скоростью $-\omega_1$. Из точек $B_1^{II}, B_1^{III}, B_1^{IV}, \dots$ откладываем вдоль оси движения толкателя отрезки $s_2^{1-2}, s_2^{2-3}, s_2^{3-4}, \dots$, взятые с диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 732), и получаем точки $B_1, B_2, B_3, \dots$, являющиеся точками центрального профиля.

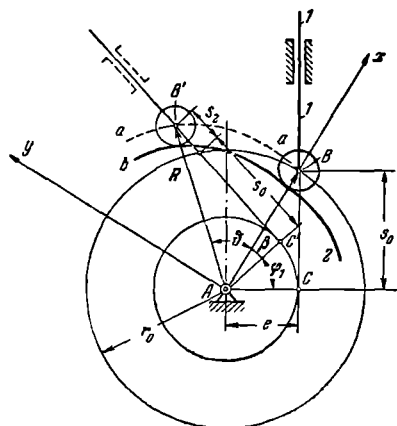


Рис. 736. К определению координат центрального профиля кулачка кулачкового механизма с эксцентрично поставленным толкателем.

Построение действительного профиля аналогично построению профиля кулачкового механизма, показанного на рис. 733.

7°. Координаты центрального профиля $a-a$ кулачка I (рис. 736) получаются из условий

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \beta) = \frac{s_0}{e} \quad (27.114)$$

и

$$\operatorname{tg}(\vartheta + \beta) = \frac{s_0 + s_2}{e}, \quad (27.115)$$

где φ_1 — фазовый угол поворота кулачка I , ϑ — полярный угол (профильный угол) кулачка, $s_0 = BC$ — расстояние, определяющее начальное положение точки B толкателя, s_2 — перемещение толкателя при повороте кулачка на угол φ_1 и β — вспомогательный угол, равный $\beta = \angle BAC$.

Исключая из равенств (27.114) и (27.115) угол β , получаем:

$$\vartheta = \varphi_1 + \operatorname{arctg} \frac{s_0 + s_2}{e} - \operatorname{arctg} \frac{s_0}{e}. \quad (27.116)$$

Имеем, далее, для радиуса-вектора R , определяющего некоторое произвольно выбранное положение B' точки B толкателя, следующее выражение:

$$R = \sqrt{(s_0 + s_2)^2 + e^2}. \quad (27.117)$$

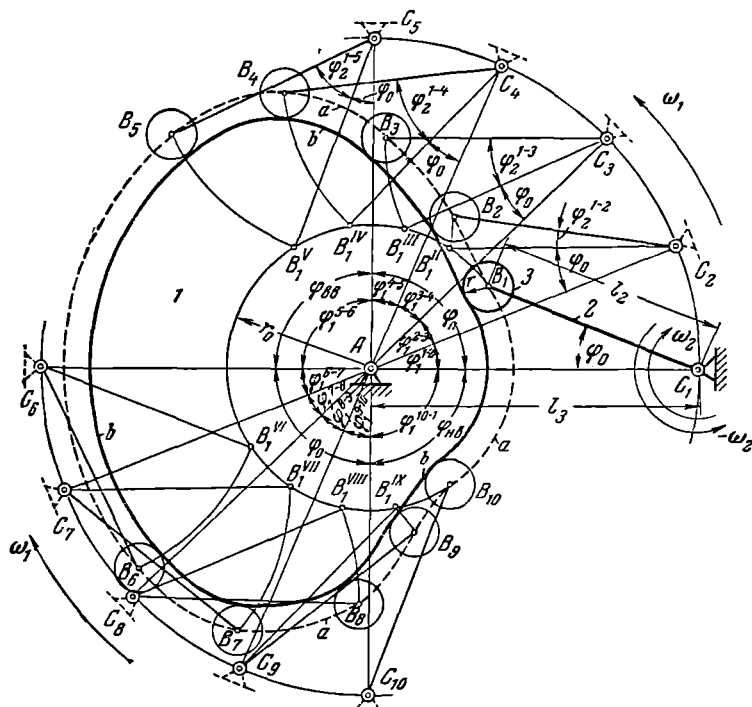


Рис. 733. Построение профиля кулачка для кулачкового механизма с коромыслом.

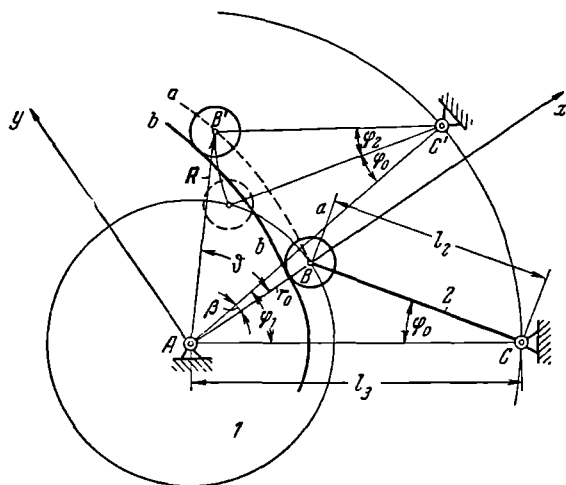


Рис. 733. К определению координат центрального профиля кулачка для кулачкового механизма с коромыслом.

ванный радиусом-вектором R кулачка в положении, в котором точка B коромысла 2 занимает произвольно выбранное положение B' , определяется из рассмотрения треугольника $AB'C'$.

Имеем:

$$R \cos (\vartheta - \beta) = l_3 - l_2 \cos (\varphi_0 + \varphi_2), \quad (27.120)$$

$$R \sin (\vartheta - \beta) = l_2 \sin (\varphi_0 + \varphi_2), \quad (27.121)$$

где β — вспомогательный угол. Из уравнений (27.120) и (27.121) получаем:

$$\vartheta - \beta = \arctg \frac{l_2 \sin (\varphi_0 + \varphi_2)}{l_3 - l_2 \cos (\varphi_0 + \varphi_2)}. \quad (27.122)$$

Далее, из треугольника ABC имеем:

$$\varphi_1 - \beta = \arcsin \frac{l_2}{r_0} \sin \varphi_0. \quad (27.123)$$

Исключая из уравнений (27.122) и (27.123) угол β , получаем:

$$\vartheta = \varphi_1 + \arctg \frac{l_2 \sin (\varphi_0 + \varphi_2)}{l_3 - l_2 \cos (\varphi_0 + \varphi_2)} - \arcsin \frac{l_2}{r_0} \sin \varphi_0. \quad (27.124)$$

Радиус-вектор R получим из треугольника $AB'C'$:

$$R = \sqrt{l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3 \cos (\varphi_0 + \varphi_1)}. \quad (27.125)$$

Из формулы (27.124) следует, что и для этого вида кулачковых механизмов полярный угол ϑ и фазовый угол φ_1 не равны между собою.

Координаты центрального профиля $a-a$ в выбранной системе координат xAy (рис. 739) имеют вид

$$x = R \cos \vartheta, \quad (27.126)$$

$$y = R \sin \vartheta, \quad (27.127)$$

где R и ϑ определяются из равенств (27.125) и (27.124). Координаты действительного профиля $b-b$ (рис. 739) можно получить, если воспользоваться равенствами (27.102).

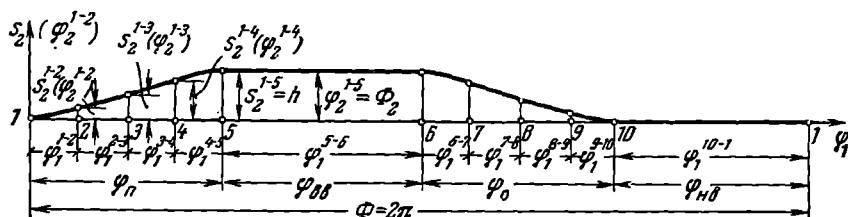


Рис. 740. Диаграмма пути плоского толкателя в функции угла поворота кулачка.

10°. Переходим к рассмотрению вопроса о проектировании профиля кулачка механизма, показанного на рис. 702, б, у которого толкатель 2 оканчивается плоской тарелкой. Закон движения толкателя 2 задан в виде диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 740). Построение

профиля кулачка I при условии, что масштабы перемещения s_2 на диаграмме $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 740) и схемы механизма совпадают, показано на рис. 741. При построении профиля кулачка I применим метод обращения движения. Минимальный радиус-вектор r_0 кулачка

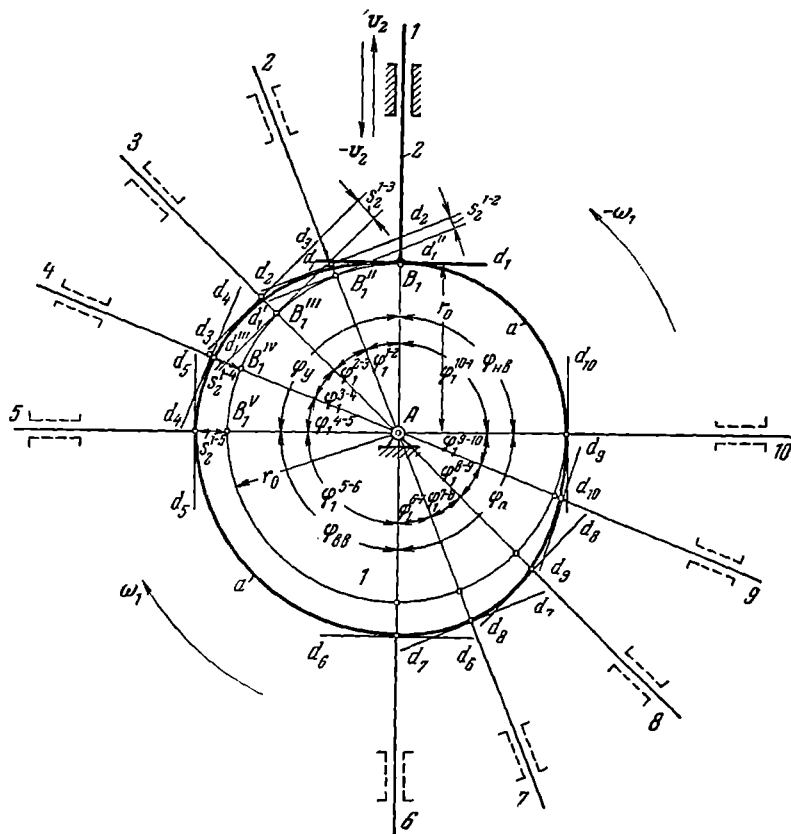


Рис. 741. Построение профиля кулачка кулачкового механизма с плоским толкателем.

определяем по методу, указанному в § 129, 8°. Пусть в начале движения тарелка толкателя находится в положении d_1-d_1 . При вращении с угловой скоростью $-\omega_1$ тарелка занимает последовательно положения: $d_1^{II}-d_1^{II}$, $d_1^{III}-d_1^{III}$, $d_1^{IV}-d_1^{IV}$, ..., и точка B_1 соприкосновения тарелки с окружностью радиуса r_0 последовательно проходит через положения B_1^{II} , B_1^{III} , B_1^{IV} . При перемещении толкателя со скоростью $\pm v_2$ его тарелка перемещается на расстояния, равные s_2^{I-2} , s_2^{I-3} , s_2^{I-4} , ..., т. е. она занимает положения d_2-d_2 , d_3-d_3 , d_4-d_4 . Профиль кулачка I можно построить, если провести огибающую $a-a$ всех положений d_2-d_2 , d_3-d_3 , d_4-d_4 , ...

тарелки. На углах $\varphi_{вв}$ и $\varphi_{пв}$, соответствующих фазам верхнего и нижнего выстоев, кулачок очерчивается по дугам окружностей из центра A радиусов $r_0 + h$ и r_0 .

11°. Полярные координаты профиля $a-a$ кулачка I (рис. 742) имеют следующий вид. Проведем через точку C' соприкасания профиля $a-a$ с некоторым произвольно выбранным положением $d'-d'$ тарелки нормаль $n-n$. Тогда мгновенный центр вращения P_0 в относительном движении находится на пересечении нормали $n-n$ с прямой Af , перпендикулярной к оси движения толкателя 2. Согласно равенству (5.15) (см. § 25,4°) имеем:

$$AP_0 = \frac{ds_2}{d\varphi_1}.$$

Полярный угол ϑ равен

$$\vartheta = \varphi_1 + \beta = \varphi_1 + \operatorname{arctg} \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1}}{r_0 + s_2}, \quad (27.128)$$

и радиус-вектор R кулачка в точке C' :

$$R = \sqrt{(r_0 + s_2)^2 + \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)^2} \quad (27.129)$$

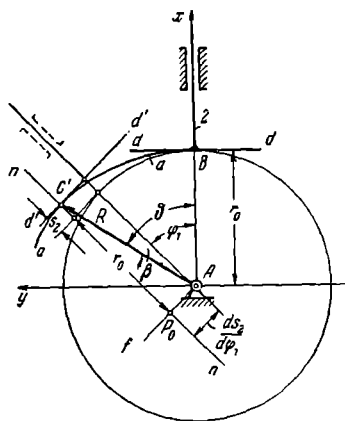


Рис. 742. К определению полярных координат профиля кулачка кулачкового механизма с плоским толкателем.

Координаты профиля $a-a$ в выбранной системе координат (рис. 742)

$$x = R \cos \vartheta, \quad (27.130)$$

$$y = R \sin \vartheta, \quad (27.131)$$

где R и ϑ определяются по формулам (27.129) и (27.128).

12°. В заключение рассмотрим проектирование профиля кулачка механизма, показанного на рис. 703. В качестве закона движения примем диаграмму, показанную на рис. 740, заменив в ней перемещения s_2 углами φ_2 . Эта диаграмма представляет собой следующую зависимость: $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$. Полный угол поворота коромысла 2 (рис. 743) примем равным Φ_2 .

Методом обращения движения находим положения коромысла $C_1d_1, C_2d_2, C_3d_3, \dots$, откладывая от направлений $C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3, \dots$, касательных к окружности минимального радиуса r_0 , углы $\varphi_2^{1-2}, \varphi_2^{1-3}, \varphi_2^{1-4}, \dots$ взятые с диаграммы $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (рис. 740). Профиль $a-a$ кулачка I получается как огибающая всех положений коромысла 2. Так же как и кулачковый механизм с толкателем, оканчивающимся тарелкой (рис. 742), профиль $a-a$ кулачка I (рис. 743) должен быть выпуклым.

13°. Координаты профиля $a-a$ кулачка 1 (рис. 744) могут быть получены из следующих соотношений. Пусть в некотором произвольно выбранном положении коромысло 2 занимает положение $C'd'$.

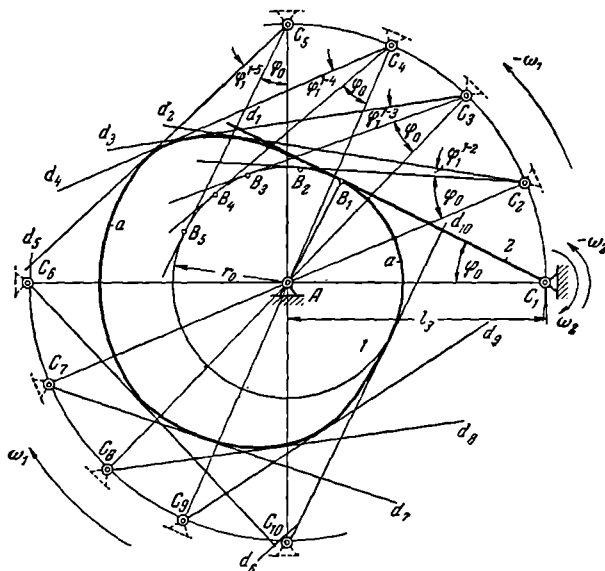


Рис. 743. Схема кулачкового механизма с плоским коромыслом.

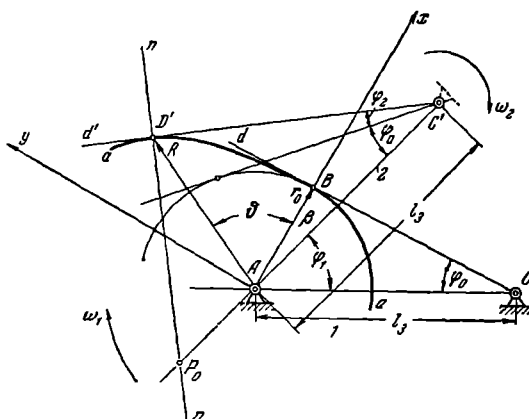


Рис. 744. К определению координат профиля кулачка кулачкового механизма с плоским коромыслом.

В точке D' соприкосновения профиля $a-a$ и прямой $C'd'$ проводим нормаль $n-n$ до пересечения в точке P_0 с линией, соединяющей центры A и C' . Точка P_0 является мгновенным центром вращения в относи-

тельном движении кулачка 1 и коромысла 2. Следовательно, имеем:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{AP_0}{CP_0} = \frac{AP_0}{AP_0 + l_3}, \quad (27.132)$$

где $l_3 = AC$. Из уравнения (27.132) получаем:

$$AP_0 = l_3 \frac{\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}}{1 - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}}. \quad (27.133)$$

Из прямоугольного треугольника $C'D'P_0$ имеем:

$$(C'D') = (l_3 + AP_0) \cos(\varphi_0 + \varphi_2).$$

Учитывая равенство (27.133), получаем:

$$(C'D') = l_3 \frac{1}{1 - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}} \cos(\varphi_0 + \varphi_2). \quad (27.134)$$

Из треугольника $C'D'A$ определяем величину радиуса-вектора R профиля $a - a$ (рис. 744):

$$R = \sqrt{(C'D')^2 + l_3^2 - 2(C'D')l_3 \cos(\varphi_0 + \varphi_2)}. \quad (27.135)$$

Подставляя в это равенство значение $(C'D')$ из (27.134), получаем после преобразований

$$R = l_3 \sqrt{1 - \frac{1 - 2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}}{\left(1 - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2} \cos^2(\varphi_0 + \varphi_2)}. \quad (27.136)$$

Для определения полярного угла ϑ рассмотрим треугольник $C'D'A$. Имеем:

$$R \cos(\vartheta + \beta) = l_3 - (C'D') \cos(\varphi_0 + \varphi_2), \quad (27.137)$$

$$R \sin(\vartheta + \beta) = (C'D') \sin(\varphi_0 + \varphi_2), \quad (27.138)$$

где β — вспомогательный угол.

Из уравнений (27.137) и (27.138) получаем:

$$\operatorname{tg}(\vartheta + \beta) = \frac{(C'D') \sin(\varphi_0 + \varphi_2)}{l_3 - (C'D') \cos(\varphi_0 + \varphi_2)}. \quad (27.139)$$

Подставляя в формулу (27.139) значение отрезка $(C'D')$ из равенства (27.134), после преобразований имеем:

$$\operatorname{tg}(\vartheta + \beta) = \frac{\sin(\varphi_0 + \varphi_2) \cos(\varphi_0 + \varphi_2)}{\sin^2(\varphi_0 + \varphi_2) - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}} \quad (27.140)$$

или

$$\vartheta + \beta = \operatorname{arctg} \frac{\sin(\varphi_0 + \varphi_2) \cos(\varphi_0 + \varphi_2)}{\sin^2(\varphi_0 + \varphi_2) - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}}. \quad (27.141)$$

Угол β определяется из треугольника ABC :

$$l_3 \cos(\varphi_1 + \beta) = r_0, \quad (27.142)$$

откуда

$$\beta = \arccos \frac{r_0}{l_3} - \varphi_1. \quad (27.143)$$

Из формулы (27.141), учитывая (27.143), получаем для полярного угла ϑ следующее выражение:

$$\vartheta = \varphi_1 + \arctg \frac{\sin(\varphi_0 + \varphi_2) \cos(\varphi_0 + \varphi_2)}{\sin^2(\varphi_0 + \varphi_2) - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}} - \arccos \frac{r_0}{l_3}. \quad (27.144)$$

Координаты профиля $a-a$ в выбранной системе координат (рис. 744) имеют вид

$$x = R \cos \vartheta, \quad (27.145)$$

$$y = R \sin \vartheta, \quad (27.146)$$

где R и ϑ определяются по формулам (27.136) и (27.144).

14°. Для тех кулачковых механизмов, у которых толкатель оканчивается роликом, необходимо иметь в виду, что радиус r ролика не может быть выбран произвольно. Необходимо руководствоваться условием, чтобы эквидистантная кривая, представляющая собой действительный профиль кулачка, не имела самопересечения. На рис. 745 видно, что если радиус ролика выбран равным r_1 , то самопересечения действительного профиля $b'-b'$ мы не имеем.

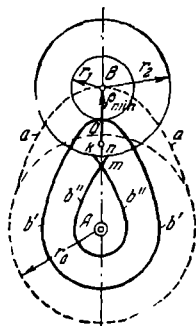


Рис. 745. К исследованию вопроса о самопересечении действительного профиля кулачка.

Если увеличить радиус ролика и выбрать его равным r_2 , то в точке m практически профиль $b''-b''$ самопересекается, и участок knt профиля практически выполнен быть не может. Чтобы самопересечение отсутствовало, необходимо радиус r ролика выполнить меньше наименьшего радиуса кривизны $\rho_{\min}$ выпуклых участков центрального профиля $a-a$ кулачка (рис. 745).

Практически радиус r ролика обычно принимают равным

$$r \leq 0,7\rho_{\min}. \quad (27.147)$$

Одновременно радиус r ролика должен быть меньше минимального радиуса-вектора r_0 кулачка. По большей части радиус r выбирают

$$r < 0,4r_0. \quad (27.148)$$

Если $\rho_{\min}$ и r_0 известны, то, проверив величину r по условиям (27.147) и (27.148), в качестве окончательного размера радиуса r ролика выбирают ту, которая будет наименьшей.

§ 131. Некоторые сведения о проектировании пространственных кулачковых механизмов

1°. В настоящем параграфе рассмотрим вопрос о проектировании тех частных видов пространственных кулачковых механизмов, для которых задача об их проектировании может быть полностью или частично сведена к задаче о проектировании плоских кулачковых механизмов.

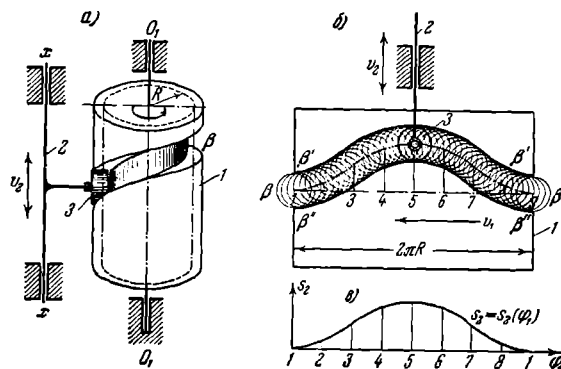


Рис. 746. Кулачковый механизм с цилиндрическим кулачком: а) схема механизма; б) развертка кулачка; в) диаграмма зависимости пути ведомого звена в функции угла поворота кулачка.

Начнем с рассмотрения тех видов механизмов, у которых ведомое звено движется поступательно, а кулачок вращается. Если ось вращения кулачка параллельна направлению движения ведомого звена, то движение этого звена может быть воспроизведено механизмом цилиндрического кулачка, показанным на рис. 746, а. Цилиндрический кулачок 1, вращаясь с заданной

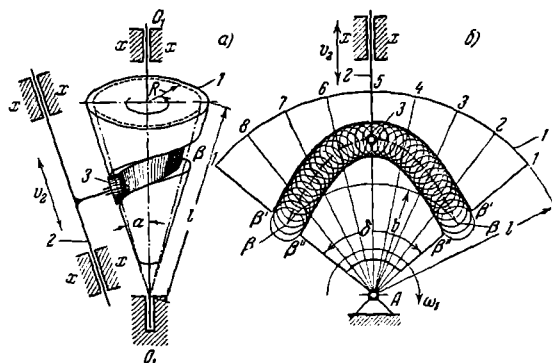


Рис. 747. Кулачковый механизм с коническим кулачком: а) схема механизма; б) развертка кулачка.

угловой скоростью ω_1 , посредством паза β , действующего на ролик 3, перемещает звено 2 в направлении $x-x$, параллельном оси O_1-O_1 .

Пусть закон движения звена 2 задан графиком $s_2 = s_2(\varphi_1)$, где s_2 есть перемещение звена 2, а φ_1 — угол поворота кулачка (рис. 746, в). Для

построения профиля паза β строим развертку кулачка (рис. 746, б) по среднему радиусу R кулачка. Если развертку 1 двигать поступательно с линейной скоростью $v_1 = \omega_1 R_1$, то звено 2 будет двигаться с заданной скоростью v_2 . Таким образом, профилирование паза сводится к профилированию кулачкового механизма с поступательно движущимся ведущим звеном (см. § 130, 2°). Кривая $\beta - \beta$ является центровым профилем. Для получения действитель-

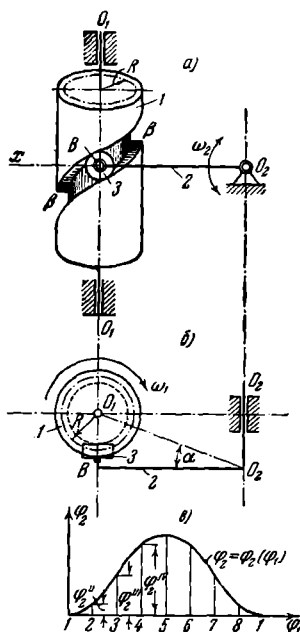


Рис. 748. Кулачковый механизм с цилиндрическим кулачком и коромыслом: а) схема механизма; б) вид механизма сверху; в) диаграмма зависимости угла поворота коромысла в функции угла поворота кулачка.

3° Рассмотрим теперь тот случай, когда ведомое звено 2 имеет колебательное вращательное движение, а ведущий цилиндрический кулачок 1 вращается. На рис. 748, а и б показан цилиндрический кулачок 1, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг оси O_1O_1 , и звено 2, которое имеет колебательное движение вокруг оси O_2 по закону, данному графиком $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (рис. 748, в).

Для нахождения центрального профиля паза $\beta - \beta$ развертываем цилиндр 1 на плоскость по среднему радиусу R (рис. 749). На продолжении оси O_2x отмечаем точку O_2 , принимаемую за ось вращения звена 2. Из точки O_2 проводим дугу окружности радиусом, равным длине звена O_2B (рис. 748, а). Пусть начальное положение звена O_2B образует с осью O_2x угол φ_2^0 . Откладываем от этого начального положения соответствующие углы $\varphi_2^I, \varphi_2^{II}, \varphi_2^{III}, \varphi_2^{IV}$, определяемые по графику $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (рис. 748, в). Тогда получаем ряд положений звена O_2B . Из полученных точек 1, 2, 3, ... опускаем перпендикуляры 1а, 2б, 3с, ... на ось O_2x (рис. 749). Длины этих перпен-

ного профиля проводим две эквидистантные кривые $\beta' - \beta'$ и $\beta'' - \beta''$ на расстояниях, равных радиусу ролика, от кривой $\beta - \beta$.

2°. Если ось вращения кулачка пересекается с направлением движения ведомого звена, то получается механизм конического кулачка, показанный на рис. 747, а.

Для построения центрального профиля паза $\beta - \beta$ строим развертку конуса 1 (рис. 747, б). Для этого по среднему радиусу R основания конуса и длине l находим угол δ развертки, равный

$$\delta = \frac{2\pi R}{l} = 2\pi \sin \alpha,$$

где α есть половина угла раствора конуса. Задача о проектировании центрального и действительного профилей пазов $\beta - \beta$, $\beta' - \beta'$ и $\beta'' - \beta''$ теперь сводится к задаче о проектировании кулачкового механизма с вращающимся вокруг осп А кулачком 1 (см. § 130, 4°), действующим на толкатель 2,двигающийся в направляющих $x - x$.

Если закон движения звена 2 задан графиком $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 746, в), то для построения кулачка разбиваем угол δ развертки на равные углы и на радиусах, проведенных через точку А, откладываем от начальной окружности минимального радиуса соответствующего перемещения s_2 звена 2, взятые с графика $s_2 = s_2(\varphi_1)$. Тогда получаем центральный профиль паза $\beta - \beta$. Действительные профили паза будут получены построением эквидистантных кривых $\beta' - \beta'$ и $\beta'' - \beta''$. Вращая развертку 1 вокруг оси А, получаем требуемые перемещения звена 2.

дикуляров определяют ординаты паза $\beta - \beta$. Для нахождения абсцисс соответствующих точек воспользуемся тем, что отрезки O_2a , O_2b , на рис. 749 определяют собой горизонтальные проекции звена O_2B .

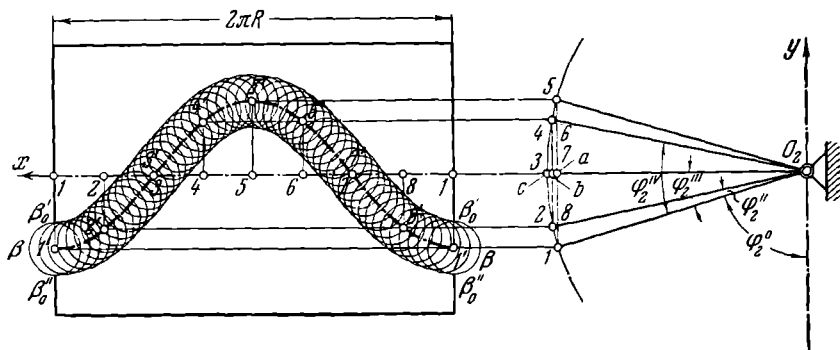


Рис. 749. Развертка профиля кулачка кулачкового механизма, изображенного на рис. 748.

Строим горизонтальную проекцию механизма (рис. 750) и сообщаем звеньям 1 и 2 общую угловую скорость $-\omega_1$. Тогда кулачок 1 становится неподвижен, а звено 2 вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью $-\omega_1$ и вокруг оси O_2 — с угловой скоростью ω_2 . Для нахождения последовательных положений звена 2 делим окружность радиуса O_1O_2 на равные части. Далее, находим точки O_2 , O_2' , O_2'' , (рис. 750). Звено O_2B образует с радиу-

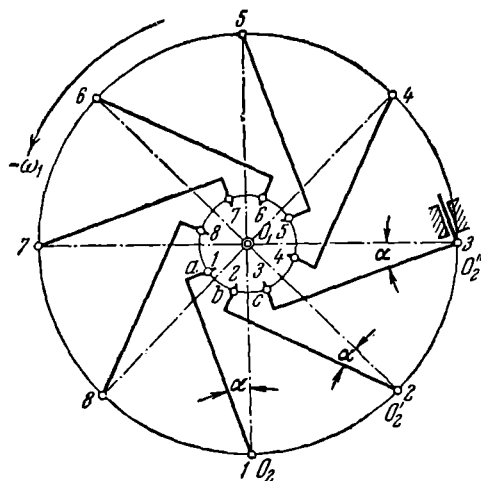


Рис. 750. Горизонтальная проекция кулачкового механизма, изображенного на рис. 748.

сами O_1O_2 постоянный угол α (рис. 748, б). Поэтому при радиусах O_1O_2 (рис. 750) строим углы α и на их сторонах откладываем горизонтальные проекции O_2a , O_2b , O_2c , звена O_2B . В полученных точках a , b , c , составляем перпендикуляры и находим точки пересечения этих перпендикуляров с окружностью 1 радиуса R (рис. 750). Эти перпендикуляры

представляют собой положения оси ролика 3 (рис. 748). Полученные длины дуг 1—2, 2—3, 3—4, откладываем на оси O_2x (рис. 749). Из построения следует: в общем случае дуги 1—2, 2—3, 3—4 не равны между собой. Центровой профиль β —3 паза теперь может быть построен, если через соответствующие точки 1, 2, 3, 4, (рис. 749) оси абсцисс O_2x проведем перпендикуляры и отложим на них полученные отрезки 1а, 2б, 3с, ...

Эквидистантные кривые $\beta' - \beta'$ и $\beta'' - \beta''$ в этой конструкции строятся приближенно, так как ось ролика 3 не пересекается с осью O_1 кулачка.

ГЛАВА XXVIII

СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

§ 132. Основные задачи синтеза

1°. Плоские механизмы с низшими парами применяются во многих машинах, приборах и устройствах.

Достоинства этих механизмов определяются в основном достоинствами низших пар, в которые входят звенья. В низших парах соприкасающимися элементами звеньев являются поверхности (плоскости — для поступательных пар, цилиндрические поверхности — для вращательных пар), поэтому удельные давления и износ в них меньше, чем в высших кинематических парах. Элементы звеньев, образующих эти пары, изготавливаются достаточно просто и точно, так как технология обработки плоскостей и цилиндрических поверхностей в настоящее время разработана весьма тщательно и полно. Кроме того, для механизмов, образованных при помощи звеньев, входящих в низшие пары, в отличие от кулачковых механизмов, не требуется пружин и других устройств, обеспечивающих постоянное замыкание кинематических пар.

При помощи плоских механизмов с низшими парами можно теоретически точно воспроизвести любую алгебраическую кривую или любую алгебраическую зависимость между перемещениями ведущего и ведомого звеньев. Однако практическое применение этих механизмов ограничивается тем, что эти механизмы получаются, как правило, многозвенными. С увеличением же числа звеньев в механизме возрастает вероятность получения недопустимых углов передачи и искажения заданной зависимости вследствие накопления ошибок, происходящих от неточности изготовления механизма. Поэтому некоторые законы движения ведомого звена практически не удается воспроизвести при помощи плоских механизмов с низшими парами. В этом состоит их основной недостаток. Другими словами, кулачковые и зубчатые механизмы вследствие разнообразия элементов высших пар практически являются более универсальными механизмами, чем механизмы, образованные только из звеньев, входящих в низшие пары. Следует заметить, однако, что с развитием методов проектирования механизмов с низшими парами область их применения соответственно расширяется.

Например, в последние годы в Советском Союзе в машинах, служащих для выполнения некоторых математических операций, и в машинах-автоматах были применены шарнирные механизмы, которые являются более совершенными по сравнению с ранее применявшимися кулачковыми и фрикционными механизмами.

2°. Прежде чем излагать сущность современных методов проектирования механизмов с низшими парами, рассмотрим кратко основные задачи синтеза этих механизмов.

В зависимости от назначения механизма точки ведомых звеньев должны иметь определенные траектории, перемещения, скорости и ускорения. Эти величины зависят от закона движения ведущего звена и от параметров кинематической схемы, т. е. от размеров звеньев механизма, которые определяют его кинематическую схему. В плоских механизмах с низшими парами параметрами кинематической схемы являются расстояния между центрами шарниров, размеры, определяющие положения поступательных пар, расстояния от точек, описывающих траектории и т. п. Определение параметров кинематической схемы механизма по заданным геометрическим и кинематическим условиям движения ведомого звена составляет основную задачу проектирования механизмов, так как все остальные этапы проектирования содержат лишь проверочные и вспомогательные расчеты, позволяющие установить возможность и целесообразность реального выполнения полученной кинематической схемы механизмов.

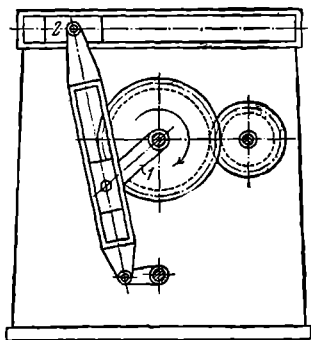


Рис. 751. Схема механизма поперечно-строгального станка.

В дальнейшем под синтезом механизмов с низшими парами будет подразумеваться совокупность задач об определении параметров кинематической схемы по заданным условиям движения звеньев. Эти условия весьма разнообразны, и соответственно весьма разнообразны задачи, связанные с синтезом механизмов с низшими парами. Однако из обширного круга этих задач можно выделить две основные задачи: *воспроизведение заданного закона движения и воспроизведение заданной траектории*.

3°. Задача о воспроизведении заданного закона движения состоит в определении параметров кинематической схемы, которые обеспечивают точное или приближенное движение ведомого звена по заданному закону при определенном законе движения ведущего звена.

Приведем примеры тех механизмов, в которых требуется получить достаточно точное воспроизведение заданного закона движения.

На рис. 751 показана схема механизма поперечно-строгального станка, в котором при равномерном движении ведущего звена I

суппорт 2 совершает возвратно-поступательное движение с ускоренным обратным ходом, причем во время рабочего хода движение суппорта 2 должно быть приближенно равномерным. При синтезе этого механизма параметры кинематической схемы подбираются таким образом, чтобы на рабочем участке движения суппорта скорость его мало отличалась от постоянной величины, что важно для сохранения постоянной скорости обработки заготовки.

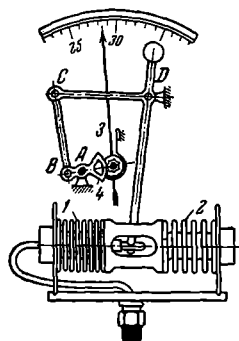


Рис. 752. Схема механизма вакуумметра.

Кроме равномерного движения для ведомого звена могут быть заданы и более сложные законы движения. Таковы, например, задачи о синтезе механизмов грохотов, конвейеров, сортировок, самонакладов и многих других. К задачам о воспроизведении заданного закона движения сводятся также задачи синтеза передаточных механизмов, применяемых в приборах для преобразования неравномерного движения чувствительного элемента в равномерное движение указательной стрелки. Например, в механизме дифференциального мановакуумметра, схема которого показана на рис. 752, перемещения чувствительных элементов 1 и 2 передаются на стрелку 3 посредством шарнирного четырехзвенного механизма ABCD и зубчатого сектора 4. Для получения равномерной шкалы следует по заданным перемещениям чувствительных элементов 1 и 2 найти углы поворота звена CD и затем определить параметры кинематической

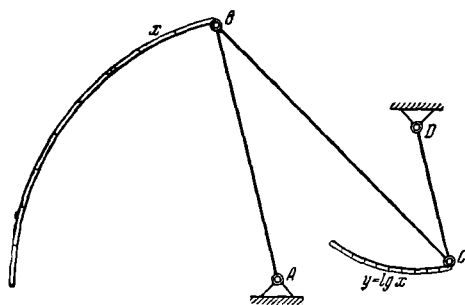


Рис. 753. Схема механизма, воспроизводящего логарифмическую зависимость.

схемы шарнирного четырехзвенника ABCD так, чтобы найденным углам поворота звена CD соответствовали равные углы поворота звена AB.

К группе передаточных механизмов, служащих для получения равномерной шкалы, близко примыкают шарнирные механизмы, применяемые в механических счетно-решающих устройствах. На рис. 753 показана кинематическая схема механизма, применяемого для

механического воспроизведения логарифмической зависимости $y = \lg x$ в пределах от $x=1$ до $x=10$. Если в этом механизме перемещать звено AB на величину, пропорциональную x , то углы поворота звена CD при определенных соотношениях между длинами звеньев будут с практически достаточной точностью пропорциональны величине функции $y = \lg x$. Этот приближенно выполняющий заданную зависимость механизм в эксплуатации оказывается более удобным,

чем теоретически точно выполняющие эту зависимость механизмы с высшими парами или фрикционными устройствами.

Во всех рассмотренных выше механизмах ведомые звенья входят во вращательные или поступательные пары со стойкой и, следовательно, совершают вращательные или прямолинейные поступательные движения. Реже встречаются случаи, когда ведомое звено совершает сложное движение. В качестве примера можно указать на механизм грейфера съемочного киноаппарата (рис. 754), в котором

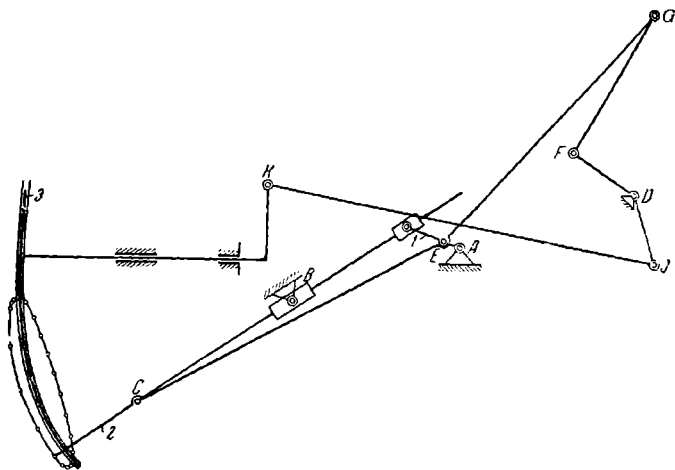


Рис. 754. Схема грейферного механизма киноаппарата.

ведомое звено 2 при повороте ведущего звена 1 на угол 142° перемещает киноплёнку 3 на величину, равную расстоянию между двумя соседними перфорированными отверстиями. В течение остальной части оборота ведущего звена 1 плёнка 3 неподвижна. При синтезе этого механизма следует так подобрать параметры звеньев, чтобы конец ведомого звена 2 описывал траекторию, указанную на рис. 754, кроме того, геометрическая ось звена 2 занимала определенные заданные положения, соответствующие заданным положениям ведущего звена 1.

В приведенных примерах показаны механизмы, в которых требуется достаточно точное воспроизведение заданного закона движения на всем рассматриваемом интервале перемещений ведущего звена. В некоторых случаях оказывается достаточным при синтезе механизма удовлетворить условиям воспроизведения отдельных положений звеньев или отдельных положений звеньев и значений скоростей и ускорений в этих положениях и т. д. Все эти случаи, однако, можно рассматривать как частные случаи общей задачи о воспроизведении заданного закона движения,

4°. При синтезе механизмов, в которых ведомые звенья совершают сложное движение, в некоторых случаях можно ограничиться только воспроизведением траектории одной точки этого звена. Соответствующая задача синтеза механизмов носит название *задачи о воспроизведении заданной траектории*.

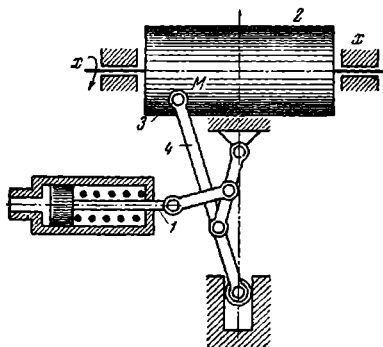


Рис. 755. Схема прямолинейно-направляющего механизма индикатора.

Эта задача состоит в определении параметров кинематической схемы механизма, в котором одна из точек звена, совершающего сложное движение, движется по заданной траектории. В простейших случаях заданной траекторией является прямая линия. Механизмы, в которых на шатуне имеется точка, движущаяся точно или приближенно по прямой линии, называются *прямолинейно-*

направляющими механизмами. В приборостроении они применяются в механизмах индикаторов.

На рис. 755 показана схема индикатора, в котором звено 1 перемещается пропорционально измеряемой величине. Эта величина записывается на вращающемся вокруг оси $x-x$ барабане 2 посредством пера 3, укрепленного на шатуне 4. При синтезе этого механизма

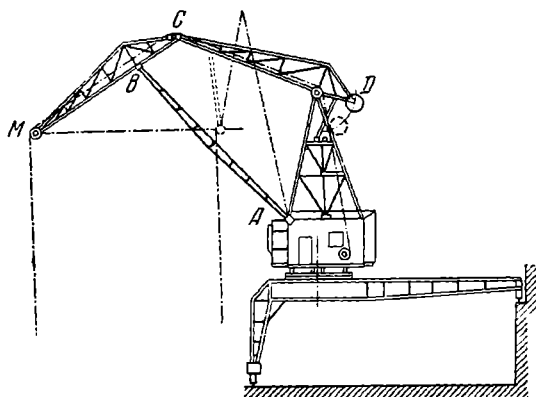


Рис. 756. Схема прямолинейно-направляющего механизма грузоподъемного крана.

параметры кинематической схемы механизма подбираются так, что точка M шатуна 4 движется приближенно по прямой линии.

В тяжелом машиностроении прямолинейно-направляющие механизмы применяются в подъемных кранах (рис. 756), в которых прибли-

изложение вопроса в основном в том виде, как это было предложено Н. И. Левитским.

6°. Решение задачи о воспроизведении заданного закона движения покажем на примере механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 758).

Пусть закон движения ведущего звена AB задан в виде зависимости его угла поворота α от времени t , т. е.

$$\alpha = \alpha(t), \quad (28.1)$$

а закон движения ведомого звена CD задан в виде зависимости его угла поворота ψ также от времени t , т. е.

$$\psi = \psi(t). \quad (28.2)$$

Исключая из уравнений (28.1) и (28.2) время t , получаем функцию положений

$$\psi = \psi(\alpha). \quad (28.3)$$

Связь между углами α и ψ устанавливается через размеры звеньев механизма, которые мы называли выше (§ 132,2°) *параметрами кинематической схемы механизма*, или сокращенно, *параметрами механизма*. Следовательно, чтобы удовлетворить условию (28.3), необходимо соответствующим образом подобрать параметры механизма. Для шарнирного четырехзвенника, показанного на рис. 758, число независимых параметров можно считать равным шести. Это длины l_1 , l_2 , l_3 и l_4 звеньев, начальное значение α_0 угла α и угол φ , образованный стойкой AD с осью Ax . Если определить только относительные размеры звеньев, то можно принять:

$$\frac{l_1}{l_1} = 1, \quad \frac{l_2}{l_1} = d, \quad \frac{l_3}{l_1} = l, \quad \frac{l_4}{l_1} = r.$$

Таким образом, имеем пять параметров механизма d , l , r , φ и α_0 , подлежащих определению. Если заданы отдельные положения звеньев AB и CD углами α_1 , α_2 , α_3 , ..., α_m и ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ..., ψ_m , образуемыми звеньями AB и CD с осью Ax (рис. 758), то мы получим согласно зависимости (28.3) следующую систему уравнений:

$$\psi_1 = \psi(\alpha_1), \quad \psi_2 = \psi(\alpha_2), \quad \psi_3 = \psi(\alpha_3), \quad \psi_m = \psi(\alpha_m). \quad (28.4)$$

Если число уравнений системы (28.4) равно числу параметров, подлежащих определению, то задача теоретически может быть полностью решена. В практических задачах вследствие трудности совместного решения уравнений (28.1) обычно задаются некоторыми параметрами. В связи с этим число m пар заданных соответственных значений углов α и ψ выбирается равным числу параметров, подлежащих определению. В указанной постановке задача о воспроизведении заданного закона движения носит название *задачи о положениях*.

7°. При проектировании передаточных механизмов контрольно-измерительных приборов и механизмов для выполнения математических операций (см., например, показанный на рис. 753) встречается необходимость воспроизвести заданный закон движения в форме некоторой зависимости

$$\psi = \psi(\alpha). \quad (28.5)$$

При этом ставится требование, чтобы эта зависимость удовлетворялась на больших интервалах углов поворота звеньев AB и CD (рис. 758) и давала бы непрерывное изменение функции (28.5) так, как это показано, например, на рис. 759. В этом случае задача может быть также сведена к задаче о положениях, но так как число положений $1, 2, 3, \dots, m$ (рис. 759) должно быть достаточно большим, то число уравнений вида (28.4) будет значительно больше числа вычисляемых параметров механизма. В этом случае эти параметры подбираются так, чтобы зависимость (28.5) выполнялась приближенно. При этом отклонение от требуемого закона движения не должно выходить за пределы допускаемого.

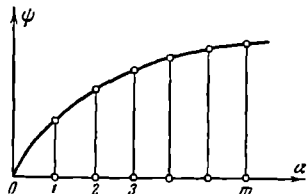


Рис. 759. Диаграмма заданной зависимости угла поворота коромысла от угла поворота кривошипа механизма шарнирного четырехзвенника.

В такой постановке эта задача проектирования может быть названа задачей о *приближенном воспроизведении заданного закона движения*. Отметим, что закон движения может быть задан и в виде передаточной функции i_{31} :

$$i_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{d\psi}{d\alpha}, \quad (28.6)$$

где ω_1 — угловая скорость звена 1 (рис. 758) и ω_3 — угловая скорость звена 3.

Если известны начальные значения α_0 и ψ_0 углов α и ψ , то зависимость (28.6) может быть приведена к зависимости (28.5), если проинтегрировать зависимость (28.6).

§ 133. Проектирование механизмов по заданным положениям звеньев

1°. Рассмотрим задачу о проектировании механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 760) по заданным положениям его звеньев. Если для упрощения задачи предположить, что неподвижные шарниры A и D расположены по оси Ax , от которой ведется отсчет углов α и ψ (рис. 760), и принять угол φ (рис. 758) равным нулю, то при заданных длинах звеньев всякому заданному значению α_i угла α соответствует вполне определенное значение ψ_i угла ψ , а

поэтому число параметров механизма, подлежащих определению, равно трем (см. § 132, 6°). Это — параметры l , r и d , соответственно равные

$$l = \frac{l_3}{l_2}, \quad r = \frac{l_4}{l_2} \quad \text{и} \quad d = \frac{l_1}{l_2}.$$

Следовательно, если будут заданы три положения звена AB (рис. 761) углами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и три соответствующих им положения

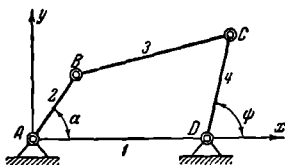


Рис. 760. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по заданным положениям кривошипа и коромысла.

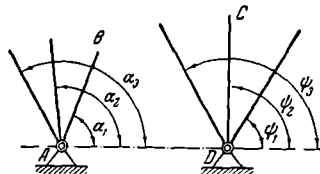


Рис. 761. Заданные положения кривошипа и коромысла механизма шарнирного четырехзвенника.

звена CD углами ψ_1, ψ_2 и ψ_3 , то всегда могут быть определены параметры l , r и d , так как число уравнений вида (28.4) будет равно числу этих параметров.

2°. Поставленная задача может быть решена следующим образом. Представим стороны шарнирного четырехзвенника (рис. 762) в виде векторов i , l , r и d , причем $i = 1$. Тогда имеем:

$$i + l = d + r. \quad (28.7)$$

Проектируем обе части уравнения (28.7) на оси Ax и Ay . Обозначая угол, образованный шатуном BC с осью Ax , через δ , получаем для произвольного i -го положения механизма уравнения проекций на оси Ax и Ay в виде

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_i + l \cos \delta_i &= d + r \cos \psi_i, \\ \sin \alpha_i + l \sin \delta_i &= r \sin \psi_i \end{aligned} \right\} \quad (28.8)$$

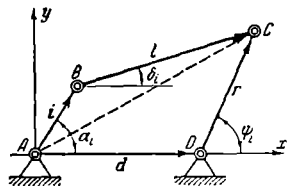


Рис. 762. Проектирование схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям кривошипа и коромысла.

$$\left. \begin{aligned} l \cos \delta_i &= d + r \cos \psi_i - \cos \alpha_i, \\ l \sin \delta_i &= r \sin \psi_i - \sin \alpha_i. \end{aligned} \right\} \quad (28.9)$$

Возводим почленно уравнения (28.9) в квадрат и складываем их. Тогда получаем:

$$l^2 = d^2 + r^2 + 1 + 2dr \cos \psi_i - 2d \cos \alpha_i - 2r \cos (\psi_i - \alpha_i). \quad (28.10)$$

Переносим l^2 в правую часть уравнения (28.10), делим все члены уравнения на $2d$. Решая уравнение относительно $\cos \alpha_i$, получаем:

$$\cos \alpha_i = r \cos \psi_i - \frac{r}{d} \cos (\psi_i - \alpha_i) + \frac{d^2 + r^2 + 1 - l^2}{2d}. \quad (28.11)$$

Введем обозначения

$$p_0 = r, \quad p_1 = -\frac{r}{d}, \quad p_2 = \frac{d^2 + r^2 + l - l^2}{2d}. \quad (28.12)$$

Тогда уравнение (28.11) представится так:

$$\cos \alpha_i = p_0 \cos \psi_i + p_1 \cos (\psi_i - \alpha_i) + p_2. \quad (28.13)$$

Подставляя в равенство (28.13) заданные углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и ψ_1, ψ_2 и ψ_3 (рис. 761), получаем систему, состоящую из трех линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= p_0 \cos \psi_1 + p_1 \cos (\psi_1 - \alpha_1) + p_2, \\ \cos \alpha_2 &= p_0 \cos \psi_2 + p_1 \cos (\psi_2 - \alpha_2) + p_2, \\ \cos \alpha_3 &= p_0 \cos \psi_3 + p_1 \cos (\psi_3 - \alpha_3) + p_2. \end{aligned} \right\} \quad (28.14)$$

Решая совместно эту систему уравнений, определяем из них величины p_0, p_1 и p_2 . Определив эти величины, можно с помощью соотношений (28.12) найти искомые параметры l, r и d .

Если требуется спроектировать механизм по двум положениям звеньев AB и CD , то одним из параметров механизма можно задаться произвольно, и задача имеет бесчисленное количество возможных решений.

3°. Перейдем теперь к рассмотрению графических методов решения задач о синтезе механизмов шарнирного четырехзвенника по двум и трем заданным положениям его звеньев. Эти задачи могут быть решены с помощью элементарных геометрических построений.

Пусть заданы два положения B_1C_1 и B_2C_2 шатуна шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 763). Требуется найти положение точек A и D — центров вращения звеньев четырехзвенника, соединенных в кинематические пары со стойкой. Точки B_1 и B_2 должны лежать на окружности с центром в A , а точки C_1 и C_2 — на окружности с центром в D . Через две точки можно провести бесчисленное множество окружностей. Геометрическим местом центров этих окружностей является прямая $1-1$, перпендикулярная к отрезку B_1B_2 и проходящая через середину n этого отрезка. Точку A можно поместить в любой точке прямой $1-1$. Аналогично точка D может быть выбрана в любом месте прямой $2-2$, перпендикулярной к отрезку C_1C_2 и проходящей через его середину m . Таким образом, для указанного задания можно построить бесчисленное множество механизмов, удовлетворяющих заданным условиям. Дополнительные ограничения могут быть наложены, если, например, поставить условие, чтобы механизм был двухкривошипный или кривошипно-коромысловый и т. д.

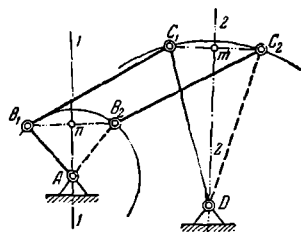


Рис. 763. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по двум заданным положениям шатуна.

Если требуется, чтобы одна из точек звена BC , например точка C , перемещалась по неподвижной прямой $q - q$, то центр D окружности должен находиться в бесконечности, вращательная пара D переходит в поступательную пару (рис. 764), и мы получаем кривошипно-ползунный механизм.

Можно потребовать дополнительно, чтобы при заданном перемещении шатуна BC углы поворота звеньев AB и DC были также заданными, например, чтобы угол поворота звена AB равнялся α , а угол поворота звена DC равнялся β (рис. 765). Тогда соединяем точки B_1

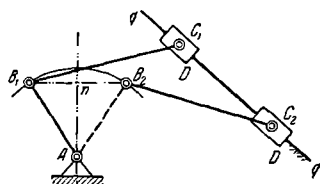


Рис. 764. К проектированию схемы кривошипно-ползунного механизма по двум заданным положениям шатуна.

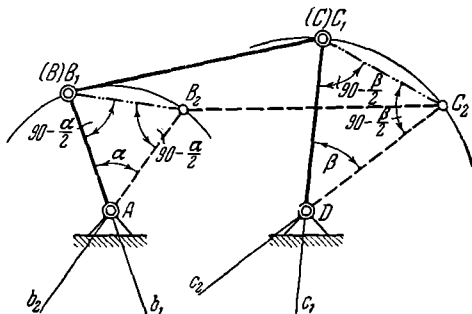


Рис. 765. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по двум заданным положениям шатуна и дополнительно заданным углам между положениями кривошипа и коромысла.

и B_2 прямой и откладываем при точках B_1 и B_2 углы, равные $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Точка пересечения A прямых B_1b_1 и B_2b_2 и определит положение оси A вращения звена AB . Точно так же, если соединить точки C_1 и C_2 , при этих точках от-

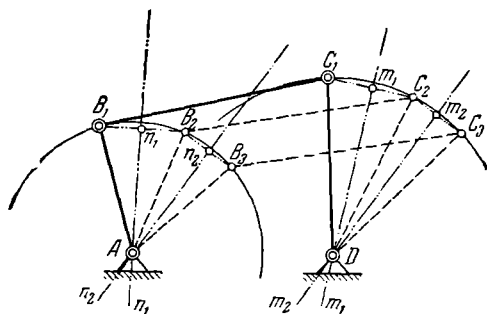


Рис. 766. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям кривошипа и коромысла.

ложить углы $90^\circ - \frac{\beta}{2}$, то точка D пересечения прямых C_1c_1 и C_2c_2 определит положение оси вращения D звена DC .

4°. Пусть, далее, требуется построить шарнирный четырехзвенник, если заданы три положения шатуна BC , например, положения B_1C_1 , B_2C_2 и B_3C_3 (рис. 766). Задача сводится к нахождению центра окружности,

проходящей через три заданные точки. Как известно, эта задача имеет только одно решение. Имеем точки B_1 , B_2 и B_3 . Соединим прямыми точки B_1 и B_2 и в середине отрезка B_1B_2 восставим перпендикуляр $n_1 - n_1$. Далее, соединим точки B_2 и B_3 и в середине отрезка B_2B_3 восставим перпендикуляр $n_2 - n_2$. Положение центра A

получится на пересечении перпендикуляров $n_1 - n_1$ и $n_2 - n_2$. Аналогично на пересечении перпендикуляров $m_1 - m_1$ и $m_2 - m_2$ определяется положение центра D . Если точки C , C_1 и C_2 заданы на прямой, то звено CD выполняется в виде ползуна, как это было выяснено для случая, показанного на рис. 764.

Тем же методом может быть решена и задача о синтезе схемы шарнирного четырехзвенника по трем положениям ведомого коромысла или ползуна. В самом деле, если заданы три положения DC , DC_1 и DC_2 коромысла 3 (рис. 767), то можно еще задаться тремя произвольными положениями CB , C_1B_1 , C_2B_2 шатуна BC относительно коромысла DC . Зададимся углами передачи γ , γ_1 и γ_2 , образуемыми шатуном и

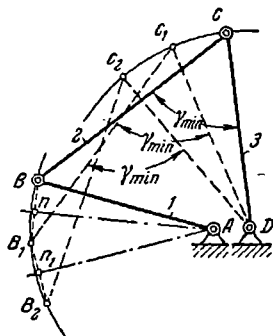


Рис. 767. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям коромысла и заданным углам передачи в заданных положениях.

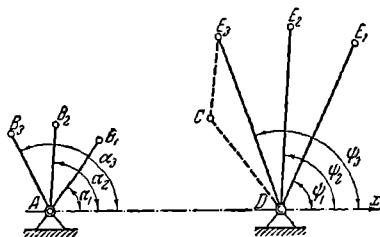


Рис. 768. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям кривошипа и коромысла.

коромыслом, удовлетворяющими условию $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{12 \min} = \gamma_{\min}$ (см. § 108). Тогда определится положение точек B , B_1 и B_2 звена AB . Нахождение точки A и длины звена AB сведется к построению окружности, проходящей через точки B , B_1 и B_2 .

5°. Рассмотрим теперь тот случай синтеза схемы шарнирного четырехзвенного механизма, когда заданы три положения звена 1, занимающего последовательно положения AB_1 , AB_2 и AB_3 , определяемые углами α_1 , α_2 и α_3 , и заданы положения плоскости, принадлежащей звену 3. Положение этой плоскости задано в виде трех последовательных положений прямой DE , принадлежащей плоскости. Пусть прямая DE занимает последовательно положения DE_1 , DE_2 и DE_3 , определяемые углами ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 . Требуется определить длину шатуна BC , входящего в кинематические пары B и C со звеньями 1 и 3. Предположим, что шатун 2 входит с звеном AB в кинематическую пару с осью B . Тогда необходимо найти положение оси C вращательной кинематической пары, в которую входит шатун 2 и звено 3. Рассмотрим положение точки B звена AB относительно прямой DE_1 (рис. 769). В первом положении точка B образует с прямой BE_1

треугольник DE_1B_1 , во втором положении — треугольник DB_2E_2 и в третьем положении — треугольник DB_3E_3 . Теперь, чтобы найти положение точки B относительно прямой DE_1 , остановим эту прямую. Тогда первое относительное положение точки B совпадает с ее абсолютным положением B_1 . Второе относительное положение точки B будет положение B'_2 , которое найдем, если сторону DE_2 треугольника DB_2E_2 совместим с DE_1 . Тогда вершина B_2 треугольника займет положение B'_2 . Третье относительное положение точки B — положение B'_3 — построим, если сторону DE_3 треугольника DB_3E_3 совместим с DE_1 . В этом случае вершина B_3 треугольника займет положение B'_3 .

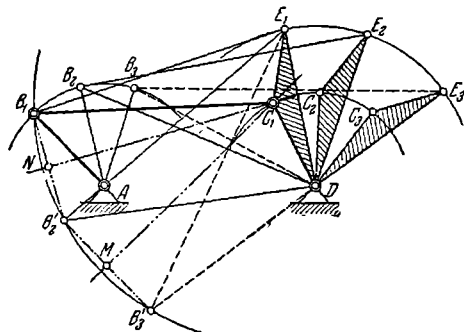


Рис. 769. Построение схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям кривошипа и коромысла.

В движении относительно прямой DE точка B последовательно занимает положения B_1 , B'_2 и B'_3 . Так как в рассматриваемом относительном движении точка C_1 шатуна 2 остается неподвижной, его точка B занимает положения B_1 , B'_2 и B'_3 то точка C_1 должна быть центром окружности, проходящей через точки B_1 , B'_2 и B'_3 . Положение точки C определим обычным путем.

Соединим точки B_1 , B'_2 и B'_3 прямыми и из середин N и M отрезков $B_1B'_2$ и $B'_2B'_3$ проведем перпендикуляры NC_1 и MC_1 . Точка C_1 пересечения этих перпендикуляров и определит положение оси вращательной кинематической пары C_1 в первом положении механизма.

Таким образом, требуемая схема шарнирного четырехзвенного механизма является фигурой AB_1C_1D . При трех заданных положениях звена 1 и плоскости, принадлежащей звену 3, решение получается единственным. При двух заданных положениях точка C может быть выбрана в любой точке перпендикуляра, восстановленного в середине отрезка, соединяющего соответствующие положения точки B .

6°. Аналогично решается задача, если требуется спроектировать схему кривошипно-ползунного механизма. Пусть заданы три положения плоскости кривошипа в виде трех последовательных положений AE_1 , AE_2 и AE_3 прямой AE , принадлежащей этой плоскости, и три положения ползуна C_1 , C_2 и C_3 (рис. 770).

Соединяем точки E_1 , E_2 и E_3 прямыми с точками C_1 , C_2 и C_3 . Получаем тогда треугольники AE_1C_1 , AE_2C_2 и AE_3C_3 . За начальное положение берем положение кривошипа, определяемое прямой AE_1 . Пусть кривошип входит в кинематическую пару с шатуном в точке B . Для определения положения точки B строим на отрезке AE_1 треу-

ной угловой скоростью, то отношение углов поворота φ' и φ'' равно

$$\frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{t'}{t''}, \quad (28.15)$$

где t' и t'' суть промежутки времени, за которые кривошип AB поворачивается соответственно на углы φ' и φ'' . За время t' и t'' точка C пройдет пути, равные дугам:

$$\cup C''C' = \cup C'C''. \quad (28.16)$$

Очевидно, что средние скорости точки C при прохождении дуг $C''C'$ и $C'C''$ не будут равны. Величина средней скорости v'' при переходе точки C из положения C' в положение C''

$$v'' = \frac{\cup C'C''}{t''}, \quad (28.17)$$

а величина средней скорости v' при переходе точки C из положения C'' в положение C'

$$v' = \frac{\cup C''C'}{t'}. \quad (28.18)$$

Разделив равенство (28.17) на (28.18) и приняв во внимание равенства (28.15) и (28.16), получим:

$$\frac{v''}{v'} = \frac{t'}{t''} = \frac{\varphi'}{\varphi''} = K.$$

Величина K носит название *коэффициента изменения средней скорости ведомого звена*. Из рис. 771 видно, что величина коэффициента K равна

$$K = \frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}. \quad (28.19)$$

Из формулы (28.19) можно определить значение угла θ , образованного направлениями AC' и AC'' :

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1}. \quad (28.20)$$

С задачей синтеза механизма по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена мы встречаемся в тех случаях, когда требуется, чтобы движение ведомого звена происходило с различными скоростями во время прямого и обратного ходов. Например, с таким заданием можно встретиться при проектировании механизма строгального станка, механизма грохота и других механизмов, где требуется, чтобы средняя скорость в период прямого (рабочего) хода ведомого звена была меньше, чем в период его обратного (холостого) хода.

8°. Синтез схемы механизма шарнирного четырехзвенника по заданному коэффициенту K может быть выполнен следующим образом.

По заданному K вычисляем, пользуясь формулой (28.20), угол θ . Далее, строим заданные крайние положения DC' и DC'' коромысла DC (рис. 772). Пусть они образуют некоторый угол ψ . Точки C' и C'' соединяем прямой и на отрезке $C'C''$, как на хорде, строим дугу, вмещающую угол θ . Для этого в точке C' восставляем перпендикуляр $C'n$ к отрезку $C'C''$ и при точке C' строим угол $90^\circ - \theta$. Тогда угол $C'AC''$ будет равен θ . Через точки C' , C'' и A проводим окружность L . Центр вращения кривошипа AB может быть выбран в любой точке на окружности L . В самом деле, соединив прямыми любую точку этой дуги с точками C' и C'' , мы получим угол между этими прямыми, равный θ . Пусть, например, центром вращения кривошипа выбрана точка A_1 . Тогда отрезки A_1C'' и A_1C' будут равны

$$A_1C'' = l - r \quad \text{и} \quad A_1C' = l + r,$$

где r и l суть длины кривошипа AB и шатуна BC . Из этих уравнений следует:

$$A_1C' - A_1C'' = l + r - l + r = 2r$$

или

$$r = A_1B = \frac{A_1C' - A_1C''}{2}.$$

Из точки A_1 проводим дугу радиусом A_1C'' до пересечения с линией A_1C' в точке E . Тогда отрезок EC' получается равным $2r$, откуда

$$r = \frac{EC'}{2}.$$

Откладываем от точки A_1 на прямой A_1C' отрезок A_1B' , равный $EC'/2$, а на продолжении прямой A_1C'' — отрезок A_1B'' , также равный $EC'/2$. Тогда получаем четырехзвенный шарнирный механизм, обладающий заданным коэффициентом K .

Так как в качестве центра вращения звена AB могут быть выбраны различные точки окружности L , то можно налагать на размеры звеньев механизма дополнительные условия, например, можно задаться длиной одного из звеньев механизма.

9°. Аналогично может быть решена задача о синтезе схемы кривошипно-ползунного механизма по заданному коэффициенту K . Для этого по заданному коэффициенту K определяем угол θ . Далее, на оси x — x движения ползуна C (рис. 773) намечаем крайние положения C' и C'' ползуна. В точке C' восставляем перпендикуляр $C'n$. При точке C'' откладываем угол $90^\circ - \theta$. Тогда определится положение точки N — одной из точек дуги, вмещающей угол θ . Проводим через

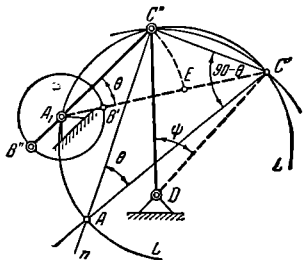


Рис. 772. Построение схемы механизма шарнирного четырехзвенника по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена.

точки C' , N и C'' окружность L . Центром вращения звена AB может быть выбрана любая точка окружности L . На рис. 773 в качестве центра вращения звена AB выбрана точка A_1 . Тогда аналогично ранее рассмотренному построению определится длина кривошипа AB и длина шатуна BC . В качестве дополнительного условия можно задать, например, размер e дезаксиала.

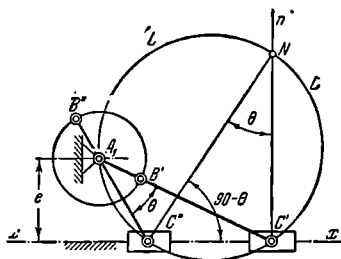


Рис. 773. Построение схемы кривошипно-ползунного механизма по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена.

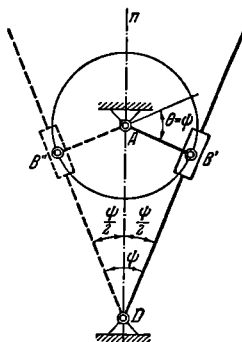


Рис. 774. К проектированию схемы кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена.

В заключение рассмотрим кулисный механизм с качающейся кулисой. Из рис. 774 непосредственно следует, что угол θ равен углу ψ поворота кулисы. Следовательно, при синтезе кулисного механизма коэффициент K определяется заданным углом ψ качания кулисы, т. е.

$$K = \frac{180^\circ + \psi}{180^\circ - \psi}.$$

Этому значению K удовлетворяют различные точки прямой Dn , делящей угол ψ пополам. В качестве дополнительного условия может быть задано расстояние AD между точками A и D . При выборе расстояния AD необходимо соблюдать условие, чтобы оно было больше радиуса кривошипа AB .

§ 134. Задача о приближенном воспроизведении заданного закона движения

1°. Как было показано выше (§ 132, 7°), задача о воспроизведении заданного непрерывного закона движения в большинстве случаев может быть решена только приближенно. Рассмотрим вопрос о том, как может быть оценено получаемое отклонение от заданного закона движения.

Пусть спроектированный механизм $ABCD$ (рис. 775) шарнирного четырехзвенника определяется параметрами l , r и d (см. § 132, 6°). Пусть, далее, угол ψ , образованный звеном CD со стойкой, не равен расчетному углу ψ_p , который определяется заданным законом движения. Тогда разность

$$\Delta\psi = \psi_p - \psi \quad (28.21)$$

может быть принята за меру отклонения полученного решения от расчетного. Чем меньше максимальное значение разности (28.21) в течение задан-

ного перемещения отличается от нуля, тем точнее воспроизводится заданный закон движения.

Более удобно за меру отклонения принять другую величину. Предположим, что параметры r и d остаются неизменными, а изменяется только параметр l , который у спроектированного механизма $ABCD$ имеет значение l , а у механизма, который в точности воспроизвел бы заданный закон движения, имеет расчетное значение l_p . Тогда за меру отклонения можно принять разность

$$\Delta l = l - l_p. \quad (28.22)$$

Связь между величинами $\Delta\psi$ и Δl получится, если представить себе переход механизма от конфигурации $ABCD$ к конфигурации ABC_pD как поворот кулисы N , по которой скользит ползун M , входящий со звеном CD во вращательную пару, из положения Bz в положение Bz_p (рис. 775). Таким

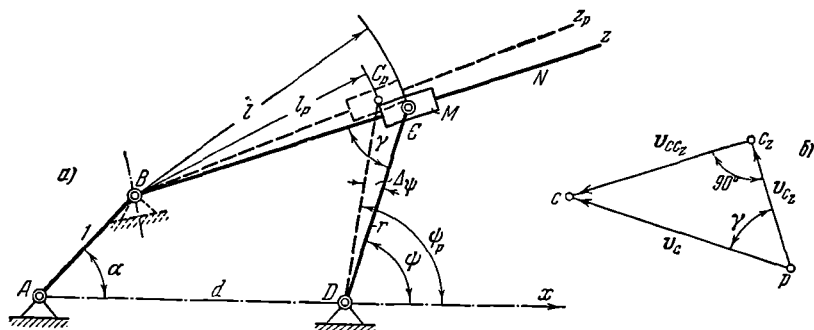


Рис. 775. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника, воспроизводящего заданную зависимость: а) схема условного механизма; б) план скоростей.

образом, этот переход мы можем представить как поворот кулисного механизма BCD с неподвижными осями B и D из положения BCD в положение BC_pD . При этом звено CD поворачивается на малый угол $\Delta\psi$. Тогда с достаточной степенью точности можно считать направления малых перемещений точек механизма BCD совпадающими с направлениями скоростей соответствующих точек. Строим план аналогов скоростей механизма BCD (рис. 775, б). Обозначим угол передачи BCD через γ . Тогда из треугольника $pczc$ плана скоростей имеем:

$$\sin \gamma = \frac{czc}{pc} = \frac{v_{Ccz}}{v_C}, \quad (28.23)$$

или так как с точностью до малых высшего порядка имеют место равенства

$$v_{Ccz} = \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad \text{и} \quad v_C = \frac{r \Delta \psi}{\Delta t},$$

то

$$\sin \gamma = \frac{\Delta l}{r \Delta \psi},$$

откуда

$$\Delta \psi = \frac{\Delta l}{r \sin \gamma}. \quad (28.24)$$

Таким образом, зная в каждом положении механизма отклонение Δ_l в длине шатуна и угол передачи γ , можно всегда определить величину отклонения Δ_ψ , допущенную при проектировании механизма.

Искомые параметры кинематической схемы должны быть выбраны так, чтобы разность Δ_ψ (28.24) не выходила за пределы допускаемых отклонений от заданной зависимости. Следует при этом иметь в виду, что одновременно с этим должны быть выполнены дополнительные условия, определяющие работоспособность механизма: допустимые углы передачи γ , габариты механизма, возможность вращения его звеньев на полный оборот и т. д. Другими словами, условие малого отклонения от нуля разности во многих задачах есть условие необходимое, но недостаточное. Поэтому практически удобный путь определения искомых параметров кинематической схемы состоит в быстром и систематическом обозрении всех возможных вариантов механизма, удовлетворяющих условию достаточно точного воспроизведения заданной зависимости с целью выявления тех вариантов, которые удовлетворяют всем условиям, предъявляемым к заданному механизму. После предварительного определения параметров кинематической схемы можно в случае необходимости применять аналитическое уточнение параметров механизма с целью уменьшения отклонения от заданной зависимости.

2°. Графический метод предварительного определения параметров кинематической схемы, предложенный Н. И. Левитским и Б. И. Степановым, поясним на примере проектирования шарнирного четырехзвенника для воспроизведения заданной функции $\psi = \psi(\alpha)$ (рис. 759).

Для решения задачи выбираем на графике заданной функции $m+1$ точек так, чтобы они соответствовали равным перемещениям ведущего звена (рис. 776). Число точек зависит от вида заданной зависимости. Рекомендуется выбирать такое число точек, чтобы максимальная разность между ординатой точки хорды, соединяющей две соседние точки кривой графика, и ординатой, соответствующей точки самой кривой, не превосходила допускаемого отклонения. Затем задаемся углом размаха ведомого звена CD (рис. 776), т. е. величиной $\psi_m - \psi_0$. Далее, определяем углы поворота ведомого звена CD , отсчитываемые от начального положения $\psi_1 - \psi_0, \psi_2 - \psi_0, \dots, \psi_m - \psi_0$.

Определив углы поворота звена CD , приступаем к графическому определению искомых параметров кинематической схемы. Все построение рекомендуется производить в возможно более крупном масштабе.

Построение начинаем с вычерчивания положений ведомого звена, соответствующих равным интервалам изменения углов поворота ведущего звена, причем длина звена CD может быть выбрана произвольно, так как зависимость между углами поворота звеньев AB и CD зависит лишь от относительных размеров звеньев. На рис. 776 построенные положения звена CD обозначены через $C_0D, C_1D, \dots, C_mD$, причем $\angle C_1DC_0 = \psi_1 - \psi_0, \angle C_2DC_0 = \psi_2 - \psi_0, \dots$. Далее, задавшись длиной шатуна BC , описываем из точек $C_0, C_1, \dots, C_m$ как из центров окружности радиусом, равным выбранной длине шатуна, и проводим к направлениям $C_0D, C_1D, \dots, C_mD$ прямые под углом, равным минимально допустимому углу передачи $\gamma_{\min}$. Участки окружностей с центрами $C_0, C_1, \dots, C_m$, которые оказываются заключенными между этими линиями, отмечены на рис. 776 жирными линиями. Очевидно, положения точки B не должны располагаться на этих участках кривых, так как при этом угол передачи будет меньше допустимого. Выбрав положение точки B при некотором допустимом значении угла передачи γ , найдем положение точки A и длину звена AB из условия получения равных изменений углов поворота ведущего звена AB или, что то же самое, равных расстояний между точками $B_0, B_1, \dots, B_m$, представляющих собой положения точки B , соответствующие данным положениям $C_0, C_1, \dots, C_m$ точки C .

С этой целью задаемся величиной хорды B_0B_1 и, взяв ее в раствор циркуля, засекаем последовательно от точки B_0 окружности, проведенные из центров $C_0, C_1, \dots, C_m$. Полученные точки, которые обозначены на чертеже

через $B_0, B_1, \dots, B_m$, представляют собою вершины ломаной линии, которая с некоторой погрешностью может быть заменена дугой окружности. Центр этой окружности определяет искомое положение точки A , а радиус этой окружности — длину звена AB . Одновременно определяется также угол размаха ведущего звена $\alpha_m — \alpha_0$ и начальные углы α_0 и ψ_0 .

Однако при произвольно выбранном угле передачи ломаная линия $B_0 B_1 \dots B_m$ может значительно отличаться от дуги окружности, поэтому следует построить несколько ломаных $B_0 B_1 \dots B_m$ при разных углах передачи и выбрать из них ту, которая ближе всего подходит к дуге окружности. Вид этих ломаных изменяется достаточно закономерно, поэтому область

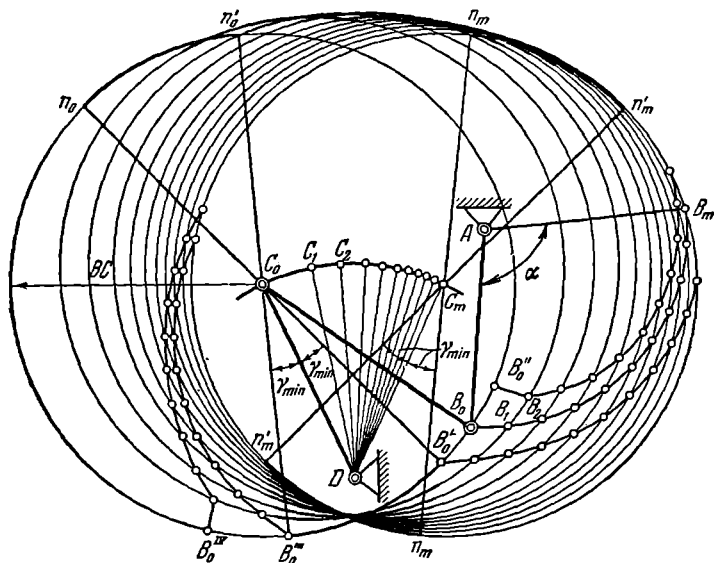


Рис. 776. Графическое решение задачи о проектировании схемы механизма шарнирного четырехзвенника.

углов передачи, при которых ломаные $B_0 B_1 \dots B_m$ близки к дугам окружностей, определяется практически очень быстро. Например, при длине хорды $B_0 B_1$, принятой на рис. 776, достаточно исследовать лишь участки $B_0' B_0''$ и $B_0''' B_0^{IV}$.

Далее, можно применить варьирование величины хорды $B_0 B_1$, которая, однако, может меняться сравнительно в небольших пределах, так как нижняя граница этой величины зависит от максимальной величины расстояния между двумя соседними окружностями, проведенными из центров $C_0, C_1, \dots, C_m$, а верхняя граница определяется из условия расположения точек $B_0, B_1, \dots, B_m$ на участках, соответствующих допустимым углам передачи на всем интервале изменения углов поворота ведущего звена. Во избежание затемнения чертежа рекомендуется для каждой величины хорды $B_0 B_1$ оставлять лишь одну ломаную $B_0 B_1 \dots B_m$, наиболее близко подходящую к дуге окружности.

Предложенный прием позволяет на одном чертеже непосредственно определять пять параметров кинематической схемы (относительные длины звеньев d и r , начальные углы α_0 и ψ_0 и угол размаха α ведущего звена). Выбор указанных пяти параметров обеспечивает обычно в первом прибли-

жении достаточную точность воспроизведения заданной зависимости. В случае необходимости можно, однако, применить также варьирование остальных параметров, производя указанные построения при различных длинах шатуна BC и при различных углах размаха ведомого звена CD . Следует отметить лишь, что при изменении длины l шатуна BC область получения ломаных $B_0 B_1 \dots B_m$, близких к дуге окружности, сохраняет обычно свое расположение по отношению к участкам, отмеченным жирными линиями.

Аналогично выполняются построения для кривошипно-шатунного механизма и других видов четырехзвенных механизмов.

Синтез многозвенных механизмов, образованных путем последовательного соединения четырехзвенных механизмов, осуществляется путем последовательных приближений — сначала подбираются размеры первого четырехзвенного механизма (считая от ведомого звена), затем, полагая выбранные размеры первого механизма заданными, подбираются размеры второго механизма и т. д.

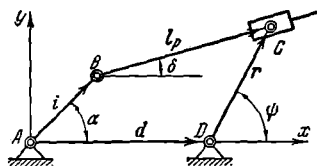


Рис. 777. Векторный контур пятизвенного механизма, применяемый для определения погрешности, получающейся при проектировании схемы механизма шарнирного четырехзвенника.

3°. Рассмотренный графический метод предварительного определения параметров кинематической схемы дает возможность получить приближение к данной зависимости в пределах точности графических построений. В приборостроении, однако, часто требуется получение столь малых отклонений от заданной зависимости, что они не могут быть выявлены с помощью только графических методов. В этих случаях после предварительного выбора параметров кинематической схемы надо произвести

их уточнение с целью уменьшения отклонения от заданной зависимости. Это уточнение желательно выполнить из условия обращения в минимум максимального значения разности Δ_ψ (28.24).

Принимая во внимание, что при надлежащем выборе размеров механизма разности длин l и l_p (рис. 775) малы, можно характеризовать отклонения от заданной зависимости также величиной Δ , которую примем равной

$$\Delta = \Delta_l (l + l_p) = (l - l_p) (l + l_p) = l^2 - l_p^2. \quad (28.25)$$

Эта разность получается при умножении отклонения Δl на коэффициент $(l + l_p)$, мало отличающийся от постоянной величины, равной $2l$.

Связь между величинами Δ_ψ (28.24) и Δ (28.25) получится, если величину Δ_l из формулы (28.25) представить в виде

$$\Delta_l = \frac{\Delta}{l + l_p} \approx \frac{\Delta}{2l}, \quad (28.26)$$

так как $l + l_p \approx 2l$.

Подставляя выражение (28.26) в формулу (28.24), получаем:

$$\Delta_\psi = \frac{\Delta}{2lr \sin \gamma}.$$

Аналитические выражения функции Δ можно получить, если для определения ее величины спроектировать схему пятизвенного механизма на направление оси Ax (рис. 777) и на направление оси Ay и затем исключить угол δ наклона шатуна к оси Ax . Имеем согласно уравнению (28.10)

$$l_p^2 = d^2 + r^2 + l^2 + 2dr \cos \psi - 2d \cos \alpha - 2r \cos (\psi - \alpha).$$

Далее, учитывая условие (28.25), получаем:

$$\Delta = l^2 - l_p^2 = 2r \cos (\psi - \alpha) + 2d \cos \alpha - 2dr \cos \psi + l^2 - d^2 - r^2 - l. \quad (28.27)$$

Из условий минимума функции Δ для уточнения выбранных параметров кинематической схемы достаточно вычислить три или четыре параметра, определив значение остальных параметров непосредственно из чертежа механизма, осуществляющего приближенно заданную зависимость.

4°. Рассмотрим вычисление трех параметров механизма. Пусть, например, требуется вычислить относительные размеры звеньев r , d и l . Тогда функция Δ (28.27) может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta = A [F(\alpha) - p_0 \varphi_0(\alpha) - p_1 \varphi_1(\alpha) - p_2 \varphi_2(\alpha)]; \quad (28.28)$$

$$F(\alpha) = \cos \alpha; \quad (28.29)$$

$$\varphi_0(\alpha) = \cos \psi; \quad (28.30)$$

$$\varphi_1(\alpha) = \cos(\psi - \alpha); \quad (28.31)$$

$$\varphi_2(\alpha) = 1; \quad (28.32)$$

$$A = 2d; \quad (28.33)$$

$$p_0 = r; \quad (28.34)$$

$$p_1 = -\frac{r}{d}; \quad (28.35)$$

$$p_2 = \frac{d^2 + r^2 + 1 - l^2}{2d}. \quad (28.36)$$

Функции $F(\alpha)$, $\varphi_0(\alpha)$, $\varphi_1(\alpha)$ и $\varphi_2(\alpha)$ известны, так как для каждого выбранного значения угла α можно, зная величины α_0 и ψ_0 , вычислить соответствующий угол ψ . Коэффициенты A , p_0 , p_1 и p_2 зависят от вычисляемых параметров механизма. Для определения их используем условия обращения в минимум суммы

$$S = \sum_{i=0}^{i=m} (\Delta_i)^2, \quad (28.37)$$

где Δ_i — величина Δ при $\alpha = \alpha_i$.

Из теории приближения функций известно, что для функции вида (28.28) величины коэффициентов p_0 , p_1 и p_2 , при которых достигается минимум суммы S , определяются из системы линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} c_{00}p_0 + c_{01}p_1 + c_{02}p_2 &= \gamma_0, \\ c_{10}p_0 + c_{11}p_1 + c_{12}p_2 &= \gamma_1, \\ c_{20}p_0 + c_{21}p_1 + c_{22}p_2 &= \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (28.38)$$

Коэффициенты c_{ki} и γ_k в уравнениях (28.38) вычисляются по формулам

$$c_{ki} = \sum_{i=0}^{i=m} \varphi_k(\alpha_i) \varphi_l(\alpha_i) \quad (k=0, 1, 2; i=0, 1, 2), \quad (28.39)$$

$$\gamma_{ki} = \sum_{i=0}^{i=m} F(\alpha_i) \varphi_k(\alpha_i) \quad (k=0, 1, 2). \quad (28.40)$$

Для определения искомых размеров звеньев механизма подсчитываем для выбранных $m+1$ точек значения функций $F(\alpha)$, $\varphi_0(\alpha)$ и $\varphi_1(\alpha)$ по формулам (28.29), (28.30) и (28.31) и коэффициенты γ_k и c_{ki} по формулам (28.40) и (28.39).

После решения системы уравнений (28.38) находим искомые размеры механизма в соответствии с формулами (28.34) — (28.36).

Для вычисления отклонений от заданной зависимости определяем по формуле (28.27) значения функции Δ и затем по формуле

$$\Delta_\psi = \frac{\Delta}{2rl \sin \gamma}$$

искомые отклонения, причем значения $\sin \gamma$ определяем графически из построенных планов механизма или аналитически.

Аналогично решается задача при других комбинациях трех искомых параметров механизма.

В случае необходимости можно применить вычисление четырех и более параметров кинематической схемы *).

§ 135. Задача о воспроизведении заданной траектории

1°. Для решения задачи о воспроизведении заданной траектории можно воспользоваться аналитическими методами или методами, основанными на комбинации графических построений и аналитических вычислений. При помощи аналитических методов еще в прошлом столетии академик П. Л. Чебышев создал несколько механизмов, в которых шатунная кривая очень мало отличается от отрезка прямой линии или от дуги окружности. В дальнейшем при помощи этих методов были решены еще несколько частных задач о воспроизведении некоторых кривых при помощи механизмов с низшими парами. Эти решенные задачи, однако, не охватывают всех практически

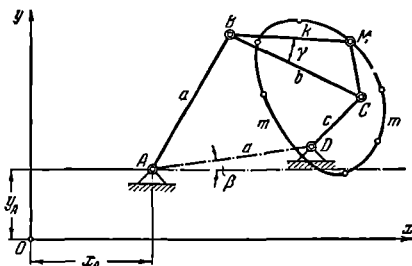


Рис. 778. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника, точка шатуна которого описывает заданную траекторию.

важных задач, которые возникают при синтезе механизмов с низшими парами для воспроизведения заданной траектории и являются весьма трудоемкими. Более доступны методы, основанные на предварительном определении параметров кинематической схемы при помощи графических методов с последующим аналитическим уточнением выбранных параметров.

Для шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 778), в котором некоторая точка M шатуна BC должна точно или приближенно двигаться по заданной траектории $m-m$, подлежат определению девять параметров

кинематической схемы: длины звеньев a, b, c, d , размеры, определяющие положение точки M на шатуне, т. е. размер k и угол γ , и параметры, устанавливающие положение механизма относительно заданной траектории, т. е. координаты x_A и y_A центра A и угол β . Для предварительного графического определения этих параметров задается (рис. 779) положением точки A относительно заданной траектории (координатами x_A и y_A), а также длинами $AB=a$ и $BM=k$. Перемещая точку M по заданной траектории $m-m$ и точку B по окружности радиуса $AB=a$, описанной из центра A , вычерчиваем траектории различных точек, жестко связанных с отрезком BM . Из всех построенных траекторий выбираем ту траекторию, которая на всем своем протяжении наиболее подходит к дуге окружности или к полной окружности. Радиус этой окружности определяет размер $CD=c$, а положение центра окружности D — длину стойки $AD=d$. Положение же выбранной точки C дает длину шатуна $BC=b$ и угол γ наклона отрезка BM к отрезку BC . Если полученное приближение к заданной траектории является слишком грубым, то можно, изменив расположение центра A относительно заданной траектории или выбрав другие значения размеров $AB=a$ и $BM=k$, вновь произвести указанные построения.

*) Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А., Синтез плоских механизмов, Физматгиз, 1959.

кривым, повернутым одна относительно другой на угол α , с коэффициентом подобия k , который может быть определен из соотношения

$$k = \frac{AM_1}{AM_2} = \frac{BM_1}{AD} = \frac{AB}{DM_2}. \quad (28.41)$$

Для доказательства указанных свойств пантографа следует вывести соотношение (28.41) и показать, что $\angle M_1AM_2 = \alpha$.

Из подобия треугольников CBM_1 и DCM_2 имеем:

$$\frac{BM_1}{BC} = \frac{DC}{DM_2}.$$

Принимая во внимание, что $DC = AB$ и $BC = AD$, получаем:

$$\frac{BM_1}{AB} = \frac{AD}{DM_2}.$$

По свойству параллелограмма $\angle CBA = \angle ADC$ и, следовательно, $\angle ABM_1 = \angle ADM_2$. Отсюда следует подобие треугольников M_1BA и ADM_2 .

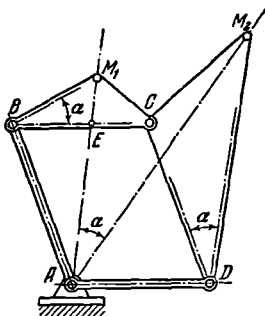


Рис. 781. Схема пантографа Сильвестра.

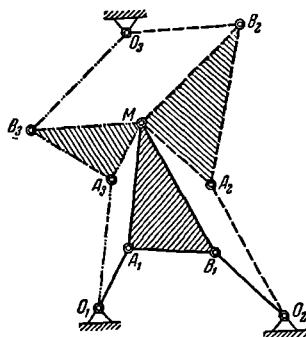


Рис. 782. К доказательству теоремы Робертса — Чебышева.

и на основании подобия последних соотношение (28.41). Из подобия тех же треугольников следует:

$$\angle AM_1B = \angle M_2AD.$$

Далее, вследствие параллельности сторон AD и BC мы имеем: $\angle M_1AD = \angle M_1AM_2 + \angle M_2AD = \angle M_1EC = \alpha + \angle AM_1B = \alpha + \angle M_2AD$. Следовательно,

$$\angle M_1AM_2 = \alpha.$$

4°. На основании свойств пантографа можно доказать *теорему Робертса — Чебышева*, согласно которой одна и та же шатунная кривая шарнирного четырехзвенника может быть в общем случае воспроизведена тремя различными четырехзвенными механизмами.

Пусть точка M шарнирного четырехзвенника $O_1A_1B_1O_2$ (рис. 782) описывает некоторую шатунную кривую. Присоединим в точках M и O_2 двухповодковую группу MA_2O_2 так, чтобы образовался пантограф Сильвестра. Тогда траектория точки B_2 будет подобна траектории точки A_1 и, следовательно, точка B_2 будет описывать дугу окружности, радиус которой равен радиусу O_1A_1 , умноженному на отношение подобия k . Центр O_3 этой окруж-

ности на основании свойств пантографа определяется из условия, что треугольник $O_1O_2O_3$ подобен треугольнику A_1B_1M .

Соединив точки B_2 и O_3 при помощи звена, входящего в две вращательные пары, мы не нарушим подвижности механизма. Отсоединив же исходный четырехзвенник $O_1A_1B_1O_2$, получим преобразованный механизм $O_2A_2B_2O_3$, точка M которого описывает ту же кривую, что и в исходном механизме. Аналогично можно получить третий четырехзвенный механизм $O_1A_2B_3O_3$, описывающий ту же шатунную кривую.

Если точка M лежит на линии, соединяющей центры шарниров шатуна, то пантограф Сильвестра превращается в пантограф Шейнера и соответственно подобие треугольников переходит в пропорциональность отрезков (рис. 783):

$$\frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{MB_2}{MA_2} = \frac{A_2B_3}{A_3M} = \frac{O_1O_3}{O_1O_2}.$$

Первым механизмом является механизм $O_1A_1B_1O_2$, вторым — $O_1A_2B_3O_3$ и третьим — $O_2A_2B_2O_3$.

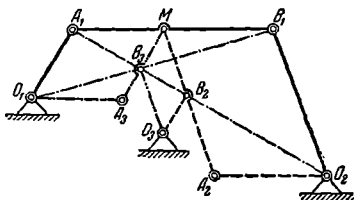


Рис. 783. К доказательству теоремы Робертса — Чебышева.

§ 136. Условия существования кривошипа

1°. Вопрос о соотношениях между длинами звеньев четырехзвенных механизмов имеет весьма большое значение при синтезе этих механизмов. Поэтому необходимо выяснить, каковы эти соотношения у четырехзвенных механизмов, выполняющих различные заданные движения.

Связь между размерами звеньев четырехзвенных механизмов и их движением может быть представлена математически в виде некоторых неравенств.

Пусть дан механизм шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 784), у которого длины звеньев обозначены через a , b , c и d . Требуется выяснить, при каких условиях звено AB будет кривошипом и будет поворачиваться на угол 360° , если принято, что $a < b < c < d$. Соединим точки B и D прямой и обозначим расстояние BD через f . Тогда из треугольника ABD следует:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi, \quad (28.42)$$

а из треугольника BCD

$$b + c \geq f \geq c - b. \quad (28.43)$$

Из выражения (28.42) получаем:

$$\frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad} = \cos \varphi.$$

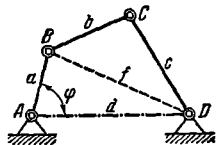


Рис. 784. К определению условий возможности существования кривошипа механизма шарнирного четырехзвенника.

Принимая во внимание неравенства (28.43), имеем:

$$\frac{a^2 + d^2 - (b + c)^2}{2ad} \leq \cos \varphi, \quad (28.44)$$

$$\frac{a^2 + d^2 - (c - b)^2}{2ad} \geq \cos \varphi. \quad (28.45)$$

Если звено a поворачивается на угол 360° , то угол φ принимает значения от 0 до 360° , и $\cos \varphi$ меняется в пределах от $+1$ до -1 . Так как левая часть неравенства (28.44) должна быть меньше наименьшего значения $\cos \varphi$, а левая часть неравенства (28.45) должна быть больше наибольшего значения $\cos \varphi$, то

$$\frac{a^2 + d^2 - (b + c)^2}{2ad} \leq -1, \quad \frac{a^2 + d^2 - (c - b)^2}{2ad} \geq +1.$$

Из этих неравенств имеем:

$$a^2 + d^2 - b^2 - 2bc - c^2 \leq -2ad,$$

$$a^2 + d^2 - b^2 + 2bc - c^2 \geq +2ad.$$

Отсюда перенесением членов получаем:

$$a^2 + 2ad + d^2 \leq b^2 + 2bc + c^2,$$

$$a^2 - 2ad + d^2 \geq b^2 - 2bc + c^2$$

или

$$(a + d)^2 \leq (b + c)^2, \quad (d - a)^2 \geq (b - c)^2,$$

или окончательно

$$d + a \leq b + c, \quad (28.46)$$

$$d - a \geq b - c. \quad (28.47)$$

Неравенство (28.47) может быть представлено так:

$$d + c \geq a + b,$$

но последнее неравенство вытекает из принятого ранее условия $a < b < c < d$, т. е. неравенство (28.47) не дает никаких новых условий.

Из неравенств (28.46) и (28.47) следует: чтобы в шарнирном четырехзвеннике, у которого стороны удовлетворяют условию $a < b < c < d$, звено a было кривошипом, необходимо, чтобы сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев была меньше или равна сумме длин двух других звеньев.

2°. Аналогичными рассуждениями могут быть найдены необходимые соотношения между звеньями шарнирного четырехзвенника и для всех других случаев, как, например, когда требуется, чтобы звено a было кривошипом или чтобы одновременно звенья a и c были кривошипами и т. д. Решение для всех этих случаев сводится к решению соответствующих треугольников.

С помощью условий (28.46) и (28.47) можно показать, что если в механизме, у которого $a < b < c < d$ (рис. 784), сделать неподвижным звено b или d , то получим кривошипно-коромысловый механизм. Если неподвижным сделать наименьшее звено a , то механизм будет двухкривошипным, и, наконец, если неподвижным сделать звено c , то механизм превращается в двухкоромысловый.

Анализ всех возможных случаев расположения звеньев шарнирного четырехзвенника и соотношений между их размерами приводит к общему условию, которое может быть сформулировано так.

Все шарнирные четырехзвенники распределяются по двум группам. К первой относятся те, у которых сумма наименьшего и наибольшего звеньев меньше или равна сумме двух других звеньев; ко второй — в которых эта сумма больше суммы остальных. Механизмы первой группы при постановке на наименьшее звено представляют собой двухкривошипные

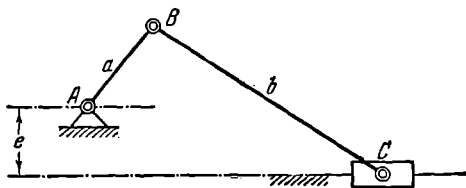


Рис. 785. К определению условий возможности существования кривошипно-ползунного механизма.

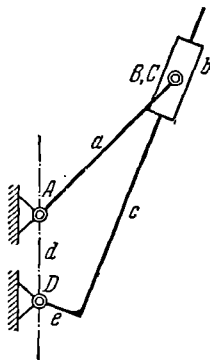


Рис. 786. К определению условий возможности существования кривошипа кулисного механизма с вращающейся кулисой.

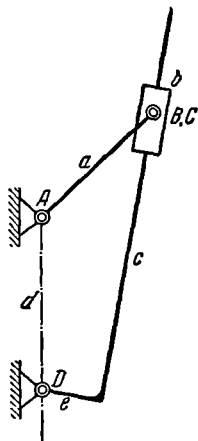


Рис. 787. К определению условий возможности существования кривошипа механизма с качающейся кулисой.

механизмы, при постановке на звено, смежное с наименьшим, — кривошипно-коромысловые, причем кривошипом служит наименьшее звено, а при постановке на звено, противоположное наименьшему, — двухкоромысловые. Механизмы второй группы все двухкоромысловые.

3°. Если подобно шарнирному четырехзвеннику написать соотношение между размерами звеньев кривошипно-ползунного механизма (рис. 785), то получим, что звено a будет кривошипом, если

$$a < b - e,$$

где e есть дезаксиал. Звено a будет коромыслом, если

$$a > b - e.$$

Наконец, для кулисного механизма (рис. 786 и 787) из очевидных геометрических соображений следует, что звено c (кулиса) будет кривошипом, если

$$a > d + e.$$

Кулиса c будет коромыслом, когда

$$a < d + e.$$

В первом случае мы получаем так называемый механизм вращающейся кулисы (рис. 786); во втором случае мы получаем механизм качающейся кулисы (рис. 787).

§ 137. Определение ошибок механизмов

1°. В рассмотренных задачах синтеза механизмов мы определили параметры механизмов, удовлетворяющие заданным законам движения, отдельным динамическим характеристикам и выбранной структуре. Спроектированные кинематические схемы механизмов можно назвать теоретическими схемами или теоретическими механизмами, так как при подборе параметров в теоретических схемах механизмов принималось, что все элементы кинематических пар являются геометрически точно выполненными, отсутствуют зазоры в кинематических парах, размеры всех звеньев не отклоняются от спроектированных, оси кинематических пар расположены так, как это предусмотрено структурой механизмов.

В реально построенных механизмах действительные его параметры могут отличаться от теоретических вследствие неточности изготовления звеньев и элементов кинематических пар, неточности монтажа механизмов, износа элементов кинематических пар при работе механизмов и т. д.

Отклонение действительных параметров механизма от теоретических носит название *ошибки механизма*. Учет всех возможных ошибок реальных механизмов представляет весьма сложную задачу, так как эти ошибки зависят от технологии изготовления деталей механизмов, условий сборки звеньев механизма, условий его эксплуатации и т. д. Раздел теории механизмов, занимающийся исследованием ошибок механизмов, происходящих от различных факторов, исследованием влияния этих ошибок на кинематику и динамику механизмов и синтезом механизмов с учетом возможных ошибок, носит название *теории точности механизмов*.

В настоящем параграфе мы рассмотрим только вопрос о том, как можно для простейших механизмов определять основные возможные ошибки.

2°. Назовем *ошибкой положения механизма* разницу положений ведомых звеньев действительного и соответствующего теоретического механизмов при *одинаковых положениях* ведущих звеньев обоих механизмов. *Ошибкой перемещения* тогда можно назвать разницу перемещений ведомых

звеньев действительного и теоретического механизмов при *одинаковых перемещениях* ведущих звеньев обоих механизмов. Рассмотрим вопрос о том, как могут быть определены ошибки положений механизма. Если известны параметры $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$ теоретического механизма, то параметр p , определяющий положение ведомого звена, будет всегда некоторой функцией от параметров $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$, т. е.

$$p = p(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m). \quad (28.48)$$

Например, для механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 788), у которого ведущим является кривошип 2, за параметр p может быть принят угол φ_{41} , образованный звеном 4 со стойкой 1. Параметрами $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$ могут быть длины l_1, l_2, l_3, l_4 звеньев, и функция (28.48) будет иметь вид

$$\varphi_{41} = \varphi_{41}(l_1, l_2, l_3, l_4). \quad (28.49)$$

В действительном механизме параметры $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$ могут отличаться от теоретических их значений на малые величины $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3, \dots, \Delta q_m$. Следовательно, и параметр p будет также отличаться на некоторую величину Δp , и для действительного механизма будем иметь:

$$p + \Delta p = f[(q_1 + \Delta q_1), (q_2 + \Delta q_2), \dots, (q_m + \Delta q_m)]. \quad (28.50)$$

Разлагая правую часть равенства (28.50) в ряд Тейлора и ограничиваясь в виду малости величин $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3, \dots, \Delta q_m$ членами первого порядка, получаем:

$$p + \Delta p = p + \frac{\partial f}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_m} \Delta q_m. \quad (28.51)$$

Вычитая из равенства (28.51) равенство (28.48), получаем:

$$\Delta p = \frac{\partial f}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_m} \Delta q_m. \quad (28.52)$$

Это выражение дает величину суммарной ошибки положения Δp ведомого звена как сумму ошибок, возникающих от отклонений параметров действительного механизма от теоретического. Если для каких-нибудь двух положений ведущего звена определены ошибки положения $(\Delta p)_1$ и $(\Delta p)_2$, то ошибка перемещения на этом интервале будет равна разности ошибок положений, т. е.

$$\Delta l_{1-2} = (\Delta p)_2 - (\Delta p)_1. \quad (28.53)$$

3°. Рассмотрим вопрос о том, как могут быть определены ошибки положения механизмов, происходящие от ошибок в длине их звеньев. Пусть, например, требуется определить ошибку положения $(\Delta x_C)_{l_3}$ точки C ползуна 4 (рис. 789) кривошипно-ползунного механизма ABC , происходящую от ошибки Δl_3 в длине l_3 шатуна 3. Как это было показано в § 37,3°, координата x_C , определяющая положение точки C , равна

$$x_C = l_2 \cos \varphi_2 + \sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \varphi_2}. \quad (28.54)$$

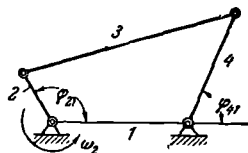


Рис. 788. К определению зависимости угла наклона коромысла от длин звеньев механизма шарнирного четырехзвенника.

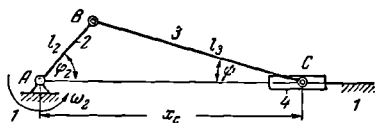


Рис. 789. К определению ошибки положения ползуна кривошипно-ползунного механизма.

Согласно равенству (28.52) имеем:

$$(\Delta x_C)_{l_3} = \frac{\partial x_C}{\partial l_3} \Delta l_3. \quad (28.55)$$

Величина частной производной

$$\frac{\partial x_C}{\partial l_3} = \frac{l_3}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \varphi_2}}. \quad (28.56)$$

Подставляя в равенство (28.55) выражение из (28.56), получаем значение ошибки положения $(\Delta x_C)_{l_3}$:

$$(\Delta x_C)_{l_3} = \Delta l_3 \frac{l_3}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \varphi_2}}. \quad (28.57)$$

Аналогично может быть найдена ошибка положения $(\Delta x_C)_{l_2}$, происходящая от ошибки Δl_2 в длине l_2 кривошипа 2:

$$(\Delta x_C)_{l_2} = \frac{\partial x_C}{\partial l_2} \Delta l_2. \quad (28.58)$$

Величина частной производной

$$\frac{\partial x_C}{\partial l_2} = \cos \varphi_2 - \frac{l_2 \sin^2 \varphi_2}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \varphi_2}}. \quad (28.59)$$

Следовательно,

$$(\Delta x_C)_{l_2} = \Delta l_2 \left(\cos \varphi_2 - \frac{l_2 \sin^2 \varphi_2}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \varphi_2}} \right). \quad (28.60)$$

Суммарная ошибка положения Δx_C точки C согласно равенству (28.52)

$$\Delta x_C = (\Delta x_C)_{l_2} + (\Delta x_C)_{l_3}. \quad (28.61)$$

4°. Как это было показано выше, во многих случаях аналитические выражения для перемещений теоретических механизмов являются сложными.

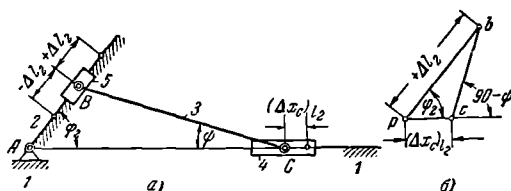


Рис. 790. Преобразованный кривошипно-ползунный механизм с изменяющейся длиной кривошипа: а) схема механизма; б) план малых перемещений.

Поэтому для определения ошибок положения можно использовать метод планов малых перемещений для преобразованных механизмов.

Пусть, например, требуется определить ошибку $(\Delta x_C)_{l_2}$ перемещения точки C от ошибки l_2 кривошипа 2 (рис. 789). Ошибку можно определить,

если считать, что точка B может переместиться (рис. 790, a) вдоль оси AB звена 2 на величину $\pm \Delta l_2$. В зависимости от того, увеличивает ли ошибка Δl_2 длину l_2 звена 2 или ее уменьшает, мы как бы останавливаем кривошип 2 и вводим дополнительный ползун 5, который может скользить вдоль оси AB кривошипа 2. Такой механизм называется *преобразованным механизмом*. Если теперь сообщить ползуну 5 перемещение, например $+\Delta l_2$, то перемещение (Δx_C) можно найти, если построить план малых перемещений (рис. 790, b) как обыкновенный план аналогов скоростей. На этом плане отрезок (pb) пропорционален Δl_2 , а отрезок $(pc) \div (\Delta x_C)_{l_2}$. Естественно, что из-за малости величин ошибок планы малых перемещений надо строить, применяя соответствующие масштабы и откладывая отрезок (pb) , пропорциональный Δl_2 в соответствующем направлении в зависимости от его знака.

Из треугольника pbc (рис. 790, b) можно получить аналитическое выражение (28.60) для ошибки $(\Delta x_C)_{l_2}$.

На рис. 791, a показан преобразованный механизм для определения ошибки $(\Delta x_C)_{l_3}$ от ошибки Δl_3 звена 3. Если принять, что ошибка Δl_3 имеет знак минус, то план малых перемещений будет иметь вид, показанный на

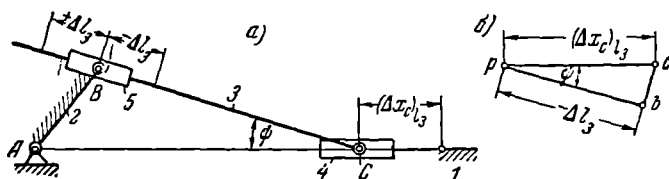


Рис. 791. Преобразованный кривошипно-ползунный механизм с изменяющейся длиной шатуна: a) схема механизма; b) план малых перемещений.

рис. 791, b . Ошибки $(\Delta x_C)_{l_2}$ и $(\Delta x_C)_{l_3}$ имеют один и тот же знак. Следовательно, суммарная ошибка Δx_C равна

$$\Delta x_C = (\Delta x_C)_{l_2} + (\Delta x_C)_{l_3}. \quad (28.62)$$

Если ошибка Δl_2 звена 2 имела бы знак плюс, то ошибки $(\Delta x_C)_{l_2}$ и $(\Delta x_C)_{l_3}$ имели бы разные знаки и суммарная ошибка Δx_C была бы равна разности ошибок

$$\Delta x_C = (\Delta x_C)_{l_3} - (\Delta x_C)_{l_2}. \quad (28.63)$$

5°. Методом планов малых перемещений можно определить ошибки положений и в механизмах с высшими парами. На рис. 792, a показан кулачковый механизм. Пусть требуется определить ошибку положения Δx_C точки C толкателя от ошибки Δr в радиусе r ролика 3 и от ошибки Δp в радиусе кривизны p кулачка 1 в точке соприкосновения D . Так как заменяющим механизмом является кривошипно-ползунный механизм ABC с переменным по длине шатуном BC , то для определения ошибки преобразованный механизм аналогичен механизму, показанному на рис. 791, а поэтому из точки p плана малых перемещений (рис. 792, b) откладываем в направлении, параллельном нормали, сумму ошибок $\Delta r + \Delta p$, а из точки b проводим перпендикуляр к направлению нормали $n-n$ до пересечения в точке c с направлением, параллельным оси движения толкателя 2, проведенным через точку p .

Отрезок (pc) пропорционален ошибке Δx_C перемещения точки толкателя 2.

Из плана малых перемещений (рис. 792, б) следует:

$$\Delta x_C = \frac{\Delta r + \Delta \rho}{\cos \alpha}. \quad (28.64)$$

6°. Учет ошибок положения, возникающих в результате зазоров в кинематических парах, является более сложным, ибо для решения задачи необходимо установить точку соприкосновения элементов пары и определить,

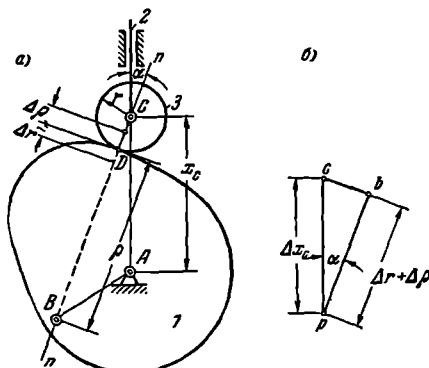


Рис. 792. К определению ошибок положений кулачкового механизма: а) схема механизма; б) план малых перемещений.

в каком направлении выбирается зазор. На рис. 793 показаны схематично взаимные положения элементов пары B кривошипно-ползунного механизма (рис. 794). Обычно точка D соприкосновения элементов пары звеньев 2 и 3 принимается в направлении действия реакции P_{32} или P_{23} . Это направление может быть определено только после кинетостатического расчета механизма. Пусть это есть направление $n-n$. Тогда проводим на схеме механизма

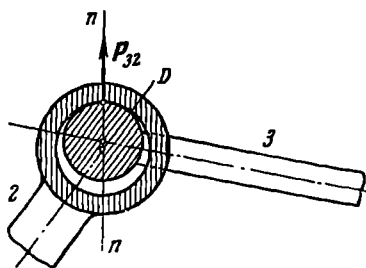


Рис. 793. Вращательная пара с зазором.

(рис. 794, а) через точку B направление $n-n$. Ползун 5 преобразованного механизма, показанный на рис. 794, а пунктиром, имеет возможность двигаться вдоль направления $n-n$. Строим план малых перемещений (рис. 794, б), откладывая ошибку Δm от зазора в паре B в направлении $n-n$. Ошибка положения Δx_C точки C оказывается пропорциональной отрезку (pc) . Величина Δx_C определяется из плана малых перемещений

$$\Delta x_C = -\Delta m \frac{\cos(\vartheta + \psi)}{\cos \psi}. \quad (28.65)$$

Более сложные случаи ошибок положений, возникающих вследствие перекоса осей и направляющих, неточностей радиусов кривизны и т. д., мы

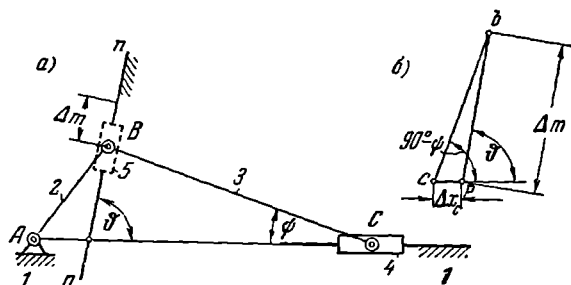


Рис. 794. Преобразованный кривошипно-ползунный механизм:
а) схема механизма; б) план скоростей.

не рассматриваем. Все эти вопросы подробно исследованы в работах Н. Г. Бруевича и его учеников *).

В заключение отметим, что решение задач синтеза механизмов в настоящее время в основном может вестись с помощью современных счетно-решающих машин, позволяющих производить расчет многочисленных вариантов механизмов, из которых конструктором могут быть выбраны оптимальные.

*) Бруевич Н. Г., Точность механизмов, Гостехиздат, 1946.

**ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА
НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ, РЕКОМЕНДУЕМАЯ ПО КУРСУ
«ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН»**

- Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А., Синтез плоских механизмов, Физматгиз, 1959.
- Артоболевский И. И., Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых, Изд. АН СССР, 1959.
- Артоболевский И. И., Зиновьев В. А., Эдельштейн Б. В., Сборник задач по теории механизмов и машин, Гостехиздат, 1955.
- Артоболевский И. И., Теория механизмов и машин, ГИТТЛ, 1940.
- Артоболевский С. И., Машины-автоматы, Машгиз, 1949.
- Баранов Г. Г., Курс теории механизмов и машин, «Машиностроение», 1967.
- Боголюбов А. Н., История механики машин, «Наукова думка», 1964.
- Бейер Р., Кинематический синтез механизмов, Машгиз, 1959.
- Блох З. Ш., Регулирование машин, Гостехиздат, 1950.
- Бруевич Н. Г., Точность механизмов, Гостехиздат, 1946.
- Гавриленко В. А., Зубчатые передачи в машиностроении, Машгиз, 1962.
- Герц Е. В., Крейнин Г. В., Теория и расчет силовых пневматических устройств, Изд. АН СССР, 1960.
- Добровольский В. В., Теория механизмов, Машгиз, 1953.
- Желиговский А. В. и др., Теория плоских механизмов и динамика машин, «Высшая школа», 1961.
- Зиновьев Вяч. А., Курс теории механизмов и машин, Физматгиз, 1960.
- Зиновьев Вяч. А., Пространственные механизмы с низшими парами, Гостехиздат, 1952.
- Зиновьев Вяч. А., Бессонов А. П., Основы динамики машинных агрегатов, Изд. «Машиностроение», 1964.
- Кожевников С. Н., Теория механизмов и машин, Машгиз, 1954.
- Колчин Н. И., Механика машин, части I—IV, Машгиз, 1948—1952.
- Колчин Н. И., Мовнин М. С., Теория механизмов и машин, Судпромгиз, 1962.
- Кудрявцев В. Н., Планетарные передачи, Машгиз, 1960.
- Кудрявцев В. Н., Зубчатые передачи, Машгиз, 1957.

- Левенсон Л. Б., Теория механизмов и машин, Машгиз, 1954.
- Левитский Н. И., Методы расчета кулачковых механизмов, Машгиз, 1954.
- Левитский Н. И., Проектирование плоских механизмов с низшими парами, Изд. АН СССР, 1950.
- Литвин Ф. Л., Теория зубчатых зацеплений, Физматгиз, 1960.
- Лихтенхельд В., Синтез механизмов, Изд. «Наука», М., 1964.
- Решетов Л. Н., Кулачковые механизмы, Машгиз, 1953.
- Ротбарт Г. А., Кулачковые механизмы, Судпромгиз, 1960.
- Сперанский Н. В., Проектирование мальтийских механизмов, Изд. АН СССР, 1960.
- Черкудинов С. А., Синтез плоских шарнирно-рычажных механизмов, Изд. АН СССР, 1959.
- Юдин В. А., Петрокас Л. В., Теория механизмов и машин, «Высшая школа», 1967.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Агрегат машинный 15, 421

Анализ механизмов 19

— — динамический 19, 268

— — кинематический 19

— — силовой 268

— — структурный 19

Аналог скорости 139

— ускорения 139

Антипараллелограмм шарнирный 26, 105, 107

Бицентрона 509

Вариатор скорости 42, 222

Вектор главной точки 361

Вид кинематической пары 52

Водило 35, 236

Воспроизведение заданного закона движения 679, 694

— заданной траектории 700

Время выбега 384

— движения механизма полное 384

— машинного агрегата 493

— разбега 384

— установившегося движения 384

Высота головки зуба 535

— ножки зуба 535

Геликоид развертывающийся 583

Гипоциклоида, ее построение 577

Глобонд 603

Голограф скорости 181

— ускорения 181

Головка зуба 535

Группа двухповодковая 88, 91, 144—147, 160—165,

326, 329, 334, 336

— пятиповодковая 92

— семиповодковая 147

— трехповодковая 89, 91, 146, 147, 173, 330

— четырехповодковая 92

— II класса 89

— III класса 89, 92, 99

— IV класса 90, 91

Движение вхолостую 389

— механизма начальное 140, 169

— — основное 140

— — переносное 140

— — периодическое 385

— — перманентное 167

Дезаксиал 27

Диаграмма кинематическая 179, 182

— мощности 275

— работы 274

— регулятора равновесия 492

Динамика механизмов 268

Дифференциал 234

— конический автомобильный 237, 238

Дуга зацепления 548, 580

— скручивания 583

Заклинивание механизма 522

Замыкание геометрическое 57

— силовое 33, 35, 57

Зацепление беззазорное 564

— внешнее 530

— внутреннее 531, 579

— глобондное 603

— зубчатое 34

— — внешнее 578

— — циклоидальное 576, 577, 579

— — цилиндрическое 34

— косозубое с неэвольвентным профилем

зубьев 587

— Новикова 587, 588

— октоидальное 596

— реечное цилиндрическое 34

— тороидное 603

— цевочное 581

— червячное 607

Звено базисное 89

— ведомое 62

— ведущее 62

— гибкое 43, 303

—, его условное изображение 58, 59

—, — элементы 20

— зубчатое 34

— начальное 62

— неподвижное 20

— подвижное 20

— приведения 405

— системы автоматического регулирования

489

Зуб зубчатого механизма 34

— укороченный 563

Интерференция зубьев 563

Катаракт 480

Качение чистое 299

Класс группы 92

— кинематической пары 50

— контура 92

— механизма 94

Классификация механизмов 83, 85

Колебания собственные (свободные). их частота 380

Колеса фрикционные конические 221

Колесо винтовое 38

— гипоидное 599

- Колесо зубчатое 34
 — гиперболическое 39, 599
 — гипонидное 39
 — коническое 218, 227, 589—596
 — маховое 461
 — нулевое 566
 — отрицательное 566
 — положительное 566
 — с косыми зубьями 583
 — с шевронными зубьями 586
 — солнечное 236
 — стандартное 537
 — центральное 35, 236
 — цилиндрическое круглое 34
 — некруглое 34
 — с винтовыми зубьями 583
 — с прямыми зубьями 582
 — со ступенчатыми зубьями 583
 — эквивалентное 594
 — червячное 38, 603
 — шевронное с промежуточным желобком 587
 Контур рейки исходный 565
 Конус дополнительный 593
 — начальный 590
 — основной 590
 — трения покоя 286
 Координата обобщенная механизма 64
 Коробка скоростей 240
 — зубчатая 243, 244
 Коромысло 22, 631
 Коэффициент времени работы механизма 621
 — вязкости динамический 235
 — динамичности 457
 — жидкостного трения 295
 — запаса сцепления 303
 — изменения средней скорости ведомого звена 692
 — неравномерности движения механизма 456, 459
 — нечувствительности 483
 — перекрытия 550
 — полезного действия 388, 393, 396
 — — винтового механизма 398, 399
 — — наклонной плоскости 398
 — — общий 391
 — — планетарного механизма 400
 — — червячного механизма 399
 — потерь в механизме 389
 — саморегулирования машинного агрегата 494
 — сдвига 567
 — скольжения зубьев 552
 — сцепления 298
 — трения качения 298
 — — клинчатого ползуна 289
 — — покоя 280, 298
 Крест мальтийский 37
 Кривая огибаемая 128
 — огибающая 128
 — циклическая 575
 — циклоидальная 534
 — шатунная 147, 148
 Кривошип 22
 Кривые взаимнооггибаемые 128, 131, 505
 Критерий устойчивости Михайлова 502
 — Рауса — Гурвица 502
 Круг перегибов 126
 — перемены 126
 — поворотный 126, 134
 — трения 293
 — эвольвентный 534
 Крутизна статической характеристики 491
 Кулачок 31, 517
 — его профиль 31
 — пазовый 631, 632
 Кулиса 28
 Линия винтовая 56
 — действия 108, 110
 — зацепления 519, 545
 — — центрона 517
 — центробежной силы 485
 — центров 108, 110
 Масса корректирующая 381
 — приведенная 418
 Маховик 461, 462
 —, его характеристики 469
 Машина 13
 — балансировочная 379
 — машины информационные 14
 — кибернетические 14
 — контрольно-измерительные 14
 — контрольно-управляющие 14, 15
 — логические 14
 — моделирующие 14
 — счетно-решающие 14
 — технологические 14, 15
 — транспортные 14, 15
 — энергетические 14, 15
 Метод Жуковского 409, 410, 413, 471
 — замещающих точек 312
 — кинематических диаграмм 179, 182
 — обращения движения 207, 208
 — особых точек 173, 176
 — планов сил 322
 — приращений 186
 — разделения шарнира 147
 — точек Ассура 173
 Механизм 16, 62
 — бесступенчатой передачи 222
 — винтовой трехзвенный 40, 82, 253—255
 — винтовых колес 38
 — винто-рычажный для перемещения коромысла 40
 — — рулевого управления 40
 — воспроизводящий логарифмическую зависимость 680
 — вращающейся кулисы 706
 — гидравлического привода параллельных жой 44
 — — станка 45
 — гиперболических колес 39, 228
 — гипонидных колес 39
 — грейферный кинематического аппарата 681
 — двигателя 16, 95
 — — поршневого 63
 — двойного универсального шарнира 79, 101, 250
 — дифференциального мановакуумметра 680
 — дифференциальный замкнутый 443
 — для передачи вращения от одной оси к другой, ей параллельной 25
 — для преобразования непрерывного вращательного движения в возвратно-вращательное движение 259, 260
 — для черчения линий 683
 — для черчения параболы 683
 — заменяющий 70
 — заслонки кривошипно-ползунный 27
 — звездчатый 35, 36, 256, 581
 — — реечный 36
 — зубчатой передачи трехзвенный 224
 — зубчато-рычажный с некруглыми колесами 35
 — зубчато-червячный 75
 — зубчатый 34, 58, 505
 — — винтовой 603
 — — многозвенный с неподвижными осями 603
 — — с подвижными осями 614
 — — планетарный 36, 234
 — — пространственный 37

Механизм зубчатый с внешним зацеплением 376, 431, 34
 — с внутренним зацеплением 34
 — с круглыми цилиндрическими колесами 376
 — с некруглыми колесами 34
 — с прерывистым и знакопеременным движением ведомого звена 255—260
 — с реечным зацеплением 34
 — сателлитный 236
 — храповой 37
 — зубчатых передач многозвенный с неподвижными осями 230
 — индикатора прямолинейно-направляющий 682
 — качающейся кулисы 706
 — клиновый 39
 — пространственный 40
 — трехзвенный 82, 205
 — компрессора кулисный 28
 — конических зубчатых колес 37, 38, 77, 227
 — фрикционных колес 41
 — контроля износа шлифовального круга 47
 — кривошипно-ползуновый 26, 104, 179, 180—182, 195, 337, 364, 523, 631, 694, 706, 707, 709, 710
 — аксиальный 27
 — двигателя 26, 27
 — дезаксиальный 27
 — на фундаменте 354
 — нецентральный 27
 — с ведущим поршнем 27
 — с изменяющейся длиной кривошипа 708
 — с изменяющейся длиной шатуна 709
 — с противовесами 370—372, 375
 — самоуравновешенный 374
 — центральный 27
 — четырехзвенный 26
 — круглых фрикционных цилиндрических колес 41
 — кулачковый 31, 105, 206, 287, 344, 505, 517, 630, 643
 — для гравирования буквы «К» 33
 — нецентральный 31
 — ножиц конфетно-оберточного автомата 633
 — пазовый 33
 — пространственный 32, 75, 675
 — с возвратно-вращающимся звеном 630
 — с возвратно-вращающимся коромыслом 632
 — с вращающимся кулачком 31
 — с вращающимся толкателем 526
 — с геометрическим замыканием 33, 632
 — с двумя поступательными парами 521, 523
 — с двумя роликами 96
 — с двумя толкателями в рамке 632
 — с коническим кулачком 675
 — с коромыслом 112, 632, 667
 — с коромыслом, касающимся кулачка 631
 — с криволинейным толкателем 519
 — с пазовым кулачком 632
 — с плоским коромыслом 672
 — с плоским толкателем 32, 631, 670, 671
 — с поворачивающимся толкателем 31
 — с поступательно движущимся ведомым звеном 630
 — с поступательно движущимся кулачком 31, 659, 660
 — с поступательно движущимся кулачком и толкателем с острием 631
 — с поступательно движущимся кулачком, толкателем и роликом 631
 — с поступательно движущимся толкателем 112, 183, 520, 521, 527, 632, 634, 656, 657, 660

Механизм кулачковый с поступательно движущимся толкателем и роликом 631
 — с поступательно движущимся толкателем с острием на конце 631
 — с силовым замыканием 632
 — с центральным толкателем 631
 — с цилиндрическим кулачком 675
 — с цилиндрическим кулачком и коромыслом 676
 — с эксцентрично поставленным толкателем 665, 666
 — со сложно движущимся ведомым звеном 630
 — со сложно движущимся толкателем 32
 — со смещенным толкателем 631
 — центральный 31
 — кулисный 150, 200, 340
 — восьмизвенный с четырьмя ползунами 30
 — с ведущим поршнем 263, 265—267
 — с гибким стальным звеном 43
 — с двумя ползунами 28
 — с двумя поступательными парами 105
 — с качающейся кулисой 694
 — с одной поступательной парой 105
 — строгального станка 28
 — тангенсный 28
 — четырехзвенный 27
 — шестизвенный 30
 — эксцентриковый 29
 — Липкина — Поселье направляющий 30, 31
 — лобовой фрикционной передачи 222
 — мальтийского креста 37, 111, 257—259, 621, 627
 — муфты 25
 — для передачи вращения от одной оси к другой, ей параллельной 29
 — насоса 22
 — кулисный эксцентриковый 28
 — некруглых колес 508
 — пантографа 701
 — передачи с гибким звеном 245
 — перекачивающихся рычагов 515, 517
 — планетарный 614
 — дифференциальный 234
 — зубчатый 36
 — дифференциальный 36
 — конический 237
 — планетарных зубчатых передач 234
 — подъемного крана 24
 — поперечно-строгального станка 679
 — поршневой с гидравлическим устройством 261
 — с пневмоустройством 261
 — преобразованный 708
 — прессы клиновый 40
 — пространственный пятизвенный с винтовой парой 102
 — семизвенный 101
 — четырехзвенный с винтовой парой и роликом 102
 — прямолинейно-направляющий 682, 683
 — грузоподъемного крана 632
 — регулирующий 455
 — реечный 503
 — ротационного насоса 28
 — рулевого управления автопилота четырехзвенный 75
 — рычажно-винтовой пространственный 79, 80
 — рычажно-храповой для протяжки ленты в телеграфном аппарате 46
 —, применяемый на автоматических телефонных станциях 46
 — рычажный двухзвенный 21
 — кулачковый 344
 — трехзвенный 21

- Механизм рычажный трехзвенный пространственный 30
- с внешним коническим зацеплением 38
 - с внутренним коническим зацеплением 38
 - с гибким звеном 44
 - с гибким звеном и направляющими роликами 43
 - с гибким звеном и пятажным роликом 43
 - с гибким звеном кривошипный 44
 - с гибким звеном (открытая ременная передача) 43
 - с гибким звеном (перекрестная ременная передача) 43
 - с гибким звеном (полуперекрестная ременная передача) 43
 - с гидравлическим устройством 44, 45
 - с двумя поступательными парами 150
 - с пассивными связями 66
 - с перекачивающимися рычагами 32
 - с пневматическим устройством 44, 46
 - с реечным зацеплением 226
 - с сопряженными центроидами 512
 - с электрическим устройством 46, 47
 - семизвенный с двумя степенями свободы 449
 - сенового пресса кривошипно-ползунный 27
 - сеноворошители 23
 - соприкасающихся рычагов 22
 - сферический 76
 - — четырехзвенный 76, 81
 - тестомесильной машины 23
 - уголовой передачи 79
 - универсального шарнира 248
 - фрикционный 41
 - — двойной лобовой для бесступенчатой передачи 41
 - — для бесступенчатой передачи между пересекавшимися осями барабана и ролика 42
 - — для бесступенчатой передачи торовой 42
 - — планетарный 41
 - фрикционных передач 220
 - цевочный с остоновками 256, 257
 - центроидный 32, 107, 505, 516
 - — конический 221
 - — реечный 511
 - — трехзвенный 505
 - — цилиндрический 221
 - Чебышева шарнирный 31
 - — — приближенно-направляющий 25, 26
 - — шестизвенный 31
 - червячной передачи 38, 228
 - четырехзвенный 22
 - — пространственный 29, 82
 - шарнирного антипараллелограмма строгального станка 25
 - — ромбоида 25
 - — четырехзвенника 22, 64, 81, 103, 107, 108, 148, 190, 362, 366—368, 528, 686—690, 694, 696, 700, 707
 - — — пространственный 251, 252
 - шарнирный двухкривошипный 22
 - — семизвенный пространственный 78
 - шасси самолета 74
 - шестизвенный 142, 166, 318, 320
 - эксцентрикный 24
- Механизмы автоматического взвешивания 17
- — — счета 17
 - автоматической упаковки 17
 - исполнительные 16
 - контроля 17
 - передаточные 16
 - подачи 17
 - сортировки 17
 - транспортировки 17
 - управления 17
- Механика машин 16
- Модератор 476
 - Модуль зацепления 536
 - Момент инерции маховика 462, 466, 470, 473
 - — приведенный 418, 459
 - — центробежный 353
 - маховой 469
 - приведенный 405
 - статический 357
 - трения качения 297
 - уравновешивающий 337
 - Муфта для передачи вращения от одной оси к другой, ей параллельной 25
- Нарезание зубьев 556—559
- Неравномерность движения механизма 453
- Нечувствительность регулятора 487
- Ножка зуба 535
- Область нечувствительности регулятора 487
- Окружность делительная 536
- колеса делительная 566
 - начальная 225, 534
 - обработки начальная 566
 - основная 540
 - перемены 126
- Отношение передаточное 109, 225
- — многоступенчатого зубчатого механизма 231
- Ошибка перемещения механизма 706
- положения механизма 706
- Пантограф Сильвестра 701
- Шейнера 701
- Пара кинематическая 20, 48, 50, 52—56
- — в виде двух касающихся цилиндрических поверхностей 48
 - — винтовая 55, 57
 - — вращательная 48, 52, 54, 57, 74, 114, 321
 - — с зазором 710
 - — высшая 321
 - — двухподвижная цилиндрическая 52
 - — ее класс 50
 - — — условное изображение 57—59
 - — низшая 56
 - — одноподвижная 52, 55
 - — плоская 54, 67, 68
 - — поступательная 55, 57, 74, 114, 321
 - — пятиподвижная 51
 - — траекторная 69
 - — трехподвижная 51, 52
 - — центроидная 69
 - — цилиндрическая 52, 74
 - — — четырехподвижная 51—53
 - — шаровая 52, 74
- Параллелограмм шарнирный 24
- Параметры кинематической схемы механизма 684
- механизма 684
- Передача вращения между параллельными осями 218
- гиперболическая между двумя перекрещивающимися осями 599
 - зубчатая 34, 218, 224
 - — винтовая 601
 - — гиперболическая 228
 - — коническая 227, 589
 - — — двухступенчатая 233
 - — — с реечным зацеплением 225
 - — цилиндрическая с внешним зацеплением 225, 226
 - — — с внутренним зацеплением 225, 227
 - канатная 245

- Передача ременная 43, 245
 — с гибким звеном открытая 43, 247
 — с гибким звеном перекрестная 247
 — с гиперболическими колесами 220
 — с фрикционными колесами 302
 — фрикционная коническая 303
 — — лобовая 41, 222
 — — двойная 223
 — с коническими барабанами 223
 — цепная 245
 — червячная 33, 228
 — — глобоидная 604
 План скоростей 116, 152
 — ускорений 150, 153
 Плоскость главного сечения 228
 — образующая 590
 Поверхность винтовая 604
 Подрезание профилей зубьев 559
 Ползун 27
 Полус 113
 — зацепления 533, 540
 — плана ускорений 118
 — поворота 126
 Порядок группы 88, 92
 Проектирование механизмов 503
 Профилирование зубьев 533, 534
 — — эвольвентных колес 592
 Профиль зубьев 534
 — —, его рабочий участок 545
 — — эвольвентный, методы обработки 555
 — кулачка 31, 97
 — — действительный 206
 — — центровой 206
 — циклоидальный 575
 — эвольвентный 533, 544
 Процесс переходный 501, 502
 Прямая образующая 540
- Работа вредная 272
 — затрачиваемая 272
 — полезная 272
 Размещение массы звена 313
 Расчет всдухого звена кинестатистический 336
 — механизма динамический 270
 — — кинестатистический 271, 320
 — — силовой 270, 339
 — — статический 270, 320
 Регулятор 455
 — астатический 487
 — идеальный 501
 — нестатический 486
 — скоростной 476
 — статический 486
 — центробежный 480
 — с катарактом 496
 Редуктор 240
 — дифференциальный замкнутый 242
 — зубчатый 36
 — — двухступенчатый 348, 553
 — — планетарный 240, 241
 — — с косозубыми колесами 534
 — планетарный двухступенчатый 350
 — с шевронными колесами 537
 Рейка зубчатая 34
 — инструментальная 564
 — коническая 38
 — модульная 564
 Рулетта 128
 Рычаг Жуковского 410, 471
- Самоторможение механизма 389
 Сателлит 35, 236
 Связи пассивные 66, 67
 Сдвиг относительный 567
- Семейство механизмов 77—82
 Сервомотор 479
 Серия зубчатых колес 230
 Сила движущая 271
 — — поддерживающая регулятора 482
 — приведенная 405, 459
 — сопротивления 272
 — уравновешивающая 337
 — центробежная регулятора, приведенная к муфте 432
 Силы инерции второго порядка 374
 — — звеньев механизмов 306
 — — первого порядка 374
 Синтез механизмов 19, 503
 Система астатического регулирования 479
 — — непрямого регулирования 479
 — — с жесткой обратной связью 480
 — прямого регулирования 479
 — регулирования изодромная 480
 Скорость звена приведения средняя 455
 — номинальная 456
 — регулятора угловая равновесная 483
 Соединение зубчатых колес рядовое 230
 — — с паразитными колесами 232
 Сопровождение производственное 383, 391
 — перекатывания 279
 — производственное 337, 391
 Станок балансировочный 379
 Степени свободы, их число 49
 Степень неравномерности регулятора 483
 — подвижности кинематической цепи 61
 — свободы лишняя 66, 67
 Стойка 20
 Структура кинематической цепи 60, 61
 — плоских механизмов 67
 — пространственных механизмов 74—82
 Ступень передачи 217
 Схема механизма кинематическая 63
- Таксограмма механизма 384
 Теорема Роберта — Чебышева 702
 Теория машин 18
 — механизмов 13, 19
 Толкатель кулачка 31, 517, 631
 Толщина зуба 535
 Торонд 603
 Точка Ассур 173
 — главная 361
 — замещающая 312
 — особая 173
 — приведения 405
 Точность механизма 706
 Трение в винтовой кинематической паре 290
 — в механизме 278
 — в передачах с гибким звеном 303
 — в передачах с фрикционными колесами 303
 — в поступательной кинематической паре 284
 — верчения 293
 — во вращательной кинематической паре 292
 — жидкостное 278, 279
 — качения 279
 — — в высших парах 296
 — — в шариковых подшипниках 300
 — —, момент 298
 — —, плечо силы 298
 — кинетическое 280
 — покоя 280
 — полужидкостное 278
 — полусухое 278
 — скольжения 279
 — — в высших парах 296
 — — несмазанных тел 279
 — — смазанных тел 294
 — статическое 280
 — сухое 278

- Угол давления 522
 - зацепления 540, 590
 - — монтажный 543
 - передачи 523
 - подъема резьбы 56
 - скручивания 583
 - трения при движении 284
 - — при пске 280, 284
 - фазовый 634
- Удар 636
- Уравнение кинетической энергии 429
 - шатунной кривой 148
 - Эйлера — Савари 133
 - энергетического баланса машины 383
- Уравнения движения механизма 441
 - — механизмов машинного агрегата 421, 424
- Уравновешивание вращающихся звеньев 375
 - динамических нагрузок 354, 375
 - масс 269, 354
 - сил инерции 354, 367, 372
- Ускорение Кориолиса 115
- Условие взаимозаменяемости зубчатых колес 534
 - сборки 619
 - соседства 618
- Условия связи 48
 - соосности 608
 - существования кривошипа 703
- Устойчивость регулятора 435
 - системы автоматического регулирования 501
- Фаза выстоя 634
 - опускания 634
 - подъема 634
- Формула Амонтона — Кулона 282
 - подвижности кинематической цепи 61
 - структурная Добровольского 70, 99
 - — кинематической цепи 61
 - — плоского механизма 65
 - — Сомова — Малышева 61, 74
 - — сферических механизмов 76
 - — Чебышева 67, 73, 99
 - Эйлера 305
- Функция передаточная 511
 - передаточного отношения 506
 - — числа 506
 - перемещений ведущего звена 136
 - положения звена 506
 - скоростей ведущего звена 136
 - ускорений ведущего звена 133
 - эвольвентная 540
- Характеристика маховика 469
 - машины механическая 275
 - механизма геометрическая 506
 - регулируемого объекта статическая 491
- Цевка 36
- Центр вращения мгновенный 103, 123
 - качания звена 309
 - масс механизма 358, 362
 - ускорений мгновенный 124
- Центроида 104, 105, 505
 - в относительном движении 106
 - , ее кривизна 131
- Цепь кинематическая 20, 59, 60
- Циклоида, ее построение 577
- Червяк 33, 603
 - архимедов 604
 - эвольвентный 604
- Четырехзвездчатый шарнирный двухкривошипный 22, 23, 25
 - — плоский 81
 - — с противовесами 369
 - — с храповым зубчатым механизмом 37
 - — сферический 29, 247, 248
- Число степеней свободы 49
- Шаг аксиальный 535
 - винта 56
 - зацепления основной 550
 - — по начальной окружности 535
 - нормальный 584
 - окружной 584
- Шарнир Гука 248
 - ромбоида 25
 - универсальный 29, 248
 - — двойной 250
- Шатун 22, 631
 - плавающий 101
- Ширина впадины 535
 - зуба 535
- Штанга кулачка 31, 517, 631
- Эвольвента круга 539
- Эволюта 539
- Энергия кинетическая механизма 415
- Эпициклоида, ее построение 577

Иван Иванович Артоболевский

Теория механизмов

М., 1967 г., 720 стр. с илл.

Редактор *Н. И. Розальская.*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова.*

Корректор *Э. В. Автонеева.*

Сдано в набор 24/III 1967 г. Подписано к печати 15/VIII 1967 г. Бумага $60 \times 90^{1/16}$. Физ. печ. л. 45. Условн. печ. л. 45. Уч.-изд. л. 46,27. Тираж 100 000 экз. Т-07084. Цена книги 1 р. 40 к. Заказ № 912.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор»
имени А. М. Горького Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.