И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1975

6П5.1
А 86
УДК621.01

А 30106-011 / 053(02)-75 142-74

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975, с изменениями

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9

Введение 11

§ 1. Механика машин и ее основные разделы 11
§ 2. Основные понятия и определения 19

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СТРУКТУРНЫЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Отдел первый

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Глава I. **Кинематические пары и кинематические цепи** 21

§ 3. Кинематические пары и их классификация 21
§ 4. Условные изображения кинематических пар 28
§ 5. Кинематические цепи 30

Глава II. **Структура механизмов** 33

§ 6. Механизм и его кинематическая схема 33
§ 7. Структурная формула кинематической цепи общего вида . . . 34
§ 8. Структурная формула плоских механизмов 38
§ 9. Структура плоских механизмов 41
§ 10. Замена в плоских механизмах высших пар низшими 45
§ 11. Структура пространственных механизмов 47

Глава III. **Классификация плоских механизмов** 53

§ 12. Основной принцип образования механизмов 53
§ 13. Структурная классификация плоских механизмов 56

Отдел второй

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Глава IV. **Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов графическим методом** 67

§ 14. Центроиды в абсолютном и относительном движениях 67
§ 15. Кинематика ведущих звеньев механизмов 71

§ 16. Аналоги скоростей и ускорений 73
§ 17. Определение положений звеньев групп и построение траекторий, описываемых точками звеньев механизмов 76
§ 18. Определение скоростей и ускорений групп II класса методом планов 82
§ 19. Определение скоростей и ускорений групп III класса методом планов 96
§ 20. Мгновенный центр ускорений и радиус кривизны траектории 104
§ 21. Построение кинематических диаграмм 107
§ 22. Кинематическое исследование механизмов методом диаграмм 112

Глава V. Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов аналитическим методом 117

§ 23. Механизм шарнирного четырехзвенника 117
§ 24. Кривошипно-ползунные механизмы 122
§ 25. Кулисные механизмы 126
§ 26. Шестизвенные рычажные механизмы 132

Глава VI. Кинематическое исследование кулачковых механизмов . . . 135

§ 27. Определение положений 135
§ 28. Определение скоростей и ускорений 140

Глава VII. Кинематическое исследование механизмов передач 142

§ 29. Основные кинематические соотношения 142
§ 30. Механизмы фрикционных передач 146
§ 31. Механизмы трехзвенных зубчатых передач с неподвижными осями 151
§ 32. Механизмы многоступенчатых зубчатых передач с неподвижными осями 155
§ 33. Механизмы многоступенчатых зубчатых передач с подвижными осями 161
§ 34. Механизмы передач с гибкими звеньями 174

Глава VIII. Кинематическое исследование некоторых видов пространственных и плоских механизмов 176

§ 35. Механизм универсального шарнира 176
§ 36. Мальтийские механизмы 180
§ 37. Векторный метод кинематического анализа пространственных рычажных механизмов 183

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Отдел третий

СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Глава IX. Введение в динамический анализ механизмов 213

§ 38. Основные задачи 213
§ 39. Задачи силового расчета механизмов 215
§ 40. Силы, действующие на звенья механизма 216

Глава X. **Силы движущие и силы производственных сопротивлений** 217

§ 41. Диаграммы сил, работ и мощностей 217
§ 42. Механические характеристики машин 220

Глава XI. **Трение в механизмах** 223

§ 43. Виды трения 223
§ 44. Трение скольжения несмазанных тел 224
§ 45. Трение в поступательной кинематической паре 229
§ 46. Трение в винтовой кинематической паре 236
§ 47. Трение во вращательной кинематической паре 238
§ 48. Трение скольжения смазанных тел 240
§ 49. Трение качения и трение скольжения в высших парах . . . 242
§ 50. Трение в передачах с фрикционными колесами 246
§ 51. Трение в передачах с гибкими звеньями 247

Глава XII. **Силы инерции звеньев плоских механизмов** 250

§ 52. Определение сил инерции звеньев 250
§ 53. Метод замещающих точек 252

Глава XIII. **Кинетостатический расчет плоских механизмов** 259

§ 54. Условия статической определимости кинематических цепей 259
§ 55. Определение реакций в кинематических парах групп 262
§ 56. Определение реакций в кинематических парах групп с учетом сил трения 270
§ 57. Кинетостатический расчет ведущего звена механизма 272
§ 58. Силовой расчет типовых механизмов 275
§ 59. Уравновешивание масс звеньев механизма на фундаменте 287
§ 60. Определение положения общего центра масс механизма . . . 292
§ 61. Уравновешивание сил инерции звеньев механизма 293
§ 62. Уравновешивание вращающихся звеньев 304

Отдел четвертый

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Глава XIV. **Энергетические характеристики механизмов** 313

§ 63. Режимы движения механизмов 313
§ 64. Механический коэффициент полезного действия 317
§ 65. Определение коэффициентов полезного действия типовых механизмов 322

Глава XV. **Приведение сил и масс в механизмах** 334

§ 66. Приведенные силы и моменты 334
§ 67. Рычаг Жуковского 336
§ 68. Определение приведенных и уравновешивающих сил методом Жуковского 340
§ 69. Кинетическая энергия механизма 344
§ 70. Приведенная масса и приведенный момент инерции механизма 346

Глава XVI. **Исследование движения машинного агрегата** 351

§ 71. Основные формы уравнений движения 351
§ 72. Интегрирование уравнений движения 354
§ 73. Исследование движения с помощью уравнения кинетической энергии 359

Глава XVII. **Неравномерность движения механизмов и машин** 366

§ 74. Общая постановка задачи 366
§ 75. Средняя скорость машины и ее коэффициент неравномерности движения 368
§ 76. Связь между приведенным моментом инерции, приведенными силами и коэффициентом неравномерности движения механизма 372
§ 77. Основные данные, необходимые для определения момента инерции маховика 375
§ 78. Определение момента инерции махового колеса по диаграмме $T = T(J_п)$ 380
§ 79. Определение момента инерции махового колеса по уравнению моментов 383
§ 80. Определение момента инерции махового колеса при движущем моменте, зависящем от скорости 387

Глава XVIII. **Введение в теорию регулирования** 390

§ 81. Общая постановка задачи 390
§ 82. Кинетостатика центробежного регулятора 395
§ 83. Устойчивость регулятора 399
§ 84. Нечувствительность регулятора 402

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Отдел пятый

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТИПОВЫХ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

Глава XIX. **Основные понятия и определения. Синтез центроидных механизмов** 404

§ 85. Задачи проектирования механизмов 404
§ 86. Синтез трехзвенного центроидного механизма 408
§ 87. Некоторые условия, обеспечивающие передачу сил в механизмах 413

Глава XX. **Синтез трехзвенных плоских зубчатых механизмов с круглыми цилиндрическими колесами** 416

§ 88. Основные сведения из теории зацеплений 416
§ 89. Геометрические элементы зубчатых колес 421
§ 90. Геометрия эвольвентных профилей 425
§ 91. Проектирование эвольвентных профилей 430
§ 92. Дуга зацепления и коэффициент перекрытия 434
§ 93. Коэффициент скольжения зубьев 437
§ 94. Некоторые сведения по методам обработки эвольвентных профилей зубьев 440
§ 95. Подрезание профилей зубьев 444
§ 96. Определение основных размеров зубчатых колес, нарезанных методом обкатки 449
§ 97. Проектирование циклоидальных профилей 460
§ 98. Проектирование передач с косыми зубьями 462

Глава XXI. **Синтез трехзвенных пространственных зубчатых механизмов** 469

§ 99. Проектирование конической зубчатой передачи 469
§ 100. Проектирование винтовой и червячной передач 479

Глава XXII. **Синтез многозвенных зубчатых механизмов** 488

§ 101. Проектирование зубчатых передач с неподвижными осями 488
§ 102. Проектирование зубчатых передач с подвижными осями . . . 495

Глава XXIII. **Синтез мальтийских механизмов** 502

§ 103. Проектирование механизмов с внешним зацеплением 502

Глава XXIV. **Синтез кулачковых механизмов** 507

§ 104. Основные типы плоских кулачковых механизмов 507
§ 105. Исходные данные для проектирования кулачковых механизмов 510
§ 106. Законы движения ведомых звеньев 513
§ 107. Определение основных размеров кулачковых механизмов 525
§ 108. Проектирование профилей кулачков 535

Глава XXV. **Синтез плоских механизмов с низшими парами** 549

§ 109. Основные задачи синтеза 549
§ 110. Проектирование механизмов по заданным положениям звеньев 556
§ 111. Условия существования кривошипа в четырехзвенных механизмах 566
§ 112. Определение ошибок механизмов 568

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАШИН-АВТОМАТОВ

Отдел шестой

СИНТЕЗ И УПРАВЛЕНИЕ МАШИНАМИ-АВТОМАТАМИ

Глава XXVI. **Основные понятия теории машин-автоматов** 575

§ 113. Краткое введение в теорию машин-автоматов 575
§ 114. Направления развития машин-автоматов и систем машин автоматического действия 578
§ 115. Принципы автоматизации управления машинами-автоматами 583
§ 116. Циклограммы машин-автоматов 592
§ 117. Некоторые сведения по теории производительности машин-автоматов 595

Глава XXVII. **Синтез логических схем систем управления** 598

§ 118. Элементы алгебры логики. Синтез релейных схем 598
§ 119. Логические элементы 607

Глава XXVIII. **Краткие сведения по теории роботов и манипуляторов** 613

§ 120. Промышленные роботы и манипуляторы 613
§ 121. Относительные движения звеньев манипулятора 620
§ 122. Связи между управляющим и исполнительным механизмами 621
§ 123. Некоторые вопросы геометрии манипуляторов 624
§ 124. Блок-схемы автоматического управления 630

Приложение 1 633
Приложение 2 635

Список основной учебной литературы 639

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник по курсу теории механизмов и машин написан в соответствии с новой типовой программой, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР для машиностроительных и механических специальностей, и имеет своей задачей сообщить студентам 4-го и 5-го семестров тот минимум сведений, который необходим им для сдачи экзамена по общей части курса, выполнения контрольных заданий и проекта или расчетно-графических работ.

Новая программа курса фундаментально отличается от прежних программ тем, что в нее включены разделы, посвященные теории пространственных механизмов, вопросы структуры и синтеза незамкнутых кинематических цепей со многими степенями свободы, задачи оптимизации при синтезе механизмов. По решению Министерства в программу за счет увеличения общего числа часов курса, введен новый большой раздел «Основы проектирования машин автоматического действия», в котором излагаются не только вопросы механики машин, но и сведения по теории управления машинами автоматического действия.

В связи с тем, что фундаментально изменились основа курса и многие его разделы, он имеет новое название «Теория механизмов и машин». Такое название правильно отражает идею учебника, объединяющего изложение не только теории механизмов, но и основ современной теории машин.

Будучи ограничен объемом книги, автор не включил в нее исторических и литературно-библиографических обзоров, а также подробных литературных ссылок. Отметим только, что изложение всего материала следует установившимся традициям советской школы, и все основные разделы курса изложены или на основе личных разработок автора, или разработок его учеников и коллег по преподаванию.

При изложении некоторых новых разделов курса автору оказали непосредственную помощь, предоставив в его распоряжение необходимые материалы, его ученики О. Н. Левитская, А. Г. Овакимов, Д. Я. Ильинский, за что он приносит им свою глубокую благодарность. Соответствующие ссылки читатель найдет в тексте.

Автор выражает признательность также ряду коллег, принявших участие в просмотре рукописи и обсуждении программы курса.

Особую благодарность автор выражает профессорам Н. И. Левитскому, В. А. Зиновьеву, Б. В. Эдельштейну, канд. техн. наук Н. В. Сперанскому и всем членам кафедры Московского ордена Ленина авиационного института им. С. Орджоникидзе, оказавшим большую помощь автору своими советами.

Автор благодарит также читателей, студентов, преподавателей и инженеров за многочисленные критические замечания, полученные им после выпуска в 1967 году курса «Теория механизмов».

Автор и впредь рассчитывает на дружескую критику нового издания книги читателями и специалистами.

И. И. Артоболевский

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Механика машин и ее основные разделы

1°. Развитие современной науки и техники неразрывно связано с созданием новых машин, повышающих производительность и облегчающих труд людей, а также обеспечивающих средства исследования законов природы и жизни человека.

Целью создания машины является увеличение производительности и облегчения физического труда человека путем замены человека машиной. В некоторых случаях машина может заменять человека не только в его физическом, но и в умственном труде. Так, например, счетно-решающие машины заменяют человека или помогают ему в проведении необходимых математических операций, информационные машины обрабатывают большое количество заложенных в них человеком сведений и дают ему требуемую информацию и т. д. Созданные человеком машины могут управлять производственными и другими процессами по определенным, заранее составленным программам и в некоторых случаях автоматически обеспечивать процессы с оптимальными результатами.

Наконец, машины могут в некоторых случаях заменять отдельные органы человека, такие, например, как конечности рук (механизмы манипуляторов, протезы), сердце (искусственное сердце) и т. д.

Таким образом, понятием машины охватывается большое число самых различных объектов, применяемых человеком для своих трудовых и физиологических функций.

Понятие «машина» может быть в обобщенном виде выражено следующим образом: *машина есть устройство, создаваемое человеком для изучения и использования законов природы с целью облегчения физического и умственного труда, увеличения его производительности и облегчения путем частичной или полной замены человека в его трудовых и физиологических функциях.*

В более краткой форме понятие «машина» может быть также определено следующим образом: *машина есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации.*

2°. С точки зрения выполняемых машинами функций машины можно разделить на следующие классы:

а) энергетические машины,
б) рабочие машины,
в) информационные машины,
г) кибернетические машины.

Энергетической машиной называется машина, предназначенная для преобразования любого вида энергии в механическую (и наоборот). В первом случае она носит название *машины-двигателя,* во втором случае — *машины-генератора.*

Рабочей машиной называется машина, предназначенная для преобразования материалов. Рабочие машины подразделяются на транспортные и технологические машины.

Транспортной машиной называется рабочая машина, в которой преобразование материала состоит только в изменении положения основного перемещаемого объекта.

Технологической машиной называется рабочая машина, в которой преобразование материала состоит в изменении формы, свойства и положения материала или обрабатываемого объекта.

Информационной машиной называется машина для преобразования информации. Информационные машины подразделяются на контрольно-управляющие и математические машины.

Контрольно-управляющей машиной называется машина, которая преобразует получаемую контрольно-измерительную информацию с целью управления энергетической или рабочей машинами.

Математической машиной называется машина, которая преобразует информацию, получаемую в виде различных математических образов, заданных в форме отдельных чисел или алгоритмов.

Кибернетической машиной называется машина, заменяющая или имитирующая различные механические, физиологические или биологические процессы, присущие человеку и живой природе, и обладающая элементами искусственного интеллекта.

Процессы преобразования энергии, материалов и информации, выполняемые машиной, в некоторых случаях происходят без непосредственного участия человека. Такие машины получили название *машин-автоматов.* Машины-автоматы исключают участие человека в выполнении самого технологического процесса, но обычно требуют присутствия так называемых *операторов,* т. е. людей, следящих за работой машин-автоматов, определяющих программу их работы и корректирующих в необходимых случаях работу механизмов и специальных устройств автоматики.

Примерами энергетических машин являются электрические двигатели, двигатели внутреннего сгорания, турбины и т. д. К транспортным машинам относятся локомотивы, турбовозы, автомобили, тракторы, лифты, транспортеры.

Многообразен класс технологических машин. К ним принадлежат станки, текстильные машины, машины, используемые в сельском хозяйстве, металлургические, полиграфические, пищевые и другие машины.

В связи с повышением производительности машин и скоростей движения отдельных их органов, а также в связи с требованиями к высокому качеству изделий человек стал испытывать непреодолимые затруднения в управлении машинами, контроле технологических процессов, выполняемых машинами, измерения отдельных параметров выпускаемой продукции и т. д. В прежних, более примитивных машинах реакция человека была достаточной для того, чтобы изменить режим движения и работы машины, если эти режимы и работа отклонялись от нормальных. Теперь, когда продолжительность многих рабочих процессов измеряется весьма малыми долями времени, когда многие процессы являются непрерывными, физиология человека лимитирует его непосредственную реакцию на отклонение рабочего процесса от нормального. Поэтому человек стал создавать искусственные средства управления, контроля и измерения. Такими средствами, хорошо известными в технике, являются различные регуляторы и системы автоматического регулирования рабочих процессов, приборы контроля и измерения параметров этих процессов и т. д. В некоторых случаях стало целесообразным создание специальных машин для управления и контроля процессами. Так, например, для автоматизации контроля размеров поршневых колец, пальцев, шариков для шарикоподшипников и многих других объектов стали создаваться контрольно-измерительные машины, которые производят не только обмер деталей, но и их сортировку по размерам и другим показателям. В современные автоматические линии встраиваются различные контрольно-измерительные машины и приборы, которые не только контролируют процесс, но и управляют им, сигнализируя и автоматически корректируя этот процесс в процессе работы автоматических линий и систем. Такие машины называются *контрольно-управляющими*.

Широкое развитие как для управления и контроля над процессами, так и для замены умственного труда человека получили *логические машины*. К этим машинам относятся счетно-решающие машины, машины, моделирующие различные процессы, информационные машины и др.

Распространенным в настоящее время классом машин являются *кибернетические машины*. Эти машины способны заменять некоторые физиологические функции человека. Примерами таких машин являются машины, опознающие тот или иной образ, например буквы, и, следовательно, способные как бы читать; машины, воспроизводящие человеческую речь по заданным акустическим спектрам; машины, выполняющие различные движения по устной команде

человека; машины, заменяющие отдельные органы человека (сердце, почки, конечности и т. д.) в условиях медицинской, операционной или биологической исследовательской практики или в случаях, связанных с органическими нарушениями нормальной физиологии человека.

В последние годы стали создаваться кибернетические машины, выполняющие требуемые механические движения с помощью соответствующих систем управления, в которых используются ЭВМ, биотоки, специальные управляющие приводы и т. д. Это — автооператоры, роботы, манипуляторы, шагающие, ползающие и другие машины. Отличительной их особенностью является то, что рабочие органы этих машин выполняют механические движения, свойственные органам человека или животных. Например, робот имеет как бы «руку», выполняющую заданные технологические операции. Шагающая машина имеет «ноги» и в какой-то мере имитирует движения, свойственные животным или насекомым. Ползающие машины своими элементами напоминают гусеницу или змею и т. д. Но главным в кибернетических машинах является их «очувствление», т. е. оснащение этих машин искусственным осязанием с помощью соответствующих датчиков, искусственным зрением с помощью телевизионных устройств и т. д. С помощью специальных управляющих машин роботы, манипуляторы, шагающие и другие машины оснащаются как бы «искусственным интеллектом», т. е. по заложенной в систему управления программе могут выполнять технологические операции того или другого вида в зависимости от ситуации, например при сборке каких-либо узлов выбирать требуемые детали, различая их по форме, цвету, геометрическим параметрам и т. д., перемещаться по различным поверхностям, обходя препятствия на своем пути или перешагивая через них, и т. д.

3°. С развитием современной науки и техники все шире используются системы машин автоматического действия. Совокупность машин-автоматов, соединенных между собой и предназначенных для выполнения определенного технологического процесса, называется *автоматической линией*.

Развитые системы машин являются комплексом машин различных классов. Так, например, современные роторные и другие автоматические линии являются комплексом, в который *входят* энергетические машины в виде электроприводов, транспортные машины для перемещения обрабатываемого объекта в виде роторов или транспортеров, технологические машины, изменяющие форму, состав или структуру обрабатываемого объекта, контрольно-управляющие машины, контролирующие качество и размеры получаемых изделий и регулирующие режим движения двигателей и рабочих органов, и, наконец, логические машины, производящие подсчет количества выпускаемой продукции. В некоторых развитых машинных устройствах функции контроля и управления,

а также логические функции могут выполняться не специальными машинами, а соответствующими приборами и системами, органически входящими в состав машинного устройства. Так, например, автомат для шлифования изделий с помощью шлифовального круга, представляющий собой технологическую машину, имеет в своем составе электропривод, являющийся энергетической машиной, и управляющее устройство, автоматически компенсирующее износ шлифовального круга. Фрезерный станок-автомат, представляющий собою технологическую машину, имеет в своем составе электропривод, т. е. энергетическую машину, систему программного управления, являющуюся управляющим устройством, систему контроля точности изготовления изделия и, наконец, систему переработки информации в виде счетно-решающего устройства, корректирующего процесс. Даже простейшие машинные устройства, как, например, паровая машина, имеют систему автоматического регулирования и управления в виде, например, центробежного регулятора.

Развитое машинное устройство, состоящее из двигателя, передаточных механизмов и рабочей машины и в некоторых случаях контрольно-управляющих и счетно-решающих устройств, называется *машинным агрегатом*.

4°. При создании машины человек пользуется всеми достижениями математики, механики, физики, химии, электротехники и электроники. Машины могут работать и осуществлять требуемые движения своих органов с помощью устройств, в основе которых лежат различные принципы воспроизведения движения, производства работы и преобразования энергии. Современные наиболее развитые и совершенные машины обычно представляют собою совокупность многих устройств, в основу работы которых положены принципы механики, теплофизики, электротехники и электроники.

Наука, изучающая машины, в основе работы которых положены принципы механики с точки зрения исследования законов движения отдельных устройств и действующих на них сил, носит название «*механики машин*».

5°. *Система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел, называется механизмом*. Механизмы, входящие в состав машины, весьма разнообразны. Одни из них представляют собою сочетания только твердых тел. Другие имеют в своем основном составе гидравлические, пневматические тела или электрические, магнитные и другие устройства. Соответственно такие механизмы называются *гидравлическими*, *пневматическими*, *электрическими* и т. д. С точки зрения их функционального назначения механизмы машины обычно делятся на следующие виды:

а) механизмы двигателей и преобразователей,

б) передаточные механизмы,

в) исполнительные механизмы,

г) механизмы управления, контроля и регулирования,

д) механизмы подачи, траспортировки, питания и сортировки обрабатываемых сред и объектов,

е) механизмы автоматического счета, взвешивания и упаковки готовой продукции.

Механизмы двигателей осуществляют преобразование различных видов энергии в механическую работу. *Механизмы преобразователей (генераторов)* осуществляют преобразование механической работы в другие виды энергии. К механизмам двигателей относятся механизмы двигателей внутреннего сгорания, паровых машин, электродвигателей, турбин и др. К механизмам преобразователей относятся механизмы насосов, компрессоров, гидроприводов и др.

Передаточные механизмы (привод) имеют своей задачей передачу движения от двигателя к технологической машине или исполнительным механизмам. Так как вал двигателя обычно имеет большее число оборотов в минуту, чем основной вал технологической машины, задачей передаточных механизмов является уменьшение числа оборотов в минуту вала двигателя до уровня числа оборотов в минуту основного вала технологической машины.

Исполнительными механизмами называются те механизмы, которые непосредственно воздействуют на обрабатываемую среду или объект. В их задачу входит изменение формы, состояния, положения и свойств обрабатываемых среды или объекта. К исполнительным механизмам, например, относятся механизмы прессов, деформирующих обрабатываемый объект, механизмы грохотов в энергозерноочистительных машинах, разделяющих среду, состоящую из зерна и соломы, механизмы металлообрабатывающих станков, изменяющие форму заготовки снятием стружки до той формы, которая требуется по технологическим условиям, механизмы проката слитков в блюмингах и т. д.

Механизмами управления, контроля и регулирования называются различные механизмы и устройства для контроля размеров обрабатываемых объектов, например механические щупы, следующие за фрезой, обрабатывающей криволинейную поверхность, и сигнализирующие об отклонении фрезы от заданной программы обработки; регуляторы, реагирующие на отклонение угловой скорости главного вала машины и устанавливающие нормальную заданную угловую скорость этого вала; механизм, регулирующий постоянство расстояния между валками прокатного стана и т. д. К этим же механизмам относятся и измерительные механизмы по контролю размеров, давления, уровней жидкостей и т. д.

К механизмам подачи, транспортировки, питания и сортировки обрабатываемых сред и объектов относятся механизмы винтовых шнеков, скребковых и ковшевых элеваторов для транспортировки

и подачи сыпучих материалов, механизмы загрузочных бункеров для штучных заготовок, механизмы подачи пруткового материала в высадочных автоматах, механизмы сортировки готовой продукции по размерам, весу и конфигурации и т. д.

Механизмы автоматического счета, взвешивания и упаковки готовой продукции применяются во многих машинах, в основном выпускающих массовую штучную продукцию. Необходимо иметь в виду, что такие механизмы, как механизмы счета, взвешивания и упаковки готовой продукции, могут быть и исполнительными механизмами, если они входят в специальные машины, предназначаемые для этих операций.

Так, например, в машинах для расфасовки чая механизмы взвешивания и упаковки являются исполнительными механизмами. В промышленности, изготовляющей шарикоподшипники, имеются специальные машины для упаковки собранных шарикоподшипников, в которых механизмы упаковки являются исполнительными механизмами, и т. д.

Несмотря на разницу в функциональном назначении механизмов отдельных видов, в их строении, кинематике и динамике много общего.

Например, механизм поршневого двигателя, механизм кривошипного пресса и механизм привода ножа косилки имеют в своей основе один и тот же кривошипно-ползунный механизм. Механизм привода резца строгального станка и механизм роторного насоса имеют в своей основе один и тот же кулисный механизм. Механизм редуктора, передающего движение от двигателя самолета к его винту, и механизм дифференциала автомобиля имеют в своей основе зубчатый механизм и т. д.

Поэтому можно к исследованию механизмов с различными функциональными назначениями применять общие методы, базирующиеся на основных принципах современной механики. В механике обычно рассматриваются статика, кинематика и динамика как абсолютно твердых, так и упругих тел. При исследовании машин и механизмов, как правило, мы можем считать жесткие тела, образующие механизм, абсолютно твердыми, так как перемещения, возникающие от упругих деформаций тел, малы по отношению к перемещениям самих тел и их точек. Если мы рассматриваем механизмы как устройства, в состав которых входят только твердые тела, то для исследования кинематики и динамики механизмов можно пользоваться методами, излагаемыми в теоретической механике. Если же требуется изучить кинематику и динамику механизмов с учетом упругости звеньев, то для этого, кроме методов теоретической механики, мы должны еще применять методы, излагаемые в сопротивлении материалов, теории упругости и теории колебаний. Если в состав механизма входят жидкие или газообразные тела, то необходимо привлекать к исследованию

кинематики и динамики механизмов гидромеханику и аэромеханику.

6°. Механика машин представляет собой науку, состоящую из двух дисциплин. Первая носит название «теория механизмов», а вторая носит название «теория машин».

В теории механизмов изучают свойства отдельных типовых механизмов, применяемых в самых различных машинах, приборах и устройствах.

Рассматривается общая теория образования механизмов как совокупности связанных между собой тел, обладающих различными формами движения. Изучаются кинематические и динамические характеристики механизмов в зависимости от их геометрических параметров и действующих на механизмы сил.

В теории машин рассматривается совокупность взаимно связанных механизмов, образующих машину. Эта совокупность может образовывать отдельную машину или машинный агрегат или, наконец, машинное устройство, состоящее из комплекса машин, — так называемую *систему машин автоматического действия*.

В теории машин рассматриваются также вопросы теории строения машин, связанные с разработкой методов построения принципиальных схем машин как совокупности механизмов, обеспечивающей оптимальную производительность машины при наивыгоднейших условиях ее работы.

Далее в теории машин рассматриваются вопросы автоматического управления и регулирования машин и машинных агрегатов.

В теорию машин обычно также включается раздел теории упругих колебаний в машинах. В этом разделе изучаются упругие колебания подвижных тел, составляющих механизмы, машины, колебания опор и фундаментов машин, и излагаются методы локализации колебаний и вредных шумовых эффектов.

Изучение механики машин начинается с раздела теории механизмов, так как, только изучив свойства отдельных механизмов или их видов, можно переходить к изучению совокупности механизмов, образующих машину, т. е. к теории машин.

В данном учебнике излагается теория механизмов и основы теории машин-автоматов в объеме, необходимом для студентов механических и машиностроительных специальностей.

Теория механизмов и машин является первой дисциплиной, вводящей студентов в круг общих и специальных дисциплин. В ее задачу входит подготовка студентов к слушанию курсов деталей машин, технологии машиностроения и курсов по расчету и конструированию отдельных видов машин в зависимости от специальности, по которой проходит подготовка студентов. Вместе с курсами теоретической механики, сопротивления материалов и деталей машин теория механизмов и машин образует цикл предметов, обеспечивающих общеинженерную подготовку студентов.

§ 2. Основные понятия и определения

1°. Теория механизмов есть наука, изучающая строение, кинематику и динамику механизмов в связи с их анализом и синтезом.

Проблемы теории механизмов могут быть разбиты на две группы. Первая группа проблем посвящена исследованию структурных, кинематических и динамических свойств механизмов, т. е. *анализу механизмов*.

Вторая группа проблем посвящена проектированию механизмов с заданными структурными, кинематическими и динамическими свойствами для осуществления требуемых движений, т. е. *синтезу механизмов*.

Движение механизмов зависит от их строения и сил, на них действующих. Поэтому удобно при изложении теории механизмов проблемы анализа механизмов разбить на две части:

а) структурный и кинематический анализ и

б) динамический анализ механизмов.

Структурный и кинематический анализы механизмов имеют своей целью изучение теории строения механизмов, исследование движения тел, их образующих, с геометрической точки зрения, независимо от сил, вызывающих движение этих тел.

Динамический анализ механизмов имеет своей целью изучение методов определения сил, действующих на тела, образующие механизм, во время движения этих тел, и изучение взаимосвязи между движениями этих тел, силами, на них действующими, и массами, которыми обладают эти тела.

Проблемы синтеза механизмов удобно излагать по видам механизмов, поэтому задачей синтеза является проектирование механизма предварительно выбранной структуры по заданным кинематическим и динамическим условиям.

Таким образом, настоящий курс теории механизмов и машин разделен на следующие четыре части:

а) структурный и кинематический анализ механизмов,

б) динамический анализ механизмов,

в) синтез механизмов,

г) основы теории машин-автоматов.

2°. Всякий механизм состоит из отдельных деталей (тел). В механизмах стационарного типа детали являются неподвижными, другие детали движутся относительно них. В механизмах неподвижного типа, как, например, в двигателе самолета или автомобиля за неподвижные детали условно принимаются детали, неизменно связанные с корпусом самолета или автомобиля. Согласно этому в кривошипном двигателе во всех случаях к неподвижным деталям относятся корпус двигателя, подшипник коренного вала и другие детали; подвижными деталями считаются: коренной вал, поршни, золотниковое или клапанное устройство и т. д. Каждая подвижная

деталь или группа деталей, образующая одну жесткую подвижную систему тел, носит название *подвижного звена механизма*. Таким образом, например, шатун двигателя является одним подвижным звеном, хотя шатун может состоять из нескольких деталей: тела шатуна, крышек, шатунных подшипников, болтов, стягивающих эти крышки, и т. д. Но он все же будет одним подвижным звеном, ибо все детали, из которых шатун состоит, будучи соединены, образуют одну жесткую систему тел, не имеющих движения друг относительно друга. Детали, образующие одно звено, иногда не имеют жесткой связи между собою (например, лента конвейера с деталями, ею переносимыми); тогда признаком того, что они относятся к одному звену, служит отсутствие движения их относительно друг друга и, следовательно, возможность введения между ними жесткой связи без изменения кинематики всей системы.

Все неподвижные детали образуют одну жесткую неподвижную систему тел, называемую *неподвижным звеном* или *стойкой*. Так, например, корпус двигателя, подшипники коренного вала и т. п. образуют в совокупности одно неподвижное звено, или стойку.

Таким образом, в любом механизме мы имеем одно *неподвижное звено и одно или несколько подвижных звеньев*.

Следовательно, механизм можно рассматривать как совокупность неподвижного и подвижных звеньев. Подвижные звенья входят в соединения между собой или с неподвижным звеном так, что всегда имеет место возможность движения одного звена относительно другого.

Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой.

Поверхности, линии, точки звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называются элементами звена.

Связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется кинематической цепью. Таким образом, коленчатый вал двигателя образует с неподвижным подшипником одну кинематическую пару. Шатун с коленчатым валом образует вторую кинематическую пару, поршень с шатуном третью, поршень и цилиндр четвертую, а совокупность этих кинематических пар составляет кинематическую цепь. Отсюда следует, что в основе всякого механизма лежит кинематическая цепь. Но не всякую кинематическую цепь можно назвать механизмом. Механизм предназначен для осуществления заранее заданных закономерных движений. Поэтому только та кинематическая цепь будет механизмом, звенья которой осуществляют целесообразные движения, вытекающие из инженерных производственных задач, для выполнения которых сконструирован механизм.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
СТРУКТУРНЫЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ
СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА I
КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

§ 3. Кинематические пары и их классификация

1°. Кинематическую пару можно также определить как подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев.

Возможные соединения звеньев в кинематические пары весьма разнообразны. Например, на рис. 1.1 показана так называемая *вращательная кинематическая пара*, в которой соединение звеньев A

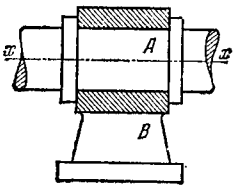


Рис. 1.1. Вращательная кинематическая пара.

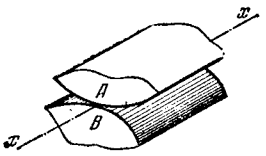


Рис. 1.2. Кинематическая пара в виде двух касающихся цилиндрических поверхностей.

и B образуется двумя цилиндрами, находящимися в постоянном соприкасании. Бурты внутреннего цилиндра препятствуют движению одного цилиндра относительно другого в направлении оси $x - x$, но не препятствуют вращению одного из них относительно другого.

На рис. 1.2 показан способ соединения звеньев, ограничивающий относительное движение двух звеньев A и B. Эта кинематическая пара допускает относительное перекатывание, скольжение и верчение.

Таким образом, на относительное движение каждого звена кинематической пары накладываются ограничения, зависящие от способа соединения звеньев пары. Эти ограничения будем называть *условиями связи* в кинематических парах.

2°. Рассмотрим теперь, какие же связи и в каком количестве могут быть наложены на относительные движения звеньев кинематической пары.

Как известно, в общем случае всякое свободно движущееся в пространстве абсолютно твердое тело (рис. 1.3), положение которого определяется тремя произвольно выбранными точками A, B и C, *обладает шестью степенями свободы*. В самом деле, положение твердого тела в пространстве фиксируется координатами трех его точек A, B и C, т. е. девятью координатами: (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B) и (x_C, y_C, z_C). Между собой эти координаты связаны тремя условиями постоянства расстояний: AB, BC, CA. Таким образом, число независимых параметров, определяющих положение твердого тела в пространстве, равно шести и тело обладает *шестью степенями свободы*. Движение такого тела может быть всегда представлено как вращение вокруг и скольжение вдоль трех произвольно выбранных взаимно перпендикулярных осей x, y и z. Таким образом, в общем случае, твердое тело обладает в пространстве шестью видами независимых возможных движений: *тремя вращениями вокруг осей x, y и z и тремя поступательными движениями вдоль тех же осей*. Поэтому, если бы на движение первого звена кинематической пары, принятого за абсолютно твердое тело, не было наложено никаких условий связи, движение такого звена могло бы быть представлено состоящим из шести вышеуказанных движений относительно выбранной системы координат xyz, связанной со вторым звеном. Как уже сказано выше, вхождение звена в кинематическую пару с другим звеном налагает на относительные движения этих звеньев условия связи. Очевидно, что число этих условий связи может быть только целым и должно быть меньше шести, так как уже в том случае, когда число условий связи равняется шести, звенья теряют относительную подвижность и кинематическая пара переходит в жесткое соединение двух звеньев. Точно так же число условий связи не может быть меньшим единицы, ибо в том случае, когда число условий связи равно нулю, звенья не соприкасаются, и, следовательно, кинематическая пара перестает существовать; в таком случае мы имеем два тела, движущихся в пространстве одно независимо от другого.

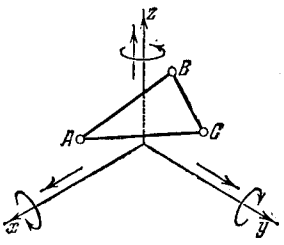


Рис. 1.3. К определению положения тела в пространстве.

Итак, число условий связи S, наложенных на относительное движение каждого звена кинематической пары, может располагаться в пределах от 1 до 5, т. е.

$$1 \leqslant S \leqslant 5.$$

Следовательно, число степеней свободы H звена кинематической пары в относительном движении может быть выражено зависимостью

$$H = 6 - S. \qquad (1.1)$$

Из равенства (1.1) следует, что число степеней свободы звена кинематической пары в относительном движении может изменяться также от 1 до 5.

3°. Связи, наложенные на относительное движение звена кинематической пары, ограничивают те возможные относительные движения, которыми обладают звенья в свободном состоянии. В результате этих ограничений некоторые из шести возможных относительных движений свободно движущегося звена становятся для него связанными. Например, соответствующим подбором соприкасающихся элементов звеньев можно устранить возможность одного из вращений вокруг какой-либо оси или одного из поступательных движений вдоль какой-либо оси, или одновременно одного из вращений и одного поступательного движения и т. д.

Оставшиеся возможные движения могут быть или *независимыми* друг от друга, или же быть одно с другим связаны какими-нибудь дополнительными геометрическими условиями, устанавливающими функциональную связь между движениями. Например, в кинематической паре винта и гайки (винтовой паре) вращение винта вокруг оси вызывает его поступательное движение, причем оба эти движения связаны определенной аналитической зависимостью.

Оставшиеся независимыми возможные движения определяют число степеней свободы звеньев кинематической пары в их относительном движении.

Если между простейшими движениями звена вокруг и вдоль трех координатных осей x, y и z (рис. 1.3) отсутствуют какие-либо функциональные зависимости, то звено в зависимости от характера связей, налагаемых на его движение относительно другого звена кинематической пары, обладает числом простейших движений от 1 до 5. Число простейших движений может оказаться больше числа степеней свободы, если между простейшими движениями установлены функциональные зависимости, являющиеся дополнительными условиями связи как, например, в винтовой паре.

4°. Рассмотрим сначала различные кинематические пары, для которых отдельные простейшие возможные движения их звеньев функционально между собой не связаны. Для этих пар числу условий связи, налагаемых на относительное движение их звеньев,

соответствует такое же число исключенных простейших возможных движений этих звеньев.

Все кинематические пары делятся на *классы* в зависимости от числа условий связи, налагаемых ими на относительное движение их звеньев. Так как число условий связи может быть от 1 до 5, то число классов пар равно пяти, в соответствии с чем мы имеем кинематические пары I, II, III, IV и V классов. Класс кинематической пары может быть всегда определен, если будет принята во внимание зависимость (1.1). Из этого равенства находим

$$S = 6 - H. \tag{1.2}$$

Из равенства (1.2) следует, что число условий связи S, налагаемых кинематической парой, будет всегда равняться разности между числом шесть и тем числом степеней свободы, которым обладает каждое звено пары в относительном движении. Но, как это было показано выше, в рассматриваемых парах числу степеней свободы соответствует такое же число возможных простейших движений. Следовательно, если подсчитать число простейших движений, которыми обладает звено кинематической пары в относительном движении, и вычесть полученное число из шести, то мы получим число связей, налагаемых данной кинематической парой на относительное движение ее звеньев, и этим самым определим класс пары. Рассмотрим несколько примеров.

5°. На рис. 1.4 показана кинематическая пара, представляющая собою шар A, перекатывающийся со скольжением по плоскости B. Движение шара относительно плоскости может быть разложено на три вращения вокруг осей x, y и z и скольжение по плоскости B. Это движение в свою очередь может быть разложено на

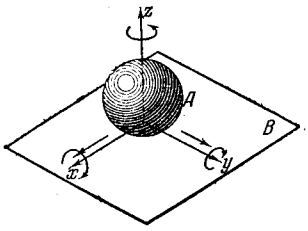


Рис. 1.4. Пятиподвижная кинематическая пара.

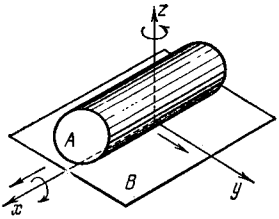


Рис. 1.5. Четырехподвижная кинематическая пара.

скольжения вдоль осей x и y. Скольжение шара вдоль вертикальной оси z невозможно, потому что движение ограничено плоскостью B, а при движении в обратную сторону нарушается соприкосновение звеньев, и, следовательно, кинематическая пара перестает существовать. Таким образом, движение шара может быть представлено как вращение вокруг трех осей и скольжение

вдоль двух осей, и число простейших движений, которые может иметь шар, равно пяти. В этом случае число степеней свободы звеньев данной кинематической пары равно пяти и число условий связи равно

$$S = 6 - H = 6 - 5 = 1.$$

Поэтому пара, изображенная на рис. 1.4, должна быть отнесена к парам I класса *(пятиподвижная пара)*.

Примером пары II класса может служить пара, показанная на рис. 1.5, представляющая собой цилиндр A, лежащий на плоскости B. Движение цилиндра A относительно плоскости B, или наоборот, сводится к вращению вокруг осей x и z и скольжению вдоль осей x и y. Таким образом, число простейших движений цилиндра равно четырем, т. е. число степеней свободы H звена кинематической пары равно четырем. Следовательно, число условий связи S равно

$$S = 6 - H = 6 - 4 = 2.$$

Итак, данная кинематическая пара должна быть отнесена к парам II класса *(четырехподвижная пара)*.

На рис. 1.6 показан пример пары III класса. Звено A оканчивается шаром, входящим в шаровую полость звена B. Движение

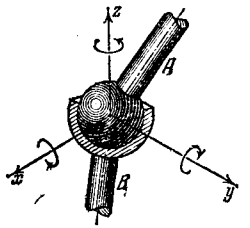


Рис. 1.6. Шаровая трехподвижная кинематическая пара.

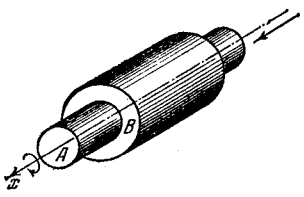


Рис. 1.7. Цилиндрическая двухподвижная кинематическая пара.

звена A относительно звена B, или наоборот, сводится к вращению вокруг осей x, y и z. Следовательно, число степеней свободы H звена кинематической пары равно трем. Число условий связи S равно

$$S = 6 - H = 6 - 3 = 3,$$

т. е. пара должна быть отнесена к парам III класса *(трехподвижная пара)*. Эта пара получила название *шаровой пары*.

Примером пары IV класса является пара, показанная на рис. 1.7. Цилиндр A находится в полом цилиндре B. Движение цилиндра A относительно цилиндра B сводится к вращению и скольжению вокруг и вдоль оси x. Число степеней свободы H равно двум. Следовательно, число условий связи S равно

$$S = 6 - H = 6 - 2 = 4.$$

Таким образом, эта пара должна быть отнесена к парам IV класса *(двухподвижная пара)*. Эта пара получила название *цилиндрической пары*. На рис. 1.1 показана кинематическая пара V класса, каждое звено которой обладает только одним возможным простейшим движением, а именно, вращением вокруг оси $x - x$. Поэтому число степеней свободы H этой пары равняется единице, и, следовательно, число условий связи в этой кинематической паре равно

$$S = 6 - H = 6 - 1 = 5.$$

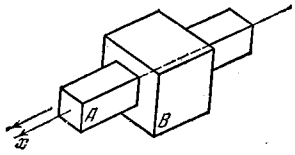


Рис. 1.8. Одноподвижная поступательная кинематическая пара V класса второго вида.

Таким образом, эта пара должна быть отнесена к парам V класса *(одноподвижная пара)*. Эта пара получила название *вращательной пары*.

На рис. 1.8 показана кинематическая пара V класса, каждое из звеньев которой обладает только одним возможным простейшим движением, а именно, поступательным движением вдоль оси x.

Поэтому число степеней свободы H этой пары равняется единице, и, следовательно, число условий связи S в этой кинематической паре равно

$$S = 6 - H = 6 - 1 = 5.$$

Таким образом, эта пара должна быть отнесена к парам V класса *(одноподвижная пара)*. Эта пара получила название *поступательной пары*.

Итак, кинематические пары в зависимости от числа условий связи, налагаемых на относительное движение их звеньев, могут быть разделены на пять классов.

Отметим, что при рассмотрении возможных движений, которыми обладают звенья пар в их относительном движении, необходимо иметь в виду, что эти движения должны рассматриваться лишь как возможные для данного момента времени.

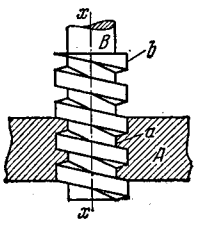


Рис. 1.9. Винтовая пара.

6°. Рассмотренные выше кинематические пары относились к парам, для которых *мгновенные* возможные движения их звеньев не зависят друг от друга. Однако в технике встречаются кинематические пары, для которых относительные движения их звеньев связаны какой-либо дополнительной геометрической зависимостью. В качестве примера рассмотрим один вид такой пары, наиболее часто встречающейся в механизмах. Пусть, например, вращательные поступательные относительные движения звеньев пары IV класса, показанной на рис. 1.9, связаны условием, что заданному углу φ поворота одного звена относительно

другого вокруг оси $x - x$ соответствует поступательное перемещение h вдоль той же оси. В этом случае, хотя звенья пары имеют и поступательное, и вращательное движения, эти движения связаны условием

$$h = h(\varphi) \tag{1.3}$$

и, таким образом, на относительное движение звеньев пары наложена еще одна дополнительная связь, выраженная соотношением (1.3). В этом случае пара должна быть отнесена не к IV, а уже к V классу. Подобные пары весьма часто встречаются в технике и носят название *винтовой пары* из-за винтового характера относительного движения их звеньев.

Винтовая пара представляет собой два звена A и B (рис. 1.9). Цилиндр B имеет на себе внешнюю винтовую резьбу b; соответственно в звене A сделана внутренняя резьба a. При вращении звена A относительно звена B или звена B относительно звена A движущееся звено перемещается вдоль оси $x - x$. Ясно, что повороту какого-либо звена на некоторый угол φ соответствует связанное с поворотом перемещение h вдоль оси $x - x$, т. е. вращательное движение звена закономерно связано с поступательным его движением. Эта связь может быть легко получена. Для этого рассмотрим винтовую линию, принадлежащую какому-либо элементу звена данной пары. Пусть эта винтовая линия принадлежит цилиндру B радиуса r (рис. 1.10). Развернем поверхность цилиндра B на плоскость; тогда вместо винтовой линии получим прямую, наклоненную к горизонту под углом β, называемым *углом подъема* резьбы. Если звено B (рис. 1.9) повернуть на полный оборот (на угол, равный 2π), то это звено переместится вдоль оси $x - x$ на величину h, которая называется *шагом винта* (рис. 1.10). Если же повернуть звено B на произвольно заданный угол φ, то оно переместится вдоль оси $x - x$ на величину h':

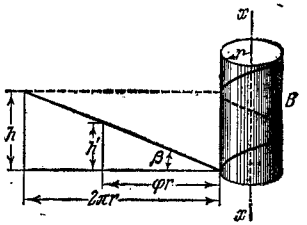


Рис. 1.10. Винтовая линия и ее развертка на плоскости.

$$h' = \frac{h\varphi}{2\pi}. \tag{1.4}$$

Соотношение (1.4) налагает связь на движение звеньев винтовой пары вдоль и вокруг оси $x - x$. Так как из рис. 1.10 следует, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{2\pi r},$$

то

$$h' = r\varphi \operatorname{tg}\beta = C\varphi,$$

где через C обозначена постоянная, равная $r \operatorname{tg}\beta$.

Внутри каждого класса кинематические пары могут быть подразделены на виды в зависимости от различных сочетаний допускаемых или ограниченных в них движениях.

7°. Кинематические пары делятся на низшие и высшие. *Кинематическая пара, которая может быть выполнена соприкасанием элементов ее звеньев только по поверхности, называется низшей. Кинематическая пара, которая может быть выполнена соприкасанием элементов ее звеньев только по линии или в точках, называется высшей.*

Примером низшей кинематической пары может служить пара, показанная на рис. 1.1 В этой паре звенья соприкасаются цилиндрическими поверхностями. Примеры высших пар приведены на рис. 1.2 и 1.4. В паре, изображенной на рис. 1.2, звенья соприкасаются по прямой. Для того чтобы элементы кинематических пар находились в постоянном соприкасании, они должны быть замкнуты. Замыкание может быть либо *геометрическим*, либо *силовым*.

Геометрическое замыкание осуществляется соответствующими геометрическими формами элементов звеньев кинематической пары. Например, все пары, изображенные на рис. 1.1 и 1.6 — 1.9, являются замкнутыми геометрически, потому что соприкасание элементов звеньев этих пар обеспечивается их геометрическими формами.

Чтобы пары, показанные на рис. 1.4 и 1.5, были замкнутыми, необходимо шар и цилиндр прижимать к плоскости какой-нибудь силой. *Силовое замыкание осуществляется силой веса, силой упругости пружин и т. п.*

§ 4. Условные изображения кинематических пар

1°. При схематическом изображении механизмов на чертежах удобнее вместо конструктивного изображения кинематических пар и звеньев ввести условные их изображения. Рассмотрим условные изображения некоторых наиболее употребительных кинематических пар.

На рис. 1.11 показаны два варианта схематического изображения вращательной пары V класса, состоящей из звеньев A и B. Первый вариант (рис. 1.11, *а*) дает изображение, более близкое к конструкции; второй вариант (рис. 1.11, *б*) представляет собой условное изображение, применяемое на кинематических схемах.

На рис. 1.12 даны схематические изображения вращательной пары V класса для тех случаев, когда одно из звеньев пары (звено A) неподвижно.

На рис. 1.13 даны схематические изображения поступательной пары V класса, а на рис. 1.14 показаны схематические изображения той же пары при неподвижном звене B.

На рис. 1.15 представлены схематические изображения винтовой пары V класса.

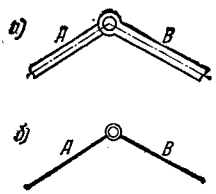


Рис. 1.11. Схематические изображения вращательной пары: *а*) изображение со схематизированными конструктивными формами; *б*) изображение, применяемое на кинематических схемах.

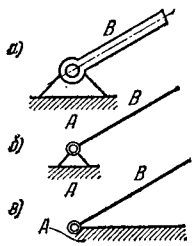


Рис. 1.12. Схематические изображения вращательной пары с одним неподвижным звеном: *а*) изображения со схематизированными конструктивными формами; *б*) изображение, применяемое на кинематических схемах; *в*) то же.

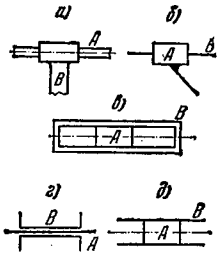


Рис. 1.13. Схематические изображения поступательной пары: *а*) изображение со схематизированными конструктивными формами; *б*) изображение, применяемое на кинематических схемах; *в*) изображение с направляющей в виде паза; *г*) и *д*) изображения, применяемые на кинематических схемах.

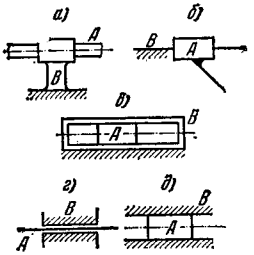


Рис. 1.14. Схематические изображения поступательной пары с одним неподвижным звеном: *а*) изображение со схематизированными конструктивными формами; *б*) изображение, применяемое на кинематических схемах; *в*) изображение с направляющей в виде паза; *г*) и *д*) изображения, применяемые на кинематических схемах.

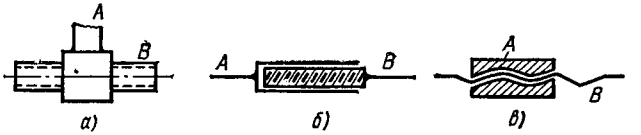


Рис. 1.15. Схематические изображения винтовой пары: *а*) изображение со схематизированными конструктивными формами; *б*) и *в*) изображения, применяемые на кинематических схемах.

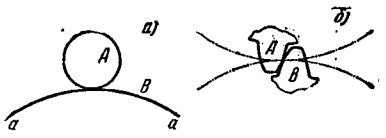


Рис. 1.16. Изображения высшей пары: *а*) пара с круглым роликом *A* и криволинейным профилем *B*; *б*) пара в виде двух касающихся криволинейных зубьев *A* и *B*.

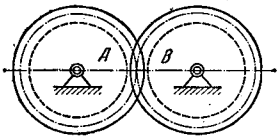


Рис. 1.17. Схематическое изображение зубчатого механизма из двух колес.

В некоторых случаях необходимо дать полное представление о тех элементах, которыми соприкасаются звенья пары. В этих случаях на схеме полностью и точно изображаются соприкасающиеся элементы звеньев. Примеры изображения таких пар показаны на рис. 1.16. На рис. 1.16, *а* круглый ролик A соприкасается с кривой $a-a$ звена B; на рис. 1.16, *б* зуб A одного зубчатого колеса соприкасается с зубом B другого зубчатого колеса.

Два зубчатых колеса, входящих в кинематическую пару, имеют условное изображение, показанное на рис. 1.17.

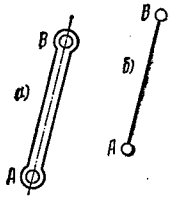


Рис. 1.18. Схематические изображения звена, входящего в две вращательные кинематические пары: *а*) изображение со схематизированными конструктивными формами; *б*) изображение, применяемое на кинематических схемах.

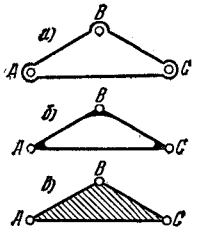


Рис. 1.19. *а*), *б*) и *в*) Различные изображения звена, входящего в три кинематические пары.

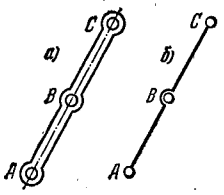


Рис. 1.20. Схематическое изображение звена, входящего в три вращательные пары: *а*) изображение со схематизированными конструктивными формами; *б*) изображение, применяемое на кинематических схемах.

2°. Введем также условные обозначения для звеньев, входящих в кинематические пары.

Если необходимо изучить движение только двух точек звена, то схематическое изображение такого звена можно представить в виде, показанном на рис. 1.18. На этом рисунке представлен тот случай, когда звено входит в две вращательные пары A и B. На рис. 1.19 показаны схематические изображения звена, входящего в три вращательные пары: A, B и C. Наконец, на рис. 1.20 показано схематическое изображение звена, входящего в три вращательные пары A, B и C с параллельными осями вращения, лежащими в одной плоскости.

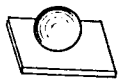
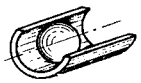
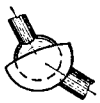
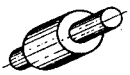
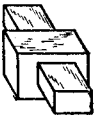
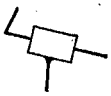
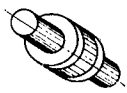
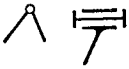
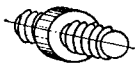
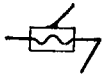
На прилагаемой таблице показаны условные обозначения наиболее распространенных кинематических пар, используемых в инженерной практике.

§ 5. Кинематические цепи

1°. *Кинематической цепью называется связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары* (таблица 1). На рис. 1.21 показана кинематическая цепь, состоящая из четырех звеньев, образующих три кинематические пары. Звенья *1* и *2*

Таблица 1

Условные обозначения кинематических пар

Класс пары	Число условий связи	Число степеней свободы	Название пары	Рисунок	Условное обозначение
I	1	5	Шар — плоскость		
II	2	4	Шар — цилиндр		
III	3	3	Сферическая		
III	3	3	Плоскостная		
IV	4	2	Цилиндрическая		
IV	4	2	Сферическая с пальцем		
V	5	1	Поступательная		
V	5	1	Вращательная		
V	5	1	Винтовая		

входят во вращательную пару A (V класса), звенья *2* и *3* — в поступательную пару B (V класса) и, наконец, звенья *3* и *4* входят во вращательную пару C (V класса).

Кинематические цепи делятся на простые и сложные. *Простой кинематической цепью называется такая цепь, у которой каждое*

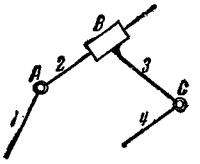


Рис. 1.21. Схема кинематической цепи из четырех звеньев.

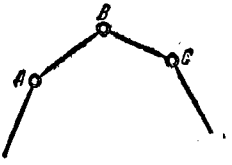


Рис. 1.22. Схема простой открытой кинематической цепи из четырех звеньев.

звено входит не более чем в две кинематические пары. Пример простой цепи с вращательными парами A, B и C (V класса) показан на рис. 1.22.

Сложной кинематической цепью называется цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары. Пример такой цепи с вращательными парами A, B, C, D и E (V класса) дан на рис. 1.23.

2°. Простые и сложные кинематические цепи в свою очередь делятся на *замкнутые и незамкнутые. Замкнутой кинематической*

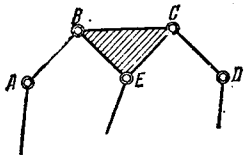


Рис. 1.23. Схема сложной открытой кинематической цепи из шести звеньев.

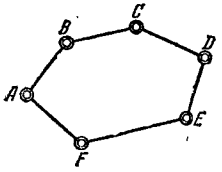


Рис. 1.24. Схема простой замкнутой кинематической цепи из шести звеньев.

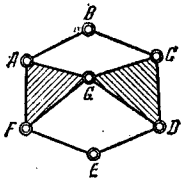


Рис. 1.25. Схема сложной замкнутой кинематической цепи из шести звеньев.

цепью называется кинематическая цепь, каждое звено которой входит по крайней мере в две кинематические пары. Примеры таких цепей с вращательными парами (V класса) показаны на рис. 1.24 и 1.25.

Незамкнутой кинематической цепью называется кинематическая цепь, в которой есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару. Примерами таких цепей могут служить цепи, показанные на рис. 1.22 и 1.23.

ГЛАВА II

СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ

§ 6. Механизм и его кинематическая схема

1°. В § 1, *5°* было дано определение механизма в самом общем виде.

Ниже дается определение механизма как частного случая кинематической цепи.

Механизмом называется такая кинематическая цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев относительно любого из них все остальные звенья совершают однозначно определяемые движения.

Как видно из этого определения, в любом механизме есть звено (или несколько звеньев), движение которого является заданным. Звено (звенья) механизма, которому сообщается движение, преобразуемое в требуемое движение других звеньев механизма, называется *входным звеном (входными звеньями)*.

Звено (звенья) механизма, совершающее требуемое движение, для которого предназначен механизм, называется *выходным звеном (выходными звеньями)*.

В некоторых случаях для сокращения *входное звено* заменяется *термином «вход»*, а *выходное звено — термином «выход»*.

В некоторых случаях принимают термин *ведущее звено* (звенья). *Ведущим звеном* называется звено, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, является положительной. Соответственно *ведомым звеном* называется звено, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, является отрицательной или равна нулю.

В большинстве случаев входное звено является и ведущим, но, конечно, могут быть случаи инверсии, когда входное звено становится ведомым.

Как это было указано выше (§ 2, *1°*), при кинематическом исследовании механизмов изучается их движение. Поэтому при изучении структуры и кинематики механизмов не обязательно в качестве ведущего звена выбирать то звено, к которому приложена внешняя сила, приводящая в движение механизм.

2°. Чтобы изучить движение механизма, недостаточно знать структуру его, т. е. число звеньев, число и классы кинематических пар. Необходимо также знать размеры отдельных звеньев, влияющих на движение, взаимное положение звеньев и т. д. Поэтому при изучении движения звеньев механизма обычно составляют так называемую *кинематическую схему механизма*, которая является его кинематической моделью.

Кинематическая схема механизма строится в выбранном масштабе с точным соблюдением всех размеров и форм, от которых

зависит движение того или другого звена, другими словами, с соблюдением тех размеров и форм, при изменении которых изменяются положения, скорости и ускорения точек механизма. На кинематической схеме должно быть указано все, что необходимо для изучения движения. Все лишнее, не характерное для движения, должно быть исключено, чтобы не усложнять чертежа.

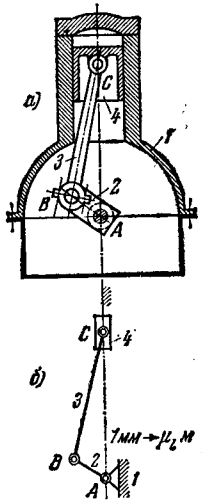


Рис. 2.1. Схема механизма поршневого двигателя; *а*) изображение со схематизированными конструктивными формами; *б*) изображение, применяемое на кинематических схемах.

Рассмотрим, например, механизм двигателя, показанный на рис. 2.1, *а*. Так как все звенья этого механизма движутся параллельно одной общей плоскости (*плоский механизм*), то чтобы изучить движение любого звена, достаточно изучить движение каких-либо двух его точек. Например, для изучения движения кривошипа AB достаточно знать в каждый данный момент положение двух точек A и B; для изучения движения шатуна BC достаточно знать в каждый данный момент положение двух точек B и C. Тогда, пользуясь условными обозначениями, указанными на рис. 1.11 и 1.20, составляем кинематическую схему механизма (рис. 2.1, *б*). Все необходимые размеры звеньев отложены в некотором выбранном масштабе μ_l *м/мм*, который означает, что один миллиметр чертежа соответствует μ_l метрам натуры, т. е.

$$1\ мм \rightarrow \mu_l\ м.$$

Сложнее составить кинематическую схему, если звенья механизма имеют пространственное движение. В этом случае кинематическая схема составляется в соответствующих проекциях на две или в некоторых случаях на три взаимно перпендикулярные плоскости.

§ 7. Структурная формула кинематической цепи общего вида

1°. Если на движение звена в пространстве не наложено никаких условий связи, то оно, как известно, обладает шестью степенями свободы. Тогда, если число звеньев кинематической цепи равно k, то общее число степеней свободы, которым обладают k звеньев до их соединения в кинематические пары, равно $6k$. Соединение звеньев в кинематические пары накладывает различное число связей на относительное движение звеньев, зависящее от класса пар (см. § 3). Если число пар I класса, в которые входят звенья рассматриваемой кинематической цепи, равно p_1, число пар II класса — p_2, число пар III класса — p_3, число пар IV класса — p_4 и,

наконец, число пар V класса — p_5, то из $6k$ степеней свободы, которыми обладали звенья до их вхождения в кинематические пары, необходимо исключить те степени свободы, которые отнимаются вхождением звеньев в кинематические пары. Тогда число степеней свободы H, которым обладает кинематическая цепь, равно

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \qquad (2.1)$$

В конструкциях применяются обычно замкнутые и незамкнутые кинематические цепи, у которых одно из звеньев неподвижно, т. е. является *стойкой*. Например, в механизме (рис. 2.2) двигателя внутреннего сгорания кривошип *2*, шатун *3*, поршень *4* и цилиндр с рамой *1* образуют кинематическую цепь, у которой неподвижным звеном *(стойкой)* является цилиндр с рамой двигателя. Следовательно, при изучении движения всех звеньев кинематической цепи двигателя мы рассматриваем их абсолютные перемещения происходящими относительно одного из звеньев, принятого за неподвижное (стойку). Кинематическая цепь, состоящая из звеньев *1*, *2*, *3* и *4*, является замкнутой, так как звенья *2* и *4* входят в кинематические пары *A* и *C* со стойкой. Если одно из звеньев кинематической цепи будет неподвижным, то общее число степеней свободы цепи уменьшится на шесть и число степеней свободы w относительно неподвижного звена будет равно

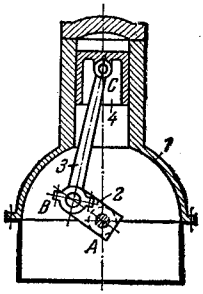


Рис. 2.2. Изображение плоского механизма, состоящего из четырех звеньев.

$$w = H - 6. \qquad (2.2)$$

2°. Число w степеней свободы кинематической цепи относительно звена, принятого за неподвижное, называется *числом степеней подвижности* кинематической цепи или, кратко, *степенью подвижности*. Подставляя в формулу (2.2) вместо H его выражение из соотношения (2.1), получаем

$$w = 6(k-1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \qquad (2.3)$$

Если в равенстве (2.3) обозначить величину $k - 1$ через n, то получим

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \qquad (2.4)$$

где n — число *подвижных* звеньев кинематической цепи. Равенство (2.4) носит название *формулы подвижности* или *структурной формулы кинематической цепи общего вида*.

Формула (2.4) впервые, в несколько ином виде, была дана П. И. Сомовым в 1887 г. и развита А. П. Малышевым в 1923 г. и носит название формулы Сомова — Малышева.

Если кинематическая цепь образована парами только V класса, то формула (2.4) принимает следующий вид:

$$w = 6n - 5p_5.$$

Пример 1. Рассмотрим пример на определение степени подвижности замкнутой кинематической цепи. На рис. 2.3 показаны кинематическая цепь *а*) и ее схема *б*), у которой звенья *1* (стойка) и *2* входят в пару *A* (V класса); звенья *2* и *3* — в пару *B* (V класса);

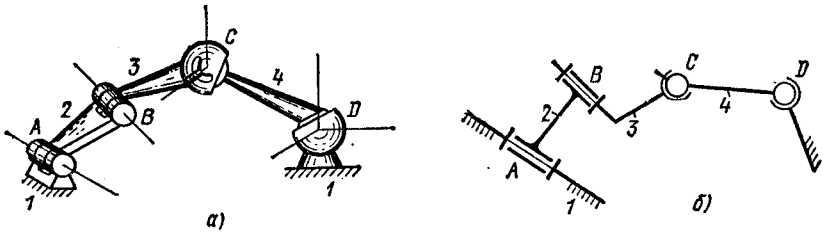


Рис. 2.3. Четырехзвенный пространственный механизм.

звенья *3* и *4* — в пару *C* (IV класса) и, наконец, звенья *4* и *1* (стойка) входят в пару *D* (III класса). Число подвижных звеньев n равно трем, число пар V класса p_5 равно двум, число пар IV класса p_4 равно единице и число пар III класса p_3 также равно единице. Подставляя числа звеньев и пар в формулу (2.4), получаем

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1,$$

т. е. рассматриваемая кинематическая цепь обладает одной степенью подвижности.

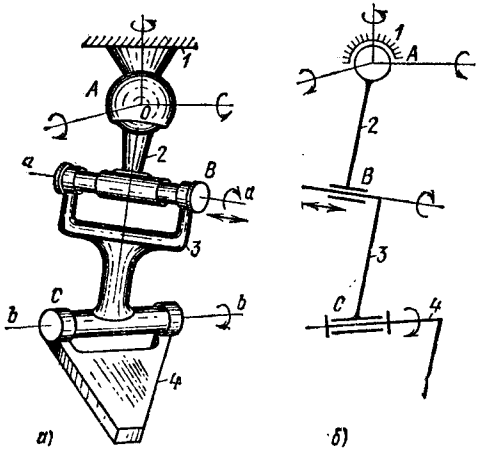


Рис. 2.4. Незамкнутая пространственная кинематическая цепь.

Пример 2. Определить степень подвижности незамкнутой кинематической цепи, показанной на рис. 2.4, *а* со схемой (рис. 2.4, *б*), у которой звенья *1* (стойка) и *2* входят в пару *A* (III класса), звенья *2* и *3* в пару *B* (IV класса) и звенья *3* и *4* в пару *C* (V класса). По формуле (2.4) получаем

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 6,$$

т. е. рассматриваемая кинематическая цепь обладает шестью степенями подвижности.

3°. Так как механизм представляет собой кинематическую цепь со звеньями, имеющими вполне определенные движения, то необходимо выяснить вопрос о том, как связана определенность движения звеньев механизма с его степенью подвижности. Как это следует из формулы (2.4), степень подвижности характеризует число степеней свободы механизма относительно звена, принятого за неподвижное (стойку). Тогда, если механизм обладает одной степенью подвижности, то одному из звеньев механизма мы можем предписать относительно стойки какой-либо вполне определенный закон движения *(одну обобщенную координату механизма)*, например вращательное, поступательное или винтовое движение с заданными скоростями. При этом все остальные звенья механизма получат вполне определенные движения, являющиеся функциями заданного. Если механизм обладает двумя степенями подвижности, то необходимо задать одному из звеньев два независимых движения *(две обобщенные координаты механизма)* относительно стойки или двум звеньям по одному независимому движению относительно стойки и т. д. Например, механизм, показанный на рис. 2.3, как это было выяснено, обладает одной степенью подвижности. Следовательно, сообщив одному из его звеньев движение по определенному закону, мы получаем вполне определенные движения всех остальных звеньев этого механизма.

Пусть будет, например, задан закон вращения звена *2* (рис. 2.3) в виде функции $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, где φ_2 есть угол поворота звена *2*, а t — время. Если задано движение звена *2*, то все остальные звенья будут двигаться вполне определенным образом, причем их движения будут зависеть от выбранной функции $\varphi_2 = \varphi_2(t)$. Поэтому звено *2* механизма оказывается ведущим входным, а все остальные подвижные звенья (звенья *3* и *4*) являются ведомыми.

Таким образом, значение φ_2 однозначно определяет соответствующие ему положения звеньев механизма относительно стойки, и потому угол φ_2 есть *обобщенная координата рассматриваемого механизма*.

Кинематическая цепь, показанная на рис. 2.4, как это было выяснено ранее, обладает шестью степенями подвижности. Следовательно, для определенности движения всех звеньев надо иметь заданными шесть обобщенных координат. Например, законы вращения звена *2* вокруг трех осей, пересекающихся в точке *O*; законы вращения и скольжения относительно звена *3* (вокруг и вдоль оси $a - a$) и, наконец, закон вращения звена вокруг оси $b - b$.

В основном в конструкциях машин и приборов используются механизмы с одной степенью подвижности. В некоторых конструкциях машин находят себе применение механизмы с двумя и более степенями подвижности. К таким конструкциям относятся дифференциалы автомобилей, некоторые механизмы счетно-решающих машин и манипуляторы.

§ 8. Структурная формула плоских механизмов

1°. В §§ 6 и 7 мы показали, что в общем случае степень подвижности механизма w может быть определена по структурной формуле (2.4)

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

Применение этой формулы возможно только в том случае, если на движения звеньев, входящих в состав механизма, не наложено каких-либо общих дополнительных условий. Эти условия, общие для всего механизма в целом, могут быть весьма разнообразны. Так, например, можно потребовать, чтобы у механизма, состоящего из одних только вращательных пар V класса, оси всех этих пар были параллельны, пересекались в одной точке и т. д. Оказывается, что такие дополнительные требования существенно изменяют характер движения механизма и изменяют соответственно вид его структурной формулы.

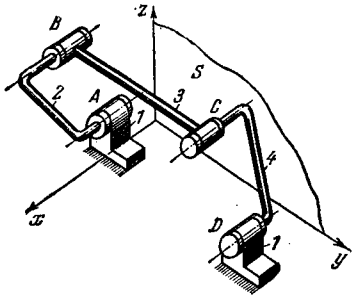


Рис. 2.5. Механизм шарнирного четырехзвенника.

Пусть, например, у механизма, который состоит из кинематических вращательных пар V класса, оси всех пар параллельны (рис. 2.5). Выберем неподвижную систему координат xyz так, чтобы направление оси x совпало с направлением осей пар, а оси y и z лежали в плоскости, перпендикулярной к осям пар. Можно тогда убедиться в том, что в этом случае точки звеньев механизма $ABCD$ будут двигаться в плоскостях, параллельных одной общей неподвижной плоскости S, содержащей оси y и z, и мы будем иметь так называемый *плоский механизм*, т. е. механизм, точки звеньев которого описывают траектории, лежащие в параллельных плоскостях.

Рассмотрим, какие же общие ограничения наложены на движения всех звеньев приведенного выше механизма условием параллельности осей всех кинематических пар. Звенья механизма не могут совершать вращательное движение вокруг осей y и z, поступательное движение вдоль оси x *т. е. из шести возможных движений три не могут быть осуществлены.* Следовательно, возможными остаются следующие три движения: вращение вокруг оси x или осей, ей параллельных, и поступательные движения вдоль осей y и z. В самом деле, движение звеньев AB и CD сводится к вращению вокруг осей, параллельных оси x, а движение звена BC как сложное плоскопараллельное движение может быть представлено как вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости S, и поступательное движение, параллельное этой плоскости.

2°. Если на движение всех звеньев механизма в целом наложено три общих ограничения, то очевидно, это обстоятельство должно быть учтено при подсчете степеней свободы отдельных звеньев и степени подвижности механизма в целом. Если в общем случае число степеней свободы подвижных звеньев механизма равнялось бы $6n$, где n — число подвижных звеньев, то для рассматриваемого механизма число степеней свободы подвижных звеньев будет $(6 - 3)\, n = 3n$. Соответственно вместо $5p_5$ связей, накладываемых парами V класса, в этом механизме пары V класса будут накладывать $(5 - 3)\, p_5 = 2p_5$ связей, так как три связи уже наложены условием параллельности осей пар, и т. д. Структурная формула механизма (2.4) будет тогда такой:

$$w = (6 - 3)\, n - (5 - 3)\, p_5 - (4 - 3)\, p_4 - (3 - 3)\, p_3,$$

т. е. степень подвижности плоского механизма будет равна

$$w = 3n - 2p_5 - p_4. \qquad (2.5)$$

Это есть структурная формула для общего вида плоских механизмов.

В состав плоских механизмов пары I, II и III классов входить не могут, как обладающие пространственным характером возможных относительных движений. Из рассмотренного примера следует, что если на движение всех звеньев механизма в целом наложено некоторое общее для всего механизма число связей, то необходимо число этих общих связей из структурной формулы механизма исключить путем вычитания числа этих связей из числа степеней свободы всех подвижных звеньев механизма и из числа условий связи всех входящих в механизм кинематических пар.

3°. При рассмотрении плоских механизмов и составлении их структурных формул мы имели в виду, что те степени свободы, которыми обладают звенья механизмов, и те условия связи, которые налагаются на движения звеньев вхождением их в кинематические пары, решают в совокупности вопрос об определенности движения механизма.

Необходимо отметить, что, кроме степеней свободы звеньев и связей, активно воздействующих на характер движения механизмов, в них могут встретиться степени свободы и условия связи, не оказывающие никакого влияния на характер движения механизма в целом. Удаление из механизмов звеньев и кинематических пар, которым эти степени свободы и условия связи принадлежат, может быть сделано без изменения общего характера движения механизма в целом. Такие степени свободы называются *лишними степенями свободы*, а связи — *избыточными* или *пассивными связями*.

В качестве примера рассмотрим плоский механизм, показанный на рис. 2.6. Размеры звеньев механизма удовлетворяют условиям

$$AB = CD, \quad AD = EF = BC, \quad AE = BE \quad \text{и} \quad DF = FC.$$

Таким образом, фигура $ABCD$ — всегда параллелограмм, и, следовательно, расстояние между точками F и E остается постоянным и равным расстоянию между точками A и D или B и C. Тогда без всякого нарушения характера движения механизма можно звено EF (или BC) удалить, так как это звено, входящее в кинематические пары E и F, налагает на движение механизма условия связи, являющиеся *избыточными*. Рассмотрим далее круглый ролик *6* (рис. 2.6), входящий во вращательную пару V класса H со звеном *4*, соприкасающимся с ним по прямолинейному профилю HC. Нетрудно видеть, что мы можем свободно поворачивать ролик *6* вокруг оси, проходящей через точку G, не оказывая при этом никакого влияния на характер движения механизма в целом. Свободно поворачивающийся ролик дает *лишнюю* степень свободы. Поэтому без всякого нарушения характера движения механизма в целом можно

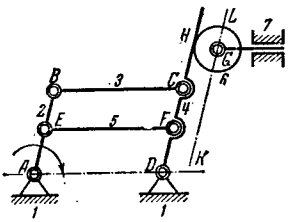


Рис. 2.6. Схема плоского механизма с пассивными связями и лишней степенью свободы.

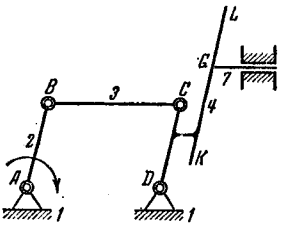


Рис. 2.7. Схема механизма, освобожденного от пассивных связей и лишней степени свободы.

ролик удалить и звено *4* со звеном *7* соединить непосредственно в кинематическую пару IV класса (рис. 2.7). Элементом пары звена *4* будет прямая KL, параллельная прямой DC, проходящая от нее на расстоянии, равном радиусу ролика *6*, а элементом пары звена *7* будет точка G.

Полученные таким образом механизмы будут воспроизводить движение ведомого звена по тому же закону, который осуществлялся первоначальным механизмом, но при этом преобразованные механизмы будут освобождены от лишних степеней свободы и избыточных условий связи.

При исследовании структуры механизма с помощью структурных формул необходимо учитывать возможное присутствие лишних степеней свободы и избыточных условий связи.

4°. Выявление избыточных связей и лишних степеней свободы в механизмах проще всего может быть сделано при изучении их кинематики, например при построении перемещений и скоростей звеньев. Если определение перемещений ведомых звеньев или их скоростей может быть сделано без участия одного или нескольких звеньев механизма, то эти звенья вносят или пассивные связи, или лишние степени свободы. Например, перемещение звена *7*

(рис. 2.7) может быть получено перемещением звеньев *2*, *3* и *4*. Следовательно, звено *5* вносит пассивные связи и может быть из рассмотрения исключено. Можно было бы также показать, что и определение скорости звена *7* при заданной скорости ведущего звена может быть сделано без рассмотрения скоростей звена *5*.

В дальнейшем при изучении движения звеньев механизмов будем предполагать, что все лишние степени свободы и избыточные условия связи предварительно исключены из механизма удалением соответствующих звеньев, и будем учитывать в механизме только те связи и степени свободы, от которых зависит определенность его движения.

§ 9. Структура плоских механизмов

1°. В § 8, ввиду особого характера движения точек звеньев механизма (рис. 2.5), нами было показано, что структурная формула плоских механизмов (2.5) в общем случае имеет следующий вид:

$$w = 3n - 2p_5 - p_4. \qquad (2.6)$$

Эта формула была впервые выведена П. Л. Чебышевым в 1869 г. и носит название *формулы Чебышева*.

Как это видно из формулы (2.6), плоские механизмы могут быть образованы звеньями, входящими только в кинематические пары IV и V классов. Пары IV класса в плоских механизмах налагают одно условие связи на относительное движение ее звеньев. Пары V класса в плоских механизмах налагают два условия связи на относительное движение ее звеньев.

Примером пары IV класса в плоских кинематических цепях может служить пара, образованная звеньями A и B, выполненными в виде двух цилиндрических поверхностей α и β с параллельными осями (рис. 2.8), перекатывающихся со скольжением друг по другу и постоянно соприкасающихся по прямолинейным образующим этих поверхностей без скольжения вдоль образующих. Эта пара в сечении плоскостью, перпендикулярной к образующим цилиндров, дает две соприкасающиеся кривые $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$ (рис. 2.9), представляющие собой элементы звеньев пары.

Вторым примером может служить пара, образованная кривой $\alpha - \alpha$, являющейся элементом звена A, и острием C — элементом звена B (рис. 2.10). Во всех кинематических парах IV класса, как это было указано выше (§ 3, *7°*), звенья соприкасаются или в *точке*, или по *прямой*; эти пары относятся к *высшим парам*.

Пара IV класса в плоском механизме исключает возможность одного какого-либо движения: например, пара, показанная на рис. 2.9, исключает относительное движение звеньев A и B в направлении нормали $n - n$ к кривым $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$, приведенной в точке их соприкосновения. Возможными двумя относительными

движениями звеньев этой пары являются качение и скольжение одной кривой по другой.

Низшие пары V класса, т. е. пары, в которых соприкасание звеньев происходит по поверхностям (см. § 3, 7°) в плоских механизмах являются либо вращательными (рис. 1.1), либо поступательными (рис. 1.8), так как другие низшие пары, в частности

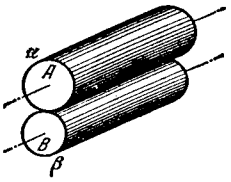


Рис. 2.8. Плоская кинематическая пара IV класса, состоящая из двух цилиндров.

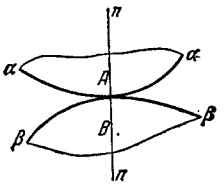


Рис. 2.9. Схема плоской кинематической пары IV класса, состоящей из двух криволинейных звеньев.

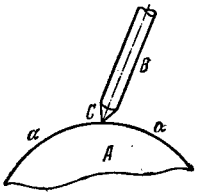


Рис. 2.10. Схема плоской кинематической пары IV класса, состоящей из криволинейного звена и звена с острием.

винтовые, не могут входить в состав плоского механизма в силу пространственного характера относительного движения их звеньев.

Из трех возможных относительных движений звеньев пар плоских механизмов вращательные и поступательные пары исключают по два движения. Вращательная пара исключает возможность поступательных движений вдоль двух осей, лежащих в плоскости движения звеньев. Поступательная пара исключает одно поступательное движение и одно вращательное (вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения звеньев).

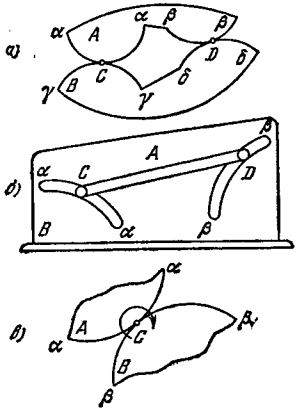


Рис. 2.11. Схематические изображения высшей кинематической пары V класса, состоящей из двух звеньев; *а*) каждое звено с двумя плоскими кривыми; *б*) траекторная пара; *в*) центроидная пара с принудительным чистым качением.

Кинематические пары V класса в плоских механизмах могут быть и высшими. На рис. 2.11, *а*, например, показана высшая пара V класса, элементы звеньев A и B которой представляют собой две жестко связанные между собой плоские кривые $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$, соприкасающиеся с двумя другими плоскими кривыми $\gamma - \gamma$ и $\delta - \delta$, также жестко связанными между собой. Такие пары получили название *двухточечных пар,* так как звенья A и B соприкасаются в двух точках C и D.

На рис. 2.11, *б* показана другая высшая пара V класса, представляющая собой звено A, своими концами C и D скользящее в прорезях $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$ звена B. Элементами, принадлежащими

звену A, являются точки C и D, а элементами, принадлежащими звену B, — плоские кривые $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$. Такие пары получили название *траекторных пар*, так как при движении одного звена пары относительно другого точки звеньев описывают сложные, но вполне определенные траектории. Высшей парой V класса является также пара, показанная на рис. 2.11, *в*. Кривая $\alpha - \alpha$, являющаяся элементом звена A, перекатывается без скольжения по кривой $\beta - \beta$, являющейся элементом звена B. Эта пара получила название *центроидной пары*, так как элементы $\alpha - \alpha$ и $\beta - \beta$ звеньев A и B являются всегда центроидами в относительном движении звеньев пары. Таким образом, мы видим, что в плоских механизмах их подвижные звенья имеют по три степени свободы, т. е. n звеньев имеют $3n$ степеней свободы. Каждая пара V класса накладывает две связи, т. е. p пар накладывают $2p_5$ связей. Каждая пара IV класса накладывает одну связь, т. е. p_4 пар накладывают p_4 связей. Отсюда непосредственно получаем, что число степеней подвижности w плоского механизма равно $w = 3n - 2p_5 - p_4$, т. е. получаем формулу Чебышева (2.5).

2°. В зависимости от числа w, стоящего в левой части формулы (2.6), мы можем получить плоские механизмы с одной, двумя,

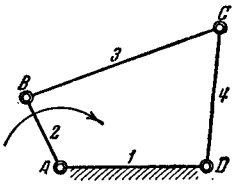


Рис. 2.12. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с обобщенной координатой φ_2.

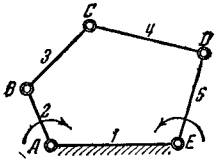


Рис. 2.13. Схема механизма шарнирного пятизвенника с обобщенными координатами φ_2 и φ_5.

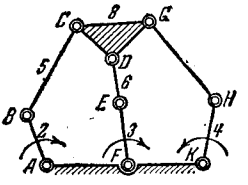


Рис. 2.14. Схема механизма шарнирного восьмизвенника с обобщенными координатами φ_2, φ_3 и φ_4.

тремя и т. д. степенями подвижности. Так, на рис. 2.12 показан механизм с одной степенью подвижности, на рис. 2.13 — механизм с двумя степенями подвижности и на рис. 2.14 — механизм с тремя степенями подвижности.

При *нулевой* степени подвижности кинематической цепи ни одно из звеньев не может двигаться относительно неподвижного звена, и кинематическая цепь превращается в ферму (рис. 2.15).

Для определенности движений всех звеньев механизма, образованного кинематической цепью с одной степенью подвижности, необходимо и достаточно иметь заданным закон движения одного из звеньев.

Так, для механизма, показанного на рис. 2.12, достаточно иметь, например, закон $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ изменения угла φ_2 поворота звена 2 в функции времени t, т. е. одну обобщенную координату

механизма. Таким образом, число степеней подвижности кинематической цепи, из которой образован механизм, одновременно является и числом независимых параметров, или, что то же, обобщенных координат, которыми мы должны задаться, чтобы данная кинематическая цепь была механизмом. Показанная на рис. 2.13 цепь будет механизмом, если, например, будут заданы углы поворота φ_2 и φ_5 звеньев *2* и *5* в функции времени t. Для кинематической цепи, показанной на рис. 2.14, нужно задать углы поворота φ_2, φ_3 и φ_4 звеньев *2*, *3* и *4* в функции времени t и т. д.

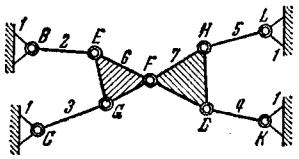


Рис. 2.15. Схема кинематической цепи с нулевой степенью подвижности.

Обычно в качестве обобщенных координат берутся законы движения звеньев, входящих в кинематические пары со стойками. В некоторых случаях более удобно в качестве обобщенной координаты выбрать закон движения какого-либо другого звена. Например, для механизма на рис. 2.13 можно выбрать законы движения звеньев *2* и *3* или *3* и *4*.

3°. К плоским механизмам относятся также механизмы с одними поступательными парами, оси движения которых параллельны одной общей плоскости. Звенья этих механизмов не имеют возможности вращательного движения вокруг оси, перпендикулярной

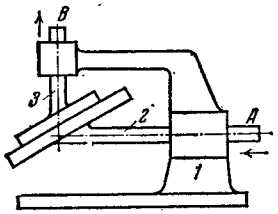


Рис. 2.16. Модель трехзвенного клинового механизма.

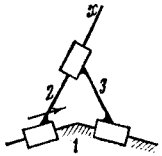


Рис. 2.17. Схема механизма с одними поступательными парами и одной степенью подвижности.

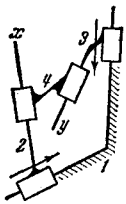


Рис. 2.18. Схема механизма с одними поступательными парами и двумя степенями подвижности.

к плоскости их движения, т. е. обладают только двумя степенями свободы. Простейшим механизмом этого вида является клиновой механизм (рис. 2.16).

Структурная формула этих механизмов имеет следующий вид:

$$w = 2n - p_5. \qquad (2.7)$$

Эта формула была впервые выведена В. В. Добровольским в 1937 г. и носит название *формулы Добровольского*.

Как это видно из формулы (2.7), плоские механизмы этого вида могут быть образованы только парами V класса, и так как в этих

механизмах звенья могут иметь только поступательное движение, то пары V класса в этих механизмах могут быть только поступательными. На рис. 2.17 показан механизм с одной степенью подвижности, а на рис. 2.18 — механизм с двумя степенями подвижности.

§ 10. Замена в плоских механизмах высших пар низшими

1°. Как было показано выше, плоские механизмы могут иметь звенья, входящие как в низшие, так и в высшие пары. При изучении структуры и кинематики плоских механизмов во многих случаях удобно заменять высшие пары кинематическими цепями или звеньями, входящими только в низшие вращательные и поступательные пары V класса. При этой замене должно удовлетворяться условие, чтобы механизм, полученный после такой замены, обладал прежней степенью подвижности и чтобы сохранились относительные в рассматриваемом положении движения всех его звеньев. Рассмотрим трехзвенный механизм, показанный на рис. 2.19. Механизм состоит из двух подвижных звеньев *2* и *3*, входящих во вращательные пары V класса *A* и *B* со стойкой *1* и высшую пару *C* IV класса, элементы звеньев *a* и *b* которой представляют собою окружности радиусов O_2C и O_3C. Согласно формуле (2.5) степень подвижности механизма будет

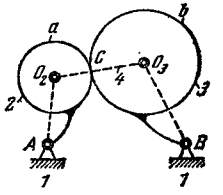


Рис. 2.19. Схема механизма с высшей парой в виде двух окружностей и заменяющего его механизма шарнирного четырехзвенника.

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Можно показать, что рассматриваемый механизм может быть заменен эквивалентным ему механизмом шарнирного четырехзвенника AO_2O_3B. Высшая пара IV класса в точке *C* заменяется звеном *4*, входящим в точках O_2 и O_3 во вращательные пары V класса. Полученный в результате замены механизм AO_2O_3B называется *заменяющим механизмом*.

Степень подвижности w заменяющего механизма будет той же, что и у заданного механизма. Имеем

$$w = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Так как элементы *a* и *b* звеньев являются окружностями с центрами в точках O_2 и O_3, то длина O_2O_3 звена *4* оказывается постоянной. Точно так же будут постоянными и длины AO_2 и BO_2 звеньев *2* и *3*. Заменяющий механизм AO_2O_3B эквивалентен заданному и с точки зрения законов движения звеньев *2* и *3*.

2°. Рассмотренный способ получения заменяющего механизма можно обобщить. Пусть задан механизм с высшей парой, элементы

звеньев которой представляют собой произвольно заданные кривые a и b (рис. 2.20). Для построения схемы заменяющего механизма проводим нормаль NN в точке C касания кривых и отмечаем на ней центры O_2 и O_3 кривизны кривых a и b. По-прежнему центры кривизны O_2 и O_3 мы считаем шарнирами, образующими вращательные пары, в которые входят условные звенья AO_2 и O_2O_3, с одной стороны, и условные звенья BO_3 и O_2O_3, с другой стороны.

Описанная замена правильна для заданного положения основного механизма. В другом положении схема заменяющего механизма останется той же, размеры же его звеньев изменятся, ибо центры кривизны O_2 и O_3 сместятся.

Из дифференциальной геометрии известно, что окружность кривизны в точке касания с кривой и сама кривая эквивалентны

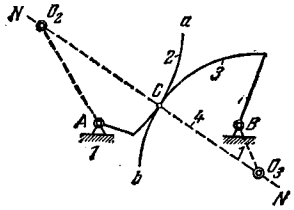


Рис. 2.20. Схема механизма с высшей парой, элементы звеньев которой — произвольно заданные кривые, и мгновенного заменяющего его механизма шарнирного четырехзвенника.

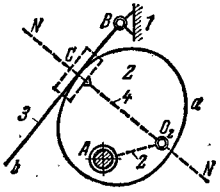


Рис. 2.21. Схема механизма с высшей парой, элементы звеньев которой — произвольно заданные кривая и прямая, и мгновенного заменяющего механизма с тремя вращательными и одной поступательной парами.

до производных второго порядка включительно, и поэтому заменяющий механизм эквивалентен основному в такой же степени, т. е. положения, скорости и ускорения одноименных точек того и другого механизма будут одинаковыми.

3°. Если один из соприкасающихся элементов будет представлять собой некоторую кривую, а второй прямую b (рис. 2.21), то центр кривизны второго профиля будет бесконечно удален. Условное звено *4* в этом случае будет входить в центре кривизны O_2 элемента *2* во вращательную пару V класса. Вторая вращательная пара, в которую должно входить звено *3*, имеет ось вращения бесконечно удаленной и переходит в поступательную пару также V класса.

4°. Далее возможен случай, когда один из соприкасающихся элементов — кривая a, а другой — точка C (рис. 2.22). В этом случае центр кривизны O_3 элемента C совпадает с самой точкой C, и поэтому условное звено *4* должно входить в две вращательные пары V класса — во вращательную пару с осью, проходящей через центр кривизны O_2 криволинейного элемента a.

В том случае, когда одним элементом является прямая AC, а другим — точка C (рис. 2.23), замена сводится к постановке

условного звена 4, входящего в одну поступательную и одну вращательную пары. Ось вращательной пары и ось движения поступательной пары должны проходить через точку соприкасания C. Заменяющий механизм показан на рис. 2.24.

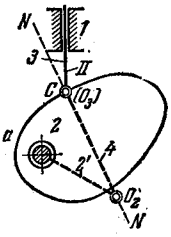


Рис. 2.22. Схема механизма с высшей парой, элементы звеньев которой — произвольно заданная кривая и точка, и мгновенного заменяющего кривошипно-ползунного механизма.

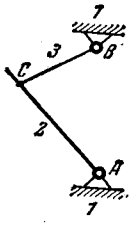


Рис. 2.23. Схема механизма с высшей парой, элементы звеньев которой — прямая и точка.

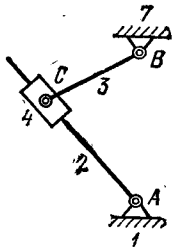


Рис. 2.24. Схема мгновенного заменяющего механизма, эквивалентного механизму, схема которого изображена на рис. 2.23.

Таким образом, любой плоский механизм с высшими парами IV класса может быть заменен механизмом, в состав которого входят только низшие кинематические пары V класса.

Если все высшие пары IV класса в плоском механизме заменены низшими парами, то структурная формула Чебышева (2.5) для заменяющего механизма получит вид

$$w = 3n - 2p_5. \qquad (2.8)$$

§ 11. Структура пространственных механизмов

1°. В современном машиностроении находят себе применение пространственные механизмы различных видов. Рассмотрим структуру некоторых из них.

Как это было показано в § 7, *2°*, структурная формула пространственного механизма общего вида будет

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \qquad (2.9)$$

Из формулы (2.9) следует, что эти механизмы могут быть образованы звеньями, входящими в кинематические пары всех пяти классов.

Из низших кинематических пар наиболее часто встречаются пары, схематические изображения которых показаны на рис. 2.25.

На рис. 2.25, *а*, *б* и *в* показаны пары V класса: вращательная, поступательная и винтовая. С этими парами мы уже ознакомились раньше (§ 3).

Если эти пары входят в состав пространственных механизмов, то их условные обозначения должны иметь вид, показанный

соответственно на рис. 2.25, *а'*, *б'* и *в'*. Цилиндрическая пара IV класса и ее условное изображение показаны на рис. 2.25, *г* и *г'*. Шаровая пара III класса и ее условное изображение показаны на рис. 2.25, *д* и *д'*. Наконец, на рис. 2.25, *е* и *е'* показаны шаровая с пальцем пара IV класса и ее условное изображение. Так же, как для плоских механизмов, высшие пары различных классов изображаются с точными очертаниями тех элементов звеньев, с которыми они входят в пары.

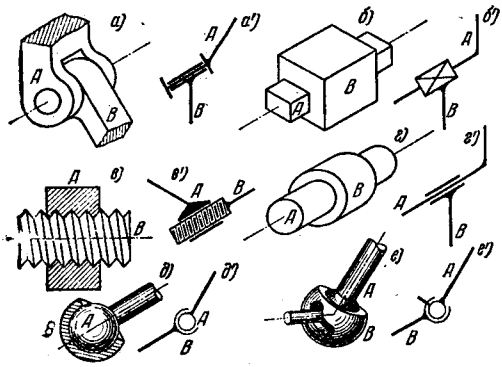


Рис. 2.25. Схемы распространенных кинематических пар: *а*) изображение вращательной пары со схематизированными конструктивными формами; *а'*) схематическое изображение вращательной пары, применяемое на кинематических схемах; *б*) и *б'*) то же для поступательной пары; *в*) и *в'*) то же для винтовой пары; *г*) и *г'*) то же для цилиндрической пары; *д*) и *д'*) то же для шаровой пары; *е*) и *е'*) то же для шаровой с пальцем пары.

2°. Рассмотрим некоторые пространственные механизмы, применяемые в технике. На рис. 2.26, *а* показан четырехзвенный механизм *ABCD* выдвигающегося шасси самолета. Ползун *2* движется по неподвижной направляющей *1* и шатуном *3* передает движение опоре *4* колеса, которая поворачивается вокруг оси *D* неподвижного звена *1*. Звенья *2* и *1* образуют поступательную пару, звенья *2* и *3* и *3* и *4* — шаровые пары и звенья *4* и *1* — вращательную пару.

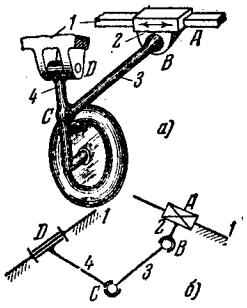


Рис. 2.26. Механизм шасси самолета: *а*) изображение со схематизированными конструктивными формами; *б*) изображение, применяемое на кинематических схемах.

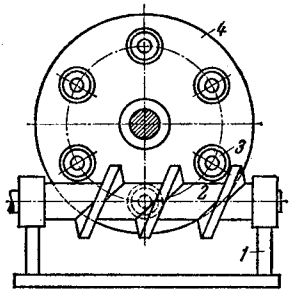


Рис. 2.27. Схема зубчато-червячного механизма.

Кинематическая схема механизма показана на рис. 2.26, *б*. Из рассмотрения механизма видно, что звено *3* обладает лишней степенью свободы — возможностью свободно поворачиваться вокруг своей

продольной оси. Поэтому одна из пар B или C могла бы быть заменена шаровой с пальцем парой (рис. 2,25, *е* и *е'*). Так как эта лишняя степень свободы не оказывает никакого влияния на движение механизма, то с точки зрения простоты конструкции проектируют механизм с двумя шаровыми парами. Если исключить из рассмотрения упомянутую лицнюю степень свободы, то структурная формула (2.9) механизма представится так:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1.$$

Таким образом, механизм шасси имеет одну степень подвижности.

3°. На рис. 2.27 показан зубчато-червячный механизм. Червяк *2*, вращаясь в подшипниках стойки 1, действует на ролик *3* колеса *4*, которое вращается в подшипнике стойки *1*. Звенья *1* и *2* и звенья *4* и *1* входят во вращательные пары. Так как ролик *3* соприкасается с винтовой поверхностью червяка *2* в точке, то звенья *2* и *4* после условного скрепления роликов *3* с колесом *4* образуют пару I класса. Структурная формула механизма будет

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Таким образом, рассматриваемый зубчато-червячный механизм обладает одной степенью подвижности.

4°. Структурная формула сферических механизмов, т. е. механизмов, точки звеньев которых описывают траектории, лежащие на концентрических сферах, была указана впервые автором этой книги в 1936 г. Формула имеет следующий вид:

$$w = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Таким образом, для сферических механизмов применима формула Чебышева (2.5).

Из формулы (2.5) следует, что сферические механизмы могут быть образованы кинематическими парами только V и IV классов. Применимость формулы (2.5) к сферическим механизмам определяется тем, что на движение звеньев этих механизмов наложено три общих ограничения.

Вследствие того, что движение точек звеньев сферических механизмов происходит по поверхностям концентрически расположенных сфер, звенья этих механизмов имеют только вращательные движения и не могут иметь поступательных движений. Поэтому в этих механизмах звенья могут входить только во вращательные пары V класса и высшие пары IV класса, имеющие соприкасание по прямым, проходящим через общий центр сферических концентрических поверхностей. При этом должно быть исключено

поступательное движение вдоль соприкасающихся прямых в направлении к общему центру сфер.

На рис. 2.28 показан четырехзвенный сферический механизм, у которого звенья *1*, *2*, *3*, *4* входят в четыре вращательные пары. Оси всех пар пересекаются в общем центре *O*. При вращении звена *2* вокруг оси *OA* в неподвижном подшипнике стойки *1* звено *4* получает вращательное движение в подшипнике стойки *1* (вокруг оси *OD*).

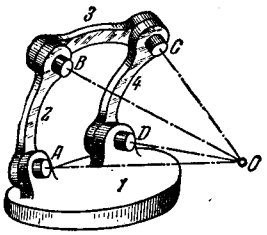


Рис. 2.28. Модель пространственного сферического механизма.

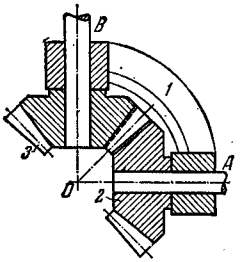


Рис. 2.29. Схема механизма конических зубчатых колес.

Структурная формула механизма будет

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1,$$

т. е. указанный сферический механизм (рис. 2.28) обладает одной степенью подвижности.

На рис. 2.29 показан механизм конических зубчатых колес. Оси колес *2* и *3* пересекаются в общем центре *O*. В этом же центре пересекаются все образующие поверхности зубьев. Поэтому этот механизм относится также к сферическим механизмам. Звенья *1*, *2* и *3* образуют вращательные пары. Звенья *2* и *3* образуют высшую пару IV класса, так как перемещение вдоль образующих поверхностей зубьев отсутствует.

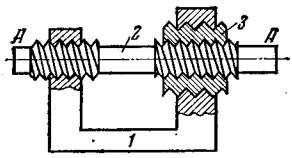


Рис. 2.30. Модель трехзвенного винтового механизма.

Структурная формула механизма дает

$$w = 3n - 2p_5 - p_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = \mathbf{1}.$$

Таким образом, механизм обладает одной степенью подвижности.

5°. На рис. 2.30 показан трехзвенный винтовой механизм. Звенья этого механизма имеют возможность только двух движений: вращательного вокруг оси *A — A* и поступательного вдоль этой же оси. Таким образом, на звенья механизма наложено четыре общих ограничения. Следовательно, структурная формула этого механизма будет

$$w = 2n - p_5.$$

После подстановки числа подвижных звеньев и кинематических пар получаем

$$w = 2 \cdot 2 - 3 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

6°. Выше были рассмотрены механизмы, образованные из замкнутых кинематических цепей. В некоторых современных машинах используются плоские и пространственные механизмы, образованные из незамкнутых кинематических цепей. Эти цепи используются в механических манипуляторах, роботах, шагающих

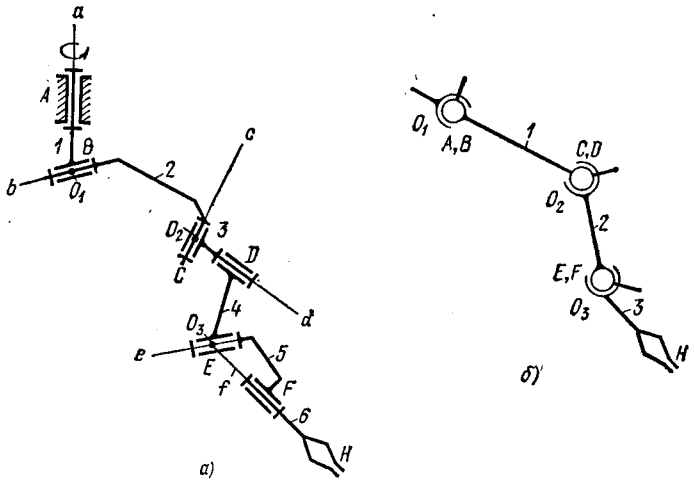


Рис. 2.31. Кинематические схемы механизма манипулятора типа «Маскот»; *а*) основная схема; *б*) эквивалентная схема.

машинах и других устройствах, имитирующих и заменяющих руки и ноги человека.

На рис. 2.31, *а* показана кинематическая схема манипулятора типа «Маскот». Цепь содержит шесть подвижных звеньев, входящих в шесть вращательных пар. На конце звена *6* находится захват, который может своими губками захватывать те или иные объекты. Если не учитывать движение губок захвата, то структурная формула механизма (2.9) будет

$$w = 6n - 5p_5 = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6.$$

Таким образом, механизм манипулятора этого типа имеет шесть степеней подвижности. На рис. 2.31, *б* показана эквивалентная схема с шестью степенями подвижности. Так как в основной схеме 2.31, *а* оси (*a*, *b*), (*c*, *d*) и (*e*, *f*) вращательных пар попарно пересекаются в точках O_1, O_2 и O_3, то соответственно пары (*A*, *B*), (*C*, *D*) и (*E*, *F*) можно заменить сферическими парами с пальцами. Тогда

механизм будет образован тремя звеньями, входящими в три сферические пары с пальцами.

Вследствие сложности конструктивного оформления сферических пар с пальцами в практике применяются механизмы, построенные по основной схеме.

В современной практике применяются механизмы, образованные из незамкнутых кинематических цепей и с большим, чем у рассмотренного (рис. 2.31, *а*) механизма, числом степеней подвижности. Эти механизмы могут быть образованы кинематическими парами различных классов и в различной последовательности их расположения. Таким образом, число вариантов подобных механизмов весьма велико.

На рис. 2.32 показаны два механизма манипуляторов. Механизм манипулятора типа «Версатран», схема которого показана на

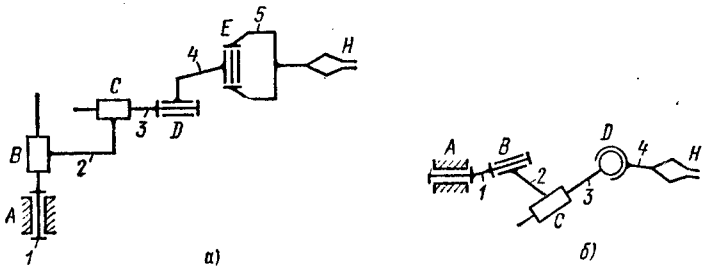


Рис. 2.32. Кинематические схемы механизмов манипуляторов.

рис. 2.32, *а*, имеет пять подвижных звеньев. Он образован вращательными парами A, D и E и поступательными парами B, C. Число степеней подвижности w равно

$$w = 6n - 5p_5 = 6 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 5,$$

т. е. механизм обладает пятью степенями подвижности.

На рис. 2.32, *б* показана схема механизма манипулятора, имеющего четыре подвижных звена, который образован вращательными парами A, B, поступательной парой C и шаровой парой D. Число степеней подвижности w равно

$$w = 6n - 5p_5 - 3p_3 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6,$$

т. е. механизм обладает шестью степенями подвижности.

Как частные случаи пространственных механизмов могут быть получены и простейшие плоские механизмы манипуляторов (рис. 2.33). На рис. 2.33, *а* и *б* показаны манипуляторы с тремя степенями подвижности, а на рис. 2.33, *в* — простейшая схема искусственной «ноги» (педипулятора).

7°. Кинематические пары I, II, III и IV классов в некоторых случаях удобно заменять эквивалентными им кинематическими

цепями, образованными парами V класса. Так, например, сферическая пара с пальцем, показанная на рис. 2.34, *а*, может быть заменена кинематической цепью (рис. 2.34, *б*), состоящей из трех звеньев, входящих в две вращательные кинематические пары

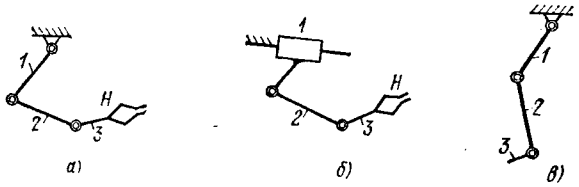


Рис. 2.33. Кинематические схемы плоских механизмов манипуляторов и педипуляторов.

A и B, оси которых пересекаются в точке O. Такие цепи получили название *кинематических соединений*. Кинематическое соединение, показанное на рис. 2.34, *б*, называется *карданным подвесом*. На рис. 2.35, *а* показана сферическая пара, а на рис. 2.35, *б* — эквивалентное ей кинематическое соединение, состоящее из четырех звеньев, входящих во вращательные пары A, B и C, оси которых пересекаются в точке O. Такое кинематическое соединение называется *сферическим соединением*.

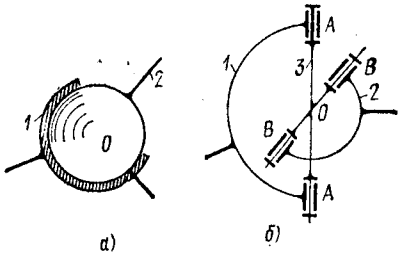


Рис. 2.34. Кинематические соединения: *а*) сферическая пара с пальцем; *б*) карданный шарнир.

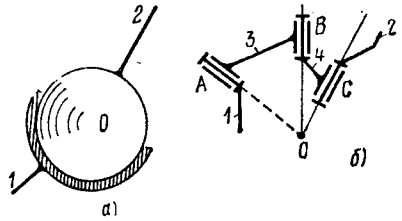


Рис. 2.35. Кинематические соединения: *а*) сферическая пара; *б*) сферическое соединение.

ГЛАВА III
КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 12. Основной принцип образования механизмов

1°. Основной принцип образования механизмов был впервые сформулирован в 1914 г. русским ученым Л. В. Ассуром. Им был продолжен и развит метод образования механизмов путем последовательного наслоения кинематических цепей, обладающих определенными структурными свойствами.

Этот метод легко проследить, рассматривая какой-либо конкретный механизм, пусть, например, механизм, показанный на рис. 3.1. Этот механизм имеет пять подвижных звеньев, образующих семь кинематических пар V класса. Следовательно, по формуле Чебышева (2.5) число его степеней подвижности w равно

$$w = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1, \qquad (3.1)$$

т. е. механизм, показанный на рис. 3.1, обладает одной степенью свободы. Выберем в качестве ведущего звено *2*. Тогда механизм будет состоять из ведущего звена *2*, обладающего одной степенью подвижности, стойки *1* и ведомых звеньев, образующих кинематическую цепь, состоящую из звеньев *3*, *4*, *5* и *6*.

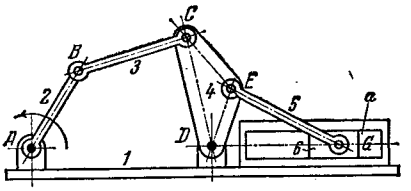


Рис. 3.1. Модель шестизвенного плоского механизма.

Процесс образования этого механизма можно представить как последовательное присоединение к ведущему звену *2* и к стойке *1* кинематической цепи, состоящей из звеньев *3* и *4*. Тогда получим четырехзвенный механизм *ABCD*, обладающий одной степенью подвижности. Далее к звену *4* механизма *ABCD* и стойке *1* присоединим кинематическую цепь, состоящую из звена *5* и ползуна *6*. Тогда получим шестизвенный механизм, обладающий также одной степенью подвижности.

Нетрудно теперь установить определенную закономерность процесса образования механизма. В самом деле, любой механизм имеет одно неподвижное звено (*стойку*). У механизма, показанного на рис. 3.1, стойкой будет звено *1*. Далее механизм должен иметь число ведущих звеньев, равное числу его степеней подвижности (см. § 7, *3°*). В нашем случае механизм (рис. 3.1) обладает одним ведущим звеном *2*, так как степень подвижности механизма w, согласно (3.1), равна $w = 1$.

Так как после присоединения ведомых звеньев *3*, *4*, *5* и *6* число степеней подвижности всего механизма осталось равным

$$w = 1,$$

то, следовательно, кинематическая цепь, состоящая из ведомых звеньев *3*, *4*, *5* и *6*, присоединенных к ведущему звену *2* и стойке *1*, обладает нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, к которым эта цепь присоединяется.

2°. Введем понятие о группах Ассура.

Группой Ассура будем называть кинематическую цепь с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, с которыми входят в кинематические пары свободные элементы ее звеньев, и не

распадающуюся на более простые цепи, обладающие также нулевой степенью подвижности.

Если обратиться к механизму, показанному на рис. 3.1, то нетрудно видеть, что совокупность звеньев *3*, *4*, *5* и *6* хотя и обладает нулевой степенью подвижности, но не будет группой, так как распадается на две кинематические цепи, состоящие из звеньев *3*, *4* и *5*, *6*, каждая из которых обладает нулевой степенью подвижности. В самом деле, кинематическая цепь *BCD* состоит из двух звеньев *3* и *4*, входящих в три вращательных кинематических пары *B*, *C* и *D*, следовательно, ее степень подвижности $w_{гр}$ равна

$$w_{гр} = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Далее, кинематическая цепь *EG* состоит из двух звеньев *4* и *5*, входящих в две вращательные кинематических пары *E* и *F* и одну поступательную пару (ползун *6* и неподвижная направляющая). Степень подвижности $w_{гр}$ этой цепи равна

$$w_{гр} = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0,$$

следовательно, механизм (рис. 3.1) образован присоединением к ведущему звену *2* и стойке *1* двух групп: первой группы, состоящей из звеньев *3*, *4*, и второй группы, состоящей из звеньев *5* и *6*.

3°. При последовательном присоединении групп необходимо руководствоваться определенными правилами. При образовании механизма с одной степенью подвижности первая группа присоединяется свободными элементами звеньев к ведущему звену и к стойке. Последующие группы могут присоединяться к любым звеньям полученного механизма только так, чтобы звенья группы обладали подвижностью друг относительно друга. Пусть, например, мы имеем четырехзвенный механизм *ABCD* (рис. 3.2), образованный ведущим звеном *2*, стойкой *1* и группой, состоящей из звеньев *3* и *4*. Следующая группа, состоящая из звеньев *5* и *6*, может быть присоединена к любым двум разным звеньям механизма, например к звеньям *3* и *4* (рис. 3.2), но не к одному и тому же звену. Так, например, если присоединить звенья *5* и *6* к одному и тому же звену *3* (рис. 3.2), то контур *FEG'*, образованный звеньями *3*, *5* и *6*, будет жестким, т. е. будет фермой. Нетрудно видеть, что для того, чтобы после присоединения группы ее звенья имели подвижность относительно тех звеньев, к которым группа присоединена, необходимо, чтобы замкнутый контур, образованный звеньями группы и звеньями, к которым она присоединится, был подвижным

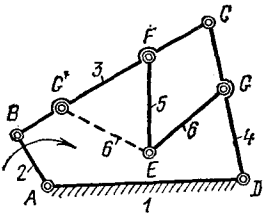


Рис. 3.2. Схема присоединения группы II класса к механизму шарнирного четырехзвенника.

контуром. Так, на рис. 3.2 контур *GCFE* будет обладать подвижностью. Нетрудно видеть, что для того, чтобы такой контур обладал подвижностью, необходимо, чтобы звенья контура входили бы *не менее чем в четыре* кинематические пары (пары *F*, *E*, *G* и *C* на рис. 3.2).

§ 13. Структурная классификация плоских механизмов

1°. В современном машиностроении особенно широкое применение получили плоские механизмы, звенья которых входят в пары IV и V классов. Поэтому отдельно остановимся на рассмотрении принципов их структурной классификации.

В § 12 был установлен основной принцип образования механизмов, состоящий в последовательном присоединении к ведущим звеньям и стойке групп, степень подвижности $w_{гр}$ которых равна

$$w_{гр} = 0. \tag{3.2}$$

Для плоских механизмов, звенья которых входят в пары IV и V классов, это условие будет выглядеть так:

$$3n - 2p_5 - p_4 = 0. \tag{3.3}$$

2°. Назовем условно ведущее звено и стойку, образующие кинематическую пару V класса, *механизмом I класса* (рис. 3.3).

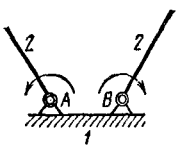


Рис. 3.3. Схемы механизмов I класса.

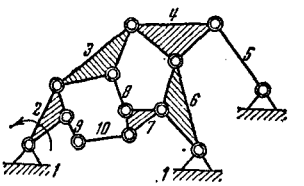


Рис. 3.4. Схема сложного механизма.

Образование любого плоского механизма может быть представлено как *последовательное присоединение групп, удовлетворяющих условию* (3.3). Например, первая группа присоединяется к одному механизму I класса (ведущему звену и стойке), следующая группа — либо к звеньям первой группы, либо частично к звеньям первой группы и ведущему звену или к стойке и т. п.

На рис. 3.4 дана схема механизма, образованного присоединением к одному механизму I класса (ведущее звено *2* и стойка *1*) следующих кинематических цепей: первой кинематической цепи из звеньев *3*, *4*, *5* и *6*, второй — из звеньев *7* и *8* и третьей — из звеньев *9* и *10*.

Можно легко проверить, что все эти кинематические цепи действительно удовлетворяют условию (3.2), т. е. не распадаются на более

простые группы, и, следовательно, являются *группами*. Механизмы, образованные присоединением нескольких групп к одному механизму I класса, так же как и сам он, обладают степенью подвижности, равной единице, так как группы не изменяют степени подвижности основного механизма, к которому они присоединяются.

Механизмы могут быть образованы также и присоединением групп одновременно к *нескольким* механизмам I класса. В этих случаях степень подвижности получаемых механизмов будет равна числу механизмов I класса, к которым производится такое присоединение групп, т. е. числу *ведущих* звеньев рассматриваемого механизма. Например, на рис. 3.5 показан механизм, образованный

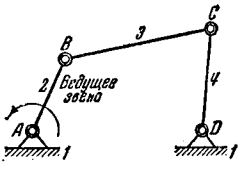


Рис. 3.5. Схема механизма, образованного присоединением группы звеньев *3* и *4* к ведущему звену *2* и к стойке *1*.

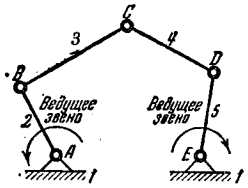


Рис. 3.6. Схема механизма, образованного присоединением группы звеньев *3* и *4* к двум механизмам I класса, состоящим из ведущих звеньев *2* и *5*, соединенных со стойкой *1*.

присоединением группы, состоящей из звеньев *3* и *4*, к одному механизму I класса, а на рис. 3.6 показан механизм, образованный присоединением такой же группы к двум механизмам I класса.

3°. Как было показано в § 10, все входящие в состав плоского механизма высшие кинематические пары IV и V классов могут быть заменены кинематическими цепями, образованными только парами V класса. Звенья полученных указанным выше способом заменяющих механизмов будут совершать в рассматриваемом положении движения того же вида, что и первоначальные, в состав которых входили высшие пары. Поэтому при рассмотрении вопросов о классификации механизмов можно ограничиться рассмотрением механизмов, в которых все высшие пары предварительно заменены соответствующими цепями, образованными парами V класса.

Из соотношения (3.3) следует, что условие, которому должны удовлетворять группы, в состав которых входят пары только V класса, можно написать так:

$$3n - 2p_5 = 0,$$

откуда

$$p_5 = \frac{3}{2} n, \qquad (3.4)$$

т. е. число пар V класса, входящих в группу, должно равняться *трем вторым числа входящих в нее звеньев*.

Так как числа звеньев и пар могут быть только целыми, то условию (3.4) удовлетворяют только следующие сочетания чисел звеньев и кинематических пар, входящих в группу (таблица 2):

Таблица 2

№ п/п	1	2	3	4	5	·
n	2	4	6	8	·	·
p_5	3	6	9	12	·	·

Задаваясь различными сочетаниями этих чисел, удовлетворяющим условию (3.4), мы можем получать группы различного вида. Все получаемые таким образом группы можно разбить по *классам*. Как это будет показано далее, деление групп по классам обусловлено методами кинематического и силового анализов, свойственными группам каждого класса.

4°. Простейшее сочетание чисел звеньев и пар, удовлетворяющих условию (3.4), будет $n = 2$ и $p_5 = 3$. Так как любая группа после своего присоединения к ведущему звену и стойке образует замкнутую кинематическую цепь, то можно сделать вывод, что число элементов, которыми группа к ним присоединяется, *не может быть меньше двух*. Тогда в рассматриваемой простейшей группе, состоящей из трех кинематических пар, элементы двух звеньев остаются свободными и группа в общем виде может иметь вид, показанный на рис. 3.7. На этом рисунке показана группа BCD, состоящая из двух звеньев и трех вращательных кинематических пар. Эта группа может быть присоединена элементами B и D к двум любым звеньям k и m механизма. Так как одним из условий присоединения группы является условие, чтобы концевыми элементами B и D группа *не присоединялась к одному и тому же звену*, то, следовательно, группа может быть присоединена к одному механизму I *класса*, образованному ведущим звеном *2* и стойкой *1* (рис. 3.5), элементом D к ведущему звену *2* и элементом B к стойке *1*. Полученный механизм будет иметь степень подвижности, равную единице, так как присоединение было сделано *к одному* механизму I класса. Та же группа может быть присоединена и *к двум* механизмам I класса (рис. 3.6), но в этом случае механизм обладает степенью подвижности, равной двум.

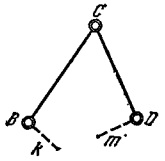


Рис. 3.7. Схема двухповодковой группы первого вида.

Группа, имеющая два звена и три пары V класса, называется *группой* II *класса второго порядка или двухповодковой группой*, ибо

присоединение этой группы к основному механизму производится двумя поводками BC и DC.

Порядок группы определяется числом элементов звеньев, которыми группа присоединяется к основному механизму.

Механизмы, в состав которых входят группы класса не выше второго, называются *механизмами II класса.*

5°. Группа, изображенная на рис. 3.7, имеет два звена и три вращательные пары. Назовем такое сочетание звеньев и пар *первым видом* группы II класса.

Все последующие виды группы II класса могут быть получены путем замены отдельных вращательных пар парами поступательными.

Вторым видом является тот, при котором поступательной парой заменена *одна из крайних* вращательных пар (рис. 3.8).

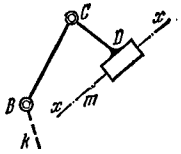


Рис. 3.8. Схема двухповодковой группы второго вида.

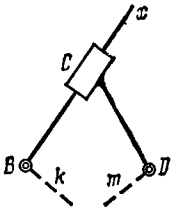


Рис. 3.9. Схема двухповодковой группы третьего вида.

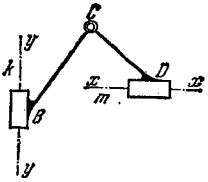


Рис. 3.10. Схема двухповодковой группы четвертого вида.

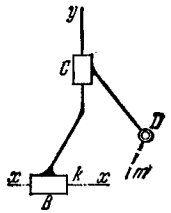


Рис. 3.11. Схема двухповодковой группы пятого вида.

Третий вид показан на рис. 3.9. Здесь поступательной парой заменена *средняя* вращательная пара.

Четвертый вид изображен на рис. 3.10. Здесь *две крайние* вращательные пары заменены двумя поступательными парами.

Пятый вид показан на рис. 3.11. Здесь поступательными парами заменены *крайняя* и *средняя* вращательные пары.

Казалось бы, что, следуя по пути замены вращательных пар поступательными, можно было бы заменить и все три вращательные пары поступательными, но можно убедиться, что в этом случае при присоединении к стойке группа будет иметь одну степень подвижности, т. е. переходит в плоский механизм с одними поступательными парами, показанный на рис. 2.17. Таким образом, в плоских механизмах с вращательными, поступательными и высшими парами IV и V классов имеется только *пять видов групп II класса.*

Большинство современных механизмов, применяемых в технике, принадлежит к механизмам II класса.

6°. Рассмотрим теперь второе возможное сочетание чисел звеньев и кинематических пар, образующих группу. Согласно равенству

(3.4), следующая по числу звеньев группа должна содержать *четыре* звена и *шесть* пар V класса. Для этого сочетания могут быть получены три типа кинематических цепей, структурные принципы образования которых различны.

Первая кинематическая цепь, показанная на рис. 3.12, состоит из звена EGF, от которого идут три поводка: EB, GC и FD. Эта цепь представляет собой сложную незамкнутую кинематическую цепь, является *группой* III *класса третьего порядка* и называется *трехповодковой группой*. Присоединение этой группы к основному механизму производится посредством трех поводков EB, GC и FD с элементами B, C и D, входящими, в общем случае, в пары со звеньями k, m и l, принадлежащими основному механизму.

Отличительной особенностью этой группы является звено EFG, входящее в три кинематические пары и образующее некоторый

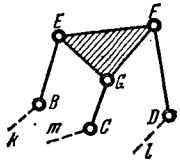


Рис. 3.12. Схема трехповодковой группы с одними вращательными парами.

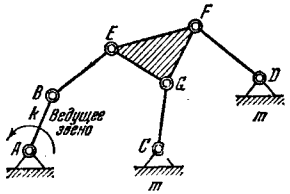


Рис. 3.13. Схема механизма III класса с присоединенной к механизму I класса трехповодковой группой.

жесткий треугольный замкнутый контур, состоящий как бы из трех звеньев EG, GF и FE, входящих в три кинематические пары. Звено EFG будем называть *базисным звеном*. К основному механизму группа присоединена элементами B, C и D поводков EB, GC и FD (рис. 3.13). Элементом B она присоединена к ведущему звену k, а элементами C и D — к стойке m.

Механизмы, в состав которых входят группы не выше групп III *класса третьего порядка, называются механизмами* III *класса.*

Таким образом, механизм, показанный на рис. 3.13, является механизмом III класса.

7°. Вторая возможная кинематическая цепь из четырех звеньев и шести низших пар показана на рис. 3.14. Эта замкнутая кинематическая цепь присоединяется к звеньям k и m основного механизма не элементами поводков, а свободными элементами G и B, принадлежащими базисным звеньям EGF и CDB. В отличие от только что рассмотренной группы, данная группа, кроме двух базисных звеньев BCD и EGF, образующих два жестких контура, имеет один подвижный *четырехсторонний замкнутый контур* $CEFD$.

Группы, в состав которых входят четырехсторонние замкнутые контуры, будем относить *к группам* IV *класса*. Вследствие этого

группа, показанная на рис. 3.15, является *группой* IV *класса второго порядка*, так как присоединение группы к основному механизму I класса производится двумя элементами B и G (рис. 3.15); элементом B она присоединяется к ведущему звену *2*, а элементом G — к стойке *1*.

Механизмы, в состав которых входят группы не выше IV *класса второго порядка, называются механизмами* IV *класса.*

Таким образом, механизм, показанный на рис. 3.15, представляет собой механизм IV класса.

Третий возможный вид кинематической цепи из четырех звеньев и шести кинематических пар показан на рис. 3.16. Эта цепь распадается на две простейшие группы II класса — BCD и EFG —

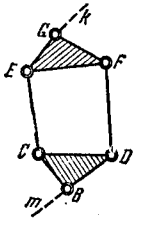


Рис. 3.14. Схема группы IV класса с замкнутым контуром.

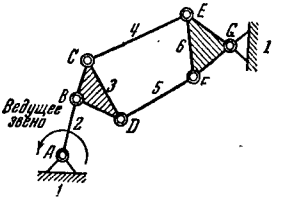


Рис. 3.15. Схема механизма IV класса с группой в виде замкнутого четырехстороннего контура.

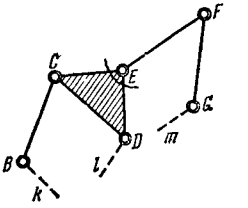


Рис. 3.16. Кинематическая цепь из четырех звеньев, распадающаяся на две двухповодковые группы.

и потому относится к уже ранее рассмотренным и не представляет ничего принципиально нового.

8°. Если в состав механизма входят группы различных классов, то класс механизма определяется по той группе, которая относится к наивысшему классу. Например, если механизм образован двумя группами: группой IV класса и группой III класса, то он должен быть отнесен к механизмам IV класса.

При определении класса механизма необходимо указывать, какие из звеньев являются ведущими, ибо *в зависимости от выбора ведущих звеньев может изменяться класс механизма.* Например, если в механизме, показанном на рис. 3.13, за ведущее звено принять не звено AB, а звено DF, то весь механизм будет механизмом II класса как образованный двумя группами II класса (группы FGC и EBA). Так как группы II класса могут быть группами только второго порядка (двухповодковыми), то в дальнейшем изложении мы не будем указывать порядок групп II класса.

9°. Если в состав механизма наряду с низшими кинематическими парами входят также и высшие, то, пользуясь методом замены элементов звеньев высших пар, изложенным в § 10, мы всегда сможем заменить все такие пары кинематическими цепями с низшими парами, после чего класс и порядок механизмов могут быть определены.

Пусть, например, имеется механизм, звенья которого *2* и *4* входят в высшую пару *H*, которая является парой IV класса (рис. 3.17). Пара *H* в данном случае представляет собой совокупность двух соприкасающихся кривых *a* и *b*, из которых кривая *a* жестко связана со звеном *2*, а кривая *b* — со звеном *4*. Проведем через точку *H* общую нормаль *N* — *N* к кривым *a* и *b* и отметим на этой нормали точки *G* и *F* — центры кривизны этих кривых. Условное звено *GF*, введенное для замены высшей пары *H*, имеет длину, равную

$$GF = \rho_1 + \rho_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны кривых *a* и *b* в точке *H*, и входит со звеном *2* во вращательную пару *G*, а со звеном *4* — во вращательную пару *F*.

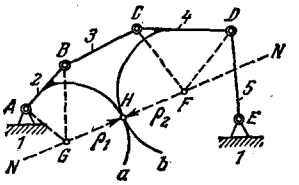


Рис. 3.17. Схема механизма с высшей парой.

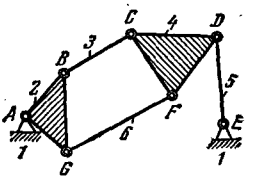


Рис. 3.18. Схема механизма IV класса, заменяющего механизм, схема которого показана на рис. 3.17.

Схема заменяющего механизма приведена на рис. 3.18. Звено *6* в общем случае имеет *переменную* длину, если ρ_1 и ρ_2 в различных точках кривых различны. В этом случае переменны и длины *AG*, *BG*, *CF* и *DF* звеньев *2* и *4*.

Если ведущим будет звено *2*, то механизм на рис. 3.18 будет III класса, так как в этом случае к основному механизму — механизму I класса (звено *2* и стойка *1*) — присоединяется трехповодковая группа III класса, образованная звеньями *3*, *4*, *5* и *6*. Если же ведущим звеном будет звено *5*, то механизм будет IV класса как образованный группой IV класса второго порядка из звеньев *2*, *3*, *4* и *6*. К основному механизму эта группа присоединена элементами двух пар *A* и *D*.

При расчленении механизмов на группы можно рекомендовать придерживаться такой последовательности.

Пусть дан механизм, состоящий из стойки, ведущего звена (или ведущих звеньев) и нескольких групп различных классов. Начинать надо с попытки отсоединить от механизма группы II класса. При этом необходимо каждый раз после отсоединения группы проверить, обладает ли оставшаяся кинематическая цепь той же степенью подвижности, что и первоначальный механизм, и чтобы не оставалось вообще элементов звеньев, не входящих

в кинематические пары. Если попытки отсоединения групп II класса не дадут решения, то надо переходить к попыткам отсоединения групп III класса. После групп III класса следует переходить к группам IV класса и т. д.

После выделения всех групп должны остаться стойка и ведущее звено (ведущие звенья).

Пример 1. На рис. 3.19 показан механизм двигателя. Требуется определить класс механизма и порядок присоединенных групп. Кривошип *2* входит во вращательную пару V класса со стойкой *1*. Далее шатун *3* входит во вращательную пару V класса с кривошипом *2* и во вращательную пару V класса с поршнем *4*. Поршень *4* входит в поступательную пару V класса с цилиндром, жестко скрепленным со стойкой *1*. С шатуном *3* во вращательную пару V класса входит звено *5*, в свою очередь входящее во вращательную пару V класса со звеном *6*. Звено *6* входит во вращательную пару V класса со стойкой *1* и во вращательную пару V класса с шатуном *7* компрессора. Шатун *7* входит во вращательную пару V класса с поршнем *8* компрессора, который в свою очередь входит в поступательную пару V класса с цилиндром, жестко скрепленным со стойкой *1*. Таким образом, механизм состоит из *восьми* вращательных пар V класса, *двух* поступательных пар V класса и *семи* подвижных звеньев.

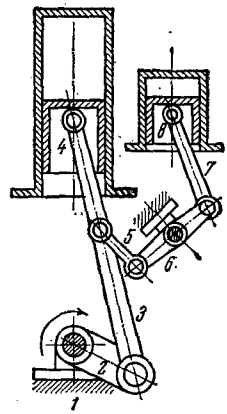


Рис. 3.19. Механизм двигателя со схематизированными конструктивными формами его звеньев.

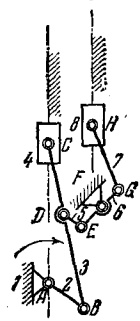


Рис. 3.20. Кинематическая схема механизма двигателя, изображенного на рис. 3.19.

Таким образом, имеем $n = 7$ и $p_5 = 10$. Так как в механизме отсутствуют лишние степени свободы и пассивные связи, то степень подвижности механизма определяется по формуле Чебышева:

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 1,$$

т. е. механизм обладает *одной* степенью подвижности и, следовательно, должен иметь одно ведущее звено.

Для определения класса механизма и порядка присоединенных групп составим кинематическую схему рассматриваемого механизма (рис. 3.20).

Если за ведущее звено принять звено *2* (кривошип AB двигателя), то механизм должен быть отнесен к механизмам II класса, так как он образован тремя группами II класса, из которых первая

группа образована звеньями *3* и *4*, входящими в две вращательные пары *2*, *3* и *3*, *4* и одну поступательную пару *4*, *1*, и является группой II класса *второго* вида. Вторая группа образована звеньями *5* и *6*, входящими в три вращательные пары *3*, *5*; *5*, *6* и *6*, *1*, и является группой II класса *первого* вида. Наконец, третья группа образована звеньями *7* и *8*, входящими в две вращательные пары *6*, *7* и *7*, *8* и в одну поступательную пару *8*, *1*, и является группой II класса *второго* вида.

При ведущем звене *8* (поршень компрессора) механизм должен быть отнесен к механизмам III класса, так как в этом случае ведомые звенья и пары, в которые они входят, образуют две группы, из которых одна — трехповодковая группа III класса, а другая — II класса. Первая группа образована звеньями *2*, *3*, *4* и *5*, входящими в пять вращательных пар *2*, *1*; *2*, *3*; *3*, *5* и *5*, *6* и одну поступательную пару *4*, *1*, а вторая группа II класса первого вида образована звеньями *6* и *7*, входящими в три вращательные пары *6*, *1*; *6*, *7* и *7*, *8*.

Наконец, при ведущем звене *4* (поршень двигателя) механизм должен быть отнесен к механизмам II класса, потому что, так же как и в первом случае, мы получаем три группы II класса.

Пример 2. На рис. 3.21, *а* показана кинематическая схема кулачкового механизма двигателя. Кулачок *2*, вращаясь вокруг оси *A*, действует на ролик *3*, сидящий на качающемся рычаге *4*. Рычаг *4* роликом *5* передает движение клапану *6*, движущемуся в направляющих *F*. Механизм состоит из пяти подвижных звеньев, четырех вращательных пар V класса, одной поступательной пары V класса и двух пар IV класса и обладает полной определенностью движения всех звеньев. Между тем по формуле Чебышева получаем

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 2 = 3,$$

т. е. механизм обладает *лишними* степенями свободы. Этим лишним степеням свободы соответствует возможность вращения роликов *3* и *5* вокруг осей *C* и *E* (рис. 3.21, *а*). В самом деле, устранив возможность такого вращения, например, жестко скрепив для этого ролики *3* и *5* с рычагом *4*, мы не изменим общего характера движения механизма в целом. Поэтому два звена — ролики *3* и *5* — могут быть устранены как звенья, размеры которых не оказывают влияния на кинематику механизма.

Кинематическая схема механизма после устранения роликов приведена на рис. 3.21, *б*. Для введения кулачка *2* в кинематическую пару *2*, *4* IV класса с рычагом *4* (в точке *C*) кривая кулачка *1* заменена геометрическим местом относительных положений центра ролика *3*, а для введения рычага *4* в кинематическую пару *4*, *6* IV класса с клапаном *6* (в точке *E*) плоскость *a* — *a* клапана *6*

приподнята на расстояние, равное радиусу ролика 5 (т. е. занимает положение $a' - a'$).

Теперь после устранения роликов число подвижных звеньев стало равно трем ($n = 3$), число пар V класса — также трем ($p_5 = 3$), а число пар IV класса — двум ($p_4 = 2$). Лишние степени свободы теперь отсутствуют, и структурная формула для рассматриваемого механизма принимает вид

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

т. е. механизм обладает *одной* степенью подвижности.

Чтобы определить класс механизма и порядок присоединенных групп, необходимо предварительно произвести замену всех высших пар IV класса кинематическими цепями с низшими парами V класса. Для замены пары 2, 4 IV класса (рис. 3.21, *б*) через точку C соприкасания звеньев 2 и 4 проводим нормаль $N - N$ к профилю кулачка 2 и соединяем точку B — центр кривизны этого профиля в точке C — с точкой A. Отрезок BC является условным звеном 3, входящим в две вращательные пары V класса 4, 3 и 2, 3.

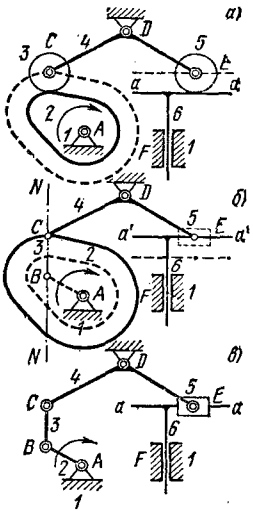


Рис. 3.21. Кулачковый механизм с двумя роликами: *а*) кинематическая схема; *б*) схема без роликов; *в*) схема заменяющего механизма.

Для замены пары 4, 6 IV класса вводим условное звено 5 (ползун), входящее в одну вращательную пару 4, 5 V класса и одну поступательную 5, 6 также V класса. После введения указанных выше условных звеньев, с помощью которых мы заменили высшие пары, мы получили *заменяющий механизм*, кинематическая схема которого дана на рис. 3.21, *в*.

При ведущем звене 2 кинематическая цепь, образованная подвижными звеньями 3, 4, 5 и 6, распадается на две группы II класса: группу из звеньев 3 и 4, входящих в три вращательные пары 2, 3; 3, 4 и 4, 1, и группу из звеньев 5 и 6, входящих в одну вращательную пару 4, 5 и две поступательные пары 5, 6 и 6, 1. Первая из этих групп есть группа *первого* вида, а вторая — *пятого* вида.

При ведущем звене 6 кинематическая цепь, образованная ведомыми звеньями 5, 4, 3 и 2, распадается на две группы II класса, причем группа, образованная звеньями 3 и 2, — первого вида, а группа, образованная звеньями 4 и 5, — второго вида.

При ведущем звене 4 мы снова получаем две группы II класса: одну — *первого* вида (звенья 2 и 3) и вторую — *пятого* вида (звенья 5 и 6). Следовательно, при любом ведущем звене рассматриваемый механизм должен быть отнесен к механизмам II класса.

Для определения степени подвижности заменяющего механизма, в котором все высшие пары заменены кинематическими цепями с низшими парами (рис. 3.21, *в*), воспользуемся формулой Чебышева. Структурная формула механизма будет

$$w = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1,$$

так как из кинематической схемы (рис. 3.21, *в*) имеем $n = 5$, $p_5 = 7$ и $p_4 = 0$.

Таким образом, механизм обладает *одной* степенью подвижности и, следовательно, должен иметь одно ведущее звено.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА IV

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

§ 14. Центроиды в абсолютном и относительном движениях

1°. Основной задачей кинематики механизмов является изучение движения звеньев механизмов вне зависимости от сил, действующих на эти звенья.

Из теоретической механики известно, что при плоскопараллельном движении твердого тела (звена механизма) это движение в каждый момент времени может быть представлено как вращение вокруг некоторой точки, называемой мгновенным центром вращения. В механизмах мы можем рассматривать движение звеньев относительно стойки и относительно любого из звеньев механизма. Если движение звена относительно стойки принять за абсолютное движение, то соответствующий мгновенный центр вращения будем называть *мгновенным центром вращения в абсолютном движении рассматриваемого звена*. Если же рассматривается движение звена относительно любого подвижного звена механизма, то соответствующий мгновенный центр вращения будем называть *мгновенным центром вращения в относительном движении рассматриваемых звеньев*.

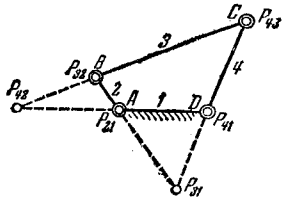


Рис. 4.1. Схема четырехзвенного шарнирного механизма с построенными на ней центрами мгновенного вращения.

На рис. 4.1 изображена схема механизма шарнирного четырехзвенника. Мгновенные центры вращения звеньев *2* и *4* относительно стойки *1* совпадают соответственно с точками A и D. Обозначим эти центры соответственно через P_{21} и P_{41}. Мгновенным центром вращения звена *3* относительно звена *2* является точка B, которую мы обозначим через P_{32}. Наконец, мгновенный

центр вращения P_{43} звена *4* относительно звена *3* совпадает с точкой *C*.

2°. Чтобы найти мгновенный центр вращения звена *3* относительно стойки *1*, следует продолжить линии *BA* и *CD*, точка пересечения которых P_{31} и оказывается *центром мгновенного вращения звена 3 относительно стойки 1*. Как известно из теоретической механики, мгновенный центр вращения располагается на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей точек звена. В изображенном на рис. 4.1 механизме линии *AB* и *DC* как раз и являются перпендикулярами к векторам скоростей точек *B* и *C*.

Мгновенные центры P_{32}, P_{21} и P_{31}, имеющие индексы, представляющие собой сочетания из цифр 1, 2, 3 по два, лежат на одной прямой. Точно так же на одной прямой лежат мгновенные центры P_{43}, P_{41} и P_{31}, индексы которых представляют собой сочетания цифр 1, 3 и 4. Это следует из известной теоремы механики о сложении двух вращений вокруг параллельных осей. Результирующее вращение происходит вокруг оси, лежащей в их плоскости и параллельной первым двум. Этим свойством можно воспользоваться, например, для нахождения мгновенного центра вращения P_{42} в относительном движении звена *4* относительно звена *2*. Мгновенный центр вращения P_{42} должен одновременно лежать на прямой, соединяющей мгновенные центры P_{32} и P_{43}, и на прямой, соединяющей центры P_{21} и P_{41}, т. е. мгновенный центр вращения P_{42} лежит на пересечении прямых *CB* и *DA*. Это свойство мгновенных центров вращения в механизмах впервые было указано английским ученым Кеннеди.

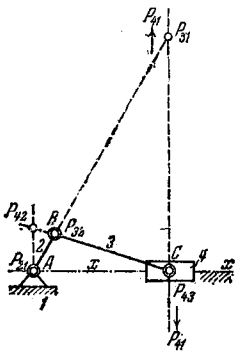


Рис. 4.2. Схема кривошипно-ползунного механизма с построенными на ней центрами мгновенного вращения.

3°. Установленное свойство мгновенных центров вращения позволяет определить все мгновенные центры вращения заданного механизма. Пусть нам дан кривошипно-ползунный механизм (рис. 4.2). Обозначим в точках *A*, *B* и *C* мгновенные центры вращения P_{21}, P_{32} и P_{43}. Мгновенный центр P_{41} находится в бесконечности на прямой, перпендикулярной к оси $x - x$ движения ползуна *4*. Соединяем мгновенные центры вращения p_{21} и p_{32} и продолжаем прямую $P_{21}P_{32}$ до пересечения в точке P_{13} с прямой $P_{43}P_{41}$, т. е. прямой, перпендикулярной к направляющей $x - x$ (точка P_{41} располагается в бесконечности), получаем мгновенный центр вращения P_{31} звена *3* относительно звена *1*. Для нахождения мгновенного центра вращения P_{43} в движении звена *4* относительно звена *2* соединяем мгновенные центры вращения P_{43} и P_{32} и продолжаем эту прямую до пересечения в точке P_{42} с прямой, соединяющей мгновенные центры вращения P_{21} и P_{41}, т. е. с прямой, про-

веденной через точку P_{21} перпендикулярно к направляющей $x - x$.

На рис. 4.3 и 4.4 показаны мгновенные центры вращения двух кулисных механизмов. Мгновенный центр вращения P_{32} (рис. 4.4) находится в бесконечности и лежит на прямой, соединяющей центры P_{42} и P_{43}.

На рис. 4.5 показан кулачковый механизм. Мгновенный центр вращения P_{21} звена *2* относительно стойки *1* находится в точке A. Мгновенный центр вращения P_{32} звена *3* относительно звена *2* лежит на нормали $n - n$, проведенной в точке C к профилю кулачка *2*, — на прямой, перпендикулярной к прямой $a - a$. Мгновенный центр

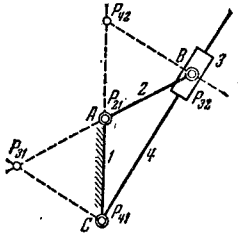


Рис. 4.3. Схема кулисного механизма с одной поступательной парой и с показанными на ней центрами мгновенного вращения.

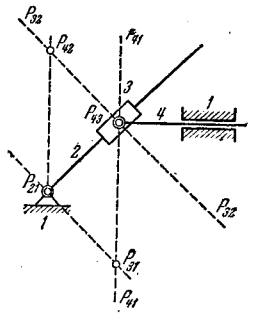


Рис. 4.4. Схема кулисного механизма с двумя поступательными парами и показанными на ней центрами мгновенного вращения.

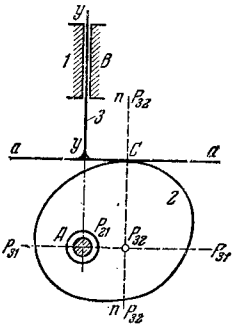


Рис. 4.5. Схема кулачкового механизма с показанными на ней мгновенными центрами вращения.

вращения P_{31} звена *3* относительно звена *1* лежит в бесконечности на прямой, перпендикулярной к оси $y - y$ движения звена *3*. Поэтому мгновенный центр вращения P_{32} звена *3* относительно звена *2* может быть найден как точка пересечения прямой $P_{21}P_{31}$, соединяющей мгновенные центры P_{21} и P_{31} и нормали $n - n$, проведенной через точку C.

4°. Как известно из теоретической механики, геометрическое место мгновенных центров вращения образует так называемую *центроиду*.

На рис. 4.6 показан четырехзвенный шарнирный механизм антипараллелограмма, у которого противоположные звенья попарно равны. Пусть требуется построить центроиду в движении звена *2* относительно звена *4*. Останавливаем звено *4* (условно принимаем его за стойку). Мгновенный центр вращения P_{24} находится в пересечении прямых AB и CD. Поворачиваем звено AB на полный оборот. Геометрическое место точек P_{24} образует центроиду $Ц_{24}$, которая для данного механизма является эллипсом с фокусами в точках A и D. Так как за стойку мы приняли звено *4*, то центроида

$Ц_{24}$ принадлежит этому звену и может быть с ним жестко соединена. Если требуется построить центроиду в движении звена *4* относительно звена *2*, то надо условно принять за стойку звено *2* и построить все положения мгновенного центра P_{42}. Кривая $Ц_{42}$, представляющая собой эллипс с фокусами в точках *C* и *B*, является центроидой в движении звена *4* относительно звена *2*. Центроиду $Ц_{42}$, принадлежащую звену *2*, мы можем жестко соединить с ним. Теперь движения звена *2* относительно звена *4*, или наоборот, звена *4* относительно звена *2*, могут быть осуществлены качением друг по другу без скольжения построенных центроид $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$. В зависимости от того какие из звеньев механизма *ABCD* будут приняты за стойку, центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$ могут быть центроидами или в абсолютном движении звена, или в относительном. Так, останавливая звено *4* и жестко связанную с ним центроиду $Ц_{24}$, мы можем воспроизвести абсолютное движение звена *2* как качение без скольжения подвижной центроиды $Ц_{42}$ по неподвижной центроиде $Ц_{24}$.

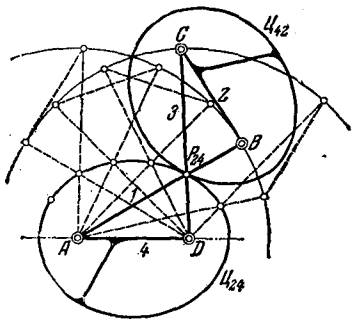


Рис. 4.6. Схема шарнирного антипараллелограмма с показанными на ней центроидами в относительном движении звеньев *2* и *4*.

Таким образом, в этом случае центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$ оказываются соответственно подвижной и неподвижной центроидами в абсолютном движении звена *2*. Наоборот, если остановить звено *2*, то центроида $Ц_{42}$ будет неподвижной центроидой, а центроида $Ц_{24}$ будет подвижной центроидой в абсолютном движении звена *4*.

Если теперь остановить одно из звеньев *1* или *3*, то обе центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$ станут подвижными и качение одной центроиды по другой будет воспроизводить относительное движение звеньев *2* и *4* и центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$ будут *центроидами в относительном движении*.

Если остановить звено *1*, то центроида $Ц_{24}$ будет вращаться вокруг оси *A*, а центроида $Ц_{42}$ — вокруг оси *B*. Таким образом, вращение вокруг осей *A* и *B* звеньев *4* и *2* по закону шарнирного антипараллелограмма может быть воспроизведено также путем посадки на эти оси двух фрикционных эллиптических колес, профили которых представляют собой центроиды $Ц_{24}$ и $Ц_{42}$, т. е. механизм шарнирного антипараллелограмма заменяется механизмом фрикционных эллиптических колес. Такое движение окажется возможным, если между центроидами установлена связь, обеспечивающая их движение без скольжения.

5°. Как было показано выше, для любого механизма в любом его положении могут быть определены все мгновенные центры

вращения в абсолютном и в относительном движениях его звеньев. Следовательно, если имеется механизм, воспроизводящий то или иное движение, то такое же движение звеньев может быть осуществлено механизмом, представляющим собой две сопряженные центроиды.

Так, например, передача движения между кривошипами AD и CB шарнирного антипараллелограмма (рис. 4.6) может быть воспроизведена двумя эллиптическими фрикционными колесами. При этом законы движения звеньев остаются такими же, как и для механизма шарнирного антипараллелограмма. Механизмы, в которых передача движения осуществляется центроидами, носят название *центроидных механизмов*. Практически редко можно пользоваться центроидными механизмами на всем желательном интервале движения, так как в некоторых случаях центроидами служат кривые сложного вида (самопересекающиеся, с бесконечно удаленными точками и т. д.).

§ 15. Кинематика ведущих звеньев механизмов

1°. Кинематическое исследование механизма, т. е. *изучение движения звеньев механизма без учета сил, обусловливающих это движение*, состоит в основном в решении трех следующих задач:

а) определение перемещений звеньев и траекторий, описываемых точками звеньев,

б) определение скоростей отдельных точек звеньев и угловых скоростей звеньев,

в) определение ускорений отдельных точек звеньев и угловых ускорений звеньев.

Если механизм имеет одну степень подвижности, то перемещения, скорости и ускорения ведомых звеньев и точек механизма являются функциями перемещений, скоростей и ускорений одного из звеньев механизма, принятого за ведущее. Если механизм обладает несколькими степенями подвижности, то перемещения, скорости и ускорения ведомых звеньев и точек механизма суть функции соответствующих перемещений, скоростей и ускорений звеньев механизма, принятых за ведущие. При этом число ведущих звеньев должно быть равно числу степеней подвижности механизма или, что то же, числу обобщенных координат механизма.

2°. Рассмотрим прежде всего вопрос о том, в какой форме могут быть заданы законы движения ведущих звеньев. В дальнейшем эти законы мы будем называть *функциями перемещений, скоростей или ускорений.*

Функция перемещений может быть задана, например, в аналитической форме в виде соответствующей функции, связывающей перемещение ведущего звена со временем.

Если ведущее звено входит во вращательную пару со стойкой (рис. 4.7, *а*), то задается функция $\varphi = \varphi(t)$, где φ — угол поворота ведущего звена относительно неподвижной системы координат xOy, связанной со стойкой, а t — время. Если ведущее звено входит в поступательную пару (рис. 4.7, *б*), то задается функция $s = s(t)$, где s — перемещение произвольно выбранной точки A ведущего звена относительно неподвижной системы координат xOy, связанной со стойкой, а t — время.

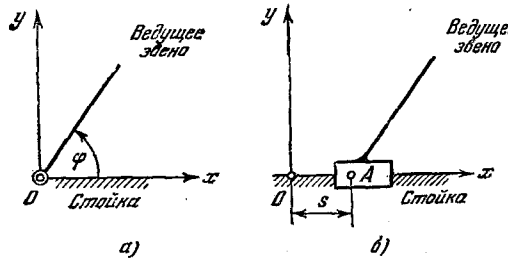


Рис. 4.7. Схемы ведущих звеньев: *а*) звено, входящее во вращательную пару со стойкой; *б*) звено, входящее в поступательную пару со стойкой.

Функции $\varphi = \varphi(t)$ и $s = s(t)$ могут быть также заданы графически в виде кривых (рис. 4.8), где по осям ординат отложены углы поворота φ (рис. 4.8, *а*) или перемещения s (рис. 4.8, *б*) в некоторых выбранных масштабах μ_φ и μ_s, а по осям абсцисс — время t в выбранном масштабе μ_t.

Пользуясь графиками (рис. 4.8), легко определять численное значение углов поворота φ или перемещений s за любой выбранный отрезок времени. Например, если взять на кривой (рис. 4.8, *а*)

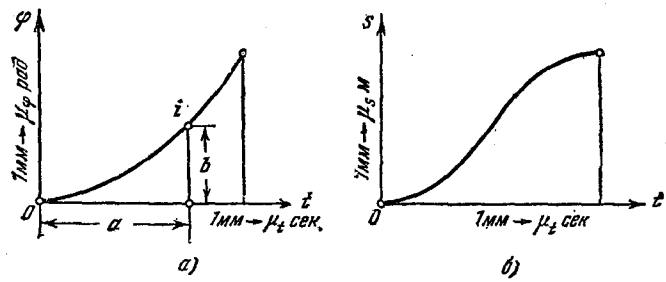


Рис. 4.8. Графики заданных перемещений ведущего звена: *а*) график угловых перемещений; *б*) график линейных перемещений.

некоторую точку i, то угол поворота φ_i ведущего звена от начального положения, когда φ равно $\varphi_0 = 0$, определим так:

$$\varphi_i - \varphi_0 = \mu_\varphi \cdot b,$$

где b — отрезок, взятый в *мм*.

Соответственно, время t_i, за которое ведущее звено повернулось на угол φ_i, равно

$$t_i - t_0 = \mu_t a,$$

где a — отрезок, взятый в *мм*.

3°. В некоторых инженерных задачах закон движения ведущего звена может быть задан в виде функций скоростей $\omega = \omega(t)$ или $v = v(t)$.

Тогда переход от функции скоростей к функциям перемещений может быть осуществлен путем вычисления интегралов

$$\varphi_i - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t_i} \omega(t)\, dt, \qquad s_i - s_0 = \int_{t_0}^{t_i} v(t)\, dt, \tag{4.1}$$

где φ_0, s_0 и t_0 — угол, перемещение и время, соответствующие начальному положению ведущего звена.

Если наконец, закон движения ведущего звена задан в виде функций ускорений $\varepsilon = \varepsilon(t)$ или $a = a(t)$, то переход к функциям скоростей осуществляется путем вычисления интегралов

$$\omega_i - \omega_0 = \int_{t_0}^{t_i} \varepsilon(t)\, dt, \qquad v_i - v_0 = \int_{t_0}^{t_i} a(t)\, dt, \tag{4.2}$$

где ω_0, v_0 и t_0 — угловая скорость, линейная скорость и время, соответствующие начальному положению ведущего звена.

Определив функции скоростей по равенствам (4.2), можно определить и функции положений, пользуясь равенствами (4.1). Таким образом, определение функций перемещений по заданным функциям скоростей сводится к вычислению одного из интегралов (4.1), а в случае задания функций ускорений — к последовательному вычислению двух интегралов (4.2) и (4.1). Следовательно, если закон движения ведущего звена задан функциями скоростей или ускорений и заданы начальные условия, то мы можем всегда перейти к функциям перемещений.

§ 16. Аналоги скоростей и ускорений

1°. При кинематическом исследовании механизмов скорости и ускорения ведомых звеньев и точек, им принадлежащих, удобно выражать в функции поворота φ или перемещения s ведущего звена.

Так, если угол поворота φ_k какого-либо звена номер k задан в виде функции $\varphi_k = \varphi_k(\varphi)$, то угловая скорость ω_k этого звена может быть представлена так:

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\varphi_k}{d\varphi} = \omega\omega_\varphi = \omega\varphi'_k, \tag{4.3}$$

где ω — угловая скорость ведущего звена, имеющая размерность *рад/сек*, а $\omega_\varphi = \varphi'_k = \frac{d\varphi_k}{d\varphi}$ есть безразмерная угловая скорость звена номер k. Безразмерная угловая скорость ω_φ называется *аналогом угловой скорости* звена номер k.

Таким образом, действительная угловая скорость ω_k равна произведению угловой скорости ω ведущего звена на аналог угловой скорости ω_φ звена номер k.

Дифференцируя уравнение (4.3) по времени t, получим величину углового ускорения ε_k звена номер k. Имеем

$$\varepsilon_k = \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\omega_\varphi) = \omega\frac{d\omega_\varphi}{dt} + \omega_\varphi\frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\omega_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \omega_\varphi\frac{d\omega}{dt} =$$

$$= \omega^2\frac{d\omega_\varphi}{d\varphi} + \varepsilon\omega_\varphi = \omega^2\varepsilon_\varphi + \varepsilon\omega_\varphi = \omega^2\varphi_k'' + \varepsilon\varphi_k'. \qquad (4.4)$$

2°. Аналогично могут быть получены уравнения для скорости и ускорения какой-либо точки m звена номер k. Пусть $\boldsymbol{r}_m$ есть радиус-вектор, определяющий положение точки m. Из теоретической механики известно, что скорость $\boldsymbol{v}_m$ и ускорение $\boldsymbol{a}_m$ точки m могут быть получены последовательным двукратным дифференцированием радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_m$ по времени t. Имеем

$$\boldsymbol{v}_m = \frac{d\boldsymbol{r}_m}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_m}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\boldsymbol{r}_m}{d\varphi} = \omega\boldsymbol{v}_\varphi = \omega\boldsymbol{r}_m', \qquad (4.5)$$

где ω — угловая скорость ведущего звена, имеющая размерность *рад/сек*, а $\boldsymbol{v}_\varphi = \boldsymbol{r}_m' = \frac{d\boldsymbol{r}_m}{d\varphi}$ есть *аналог скорости точки* m, имеющий размерность длины. Таким образом, действительная скорость $\boldsymbol{v}_m$ точки m равна произведению угловой скорости ω ведущего звена на аналог скорости $\boldsymbol{v}_\varphi$ точки m.

Дифференцируя выражение (4.5) по времени t, получим величину ускорения $\boldsymbol{a}_m$ точки m. Ускорение $\boldsymbol{a}_m$ в общем случае состоит из четырех составляющих: *нормального ускорения, направленного вдоль радиуса-вектора* $\boldsymbol{r}_m$ *к его началу, тангенциального ускорения, направленного перпендикулярно к радиусу-вектору* $\boldsymbol{r}_m$, *относительного релятивного ускорения, направленного вдоль радиуса-вектора* $\boldsymbol{r}_m$, и, наконец, *кориолисова ускорения, направленного перпендикулярно к радиусу-вектору* $\boldsymbol{r}_m$.

Пользуясь равенством (4.5), получаем

$$\boldsymbol{a}_m = \frac{d\boldsymbol{v}_m}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\boldsymbol{v}_\varphi) = \omega\frac{d\boldsymbol{v}_\varphi}{dt} + \boldsymbol{v}_\varphi\frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\boldsymbol{v}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \boldsymbol{v}_\varphi\frac{d\omega}{dt} =$$

$$= \omega^2\frac{d\boldsymbol{v}_\varphi}{d\varphi} + \varepsilon\boldsymbol{v}_\varphi = \omega^2\boldsymbol{a}_\varphi + \varepsilon\boldsymbol{v}_\varphi = \omega^2\boldsymbol{r}_m'' + \varepsilon\boldsymbol{r}_m'. \qquad (4.6)$$

В уравнении (4.6) ω и ε — угловые скорость и ускорение ведущего звена. Величины ω^2 и ε, входящие в уравнение (4.6), имеют размерность $сек^{-2}$. Величина аналога скорости $\boldsymbol{v}_\varphi$ имеет размерность длины. Величина $\boldsymbol{a}_\varphi = \boldsymbol{r}_m'' = \frac{d^2\boldsymbol{r}_m}{d\varphi^2}$ есть *аналог ускорения* точки m, имеющая также размерность длины.

Таким образом, скорости и ускорения звеньев и их точек могут быть всегда выражены через соответствующие аналоги скоростей и ускорений и угловые скорость и ускорение ведущего звена механизма. Если закон движения ведущего звена задан в виде функций $s = s(\varphi)$, где s — линейное перемещение ведущего звена, то нахождение аналогов скоростей и ускорений может быть сделано аналогично.

3°. Так как аналоги скоростей и ускорений зависят только от обобщенной координаты и не зависят от времени, то кинематическое исследование механизма можно вести чисто геометрическим путем. Для этого, если ведущее звено входит во вращательную пару, поворачивают его на углы φ и определяют перемещения всех остальных звеньев. Далее, если требуется определить скорости и ускорения звена номер k и его точки m, то находят аналоги скоростей и ускорений ω_φ, ε_φ, v_φ и a_φ и подставляют их значения в уравнения (4.3), (4.4), (4.5), (4.6).

Если ведущее звено вращается с постоянной угловой скоростью ω, то его угловое ускорение ε равно нулю, и мы получаем следующие формулы для скоростей и ускорений звена номер k и его точки m:

$$\omega_k^{\text{п}} = \omega\omega_\varphi, \tag{4.7}$$

$$\varepsilon_k^{\text{п}} = \omega^2\varepsilon_\varphi, \tag{4.8}$$

$$v_m^{\text{п}} = \omega v_\varphi, \tag{4.9}$$

$$a_m^{\text{п}} = \omega^2 a_\varphi. \tag{4.10}$$

Движение ведущего звена механизма с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ и $\varepsilon = 0$ носит название *перманентного* или *основного движения механизма.*

Если в равенствах (4.3) — (4.6) принять угловую скорость $\omega = 0$, то скорости ω_k и v_m будут также равны нулю, а равенства (4.4) и (4.6) примут вид

$$\varepsilon_k^{\text{н}} = \varepsilon\omega_\varphi, \tag{4.11}$$

$$a_m^{\text{н}} = \varepsilon v_\varphi. \tag{4.12}$$

Движение ведущего звена, описываемого равенствами (4.11) и (4.12), носит название *начального движения.*

В начальном движении механизма угловая скорость ω ведущего звена равна нулю, и поэтому его нормальные, относительные и кориолисовы ускорения также равны нулю. Таким образом, в начальном движении звенья и точки механизма имеют только угловые и тангенциальные ускорения, линии действия которых совпадают с линиями действия скоростей соответствующих точек звеньев.

Таким образом, истинное движение каждого механизма может рассматриваться, в общем случае, состоящим из перманентного и

начального движений, и равенства (4.3) — (4.6) можно представить так:

$$\omega_k = \omega_k^{\text{п}}, \tag{4.13}$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{\text{п}} + \varepsilon_k^{\text{н}}, \tag{4.14}$$

$$v_m = v_m^{\text{п}}, \tag{4.15}$$

$$a_m = a_m^{\text{п}} + a_m^{\text{н}}. \tag{4.16}$$

Производя исследование механизма в перманентном движении и пользуясь полученными величинами аналогов ω_φ и v_φ, с помощью соотношений (4.11) и (4.12) можно определить значения $\varepsilon_k^{\text{н}}$ и $a_m^{\text{н}}$ и, подставив их в равенства (4.3) — (4.6), определить истинные скорости и ускорения звеньев механизма.

Рассмотрение движения механизма как состоящего из перманентного и начального движений было предложено Н. Е. Жуковским.

Возможность раздельного рассмотрения перманентного и начального движений механизма имеет важное значение при исследовании кинематики и динамики механизмов. Оно позволяет при кинематическом исследовании определять положения, скорости и ускорения звеньев в функции обобщенной координаты механизма, а не в функции времени. Истинный закон изменения обобщенной координаты от времени зависит от сил, действующих и возникающих в механизме, и может быть определен только после динамического исследования механизма. Определив в результате этого исследования закон изменения обобщенной координаты, например угла поворота φ ведущего звена от времени t, т. е. $\varphi = \varphi(t)$, мы определим угловую скорость этого звена $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t)$ и его угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}(t)$. После этого, пользуясь формулами (4.3) и (4.4) и определенными при кинематическом исследовании аналогами скоростей и ускорений, найдем истинные скорости и ускорения всех звеньев механизма.

§ 17. Определение положений звеньев групп и построение траекторий, описываемых точками звеньев механизмов

1°. Для решения задачи о положениях звеньев механизма (плана механизма) должны быть заданы кинематическая схема механизма и функция перемещений ведущего звена для механизма с одной степенью подвижности, или функции перемещений ведущих звеньев для механизмов с несколькими степенями подвижности.

Для определения положений звеньев механизма строят его кинематическую схему, которая при графическом исследовании

должна быть построена в заранее выбранном масштабе. Условимся масштабный коэффициент построения схемы механизма обозначать через μ_l, что означает число метров натуры, соответствующее одному миллиметру схемы, т. е. 1 *мм* $\rightarrow \mu_l$ *м*. Таким образом, если необходимо определить истинную длину какого-либо отрезка, изображенного на схеме, надо измерить отрезок в миллиметрах и результаты измерения помножить на выбранную величину μ_l.

Как было показано в § 16, для кинематического исследования механизма достаточно вначале рассмотреть перманентное движение и считать движение ведущего звена происходящим с постоянной скоростью. Поэтому в дальнейшем при кинематическом исследовании механизма мы будем всегда предполагать *движение его ведущего звена равномерным*, а если ведущее звено в действительности движется неравномерно, то после перманентного движения следует рассмотреть дополнительно и начальное движение механизма.

2°. Решение задачи о положениях механизма можно производить либо графическим методом, либо аналитическим.

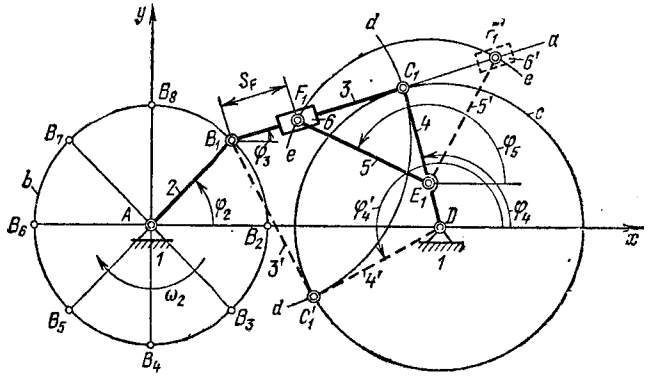


Рис. 4.9. Схема шестизвенного механизма, состоящего из стойки *1*, ведущего звена *2* и двухповодковых групп *3*, *4* и *5*, *6*.

В данном параграфе рассмотрим графический метод решения задачи о планах положений звеньев механизма на примере шестизвенного механизма II класса, показанного на рис. 4.9. Механизм состоит из ведущего звена *2*, вращающегося вокруг неподвижной оси *A*. Угол поворота φ_2 является обобщенной координатой механизма. Звено *3* входит во вращательные пары B_1 и C_1 со звеном *2* и звеном *4*, вращающимися вокруг неподвижной оси *D*. Звено *5* входит во вращательные пары E_1 и F_1 со звеном *4* и ползуном *6*, скользящими вдоль оси B_1a звена *3*.

Если рассматривать перманентное движение механизма с постоянной угловой скоростью, то точка B_1 будет последовательно занимать положения B_1, B_2, B_3, ..., равномерно расположенные на

окружности b, описанной радиусом AB_1 из точки A. При заданных размерах длин звеньев *3* и *4* звено *4* может занимать два положения: DC_1 и DC_1', так как окружность d, проведенная из точки B_1, может пересекать окружность c в двух точках C_1 и C_1'. Таким образом, в общем случае может быть получено два четырехзвенных шарнирных механизма. Механизм с контуром AB_1C_1D и механизм с контуром $AB_1C_1'D$. Нетрудно видеть, что при обходе этих контуров для первого механизма мы получаем порядок букв AB_1C_1DA, т. е. обход контура как бы проходит по часовой стрелке, а для второго механизма мы получаем порядок букв $AB_1C_1'DA$, т. е. обход контура происходит против часовой стрелки. Это свойство возможности получения при одних и тех же размерах звеньев двух разных механизмов носит название *условий сборки*. Полученные два механизма различны по своим кинематическим свойствам. Так, для механизма AB_1C_1DA звенья *2* и *4* имеют угловые скорости одного и того же знака, а для механизма $AB_1C_1'DA$ эти знаки противоположны. Следовательно, в зависимости от конкретной инженерной задачи надо останавливаться на какой-либо одной конфигурации механизма. В нашем примере мы рассматриваем механизм с контуром AB_1C_1DA. Тогда из двух углов φ_4 и φ_4', определяющих положение звена *4*, мы будем рассматривать угол φ_4, т. е. определять передаточную функцию

$$\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_2). \tag{4.17}$$

Соответственно для звена *3* мы будем определять передаточную функцию

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2). \tag{4.18}$$

Аналогично при присоединении двухповодковой группы, состоящей из звеньев *5* и *6*, мы получим два возможных положения ползунов *6* и *6'*, так как окружности e радиуса E_1F_1 пересекают прямую B_1a в двух точках F_1 и F_1'. Выберем положение, в котором порядок букв при обходе контура по часовой стрелке будет $E_1F_1C_1E_1$. Тогда передаточная функция звена *5* будет

$$\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_2). \tag{4.19}$$

Передаточная функция для точки F_1 ползуна *6* будет соответственно

$$s_F = s_F(\varphi_2). \tag{4.20}$$

3°. Таким образом, порядок построения плана положений механизма будет следующим.

Наносим сначала на чертеже (рис. 4.9) неподвижные оси A и D. Далее радиусом, равным длине звена AB, проводим окружность b, представляющую собой геометрическое место точек B. На этой окружности наносим положения B_1, B_2, B_3, ... точки B, для кото-

рых требуется определить положения всех звеньев механизма. На рис. 4.9 необходимые построения произведены для положения кривошипа AB, определяемого точкой B_1. Для определения положения точки C из точки D проводим окружность c, представляющую собой первое геометрическое место точек C, и из точки B_1 радиусом B_1C проводим окружность d, являющуюся вторым геометрическим местом точек C. Точка C_1 пересечения окружностей c и d и определит положение точки C_1. После построения линии C_1D звена *4* легко определяется и положение точки E. Следовательно, для второй двухповодковой группы EF будут известны положения крайних кинематических пар — оси E и оси B_1a направляющей.

Остается определить положение оси F_1, что может быть сделано, если из точки E провести окружность e. Точка пересечения окружности e с прямой B_1a и определит положение точки F_1.

Таким образом, задача о построении планов положений звеньев механизма II класса сводится к последовательному нахождению положений звеньев двухповодковых групп, у которых известными являются положения крайних элементов кинематических пар. Рассмотрим эту задачу для группы каждого вида в отдельности.

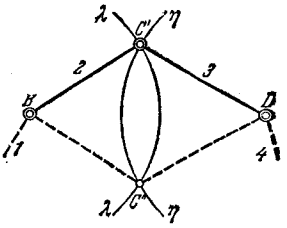


Рис. 4.10. Схема двухповодковой группы первого вида.

4°. Пусть задана группа II класса с тремя вращательными парами B, C и D (группа *первого* вида). По предыдущему положения точек B и D известны, ибо звенья *2* и *3* концевыми элементами звеньев B и D входят в кинематические пары со звеньями *1* и *4* основного механизма, и, следовательно, задача сводится к определению положения точки C (рис. 4.10). Для определения положения точки C поступаем следующим образом. Разъединяем шарнир в точке C и рассматриваем возможное движение этой точки. Так как точка B занимает вполне определенное положение, то точка C, находящаяся на постоянном расстоянии BC от точки B, может описать только окружность $\lambda - \lambda$ радиуса BC. Точно так же вследствие постоянства расстояния DC точка C может описать вокруг точки D только окружность $\eta - \eta$ радиуса DC. Таким образом, геометрическим местом возможных положений точки C являются две дуги окружностей $\lambda - \lambda$ и $\eta - \eta$. Точки пересечения этих окружностей и дадут истинное положение точки C. Так как две окружности в общем случае пересекаются в двух точках, то мы получаем две точки C' и C''. Выбор точки, дающей истинное положение, можно сделать, пользуясь условием последовательности положений точки C (непрерывности траектории) при движении всего механизма. Если окружности $\lambda - \lambda$ и $\eta - \eta$ не будут иметь точек пересечения, то это укажет, что при заданных размерах звеньев группа не может быть присоединена в данном положении

к основному, а если она все же будет присоединена в другом положении, то механизм с такой группой не сможет занять рассматриваемого положения.

Построения планов положений групп II класса с поступательными парами решаются аналогичными приемами с помощью циркуля и линейки, при этом пользуются методом геометрических мест, которыми являются окружности $\lambda - \lambda$ и $\eta - \eta$.

5°. Для нахождения положений плоских механизмов III класса можно также пользоваться методом геометрических мест. В отличие от механизмов II класса, в механизмах III класса этими геометрическими местами могут быть не только окружности или прямые, но и кривые высших порядков.

Пусть, например, дана трехповодковая группа III класса *BCDEFG* (рис. 4.11). Положения точек *B*, *E* и *G* заданы, так как

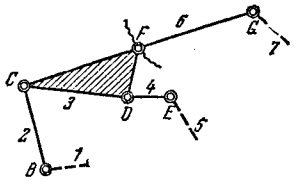


Рис. 4.11. Схема трехповодковой группы.

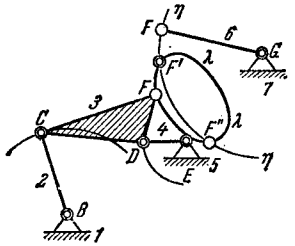


Рис. 4.12. К определению положений звеньев трехповодковой группы.

группа концевыми элементами *B*, *E* и *G* входит в кинематические пары со звеньями *1*, *5* и *7* основного механизма. Требуется определить положение остальных точек. Как и для механизмов II класса, разъединяем один из шарниров базисного звена *3*, например шарнир в точке *F*. Тогда системы звеньев *BCDE* и *GF* приобретают каждая одну степень подвижности, и обе эти системы, если сделать неподвижными звенья *1*, *5* и *7*, как бы превращаются в самостоятельные механизмы с одной степенью подвижности. Система *BCDE* (рис. 4.12) становится механизмом II класса, а система *GF* — механизмом I класса. Строим траекторию $\lambda - \lambda$ точки *F*, принадлежащей шатуну *CD* четырехзвенного шарнирного механизма *BCDE*, которая носит название *шатунной кривой*. Строим далее траекторию $\eta - \eta$ точки *F* звена *GF*. Это — дуга окружности радиуса *GF*. Таким образом, геометрическими местами возможных точек *F* являются кривая $\lambda - \lambda$ и дуга окружности $\eta - \eta$. Точки пересечения F' и F'' этих двух геометрических мест и дадут возможные положения точки *F*. Так как шатунные кривые являются кривыми высших порядков, то в общем случае мы можем получить несколько точек пересечения этих кривых с окружностью. Очевидно, для

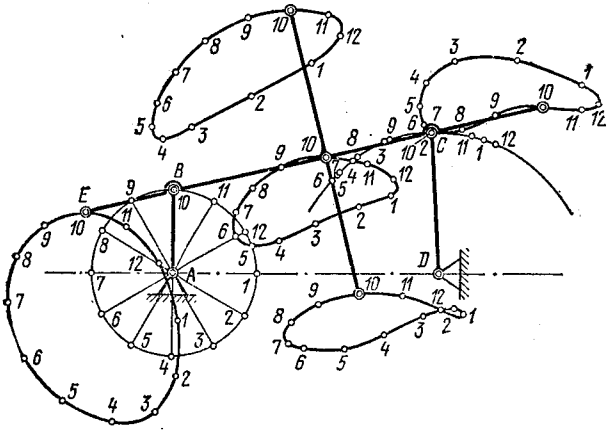


Рис. 4.13. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с шатунными кривыми нескольких точек.

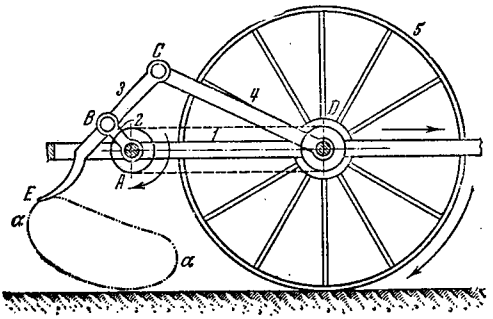


Рис. 4.14. Механизм сеноворошилки.
1 — шатун; *2* — кривошип; *3* — звено, точка *E* которого описывает траекторию $\alpha - \alpha$; *4* — коромысло; *5* — колесо.

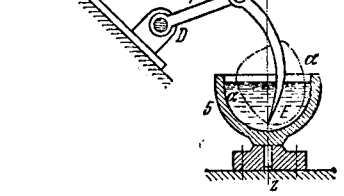


Рис. 4.15. Тестомесильная машина,
1 — стойка; *2* — кривошип; *3* — шатун, точка лапы которого описывает траекторию $\alpha - \alpha$; *4* — коромысло; *5* — дежа.

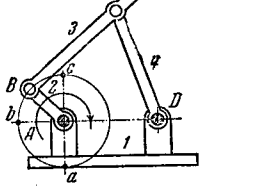


Рис. 4.16. Приближенно-направляющий шарнирный механизм Чебышева.
1 — стойка; *2* — кривошип; *3* — шатун, точка *E* которого описывает траекторию $\alpha - \alpha$; *4* — коромысло.

выбора среди этих точек истинной надо пользоваться условием последовательности положений точки F при движении группы. Определив истинное положение точки F, можно построить истинные положения всех остальных звеньев механизма. Методом разъединения шарнира можно определить положения всех точек любого механизма III класса.

6°. Если найдены положения звеньев механизма для достаточно большого числа заданных положений ведущего звена, то можно построить траектории, описываемые отдельными точками механизма. Пусть требуется построить траекторию точки E механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 4.13). Разбиваем траекторию точки B на двенадцать равных частей и находим соответствующие положения точки C. Соединяя в каждом положении точки B и C, находим на звене BC положение точки E. Обводя последовательные положения точки E плавной кривой, получаем траекторию точки E.

Кроме траектории точки E, на рис. 4.13 показаны траектории, описываемые различными точками, жестко скрепленными с шатуном BC.

Как было указано выше, траектории точек, принадлежащих шатуну, носят название *шатунных кривых*.

Шатунными кривыми в настоящее время широко пользуются в технике для воспроизведения движения рабочих органов различных машин и механизмов. Например, в механизме сеноворошилки (рис. 4.14), в тестомесильной машине (рис. 4.15) и т. д. Широкое применение шатунные кривые нашли в механизмах П. Л. Чебышева (рис. 4.16). Шатунные кривые шарнирного четырехзвенника общего вида (рис. 4.13) являются алгебраическими кривыми шестого порядка. Шатунные кривые кривошипно-ползунного механизма — алгебраические кривые четвертого порядка.

§ 18. Определение скоростей и ускорений групп II класса методом планов

1°. Определение скоростей и ускорений групп II класса может быть проведено методом планов скоростей и ускорений. Так как механизмы II класса образованы последовательным присоединением групп, то изложение метода планов можно вести применительно к различным видам групп II класса. Аналогично задаче о планах механизма известными будут скорости и ускорения тех элементов звеньев, входящих в кинематические пары, которыми группа присоединяется к основному механизму. Определению будут подлежать скорости и ускорения отдельных точек группы и угловые скорости и ускорения звеньев

2°. Рассмотрим группу II класса первого вида, которая образована двумя звеньями, входящими в три кинематических пары (рис. 4.17).

Аналогично задаче о положениях групп известными являются векторы скоростей точек B и D концевых элементов группы, которыми звенья *2* и *3* входят в кинематические пары со звеньями *1* и *4* основного механизма, т. е. скорости v_B и v_D. Требуется определить вектор v_C скорости точки C.

Движение точки C может быть всегда разложено на переносно-поступательное со скоростью точки B или точки D и относительно-вращательное соответственно вокруг точки B или точки D. Тогда

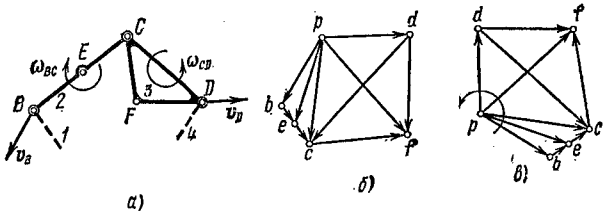


Рис. 4.17. Двухповодковая группа первого вида: *а*) кинематическая схема; *б*) план скоростей; *в*) повернутый план скоростей.

векторные уравнения для скорости v_C точки C будут иметь следующий вид:

$$v_C = v_B + v_{CB}, \qquad v_C = v_D + v_{CD}, \tag{4.21}$$

где v_C, v_B и v_D суть соответственно векторы абсолютных скоростей точек C, B и D, v_{CB} и v_{CD} — векторы скоростей точки C относительно точек B и D.

Из уравнений (4.21) получаем

$$v_B + v_{CB} = v_D + v_{CD}. \tag{4.22}$$

В уравнении (4.21) известны по величине и направлению векторы скоростей v_B и v_D. Векторы же скоростей v_{CB} и v_{CD} известны только по направлению. Вектор v_{CB} скорости точки C относительно точки B направлен перпендикулярно к направлению BC, а вектор v_{CD} скорости точки C относительно D направлен перпендикулярно к направлению DC.

Таким образом, в уравнении (4.22) неизвестны только величины векторов скоростей v_{CB} и v_{CD}, которые могут быть определены построением плана скоростей (рис. 4.17).

Выбираем в качестве полюса плана скоростей точку p, отк
дываем на нее отрезки (pb) и (pd), представляющие собой ск
v_B и v_D точек B и D в каком-либо произвольно выбранном
μ_v, дающем соответственно в 1 *мм* → μ_v *м/сек*. При
чины масштаба μ_v руководствуются удобством вы
строений векторов скоростей.

Для определения истинных величин ско
отрезки (pb) и (pd), измеренные в ми

выбранный масштаб μ_v, показывающий, сколько единиц скорости приходится на 1 *мм* соответствующего отрезка. Получим

$$v_B = \mu_v (pb), \qquad v_D = \mu_v (pd).$$

Отложив отрезки (pb) и (pd), проведем через точки b и d прямые, имеющие направление векторов относительных скоростей v_{CB} и v_{CD}, перпендикулярные к направлениям BC и DC (рис. 4.17, *а*). Точка C определит конец вектора v_C абсолютной скорости точки C группы. Скорость v_C согласно уравнениям (4.21) выражается отрезком (pc), соединяющим точку p с полученной точкой c. Величина этой скорости будет равна

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Отрезки (bc) и (dc) представляют собой относительные скорости v_{CB} и v_{CD} в том же масштабе, т. е.

$$v_{CB} = \mu_v (bc), \qquad v_{CD} = \mu_v (dc).$$

Стрелки у векторов на рис. 4.17, *б* должны быть поставлены так чтобы удовлетворялись уравнения (4.21).

Треугольники *pbc* и *pdc* называются *планами скоростей* звеньев *2* и *3*, а фигура *pbcdp* называется *планом скоростей группы BCD*. Точка *p* плана называется *началом* или *полюсом плана скоростей*.

Для удобства графического построения плана скоростей всех звеньев группы иногда план условно повертывают в одном и том же направлении на угол в 90°. Тогда векторы относительных скоростей v_{CB} и v_{CD} будут параллельны направлениям BC и DC. Такой план скоростей называется *повернутым планом скоростей*. На рис. 4.17, *в* изображен повернутый план скоростей, причем направления всех скоростей повернуты на угол 90° против движения часовой стрелки.

Пользуясь планом ростей, можно определить угловые скорости ω_2 и ω_3 [illegible]. Величины этих скоростей определяются из равен[illegible]

$$\frac{v_{CB}}{l_2}, \quad |\omega_3| = \frac{v_{CD}}{l_3}, \tag{4.23}$$

[illegible]C звеньев *2* и *3*.

[illegible] в некотором произвольно выбран[illegible]цем собой число метров натуры, [illegible]а схеме. Подставляя в уравнения [illegible]D, выраженные в масштабе μ_v [illegible]на скоростей, и длины звеньев [illegible]μ_l, получаем

$$|\omega_3| = \frac{\mu_v (dc)}{\mu_l (DC)}.$$

[illegible]ла-
[illegible]орости
[illegible]масштабе
[illegible]ыборе вели-
[illegible]числений и по-
[illegible]ростей B и D на
[illegible]точек умножим
[illegible]иллиметрах,

Отношение масштабов μ_v/μ_l имеет размерность $сек^{-1}$. Направления угловых скоростей ω_2 и ω_3 могут быть определены следующим образом. Мысленно прикладывая векторы $\boldsymbol{v}_{CB}$ и $\boldsymbol{v}_{CD}$ к точке C, видим, что вращение звена *2* происходит в направлении вращения часовой стрелки, а вращение звена *3* — в направлении, обратном вращению часовой стрелки (рис. 4.17, *а*).

Для определения скорости какой-либо точки E, лежащей на оси звена BC (рис. 4.17, *а*), имеем векторное уравнение

$$\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{EB}. \tag{4.24}$$

Согласно этому уравнению из точки b плана скоростей проводим направление вектора $\boldsymbol{v}_{EB}$ относительной скорости точки E около точки B. Так как относительные скорости любых точек, лежащих на оси BC звена *2*, перпендикулярны к оси BC, то очевидно, что направление вектора скорости $\boldsymbol{v}_{EB}$ совпадает с направлением вектора скорости $\boldsymbol{v}_{CB}$, т. е. отрезок плана скоростей (be), определяющий скорость $\boldsymbol{v}_{EB}$, совпадает по направлению с отрезком (bc). Величина отрезка, определяющего скорость v_{EB}, найдется из следующих соображений.

Имеем

$$v_{CB} = \omega_2 l_{BC} \tag{4.25}$$

и

$$v_{EB} = \omega_2 l_{BE}. \tag{4.26}$$

Разделив почленно равенство (4.26) на равенство (4.25), получаем

$$\frac{v_{EB}}{v_{CB}} = \frac{l_{BE}}{l_{BC}}. \tag{4.27}$$

Из уравнения (4.27) следует, что скорости точек E и C относительно точки B прямо пропорциональны расстояниям этих точек до точки B. Подставляя вместо скоростей соответствующие отрезки из плана скоростей, получаем

$$\frac{\mu_v (be)}{\mu_v (bc)} = \frac{l_{BE}}{l_{BC}},$$

откуда

$$(be) = (bc)\frac{l_{BE}}{l_{BC}}. \tag{4.28}$$

Из уравнения (4.28) следует: чтобы определить отрезок плана скоростей, изображающий относительную скорость v_{EB}, необходимо отрезок (bc), изображающий на плане скоростей относительную скорость v_{BC}, разделить в том же отношении, в каком точка E делит звено *2* на схеме группы (рис. 4.17, *а*).

Отложив полученный отрезок (be) на плане скоростей (рис. 4.17, *б*) и соединив полученную точку с началом плана p,

получаем отрезок (pe), изображающий в масштабе μ_v полную скорость точки v_E, т. е.

$$v_E = \mu_v (pe).$$

Для определения скорости какой-либо произвольной точки F звена 3 (рис. 4.17, *а*) составляем следующие векторные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} v_F &= v_D + v_{FD}, \\ v_F &= v_C + v_{FC} \end{aligned}\right\} \qquad (4.29)$$

и из уравнений (4.29) получаем

$$v_D + v_{FD} = v_C + v_{FC}.$$

Векторы v_D и v_C скоростей точек D и C нам известны по величине и направлению, а векторы скоростей v_{FD} и v_{FC} известны только по направлению. Вектор скорости v_{FD} перпендикулярен к отрезку (FD), а вектор скорости v_{FC} перпендикулярен к отрезку (FC). Из точки d плана скоростей проводим прямую, перпендикулярную к направлению FD, а через точку c — прямую, перпендикулярную к направлению FC. Точка пересечения f проведенных направлений (рис. 4.17, *б*) и определит конец вектора v_F полной скорости точки F. Отрезок плана, изображающий скорость v_F, получим, соединив начало плана p с точкой f. Получаем

$$v_F = \mu_v (pf).$$

Рассматривая треугольник cfd плана скоростей (рис. 4.17, *б*) и треугольник CFD на звене (рис. 4.17, *б*), можно видеть, что отрезки (cf), (fd) и (dc) соответственно перпендикулярны к отрезкам (CF), (FD) и (DC), т. е.

$$(cf) \perp (CF); \quad (fd) \perp (FD); \quad (dc) \perp (DC).$$

Таким образом, треугольник cfd на плане скоростей, изображающий относительные скорости v_{FC}, v_{FD} и v_{CD}, подобен треугольнику CFD группы на ее схеме и повернут относительно него на угол в 90°. Это свойство подобия фигуры относительных скоростей на плане скоростей фигуре звена на схеме механизма позволяет определять скорости любых точек этого звена не из уравнений, а графически, построением подобных фигур. Отметим, что проверкой правильности графического построения подобных фигур на плане является порядок букв на схеме и на плане скоростей. Так, если порядок букв на схеме при обходе контура звена по часовой стрелке будет C, D и F, то на плане скоростей этот порядок должен сохраниться, т. е. буквы должны идти в том же порядке: c, d и f.

Векторы всех полных скоростей точек звеньев имеют своим началом точку p плана скоростей, а векторы всех относительных скоростей соединяют собой концы векторов полных скоростей.

При построении подобных фигур на повернутых планах скоростей стороны подобных фигур будут взаимно параллельны (рис. 4.17, *в*).

3°. При определении ускорений группы II класса первого вида известны векторы $\boldsymbol{a}_B$ и $\boldsymbol{a}_D$ полных ускорений точек B и D (рис. 4.18,*а*). Кроме того, план скоростей группы предполагается построенным, и, следовательно, можно считать известными скорости всех звеньев группы. Для определения ускорения $\boldsymbol{a}_C$ точки C, как и для определения скорости $\boldsymbol{v}_C$ точки C, рассматриваем ее движение как сложное, состоящее из переносного поступательного со скоростями и ускорениями точек B и D и относительного вращательного вокруг этих точек. Тогда векторные уравнения для определения ускорения $\boldsymbol{a}_C$ точки C будут следующими:

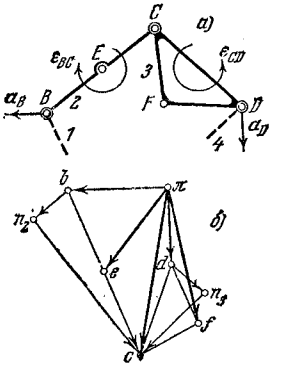


Рис. 4.18. Двухповодковая группа первого вида: *а*) кинематическая схема; *б*) план ускорений.

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB},$$
$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^n_{CD} + \boldsymbol{a}^t_{CD}, \qquad (4.30)$$

где $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ — нормальные ускорения в относительном движении, а $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^t_{CD}$ — тенгенциальные ускорения в том же движении. Решая совместно уравнения (4.30), получаем

$$\boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB} = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^n_{CD} + \boldsymbol{a}^t_{CD}. \qquad (4.31)$$

В уравнении (4.31) известны по величине и направлению векторы $\boldsymbol{a}_B$ и $\boldsymbol{a}_D$ точек B и D. Векторы нормальных ускорений $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ в относительном движении могут быть определены. Величины этих ускорений равны

$$a^n_{CB} = \frac{v^2_{CB}}{l_2} = \omega_2^2 l_2, \qquad a^n_{CD} = \frac{v^2_{CD}}{l_3} = \omega_3^2 l_3.$$

Скорости v_{CB} и v_{CD} и угловые скорости ω_2 и ω_3 могут быть определены по построенному плану скоростей, длины l_2 и l_3 звеньев *2* и *3* определяются по схеме. Подставляя в полученные равенства длины из плана скоростей в масштабе μ_v и со схемы в масштабе μ_l, получаем

$$a^n_{CB} = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn_2), \quad a^n_{CD} = \frac{\mu_v^2 (dc)^2}{\mu_l (DC)} = \mu_a (dn_3), \qquad (4.32)$$

где отрезки (bc) и (dc) должны быть взяты из плана скоростей, а μ_a есть масштаб плана ускорений, дающий соответственно $1\ мм \rightarrow \mu_a м/сек^2$.

Так же как и для скоростей, при выборе масштаба μ_a плана ускорений руководствуются удобством вычислений и графических

построений. Таким образом, если необходимо определить истинную величину какого-либо ускорения, надо соответствующий отрезок в миллиметрах, взятый из плана ускорений, умножить на выбранный масштаб μ_a, показывающий, сколько единиц ускорения приходится на 1 *мм* отложенного отрезка.

В ектор ускорения $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ направлен от точки C к точке B параллельно направлению BC, а вектор ускорения $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ направлен от точки C к точке D параллельно направлению CD. Таким образом, нормальные ускорения $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ известны по величине и направлению. Векторы $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^t_{CD}$ известны только по направлению. Первый направлен перпендикулярно к направлению BC, второй — перпендикулярно к направлению CD. Таким образом, в уравнении (4.31) неизвестными остаются только величины векторов ускорений $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^t_{CD}$, которые могут быть определены следующим графическим построением.

Выбираем в качестве полюса плана ускорений точку π (рис. 4.18, *б*) и откладываем отрезки (πb) и (πd), представляющие в масштабе μ_a ускорения точек B и D. Далее, пользуясь уравнениями (4.32), вычисляем величины ускорений $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ и откладываем из точек b и d отрезки (bn_2) и (dn_3), представляющие в масштабе μ_a эти ускорения. Из полученных точек n_2 и n_3 проводим прямые в направлениях векторов тангенциальных ускорений $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^t_{CD}$ перпендикулярно к направлениям BC и CD. Точка пересечения этих прямых и даст конец вектора $\boldsymbol{a}_C$ полного ускорения точки C, т. е.

$$a_C = \mu_a (\pi c).$$

Построенные фигуры $\pi b n_2 c$ и $\pi d n_3 c$ носят название *планов ускорений звеньев 2* и *3*, а вся фигура $\pi b n_2 c n_3 d \pi$ называется *планом ускорений группы BCD*. Точка π называется *началом* или *полюсом плана ускорений*.

Соединив точки b и d плана с точкой c, получим векторы полных относительных ускорений $\boldsymbol{a}_{CB}$ и $\boldsymbol{a}_{CD}$. Имеем

$$a_{CB} = \mu_a (bc), \qquad a_{CD} = \mu_a (dc).$$

Модули угловых ускорений ε_2 и ε_3 звеньев BC и CD будут равны

$$|\varepsilon_2| = \frac{a^t_{CB}}{l_2}, \qquad |\varepsilon_3| = \frac{a^t_{CD}}{l_3}. \tag{4.33}$$

Подставляя в равенство (4.33) соответствующие отрезки, взятые из плана ускорений и со схемы, получаем

$$|\varepsilon_2| = \frac{\mu_a (n_2 c)}{\mu_l (BC)}, \qquad |\varepsilon_3| = \frac{\mu_a (n_3 c)}{\mu_l (DC)}.$$

Отношение масштаба μ_a/μ_l имеет размерность *сек*$^{-2}$. Направления угловых ускорений ε_2 и ε_3 могут быть определены следующим образом. Перенося мысленно векторы a^t_{CB} и a^t_{CD} в точку C (рис. 4.18, *а*), видим, что направление ε_2 совпадает с направлением вращения часовой стрелки, а направление ε_3 противоположно направлению вращения часовой стрелки.

Для определения ускорения какой-либо точки E, лежащей на оси звена BC (рис. 4.18, *а*), воспользуемся уравнением

$$a_E = a_B + a_{EB}. \tag{4.34}$$

Как известно из теоретической механики, при вращательном плоском движении звена около некоторой точки ускорения всех точек звена пропорциональны радиусам-векторам, соединяющим исследуемые точки с центром вращения, а направления этих ускорений образуют с этими радиусами-векторами постоянный угол μ, определяемый из уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

где ε есть угловое ускорение звена, а ω — угловая скорость звена.

Так как относительное движение звена *2* около точки B есть движение вращательное, то очевидно, что относительные ускорения всех точек звена *2* будут образовывать с радиусами-векторами, выходящими из точки B, постоянный угол μ, удовлетворяющий соотношению

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon_{BC}}{\omega^2_{BC}}. \tag{4.35}$$

Следовательно, направление вектора a_{EB} должно совпадать на плане ускорений с направлением вектора a_{CB}, т. е. с направлением отрезка (bc) (рис. 4.18, *б*). Величина же отрезка (be), изображающего на плане ускорений ускорение a_{EB}, определится из условия пропорциональности ускорений радиусам-векторам, т. е.

$$\frac{a_{EB}}{a_{CB}} = \frac{l_{EB}}{l_{CB}}. \tag{4.36}$$

Подставляя в пропорцию (4.36) соответствующие отрезки плана ускорений, получаем

$$\frac{\mu_a (be)}{\mu_a (bc)} = \frac{l_{EB}}{l_{CB}},$$

откуда

$$(be) = (bc)\frac{l_{EB}}{l_{CB}}. \tag{4.37}$$

Из формулы (4.37) следует: чтобы определить отрезок плана ускорений, изображающий относительное ускорение a_{EB}, необхо-

димо отрезок плана, изображающий относительное ускорение a_{CB}, разделить в том же отношении, в каком точка E делит звено 2 схемы. Отложив полученный отрезок (be) на плане и соединив точку e с точкой π, получим отрезок (πe), изображающий в масштабе μ_a полное ускорение точки E, т. е.

$$a_E = \mu_a (\pi e).$$

Для определения ускорения *произвольной* точки F, жестко связанной со звеном 3 (рис. 4.18, *а*), можно также воспользоваться вышеизложенным правилом подобия. Для этого строим на отрезке (cd) плана ускорений треугольник cdf, подобный треугольнику CDF на схеме, но повернутый относительно него на угол μ, определяемый по формуле (4.35). Так как все стороны треугольника cdf повернуты относительно треугольника CDF на постоянный угол μ, то построение подобного треугольника на плане ускорений удобно вести, замеряя углы между соседними сторонами DC, DF и CD, CF. При обходе контура cdf в каком-либо направлении порядок букв должен совпадать с порядком букв контура CDF.

Подобно тому как это имело место в задаче о скоростях, векторы полных ускорений всех точек звеньев имеют своим началом точку π — полюс плана ускорений, а векторы всех относительных ускорений соединяют собой концы векторов полных ускорений.

4°. Рассмотрим, как строятся планы скоростей и ускорений, когда группа содержит поступательную пару, например, в состав группы II класса второго вида (рис. 4.19, *а*) входит одна поступательная пара D и две последовательно расположенные вращательные пары B и C. Звено 2 входит во вращательную пару B со звеном 1, принадлежащим основному механизму, а звено 3 входит в поступательную пару D со звеном 4, принадлежащим основному механизму. Известными являются вектор скорости v_B точки B и векторы скоростей всех точек, принадлежащих звену 4. Следовательно, известна и угловая скорость ω_4 этого звена. Звено 3 скользит по оси $x - x$ направляющей, принадлежащей звену 4. Представим звено 4 в виде плоскости S и обозначим точку плоскости S, совпадающую для заданного положения с точкой C, через C_4. Вектор скорости v_{C_4} точки C_4 как принадлежащей звену 4 известен. Тогда для определения v_C — вектора скорости точки C — необходимо совместно решить два векторных уравнения:

$$v_C = v_B + v_{CB}, \qquad v_C = v_{C_4} + v_{CC_4}, \tag{4.38}$$

откуда

$$v_B + v_{CB} = v_{C_4} + v_{CC_4}. \tag{4.39}$$

В уравнениях (4.38) и (4.39) v_{CC_4} есть вектор скорости точки C относительно звена 4, а v_{CB} — вектор скорости точки C относительно точки B.

В уравнении (4.39) векторы $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_{C_4}$ скоростей точек B и C_4 известны по величине и направлению. Векторы относительных скоростей $\boldsymbol{v}_{CB}$ и $\boldsymbol{v}_{CC_4}$ известны только по направлению. Величины скоростей $\boldsymbol{v}_{CB}$, $\boldsymbol{v}_{CC_4}$ и скорость $\boldsymbol{v}_C$ точки C определяются из построенного плана скоростей. Для этого выбираем (рис. 4.19, *б*) произвольную точку p за полюс плана скоростей и откладываем от нее известные нам векторы $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_{C_4}$ скоростей точек B и C_4 в виде отрезков (pb) и (pc_4), изображающих в выбранном масштабе μ_v эти скорости. Далее через точку b проводим прямую в направлении вектора скорости $\boldsymbol{v}_{CB}$, перпендикулярную к направлению BC (рис. 4.19, *а*), а через точку C_4 проводим прямую в направлении вектора $\boldsymbol{v}_{CC_4}$ относительной скорости, параллельную оси $x-x$ поступательной пары D. Точка пересечения этих направлений и даст конец вектора $\boldsymbol{v}_C$ скорости точки C. Величина скорости $\boldsymbol{v}_C$ определяется по формуле

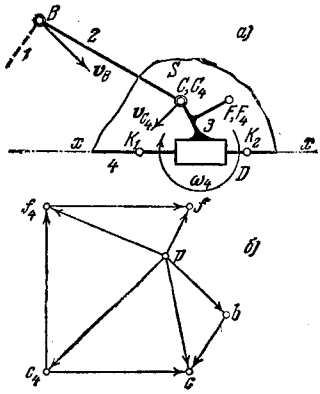


Рис. 4.19. Двухповодковая группа второго вида: *а*) кинематическая схема; *б*) план скоростей.

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Скорости остальных точек звена определяются так же, как в ранее рассмотренном случае. Угловую скорость ω_2 звена *2* можно найти аналогично ранее рассмотренному случаю. Угловая скорость звена *3*, входящего со звеном *4* в поступательную пару, имеет ту же угловую скорость ω_4, что и звено *4*, т. е.

$$\omega_3 = \omega_4.$$

Для определения скорости какой-либо произвольной точки F звена *3* (рис. 4.19, *а*) можно воспользоваться векторным уравнением

$$\boldsymbol{v}_F = \boldsymbol{v}_{F_4} + \boldsymbol{v}_{FF_4}. \qquad (4.40)$$

Вектор $\boldsymbol{v}_{F_4}$ скорости точки F_4, принадлежащей плоскости S, т. е. звену *4*, нам известен. Скорость $\boldsymbol{v}_{FF_4}$ равна скорости $\boldsymbol{v}_{CC_4}$, так как звено *3* относительно звена *4* движется поступательно, и, следовательно, скорости всех точек звена *3* относительно звена *4* равны между собой. Поэтому уравнение (4.40) может быть переписано так:

$$\boldsymbol{v}_F = \boldsymbol{v}_{F_4} + \boldsymbol{v}_{CC_4}. \qquad (4.41)$$

Согласно уравнению (4.41) из точки f_4 (рис. 4.19, *б*) откладываем отрезок $(f_4 f)$, равный и параллельный отрезку $(c_4 c)$. Результи-

рующий отрезок (pf) и представляет собой в масштабе μ_v абсолютную скорость точки F, т. е.

$$v_F = \mu_v (pf).$$

5°. Для определения ускорений группы II класса второго вида поступаем аналогично решению задачи о скоростях, т. е. предполагаем, что известны ускорение a_B точки B (рис. 4.20, *а*) и ускорения всех точек звена 4, а следовательно, и его угловое ускорение ε_4. Со звеном 4 скрепляем плоскость S и находим на этой плоскости точку C_4, совпадающую в данном положении с точкой C (рис. 4.20, *а*).

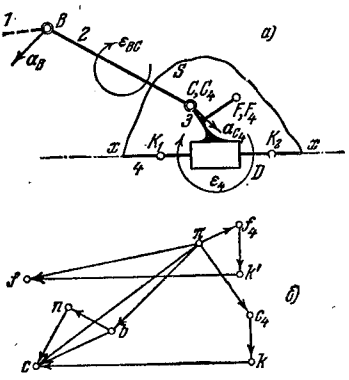


Рис. 4.20. Двухповодковая группа второго вида: *а*) кинематическая схема; *б*) план ускорений.

Известными являются векторы a_B и a_{C_4} ускорений точек B и C_4.

Ускорение точки C определяется из уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_C &= a_B + a^n_{CB} + a^t_{CB}, \\ a_C &= a_{C_4} + a^k_{CC_4} + a^r_{CC_4}. \end{aligned}\right\} \quad (4.42)$$

Относительное (релятивное) ускорение $a^r_{CC_4}$ представляет собой ускорение точки C относительно плоскости S, принадлежащей звену 4. Так как ось $x - x$ направляющей вместе с плоскостью S имеет сложное вращательно-поступательное движение, то, кроме относительного ускорения $a^r_{CC_4}$, во второе уравнение (4.42) должно войти и кориолисово ускорение $a^к_{CC_4}$. Решая совместно уравнения (4.42), получаем

$$a_B + a^n_{CB} + a^t_{CB} = a_{C_4} + a^к_{CC_4} + a^r_{CC_4}. \quad (4.43)$$

В уравнении (4.43) векторы ускорений a_B и a_{C_4} известны. Величина ускорения a^n_{CB} определяется по формуле

$$a^n_{CB} = \frac{v^2_{CB}}{l_2} = \omega_2^2 l_2 = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn),$$

где (bc) и (BC) суть отрезки, взятые из плана скоростей и со схемы механизма, μ_l, μ_v и μ_a — масштабы длин, скоростей и ускорений. Вектор a_{CB} направлен параллельно направлению BC от точки C к точке B.

Как известно из теоретической механики, кориолисово ускорение $a^к_{CC_4}$ по величине равно

$$a^к_{CC_4} = 2 |\omega_4| v_{CC_4} = 2 |\omega_4| \mu_v (c_4 c), \quad (4.44)$$

где отрезок (c_4c) должен быть взят из плана скоростей (рис. 4.20, *б*). Направление вектора кориолисова ускорения может быть найдено общими приемами векторной алгебры. Имеем

$$\boldsymbol{a}^{\kappa}_{CC_4} = 2\boldsymbol{\omega}_4 \times \boldsymbol{v}_{CC_4}. \tag{4.45}$$

Из равенства (4.45) следует, что вектор $\boldsymbol{a}^{\kappa}_{CC_4}$ лежит в плоскости движения механизма, и для определения его направления достаточно $\boldsymbol{v}_{CC_4}$ — вектор скорости точки C относительно плоскости S — повернуть на угол 90° в сторону вращения, обусловленного угловой скоростью ω_4. Таким образом, вектор $\boldsymbol{a}^{\kappa}_{CC_4}$ перпендикулярен к оси $x - x$ направляющей, а величина его определится по формуле (4.44) подстановкой в эту формулу заданной угловой скорости ω_4 и длины известного из плана скоростей отрезка (c_4c), изображающего в масштабе μ_v скорость v_{CC_4}.

Векторы ускорений $\boldsymbol{a}^{t}_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^{r}_{CC_4}$, входящие в уравнение (4.43), известны только по направлению. Первый вектор $\boldsymbol{a}^{t}_{CB}$ перпендикулярен к направлению BC, а второй вектор $\boldsymbol{a}^{r}_{CC_4}$ параллелен оси $x - x$ направляющей поступательной пары D. Таким образом, в уравнении (4.43) неизвестны только величины ускорений $\boldsymbol{a}^{t}_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^{\kappa}_{CC_4}$. Для их определения строим план ускорений. Для этого (рис. 4.20, *б*) выбираем произвольную точку π за полюс плана ускорений и откладываем от нее известные ускорения точек B и C_4 в виде отрезков (πb) и (πc_4), изображающих в выбранном масштабе μ_a ускорения a_B и a_{C_4}. Далее определяем ускорения $\boldsymbol{a}^{n}_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^{\kappa}_{CC_4}$ и откладываем их в масштабе μ_a в виде отрезков (bn) и (c_4k). Из точек n и k проводим прямые, имеющие направления ускорений $\boldsymbol{a}^{t}_{CB}$ и $\boldsymbol{a}^{r}_{CC_4}$. Ускорение $\boldsymbol{a}^{r}_{CC_4}$ параллельно оси $x - x$ направляющей поступательной пары D, а ускорение $\boldsymbol{a}^{t}_{CB}$ перпендикулярно к направлению BC. Точка c пересечения этих двух направлений и даст конец вектора $\boldsymbol{a}_C$ полного ускорения точки C. Величина полного ускорения $\boldsymbol{a}_C$ точки C равна

$$a_C = \mu_a (\pi c).$$

Величина углового ускорения ε_2 звена *2* равна

$$|\varepsilon_2| = \frac{a^{t}_{CB}}{l_2} = \frac{\mu_a (nc)}{\mu_l (BC)}.$$

Направление этого ускорения определится так же, как и в ранее рассмотренной группе. Угловое ускорение ε_3 звена *3* равно $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$, так как звено *3* входит со звеном *4* в поступательную пару.

Ускорение любой точки, лежащей на линии BC звена *2*, определяется построениями, аналогичными тем, которые мы применяли при исследовании группы первого вида, т. е. применением принципа подобия фигур на плане ускорений и на схеме механизма.

Ускорение произвольной точки F, принадлежащей звену *3*, может быть определено из уравнений

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_{F_4} + \boldsymbol{a}^{\text{к}}_{FF_4} + \boldsymbol{a}^{r}_{FF_4}. \qquad (4.46)$$

Ускорение $\boldsymbol{a}_{F_4}$ точки F_4, принадлежащей плоскости S, известно, ибо ускорения всех точек звена *4* являются заданными. Ускорение $\boldsymbol{a}^{\text{к}}_{FF_4}$ равно по величине

$$a^{\text{к}}_{FF_4} = 2\,|\,\omega_4\,|\,v_{FF_4} = 2\,|\,\omega_4\,|\,v_{CC_4} = a^{\text{к}}_{CC_4},$$

потому что $v_{FF_4} = v_{CC_4}$. Ускорение $a^{r}_{FF_4}$ равно $a^{r}_{FF_4} = a^{r}_{CC_4}$, так как движение звена *3* относительно звена *4* является поступательным. Тогда уравнение (4.46) напишем так:

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_{F_4} + \boldsymbol{a}^{\text{к}}_{CC_4} + \boldsymbol{a}^{r}_{CC_4}. \qquad (4.47)$$

Векторы, стоящие в правой части уравнения (4.47), известны, и следовательно, вектор $\boldsymbol{a}_F$ определится как их геометрическая сумма. Для определения этого вектора из точки f_4 (рис. 4.20, *б*) откладываем отрезок (f_4k'), равный и параллельный отрезку (c_4k). Далее из точки k' откладываем отрезок $(k'f)$, равный и параллельный отрезку (kc). Результирующий отрезок (πf) и представляет собой в масштабе μ_a полное ускорение точки F, т. е.

$$a_F = \mu_a\,(\pi f).$$

Выше мы рассмотрели подробно задачи о построении скоростей и ускорений групп II класса первого и второго видов. Составление уравнений и построение планов скоростей и ускорений групп II класса других видов будет аналогичным.

6°. При рассмотрении кинематики групп II класса с поступательными парами удобно планы этих групп преобразовать так, чтобы оси поступательных пар проходили через центр вращательной пары. Нетрудно видеть (рис. 4.21), что направляющую $x - x$ (рис. 4.21, *а*), по которой скользит звено *3*, всегда можно перенести параллельно самой себе так, чтобы она проходила через центр вращательной пары C (рис. 4.21, *б*). При этом перемещении скорости и ускорении звена *3* не изменятся.

Аналогичное преобразование можно привести и для группы II класса третьего вида (рис. 4.22). Здесь ось $x - x$ звена *2* проходит через ось вращательной пары D (рис. 4.22, *б*).

На рис. 4.23, *б* показано преобразование группы II класса четвертого вида. Здесь оси $x - x$ и $y - y$, принадлежащие звеньям *1* и *4* (рис. 4.23, *а*), проходят через центр вращательной пары C. Наконец, на рис. 4.24, *б* ось $x - x$, принадлежащая звену *3* (рис. 4.24, *а*), проходит через центр вращательной пары B.

Указанные преобразования упрощают составление кинематических схем и построение планов скоростей и ускорений групп, не изменяя кинематики исследуемых групп.

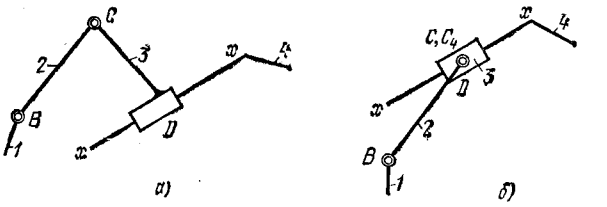


Рис. 4.21. Схема преобразования группы II класса второго вида.

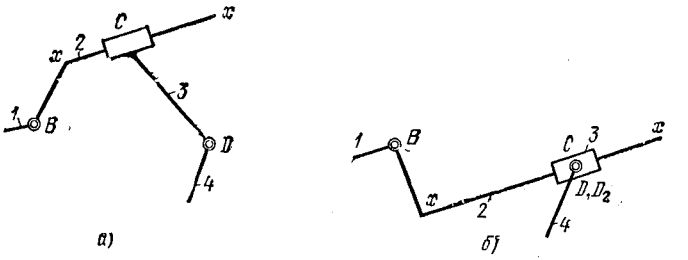


Рис. 4.22. Схема преобразования группы II класса третьего вида.

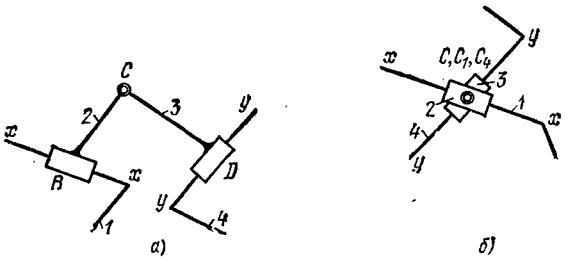


Рис. 4.23. Схема преобразования группы II класса четвертого вида.

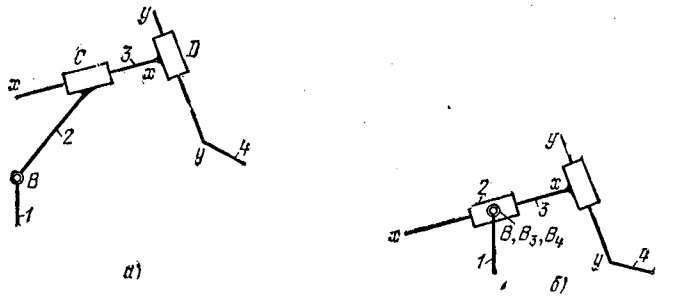


Рис. 4.24. Схема преобразования группы II класса пятого вида.

§ 19. Определение скоростей и ускорений групп III класса методом планов

1°. Определение скоростей и ускорений механизмов III класса может быть произведено так называемым *методом особых точек* или *точек Ассура*, по имени русского ученого Л. В. Ассура, предложившего этот метод.

Ознакомление с применением этого метода начнем с задачи определения скоростей и ускорений группы III класса с тремя поводками.

Пусть задана группа III класса с тремя поводками, причем все входящие в группу кинематические пары — вращательные

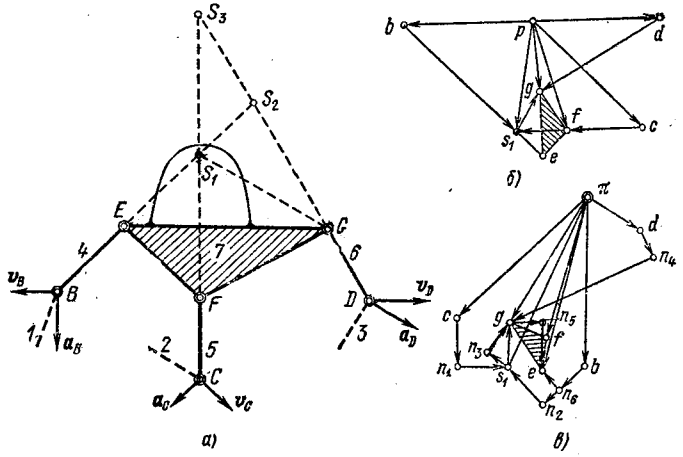


Рис. 4.25. Трехповодковая группа с тремя вращательными парами: *а*) кинематическая схема; *б*) план скоростей; *в*) план ускорений.

(рис. 4.25, *а*) и заданы скорости и ускорения точек B, C и D концевых элементов, которыми поводки *4*, *5* и *6* входят во вращательные пары со звеньями *1*, *2* и *3* основного механизма. Требуется определить скорости и ускорения звеньев группы. Продолжаем оси поводков *4* и *5* до пересечения в точке S_1, которую примем принадлежащей базисному звену *7*.

Тогда из произвольной точки p плоскости откладываем отрезки (pb), (pc) и (pd) (рис. 4.25, *б*), представляющие в выбранном масштабе μ_v заданные скорости точек B, C и D. Скорость v_{S_1} точки S_1, как принадлежащей звену *7*, определится из уравнения

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{S_1} &= \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{v}_{S_1E} = \boldsymbol{v}_B + \overline{\boldsymbol{v}_{EB} + \boldsymbol{v}_{S_1E}}, \\ \boldsymbol{v}_{S_1} &= \boldsymbol{v}_F + \boldsymbol{v}_{S_1F} = \boldsymbol{v}_C + \overline{\boldsymbol{v}_{FC} + \boldsymbol{v}_{S_1F}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.48)$$

В уравнениях (4.48) два последних вектора каждого из уравнений направлены по одной прямой, так как оба вектора перпендикулярны к общим направлениям S_1B или S_1C, т. е. вектор $\underline{v_{S_1B} = v_{EB} + v_{S_1E}}$ перпендикулярен направлению S_1B, а вектор $v_{SC} = v_{FC} + v_{S_1F}$ перпендикулярен к направлению S_1C.

Пользуясь уравнением (4.48), проводим через точку b плана скоростей прямую в направлении скорости v_{S_1B}, перпендикулярную к направлению S_1B, а через точку c' плана скоростей — прямую в направлении вектора скорости v_{S_1C}, перпендикулярную к направлению S_1C. Точка s_1 пересечения этих двух прямых на плане скоростей (рис. 4.28, *б*) и представляет собой конец вектора скорости v_{S_1} точки S_1. Величина скорости этой точки равна

$$v_{S_1} = \mu_v (ps_1).$$

Соединяем далее прямой точку S_1 с точкой G и составляем для определения скорости точки G следующие уравнения:

$$v_G = v_{S_1} + v_{GS_1}, \qquad v_G = v_D + v_{GD}. \tag{4.49}$$

Пользуясь уравнениями (4.49), проводим через точки s_1 и d плана скоростей прямые, имеющие направления скоростей v_{S_1G} и v_{GD}, соответственно перпендикулярные к направлениям GS_1 и GD. Точка g пересечения этих двух прямых и дает конец вектора скорости v_G точки G. Величина скорости v_G равна

$$v_G = \mu_v (pg).$$

Зная скорость точки G, скорость точки E, определяем из уравнения

$$v_E = v_G + v_{EG}, \qquad v_E = v_B + v_{EB}. \tag{4.50}$$

Скорость v_F точки F определится из подобия треугольника egf плана скоростей треугольнику EGF схемы, или же из уравнений

$$v_F = v_G + v_{FG}, \qquad v_F = v_C + v_{FC}. \tag{4.51}$$

Построение всех этих скоростей показано на рис. 4.25, *б*.

Точку S_1 пересечения осей двух поводков будем называть *особой точкой*. Особая точка может быть получена путем пересечения осей двух любых поводков (рис. 4.25, *б*). Таким образом, в группе с тремя поводками мы можем получить три особые точки S_1, S_2 и S_3 и, пользуясь любой из них, можно построить план скоростей. Выбор той или иной из этих точек определяется удобством графических построений.

Необходимо иметь в виду, что точки S_1, S_2 и S_3 *принадлежат базисному звену EGF*, а не поводкам, на пересечении осей которых они находятся.

В том случае, когда все эти три оси поводков пересекаются в одной точке, особые точки совмещаются в одну, и в этом случае группа приобретает дополнительную мгновенную подвижность.

2°. Задача об ускорениях группы III класса с тремя поводками решается аналогично задаче о скоростях. Здесь, так же как и для определения скоростей, пользуемся особой точкой S_1 на звене 7 (рис. 4.25, *а*). В качестве такой точки может быть выбрана любая из трех особых точек. Построение ускорений всех точек группы может быть выполнено следующим образом. Выбираем на плоскости произвольную точку π (рис. 4.25, *в*) за полюс плана ускорений и откладываем от нее отрезки (πb), (πc) и (πd), изображающие в масштабе μ_a ускорения a_B, a_C и a_D точек B, C и D. Ускорение $\boldsymbol{a}_{S_1}$ особой точки S_1 определится из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{S_1} &= \boldsymbol{a}_B + \overline{\boldsymbol{a}^n_{EB} + \boldsymbol{a}^n_{S_1E}} + \overline{\boldsymbol{a}^t_{EB} + \boldsymbol{a}^t_{S_1E}} = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{S_1B} + \boldsymbol{a}^t_{S_1B}, \\ \boldsymbol{a}_{S_1} &= \boldsymbol{a}_C + \overline{\boldsymbol{a}^n_{FC} + \boldsymbol{a}^n_{S_1F}} + \overline{\boldsymbol{a}^t_{FC} + \boldsymbol{a}^t_{S_1F}} = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}^n_{S_1C} + \boldsymbol{a}^t_{S_1C}. \end{aligned}\right\} \quad (4.52)$$

В уравнениях (4.52) суммы нормальных и тангенциальных ускорений для краткости обозначены через результирующие векторы $\boldsymbol{a}^n_{S_1B}$, $\boldsymbol{a}^n_{S_1C}$ и $\boldsymbol{a}^t_{S_1B}$, $\boldsymbol{a}^t_{S_1C}$, потому что направления отдельных слагаемых совпадают.

Величины нормальных относительных ускорений определяются обычным методом из уравнений

$$a^n_{EB} = \frac{v^2_{EB}}{l_{BE}}, \quad a^n_{S_1E} = \frac{v^2_{S_1E}}{l_{ES_1}}, \quad a^n_{FC} = \frac{v^2_{FC}}{l_{CF}}, \quad a^n_{S_1F} = \frac{v^2_{S_1F}}{l_{FS_1}}.$$

Направления этих векторов также определяются известными методами. Так как отдельные члены каждой из сумм тангенциальных ускорений совпадают по направлению, то отдельные слагаемые этих сумм особо могут не определяться. Для их нахождения достаточно через концы результирующих векторов нормальных ускорений $\boldsymbol{a}^n_{S_1B}$ и $\boldsymbol{a}^n_{S_1C}$ провести линии действия векторов тангенциальных ускорений в направлениях, перпендикулярных к векторам указанных нормальных ускорений. С этой целью от точек b и c плана ускорений откладываем отрезки (bn_2) и (cn_1), представляющие в масштабе μ_a ускорения $a^n_{S_1B}$ и $a^n_{S_1C}$.

Далее через точки n_2 и n_1 проводим прямые в направлениях ускорений $\boldsymbol{a}^t_{S_1B}$ и $\boldsymbol{a}^t_{S_1C}$, которые соответственно перпендикулярны к S_1B и S_1C. Точка s_1 пересечения этих двух прямых и дает конец вектора $\boldsymbol{a}_{S_1}$ полного ускорения точки S_1, величина которого равна

$$a_{S_1} = \mu_a (\pi s_1).$$

Ускорение точки G получается из уравнений

$$\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{a}_{S_1} + \boldsymbol{a}^n_{GS_1} + \boldsymbol{a}^t_{GS_1}, \qquad \boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^n_{GD} + \boldsymbol{a}^t_{GD}. \quad (4.53)$$

От точек d и s_1 плана ускорений откладываем отрезки (dn_4) и (s_1n_3), представляющие в масштабе μ_a ускорения a^n_{GD} и $a^n_{GS_1}$. Далее через точки n_3 и n_4 проводим прямые в направлениях тангенциальных ускорений $a^t_{GS_1}$ и a^t_{GD}, перпендикулярные к отрезкам GS_1 и GD. Точка g пересечения этих прямых и дает конец полного ускорения a_G точки G. Зная ускорение a_G точки G, легко определить ускорения остальных точек группы. Например, ускорение точки E определится из уравнений

$$a_E = a_G + a^n_{EG} + a^t_{EG}, \qquad a_E = a_B + a^n_{EB} + a^t_{EB}. \tag{4.54}$$

Ускорение точки F найдется из подобия треугольника egf плана ускорений треугольнику EGF схемы.

Пример. На рис. 4.26, *а* показан шестизвенный механизм II класса, кинематическая схема которого построена в масштабе

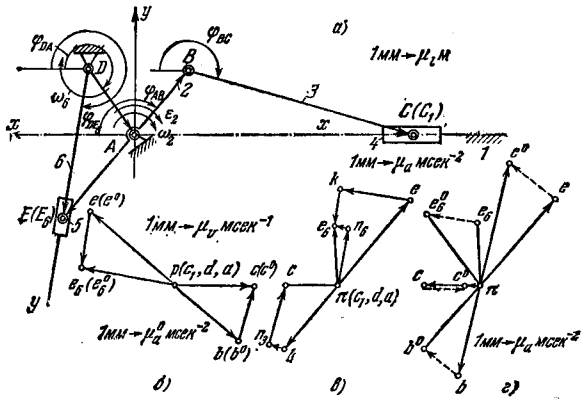


Рис. 4.26. Шестизвенный механизм: *а*) кинематическая схема; *б*) план скоростей; *в*) план ускорений в перманентном движении; *г*) то же в начальном движении.

1 *мм* → μ_l*м*. Требуется определить скорости и ускорения звеньев механизма, если кривошип *2* вращается с угловой скоростью ω_2 и с угловым ускорением ε_2. Механизм образован присоединением к кривошипу *2* двух групп II класса: группы второго вида, состоящей из звеньев *3* и *4*, и группы третьего вида, состоящей из звеньев *5* и *6*. Точки звена *1* и звена *6*, совпадающие в рассматриваемом положении с точками C и E, обозначим через C_1 и E_6.

Для группы BC имеем следующую систему уравнений для определения скоростей звеньев группы:

$$v_C = v_B + v_{CB}, \qquad v_C = v_{C_1} + v_{CC_1},$$

или

$$v_B + v_{CB} = v_{C_1} + v_{CC_1}.$$

Так как $v_{C_1} = 0$, то $v_C = v_B + v_{CB} = v_{CC_1}$.

Для определения ускорений звеньев группы BC, имеем систему уравнений:

$$a_C = a_B + a^n_{CB} + a^t_{CB}, \qquad a_C = a_{C_1} + a^{\text{к}}_{CC_1} + a^r_{CC_1},$$

или

$$a_B + a^n_{CB} + a^t_{CB} = a_{C_1} + a^{\text{к}}_{CC_1} + a^r_{CC_1}.$$

Так как ось $x - x$ направляющей неподвижна, то и кориолисово ускорение $a^{\text{к}}_{CC_1} = 0$. Тогда окончательное уравнение для определения ускорений звеньев группы BC будет иметь вид

$$a_C = a_B + a^n_{CB} + a^t_{CB} = a^r_{CC_1}.$$

Для группы ED будем иметь следующую систему уравнений для определения скоростей звеньев группы

$$v_{E_6} = v_D + v_{E_6D}, \qquad v_{E_6} = v_E + v_{E_6E},$$

или

$$v_D + v_{E_6D} = v_E + v_{E_6E}.$$

Так как $v_D = 0$, то

$$v_{E_6} = v_{E_6D} = v_E + v_{E_6E}.$$

Для определения ускорений звеньев группы ED будем иметь систему уравнений

$$a_{E_6} = a_D + a^n_{E_6D} + a^t_{E_6D}, \qquad a_{E_6} = a_E + a^{\text{к}}_{E_6E} + a^r_{E_6E},$$

или

$$a_D + a^n_{E_6D} + a^t_{E_6D} = a_E + a^{\text{к}}_{E_6E} + a^r_{E_6E}.$$

Так как $a_D = 0$, то

$$a_{E_6} = a^n_{E_6D} + a^t_{E_6D} = a_E + a^{\text{к}}_{E_6E} + a^r_{E_6E}.$$

Рассмотрим *перманентное движение* механизма (§ 16), т. е. движение, при котором угловая скорость ω_2 кривошипа *2* постоянна, т. е. $\omega_2 = \text{const}$.

Для построения плана скоростей в перманентном движении из произвольной точки p (рис. 4.26, *б*) откладываем в масштабе μ_v отрезки (pb) и (pe), представляющие собой скорости v_B и v_E точек B и E. Величины этих скоростей соответственно равны

$$v_B = |\omega_2| l_{AB} = |\omega_2| \mu_l (AB) = \mu_v (pb),$$
$$v_E = |\omega_2| l_{AE} = |\omega_2| \mu_l (AE) = \mu_v (pe),$$

где μ_l — масштаб длин звеньев механизма. Если отрезки (pb) и (pe) выбрать так, чтобы имели место равенства $(pb) = (AB)$ и $(pe) = (AE)$, то масштаб μ_v скоростей будет равен

$$\mu_v = \omega_2 \mu_l.$$

Отрезки (pb) и (pe) откладываем в направлении, перпендикулярном к направлению BE звена 2. Далее через точку b проводим прямую в направлении скорости $\boldsymbol{v}_{CB}$, перпендикулярную к направлению BC звена 3, а через точку p — прямую в направлении скорости $\boldsymbol{v}_C$, параллельную оси $x - x$ направляющей. Точка c пересечения двух проведенных прямых даст конец вектора скорости $\boldsymbol{v}_C$ точки C. Величина скорости $\boldsymbol{v}_C$ будет равна

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Так как скорости v_A и v_D равны нулю, то точки a и d, их изображающие, совпадают с началом плана скоростей. Далее через точку e проводим прямую в направлении скорости $\boldsymbol{v}_{E_6E}$, параллельную оси Dy направляющей, принадлежащей звену 6, а через точку p — в направлении скорости $\boldsymbol{v}_{E_6D}$, перпендикулярную к Dy. Точка e_6 пересечения двух проведенных прямых дает конец вектора скорости $\boldsymbol{v}_{E_6}$ точки E_6, принадлежащей звену 6.

Величина скорости v_{E_6} равна

$$v_{E_6} = \mu_v (pe_6).$$

Для построения плана ускорений в *перманентном движении* от произвольной точки π (рис. 4.26, *в*) откладываем в масштабе μ_a отрезки (πb) и (πe), представляющие собой ускорения $\boldsymbol{a}_B$ и $\boldsymbol{a}_E$. Так как мы рассматриваем перманентное движение механизма, то ускорения $\boldsymbol{a}_B$ и $\boldsymbol{a}_E$ точек B и E являются только нормальными и равными по величине

$$a_B = \omega_2^2 l_{AB} = \omega_2^2 \mu_l (AB) = \mu_a (\pi b),$$
$$a_E = \omega_2^2 l_{AE} = \omega_2^2 \mu_l (AE) = \mu_a (\pi e).$$

Выбирая отрезки (πb) и (πe) соответственно равными отрезкам (AB) и (AE), получаем масштаб μ_a ускорений равным $\mu_a = \omega_2^2 \mu_l$.

Так как ускорения a_B и a_E точек B и E в перманентном движении суть нормальные ускорения, то отрезки (πb) и (πe) откладываем параллельно направлению BE оси звена 2. Ускорение $\boldsymbol{a}_B$ направлено от точки B к точке A, а ускорение $\boldsymbol{a}_E$ от точки E к точке A. Далее через точку b проводим прямую, параллельную направлению BC звена 3, и откладываем на ней отрезок (bn_3), представляющий ускорение a^n_{CB}. Вектор $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ направлен от точки C к точке B и равен по величине

$$a^n_{CB} = \frac{v^2_{CB_1}}{l_{CB}} = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \omega_2^2 \mu_l \frac{(bc)^2}{(BC)} = \mu_a (bn_3).$$

Так как по предыдущему $\mu_a = \omega_2 \mu_v = \omega_2^2 \mu_v$, то отрезок (bn^2) равен

$$(bn_3) = \frac{(bc)^2}{(BC)}.$$

Через точку n_3 проводим прямую, имеющую направление ускорения $\boldsymbol{a}^t_{CB}$, перпендикулярную к направлению BC. Далее через точку π проводим прямую в направлении ускорения $\boldsymbol{a}^r_{CC_1}$, параллельную оси $x - x$. Точка c пересечения двух проведенных прямых дает конец вектора ускорения $\boldsymbol{a}_C$ точки C. Величина ускорения a_C равна

$$a_C = \mu_a (\pi c) = \omega_2^2 \mu_l (\pi c).$$

Далее через точку e проводим прямую в направлении кориолисова ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{к}}_{E_6E}$, перпендикулярную к оси Dy. Величина ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{к}}_{E_6E}$ определится по формуле

$$a^{\text{к}}_{E_6E} = 2 \mid \omega_6 \mid v_{E_6E} = 2 \frac{v_{E_6}}{l_{DE}} v_{E_6E_6} = 2 \frac{\mu_v^2}{\mu_l} \frac{(pe_6)(ee_6)}{(DE_6)} = \mu_a (ek).$$

Полученный отрезок (ek) откладываем на проведенной прямой в направлении, определяемом известным из теоретической механики правилом, согласно которому для определения направления кориолисова ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{к}}_{EE_6}$ необходимо вектор относительной скорости $\boldsymbol{v}_{E_6E}$ (рис. 4.26, *б*) повернуть на угол в 90° в направлении угловой скорости ω_6 звена *6*.

Через точку k проводим прямую в направлении ускорения $\boldsymbol{a}^r_{E_6E}$, параллельную оси Dy. Далее из точки π параллельно оси Dy откладываем отрезок (πn_6), представляющий нормальное ускорение $a^n_{E_6D}$, равное по величине

$$a^n_{E_6D} = \frac{v^2_{E_6D}}{l_{ED}} = \frac{\mu_v^2 (pe_6)^2}{\mu_l (E_6D)} = \omega_2^2 \mu_l \frac{(pe_6)^2}{(E_6D)} = \mu_a (\pi n_6).$$

Вектор $\boldsymbol{a}^n_{E_6}$ направлен от точки E_6 к точке D.

Через полученную точку n_5 проводим прямую в направлении ускорения $\boldsymbol{a}^t_{E_6D}$, которое перпендикулярно к оси Dy. Точка e_6 пересечения прямых, проведенных в направлениях ускорений $\boldsymbol{a}^r_{E_6E}$ и $\boldsymbol{a}^t_{E_6D}$, определит конец вектора полного ускорения $\boldsymbol{a}_{E_6}$.

Величина ускорения $\boldsymbol{a}_{E_6}$ равна

$$a_{E_6} = \mu_a (\pi e_6) = \omega_2^2 \mu_l (\pi e_6).$$

Для учета влияния углового ускорения ε_2 на кинематику механизма рассмотрим *начальное движение* механизма. Как это было показано в § 16, в этом движении скорости всех звеньев механизма равны нулю. Следовательно, для изучения начального движения

механизма надо построить только план ускорений в начальном движении. Так как в начальном движении все нормальные и кориолисовы ускорения равны нулю, то уравнения для построения плана ускорений будут иметь следующий вид:

для группы BC

$$\boldsymbol{a}^{\text{н}}_C = \boldsymbol{a}^{r\text{н}}_{CC_1} = \boldsymbol{a}^{\text{н}}_B + \boldsymbol{a}^{t\text{н}}_{CB},$$

и

для группы DE

$$\boldsymbol{a}^{\text{н}}_{E_6} = \boldsymbol{a}^{t\text{н}}_{E_6D} = \boldsymbol{a}^{\text{н}}_E + \boldsymbol{a}^{r\text{н}}_{E_6E}.$$

Индексом н обозначены векторы ускорений в начальном движении.

Для определения ускорений звеньев механизма в начальном движении можно воспользоваться уже построенным планом скоростей (рис. 4.26), так как векторы тангенциальных и релятивных ускорений параллельны соответствующим векторам скоростей. Имеем

$$\boldsymbol{a}^{t\text{н}}_B \parallel \boldsymbol{v}_B, \quad \boldsymbol{a}^{t\text{н}}_{CB} \parallel \boldsymbol{v}_{CB}, \quad \boldsymbol{a}^{r\text{н}}_{CC_1} \parallel \boldsymbol{v}_{CC_1},$$

$$\boldsymbol{a}^{\text{н}}_{E_6} \parallel \boldsymbol{v}_{E_6}, \quad \boldsymbol{a}^{t\text{н}}_{E_6D} \parallel \boldsymbol{v}_{E_6D}, \quad \boldsymbol{a}^{\text{н}}_E \parallel \boldsymbol{v}_E \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a}^{r\text{н}}_{E_6E} \parallel \boldsymbol{v}_{E_6E}.$$

Если точку p (рис. 4.26, *б*) выбрать за начало плана ускорений в начальном движении, а отрезок, изображающий вектор ускорений $\boldsymbol{a}^{\text{н}}_B$, принять равным $(pb^0) = (pb)$, то будем иметь

$$a^{\text{н}}_B = \mu^0_a (pb^0) = \mu^0_a (pb),$$

где μ^0_a — масштаб плана ускорений в начальном движении. Соответственно получим:

$$a^{\text{н}}_C = a^{r\text{н}}_{CC_1} = \mu^0_a (pc^0) = \mu^0_a (pc), \qquad a^{\text{н}}_{CB} = \mu^0_a (b^0c^0) = \mu^0_a (bc),$$

$$a^{\text{н}}_{E_6} = a^{t\text{н}}_{E_6D} = \mu^0_a (pe^0_6) = \mu^0_a (pe_6), \qquad a^{\text{н}}_E = \mu^0_a (pe^0) = \mu^0_a (pe),$$

$$a^{r\text{н}}_{E_6E} = \mu^0_a (e^0e^0_6) = \mu^0_a (ee_6).$$

Таким образом, при определении ускорений звеньев механизма в начальном движении не требуется построения еще одного плана ускорений, а можно пользоваться построенным ранее планом скоростей (рис. 4.26, *б*). Из условий

$$a^{\text{н}}_B = a^t_B = \varepsilon_2 \mu_l (AB) = \mu^0_a (pb^0), \qquad (pb^0) = (pb) = (AB)$$

следует, что масштаб μ^0_a равен

$$\mu^0_a = \varepsilon_2 \mu_l = \frac{\varepsilon_2}{\omega^2_2} \mu_a,$$

так как $\mu_a = \omega^2_2 \mu_l$.

На рис. 4.26, *г* показаны в масштабе μ_a сплошными линиями отрезки (πc), (πb), (πe) и (πe_6) ускорений точек C, B, E и E_6 в

перманентном движении. К ним прибавлены отрезки (cc^0), (bb^0), (ee^0) и $(e_6e_6^0)$, показанные штрихами, представляющие собой в масштабе μ_a ускорения $a_C^н$, $a_B^н$, $a_E^н$, $a_{E_6}^н$. Истинные ускорения точек C, B, E и E_6 с учетом неравномерности вращения ведущего звена равны (рис. 4.26, *г*)

$$a_C = \mu_a (\pi c^0), \qquad a_B = \mu_a (\pi b^0),$$
$$a_E = \mu_a (\pi e^0), \qquad a_{E_6} = \mu_a (\pi e_6^0).$$

При инженерных исследованиях кинематики механизмов удобно принимать угловую скорость ω_2 ведущего звена в перманентном движении равной $\omega_2 = 1$ *сек*$^{-1}$. Тогда масштабы μ_l, μ_v и μ_a будут удовлетворять условию

$$\mu_l = \mu_v = \mu_a.$$

После построения плана скоростей и ускорений в предположении $\omega_2 = 1$ *сек*$^{-1}$ легко определить истинные скорости и ускорения по заданным ω_2 и ε_2 (см. § 16). Построенные на рис. 4.26, *б* и *в* планы скоростей и ускорений можно рассматривать как планы аналогов скоростей и ускорений.

§ 20. Мгновенный центр ускорений и радиус кривизны траектории

1°. В § 14 нами был рассмотрен вопрос об определении мгновенных центров вращения звеньев механизмов. Для многозвенных механизмов эта задача усложняется тем, что для определения мгновенного центра вращения одного из промежуточных звеньев механизма обычно приходится определять мгновенные центры и всех остальных звеньев. Поэтому в некоторых случаях удобно положение мгновенного центра вращения звена определять с помощью его плана скоростей, если таковой нами был построен.

Для этого можно воспользоваться условием, что точка звена, совпадающая в рассматриваемый момент времени с его мгновенным центром вращения, должна иметь скорость, равную нулю. Тогда задача определения мгновенного центра вращения звена сведется к отысканию точки звена, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Пусть задано звено BC и известны скорости v_B и v_C точек B и C этого звена (рис. 4.27, *а*). Строим план скоростей звена (рис. 4.27, *б*). Определяем далее точку звена, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Очевидно, что на плане скоростей скорость этой точки изобразится вектором, равным нулю, т. е. вектором, совпадающим с полюсом p плана скоростей. Как было показано выше, фигура, изображающая на плане скоростей скорости отдельных точек звена, подобна фигуре самого звена и

повернута относительно нее на угол 90°. Тогда на звене BC можно отыскать такую точку P, вектор скорости которой на плане скоростей совмещается с точкой p. Для этого достаточно на звене (рис. 4.27, *а*) построить треугольник BCP, подобный треугольнику bcp плана (рис. 4.27, *б*). Для этого из точки B проводим прямую, перпендикулярную к отрезку (bp) плана, а из точки C — прямую, перпендикулярную к отрезку плана (cp). Точка P пересечения этих двух прямых и является той точкой звена, скорость которой в данный момент времени равна нулю, т. е. $v_P = 0$. Так как полученная точка P совпадает с мгновенным центром вращения звена BC, то скорости v_B и v_C точек B и C этого звена могут быть представлены следующим образом:

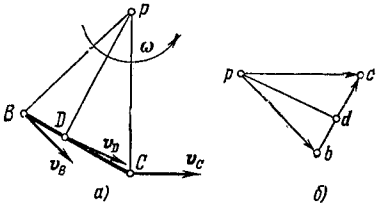


Рис. 4.27. К определению мгновенного центра вращения звена: *а*) схема звена с мгновенным центром вращения; *б*) план скоростей звена.

$$v_B = |\omega| l_{PB} \quad \text{и} \quad v_C = |\omega| l_{PC},$$

где ω есть угловая скорость звена BC (рис. 4.27, *а*). Величина скорости любой точки D звена BC может быть определена по формуле

$$v_D = |\omega| l_{PD},$$

направление же ее перпендикулярно к отрезку PD.

2°. Аналогично мгновенному центру вращения звена для общего случая его движения может быть найдена точка звена, абсолютное ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений*. Положение этой точки на звене может быть всегда определено, если известен план ускорений звена. Пусть, например, дано звено BC (рис. 4.28, *а*) и его план ускорений πbc (рис. 4.28, *б*). Из свойств плана ускорений следует, что точка звена П, ускорение которой равно нулю, изображается на плане ускорений вектором, равным нулю и совпадающим с точкой π плана. Чтобы определить на звене BC точку, не имеющую ускорения, надо на нем построить фигуру $BC\Pi$, подобную фигуре $bc\pi$ плана. Полученная точка П (рис. 4.28, *а*) и является

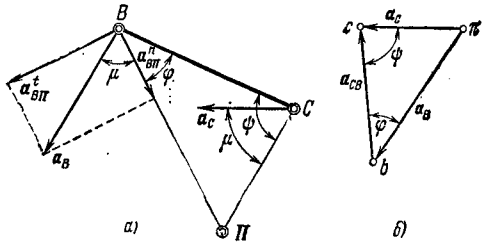


Рис. 4.28. К определению мгновенного центра ускорений звена: *а*) схема звена с мгновенным центром ускорений; *б*) план ускорений.

мгновенным центром ускорений, так как вследствие подобия треугольников $BC\Pi$ и $bc\pi$ ускорение точки П равно нулю, т. е. $a_\Pi = 0$.

Построение подобной фигуры $BC\Pi$ можно сделать по углам φ и ψ, измеренным на плане ускорений (рис. 4.28, *б*). Точка пересечения П прямых $B\Pi$ и $C\Pi$ является мгновенным центром ускорений. При обходе контуров треугольников $BC\Pi$ и $bc\pi$ в одном и том же направлении порядок букв должен быть одинаковым.

Как было показано выше (§ 18, *3°*, *4°*), вектор относительного ускорения $\boldsymbol{v}_{CB}$ повернут относительно звена BC на угол μ, определяемый по формуле

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \tag{4.55}$$

где ε есть угловое ускорение звена BC, а ω — его угловая скорость. Таким образом, сторона bc треугольника $bc\pi$ образует со стороной BC треугольника $BC\Pi$ угол μ. Вследствие подобия треугольников $bc\pi$ и $BC\Pi$ стороны πb и πc образуют со сторонами ΠB и ΠC тот же угол μ, и вектор $\boldsymbol{a}_B$ образует угол μ со стороной $B\Pi$, а вектор $\boldsymbol{a}_C$ — угол μ со стороной $C\Pi$. Векторы абсолютных ускорений любых других точек звена наклонены под тем же углом μ к радиусам-векторам, соединяющим эти точки с точкой П.

Ускорение любой точки звена может быть всегда выражено через ускорение переносного поступательного движения с ускорением точки П и ускорение относительного движения около этой точки. Например, вектор $\boldsymbol{a}_B$ ускорения точки B может быть представлен в виде следующей геометрической суммы:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_\Pi + \boldsymbol{a}^n_{B\Pi} + \boldsymbol{a}^t_{B\Pi} = \boldsymbol{a}^n_{B\Pi} + \boldsymbol{a}^t_{B\Pi},$$

где $\boldsymbol{a}_\Pi = 0$.

Вектор ускорения $\boldsymbol{a}^n_{B\Pi}$ направлен от точки B к точке П, а вектор ускорения $\boldsymbol{a}^t_{B\Pi}$ перпендикулярен к отрезку $B\Pi$ (рис. 4.28, *а*). Так как

$$a^n_{B\Pi} = \omega^2 l_{B\Pi} \quad \text{и} \quad a^t_B = \varepsilon l_{B\Pi},$$

то величина полного ускорения точки B равна

$$a_B = \sqrt{(a^n_{B\Pi})^2 + (a^t_{B\Pi})^2} = l_{B\Pi}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{4.56}$$

Точно так же величина ускорения точки C равна

$$a_C = m l_{C\Pi}, \tag{4.57}$$

где постоянная m равна $m = \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.

Таким образом, полные ускорения всех точек звена пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра ускорений.

Очевидно, что движение точки звена, совпадающей с центром П, как не имеющей ускорения, может быть с точностью до бесконечно малых третьего порядка принято за равномерное прямолинейное.

3°. Покажем теперь, как определить центр кривизны ρ какой-либо точки D звена BC (рис. 4.29, *а*), если построены его план скоростей (рис. 4.29, *б*) и план ускорений (рис. 4.29, *в*). Центр кривизны лежит на прямой Dn, проведенной через точку D (рис. 4.29, *а*) перпендикулярно к вектору скорости v_D, т. е. перпендикулярно к отрезку (pd) плана скоростей (рис. 4.29, *б*). Прямая Dn является нормалью к траектории описываемой точки D в рассматриваемом положении этой точки и проходит через центр мгновенного вращения P звена BC. Вектор полного ускорения a_D точки D представлен на плане ускорений в виде отрезка (πd) (рис. 4.29, *в*). Разложим вектор a_D по направлениям Dn и перпендикулярному к нему. Составляющая, направленная по Dn, будет нормальным ускорением a_D^n точки D. Имеем

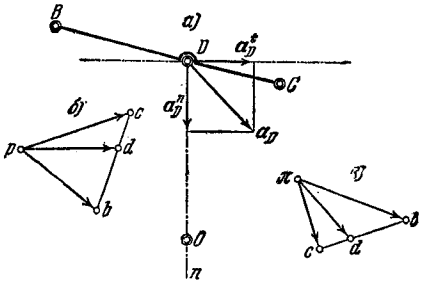


Рис. 4.29. К определению радиуса кривизны траектории точки D; *а*) схема звена; *б*) план скоростей звена; *в*) план ускорений звена.

$$a_D^n = \frac{v_D^2}{\rho}, \tag{4.58}$$

откуда и определится величина радиуса кривизны ρ. Получаем

$$\rho = \frac{v_D^2}{a_D^n}. \tag{4.59}$$

Зная ρ, можно найти положение центра кривизны O траектории точки D.

§ 21. Построение кинематических диаграмм

1°. При кинематическом исследовании механизмов необходимо бывает проводить это исследование за полный цикл движения исследуемого механизма. Для этого аналитическое или графическое исследование перемещений скоростей и ускорений ведется для ряда положений механизма, достаточно близко отстоящих друг от друга. Полученные значения кинематических величин могут быть сведены в таблицы или по полученным значениям этих величин могут быть построены графики, носящие название *кинематических диаграмм*.

В зависимости от характера движения исследуемых звеньев или отдельных точек механизма могут быть построены и различные кинематические диаграммы. В практических задачах теории механизмов каждая кинематическая диаграмма обычно представляет собой графическое изображение изменения одного из кинематических параметров звена: перемещения, скорости или ускорения точки звена исследуемого механизма в функции времени или перемещения ведущего звена механизма, т. е. в функции обобщенной координаты.

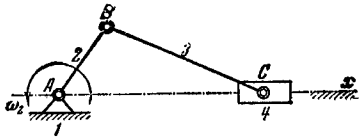


Рис. 4.30. Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма.

Например, если мы имеем кривошипно-ползунный механизм (рис. 4.30), то для перемещений s_C, скоростей v_C и ускорений a_C точки C, как перемещающейся прямолинейно, удобно строить кинематические диаграммы в виде зависимостей этих величин от времени t или от обобщенной координаты φ_2, т. е. строить графическое изображение зависимостей

$$s_C = s_C(t), \quad v_C = v_C(t), \quad a_C = a_C(t), \tag{4.60}$$

или

$$s_C = s_C(\varphi_2), \quad v_C = v_C(\varphi_2), \quad a_C = a_C(\varphi_2), \tag{4.61}$$

если угол φ_2 поворота звена *2* выбран в качестве обобщенной координаты.

В некоторых случаях может потребоваться построение и других зависимостей, например

$$v_C = v_C(s_C) \quad \text{или} \quad a_C = a_C(s_C). \tag{4.62}$$

Зависимости (4.62) могут быть получены из зависимостей (4.60) исключением из первой и второй зависимостей, или из первой и третьей зависимостей параметра t.

Если исследованию подлежат угловые перемещения φ_3, угловые скорости ω_3 и угловые ускорения ε_3 шатуна *3* (рис. 4.30), то можно построить графическое изображение зависимостей

$$\varphi_3 = \varphi_3(t), \quad \omega_3 = \omega_3(t), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(t),$$

или

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2), \quad \omega_3 = \omega_3(\varphi_2), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_2),$$

а также зависимости

$$\omega_3 = \omega_3(\varphi_3) \quad \text{или} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_3).$$

2°. В качестве примера рассмотрим построение кинематических диаграмм $s_C = s_C(t)$, $v_C = v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$ для перманентного

движения точки C кривошипно-ползунного механизма ABC, т. е. когда кривошип вращается с *постоянной угловой скоростью* ω_2 (рис. 4.31, *а*). Для этого методами, указанными в § 17, производим разметку путей точек B и C. Отсчет перемещений точки C удобно вести от крайнего левого положения ползуна. Проводим две оси координат (рис. 4.31, *б*) и на оси абсцисс откладываем отрезок l *мм*, представляющий собой в масштабе μ_t время T одного полного оборота кривошипа, т. е.

$$T = \frac{60}{n} = \mu_t l, \quad (4.63)$$

где n — число оборотов в минуту кривошипа. Из равенства (4.63) получаем масштаб μ_t времени. Имеем

$$\mu_t = \frac{60}{nl}. \quad (4.64)$$

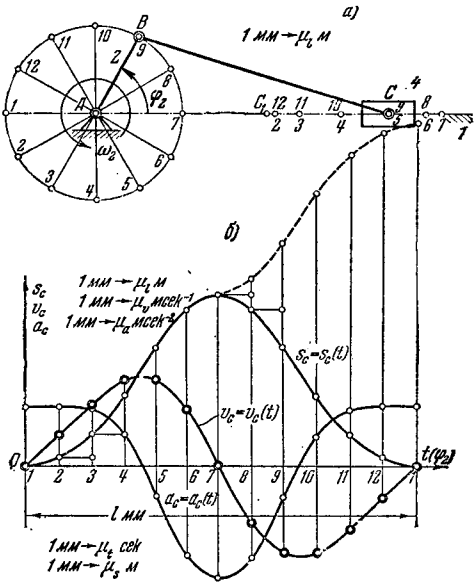


Рис. 4.31. Кривошипно-ползунный механизм: *а*) кинематическая схема; *б*) графики, изображающие зависимости $s_C = s_C(t)$; $v_C = v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$.

Отрезок l разбиваем на 12 равных частей и в соответствующих точках *1*, *2*, *3*, ... откладываем расстояния, пройденные точкой C (рис. 4.31, *а*) от крайнего левого положения C_1 ползуна. Так, в точке *2* (рис. 4.31, *б*) откладываем в направлении, параллельном оси ординат, отрезок (C_1C_2), в точке *3* — отрезок (C_1C_3) и т. д. Если отрезки (C_1C_2), (C_1C_3), ... откладывать прямо со схемы (рис. 4.31, *а*), то масштаб диаграммы $s_C = s_C(t)$ по оси ординат будет равен μ_l, т. е. масштабу построения схемы. С положения C_7, когда точка C займет крайнее правое положение (рис. 4.31, *а*), расстояния (C_7C_8), (C_7C_9) вычитаются из ординаты (C_1C_7), отложенной в положении C_7 и, таким образом, кривая $s_C = s_C(t)$ в положении, когда кривошип *2* придет в начальное положение, будет иметь ординату, равную нулю. Полученная кривая является *кривой расстояний точки C* от крайнего левого положения ползуна. Если надо построить *кривую путей*, пройденных точкой C, то от положения C_7 расстояния (C_7C_8), (C_7C_9) надо прибавлять к ранее отложенному отрезку (C_1C_7). На рис. 4.31, *б* эта часть кривой путей показана штрихами.

Так как кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω_2, то можно считать, что по оси абсцисс отложено не время t, а углы

поворота φ_2 звена 2, т. е. диаграммы $s_C = s_C(t)$, $v_C = v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$ будут одновременно и диаграммами $s_C = s_C(\varphi_2)$, $v_C = v_C(\varphi_2)$ и $a_C = a_C(\varphi_2)$. Масштаб μ_φ в этих диаграммах по оси абсцисс будет равен

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{l},$$

где отрезок l должен быть взят с чертежа в миллиметрах.

3°. Для построения диаграмм $v_C = v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$ отрезки, изображающие на плане скоростей и ускорений скорость v_C и ускорение a_C, откладывают на ординатах, проведенных в точках 1, 2, 3, ... (рис. 4.31, *б*), учитывая при этом знак скорости v_C и ускорения a_C. Если отрезки откладываются непосредственно с планов скоростей и ускорений, то масштабы ординат кривых $v_C = v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$ будут равны масштабам μ_v и μ_a планов скоростей и ускорений. Эти же диаграммы будут и диаграммами $v_C = v_C(\varphi_2)$ и $a_C = a_C(\varphi_2)$.

Построение диаграмм $v_C = v_C(s_C)$ и $a_C = a_C(s_C)$ удобно в некоторых случаях вести на схеме самого механизма (рис. 4.32). Для этого начало координат берем в точке C_1 и на ординатах, проведенных в точках C_1, C_2, C_3, ..., откладываем отрезки из плана скоростей и плана ускорений, изображающие скорости v_C и ускорения a_C точки C. Кривая $a_C = a_C(s_C)$ для хода ползуна слева направо и справа налево совпадает, если не учитывать знака ускорения a_C. Если считать положительными ускорения, направления которых совпадают с направлениями соответствующих скоростей, и отрицательными, направления которых противоположны направлениям скоростей, то при ходе ползуна *4* справа налево кривую $a_C = a_C(s_C)$ надо строить так, как это показано на рис. 4.32 штриховой линией.

4°. В рассмотренных примерах исследуемая точка двигалась прямолинейно. Для точек, имеющих криволинейное движение, удобнее строить кинематические диаграммы, дающие не только абсолютные значения скоростей и ускорений исследуемых точек, но и направления векторов полных скоростей и ускорений. Для этого откладываем векторы скоростей и ускорений, полученные на планах скоростей и ускорений из общих полюсов p и π в их истинном направлении. Если после этого соединить концы всех векторов плавной кривой, то полученная диаграмма будет называться *годографом скорости* или соответственно *годографом ускорения*.

На рис. 4.33, *б* и *в* показаны годографы скорости иускорения точки E шатуна кривошипно-ползунного механизма ABC (рис. 4.33, *а*).

Построение диаграмм величин угловых перемещений φ_3, угловых скоростей ω_3 и угловых ускорений ε_3 шатуна *3* механизма ABC

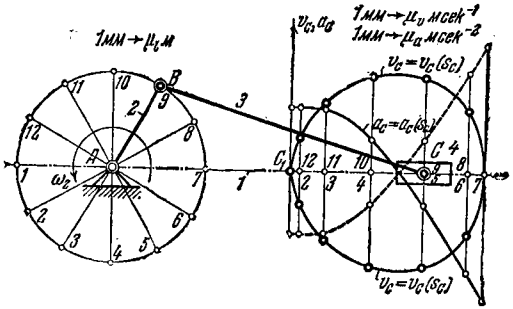


Рис. 4.32. Схема кривошипно-ползунного механизма с построенными на ней графиками скоростей и ускорений ползуна.

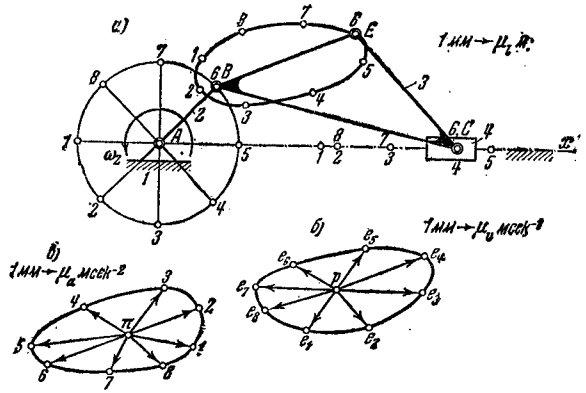


Рис. 4.33. Кривошипно-ползунный механизм: *а*) кинематическая схема; *б*) годограф скорости точки *E*; *в*) годограф ускорения точки *E*.

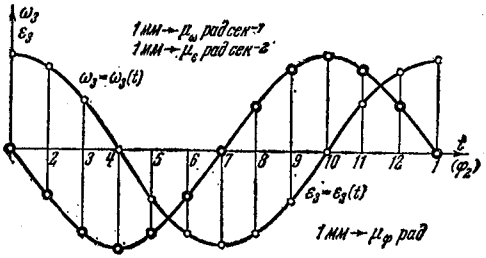


Рис. 4.34. Графики угловой скорости и углового ускорения шатуна *3* кривошипно-ползунного механизма, схема которого изображена на рис *4.32*, *а*.

(рис. 4.31, *а*) можно сделать аналогичными приемами, пользуясь схемой механизма и его планами скорости и ускорений.

На рис. 4.34 построены диаграммы изменения величин угловой скорости ω_3 и углового ускорения ε_3 в функции времени t или угла φ_2 поворота кривошипа 2, т. е. $\omega_3 = \omega_3(t)$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(t)$ или $\omega_3 = \omega_3(\varphi_2)$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_2)$ для шатуна 3 механизма ABC (рис. 4.31).

Изложенная нами на примере кривошипно-ползунного механизма методика построения кинематических диаграмм может быть применена для любых плоских механизмов как с низшими, так и с высшими кинематическими парами.

§ 22. Кинематическое исследование механизмов методом диаграмм

1°. Метод кинематических диаграмм может быть использован для кинематического исследования механизмов. Покажем применение метода кинематических диаграмм к исследованию конкретного механизма. Пусть, например, требуется построить диаграммы $s_C = s_C(\varphi_2)$, $v_C = v_C(\varphi_2)$ и $a_C = a_C(\varphi_2)$ для точки C толкателя 3 кулачкового механизма, показанного на рис. 4.35, в перманентном движении механизма, если кулачок вращается с постоянной угловой скоростью ω_2. Находим перемещения точки C относительно крайнего нижнего ее положения (положение *1*). Для этого через центр A вращения кулачка 2 проводим лучи: $A1$, $A2$, $A3$, ... под равными углами φ. Если из центра A сделать засечку радиусом AC на оси движения звена 3, то отрезок $(1-2')$ будет равен перемещению звена 3 при повороте кулачка 2 на угол φ из первого во второе положение. Точно так же отрезок $(1-3')$ будет равен перемещению звена 3 при повороте кулачка 2 на угол 2φ из первого в третье положение и т. д.

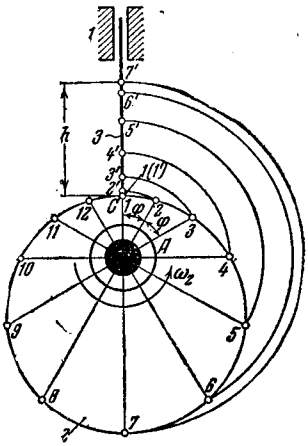


Рис. 4.35. Схема кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

Определив перемещения $(1-2')$, $(1-3')$, $(1-4')$, ..., строим в произвольно выбранных масштабах μ_φ и μ_s диаграмму $s_C = s_C(\varphi_2)$ (рис. 4.36).

Для построения диаграммы аналога скорости $v_C = v_C(\varphi)$ пользуемся зависимостью

$$v_C = \frac{ds_C}{d\varphi_2} = \frac{d[s_C(\varphi)]}{d\varphi_2}, \qquad (4.65)$$

которая позволяет определить скорости v_C графическим дифференцированием кривой $s_C = s_C(\varphi)$. Для этого продолжаем ось абсцисс (рис. 4.36) влево и откладываем отрезок $(O1)$, равный k *мм*. Далее в точках *1*, *2'*, *3'*, *4'*, ... кривой $s_C = s_C(t)$ проводим касательные, а через точку O — лучи *O1''*, *O2''*, *O3''*, ..., параллельные проведенным касательным. Лучи *O1''*, *O2''*, *O3''*, ... отсекут на оси s_C отрезки

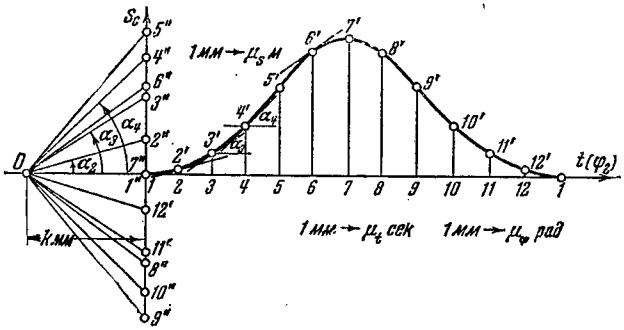


Рис. 4.36. График пути толкателя механизма со схемой, показанной на рис. 4.35.

$(1—2'')$, $(1—3'')$, $(1—4'')$, ..., пропорциональные скоростям v_C в положениях *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, ... Имеем

$$v_C = \frac{ds_C}{d\varphi_2} = \frac{\mu_s}{\mu_\varphi} \operatorname{tg} \alpha, \tag{4.66}$$

где α — угол наклона касательной, проведенной в соответствующей точке кривой $s_C = s_C(\varphi_2)$. Помножим и разделим выражение (4.66) на величину, равную k *мм*. Имеем

$$v_C = \frac{\mu_s}{\mu_\varphi k} k \operatorname{tg} \alpha. \tag{4.67}$$

Но величина $k \operatorname{tg} \alpha$ для касательных, проведенных в различных точках, равняется отрезкам $(1—2'')$, $(1—3'')$, $(1—4'')$, ..., отсекаемым лучами *O2''*, *O3''*, *O4''*, ... на оси s_C. Следовательно, скорости v_C пропорциональны отрезкам $(1—2'')$, $(1—3'')$, $(1—4'')$, ..., измеренным в миллиметрах. Масштаб μ_v скоростей из уравнения (4.67) равен

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_\varphi k} \left[\frac{м \cdot рад^{-1}}{мм} \right]. \tag{4.68}$$

Полученные отрезки, пропорциональные скорости v_C точки C, откладываем на соответствующих ординатах диаграммы $v_C = v_C(\varphi_2)$ (рис. 4.37).

Для построения диаграммы $a_C = a_C(\varphi_2)$ пользуемся зависимостью

$$a_C = \frac{dv_C}{d\varphi_2} = \frac{d[v_C(t)]}{d\varphi_2}, \tag{4.69}$$

на основании которой ускорения a_C могут быть определены графическим дифференцированием кривой $v_C = v_C(\varphi)$ (рис. 4.37). Для этого, так же как и для определения скоростей v_C, откладываем отрезок $O'1$ (рис. 4.37), равный k *мм*; в точках $2', 3', 4', \ldots$ кривой

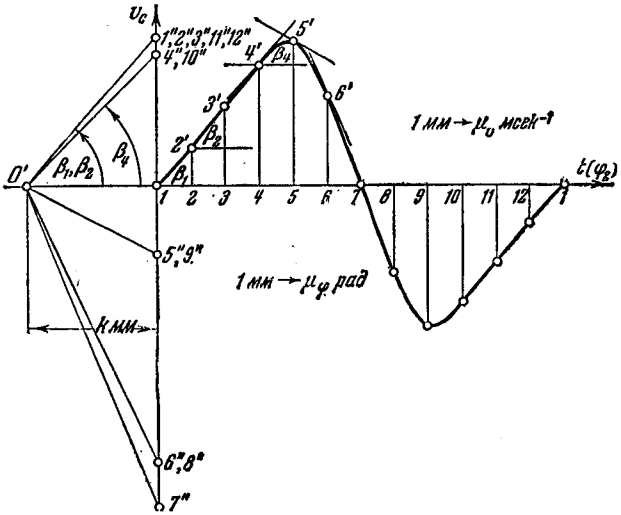


Рис. 4.37. График скорости толкателя механизма, схема которого показана на рис. 4.35.

$v_C = v_C(\varphi_2)$ проводим касательные, а через точку O' — лучи $O'2''$, $O'3''$, ..., параллельные проведенным касательным. Имеем

$$a_C = \frac{\mu_v}{\mu_\varphi} \operatorname{tg}\beta = \frac{\mu_v}{\mu_\varphi k} k \operatorname{tg}\beta, \tag{4.70}$$

где β — угол наклона касательной, проведенной в соответствующей точке кривой $v_C = v_C(\varphi_2)$. Так как величина $k \operatorname{tg}\beta$ для касательных, проведенных в различных точках, равна отрезкам (1—$2''$), (1—$3''$), (1—$4''$), ..., то, следовательно, ускорения равны отрезкам (1—2″), (1—$3''$), (1—$4''$) и т. д., измеренным в миллиметрах и помноженным на масштаб μ_a, определяемый из формул (4.70) и (4.68),

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_\varphi k} = \frac{\mu_s}{\mu_\varphi^2 k^2} \left[\frac{м \cdot рад^{-2}}{мм}\right]. \tag{4.71}$$

Полученные отрезки, пропорциональные ускорению a_C точки C, откладываем на соответствующих ординатах диаграммы $a_C = a_C(\varphi_2)$ (рис. 4.38).

Метод графического дифференцирования не является достаточно точным. Поэтому его следует применять для приближенного определения скоростей и ускорений. Для проверки правильности построения можно пользоваться очевидными условиями, что скорость v_C должна быть равна нулю (рис. 4.37, положение 7), когда перемещение s_C (рис. 4.36) имеет максимальное значение; точно так же ускорение a_C будет равно нулю в положении, когда скорость v_C имеет максимальное значение, и т. д.

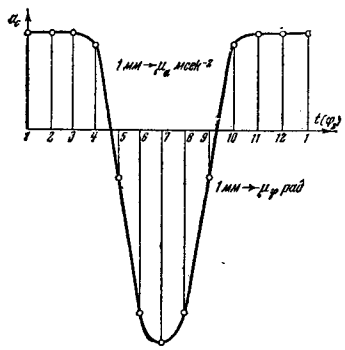


Рис. 4.38. График ускорения толкателя механизма со схемой, показанной на рис. 4.35.

2°. В рассмотренном механизме задача об определении скоростей и ускорений сводилась к двукратному графическому дифференцированию заданной кривой перемещений. В ряде задач теории механизмов приходится пользоваться методом графического интегрирования. Пусть, например, задана (рис. 4.39, *а*) диаграмма ускорения a_C какой-либо точки механизма, имеющей прямолинейное движение, в функции времени t. Требуется построить диаграммы $v_C = v_C(t)$ и $s_C = s_C(t)$. Ось абсцисс (рис. 4.39, *а*) разбивается на равные участки и из точек *1*, *2*, *3*, ... проводятся ординаты (*1—1'*), (*2—2'*), (*3—3'*), ... Приращение скорости v_C за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно

$$v_{C_2} - v_{C_1} = \int_{t_1}^{t_2} a_C\, dt. \qquad (4.72)$$

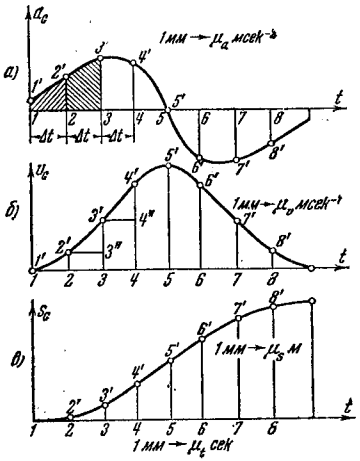


Рис. 4.39. К графическому интегрированию графиков: *а*) график ускорения прямолинейно движущейся точки; *б*) график ее скорости; *в*) график ее пути.

Интеграл, стоящий в правой части соотношения (4.72), может быть выражен через площадь $[11'2'2]$ $мм^2$, ограниченную осью абсцисс, ординатами (*1—1'*), (*2—2'*) и кривой $a_C = a_C(t)$ (рис. 4.39, *а*), причем эту площадь надо умножить на произведение масштабов μ_a и μ_t. Имеем

$$v_{C_2} - v_{C_1} = \mu_a \cdot \mu_t \quad \text{пл. } [11'2'2]. \qquad (4.73)$$

Площадь $[1'1'2'2]$ может быть определена планиметром, наложением на кривую $a_C = a_C(t)$ миллиметровой сетки, построением кривой на миллиметровой бумаге или путем замены площади

[*11'2'2*] равновеликим прямоугольником или трапецией. Подставляя полученное значение площади, подсчитанное в квадратных миллиметрах, в равенство (4.73), определяем приращение скорости v_C за время $\Delta t = t_2 - t_1$. Если скорость v_{C_1} в положении *1* равнялась нулю (рис. 4.39, *б*), то скорость v_{C_2} в положении *2* равна

$$v_{C_2} = \mu_a \mu_t \cdot \text{пл.}[11'2'2].$$

Полученное значение скорости v_{C_2} откладываем в масштабе μ_v на ординате, проведенной в точке *2* (рис. 4.39, *б*) в виде отрезка (*2—2'*) *мм*. Имеем

$$v_{C_2} = \mu_v (2 - 2').$$

Далее определяем площадь [*22'3'3*] (рис. 4.39, *а*). Имеем

$$v_{C_3} - v_{C_2} = \int_{t_2}^{t_3} a_C \, dt = \mu_a \mu_t \cdot \text{пл.}[22'3'3].$$

Полученное значение приращения скорости v_C на участке $t_2 - t_3$ откладываем в виде отрезка (*3''—3*) на ординате, проведенной в точке *3* (рис. 4.39, *б*), прибавляя к отрезку (*3'—3''*) отрезок (*2—2'*). Производя такие же построения для последующих промежутков времени, получаем диаграмму $v_C = v_C(t)$. Для большей точности вычислений можно подсчет площадей вести от положения *1*. Тогда, например, скорость v_{C_3} (рис. 4.39, *б*) определится из условия

$$v_{C_3} = \int_{t_1}^{t_3} a_C \, dt = \mu_a \mu_t \cdot \text{пл.}[11'3'3] = \mu_v (3 - 3').$$

Скорость v_{C_4} определится из условия

$$v_{C_4} = \int_{t_1}^{t_4} a_C \, dt = \mu_a \mu_t \cdot \text{пл.}[11'4'4] = \mu_v (4 - 4')$$

и т. д. Соответствующие отрезки (*3—3'*), (*4—4'*), ... откладываем на ординатах, проведенных через точки *3*, *4*, ... (рис. 4.39, *б*).

Аналогично может быть построена диаграмма $s_C = s_C(t)$ (рис. 4.39, *в*) графическим интегрированием диаграммы $v_C = v_C(t)$ (рис. 4.39, *б*).

Для тех же промежутков времени Δt будем иметь

$$s_{C_2} = \int_{t_1}^{t_2} v_C \, dt = \mu_v \mu_t \cdot \text{пл.}[11'2'2] = \mu_s (2 - 2'),$$

$$s_{C_3} = \int_{t_1}^{t_3} v_C \, dt = \mu_v \mu_t \cdot \text{пл.}[11'3'3] = \mu_s (3 - 3'),$$

где площади [*11'2'2*], [*11'3'3*], ... подсчитываются по диаграмме $v_C = v_C(t)$ (рис. 4.39, *б*), а отрезки (*2—2'*), (*3—3'*), ... откладываются в масштабе μ_s на ординатах диаграммы $s_C = s_C(t)$ (рис. 4.39, *в*).

ГЛАВА V

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

§ 23. Механизм шарнирного четырехзвенника

1°. В главе IV были изложены графические методы кинематического анализа плоских механизмов. Графические методы наглядны и универсальны, так как позволяют определять положения скорости и ускорения звеньев механизмов любой структуры. Но графические методы не всегда обладают той точностью, которая бывает необходима в некоторых конкретных задачах анализа механизмов. В этих случаях предпочтительнее применение аналитических методов, с помощью которых исследование кинематики механизмов может быть сделано с любой степенью точности. Кроме того, аналитические зависимости позволяют выявлять взаимосвязь кинематических параметров механизма с его метрическими параметрами, т. е. размерами звеньев. Роль аналитических методов кинематического анализа механизмов особенно возросла в последние годы в связи с тем, что, имея аналитические выражения, связывающие между собой основные кинематические и структурные параметры механизма, можно всегда составить программу вычислений для счетно-решающей машины и с помощью машины получить все необходимые результаты. Начнем рассмотрение аналитических методов исследования механизмов на примере механизма шарнирного четырехзвенника.

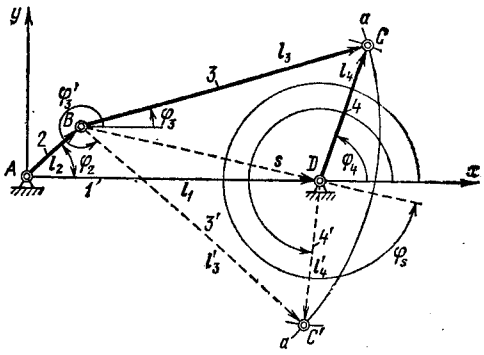


Рис. 5.1. Механизм шарнирного четырехзвенника с двумя векторными контурами.

2°. Как это было показано выше в § 17, *3°*, при присоединении двухповодковой группы *BCD*, состоящей из звеньев *3* и *4* к ведущему звену *2* и стойке *1* (рис. 5.1), эта группа может образовать два симметрично расположенных относительно прямой *BD* треугольника: *BCD* и *BC'D*. Таким образом, при различных способах присоединения двухповодковой группы могут быть получены два различных четырехзвенных шарнирных механизма: *ABCD* и *ABC'D*. Если механизм собран так, что оси его звеньев образуют контур *ABC'D*, то положения звеньев *2*, *3* и *4* механизма будут соответственно определяться углами φ_2, φ_3 и φ_4 (рис. 5.1). Если же механизм собран так, что оси его звеньев образуют контур *ABCD*, то положение

звеньев *2*, *3* и *4* будут определяться углами φ_2, φ_3' и φ_4' (рис. 5.1). Прямая *BD* и угол наклона φ_s этой прямой к оси *Ax* будет общим для обоих контуров *ABCD* и *ABC'D*.

3°. Аналитическое исследование плоских механизмов удобнее всего вести методом векторных контуров, подробно разработанным В. А. Зиновьевым. Так, для примера, показанного на рис. 5.1, удобно задачу о положениях звеньев решать, разбивая замкнутый контур *ABCD* на два треугольника *ABD* и *BCD*. Аналогично замкнутый контур *ABC'D* можно разбить на два треугольника *ABD* и *BC'D*. Тогда для этих контуров могут быть всегда составлены следующие векторные уравнения:

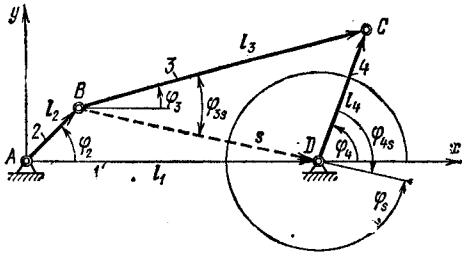


Рис. 5.2. К определению положений звеньев механизма шарнирного четырехзвенника.

для контура *ABD*

$$\boldsymbol{l}_2+\boldsymbol{s}-\boldsymbol{l}_1=0, \qquad (5.1)$$

для контура *BCD*

$$\boldsymbol{l}_3-\boldsymbol{l}_4-\boldsymbol{s}=0 \qquad (5.2)$$

и для контура *BC'D*

$$\boldsymbol{l}_3'-\boldsymbol{l}_4'-\boldsymbol{s}=0, \qquad (5.3)$$

где $\boldsymbol{s}$ — переменный по модулю вектор, определяющий положение точек *B* и *D*.

Рассмотрим вариант сборки, показанный на рис. 5.2. Для этого варианта при обходе контура по часовой стрелке имеет место следующий порядок букв в контуре: *BCDB*. Этот порядок букв контура должен сохраняться за полный оборот звена *2*.

Проектируем векторы уравнения (5.1) на оси координат *Ax* и *Ay*. Имеем

$$l_2\cos\varphi_2+s\cos\varphi_s-l_1=0 \qquad (5.4)$$

и

$$l_2\sin\varphi_2+s\sin\varphi_s=0. \qquad (5.5)$$

Из уравнений (5.4) и (5.5) получаем

$$\operatorname{tg}\varphi_s=\frac{-l_2\sin\varphi_2}{-l_2\cos\varphi_2+l_1}. \qquad (5.6)$$

Четверть тригонометрического круга, в которой расположен угол φ_s, полностью определится по знаку числителя и знаменателя выражения (5.6), пропорциональным $\sin\varphi_2$ и $\cos\varphi_2$. Нетрудно далее из уравнения (5.5) определить модуль вектора $\boldsymbol{s}$. Имеем

$$s=-l_2\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_s}. \qquad (5.7)$$

Далее рассматриваем треугольник BCD. Углы наклона векторов $\boldsymbol{l}_3$ и $\boldsymbol{l}_4$ к вектору $\boldsymbol{s}$ обозначаем соответственно φ_{3s} и φ_{4s}.

Имеем тогда следующие два уравнения:

$$l_3^2 = l_4^2 + s^2 + 2l_4 s\cos\varphi_{4s} \tag{5.8}$$

и

$$l_4^2 = l_3^2 + s^2 - 2l_3 s\cos\varphi_{3s}. \tag{5.9}$$

Из уравнений (5.8) и (5.9) определяем углы φ_{3s} и φ_{4s}. Имеем

$$\varphi_{4s} = \arccos\frac{l_3^2 - l_4^2 - s^2}{2l_4 s} \tag{5.10}$$

и

$$\varphi_{3s} = \arccos\frac{l_3^2 - l_4^2 + s^2}{2l_3 s}. \tag{5.11}$$

Углы φ_{4s} и φ_{3s} в общем случае могут иметь знак плюс или минус, т. е. удовлетворять двум возможным вариантам сборки (рис. 5.1). Так как мы условились рассматривать вариант сборки $BCDB$ (рис. 5.2), то углы φ_{4s} и φ_{3s} будут всегда иметь один и тот же знак и вектор $\boldsymbol{l}_3$ будет всегда расположен выше вектора $\boldsymbol{s}$.

Далее имеем

$$\varphi_{4s} = \varphi_4 - \varphi_s \tag{5.12}$$

и

$$\varphi_{3s} = \varphi_3 - \varphi_s, \tag{5.13}$$

откуда

$$\varphi_4 = \varphi_{4s} + \varphi_s \tag{5.14}$$

и

$$\varphi_3 = \varphi_{3s} + \varphi_s. \tag{5.15}$$

Таким образом, если заданы длины звеньев механизма и угол поворота φ_2 звена *2*, то для каждого положения звена *2* могут быть определены углы φ_3 и φ_4, т. е. положения звеньев *3* и *4*.

Рассмотренный метод определения углов φ_3 и φ_4 через промежуточные функции φ_s, φ_{3s}, φ_{4s} и s легко может быть запрограммирован и введен в счетно-решающую машину.

4°. Нетрудно получить функции положения звена *3* или *4*. Например, функция положения $\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_2)$ может быть получена из уравнения (5.14). Подставляя в это уравнение значения φ_{4s} и φ_s из уравнения (5.10) и (5.6), получаем

$$\varphi_4 = \varphi_{4s} + \varphi_s = \arccos\frac{l_3^2 - l_4^2 - s^2}{2l_4 s} + \operatorname{arctg}\frac{-l_2\sin\varphi_2}{-l_2\cos\varphi_2 + l_1}. \tag{5.16}$$

Подставляя в уравнение (5.16) значение s, полученное из треугольника ABD (рис. 5.2) и равное

$$s = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \varphi_2},$$

получим

$$\varphi_4 = \arccos \frac{l_3^2 + l_4^2 - l_1^2 - l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \varphi_2}{2l_4 \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \varphi_2}} + \operatorname{arctg} \frac{-l_2 \sin \varphi_2}{-l_2 \cos \varphi_2 + l_1}. \quad (5.17)$$

Аналогично может быть получена функция положения $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2)$.

Пример. Рассмотрим механизм шарнирного четырехзвенника $ABCD$, схема которого показана на рис. 5.2.

Определим углы φ_3 и φ_4 наклона к стойке звеньев *3* и *4* механизма $ABCD$, если длины звеньев соответственно равны $l_1 = 24$, $l_2 = 6$, $l_3 = 25$ и $l_4 = 12$ и кривошип AB образует со стойкой угол $\varphi_2 = 45°$.

Из уравнения (5.6) получаем

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{-l_2 \sin \varphi_2}{-l_2 \cos \varphi_2 + l_1} = \frac{-6 \cdot \sin 45°}{-6 \cdot \cos 45° + 24} = \frac{-4{,}24}{19{,}76} = -0{,}214.$$

Так как числитель, пропорциональный $\sin \varphi_2$, отрицателен, а знаменатель, пропорциональный $\cos \varphi_2$, положителен, то вектор s расположен в четвертой четверти и угол φ_s равен

$$\varphi_s = 360° - 12° = 348°.$$

Модуль вектора s равен, согласно уравнению (5.7),

$$s = \left| -l_1 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_s} \right| = \left| -6 \frac{\sin 45°}{\sin (12°)} \right| = 20{,}4.$$

Углы φ_{4s} и φ_{3s} определятся из уравнений (5.10) и (5.11). Имеем

$$\cos \varphi_{4s} = \frac{l_3^2 - l_4^2 - s^2}{2l_4 s} = \frac{25^2 - 12^2 - 20{,}4^2}{2 \cdot 12 \cdot 20{,}4} = 0{,}135$$

и

$$\cos \varphi_{3s} = \frac{l_3^2 - l_4^2 + s^2}{2l_3 s} = \frac{25^2 - 12^2 + 20{,}4^2}{2 \cdot 25 \cdot 20{,}4} = 0{,}878.$$

Следовательно, $\varphi_{4s} = 82°10'$ и $\varphi_{3s} = 28°40'$. Углы φ_4 и φ_3 будут соответственно равны

$$\varphi_4 = \varphi_{4s} + \varphi_s = 82°10' - 12° = 70°10'$$

и

$$\varphi_3 = \varphi_{3s} + \varphi_s = 28°40' - 12° = 16°41'.$$

5°. Для определения скоростей и ускорений звеньев механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 5.3) составляем векторное уравнение замкнутости контура $ABCD$. Имеем

$$\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3 = \boldsymbol{l}_4. \quad (5.18)$$

Проектируя это уравнение на оси Ax и Ay, получаем

$$\left.\begin{aligned} -l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 &= l_4 \cos \varphi_4 \\ \text{и} \qquad l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 &= l_4 \sin \varphi_4, \end{aligned}\right\} \quad (5.19)$$

где φ_2, φ_3 и φ_4 — углы, образованные осями звеньев *2*, *3* и *4* с осью Ax.

Для определения аналогов угловых скоростей ω_3 и ω_4 звеньев *3* и *4* дифференцируем уравнения (5.19) по обобщенной координате φ_2. Получаем

$$\left.\begin{aligned} -l_2\sin\varphi_2 - l_3\sin\varphi_3\frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} &= -l_4\sin\varphi_4\frac{d\varphi_4}{d\varphi_3},\\ l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3\frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} &= l_4\cos\varphi_4\frac{d\varphi_4}{d\varphi_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.20)$$

Имея в виду, что $d\varphi_3/d\varphi_2 = i_{32}$ есть аналог угловой скорости ω_3 звена *3* и $d\varphi_4/d\varphi_2 = i_{42}$ есть аналог угловой скорости ω_4 звена *4* (см. § 16), получаем

$$\left.\begin{aligned} l_2\sin\varphi_2 + i_{32}l_3\sin\varphi_3 &= i_{42}l_4\sin\varphi_4,\\ l_2\cos\varphi_2 + i_{32}l_3\cos\varphi_3 &= i_{42}l_4\cos\varphi_4. \end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

Величины i_{32} и i_{42}, входящие в уравнение (5.21), называются также *передаточными отношениями*, так как они равны отношениям угловых скоростей ω_3 и ω_4 к угловой скорости ведущего звена. Имеем

$$i_{32} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \frac{d\varphi_3/dt}{d\varphi_2/dt} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

и

$$i_{42} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_2} = \frac{d\varphi_4/dt}{d\varphi_2/dt} = \frac{\omega_4}{\omega_2}.$$

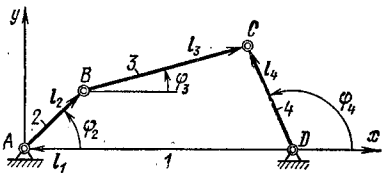


Рис. 5.3. К определению скоростей и ускорений механизма шарнирного четырехзвенника.

Из углов, входящих в первое уравнение (5.21), вычитаем общий угол φ_3, что соответствует повороту осей координат xAy (рис. 5.3) на общий угол φ_3. Имеем

$$l_2\sin(\varphi_2 - \varphi_3) = i_{42}l_4\sin(\varphi_4 - \varphi_3),$$

откуда получаем выражение для аналога i_{42} угловой скорости ω_4

$$i_{42} = \frac{l_2\sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_4\sin(\varphi_4 - \varphi_3)}. \qquad (5.22)$$

После аналогичного преобразования того же уравнения поворотом осей координат на угол φ_4 получаем выражение для аналога i_{32} угловой скорости ω_3

$$i_{32} = -\frac{l_2\sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_3\sin(\varphi_3 - \varphi_4)}. \qquad (5.23)$$

Для определения угловых ускорений ε_4 и ε_3 звеньев *3* и *4* дифференцируем по обобщенной координате φ_2 уравнения (5.21), что

приводит к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} l_2\cos\varphi_2 + i_{32}^2 l_3\cos\varphi_3 + i'_{32} l_3\sin\varphi_3 &= i_{42}^2 l_4\cos\varphi_4 + i'_{42} l_4\sin\varphi_4,\\ -l_2\sin\varphi_2 - i_{32}^2 l_3\sin\varphi_3 + i'_{32} l_3\cos\varphi_3 &= -i_{42}^2 l_4\sin\varphi_4 + i'_{42} l_4\cos\varphi_4, \end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

где i_{32} и i_{42} — аналоги угловых скоростей, i'_{32} и i'_{42} — аналоги угловых ускорений, равные производным по обобщенной координате от соответствующих аналогов угловых скоростей i_{32} и i_{42}.

Величины аналогов i'_{32} и i'_{42} можно определить, если выполнить преобразования координат последовательным поворотом осей координат на углы φ_3 и φ_4. Имеем

$$i'_{42} = \frac{l_2\cos(\varphi_2-\varphi_3) + i_{32}^2 l_3 - i_{42}^2 l_4\cos(\varphi_4-\varphi_3)}{l_4\sin(\varphi_4-\varphi_3)}, \tag{5.25}$$

$$i'_{32} = \frac{l_2\cos(\varphi_2-\varphi_4) - i_{42}^2 l_4 + i_{32}^2 l_3\cos(\varphi_3-\varphi_4)}{-l_2\sin(\varphi_3-\varphi_4)}. \tag{5.26}$$

Истинные скорости ω_3, ω_4 и ускорения ε_3 и ε_4 звеньев *3* и *4*, согласно формулам (4.3) и (4.4), равны

$$\omega_3 = \omega_2 i_{32},\quad \omega_4 = \omega_2 i_{42},\quad \varepsilon_3 = \omega_2^2 i'_{32} + \varepsilon_2 i_{32},\quad \varepsilon_4 = \omega_2^2 i'_{42} + \varepsilon_2 i_{42},$$

где ω_2 и ε_2 — заданные угловые скорость и ускорение звена *2*.

§ 24. Кривошипно-ползунные механизмы

1°. Следующим четырехзвенным механизмом, широко применяемым в технике, является *кривошипно-ползунный механизм* (рис. 5.4).

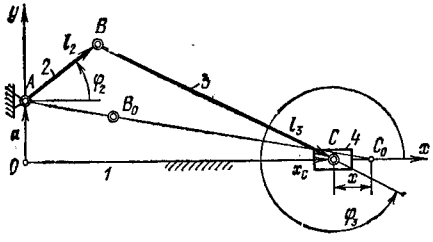


Рис. 5.4. Схема кривошипно-ползунного механизма с осью направляющей, не проходящей через ось вращения кривошипа.

Как и для шарнирного четырехзвенника, условимся рассматривать тот случай сборки механизма, когда при обходе по часовой стрелке сохраняется контур с последовательностью *OABCO*.

Для определения скоростей и ускорений звеньев представим контур *OABCO* как сумму векторов

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3 = \boldsymbol{x}_C. \tag{5.27}$$

Проектируя это векторное уравнение на оси *Ox* и *Oy*, получаем

$$\left.\begin{aligned} l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 &= x_C,\\ a + l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

Из второго уравнения (5.28) имеем

$$\sin\varphi_3 = -\frac{l_2\sin\varphi_2 + a}{l_3}. \tag{5.29}$$

Нетрудно видеть, что вектор l_3 может находиться только в первой или четвертой четвертях, т. е. $\cos\varphi_3$ всегда положителен.

Из первого уравнения (5.28) получаем величину перемещения x_C. Имеем

$$x_C = l_2\cos\varphi_2 + l_3\sqrt{1-\left(\frac{l_2\sin\varphi_2+a}{l_3}\right)^2}. \tag{5.30}$$

В некоторых случаях величину перемещения ползуна *4* удобнее измерять от крайнего правого предельного положения механизма, когда точка C занимает положение C_0 (рис. 5.4).

Тогда величина перемещения x будет равна

$$x = OC_0 - x_C = \sqrt{(l_2+l_3)^2-a^2} - l_2\cos\varphi_2 - l_3\sqrt{1-\left(\frac{l_2\sin\varphi_2+a}{l_3}\right)^2}. \tag{5.31}$$

2°. Уравнения для определения угловых скоростей и угловых ускорений получим двукратным дифференцированием уравнений (5.28) по обобщенной координате φ_2.

Для определения угловой скорости ω_3 шатуна *3* и скорости v_C ползуна *4* имеем

$$-l_2\sin\varphi_2 - i_{32}l_3\sin\varphi_3 = v_{C_\varphi}, \qquad l_2\cos\varphi_2 + i_{32}l_3\cos\varphi_3 = 0, \tag{5.32}$$

где $i_{32} = d\varphi_3/d\varphi_2$ и $v_{C_\varphi} = dx_C/d\varphi_2$ — соответствующие аналоги скоростей. Аналог скорости v_{C_φ} определяется из первого уравнения (5.32), если подставить в него значение аналога угловой скорости i_{32} шатуна *3* из второго уравнения (5.32). Имеем

$$i_{32} = -\frac{l_2\cos\varphi_2}{l_3\cos\varphi_3} \quad \text{и} \quad v_{C_\varphi} = l_2\frac{\sin(\varphi_3-\varphi_2)}{\cos\varphi_3}. \tag{5.33}$$

Для определения аналогов углового ускорения i'_{32} шатуна *3* и аналога ускорения $a_{C\varphi}$ ползуна *4* дифференцируем по φ_2 уравнения (5.32)

$$\left.\begin{aligned} -l_2\cos\varphi_2 - i_{32}^2 l_3\cos\varphi_3 - i'_{32}l_3\sin\varphi_3 &= a_{C_\varphi},\\ -l_2\sin\varphi_2 - i_{32}^2 l_3\sin\varphi_3 + i'_{32}l_3\cos\varphi_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

где $i'_{32} = di_{32}/d\varphi_2$ и $a_{C_\varphi} = dv_C/d\varphi_2$ — аналоги ускорений.

Из второго уравнения (5.34) определяем аналог углового ускорения

$$i'_{32} = \frac{l_2\sin\varphi_2 + i_{32}^2 l_3\sin\varphi_3}{l_3\cos\varphi_3}. \tag{5.35}$$

Определив аналог углового ускорения i'_{32}, можно, подставив его значение в первое уравнение (5.34), определить и аналог a_{C_φ}.

Действительные скорости v_C, ω_3 и ускорения a_C и ε_3 равны

$$v_C = \omega_2 v_{C_\varphi}, \qquad \omega_3 = \omega_2 i_{32}, \qquad a_C = \omega_2^2 a_{C_\varphi} + \varepsilon_2 v_C, \qquad \varepsilon_3 = \omega_2^2 i'_{32} + \varepsilon_2 i_{32},$$

где ω_2 и ε_2 — заданные угловые скорость и ускорение звена *2*.

Если ось Ax направляющей ползуна *4* (рис. 5.5) проходит через точку A, то во втором уравнении (5.28) величина a обращается в нуль и уравнение (5.29) принимает вид

$$\sin\varphi_3 = -\frac{l_2}{l_3}\sin\varphi_2. \tag{5.36}$$

Уравнения (5.32) — (5.35) остаются без изменения.

Для перемещений x_C и x получаем соответственно

$$x_C = l_2\cos\varphi_2 + l_3\sqrt{1-\frac{l_2^2}{l_3^2}\sin^2\varphi_2} \tag{5.37}$$

и

$$x = (l_2+l_3) - l_2\cos\varphi_2 - l_3\sqrt{1-\frac{l_2^2}{l_3^2}\sin^2\varphi_2}. \tag{5.38}$$

Для определения аналогов скоростей и ускорений механизмов можно использовать уравнения (5.32) — (5.35).

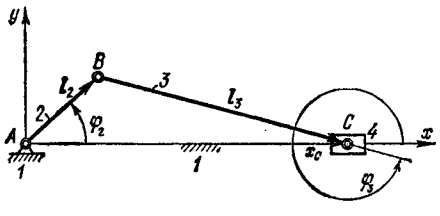


Рис. 5.5. Схема кривошипно-ползунного механизма с осью направляющей, проходящей через ось вращения кривошипа.

3°. В некоторых инженерных задачах можно пользоваться приближенными уравнениями для определения величин x, v_{C_φ} и a_{C_φ}. Обычно приближенными формулами пользуются в тех случаях, когда $\lambda = \frac{l_2}{l_3} \leqslant \frac{1}{3}$, т. е. длина шатуна *3* (рис. 5.5) существенно больше длины кривошипа *2*. Для получения приближенных формул для x, v_{C_φ} и a_{C_φ} раскладываем радикал, входящий в уравнения (5.38), в ряд по формуле бинома Ньютона. Имеем

$$\left(1-\frac{l_2^2}{l_3^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2} = (1-\lambda^2\sin^2\varphi)^{1/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi_2 - \frac{1}{8}\lambda^4\sin^4\varphi_2 - \ldots \tag{5.39}$$

Если ограничиться двумя первыми членами ряда (5.39) и учесть, что

$$\sin^2\varphi_2 = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi_2),$$

то уравнение для определения перемещения x будет иметь вид

$$x = l_2\left[\left(1+\frac{\lambda}{4}\right) - \left(\cos\varphi_2 + \frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi_2\right)\right]. \tag{5.40}$$

Соответственно аналог скорости v_{C_φ} и аналог ускорения a_{C_φ} определятся по формулам

$$v_{C_\varphi} = l_2\left(\sin\varphi_2 + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi_2\right) \tag{5.41}$$

и

$$a_{C_\varphi} = l_2\left(\cos\varphi_2 + \lambda\cos 2\varphi_2\right). \tag{5.42}$$

4°. Кривошипно-ползунные механизмы широко применяются в механизмах с гидро- или пневмоустройствами. На рис. 5.6 показан механизм с поршнем *4*, скользящим в неподвижном цилиндре *H*. Ведущим звеном в этом механизме является поршень *4*, поэтому в качестве обобщенной координаты следует выбрать перемещение x_C точки *C* штока поршня *4*.

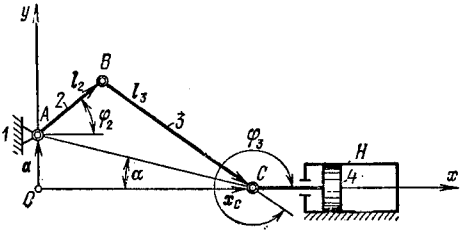


Рис. 5.6. Схема кривошипно-ползунного механизма с ведущим ползуном.

Векторное уравнение замкнутости контура *OABCO* будет тем же, что и для механизма, показанного на рис. 5.4, поэтому для механизма рис. 5.6 будут удовлетворяться уравнения (5.27), (5.28) и (5.29). Из уравнения (5.29) следует:

$$\cos\varphi_3 = \sqrt{1 - \frac{l_2\sin^2\varphi_2 + a}{l_3}} = \frac{1}{l_3}\sqrt{l_3^2 - (l_2\sin\varphi_2 + a)^2}. \tag{5.43}$$

Подставляя выражение (5.43) в первое уравнение (5.28), получаем

$$l_2\cos\varphi_2 + \sqrt{l_3^2 - (l_2\sin\varphi_2 + a)^2} = x_C \tag{5.44}$$

и далее

$$l_2\cos\varphi_2 - x_C = -\sqrt{l_3^2 - (l_2\sin\varphi_2 + a)^2}. \tag{5.45}$$

Возводим правую и левую части уравнения (5.45) в квадрат и после несложных преобразований получаем

$$2l_2x_C\left(\frac{a}{x_C}\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\right) = l_3^2 - l_2^2 - a^2 - x_C^2. \tag{5.46}$$

Из рис. 5.6 следует, что

$$\frac{a}{x_C} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{5.47}$$

Тогда уравнение (5.46) перепишем так:

$$2l_2x_C(\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi_2-\cos\varphi_2)=C^2-x_C^2, \tag{5.48}$$

где постоянная C равна

$$C^2=l_3^2-l_2^2-a^2.$$

Из уравнения (5.48) получаем

$$-\frac{2l_2x_C}{\cos\alpha}\cos(\alpha+\varphi_2)=C^2-x_C^2. \tag{5.49}$$

Так как

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{x_C^2}}}, \tag{5.50}$$

то уравнение (5.49) получает следующий вид:

$$\cos(\alpha+\varphi_2)=\frac{x_C^2-C^2}{2l_2x_C\sqrt{1+\frac{a^2}{x_C^2}}}. \tag{5.51}$$

Отсюда окончательно получаем выражение для угла φ_2 поворота звена *2* в функции переменного расстояния x_C поршня *4* вдоль оси Ox. Имеем

$$\varphi_2=-\operatorname{arctg}\frac{a}{x_C}+\arccos\frac{x_C^2-C^2}{2l_2\sqrt{x_C^2-a^2}}. \tag{5.52}$$

Для центрального кривошипно-шатунного механизма $a=0$, и уравнение (5.52) принимает вид

$$\varphi_2=\arccos\frac{x_C^2-C^2}{2l_2x_C}. \tag{5.53}$$

Аналоги угловой скорости φ_2' и углового ускорения φ_2'' по обобщенной координате x_C могут быть получены путем двукратного дифференцирования выражения (5.52) или (5.53).

§ 25. Кулисные механизмы

1°. Рассмотрим определение перемещений, скоростей и ускорений звеньев кулисного механизма, показанного на рис. 5.7. Из векторного контура $ABCA$ имеем

$$\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{l}_4. \tag{5.54}$$

Уравнения проекций на оси координат xBy будут

$$l_2\cos\varphi_2=l_4\cos\varphi_4,\qquad l_1+l_2\sin\varphi_2=l_4\sin\varphi_4. \tag{5.55}$$

Для определения угла φ_4 разделим второе уравнение на первое. Получим

$$\operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{l_1 + l_2 \sin\varphi_2}{l_2 \cos\varphi_2}. \tag{5.56}$$

Определив угол φ_4, находим величину l_4

$$l_4 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \sin\varphi_2}.$$

Для определения аналогов скоростей звеньев механизма дифференцируем по обобщенной координате φ_2 уравнения (5.55). Получаем

$$\left.\begin{aligned} -l_2 \sin\varphi_2 &= -i_{42} l_4 \sin\varphi_4 + (v_{C_4C})_\varphi \cos\varphi_4, \\ l_2 \cos\varphi_2 &= i_{42} l_4 \cos\varphi_4 + (v_{C_4C})_\varphi \sin\varphi_4, \end{aligned}\right\} \tag{5.57}$$

где $i_{42} = d\varphi_4/d\varphi_2$ — аналог угловой скорости звена *4*, а $v_{C_4C} = dv_{C_4C}/d\varphi_2$ — аналог относительной скорости скольжения звена *4* вдоль оси ползуна *3*.

Из углов первого и второго уравнения вычитаем угол φ_4. Имеем

$$(v_{C_4C})_\varphi = -l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4), \tag{5.58}$$

$$i_{42} = \frac{l_2}{l_4} \cos(\varphi_2 - \varphi_4). \tag{5.59}$$

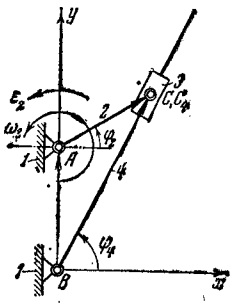


Рис. 5.7. Кинематическая схема кулисного механизма в виде замкнутого векторного контура.

Для определения ускорений звеньев механизма дифференцируем по обобщенной координате φ_2 уравнения (5.57):

$$\left.\begin{aligned} -l_2 \cos\varphi_2 = &-i_{42}^2 l_4 \cos\varphi_4 - i'_{42} l_4 \sin\varphi_4 - \\ &-(a^{к}_{C_4C})_\varphi \sin\varphi_4 + (a^{r}_{C_4C})_\varphi \cos\varphi_4, \\ -l_2 \sin\varphi_2 = &-i_{42}^2 l_4 \sin\varphi_4 + i'_{42} l_4 \cos\varphi_4 + \\ &+(a^{к}_{C_4C})_\varphi \cos\varphi_4 + (a^{r}_{C_4C})_\varphi \sin\varphi_4. \end{aligned}\right\} \tag{5.60}$$

Вычитая из углов первого и второго уравнений (5.60) угол φ_4, получаем

$$(a^{r}_{C_4C})_\varphi = i_{42}^2 l_4 - l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4), \tag{5.61}$$

$$i'_{42} = -\frac{(a^{к}_{C_4C})_\varphi + l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_4}, \tag{5.62}$$

где i'_{42}, $(a^{к}_{C_4C})_\varphi$ и $(a^{r}_{C_4C})_\varphi$ — соответствующие аналоги углового, кориолисова и релятивного ускорений. Определение истинных

скоростей и ускорений звеньев механизма при заданных угловой скорости ω_2 и углового ускорения ε_2 может быть сделано так, как показано в § 16.

2°. В механизмах гидронасосов ротационного типа с вращающимися лопастями, а также в различных гидро- или пневмоприводах применяются механизмы с ведущим поршнем на шатуне, скользящем в качающемся или вращающемся цилиндре H, принадлежащих звену *4* (рис. 5.8). В этом механизме обобщенной координатой будет переменное расстояние $BC = s$. Векторное уравнение замкнутости контура $ABCA$ будет

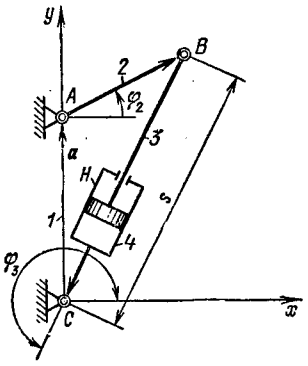


Рис. 5.8. Схема кулисного механизма с ведущим поршнем на шатуне.

$$\boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{s} + \boldsymbol{a} = 0. \qquad (5.63)$$

Спроектируем векторы уравнения (5.63) на оси Cx и Cy. Имеем

$$\left.\begin{aligned} l_2 \cos\varphi_2 + s\cos\varphi_3 &= 0, \\ l_2 \sin\varphi_2 + s\sin\varphi_3 + a &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.64)$$

Из первого уравнения (5.64) получаем

$$\cos\varphi_3 = -\frac{l_2\cos\varphi_2}{s} \quad \text{или}$$

$$\sin\varphi_3 = \sqrt{1 - \frac{l_2^2\cos^2\varphi_2}{s^2}}. \qquad (5.65)$$

Подставляя выражение для $\sin\varphi_3$ во второе уравнение (5.64), получим

$$l_2\sin\varphi_2 + a = -\sqrt{s^2 - l_2^2\cos^2\varphi_2}. \qquad (5.66)$$

Возведем обе части равенства (5.66) в квадрат. Имеем

$$l_2^2\sin^2\varphi_2 + a^2 + 2l_2 a\sin\varphi_2 = s^2 - l_2^2\cos^2\varphi_2. \qquad (5.67)$$

Из уравнения (5.67) получаем

$$\sin\varphi_2 = \frac{s_2^2 - a^2 - l_2^2}{2al_2}, \qquad (5.68)$$

откуда

$$\varphi_2 = \arcsin\frac{s_2^2 - a^2 - l^2}{2al_2}. \qquad (5.69)$$

Для определения аналога скоростей $\varphi_2' = d\varphi_2/ds$ и аналога ускорений $\varphi_2'' = d^2\varphi_2/ds^2$ необходимо дважды продифференцировать уравнение (5.69) по обобщенной координате s.

3°. Рассмотрим определение перемещений, скоростей и ускорений звеньев механизма, показанного на рис. 5.9. Продолжим

ось Cf направляющей B до пересечения в точке E с осью Ay и представим контур $AECA$ как сумму векторов

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}_C=\boldsymbol{l}_2. \tag{5.70}$$

Проектируя это векторное уравнение на оси координат, получаем

$$x_C=l_2\cos\varphi_2 \quad \text{и} \quad a=l_2\sin\varphi_2. \tag{5.71}$$

Из уравнений (5.71) находим

$$x_C=a\operatorname{ctg}\varphi_2 \tag{5.72}$$

и

$$l_2=\frac{a}{\sin\varphi_2}. \tag{5.73}$$

Для определения аналогов скоростей v_{C_φ} и $(v_{CC_2})_\varphi$ продифференцируем уравнения (5.72) и (5.73) по обобщенной координате φ_2. Имеем

$$v_{C_\varphi}=-a\frac{1}{\sin^2\varphi_2} \tag{5.74}$$

и

$$(v_{CC_2})_\varphi=\frac{dl_2}{d\varphi_2}=-a\frac{\cos\varphi_2}{\sin^2\varphi_2}=$$
$$=-a\frac{\cos\varphi_2}{1-\cos^2\varphi_2}. \tag{5.75}$$

Для определения аналога ускорений a_{C_φ} дифференцируем по обобщенной координате φ_2 зависимость (5.74). Получаем

$$a_{C_\varphi}=2a\frac{\cos\varphi_2}{\sin^3\varphi_2}. \tag{5.76}$$

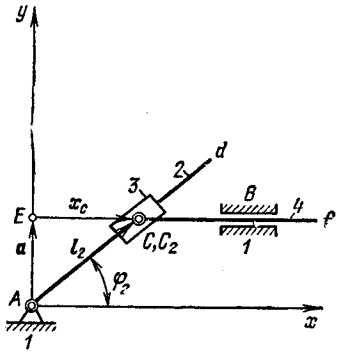


Рис. 5.9. Схема кулисного механизма с двумя ползунами.

Для определения аналогов ускорения $(a^r_{CC_2})_\varphi$ надо продифференцировать по обобщенной координате уравнение (5.75). Получаем

$$(a^r_{CC_2})_\varphi=a\frac{1+\cos^2\varphi_2}{\sin^3\varphi_2}. \tag{5.77}$$

Истинные скорости и ускорения звеньев механизма определяются аналогично ранее рассмотренным случаям.

4°. Для гидравлического механизма с поршнем *3*, скользящим в качающемся относительно звена *4* цилиндре H (рис. 5.10), векторное уравнение замкнутости контура $AECA$ будет иметь вид

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}_C=\boldsymbol{s}. \tag{5.78}$$

Проектируем векторы уравнения (5.78) на оси Ax и Ay. Имеем

$$\left.\begin{aligned} s\cos\varphi_4&=x_C,\\ s\sin\varphi_4&=a. \end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

Из второго уравнения (5.79) получаем

$$\sin\varphi_4 = \frac{a}{s}, \tag{5.80}$$

или

$$\varphi_4 = \arcsin\frac{a}{s}. \tag{5.81}$$

Аналог скорости $\varphi_4' = d\varphi_4/ds$ и аналог ускорения $\varphi_4'' = d^2\varphi_4/ds^2$ определяются двукратным дифференцированием уравнения (5.81) по обобщенной координате s. Перемещение x_C звена 2 определяется из первого уравнения (5.79).

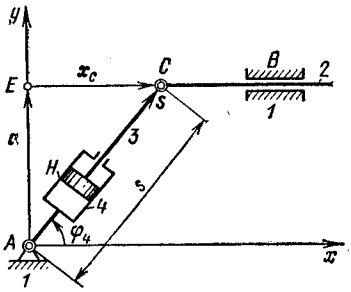


Рис. 5.10. Схема кулисного механизма с двумя ползунами и ведущим поршнем на кулисе.

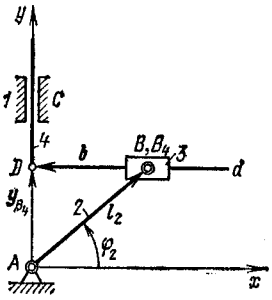


Рис. 5.11. Схема кулисного механизма с ползуном, движущимся по гармоническому закону.

5°. На рис. 5.11 показан кулисный механизм, ведомое звено *4* которого совершает движение по гармоническому закону. Векторное уравнение для контура $ABDA$ будет

$$\boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}_{B_4}. \tag{5.82}$$

Проектируем векторы уравнения (5.82) на оси Ax и Ay. Получаем

$$\left.\begin{aligned} l_2\cos\varphi_2 &= b, \\ l_2\sin\varphi_2 &= y_{B_4}. \end{aligned}\right\} \tag{5.83}$$

Из уравнений (5.83) получаем, что перемещение y_{B_4} звена *4* равно

$$y_{B_4} = l_2\sin\varphi_2 = b\operatorname{tg}\varphi_2. \tag{5.84}$$

Дифференцируя уравнения (5.83) по координате φ, получим аналоги скоростей $v_{B_4} = \frac{dy_{B_4}}{d\varphi_2}$ и $(v_{B_4B})_\varphi = \frac{db}{d\varphi_2}$. Имеем

$$v_{B_4\varphi} = l_2\cos\varphi_2 \tag{5.85}$$

и

$$(v_{B_4B})_\varphi = -\,l_2\sin\varphi_2. \tag{5.86}$$

Соответствующие аналоги ускорений $a_{B_4\varphi} = d^2y_{B_4}/d\varphi_2$ и $(a_{B_4B})_\varphi = d^2b/d\varphi_2$ будут равны

$$a_{B_4\varphi} = -l_2 \sin\varphi_2 \tag{5.87}$$

и

$$(a_{B_4B})_\varphi = -l_2 \cos\varphi_2. \tag{5.88}$$

Как это видно из уравнений (5.83) — (5.88), движение звена *4* действительно происходит по гармоническому закону. Истинные скорости и ускорения при неравномерном вращении ведущего звена механизма определяются по методу, изложенному в § 16.

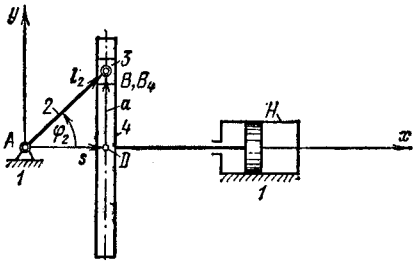


Рис. 5.12. Схема кулисного механизма с двумя ползунами и ведущим поршнем.

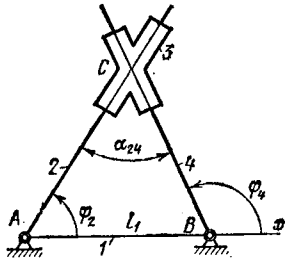


Рис. 5.13. Схема кулисного механизма муфты Ольдгейма.

6°. На рис. 5.12 изображен гидравлический или пневматический кулисный механизм с поршнем *1*, скользящим в неподвижном цилиндре *H*. Векторное уравнение замкнутости контура *ABDA* будет

$$\boldsymbol{s} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{l}_2. \tag{5.89}$$

Проектируя уравнение (5.89) на ось *Ax*, получаем

$$l_2 \cos\varphi_2 = s, \tag{5.90}$$

откуда

$$\varphi_2 = \arccos\frac{s}{l_2}. \tag{5.91}$$

Аналог скорости $\varphi_2' = d\varphi_2/ds$ и аналог ускорения $\varphi_2'' = d^2\varphi_2/ds^2$ определяются двукратным дифференцированием уравнений (5.91). Истинные скорости и ускорения могут быть получены по методу, изложенному в § 16.

7°. На рис. 5.13 показана схема кулисного механизма муфты Ольдгейма. Из чертежа непосредственно следует

$$\varphi_4 = \varphi_2 + \alpha_{24}. \tag{5.92}$$

Из уравнения (5.92) следует, что аналог скорости $\varphi_4' = d\varphi_4/d\varphi_2 = 1$, т. е. угловые скорости ω_2 и ω_4 звеньев *2* и *4* равны между собою, поэтому данный механизм может передавать вращение между двумя

эксцентрично расположенными валами A и B с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega_2 = \omega_4$. В инженерных конструкциях угол α_{24} обычно равен $\alpha_{24} = 90°$. Аналог ускорения φ_4'' равен $\varphi_4'' = 0$.

8°. Если механизм с двумя пневмо- или гидроцилиндрами K и H, показанный на рис. 5.14, имеет ведущим поршень a, то

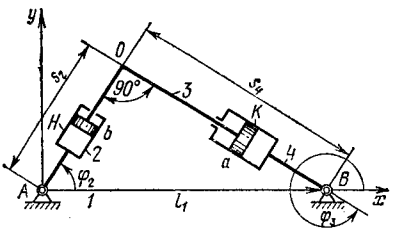


Рис. 5.14. Схема кулисного механизма с двумя жестко связанными поршнями.

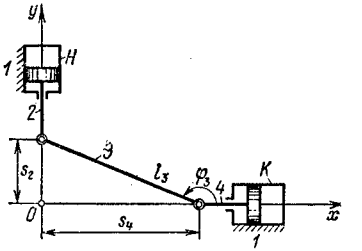


Рис. 5.15. Схема кулисного механизма с двумя поршнями, движущимися в неподвижных цилиндрах.

обобщенной координатой будет переменное расстояние s_4. Из рис. 5.14 непосредственно получаем

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{s_4}{s_2} = \frac{s_4}{\sqrt{l_1^2 - s_4^2}}, \tag{5.93}$$

где s_2 — перемещение поршня b, откуда

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{s_4}{\sqrt{l_1^2 - s_4^2}}. \tag{5.94}$$

Аналог скорости $\varphi_2' = \dfrac{d\varphi_2}{ds_4}$ и аналог ускорения $\varphi_2'' = \dfrac{d^2\varphi_2}{ds_4^2}$ можно получить после двукратного дифференцирования уравнения (5.94).

9°. Механизм с двумя гидро- или пневмоцилиндрами, показанный на рис. 5.15, можно рассматривать как обращенный механизм муфты Ольдгейма (рис. 5.13). Из рис. 5.15 имеем

$$s_4 = \sqrt{l_2^2 - s_2^2}. \tag{5.95}$$

Аналог скорости $s_4' = ds_4/ds_2$ и аналог ускорения $s_4'' = d^2s_4/ds_2^2$ определим после двукратного дифференцирования уравнения (5.95). Истинные скорости и ускорения определяются методом, изложенным в § 16.

§ 26. Шестизвенные рычажные механизмы

1°. Выше мы рассмотрели аналитический метод определения положений и аналогов скоростей и ускорений четырехзвенных рычажных механизмов.

Для всех видов этих механизмов определение положений звеньев могло бы быть сделано рассмотрением одного или двух треуголь-

ных контуров. Для определения аналогов скоростей и ускорений можно составлять векторные уравнения замкнутости контуров и далее эти уравнения проектировать на взаимно перпендикулярные оси координат, а полученные выражения дважды дифференцировать по принятой обобщенной координате.

Можно было бы показать, что в принципе этот метод является совершенно общим для механизмов с любым числом звеньев и при использовании счетно-решающих машин может быть всегда составлена соответствующая программа для кинематического анализа механизмов любой структуры. Ниже мы покажем, как аналитический метод может быть применен для кинематического анализа шестизвенных механизмов, образованных присоединением к ведущему звену и стойке двух двухповодковых групп II класса.

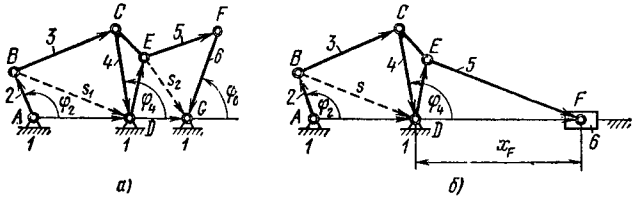


Рис. 5.16. Шестизвенные механизмы: *а*) шарнирно-рычажный механизм; *б*) шарнирно-ползунный механизм.

На рис. 5.16 показаны шестизвенные механизмы, образованные двумя группами, состоящими из звеньев *3*, *4* и *5*, *6*. В обоих механизмах звено *5* группы присоединяется к звену *4*, входящему в кинематическую пару со стойкой *1*. Решение задачи о положениях этих механизмов сводится к рассмотрению ряда треугольников, полученных после введения векторов $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ для механизма, показанного на рис. 5.16, *а*, и вектора $\boldsymbol{s}$ для механизма, показанного на рис. 5.16, *б*. Вначале рассматриваются два треугольных контура *ABDA* и *BCDB* (рис. 5.16, *а*).

С помощью уравнений, приведенных в § 23, находится зависимость угла φ_4 от принятого за обобщенную координату угла φ_2 — функция $\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_2)$. Далее рассматриваются два треугольника *DEGD* и *EFGE* и отыскивается функция $\varphi_6 = \varphi_6(\varphi_4)$.

Если решить совместно уравнения

$$\left.\begin{aligned} \varphi_4 &= \varphi_4(\varphi_2), \\ \varphi_6 &= \varphi_6(\varphi_4), \end{aligned}\right\} \tag{5.96}$$

то можно использовать угол φ_4, чтобы получить непосредственно функцию

$$\varphi_6 = \varphi_6(\varphi_2). \tag{5.97}$$

Соответственно для механизма, показанного на рис. 5.16, *б*, с помощью уравнений, приведенных в § 23, определяется функция

$\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_2)$ и далее с помощью уравнений, приведенных в § 24, отыскивается функция $x_F = x_F(\varphi_4)$. Исключая из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \varphi_4 &= \varphi_4(\varphi_2), \\ x_F &= x_F(\varphi_4) \end{aligned}\right\} \tag{5.98}$$

угол φ_4, можно получить функцию

$$x_F = x_F(\varphi_2). \tag{5.99}$$

Для определения аналогов скоростей и ускорений составляются векторные уравнения замкнутости контуров *ABCDA* и *DEFGD* для механизма, показанного на рис. 5.16, *а*, и контуров *ABCDA* и *EFDE* для механизма, показанного на рис. 5.16, *б*.

Проектируя составленные векторные контуры на два взаимно перпендикулярных направления и дифференцируя дважды полученные уравнения проекций, определяем соответствующие аналоги скоростей и ускорений.

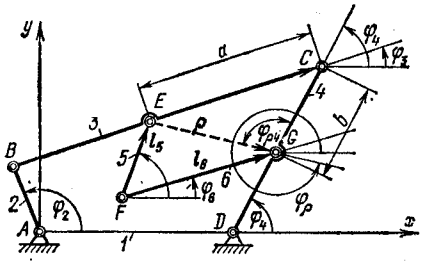


Рис. 5.17. Кинематическая схема шестизвенного шарнирно-рычажного механизма.

2°. Несколько более сложным является аналитическое исследование шестизвенных рычажных механизмов, у которых двухповодковая группа II класса, состоящая из звеньев *5* и *6* (рис. 5.17), входят в кинематические пары *E* и *G* с подвижными звеньями *3* и *4*. Функции положений $\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_2)$ звеньев *2* и *4* и $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2)$ звеньев *3* и *2* четырехзвенника *ABCD* можно получить с помощью уравнений, приведенных в § 23.

Далее составляем векторное уравнение замкнутости контура *ECGFE*. Имеем

$$\boldsymbol{l}_5 + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{l}_6. \tag{5.100}$$

Уравнения проекций векторов этого уравнения на оси *Ax* и *Ay* будут

$$\left.\begin{aligned} l_5 \sin\varphi_5 + a\sin\varphi_3 - b\sin\varphi_4 &= l_6 \sin\varphi_6, \\ l_5 \cos\varphi_5 + a\cos\varphi_3 - b\cos\varphi_4 &= l_6 \cos\varphi_6. \end{aligned}\right\} \tag{5.101}$$

Углы φ_5 и φ_6 могут быть определены из уравнений (5.101) и тем самым будут определены функции

$$\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_2) \quad \text{и} \quad \varphi_6 = \varphi_6(\varphi_2).$$

Углы φ_5 и φ_6 могут быть также определены, если мы соединим точки *E* и *G* с вектором $\boldsymbol{\rho}$ (рис. 5.17). Тогда из треугольника *ECG*

можно определить величину ρ. Имеем

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi_4 - \varphi_3)}. \qquad (5.102)$$

Угол φ_{ρ_4} (рис. 5.17) определяется из уравнения

$$\varphi_{\rho_4} = \arcsin\frac{a}{\rho}\sin(\varphi_4 - \varphi_3). \qquad (5.103)$$

Тогда угол φ_ρ будет равен

$$\varphi_\rho = 180^\circ + \varphi_{\rho_4} + \varphi_4. \qquad (5.104)$$

Далее из треугольника EGF имеем

$$\cos(\varphi_5 - \varphi_6) = \frac{\rho^2 - l_5^2 - l_6^2}{2l_5 l_6}. \qquad (5.105)$$

Угол φ_{ρ_6} равен

$$\varphi_{\rho_6} = 360^\circ - \varphi_\rho + \varphi_6. \qquad (5.106)$$

Следовательно,

$$\sin(\varphi_5 - \varphi_6) = \frac{\rho}{l_5}\sin\varphi_{\rho_6}. \qquad (5.107)$$

Решая совместно уравнения (5.105) и (5.107), можно определять углы φ_5 и φ_6.

Для определения аналогов скоростей и ускорений механизма (рис. 5.17) необходимо произвести двукратное дифференцирование уравнений (5.101). Так как решение задач кинематического исследования аналитическими методами, как правило, проводится на счетно-решающих машинах, то обычно функции $\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_2)$ и $\varphi_6 = \varphi_6(\varphi_2)$ получают не в явной форме, а через промежуточные функции, т. е. так, как это было нами выше изложено в результате рассмотрения треугольников ECG и EGF (рис. 5.17).

ГЛАВА VI

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 27. Определение положений

1°. Задача о положениях кулачковых механизмов, у которых радиусы кривизны отдельных участков профиля кулачка заданы, решается общими приемами, изложенными выше, путем замены высших пар кинематическими цепями с низшими парами (см. § 10). При этом получаются механизмы только с одними низшими парами. Задача об определении планов положений этих механизмов может быть решена общими методами, изложенными в § 17. Задача оказывается более сложной, когда радиусы кривизны профиля неизвестны. Тогда решение может быть выполнено геометрически приближенно с помощью метода обращения движения.

Рассмотрим кулачковый механизм, у которого кулачок *1* вращается вокруг некоторой оси A (рис. 6.1), а ведомое звено *2* движется поступательно в направляющих C.

За начальное положение механизма примем положение, при котором точка B занимает крайнее нижнее положение B_1 и радиус-вектор $\overline{AB} = \overline{AB_1} = l$ получается наименьшим.

В качестве обобщенной координаты примем угол φ_1 поворота кулачка *1* и будем рассматривать перманентное движение механизма, когда кулачок *1* вращается с постоянной угловой скоростью ω_1.

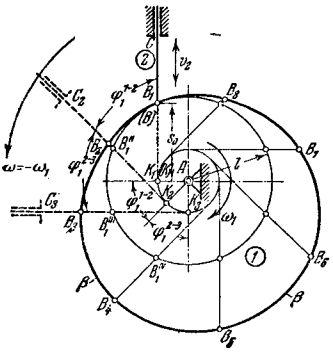


Рис. 6.1. Кинематическая схема кулачкового механизма с вращающимся кулачком и поступательно движущимся толкателем.

Пусть кривая β — β является профилем кулачка *1*. Сообщим всему механизму общую угловую скорость $\omega = -\omega_1$. Тогда кулачок *1* как бы остановится, а ведомое звено *2* будет вращаться с угловой скоростью $\omega = -\omega_1$ вокруг оси A и одновременно перемещаться в направляющих C со скоростью v_2.

Из точки A опустим перпендикуляр AK на направление направляющих C и радиусом $AK = \sqrt{l^2 - s_0^2}$ опишем окружность. В обращенном движении направление движения звена *2* будет всегда касательным к окружности радиуса AK.

На этой окружности находим точки K_1, K_2, K_3, ..., соответствующие равным углам $\varphi_1^{1-2} = \varphi_1^{2-3} = \varphi_1^{3-4}$ ...

Поворачиваем далее звено *2* в направлении угловой скорости $\omega = -\omega_1$ на угол φ_1^{1-2}. Тогда точка K_1 займет положение K_2, а точка B_1 — положение B_1''. Перемещаем далее звено *2* в направляющих C до тех пор, пока точка B не коснется профиля кулачка *1*. Если за начальное положение точки B звена *2* было принято положение B_1, то во втором положении точка B займет положение B_2. Пусть s_2^{1-2} — путь, пройденный звеном *2* при переходе из положения *1* в положение *2*, равен

$$s_2^{1-2} = \mu_l [(K_2B_2) - K_2B_1'')] = \mu_l [(K_2B_2) - s_0] = \mu_l (B_1''B_2),$$

где μ_l — масштаб чертежа.

Полученный путь s_2^{1-2} откладываем в масштабе μ_l на графике $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 6.2) в виде отрезка $b_2 = (B_1''B_2)$. Получаем

$$s_2^{1-2} = \mu_l (B_1''B_2) = \mu_l b_2.$$

Далее откладываем угол поворота φ_1^{2-3} и находим новое положение точки B звена *2* (рис. 6.1) — положение B_3. Полный путь s_2^{1-3},

пройденный звеном *2* от начального его положения, равен

$$s_2^{1-3} = \mu_l [(K_3B_3) - K_3B_1'')] = \mu_l [(K_3B_3) - s_0] = \mu_l (B_1''B_3).$$

Полученный путь отложен на графике $s_2 = s_2(\varphi_1)$ в виде отрезка $b_3 = (B_1''B_3)$ (рис. 6.2). Аналогичными построениями могут быть найдены все последующие положения звена *2*, и может быть построен график $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 6.2) за полный оборот кулачка *1*. Если отсчет путей, проходимых звеном *2*, вести из наинизшего или наивысшего его положений, то размер s_0 будет постоянным для всех положений этого звена. Тогда отсчет путей звена *2* можно вести от вспомогательной окружности радиуса l (рис. 6.1), равного $l = \sqrt{(AK)^2 + s_0^2}$. Если ось направляющих звена *2* пересекает ось A вращения кулачка (рис. 6.3, *а*), то радиус окружности, равный кратчайшему расстоянию AK (рис. 6.1), в этом случае оказывается равным нулю, и отрезки (AB_1), (AB_2), (AB_3), ... (рис. 6.3, *а*) представляют пути, пройденные звеном *2* от начального

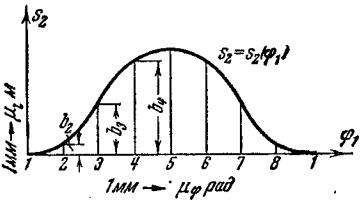


Рис. 6.2. График пути толкателя кулачкового механизма, схема которого показана на рис. 6.1.

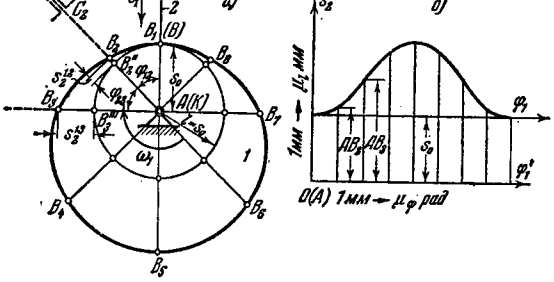


Рис. 6.3. Кулачковый механизм с вращающимся кулачком и поступательно движущимся толкателем, направление движения которого проходит через центр вращения кулачка: *а*) кинематическая схема; *б*) график пути толкателя.

положения, увеличенные на постоянную величину s_0. В этом случае для построения графика $s_2 = s_2(\varphi_1)$ достаточно отложить на ординатах от оси $O\varphi_1$ соответствующие отрезки (AB_1), (AB_2), ... (рис. 6.3, *б*). Построив график, переносим ось абсцисс выше на расстояние, равное отрезку $(AB_1) = s_0/\mu_l$. Полученная диаграмма и представит собой график $s_2 = s_2(\varphi_1)$, построенный в масштабе μ_l чертежа (рис. 6.3, *а*).

2°. Для определения положений кулачкового механизма с качающимся толкателем (рис. 6.4) можно также применить метод обращения движения. Рассмотрим перманентное движение механизма, когда угловая скорость ω_1 кулачка *1* принята постоянной и обобщенной координатой является угол φ_1 поворота кулачка. Пусть кривая $\beta - \beta$ будет профилем кулачка *1*. В рассматриваемом случае задача сводится к нахождению последовательных положений звена *2*, точка *B* которого находится на профиле $\beta - \beta$. Сообщаем всему механизму угловую скорость $\omega = -\omega_1$, равную по величине и противоположную по направлению угловой скорости ω_1 кулачка *1*. Тогда кулачок *1* становится как бы неподвижным, а толкатель *2* вращается вокруг оси *O* с угловой скоростью $\omega = -\omega_1$ и вокруг оси *A* с угловой скоростью ω_2. При этом точка *A* будет последовательно занимать положения A_1, A_2, ... Так как угловая скорость ω_1 принята постоянной, то углы φ_1^{1-2}, φ_1^{2-3}, φ_1^{3-4},..., образуемые соответственно радиусами OA_1, OA_2, OA_3, ..., будут равны между собой. Поворачиваем толкатель *2* вокруг A_1 до соприкосновения в точке B_1 с профилем $\beta - \beta$ кулачка *1*. Если в первоначальном положении угол, образуемый звеном *2* с радиусом OA_1, был равен φ_0, то во втором положении этот угол будет равен $\varphi_0 + \varphi_2^{1-2}$. В третьем положении этот угол будет равен $\varphi_0 + \varphi_2^{1-3}$. Положение толкателя *2* будет определено, если из точек A_1, A_2, A_3, ... засечь кривую $\beta - \beta$ дугами радиусов $AB = A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots$ Полученные углы φ_0, $\varphi_0 + \varphi_2^{1-2}$, $\varphi_0 + \varphi_2^{1-3}$, ... откладываем в произвольно выбранном масштабе μ_{φ_2} на ординатах графика (рис. 6.5), где по оси абсцисс отложены равные углы φ_1 в некотором произвольно выбранном масштабе μ_{φ_1}. Переместив ось абсцисс из положения φ_1 в положение φ_1', отстоящее на ординату, изображающую

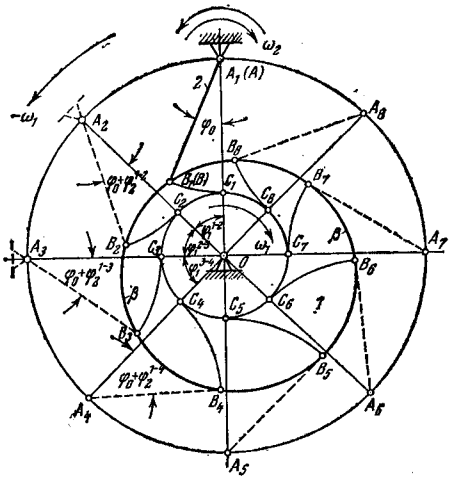


Рис. 6.4. Схема кулачкового механизма с вращающимся кулачком и качающимся толкателем.

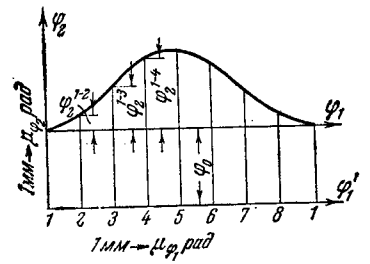


Рис. 6.5. График угла поворота толкателя кулачковых механизмов, схемы которых изображены на рис. 6.4 и 6.7.

в масштабе μ_{φ_2} угол φ_0, получаем диаграмму $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ углов поворота φ_2 толкателя *2* в функции обобщенной координаты φ_1.

3°. Для определения положений кулачкового механизма (рис. 6.6), у которого толкатель *2* оканчивается плоскостью $d - d$, всегда касательной к профилю $\beta - \beta$ кулачка *1*, можно также применить метод обращения движения. Все построения в этом

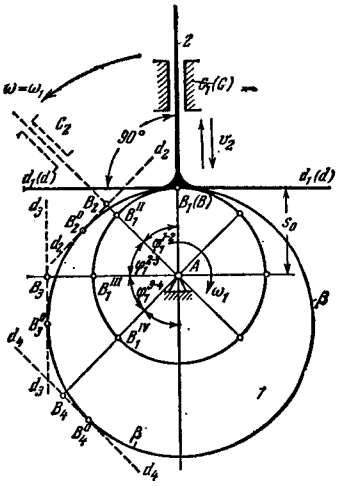


Рис. 6.6. Схема кулачкового механизма с поступательно движущимся плоским толкателем.

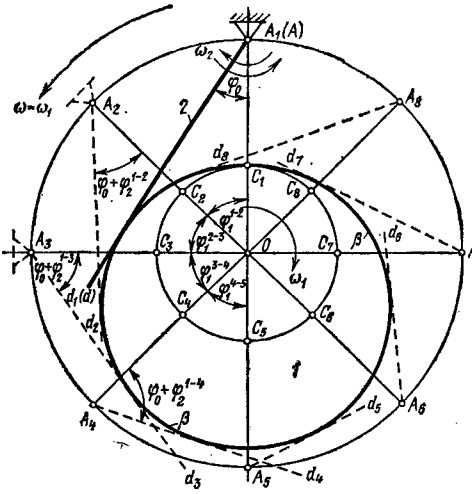


Рис. 6.7. Схема кулачкового механизма с плоской качающейся штангой.

случае следует выполнять аналогично тем, которые мы применяли для кулачкового механизма, показанного на рис. 6.3, *а*. Здесь надо иметь в виду, что касание кулачка *1* с плоскостью $d - d$ будет не в точках B_2, B_3, B_4, ..., а в точках B_2^0, B_3^0, B_4^0, ..., в которых плоскость $d - d$ занимает положение $d_2 - d_2$, $d_3 - d_3$, $d_4 - d_4$. Для построения графика $s_2 = s_2(\varphi_1)$ надо от оси абсцисс (рис. 6.3, *б*) откладывать отрезки (AB_1), (AB_2), (AB_3), ... (рис. 6.6) в масштабе μ_l. После этого надо перенести ось абсцисс выше на расстояние $AB_1 = s_0$.

Для кулачкового механизма, показанного на рис. 6.7, у которого звено *2* представляет собой плоскость Ad, всегда касательную к профилю $\beta - \beta$ кулачка *1*, обращаем движение и находим последовательные положения A_2d_2, A_3d_3, A_4d_4, ... плоскости Ad. Тогда определятся углы $\varphi_0 + \varphi_2^{1-2}$, $\varphi_0 + \varphi_2^{1-3}$, $\varphi_0 + \varphi_2^{1-4}$, ..., значения которых могут быть отложены в соответствующем масштабе μ_{φ_2} (рис. 6.5) на ординатах графика. Переместив ось абсцисс из положения φ_1 в положение φ_1', отстоящее на расстоянии, изображенном в масштабе μ_{φ_2} углом φ_0, получим диаграмму $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$.

§ 28. Определение скоростей и ускорений

1°. Если для кулачкового механизма определены положения ведомого звена и построены графики зависимости перемещения ведомого звена в функции обобщенной координаты, например для механизма, показанного на рис. 6.3 (график $s_2 = s_2(\varphi_1)$), или график $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (рис. 6.5) для механизма, показанного на рис. 6.4, то для определения скоростей и ускорений ведомых звеньев удобнее всего применить метод кинематических диаграмм, изложенный в § 22.

В самом деле, аналог $(v_2)_\varphi$ скорости v_2 звена *2* (рис. 6.3) равен

$$(v_2)_\varphi = \frac{ds_2}{d\varphi_1}. \tag{6.1}$$

Соответственно аналог $(a_2)_\varphi$ ускорения a_2

$$(a_2)_\varphi = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}. \tag{6.2}$$

Для механизма, показанного на рис. 6.4, будем иметь аналоги угловых скоростей и ускорений

$$i_{21} = (\omega_2)_\varphi = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \quad \text{и} \quad i'_{21} = (\varepsilon_2)_\varphi = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}. \tag{6.3}$$

Таким образом, определение скоростей и ускорений ведомых звеньев *2* сводится к двукратному графическому дифференцированию графиков $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 6.3, *б*) и $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (рис. 6.5).

Необходимо отметить, что двукратное графическое дифференцирование обычно дает значительные погрешности, особенно в диаграммах ускорений. Это заставляет для получения более точных результатов пользоваться при определении скоростей и ускорений методом планов скоростей и ускорений, изложенным выше.

Для определения этим методом скоростей и ускорений кулачковых механизмов необходимо знать радиусы кривизны различных участков профиля кулачка. В кулачках, профили которых очерчены по дугам окружностей, парабол, эллипсов, отрезкам прямых и т. д., нахождение радиусов кривизны не встречает никаких затруднений. Если радиусы кривизны профиля кулачка известны, то методом замены высших пар цепями с низшими парами (см. § 10) кулачковый механизм может быть всегда приведен к механизмам только с одними низшими парами. Тогда задача решается методами, изложенными в главах IV или V.

Если профиль кулачка получен измерением координат его точек, то всегда может быть получена зависимость радиуса-вектора $\boldsymbol{R}$ от угла θ (рис. 6.8):

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\theta). \tag{6.4}$$

Для определения радиуса кривизны ρ в точке C проводим касательную $t-t$ к профилю. Касательная $t-t$ образует с радиусом-вектором $\boldsymbol{R}$ угол μ, тангенс которого, как это известно из дифференциальной геометрии, равен

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{R}{dR/d\theta}=\frac{R}{d\,[R\,(\theta)]/d\theta}. \tag{6.5}$$

Проводим под углом 90° к касательной $t-t$ направление нормали $n-n$ к профилю в точке C и откладываем на ней радиус кривизны $\rho = OC$, величина которого, как известно, равна

$$\rho=\frac{R^2+2\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2-R\frac{d^2R}{d\theta^2}}{\left[R^2+\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{6.6}$$

Имея функцию (6.4), заданную или графически, или аналитически, можно определить значения угла μ и радиуса кривизны ρ.

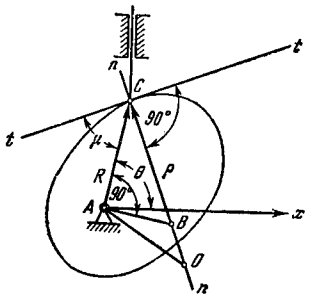


Рис. 6.8. К определению радиуса кривизны профиля кулачка.

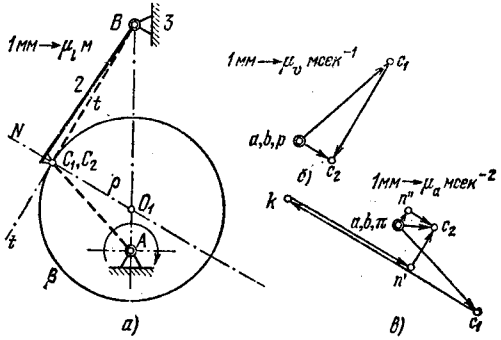


Рис. 6.9. Кулачковый механизм с качающимся толкателем: *а*) кинематическая схема; *б*) план скоростей; *в*) план ускорений.

Тогда кулачковый механизм (рис. 6.8) может быть заменен кривошипно-ползунным механизмом AOC, скорость и ускорение точки C которого могут быть определены или методом планов или аналитически (см. гл. IV и V). Из выражения (6.5) следует, что величина $dR/d\theta$ может быть определена геометрически, если из точки A провести перпендикуляр AB к радиусу R до пересечения в точке B с направлением нормали $n-n$. Отрезок AB будет пропорционален величине $dR/d\theta$.

2°. Построение планов скоростей и ускорений может быть также сделано и без замены высших пар цепями с низшими парами.

Например, пусть требуется построить планы скоростей и ускорений в перманентном движении кулачкового механизма, показанного на рис. 6.9, *а*, у которого радиус кривизны O_1C_1 профиля

кулачка в точке C равняется ρ. Имеем следующие векторные уравнения для определения скоростей и ускорений:

$$\boldsymbol{v}_{C_2} = \boldsymbol{v}_{C_1} + \boldsymbol{v}_{C_2C_1} \tag{6.7}$$

и

$$\boldsymbol{a}_{C_2} = \boldsymbol{a}_{C_1} + \boldsymbol{a}^{\text{к}}_{C_2C_1} + \boldsymbol{a}^{n}_{C_2C_1} + \boldsymbol{a}^{t}_{C_2C_1}, \tag{6.8}$$

или так как $\boldsymbol{a}_{C_2} = \boldsymbol{a}^{n}_{C_2} + \boldsymbol{a}^{t}_{C_2}$, то

$$\boldsymbol{a}^{n}_{C_2} + \boldsymbol{a}^{t}_{C_2} = \boldsymbol{a}_{C_1} + \boldsymbol{a}^{\text{к}}_{C_2C_1} + \boldsymbol{a}^{n}_{C_2C_1} + \boldsymbol{a}^{t}_{C_2C_1}. \tag{6.9}$$

На рис. 6.9, *б* построен план скоростей в масштабе отрезка AC_1 (рис. 6.9, *а*). Величины ускорений $\boldsymbol{a}^{n}_{C_2}$, $\boldsymbol{a}^{\text{к}}_{C_2C_1}$ и $\boldsymbol{a}^{n}_{C_2C_1}$ определяются из соотношений

$$a^{n}_{C_2} = \frac{v^2_{C_2}}{l_{BC_2}}, \quad a^{\text{к}}_{C_2C_1} = 2\,|\,\omega_1\,|\,v_{C_2C_1} \quad \text{и} \quad a^{n}_{C_2C_1} = \frac{v^2_{C_2C_1}}{\rho}.$$

План ускорений построен на рис. 6.9, *в* в масштабе отрезка AC_1 (рис. 6.9, *а*).

ГЛАВА VII

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ПЕРЕДАЧ

§ 29. Основные кинематические соотношения

1°. В различных машинах и приборах широко применяются механизмы для воспроизведения вращательного движения с постоянным передаточным отношением между двумя различно заданными в пространстве осями. Такие механизмы носят название *механизмов передачи вращательного движения* или сокращенно *механизмов передачи*.

Механизмы передачи имеют своей задачей воспроизведение заданного передаточного отношения между двумя звеньями. Простейшим механизмом передачи с твердыми звеньями является трехзвенный механизм, состоящий из двух подвижных звеньев, входящих в две вращательные и одну высшую пару. Для воспроизведения требуемых передаточных отношений в современных машинах и приборах часто применяются сложные механизмы передач, имеющие кроме ведущего и ведомого звеньев, вращающихся вокруг заданных осей, несколько промежуточных звеньев, вращающихся вокруг своих осей. Применение сложных механизмов объясняется различными причинами. Например, оси ведущего и ведомого звеньев могут быть расположены далеко друг от друга, и

непосредственная передача вращения при помощи двух звеньев потребовала бы создания передачи с большими габаритами звеньев. Если передаточное отношение, которое должно осуществляться механизмом передачи, очень велико или очень мало, то конструктивно удобно между ведущей и ведомой осями иметь промежуточные оси с соответствующими звеньями, вращающимися вокруг них. Передавая вращение с ведущей оси на промежуточные оси и с них на ведомую ось, мы как бы последовательно *отдельными ступенями* изменяем передаточные отношения, получая в результате требуемые передаточные отношения между ведущей и ведомой осями.

Таким образом, сложный механизм передачи можно разделить на отдельные части — *ступени*, каждая из которых представляет собой два звена, входящих в высшую пару. Звенья этой пары, кроме того, входят со стойкой в низшие пары. Такая отдельная часть сложного механизма и называется *ступенью передачи*. В соответствии с указанным бывают одно- и многоступенчатые передачи, по большей части двух- и трехступенчатые.

2°. Рассмотрим кинематические соотношения в одноступенчатом механизме передачи при различных расположениях осей ведущего и ведомого звеньев.

Расположение осей этих звеньев может быть следующим:

а) оси параллельны,

б) оси пересекаются,

в) оси перекрещиваются.

Условимся называть отношение угловой скорости одного звена к угловой скорости другого звена в механизме с одной степенью подвижности *передаточным отношением* и обозначать буквой i с цифровыми индексами, соответствующими номерам рассматриваемых звеньев. Если оси вращения O_1 и O_2 параллельны (рис. 7.1, *а*) и заданы постоянные угловые скорости ω_1 и ω_2 звеньев *1* и *2*, то передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{O_2P_0}{O_1P_0}=\text{const}, \tag{7.1}$$

где P_0 — мгновенный центр вращения в относительном движении звеньев *1* и *2*.

Так как

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2},$$

где φ_1 и φ_2 — углы поворота звеньев *1* и *2*, то передаточное отношение i_{12} можно также рассматривать как аналог угловой скорости ω_1 при ведущем звене *2*.

Так как мы рассматриваем передачи с постоянным передаточным отношением, то центроидами в относительном движении звеньев

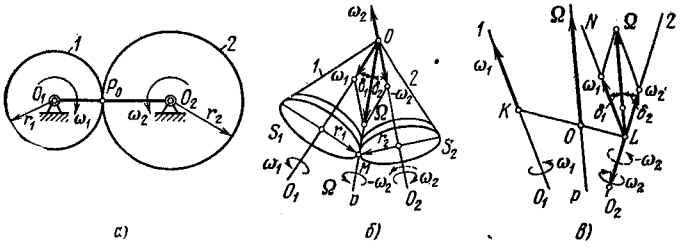
(рис. 7.1) оказываются окружности радиусов $r_1 = O_1P_0$ и $r_2 = O_2P_0$. Следовательно, передаточное отношение равно

$$i_{12} = -\frac{r_2}{r_1}. \tag{7.2}$$

Знак минус в равенствах (7.1) и (7.2) показывает, что угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют разные направления.

Таким образом, передача вращения между параллельными осями с постоянным передаточным отношением может быть всегда осуществлена круглыми цилиндрическими колесами.

3°. Для случая, когда оси вращения O_1 и O_2 звеньев *1* и *2* (рис. 7.1, *б*) пересекаются в точке O и заданы постоянные угловые



а) *б*) *в*)

Рис. 7.1. Схемы одноступенчатых зубчатых передач: *а*) передача с цилиндрическими колесами; *б*) передача с коническими колесами; *в*) передача с перекрещивающимися осями.

скорости ω_1 и ω_2 вращения звеньев *1* и *2*, передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}. \tag{7.3}$$

Из теоретической механики известно, что в этом случае движение звена *2* относительно звена *1* происходит вокруг мгновенной оси вращения OP, положение которой определяется из следующих соображений.

Условимся вектору угловой скорости придавать такое направление, при котором, если смотреть с конца вектора угловой скорости к началу, вращение видно происходящим против часовой стрелки. Сообщим звеньям *1* и *2* общую угловую скорость $-\boldsymbol{\omega}_2$. Тогда звено *2* будет неподвижным, а звено *1* будет вращаться вокруг оси O_2 с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}_2$ и вокруг оси O_1 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Мгновенная угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ звена *1* относительно звена *2* будет равна

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + (-\boldsymbol{\omega}_2). \tag{7.4}$$

Откладывая векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $-\boldsymbol{\omega}_2$ в соответствующих направлениях по осям O_1 и O_2, находим результирующий вектор $\boldsymbol{\Omega}$. Направление

этого вектора определяет мгновенную ось вращения OP в относительном движении звеньев *1* и *2*. Так как угловые скорости ω_1 и ω_2 приняты постоянными, то направление оси OP неизменно и аксоидами в относительном движении будут два круглых конуса *1* и *2*, имеющие соприкасание по общей образующей OP.

Выберем на оси OP произвольную точку M и пересечем аксоиды плоскостями, проходящими через точку M и перпендикулярными к осям O_1 и O_2. Тогда в сечении получим окружности S_1 и S_2, соприкасающиеся в точке M. При вращении аксоидов *1* и *2* вокруг осей O_1 и O_2 окружности S_1 и S_2 перекатываются без скольжения друг по другу.

Для скорости v_M точки M будем иметь

$$v_M = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \tag{7.5}$$

где r_1 и r_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2. Формула (7.3) с учетом равенства (7.5) примет вид

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1}, \tag{7.6}$$

где δ_1 и δ_2 — половины углов раствора конусов *1* и *2*.

Таким образом, передача вращения с постоянным передаточным отношением между пересекающимися осями может быть всегда осуществлена круглыми коническими колесами, представляющими собой части аксоидов *1* и *2*.

4°. Переходим к рассмотрению случая, когда оси O_1 и O_2 звеньев *1* и *2* перекрещиваются в пространстве (рис. 7.1, *в*). Пусть заданы постоянные угловые скорости ω_1 и ω_2 вращения звеньев *1* и *2*. Передаточное отношение (см. формулу (7.3)) для этого случая также равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}. \tag{7.7}$$

Из теоретической механики известно, что в этом случае движением звена *2* относительно звена *1* является вращение вокруг и скольжение вдоль мгновенной оси вращения и скольжения OP, проходящей через точку O, лежащую на линии кратчайшего расстояния KL между осями O_1 и O_2. Положение точки O определяется из условия

$$\frac{KO}{LO} = \frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta_2}, \tag{7.8}$$

где δ_1 и δ_2 — углы, образованные осями O_1 и O_2 с мгновенной осью вращения и скольжения OP. Углы δ_1 и δ_2 и направление мгновенной оси вращения и скольжения OP определяются, если сообщить звеньям *1* и *2* общую угловую скорость $-\omega_2$. Тогда вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ вращения звена *1* относительно звена *2* определится,

если через точку L провести прямую LN, параллельную оси O_1, и отложить на этой прямой вектор угловой скорости ω_1. Далее на оси O_2 следует отложить вектор угловой скорости $-\omega_2$, соблюдая ранее указанное условие о направлении этих векторов. Направление мгновенной оси вращения и скольжения OP параллельно диагонали параллелограмма, построенного на векторах ω_1 и $-\omega_2$. Угловая скорость Ω равна

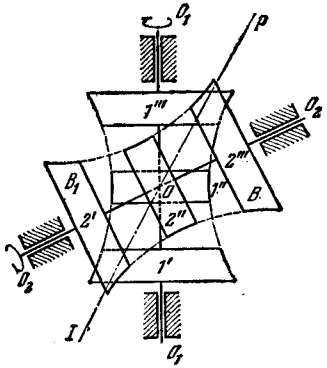


Рис. 7.2. Схема передачи с гиперболоидными колесами.

$$\Omega = \omega_1 + (-\omega_2). \qquad (7.9)$$

Из построения (рис. 7.1) следует, что передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1}. \qquad (7.10)$$

Если учесть условие (7.8), то передаточное отношение i_{12} может быть представлено также следующим образом:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(LO)\cos\delta_2}{(KO)\cos\delta_1}. \qquad (7.11)$$

Так как угловые скорости ω_1 и ω_2 нами были приняты постоянными, то постоянными будут и углы δ_1 и δ_2, и во всех положениях звеньев *1* и *2* мгновенная ось вращения и скольжения будет занимать одно и то же положение, а аксоиды в относительном движении этих звеньев будут всегда соприкасаться своими образующими по общей прямой OP. Этими аксоидами являются *линейчатые гиперболоиды* вращения с осями O_1 и O_2. Таким образом, передача вращения между пересекающимися осями с постоянным передаточным отношением может быть всегда осуществлена гиперболоидными колесами (рис. 7.2), представляющими собой части $1'$ и $2'$ или $1''$, $2''$, или $1'''$, $2'''$ гиперболоидов вращения *1* и *2*.

§ 30. Механизмы фрикционных передач

1°. В целом ряде механизмов, применяемых в современной технике, используются силы трения в качестве сил, приводящих в движение звенья, или сил, тормозящих их движения. Механизмы, в которых используются силы трения, носят название *фрикционных механизмов*. На рис 7.3 показаны *механизмы фрикционных круглых цилиндрических колес*. Передача движения от колеса *1* к колесу *2* осуществляется силой трения между ободьями колес, создаваемой нажатием одного колеса на другое некоторой силой.

Так как колеса входят в центроидную пару (см. § 9), в которой должно иметь место чистое качение без прсскальзывания одного

звена по другому, то фрикционные механизмы относятся к так называемым *центроидным механизмам*.

Фрикционные механизмы, показанные на рис. 7.3, имеют в качестве звеньев круглые цилиндрические колеса *1* и *2*, являющиеся центроидами в относительном движении звеньев. Эти механизмы фрикционных колес воспроизводят передачу движения с постоянным передаточным отношением. Мгновенным центром вращения в относительном движении будет точка P_0 соприкасания колес *1* и *2*. Механизм, показанный на рис. 7.3, *а*, будет механизмом с внешним касанием колес, у которого угловые скорости ω_1 и ω_2 звеньев *1* и *2* имеют разные знаки. Механизм, показанный на

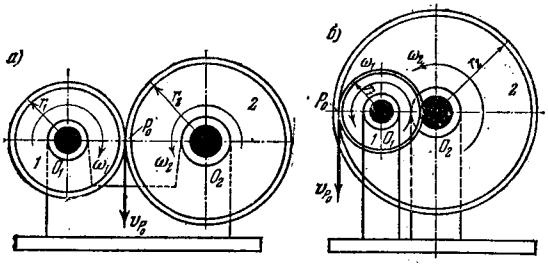


Рис. 7.3. Цилиндрические центроидные механизмы: *а*) механизм с внешним соприкасанием колес; *б*) механизм с внутренним соприкасанием колес.

рис. 7.3, *б*, будет механизмом с внутренним касанием колес, у которого угловые скорости ω_1 и ω_2 звеньев *1* и *2* имеют одинаковые знаки.

Обозначим радиусы фрикционных колес *1* и *2* соответственно через r_1 и r_2. В точке соприкасания p_0 колеса *1* и *2* имеют общую скорость v_{p0}, равную

$$v_{p_0} = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \tag{7.12}$$

откуда получаем, что передаточное отношение i_{12} таких механизмов

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}, \tag{7.13}$$

где n_1 и n_2 — числа оборотов в минуту колес *1* и *2*; верхний знак относится к внутреннему соприкасанию (рис. 7.3, *б*), а нижний — к внешнему (рис. 7.3, *а*).

2°. *Фрикционные конические колеса* обычно представляют собой прямые усеченные конусы *1* и *2* (рис. 7.4); они являются *аксоидами в относительном движении* звеньев *1* и *2*, оси вращения *A* и *B* которых пересекаются в точке *O*. Соприкасание колес происходит по общей образующей. С помощью сил трения, возникающих в точке соприкасания, можно воспроизвести вращение этих колес

вокруг осей A и B с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Механизм конических фрикционных колес, показанный на рис. 7.4, *а*, носит название *механизма круглых конических фрикционных колес с внешним соприкасанием*. На рис. 7.4, *б* показан *механизм круглых конических фрикционных колес с внутренним соприкасанием*.

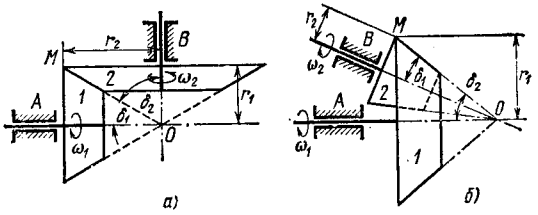


Рис. 7.4. Конические центроидные механизмы: *а*) механизм с внешним соприкасанием колес; *б*) механизм с внутренним соприкасанием колес.

Согласно уравнению (7.6) и рис. 7.4 передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}, \tag{7.14}$$

где n_1 и n_2 суть числа оборотов в минуту колес *1* и *2*.

Если угол $\delta = \delta_1 + \delta_2$ между осями *1* и *2* (рис. 7.4, *а*) равен 90°, то формула (7.14) принимает вид

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_2} = \operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{ctg} \delta_2. \tag{7.15}$$

При внутреннем соприкасании δ всегда меньше 90°.

3°. Рассмотрим некоторые другие виды механизмов фрикционных передач. На рис. 7.5 показана схема механизма *лобовой фрикционной передачи*. Диск *1* жестко связан с осью O_1, вращающейся в неподвижном подшипнике A. Диск *1* входит в высшую кинематическую пару M с роликом *2*, входящим во вращательную пару B со звеном *3*. Ролик *2* с помощью винтовой пары C можно перемещать вдоль оси O_2. Точка M контакта может занимать различные положения, определяемые расстоянием x. Передаточное отношение i_{21} равно

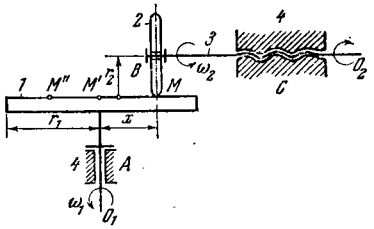


Рис. 7.5. Схема лобовой фрикционной передачи.

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \pm \frac{x}{r_2}. \tag{7.16}$$

При перемещении точки контакта M в положение M' передаточное отношение i_{21} равно нулю. При $x = r_1$ передаточное отношение равно

$$i_{21} = \pm \frac{r_1}{r_2}. \tag{7.17}$$

При перемещении точки контакта M за точку M', например в положение M'', диск *1* меняет направление вращения. Таким образом, передаточное отношение может плавно меняться в пределах

$$\frac{r_1}{r_2} \geqslant i_{21} \geqslant -\frac{r_1}{r_2}.$$

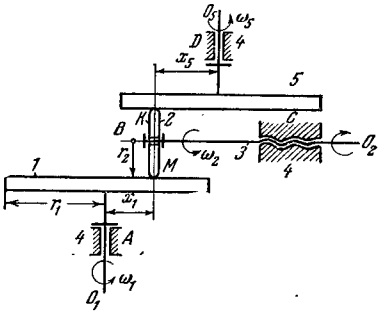


Рис. 7.6. Схема двойной лобовой фрикционной передачи.

Механизмы, осуществляющие плавное изменение передаточного отношения, называются *механизмами бесступенчатых передач* или *вариаторами скоростей*.

На рис. 7.6 показан механизм бесступенчатой передачи с двумя дисками *1* и *5* и промежуточным роликом *2*. Передаточное отношение i_{51} между параллельными осями O_1 и O_5 равно

$$i_{51} = \frac{\omega_5}{\omega_1} = \frac{x_1}{x_5}, \tag{7.18}$$

т. е. передаточное отношение не зависит от радиуса ролика *2*. Направление вращения осей O_1 и O_5 одинаковое. Передаточное отношение i_{51} можно изменять в пределах

$$\frac{(x_1)_{\min}}{(x_5)_{\max}} \leqslant i_{51} \leqslant \frac{(x_1)_{\max}}{(x_5)_{\min}}. \tag{7.19}$$

На рис. 7.7 показан механизм бесступенчатой передачи с коническими барабанами *1* и *5*, имеющими равные углы раствора конусов. Передаточное отношение i_{51} определяется по формуле (7.18). Передаточное отношение i_{51} можно изменять в пределах

$$\frac{r}{R} \leqslant i_{51} \leqslant \frac{R}{r}, \tag{7.20}$$

где r и R — малый и большой радиусы барабанов.

На рис. 7.8 показан механизм бесступенчатой передачи для случая, когда оси O_1 и O_5 ведущего и ведомого звеньев пересекаются в точке O. Если провести плоскости, содержащие оси OO_1 или OO_5, то в сечении профили барабанов, находящиеся в соприкасании с роликом *2*, являются дугами $a - a$ окружности ради-

уса r_2. Ролик *2* вращается вокруг оси *3*, которая вместе с роликом *2* может поворачиваться вокруг оси, направленной перпендикулярно к плоскости, содержащей оси O_1 и O_5. Передаточное отношение i_{51} определяется по формуле (7.18), а пределы передаточного отношения — выражением (7.20).

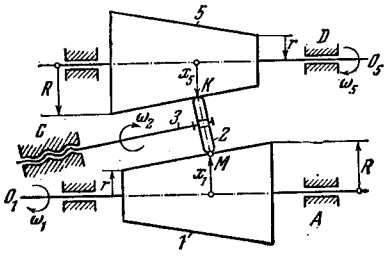


Рис. 7.7. Схема фрикционной передачи с коническими барабанами и промежуточным роликом.

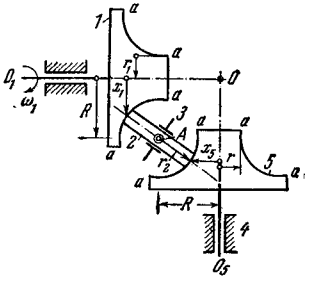


Рис. 7.8. Схема фрикционной передачи с торовыми барабанами и промежуточным роликом.

4°. Для надежной работы механизмов фрикционных передач необходимо исключить проскальзывание между соприкасающимися колесами. Для этого надо, чтобы сила трения, возникающая между соприкасающимися элементами, была достаточной. Последнее достигается прижатием одного колеса к другому обычно с помощью пружин. Таким образом, соприкасающиеся элементы колес оказываются сильно нагруженными, деформируются и изнашиваются в процессе работы. Деформация соприкасающихся элементов и их проскальзывание вызывают износ поверхностей соприкасания.

При расчетах эффект проскальзывания обычно учитывается введением коэффициента ξ относительного скольжения. Величина ε равняется

$$\xi = \frac{v_1 - v_2}{v_1}, \tag{7.21}$$

где v_1 и v_2 — окружные скорости соприкасающихся фрикционных колес *1* и *2*. Соотношение (7.21) может быть представлено так:

$$\xi = 1 - \frac{v_2}{v_1} = 1 - \frac{\omega_2 r_2}{\omega_1 r_1}, \tag{7.22}$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости колес *1* и *2*, а r_1 и r_2 — их радиусы.

Из равенства (7.22), зная, что $\omega_1/\omega_2 = i_{12}$, получаем:

$$i_{12} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{1-\xi}. \tag{7.23}$$

Таким образом, если коэффициент относительного скольжения ε постоянный, то передаточное отношение i_{12} также постоянное

и не равно отношению радиусов фрикционных колес, но ему пропорционально. Величина передаточного отношения i_{12} получается в этом случае несколько больше, но незначительно, так как величина коэффициента ξ обычно располагается в пределах от 0,01 до 0,03.

§ 31. Механизмы трехзвенных зубчатых передач с неподвижными осями

1°. Самое широкое применение в машинах и приборах находят *зубчатые механизмы*. На рис. 7.9 показан *трехзвенный зубчатый механизм*, состоящий из круглых цилиндрических зубчатых колес *1* и *2*. Каждое колесо представляет собою круглый цилиндр, на поверхности которого расположены зубья. Два зубчатых колеса, находящихся в соприкасании, своими зубьями образуют зубчатое зацепление. На рис. 7.9 показан механизм с *внешним зубчатым зацеплением*. Угловые скорости ω_1 и ω_2 колес *1* и *2* этого механизма имеют разные знаки.

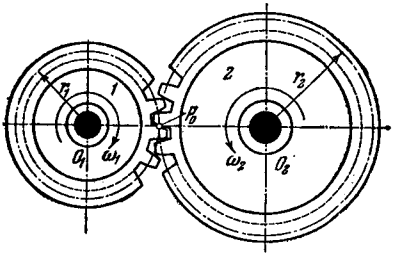


Рис. 7.9. Цилиндрическая зубчатая передача с внешним зацеплением зубьев.

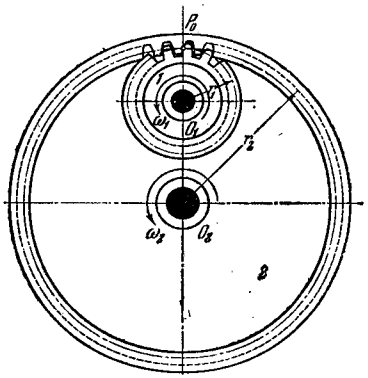


Рис. 7.10. Цилиндрическая зубчатая передача с внутренним зацеплением зубьев.

На рис. 7.10 показан механизм с *внутренним зубчатым зацеплением*. Угловые скорости ω_1 и ω_2 колес *1* и *2* этого механизма имеют одинаковые знаки.

На рис. 7.11 показан механизм реечного зацепления, у которого колесо *2* представляет собой прямолинейную зубчатую рейку.

Простейшим механизмом зубчатых передач является трехзвенный механизм. На рис. 7.9 и 7.10 показаны механизмы круглых цилиндрических колес, у которых радиусы r_1 и r_2 являются радиусами центроид в относительном движении звеньев *1* и *2*, и точка P_0 является мгновенным центром вращения в относительном движении. Если в механизмах фрикционных передач центроиды представляют собой гладкие круглые цилиндрические колеса, то в механизмах зубчатых передач колеса для передачи движения

снабжаются зубьями, профили которых представляют собой взаимоогибаемые кривые. Как это видно из рис. 7.9 и 7.10, для возможности передачи движения часть профиля зуба выполняется за пределами центроид радиусов r_1 и r_2, а часть — внутри этих центроид. Окружности радиусов r_1 и r_2 в теории механизмов зубчатых передач называются *начальными окружностями*. Профили зубьев подбираются из условия, чтобы нормаль в их точке соприкасания всегда проходила через постоянную точку P_0 — мгновенный центр вращения в относительном движении колес *1* и *2*.

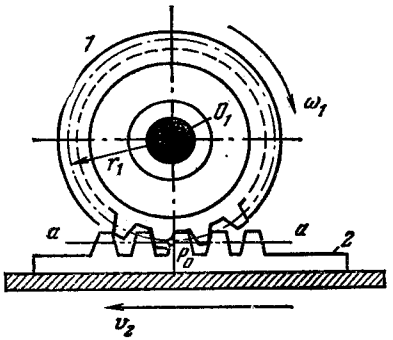


Рис. 7.11. Зубчатая передача с реечным зацеплением зубьев.

Таким образом, если известны радиусы начальных окружностей колес, то известно и их передаточное отношение, определяемое по формуле

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}. \qquad (7.24)$$

Практически отношение радиусов удобнее заменять отношением чисел зубьев. Так как расстояние между соседними профилями зубьев сопряженных колес должно быть по начальным окружностям одинаковым, то число зубьев z_2 на колесе *2* так относится к числу зубьев z_1 на колесе *1*, как длина начальной окружности колеса *2* относится к длине начальной окружности колеса *1*, т. е.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\pi r_2}{2\pi r_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (7.24), можем написать:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}, \qquad (7.25)$$

где n_1 и n_2 — числа оборотов в минуту колес *1* и *2*.

Таким образом, отношение чисел зубьев зубчатых круглых колес равно обратному отношению угловых скоростей этих колес.

Напомним, что мы условились приписывать передаточному отношению знак в зависимости от направления угловых скоростей. Так как при *внешнем* зацеплении (рис. 7.9) угловые скорости колес имеют различное направление вращения, то у внешнего зацепления передаточное отношение всегда *отрицательное*. Наоборот, у *внутреннего* зацепления (рис. 7.10) передаточное отношение *всегда положительное*. Формула (7.25) охватывает оба случая,

надо лишь помнить, что в нее каждую из угловых скоростей ω_1 и ω_2 следует подставлять со своим знаком.

Частным видом трехзвенного зубчатого механизма является механизм с реечным зацеплением (рис. 7.11). Колесо *1*, вращаясь вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1, приводит в прямолинейно-поступательное движение рейку *2* со скоростью v_2. Колесо *1* имеет начальную окружность радиуса r_1, а рейка *2* — начальную прямую $a - a$. Центроида радиуса r_1 перекатывается без скольжения по прямой $a - a$. Точка P_0 является мгновенным центром вращения в относительном движении звеньев *1* и *2*. Скорости ω_1 и v_2 связаны очевидным условием

$$v_2 = \omega_1 (O_1P_0) = \omega_1 r_1, \tag{7.26}$$

или так как

$$v_2 = \frac{ds_2}{dt} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt},$$

где φ_1 — угол поворота колеса *1*, а s_2 — перемещение рейки *2*, то, следовательно,

$$\frac{ds_2}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} r_1,$$

или

$$(v_2)_\varphi = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = r_1. \tag{7.27}$$

2°. К трехзвенным пространственным механизмам зубчатых передач относятся механизмы конических зубчатых колес (рис. 7.12).

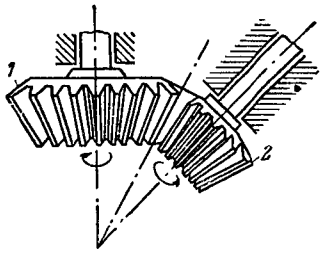


Рис. 7.12. Коническая зубчатая передача.

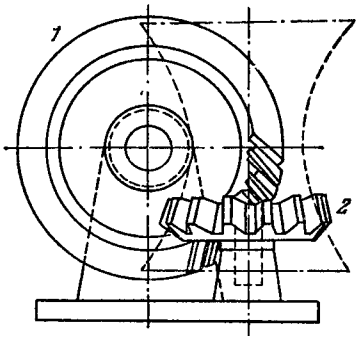


Рис. 7.13. Гиперболоидная зубчатая передача.

Как это было показано в § 29, *3°*, передаточное отношение этого механизма равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_2}, \tag{7.28}$$

где n_1 и n_2 — числа оборотов в минуту колес *1* и *2*. Если числа зубьев колес *1* и *2* будут соответственно равны z_1 и z_2, то формула (7.28) примет вид

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (7.29)$$

3°. Для механизма гиперболоидных колес (рис. 7.13), у которого числа зубьев колес *1* и *2* соответственно равны z_1 и z_2, передаточное отношение равно (см. § 29, *4°*)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1} = \frac{R_2\cos\delta_2}{R_1\cos\delta_1} = \frac{z_2}{z_1}, \qquad (7.30)$$

где R_1 и R_2 — радиусы горловых сечений гиперболоидов, являющихся аксоидами в частном случае, когда $\delta_1 + \delta_2 = 90°$, т. е. если оси колес взаимно перпендикулярны; i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2}{R_1}\operatorname{tg}\delta_1. \qquad (7.31)$$

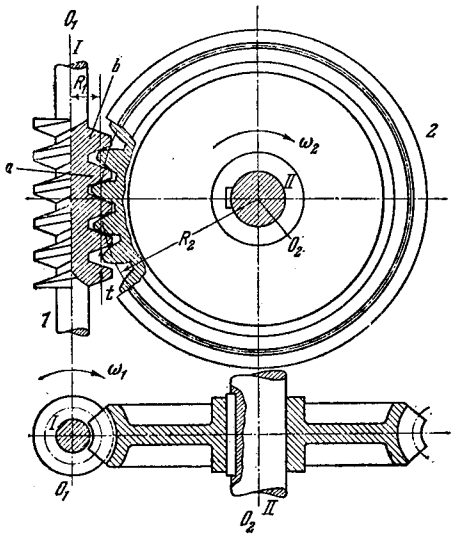


Рис. 7.14. Червячная передача.

4°. К трехзвенным пространственным механизмам зубчатых передач с перекрещивающимися под углом 90° осями относится механизм *червячной передачи* (рис. 7.14). Червяк *1* вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ и приводит во вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ червячное колесо *2*, вращающееся вокруг оси O_2.

Если рассечь червячную передачу плоскостью, перпендикулярной к оси колеса и содержащей ось червяка, то в этом сечении при эвольвентном очертании профилей получим рейку *a*, сцепляющуюся с плоским колесом *2* (рис. 7.14). Эта плоскость называется *плоскостью главного сечения*. Червячное зацепление как в главном сечении, так и в любом, параллельном ему, может быть представлено как плоское реечное зацепление. Вращение червячного колеса *2* с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ можно воспроизвести поступательным движением рейки *a* вдоль оси O_1.

Чтобы из рейки *a* получить червяк, достаточно рейку перемещать винтовым движением вдоль и вокруг оси O_1. Если при повороте рейки *a* на угол, равный 2π, зуб *b* рейки перемещается вдоль оси O_1 на величину, равную шагу *t*, то мы получаем червяк с одной

ниткой, или *однониточный червяк* (рис. 7.14). Если зуб b рейки a при повороте на угол 2π продвинется на величину, равную $2t$, то мы получаем *двухниточный червяк*, и т. д.

Основные кинематические соотношения для червячной передачи могут быть получены из формул для механизма гиперболоидной передачи. Как было показано выше, передаточное отношение для колес, оси которых пересекаются под углом 90°, согласно формуле (7.31), равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2}{R_1} \operatorname{tg} \delta_1, \tag{7.32}$$

где ω_1 — угловая скорость червяка *1*, ω_2 — угловая скорость червячного колеса *2*, R_1 — радиус начального цилиндра червяка, R_2 — радиус начального цилиндра червячного колеса. Если принять $z_1 = z_ч$ и $z_2 = z_к$, где $z_ч$ — число ниток или ходов червяка, а $z_к$ — число зубьев червячного колеса, то формула (7.32) примет следующий вид:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_к}{z_ч} = \frac{R_2}{R_1} \operatorname{tg} \delta_1. \tag{7.33}$$

Из формулы (7.33) следует, что при однониточном червяке передаточное отношение равно числу зубьев на червячном колесе, при двухниточном — числу зубьев, деленному на два, при трехниточном — числу зубьев, деленному на три и т. д. Таким образом, при однониточном червяке при каждом обороте червяка колесо поворачивается на один зуб, при двухниточном — на два зуба, при трехниточном — на три зуба и т. д. Отсюда следует, что червячной передачей можно воспроизводить большие передаточные отношения. Так, например, если число зубьев колеса равняется 80, а червяк имеет только одну нитку, то передаточное отношение равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_к}{z_ч} = \frac{80}{1} = 80.$$

§ 32. Механизмы многоступенчатых зубчатых передач с неподвижными осями

1°. Механизмы трехзвенных зубчатых передач (одноступенчатых передач), состоящие из двух сопряженных зубчатых колес, представляют собой простейший вид зубчатого механизма. Передаточное отношение, которое можно воспроизвести одной парой зубчатых колес, невелико. На практике же часто приходится встречаться с необходимостью воспроизведения значительных передаточных отношений. Для осуществления этих передаточных отношений применяются несколько последовательно соединенных колес,

где, кроме ведущего и ведомого, имеются еще промежуточные колеса, т. е. многоступенчатые передачи. Такие сложные зубчатые механизмы получили название *многоступенчатых зубчатых передач* или *редукторов скоростей*. Многоступенчатые передачи, у которых оси вращения колес неподвижны, носят также название *рядового соединения*.

Рассмотрим рядовое соединение, показанное на рис. 7.15. Ведущее зубчатое колесо *1* сцепляется с колесом *2*. На ось O_2 колеса *2* жестко насажено колесо *2'*, которое сцепляется с колесом *3*. На ось O_3 колеса *3* жестко насажено колесо *3'* и т. д. Ведомым колесом является колесо *5*.

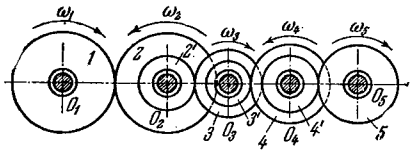


Рис. 7.15. Рядовое соединение зубчатых колес.

Обозначим угловую скорость колеса *1* через ω_1, угловую скорость колес *2* и *2'* — через ω_2, угловую скорость колес *3* и *3'* — через ω_3 и т. д. Общее передаточное отношение всего механизма равно

$$i_{15}=\frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Определим передаточное отношение для каждой пары колес. Имеем

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2};\quad i_{2'3}=\frac{\omega_2}{\omega_3};\quad i_{3'4}=\frac{\omega_3}{\omega_4};\quad i_{4'5}=\frac{\omega_4}{\omega_5}. \tag{7.34}$$

Перемножив полученные передаточные отношения (7.34), получим

$$i_{12}\cdot i_{2'3}\cdot i_{3'4}\cdot i_{4'5}=\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{\omega_2}{\omega_3}\cdot\frac{\omega_3}{\omega_4}\cdot\frac{\omega_4}{\omega_5}=\frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Так как $\frac{\omega_1}{\omega_5}=i_{15}$, то

$$i_{15}=i_{12}\cdot i_{2'3}\cdot i_{3'4}\cdot i_{4'5}.$$

Таким образом, *передаточное отношение сложной многоступенчатой зубчатой передачи есть произведение взятых со своими знаками передаточных отношений отдельных его ступеней.*

В общем случае, когда в зацеплении находится n колес, формула для общего передаточного отношения i_{1n} может быть написана так:

$$i_{1n}=\frac{\omega_1}{\omega_n}=i_{12}\cdot i_{2'3}\cdot i_{3'4}\cdot\ldots\cdot i_{(n-1)'n}. \tag{7.35}$$

Для каждой ступени передачи имеем

$$i_{12} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1},$$

$$i_{2'3} = \pm \frac{r_3}{r_{2'}} = \pm \frac{z_3}{z_{2'}},$$

. . . . . .

$$i_{(n-1)'n} = \pm \frac{r_n}{r_{(n-1)'}} = \pm \frac{z_{n'}}{z_{(n-1)'}},$$

где r_1, r_2, $r_{2'}$, r_3, ..., r_n — радиусы начальных окружностей колес, а z_1, z_2, $z_{2'}$, ..., z_n — числа зубьев, причем верхний знак берется при внутреннем, а нижний — при внешнем зацеплении.

Подставляя в равенство (7.35) выражения передаточных отношений отдельных ступеней, получаем

$$i_{1n} = (-1)^m \cdot \frac{r_2 r_3 r_4 \dots r_n}{r_1 r_{2'} r_{3'} \dots r_{(n-1)'}} = (-1)^m \frac{z_2 z_3 z_4 \dots z_n}{z_1 z_{2'} z_{3'} \dots z_{(n-1)'}}, \qquad (7.36)$$

где m — число внешних зацеплений. Множитель $(-1)^m$ позволяет определить знак передаточного отношения сложного зубчатого механизма. Как это было показано в § 31, *1°*, передаточное отношение пары колес с внешним зацеплением имеет знак минус, а с внутренним зацеплением — знак плюс. Следовательно, если мы имеем в рядовом соединении m внешних зацеплений, то при передаче движения от одного вала к другому произойдет m раз изменение знака угловой скорости. Следовательно, для определения знака передаточного отношения рядового соединения надо соответствующие произведения отношений радиусов начальных окружностей или чисел зубьев помножить на множитель $(-1)^m$, взятый в степени, соответствующей числу внешних зацеплений. В инженерных расчетах можно также пользоваться формулой

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^m (i_{12})(i_{2'3}) \dots (i_{(n-1)'n}). \qquad (7.37)$$

2°. При передаче движения между валами, находящимися на большом расстоянии друг от друга, или при необходимости воспроизведения передаточного отношения определенного знака часто применяется рядовое соединение колес, состоящее из ряда последовательно соединенных колес, каждое из которых имеет собственную ось вращения (рис. 7.16). Общее передаточное отношение такого рядового соединения, состоящего в рассматриваемом случае из четырех колес, равно

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^m (i_{12})(i_{23})(i_{34}) =$$

$$= -(i_{12})(i_{23})(i_{34}) = -\frac{r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 r_3} = -\frac{r_4}{r_1} = -\frac{z_4}{z_1}.$$

Как видно из этой формулы, величина общего передаточного отношения i_{14} не зависит от размеров промежуточных зубчатых колес. Это дало повод в технике называть такие колеса *паразитными*. В действительности же эти колеса выполняют существенную роль, заключающуюся либо в обеспечении надлежащего направления вращения ведомого вала, ибо введение таких колес влияет на знак передаточного отношения, либо в передаче движения при большом межосевом расстоянии.

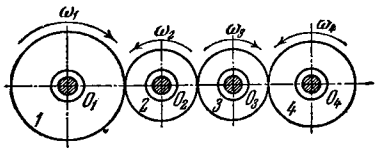


Рис. 7.16. Схема рядового соединения зубчатых колес с паразитными колесами.

3°. Определение общего передаточного отношения рядового соединения круглых конических зубчатых колес может быть выполнено по формуле (7.35).

Передаточное отношение от колеса *1* к колесу *n* и в этом случае равно

$$i_{1n}=\frac{\omega_1}{\omega_n}=(i_{12})\,(i_{2'3})\,(i_{3'4})\ldots(i_{(n-1)'n})=\frac{r_2r_3r_4\ldots r_n}{r_1r_{2'}r_{3'}\ldots r_{(n-1)'}}=\frac{z_2z_3z_4\ldots z_n}{z_1z_{2'}z_{3'}\ldots z_{(n-1)'}}.$$

Если все промежуточные колеса — паразитные, передаточное отношение равно

$$i_{1n}=\frac{\omega_1}{\omega_n}=\frac{z_n}{z_1}.$$

Если ось вращения ведомого колеса в рядовом соединении параллельна оси ведущего колеса или, в частности, совпадает с ней,

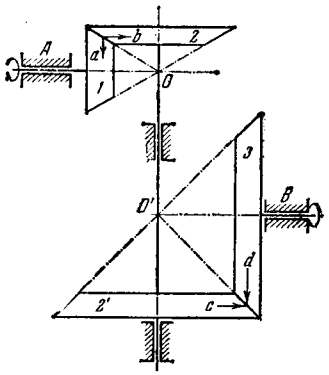


Рис. 7.17. Схема двухступенчатой конической передачи.

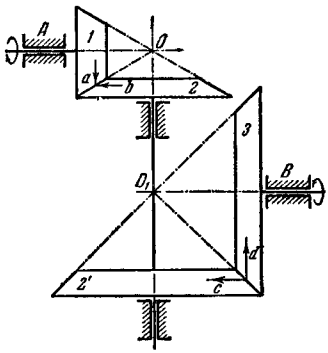


Рис. 7.18. Схема двухступенчатой конической передачи.

то передаточному отношению i_{1n} целесообразно приписать знак, а именно, знак плюс, если направления угловых скоростей ведущего и ведомого колес совпадают, и знак минус, если эти направления противоположны. Определение этого знака будем вести

следующим образом. В месте соприкасания колес *1* и *2* (рис. 7.17 или 7.18) поставим стрелки *a* и *b*, причем, если стрелка *a* направлена от места соприкасания, то и стрелка *b* должна быть направлена от места соприкасания (рис. 7.17) или к месту соприкасания (рис. 7.18). На колесах *2'*, жестко связанных с колесами *2*, в местах соприкасания с колесами *3* ставим стрелку *c* того же направления, что и стрелка *b*. Тогда стрелка *d*, согласно вышеуказанному условию, будет иметь направления: для колеса *3* на рис. 7.17 совпадающее со стрелкой *a*, а для колеса *3* на рис. 7.18 обратное стрелке *a*. Если направления стрелок ведущего и ведомого колес совпадают (рис. 7.17), то знак передаточного отношения следует считать положительным. Если же направления этих стрелок противоположны (рис. 7.18), то знак передаточного отношения следует считать отрицательным.

Пример. Рассмотрим редуктор, схема которого показана на рис. 7.19. Пусть числа зубьев его колес равны

$$z_1=20,\ z_2=20,\ z_3=60,\ z_{3'}=16,$$
$$z_4=24,\ z_{4'}=15,\ z_5=25.$$

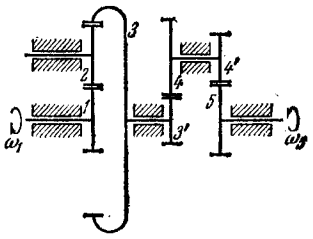


Рис. 7.19. Схема зубчатого трехступенчатого редуктора.

Требуется определить общее передаточное отношение редуктора. Общее передаточное отношение редуктора i_{15}, согласно формулам (7.36) и (7.37), равно

$$i_{15}=(-1)^3(i_{12})(i_{23})(i_{3'4})(i_{4'5})=-\frac{z_2z_3z_4z_5}{z_1z_2z_{3'}z_{4'}}=-\frac{z_3z_4z_5}{z_1z_{3'}z_{4'}}.$$

Передаточное отношение i_{15} отрицательно, потому что число внешних зацеплений равно 3. Число зубьев z_2 колеса *2*, входящее в числитель и знаменатель, можно сократить, ибо колесо *2* является паразитным. Подставляя заданные числа зубьев, получаем

$$i_{15}=-\frac{60\cdot 24\cdot 25}{20\cdot 16\cdot 15}=-7{,}5.$$

3°. К сложным зубчатым механизмам относятся также зубчатые коробки скоростей. *Зубчатой коробкой скоростей* называется зубчатый механизм, передаточное отношение которого можно изменять скачкообразно по ступеням. Коробками скоростей снабжаются те машины, рабочие органы которых должны вращаться с различными скоростями в зависимости от условий работы. Например, обработка различных деталей на токарном станке производится при разных скоростях, поэтому в механизм токарного станка включается коробка скоростей. Коробки скоростей применяются

в автомобилях для получения различных скоростей движения автомобиля. Схема и конструктивное оформление коробок скоростей бывают чрезвычайно разнообразными. Если число ступеней регулирования скорости невелико, то схема коробки получается достаточно простой, при большом же числе ступеней регулирования как схема, так и конструктивное оформление могут быть весьма сложными.

Коробка скоростей состоит из зубчатых колес, которые могут быть введены в зацепление в различных комбинациях для получения передаточных отношений, соответствующих заданным скоростям вращения рабочего органа машины. Способы переключения

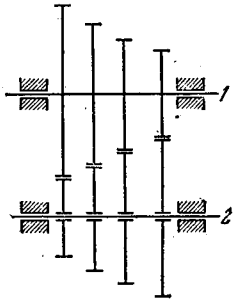


Рис. 7.20. Схема четырехступенчатой коробки скоростей с двумя валами.

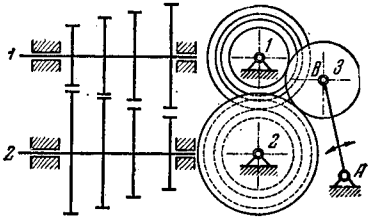


Рис. 7.21. Схема четырехступенчатой коробки скоростей с тремя валами.

отдельных колес для получения различных скоростей разнообразны, зависят от конструктивного оформления коробки и поэтому здесь не рассматриваются.

На рис. 7.20 показана схема четырехступенчатой коробки с двумя валами. Колеса на валу *1* посажены наглухо, на валу *2* колеса сидят свободно. При помощи специальной шпонки, не показанной на чертеже, можно жестко соединить одно из нижних колес с валом *2*, в соответствии с чем между валами *1* и *2* получается то или иное передаточное отношение.

Коробка, показанная на рис. 7.21, имеет три вала. Колеса, сидящие на валах *1* и *2*, входят в передачу через промежуточное колесо, сидящее на валу *3*. На валу *3* свободно посажено только одно колесо, которое можно передвигать вдоль вала. Вал *3* можно отодвигать вместе с колесом *3* от колес, сидящих на валах *1* и *2*, поворачивая звено *AB* вокруг оси *A*. Таким образом, при помощи колеса *3* можно соединять любую пару колес, расположенных на валах *1* и *2*, благодаря чему один из валов *1* или *2* будет иметь четыре ступени скорости при одной и той же скорости другого вала.

§ 33. Механизмы многоступенчатых зубчатых передач с подвижными осями

1°. В некоторых многоступенчатых зубчатых передачах оси отдельных колес являются подвижными. Примером такой передачи может служить трехзвенный зубчатый механизм, показанный в двух проекциях на рис. 7.22, *а* и *б*.

В этом механизме зубчатое колесо *1* неподвижно, зубчатое колесо *2* имеет подвижную ось O_2.

Звено H входит во вращательные пары O_1 со стойкой и O_2 с зубчатым колесом *2*. При вращении звена H с угловой скоростью ω_H колесо *2* обегает неподвижное колесо *1*, вращаясь с угловой скоростью ω_2 вокруг мгновенного центра вращения P_0. Колесо *1* называется *центральным колесом*, колесо *2* — *сателлитом* и звено H — *водилом*.

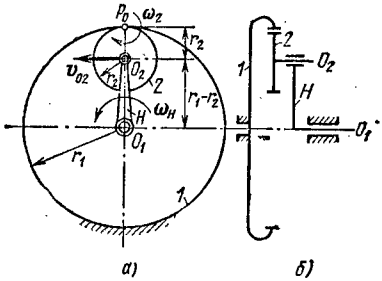


Рис. 7.22. Схема трехзвенного планетарного механизма.

Зубчатые механизмы, в которых хотя бы одно колесо имеет подвижную ось и является сателлитом, условимся называть *сателлитными зубчатыми механизмами*.

Связь между угловыми скоростями ω_2 и ω_H может быть установлена из рассмотрения рис. 7.22, *а*. Для скорости v_{O_2} точки O_2, являющейся общей для колеса *2* и водила H, имеем с учетом знаков угловых скоростей ω_2 и ω_H:

$$v_{O_2} = \omega_2 r_2 = -\omega_H (r_1 - r_2). \tag{7.38}$$

Следовательно, передаточное число i_{2H} равно

$$i_{2H} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = \frac{r_2 - r_1}{r_2} = 1 - \frac{r_1}{r_2} = 1 - i_{21}. \tag{7.39}$$

Из рассмотрения равенств (7.39) видно, что передаточное отношение i_{2H} есть передаточное отношение при неподвижном колесе *1*, а передаточное отношение i_{21} есть передаточное отношение одного трехзвенного зубчатого механизма с колесами, имеющими неподвижные оси, т. е. как бы при неподвижном водиле H. В дальнейшем, чтобы знать, при каком неподвижном звене определяем то или иное передаточное отношение, будем у передаточного отношения в скобках ставить индекс того звена, которое принято за неподвижное. Тогда уравнение (7.39) перепишем так:

$$i_{2H}^{(1)} = 1 - i_{21}^{(H)}. \tag{7.40}$$

Сателлитные зубчатые механизмы с одной степенью подвижности называются *планетарными механизмами*. На рис. 7.22 показан простейший трехзвенный планетарный механизм.

Уравнение (7.40) может быть представлено еще так:

$$i_{2H}^{(1)} + i_{21}^{(H)} = 1, \tag{7.41}$$

т. е. для планетарных механизмов с круглыми колесами сумма передаточных отношений при различных останавливаемых звеньях всегда равна единице.

2°. Планетарный механизм, показанный на рис. 7.22, обычно используется как механизм для воспроизведения сложного движения рабочего органа машины, закрепленного с колесом 2. Например, для вращения лопастей мешалок, приводов шпинделей хлопкоуборочных машин и т. д. Наиболее широкое распространение планетарные зубчатые механизмы получили в *планетарных редукторах*, предназначенных для получения необходимых передаточных отношений между ведущим и ведомым валами редуктора. Простейший такой редуктор, состоящий из четырех звеньев (рис. 7.23), может быть получен из планетарного механизма, показанного на рис. 7.22, если в него ввести еще одно зубчатое колесо 3 с осью O_3, входящее в зацепление с сателлитом 2 (рис. 7.23).

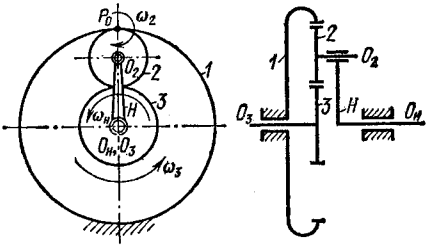


Рис. 7.23. Схема четырехзвенного планетарного механизма Джемса.

Для определения передаточного отношения $i_{3H}^{(1)}$ от вала O_3 к валу O_H этого редуктора можно воспользоваться формулой (7.40). Имеем

$$i_{3H}^{(1)} = 1 - i_{31}^{(H)}. \tag{7.42}$$

Так как, согласно равенству (7.37),

$$i_{31}^{(H)} = (-1)\, i_{32}^{(H)} i_{21}^{(H)} = -\, i_{32}^{(H)} i_{21}^{(H)},$$

то

$$i_{3H}^{(1)} = \frac{\omega_3}{\omega_H} = 1 + i_{32}^{(H)} i_{21}^{(H)}. \tag{7.43}$$

Если, согласно условию (7.36), ввести в уравнение (7.43) радиусы начальных окружностей r_1, r_2, r_3 или числа зубьев z_1, z_2, z_3, то формула (7.43) получит следующий вид:

$$i_{3H}^{(1)} = \frac{\omega_3}{\omega_H} = 1 + \frac{r_2 r_1}{r_3 r_2} = 1 + \frac{r_1}{r_3}, \tag{7.44}$$

или

$$i_{3H}^{(1)} = \frac{\omega_3}{\omega_H} = 1 + \frac{z_2 z_1}{z_3 z_2} = 1 + \frac{z_1}{z_3} = \frac{z_1 + z_3}{z_3}. \tag{7.45}$$

В выражениях (7.44) и (7.45) радиус r_2 колеса *2* и его число зубьев z_2 сократились, т. е. колесо *2* является паразитным.

Передаточное отношение $i^{(1)}_{H3}$ от водила H к колесу *3* редуктора, показанного на рис. 7.23, может быть определено из уравнения

$$i^{(1)}_{H3}=\frac{\omega_H}{\omega_3}=\frac{1}{i^{(1)}_{3H}}=\frac{1}{1-i^{(H)}_{31}} \tag{7.46}$$

или

$$i^{(1)}_{H3}=\frac{1}{1+\dfrac{z_1}{z_3}}=\frac{z_3}{z_1+z_3}. \tag{7.47}$$

Согласно равенствам (7.45) и (7.47) передаточные отношения $i^{(1)}_{3H}$ и $i^{(1)}_{H3}$ имеют знак плюс. Это свидетельствует о том, что угловые скорости ω_3 и ω_4 (рис. 7.23) имеют один и тот же знак. Если бы требовалось определить угловую скорость ω_2 сателлита *2* в функции угловой скорости ω_H водила H, то можно воспользоваться равенством (7.39). Имеем

$$\omega_2=\omega_H i_{2H}=\omega_H(1-i_{21}). \tag{7.48}$$

Рассмотренный нами планетарный редуктор (рис. 7.23) носит название *редуктора Джемса.*

На рис. 7.24 показан планетарный редуктор типа Джемса, но с коническим колесом. Согласно с правилом, указанным в § 32, *3°*, стрелки *d* и *a* у колес *1* и *3* имеют противоположные знаки.

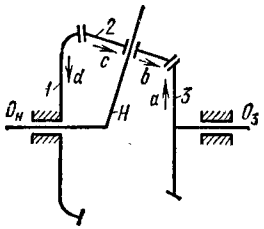


Рис. 7.24. Схема трехзвенного планетарного механизма с коническими колесами.

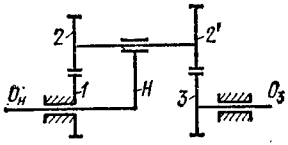


Рис. 7.25. Схема четырехзвенного планетарного механизма типа Давида с внешним зацеплением.

Следовательно, передаточное отношение $i^{(H)}_{31}$ имеет знак минус и передаточные отношения $i^{(1)}_{3H}$ и $i^{(1)}_{H3}$ определяются по формулам (7.42), (7.46) или (7.45), (7.47).

3°. На рис. 7.25 показан планетарный редуктор, который носит название *редуктора Давида.*

Передаточное отношение i_{3H} от вала O_3 к валу O_H определяется по формуле (7.42). Имеем

$$i^{(1)}_{3H}=\frac{\omega_3}{\omega_H}=(1-i^{(H)}_{31})=1-(-1)^2 i_{32}i_{21}=1-\frac{z_2'z_1}{z_3z_2}. \tag{7.49}$$

Из равенства (7.49) следует, что если подобрать числа зубьев z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3 колес *1*, *2*, *2'* и *3* так, чтобы второй член в уравнении (7.49) был близок к единице, то передаточное отношение $i_{3H}^{(H)}$ может быть весьма мало. Как это будет показано ниже, редукторы Давида с малым передаточным отношением обладают очень малым коэффициентом полезного действия. Воспроизведение таких передаточных чисел практически возможно при большом числе оборотов ведущего звена и малом числе оборотов ведомого звена.

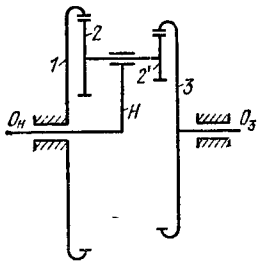


Рис. 7.26. Схема четырехзвенного планетарного механизма типа Давида с внутренним зацеплением.

На рис. 7.26 показана модификация редуктора Давида с сателлитом, входящим в два внутренних зацепления. Передаточное отношение $i_{3H}^{(1)}$ от вала O_3 к валу O_H может быть определено по формуле (7.49). Так как обычно в этой модификации редуктора Давида ведущим является водило H, то передаточное число $i_{H3}^{(H)}$ от вала O_H к валу O_3 определится по формулам (7.46) и (7.49). Имеем

$$i_{H3}^{(1)} = \frac{1}{i_{3H}^{(1)}} = \frac{1}{1 - \frac{z_2 z_1}{z_3 z_2}}. \qquad (7.50)$$

На рис. 7.27 показана модификация редуктора Давида с коническими колесами. Передаточное отношение $i_{3H}^{(1)}$ от вала O_3 к валу O_H определится по формуле (7.49). Знак у передаточного отношения $i_{3H}^{(H)}$ будет минус, так как стрелки

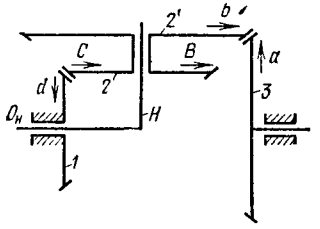


Рис. 7.27. Схема четырехзвенного планетарного механизма типа Давида с коническими колесами.

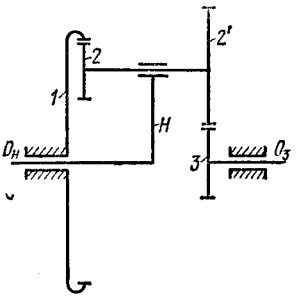


Рис. 7.28. Схема четырехзвенного планетарного механизма с внешним и внутренним зацеплениями.

a и *d* (рис. 7.24) имеют противоположные направления. Теперь рассмотрим редуктор (рис. 7.28) смешанного вида с одним внешним и одним внутренним зацеплением. Передаточное

отношение $i_{3H}^{(1)}$ от вала O_3 к валу O_H будет равно

$$i_{3H}^{(1)} = \frac{\omega_3}{\omega_H} = 1 - i_{31}^{(H)} = 1 - (-1)\, i_{32'}^{(H)} i_{2'1}^{(H)} = 1 + \frac{z_2' z_1}{z_3 z_2},$$

где z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3 — соответственно числа зубьев колес *1*, *2*, *2'* и *3*.

Пример. На рис. 7.29 показан сложный редуктор, у которого колеса *1*, *2*, *2'* и *3* образуют планетарный редуктор, а колеса *4* и *3'* — одноступенчатую

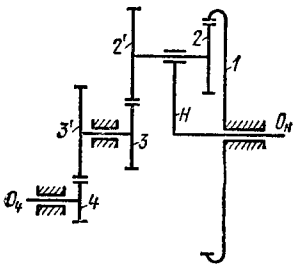


Рис. 7.29. Схема пятизвенного планетарного механизма.

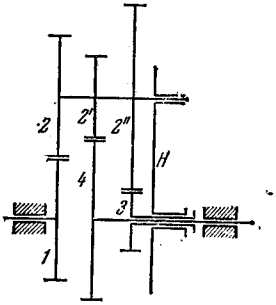


Рис. 7.30. Схема двухступенчатой коробки скоростей.

передачу с неподвижными осями. Общее передаточное отношение $i_{4H}^{(1)}$ будет равно

$$i_{4H}^{(1)} = i_{43'}^{(1)} i_{3H}^{(1)}$$

и передаточное отношение $i_{43'}$ равно

$$i_{43'} = (-1)\frac{z_{3'}}{z_4} = -\frac{z_{3'}}{z_4},$$

где z_3 и z_4 — числа зубьев колес *3'* и *4*.

Передаточное отношение $i_{3H}^{(1)}$, согласно формуле (7.42), будет равно

$$i_{3H}^{(1)} = 1 - i_{31}^{(H)} = 1 - (-1)\frac{z_{2'} z_1}{z_3 z_2} = 1 + \frac{z_{2'} z_1}{z_3 z_2},$$

где z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3 — соответственно числа зубьев колес *1*, *2*, *2'* и *3*.

Если, например, $z_1 = 90$, $z_2 = 30$, $z_{2'} = 90$,

$$z_3 = 20, \qquad z_{3'} = 50, \qquad z_4 = 25,$$

то передаточное отношение $i_{43'}$ равно

$$i_{43'} = -\frac{z_3'}{z_4} = -\frac{50}{25} = -2.$$

Передаточное отношение $i_{3H}^{(1)}$ будет равно

$$i_{3H}^{(1)} = 1 + \frac{z_{2'} z_1}{z_3 \cdot z_2} = 1 + \frac{90 \cdot 40}{20 \cdot 30} = 7$$

и, следовательно, общее передаточное отношение $i_{4H}^{(1)}$ редуктора (рис. 7.30) равно

$$i_{4H}^{(1)} = \frac{\omega_4}{\omega_H} = i_{43'} \cdot i_{3H}^{(1)} = (-2) \cdot 7 = -14.$$

Знак минус у передаточного отношения $i_{4H}^{(1)}$ показывает, что валы O_4 и O_H вращаются в противоположных направлениях.

Рассмотрим теперь схему коробки скоростей с подвижной осью. На рис. 7.30 показана двухступенчатая планетарная коробка скоростей, одна из ступеней скорости которой получается закреплением колеса *3*, вторая же — закреплением колеса *4*.

Определим передаточное отношение при закрепленном колесе *4* и вращающемся вхолостую колесе *3*. В этом случае получаем

$$(i_{1H})' = 1 - i_{13}^{(H)} = +1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2''} = -1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2''}.$$

При неподвижном колесе *3* и вхолостую крутящемся колесе *4* имеем

$$(i_{1H})'' = 1 - i_{14}^{(H)} = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_4}{z_1 z_2'}.$$

Пусть, например, $z_1 = 28$, $z_{2'} = 20$, $z_{2''} = 38$, $z_3 = 18$, $z_4 = 36$. Тогда

$$(i_{1H})' = 1 - \frac{28 \cdot 18}{28 \cdot 38} = 0{,}526 \quad \text{и} \quad (i_{1H})'' = 1 - \frac{28 \cdot 36}{28 \cdot 38} = 0{,}053.$$

4°. Сателлитные механизмы с двумя и более степенями подвижности называются *дифференциальными механизмами* или просто *дифференциалами*. Ниже мы рассмотрим кинематику дифференциалов с двумя степенями подвижности.

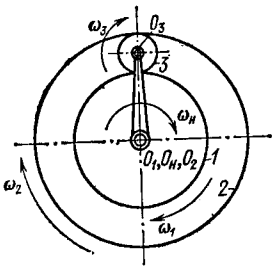


Рис. 7.31. Схема зубчатого дифференциального механизма с цилиндрическим колесом.

Примером такого дифференциала может служить механизм, показанный на рис. 7.31, у которого соосны колеса *1*, *2* и водило *H*. Колеса *1*, *2* и водило *H* вращаются с угловыми скоростями ω_1, ω_2 и ω_H. Число степеней подвижности w этого механизма равно двум.

В самом деле, число подвижных звеньев в механизме $n = 4$, число вращательных пар V класса $p_5 = 4$. Это три пары O_1, O_2 и O_H, в которые входят звенья *1*, *2* и *H* со стойкой, и пара O_3, в которую входит водило *H* и звено *3*. Число пар IV класса $p_4 = 2$. Это входящие в зацепление колеса *1*, *3* и *3*, *2*. Следовательно, по структурной формуле число w степеней подвижности механизма

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

Таким образом, для определенности движения механизма он должен иметь заданными законы движения двух звеньев, т. е. иметь две обобщенные координаты. Вообще говоря, выбор этих двух звеньев может быть произвольным. Например, мы можем задаться законом движения звеньев *2* и *H*, т. е. законами изме-

нения углов поворота φ_2 и φ_H звеньев *2* и *H*. Тогда, очевидно, угол поворота φ_1 звена *1*

$$\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_2, \varphi_H). \tag{7.51}$$

По правилу дифференцирования сложных функций получаем из (7.51)

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_H} \cdot \frac{d\varphi_H}{dt}, \tag{7.52}$$

или так как $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ $\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2$ и $\frac{d\varphi_H}{dt} = \omega_H$, то, следовательно,

$$\omega_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_2}\omega_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_H}\omega_H. \tag{7.53}$$

Уравнение (7.53) связывает угловые скорости звеньев *1*, *2* и *H*. Угловая скорость ω_3 колеса *3* не входит в уравнение (7.53), так как колесо *3* является паразитным. Частные производные от угла φ_1 по углам φ_2 и φ_H суть соответствующие передаточные отношения при неподвижных звеньях *2* и *H*. Имеем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_2} = i_{12}^{(H)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_H} = i_{1H}^{(2)}.$$

Уравнение (7.53) теперь можно переписать так:

$$\omega_1 = i_{12}^{(H)}\omega_2 + i_{1H}^{(2)}\omega_H. \tag{7.54}$$

Как нами это было показано выше ((7.40)), передаточное отношение $i_{1H}^{(2)}$ может быть представлено в следующем виде:

$$i_{1H}^{(2)} = 1 - i_{12}^{(H)}. \tag{7.55}$$

Подставляя выражение для $i_{1H}^{(2)}$ из уравнения (7.55) в уравнение (7.54), имеем

$$\omega_1 = i_{12}^{(H)}\omega_2 + (1 - i_{12}^{(H)})\,\omega_H,$$

откуда получаем

$$\omega_1 = \omega_H + i_{12}^{(H)}(\omega_2 - \omega_H),$$

или

$$i_{12}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_2 - n_H}, \tag{7.56}$$

где n_1, n_2 и n_H — соответственно числа оборотов в минуту звеньев *1*, *2* и *H*.

Формула (7.56) носит название *формулы Виллиса для дифференциалов*. Формула Виллиса может быть получена также

с использованием так называемого метода обращения движения. Он состоит в следующем.

Пусть звенья механизма, входящие в кинематические пары со стойкой, движутся с угловыми скоростями ω_1, ω_2 и ω_H. Относительное движение звеньев не изменится, если всем звеньям механизма сообщить дополнительное вращение с какой-либо общей угловой скоростью. Сообщим всем звеньям механизма дополнительное вращение вокруг оси O_H с угловой скоростью $-\omega_H$, равной по величине, но противоположной по знаку угловой скорости ω_H звена H. Тогда звенья механизма будут иметь угловые скорости, определяемые из таблицы 3:

Таблица 3

Звено механизма	Первоначальная угловая скорость звена	Угловая скорость звена после сообщения ему дополнительного вращения
1	ω_1	$\omega_1-\omega_H=\omega_1^{(H)}$
2	ω_2	$\omega_2-\omega_H=\omega_2^{(H)}$
H	ω_H	$\omega_H-\omega_H=0$

Следовательно, после сообщения звеньям механизма дополнительного вращения с угловой скоростью $-\omega_H$ звено H будет неподвижно и дифференциал превратится в обыкновенный зубчатый механизм с неподвижными осями O_1 и O_3. Передаточное отношение такого механизма равно

$$i_{12}^{(H)}=\frac{\omega_1^H}{\omega_2^H}=\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_2-\omega_H}=\frac{n_1-n_H}{n_2-n_H}, \tag{7.57}$$

где n_1, n_2 и n_H — числа оборотов в минуту колес *1*, *2* и звена H.

Таким образом, мы получили формулу Виллиса (7.56). Формулу Виллиса можно обобщить на дифференциал с любым числом колес до k. Имеем

$$i_{1k}^{(H)}=\frac{\omega_1}{\omega_k}=\frac{\omega_1-\omega_H}{\omega_k-\omega_H}=\frac{n_1-n_H}{n_k-n_H}. \tag{7.58}$$

Угловая скорость ω_3 не входит в равенство (7.57), так как колесо *3* является паразитным (см. § 32, *2°*). В левой части формулы (7.57) стоит передаточное отношение i_{13}^H обыкновенного зубчатого механизма в предположении неподвижности звена H. Формулы (7.56) или (7.57) связывают между собой угловые скорости колес *1*, *2* и водила H. Задаваясь двумя какими-либо из них, можно всегда определить третью.

Из уравнения (7.54) его интегрированием при условии постоянства передаточных отношений $i_{12}^{(H)}$ и $i_{1H}^{(2)}$, что всегда имеет место для дифференциала с круглыми колесами, получаем

$$\varphi_1 = i_{12}^{(H)}\varphi_2 + i_{1H}^{(2)}\varphi_H, \tag{7.59}$$

где φ_1, φ_2 и φ_H — углы поворота звеньев *1*, *2* и *H*.

Механизмы дифференциалов широко применяются в автомобилях, счетных машинах, сельскохозяйственных машинах и т. д.

5°. Из механизма, показанного на рис. 7.31, могут быть получены и другие механизмы закреплением одного из звеньев. Если закрепить звено *H*, то его угловая скорость ω_H будет равна нулю. Тогда формула для передаточного отношения i_{13} примет известный вид

$$i_{13} = i_{13}^{H} = \frac{\omega_1}{\omega_3},$$

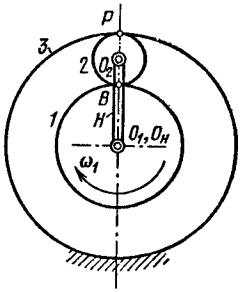


Рис. 7.32. Схема планетарного механизма с неподвижным солнечным колесом.

и дифференциал превращается, как сказано выше, в обыкновенный зубчатый механизм с неподвижными осями. Если закрепить одно из колес, например колесо *2* (рис. 7.32), то угловая скорость ω_2 будет равна нулю, и формула (7.57) может быть написана так:

$$i_{12}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}^{(2)},$$

откуда получим

$$i_{1H}^{(2)} = 1 - i_{12}^{(H)}, \tag{7.60}$$

где $i_{1H}^{(2)}$ — передаточное отношение механизма (рис. 7.31) с неподвижным колесом *2*, подсчитанное от колеса *1* к звену *H*, а $i_{12}^{(H)}$ — передаточное отношение механизма, составленного из тех же колес с неподвижными осями O_1 и O_3, подсчитанное от колеса *1* к колесу *2*, т. е. мы получаем формулу, аналогичную формуле (7.42) для определения передаточного отношения планетарного механизма (см. § 33,*2°*).

6°. Рассмотрим дифференциал с коническими колесами. На рис. 7.33 показан конический дифференциал, применяемый в автомобилях. При повороте ведущих колес автомобиля (рис. 7.34) колесо *1*, катящееся по внешней кривой $\alpha - \alpha$, должно пройти больший путь, чем колесо *2*, катящееся по внутренней кривой $\beta - \beta$. Следовательно, скорость колеса *1* оказывается больше, чем колеса *2*. Чтобы воспроизвести это движение колес с различными угловыми скоростями, и применяется дифференциал с коническими колесами. Коническое зубчатое колесо *1* (рис. 7.33) полу-

чает вращение от двигателя. Это зубчатое колесо входит в зацепление с коническим зубчатым колесом 2, вращающимся свободно на полуоси A. С колесом 2 скреплена коробка H, служащая водилом. В коробке H свободно на своих осях вращаются два одинаковых сателлита 3. Сателлиты 3 находятся в зацеплении с двумя одинаковыми зубчатыми колесами 4 и 5, скрепленными с полуосями A и B. Если колеса автомобиля движутся по прямым, то можно считать, что моменты сил сопротивления на полуосях A и B равны, и, следовательно, сателлиты 3 находятся относительно их собственных осей вращения в равновесии, и они не поворачиваются вокруг своих осей. Тогда коробка H вместе с сателлитами 3 и

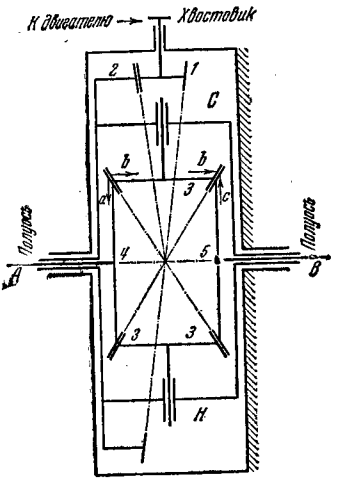


Рис. 7.33. Схема конического автомобильного дифференциала.

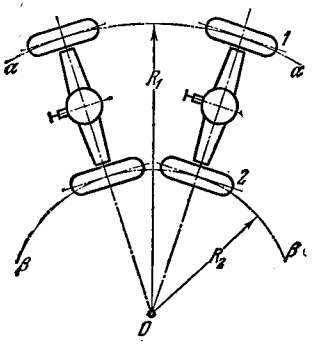


Рис. 7.34. Положения колес автомобиля при его повороте.

полуоси A и B вращаются как одно целое в одну и ту же сторону с одинаковой угловой скоростью. Как только колеса автомобиля начнут двигаться по кривым различных радиусов R_1 и R_2 (рис. 7.34), сателлиты 3 начнут поворачиваться вокруг своих осей, и весь механизм будет работать как дифференциальный механизм.

Рассмотрим кинематику автомобильного дифференциала. Согласно формуле (7.57) имеем

$$i_{45}^{H}=\frac{\omega_4-\omega_H}{\omega_5-\omega_H}=\frac{n_4-n_H}{n_5-n_H},$$

где n_4 и n_5 суть числа оборотов в минуту колес 4 и 5, а n_H есть число оборотов в минуту коробки H (водила). Колесо 4 сцепляется с паразитными колесами 3 (сателлитами), которые в свою очередь сцепляются с колесом 5, одинаковым с колесом 4. Следовательно, передаточное отношение i_{45}^{H} равно

$$i_{45}^{H}=\frac{z_3z_5}{z_4z_3}=\frac{z_5}{z_4}=-1,$$

Знак минус поставлен потому, что стрелки a и c колес *4* и *5* (рис. 7.33) не совпадают по направлению. Таким образом, окончательно получим

$$i_{45}^{(H)}=\frac{n_4-n_H}{n_5-n_H}=-1,$$

откуда

$$n_4-n_H=n_H-n_5,$$

или

$$n_H=\frac{n_4+n_5}{2}=0{,}5n_4+0{,}5n_5. \qquad (7.61)$$

Таким образом, сумма двух коэффициентов при n_4 и n_5 равна единице, т. е. удовлетворяется указанное условие (7.41).

Из формулы (7.61) следует, что число оборотов в минуту n_H коробки H равно полусумме чисел оборотов полуосей A и B. Если одно из колес, например колесо *4*, остановится и n_4 будет равно нулю, то получим

$$n_H=\frac{n_5}{2},$$

и тогда колесо *5* будет делать в два раза большее число оборотов, чем коробка H. Если неподвижной будет коробка H и число оборотов n_H коробки будет равно нулю, то

$$n_4=-n_5,$$

и колесо *4* будет вращаться с тем же числом оборотов, что и колесо *5*, но в противоположном направлении.

7°. Пятизвенный конический дифференциал применяется в счетных машинах как суммирующий механизм для сложения скалярных величин, т. е. он осуществляет линейную зависимость вида

$$x_1=qx_2+px_3. \qquad (7.62)$$

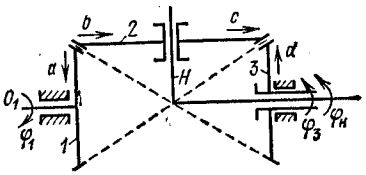


Рис. 7.35. Схема дифференциального суммирующего механизма с коническими колесами.

Рассмотрим механизм конического дифференциала (рис. 7.35) с равными колесами *1* и *3*, сателлитом H и паразитным колесом *2*. Для него, согласно уравнению (7.59), будет всегда удовлетворяться условие

$$\varphi_1=i_{13}^{(H)}\varphi_2+i_{1H}^{(3)}\varphi_H. \qquad (7.63)$$

Постоянные коэффициенты q и p в уравнении (7.62) будут соответственно равны

$$q=i_{13}^{(H)} \quad \text{и} \quad p=i_{1H}^{(3)}=1-i_{13}^{(H)}=1-q,$$

так как, согласно условию (7.41),

$$i_{13}^{(H)} + i_{1H}^{3} = p + q = 1. \tag{7.64}$$

Введя на валы O_3 и O_H скалярные величины x_3 и x_H в виде соответствующих углов поворота φ_3 и φ_H этих валов, мы получим поворот вала O_1 на угол φ_1, пропорциональный величине x_1, равной сумме, указанной в уравнении (7.62). Пятизвенный конический дифференциал вида, показанного на рис. 7.35, осуществляет суммирование при условии, что сумма постоянных p и q равна

$$p + q = 1.$$

Если необходимо осуществить суммирование при условии

$$p + q \neq 1,$$

то надо на одном или обоих входных валах O_3 и O_H поставить дополнительные простые зубчатые передачи с передаточными отношениями i' и i'', равными

$$i' = \frac{p}{i_{13}^{(H)}} \quad \text{и} \quad i'' = \frac{q}{1 - i_{13}^{(H)}}. \tag{7.65}$$

8°. Выше мы рассмотрели некоторые виды механизмов дифференциалов с двумя степенями подвижности. Эти дифференциалы имеют два ведущих звена. В технике применяются сателлитные механизмы, состоящие из дифференциала, между ведущими звеньями которого установлена промежуточная зубчатая передача. Эта передача накладывает дополнительное условие связи, и дифференциальный механизм превращается в сложный планетарный механизм с одной степенью подвижности. Такой механизм называется *замкнутым дифференциальным механизмом*.

На рис. 7.36, *а* показан механизм дифференциала, у которого колеса *1* и *3'* замкнуты промежуточной зубчатой передачей, состоящей из колес *1*, *2*, *2'*, *3*, вследствие чего угловая скорость колеса *3'* зависит от угловой скорости ведущего звена *1*. Для определения общего передаточного отношения i_{1H} от вала O_1 к валу O_H удобно механизм, показанный на рис. 7.36, *а*, как бы расчленить на два зубчатых механизма. Первый механизм, показанный на рис. 7.36, *б*, представляет собою простую двухступенчатую зубчатую передачу, состоящую из колес *1*, *2*, *2'* и *3*. Второй механизм, показанный на рис. 7.36, *в*, представляет собою дифференциал, состоящий из колес *3'*, *4*, *1'* и водила *H*. Начнем с рассмотрения кинематики дифференциала (рис. 7.36, *в*). Для этого механизма имеем, согласно уравнению Виллиса, (7.56),

$$i_{1'3'}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \tag{7.66}$$

Разделим числитель и знаменатель уравнения (7.66) на угловую скорость ω_H. Получаем

$$i_{1'3'}^{(H)} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_H} - 1}{\frac{\omega_3}{\omega_H} - 1} = \frac{i_{1H} - 1}{\frac{\omega_3}{\omega_H} - 1}. \qquad (7.67)$$

Вследствие того, что колеса *1* и *1'* и *3* и *3'* жестко связаны друг с другом, $\omega_{1'} = \omega_1$ и $\omega_3 = \omega_{3'}$.

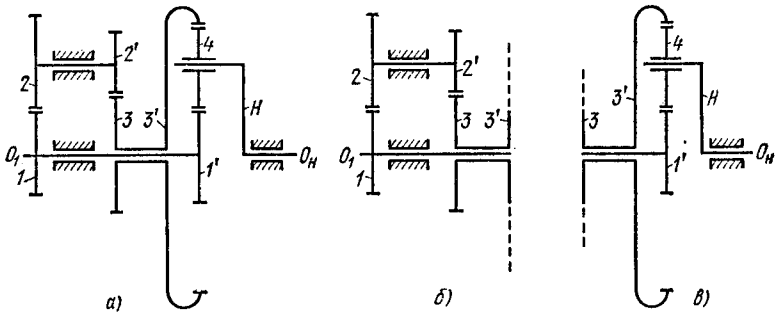


Рис. 7.36. Схема замкнутого дифференциального механизма с цилиндрическими колесами.

Далее рассмотрим механизм, показанный на рис. 7.36, *б*. Передаточное отношение i_{13} этого механизма равно

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}. \qquad (7.68)$$

Из равенства (7.68) получаем

$$\omega_3 = \frac{\omega_1}{i_{13}}. \qquad (7.69)$$

Подставляем полученное выражение для ω_3 в уравнение (7.67). Получаем

$$i_{13}^{(H)} = \frac{i_{1H} - 1}{\frac{\omega_1}{\omega_H i_{13}} - 1} = \frac{i_{13}(i_{1H} - 1)}{i_{1H} - i_{13}}. \qquad (7.70)$$

Из уравнения (7.70) определяем общее передаточное отношение i_{1H} механизма. Имеем

$$i_{1H} = \frac{i_{13}(i_{13}^{(H)} - 1)}{i_{13}^{(H)} - i_{13}}. \qquad (7.71)$$

Передаточные отношения, стоящие в левой части равенства (7.71), могут быть определены, если известны числа зубьев z_1, $z_{1'}$, z_2, $z_{2'}$, z_3, $z_{3'}$ и z_4 колес *1*, *1'*, *2*, *2'*, *3*, *3'* и *4*. Имеем

$$i_{13}=(-1)^2\frac{z_2z_3}{z_1z_{2'}}=\frac{z_2z_3}{z_1z_{2'}}, \tag{7.72}$$

$$i_{13}^{H}=(-1)\frac{z_4z_{3'}}{z_{1'}z_4}=-\frac{z_{3'}}{z_{1'}}. \tag{7.73}$$

Подставляя значения i_{13} и $i_{13}^{(H)}$ из равенств (7.72) и (7.73) в равенство (7.71), определяем передаточное отношение i_{1H} от вала O_1 к валу O_H (рис. 7.36, *а*).

§ 34. Механизмы передач с гибкими звеньями

1°. Механизмы передач с гибкими звеньями широко применяются в некоторых отраслях техники. Достаточно указать на передачи ременные, канатные, цепные и др.

Рассмотрим основные кинематические зависимости, имеющие место при передаче движения гибкими звеньями. Пусть два звена *1* и *3* (рис. 7.37) имеют профили, очерченные по некоторым кривым $\alpha-\alpha$ и $\gamma-\gamma$. Гибкое нерастяжимое звено *2* охватывает профили $\alpha-\alpha$ и $\gamma-\gamma$ на участках Bk и Cn и закреплено своими концами k и n на профилях. Если звено *1* вращать, то гибкое звено *2* будет наматываться на профиль $\alpha-\alpha$ и сматываться с профиля $\gamma-\gamma$ и тем самым приведет во вращение звено *3*.

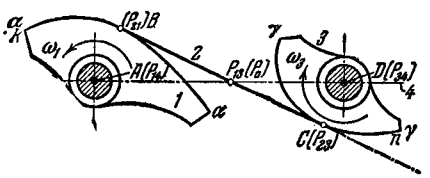


Рис. 7.37. Схема передачи с нерастяжимой гибкой нитью и отрицательным передаточным отношением.

Найдем связь между угловыми скоростями ω_1 и ω_3 звеньев *1* и *3*. Для этого воспользуемся методом мгновенных центров вращения. Мгновенный центр P_{14} (звено *4* — стойка) находится в точке *A*. Мгновенный центр P_{34} находится в точке *D*. Мгновенный центр P_{21} совпадает с точкой *B*. В самом деле, если мысленно остановить звено *1*, то звено *2* будет перекатываться без скольжения по профилю $\alpha-\alpha$ звена *1*. Точно так же мгновенный центр вращения P_{23} совпадает с точкой *C*. Мгновенный центр вращения P_{13} в движении звена *3* относительно звена *1* должен одновременно лежать на прямых, соединяющих мгновенные центры P_{14}, P_{34} и P_{21}, P_{23} и в соответствии с этим он располагается в точке пересечения прямых *AD* и *BC*. Следовательно, передаточное отношение i_{13} будет равно

$$i_{13}=\frac{\omega_1}{\omega_3}=-\frac{(P_{34}P_{13})}{(P_{14}P_{13})}=-\frac{(DP_0)}{(AP_0)}. \tag{7.74}$$

Таким образом, направление гибкого звена делит линию, соединяющую центры вращения звеньев *1* и *3*, на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

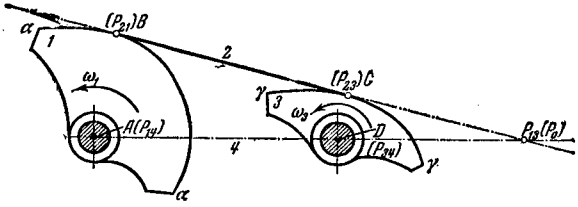


Рис. 7.38. Схема передачи с нерастяжимым гибким звеном и положительным передаточным отношением.

В случае деления линии AD внутренним образом передаточное отношение отрицательно (рис. 7.37), в случае деления внешним образом передаточное отношение положительно (рис. 7.38).

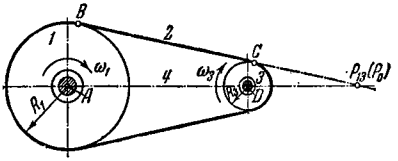


Рис. 7.39. Схема открытой передачи с нерастяжимым гибким звеном и круглыми шкивами.

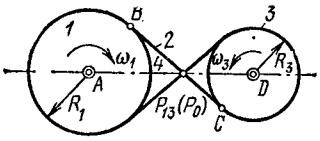


Рис. 7.40. Схема перекрестной передачи с нерастяжимым гибким звеном и круглыми шкивами.

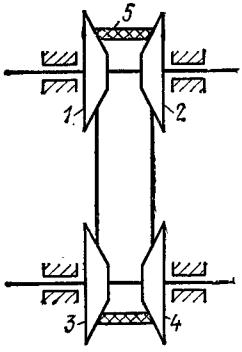


Рис. 7.41. Схема бесступенчатого вариатора скоростей с нерастяжимым гибким звеном и коническими шкивами.

2°. При передаче движения гибким звеном посредством круглых шкивов (рис. 7.39) передаточное отношение равно

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{DP_0}{AP_0} = \frac{R_3}{R_1}, \qquad (7.75)$$

т. е. передаточное отношение равно обратному отношению радиусов R_1 и R_3 шкивов *1* и *3*.

Механизм передачи гибким звеном, показанный на рис. 7.39, носит название *открытой передачи*. На рис. 7.40 показан механизм *перекрестной передачи*. Передаточное отношение перекрестной

передачи

$$i_{13}=\frac{\omega_1}{\omega_3}=-\frac{DP_0}{AP_0}=-\frac{R_3}{R_1}. \qquad (7.76)$$

На рис. 7.41 показана схема бесступенчатого вариатора скорости с гибким звеном *5*. Конусы *1* и *2*, *3* и *4* специальным механизмом, не показанным на схеме, можно сдвигать или раздвигать. При этом соблюдается условие постоянства длины гибкого звена *5*. Таким образом, мы имеем два шкива, у которых можно плавно менять радиусы и плавно изменять передаточные отношения.

Передачи с гибкими звеньями широко применяются также и в виде цепных передач, в которых зубчатые звездочки входят в зацепление со звеньями цепи. Такие механизмы применяются в сельскохозяйственных машинах, транспортерах, горных машинах и др.

ГЛАВА VIII

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 35. Механизмы универсального шарнира

1°. В § 11, *4°* при рассмотрении рычажных механизмов мы отметили сферический шарнирный четырехзвенник.

На рис. 8.1 показан простейший сферический шарнирный четырехзвенник $ABCD$, оси вращательных кинематических пар которого пересекаются в точке O. В ней пересекаются оси *1*, *2*, *3* и *4*

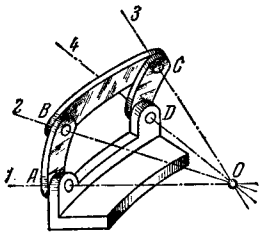


Рис. 8.1. Сферический шарнирный четырехзвенник со схематизированными конструктивными формами звеньев.

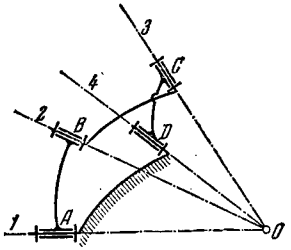


Рис. 8.2. Кинематическая схема сферического шарнирного четырехзвенника.

вращательных кинематических пар V класса. Кинематическая схема этого механизма показана на рис. 8.2.

Конструктивно сферический механизм шарнирного четырехзвенника выполняется так, как это показано на рис. 8.3. Звено *1*, вращающееся с угловой скоростью ω_1 в неподвижном подшипнике, выполнено в виде вилки F, снабженной двумя втулками B и B'

с одной общей осью BB'. Аналогично звено *2*, вращающееся с угловой скоростью ω_2 в неподвижном подшипнике, выполнено в виде вилки F_1, снабженной двумя втулками C и C' с одной общей осью CC'. Звено *3* выполнено в виде крестовины, концы которой входят во втулки B, B' и C, C' вилок F и F_1.

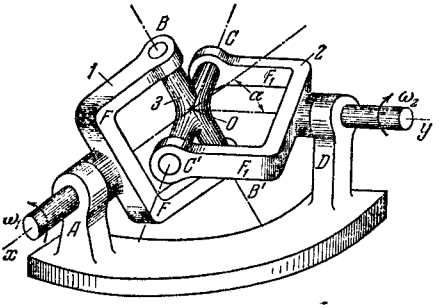


Рис. 8.3. Модель сферического шарнирного четырехзвенника.

Механизм позволяет воспроизводить передачу вращения от звена *1* к звену *2*, оси валов которых пересекаются под углом α (рис. 8.3).

На практике мы встречаем по преимуществу тот частный вид механизма, когда углы AOB, COB и COD равны 90°. Тогда точки B и B' движутся по дуге большого круга, плоскость которого перпендикулярна к оси x, а точки C и C' — по дуге большого круга, плоскость которого перпендикулярна к оси y. Описанный механизм носит название механизма *универсального шарнира* или *шарнира Гука*.

2°. Рассмотрим теперь, в какой зависимости находятся угловые скорости ω_1 и ω_2. Как это видно из рис. 8.4, точка B вилки F описывает окружность β — β в плоскости, перпендикулярной к оси x,

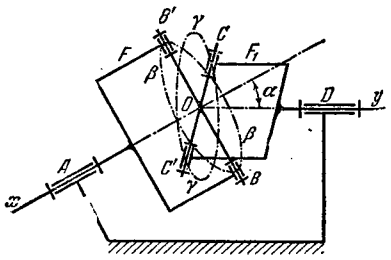


Рис. 8.4. Схема универсального шарнира.

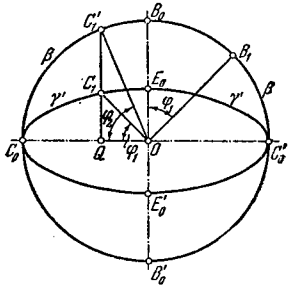


Рис. 8.5. К определению соотношения между углами φ_1 и φ_2 поворота звеньев универсального шарнира.

а точка C вилки F_1 описывает окружность γ — γ в плоскости, перпендикулярной к оси y. Угол между этими плоскостями равен углу α между осями x и y.

Если в качестве плоскости проекций выбрать плоскость, перпендикулярную к оси x, то окружность β — β на эту плоскость спроектируется в натуральную величину (рис. 8.5), а окружность γ — γ — в виде эллипса γ' — γ'.

Пусть в начальном положении ось BB' занимает положение B_0B_0' (рис. 8.5); тогда ось CC' займет положение C_0C_0', так как угол BOC равен 90° и проектируется в натуральную величину. Пусть далее звено *1* повернется на угол φ_1. Тогда ось OB из положения OB_0 перейдет в положение OB_1 и угол φ_1 будет проектироваться в натуральную величину. Ось OC из положения OC_0 перейдет в положение OC_1, которое определится, если к прямой OB_1 в точке O восставить перпендикуляр и найти точку C_1 пересечения этого перпендикуляра с эллипсом $\gamma' - \gamma'$. При этом звено *2* повернется на угол φ_2, натуральную величину которого можно найти на чертеже, если совместить плоскость, содержащую окружность $\gamma - \gamma$, с плоскостью проекций, т. е. плоскостью, содержащей окружность $\beta - \beta$. Это совмещение может быть сделано как поворот вокруг оси $C_0C'_0$. При этом точка C_1 переместится в точку C_1', лежащую на перпендикуляре QC_1' к оси C_0C_0'. Угол C_0OC_1' и будет искомым углом φ_2, на который повернется звено *2*. Так как угол между плоскостями, содержащими окружности $\beta - \beta$ и $\gamma - \gamma$, равен углу α между осями x и y, то всегда будет иметь место равенство

$$QC_1 = QC_1' \cos\alpha. \tag{8.1}$$

Далее из чертежа (рис. 8.5) видно, что

$$QC_1 = OQ \operatorname{tg}\varphi_1 \tag{8.2}$$

и

$$QC_1' = OQ \operatorname{tg}\varphi_2. \tag{8.3}$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \cos\alpha,$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 \cos\alpha. \tag{8.4}$$

Так как $\alpha = \text{const}$, то, дифференцируя выражение (8.4) по обобщенной координате φ_1, находим

$$\frac{d(\operatorname{tg}\varphi_1)}{d\varphi_1} = \frac{d(\operatorname{tg}\varphi_2)}{d\varphi_2} \cos\alpha \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1},$$

или

$$\frac{d\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} = \cos\alpha \frac{d\varphi_2}{\cos^2\varphi_2}.$$

Разделим правую и левую части на dt. Имеем

$$\frac{\omega_1}{\cos^2\varphi_1} = \cos\alpha \frac{\omega_2}{\cos^2\varphi_2},$$

так как $\frac{d\varphi_1}{dt}=\omega_1$ и $\frac{d\varphi_2}{dt}=\omega_2$. Следовательно, передаточное отношение i_{21} равно

$$i_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\cos^2\varphi_2}{\cos^2\varphi_1}\frac{1}{\cos\alpha}. \tag{8.5}$$

Уравнение (8.4) представим в виде

$$\frac{\sin^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_1}=\frac{\sin^2\varphi_2}{\cos^2\varphi_2}\cos^2\alpha=\frac{1-\cos^2\varphi_2}{\cos^2\varphi_2}\cos^2\alpha.$$

Решая последнее уравнение относительно $\cos^2\varphi_2$, получаем

$$\cos^2\varphi_2=\frac{\cos^2\varphi_1\cos^2\alpha}{\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1\cos^2\alpha}. \tag{8.6}$$

Подставляя выражение (8.6) в выражение (8.5), получаем

$$i_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\cos\alpha}{\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1\cos^2\alpha}. \tag{8.7}$$

Отсюда непосредственно следует, что при *равномерном* вращении одного вала другой вал вращается *неравномерно*. В самом деле, при $\varphi_1=0°$ или $\varphi_1=180°$ имеем

$$i_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

При $\varphi_1=90°$ или $\varphi_1=270°$ имеем

$$i_{21}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\cos\alpha.$$

Таким образом, передаточное отношение i_{21} у механизма шарнира Гука изменяется в пределах от $1/\cos\alpha$ до $\cos\alpha$.

Чтобы не было большого колебания передаточного отношения i_{21}, оси валов шарнира рекомендуется располагать под небольшим углом α.

3°. В ряде машин для передачи вращения между двумя произвольно расположенными в пространстве осями применяется *механизм двойного универсального шарнира*.

Рассмотрим механизм двойного универсального шарнира, кинематическая схема которого изображена на рис. 8.6. Этот механизм можно рассматривать как два универсальных шарнира, имеющих общее звено *HKLN*. Вследствие того, что оси вращательных пар по три пересекаются в двух точках *O* и O_1, механизм двойного универсального шарнира обладает одной степенью подвижности.

4°. Рассмотрим соотношения угловых скоростей в этом механизме (рис. 8.6). Пусть в точке *O* пересекаются оси *1*, *2* и *3*, а в точке O_1 — оси *4*, *5* и *6*. Пусть угловая скорость звена *ABC* вокруг оси *1* равна

ω_1, а угловая скорость звена DEF вокруг оси 6 равна ω_2. Пусть далее оси 1 и 6 наклонены к линии OO_1 соответственно под углами α_1 и α_2. Вилки HK и LN находятся в одной и той же плоскости.

Обозначим угол поворота звена $HKLN$ через φ, угол поворота звена ABC — через φ_1 и, наконец, угол поворота звена DEF —

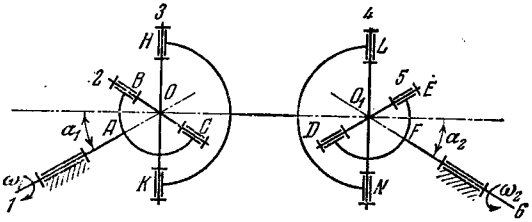


Рис. 8.6. Схема двойного универсального шарнира.

через φ_2. Тогда по формуле (8.4) для механизма универсального шарнира получаем

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\alpha_1, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\alpha_2,$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}. \tag{8.8}$$

Отношение i_{21} угловых скоростей ω_2 и ω_1 может быть найдено с помощью формулы, аналогичной формуле (8.5).

Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2, \tag{8.9}$$

откуда имеем

$$\varphi_1 = \varphi_2, \tag{8.10}$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = \omega_2. \tag{8.11}$$

Таким образом, при симметричном расположении звеньев механизма угловые скорости звеньев ABC и DEF равны между собой.

§ 36. Мальтийские механизмы

1°. Мальтийские механизмы, или так называемые *механизмы мальтийских крестов* относятся к зубчатым механизмам с остановками, т. е. к механизмам, у которых ведомое звено имеет периоды времени движения и периоды времени остановки.

Механизм мальтийского креста представляет собой звено *1*, состоящее из диска с вырезом и пальца A (рис. 8.7). Звено *2* представляет собой диск, снабженный радиальными пазами. При вра-

щении звена *1* палец *A* входит в соответствующие пазы *b* звена *2* и поворачивает его на определенный угол. Звенья *1* и *2* снабжены запирающими дугами *CDE*, предупреждающими самопроизвольное движение звена *2*. Механизмы мальтийских крестов выполняются как с внешним, так и с внутренним зацеплениями.

Механизм с внешним зацеплением показан на рис. 8.7, а механизм с внутренним зацеплением — на рис. 8.8.

Механизм мальтийского креста после замены высших пар низшими может быть приведен к обыкновенному кулисному механизму (рис. 8.9). Для определения скоростей и ускорений этого механизма могут быть приведены формулы для кулисного механизма, выведенные нами в § 25. При исследовании механизма мальтийского креста с внешним зацеплением надо исследовать движение заменяющего кулисного механизма при повороте его звена *1* на угол $2\varphi_1$, для механизма с внутренним зацеплением исследование производится

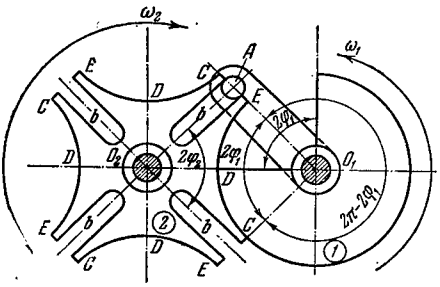


Рис. 8.7. Схема механизма мальтийского креста с внешним зацеплением.

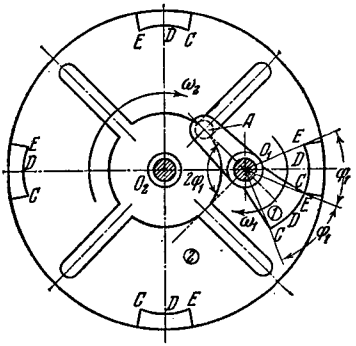


Рис. 8.8. Схема механизма мальтийского креста с внутренним зацеплением.

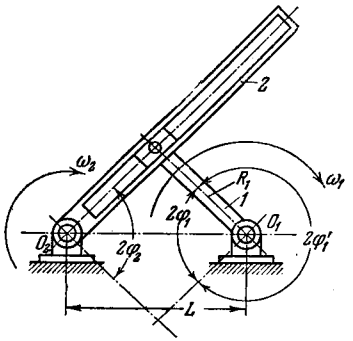


Рис. 8.9. Схема кулисного механизма, заменяющего механизм мальтийского креста.

при повороте звена *1* кулисного механизма на угол $2\varphi_1'$. На рис. 8.10 даны диаграммы угловой скорости и углового ускорения звена *2* для внешнего и внутреннего зацеплений при постоянной угловой скорости ведущего звена *1*. При внешнем зацеплении угловая скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 изменяются по законам, указанным на участке *AB* диаграммы. При внутреннем зацеплении угловая скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 изменяются по законам, указанным на участках *CA* и *BD* диаграммы. Из сравнения диаграмм

для внешнего и внутреннего зацеплений следует, что мальтийский крест с внутренним зацеплением работает более плавно, чем мальтийский крест с внешним зацеплением.

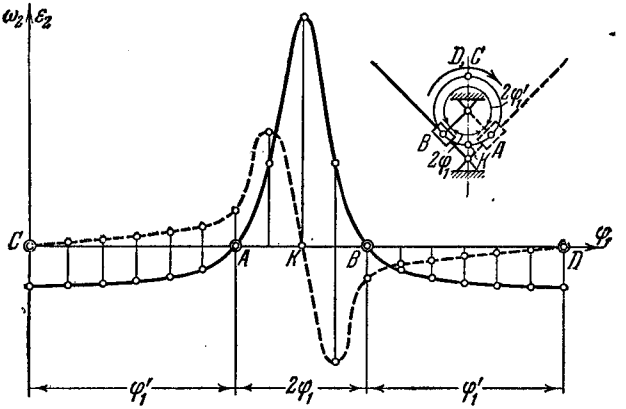


Рис. 8.10. Диаграммы угловой скорости и углового ускорения коромысла кулисного механизма, заменяющего механизмы мальтийских крестов с внешним и внутренним зацеплением.

Механизм, показанный на рис. 8.11, обеспечивает равные периоды движения и покоя, соответствующие повороту ведущего звена *1* на угол 90°, так как углы между пазами и пальцами равны между собой. При равных периодах углы λ_1 между пальцами и

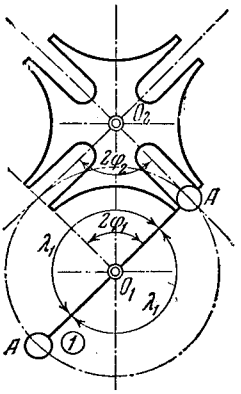


Рис. 8.11. Схема механизма мальтийского креста с равными периодами движения и покоя.

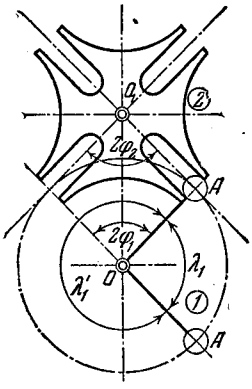


Рис. 8.12. Схема механизма мальтийского креста с равными периодами движения и неравными периодами покоя.

расстояния пальцев от оси вращения O_1 должны быть равны. Для механизма, показанного на рис. 8.12, периоды движения и покоя креста соответствуют повороту ведущего звена *1* на угол 180°.

Если и периоды покоя и периоды движения заданы неравными, получается механизм неправильного мальтийского креста. В этом механизме могут быть различными углы между пазами, углы между пальцами и расстояния пальцев от оси вращения O_1.

2°. В механизме мальтийского креста с одним пальцем, у которого вектор скорости оси пальца в момент входа в паз направлен по оси паза, угол поворота креста за один оборот звена *1* равен

$$2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z}, \tag{8.12}$$

где z — число пазов. При повороте креста на угол $2\varphi_2$ звено *1* поворачивается на угол $2\varphi_1$ (рис. 8.7), равный

$$2\varphi_1 = \pi - 2\varphi_2 = \pi - \frac{2\pi}{z} = \pi\left(1 - \frac{2}{z}\right).$$

§ 37. Векторный метод кинематического анализа пространственных рычажных механизмов [1]

1° Рассмотрим некоторые общие положения векторной алгебры, которые нам будут необходимы при кинематическом анализе пространственных механизмов.

Обозначим сокращенно через D_a и D_b декартовы системы координат номеров a и b (рис. 8.13, *а*). Пусть известны проекции некоторого вектора w

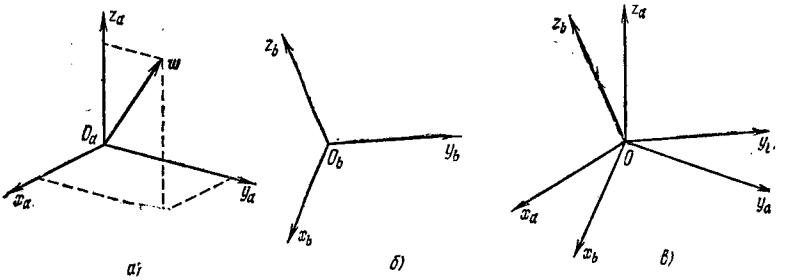


Рис. 8.13. Декартовы системы координат в совмещенном и несовмещенном видах.

на оси x_a, y_a, z_a; их мы обозначим соответственно через $w_1^{(a)}$, $w_2^{(a)}$, $w_3^{(a)}$. Требуется определить величины $w_1^{(b)}$, $w_2^{(b)}$, $w_3^{(b)}$ — проекции того же вектора на оси x_b, y_b, z_b.

При решении этого вопроса мы для удобства будем считать (рис. 8.13, *б*), что начала координатных систем D_a и D_b совпадают, ибо параллельный перенос осей координат не приводит к изменению проекций вектора.

2°. Вектор w можно представить следующим разложением по осям x_a, y_a и z_a:

$$w = i_a w_1^{(a)} + j_a w_2^{(a)} + k_a w_3^{(a)}. \tag{8.13}$$

[1] Данный параграф составлен автором по материалам, предоставленным ему А. Г. Овакимовым.

Спроектируем вектор w на оси x_b, y_b, z_b. Для этой цели выражение (8.13) нужно умножить скалярно на единичный вектор (орт) соответствующей оси. Получим

$$\left.\begin{aligned} w_1^{(b)} &= \boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{i}_b w_1^{(a)} + \boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{j}_a w_2^{(a)} + \boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{k}_a w_3^{(a)}, \\ w_2^{(b)} &= \boldsymbol{j}_b \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{j}_b \cdot \boldsymbol{i}_a w_1^{(a)} + \boldsymbol{j}_b \cdot \boldsymbol{j}_a w_2^{(a)} + \boldsymbol{j}_b \cdot \boldsymbol{k}_a w_3^{(a)}, \\ w_3^{(b)} &= \boldsymbol{k}_b \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{k}_b \cdot \boldsymbol{i}_a w_1^{(a)} + \boldsymbol{k}_b \cdot \boldsymbol{j}_a w_2^{(a)} + \boldsymbol{k}_b \cdot \boldsymbol{k}_a w_3^{(a)}. \end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

Из этих равенств видно, что каждая из искомых величин $w_k^{(b)}$ $(k = 1, 2, 3)$ *линейно* выражается через известные нам проекции $w_1^{(a)}, w_2^{(a)}$ и $w_3^{(a)}$. Коэффициентами при этих величинах являются скалярные произведения ортов координатных систем D_a и D_b. Это будут косинусы углов между соответствующими координатными осями. Так, например, коэффициенты из первой строки формул (8.14)

$$\boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{i}_a = \cos\left(\widehat{x_b, x_a}\right), \quad \boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{j}_a = \cos\left(\widehat{x_b, y_a}\right),$$
$$\boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{k}_a = \cos\left(\widehat{x_b, z_a}\right),$$

являющиеся проекциями орта $\boldsymbol{i}_b$ на оси x_a, y_a и z_a, представляют собой направляющие конусы оси x_b в системе D_a.

3°. Для некоторых выводов, которые будут сделаны позже, коэффициенты при проекциях $w_1^{(b)}$, $w_2^{(b)}$ и $w_3^{(b)}$ в равенствах (8.14) мы выпишем в виде таблицы (матрицы) [1])

$$M_{ba} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{i}_a & \boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{j}_a & \boldsymbol{i}_b \cdot \boldsymbol{k}_a \\ \boldsymbol{j}_b \cdot \boldsymbol{i}_a & \boldsymbol{j}_b \cdot \boldsymbol{j}_a & \boldsymbol{j}_b \cdot \boldsymbol{k}_a \\ \boldsymbol{k}_b \cdot \boldsymbol{i}_a & \boldsymbol{k}_b \cdot \boldsymbol{j}_a & \boldsymbol{k}_b \cdot \boldsymbol{k}_a \end{Vmatrix}, \tag{8.15}$$

которую можно переписать еще так:

$$M_{ba} = \begin{Vmatrix} \cos\left(\widehat{x_b, x_a}\right) & \cos\left(\widehat{x_b, y_a}\right) & \cos\left(\widehat{x_b, z_a}\right) \\ \cos\left(\widehat{y_b, x_a}\right) & \cos\left(\widehat{y_b, y_a}\right) & \cos\left(\widehat{y_b, z_a}\right) \\ \cos\left(z_b, x_a\right) & \cos\left(\widehat{z_b, y_a}\right) & \cos\left(z_b, z_a\right) \end{Vmatrix}. \tag{8.16}$$

M_{ba} есть матрица направляющих косинусов; элементами ее первой, второй и третьей строк являются направляющие косинусы соответственно осей координат x_b, y_b и z_b в системе D_a.

Введем в рассмотрение матрицы-столбцы

$$w^{(a)} = \begin{Vmatrix} w_1^{(a)} \\ w_2^{(a)} \\ w_3^{(a)} \end{Vmatrix}, \qquad w^{(b)} = \begin{Vmatrix} w_1^{(b)} \\ w_2^{(b)} \\ w_3^{(b)} \end{Vmatrix};$$

они составлены из проекций одноименного вектора на координатные оси систем D_a и D_b.

Приводимая ниже матричная формула

$$w^{(b)} = M_{ba} w^{(a)} \tag{8.17}$$

[1]) См. приложение 1, стр. 629.

есть компактная запись, позволяющая осуществить перевод проекций вектора $\boldsymbol{\omega}$ из системы D_a в систему D_b. Развернутую запись этой формулы можно получить в соответствии с известными правилами умножения матриц [1]). Эта запись, естественно, совпадает с равенствами (8.14).

Матрицу косинусов M_{ba} обычно называют *матрицей поворота*. Умножение на матрицу M_{ba}, как это видно из (8.17), по своему результату эквивалентно *повороту* системы D_a в положение D_b, в связи с чем ее называют матрицей поворота, осуществляющей совмещение системы D_a с D_b.

4°. Установим теперь взаимосвязь между двумя матрицами M_{ba} и M_{ab} с различным порядком индексов a и b.

Пусть, например, известна матрица M_{ba}. Элементами строк искомой матрицы M_{ab} должны являться направляющие косинусы осей x_a, y_a и z_a в системе D_b. Обратившись к записям (8.15) или (8.16) матрицы M_{ba} и просматривая ее первый, второй и третий *столбцы*, мы увидим, что в них представлены интересующие нас направляющие косинусы соответственно осей x_a, y_a и z_a.

Следовательно, матрица M_{ab} может быть получена из матрицы M_{ba} путем замены ее i-й строки ($i = 1, 2, 3$) столбцом того же номера, т. е. в результате транспонирования матрицы M_{ba}. Это условие может быть записано так:

$$M_{ab} = M'_{ba}, \tag{8.18}$$

где знак штрих принят в качестве символа транспонирования матрицы.

5°. В задачах кинематики пространственных механизмов часто используются матрицы частного вида — для случаев, когда у систем D_a и D_b совпадает (либо параллельна) одна из трех координатных осей, например x_a и x_b.

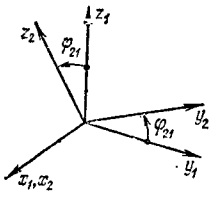


Рис. 8.14. Расположение осей координат при $x_1 = x_2$.

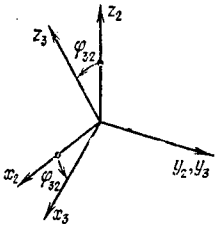


Рис. 8.15. Расположение осей координат при $y_2 = y_3$.

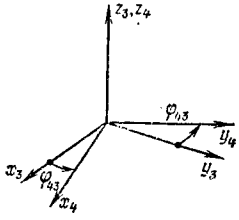


Рис. 8.16. Расположение осей координат при $z_3 = z_4$.

У систем D_1 и D_2 (рис. 8.14) общей является ось $x_1 \equiv x_2$. Взаимное угловое положение этих систем определяет угол φ_{21}. Направляющие косинусы осей x_2, y_2 и z_2 представлены в строках матрицы

$$M^{x_1}_{21} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{21} & \sin\varphi_{21} \\ 0 & -\sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} \end{Vmatrix}. \tag{8.19}$$

В обозначении этой матрицы верхний индекс введен с целью подчеркнуть, что M_{21} есть матрица поворота вокруг оси $x_1 \equiv x_2$.

Представленные на рис. 8.15 и 8.16 системы координат D_2, D_3 и D_3, D_4 имеют соответственно общие оси $y_2 \equiv y_3$ и $z_3 \equiv z_4$. Матрицы поворота вокруг этих осей

---

[1]) См. приложение 1, стр. 629.

таковы:

$$M_{32}^{y_2}=\begin{Vmatrix}\cos\varphi_{32} & 0 & -\sin\varphi_{32}\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\varphi_{32} & 0 & \cos\varphi_{32}\end{Vmatrix}, \tag{8.20}$$

$$M_{43}^{z_3}=\begin{Vmatrix}\cos\varphi_{43} & \sin\varphi_{43} & 0\\ -\sin\varphi_{43} & \cos\varphi_{43} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}. \tag{8.21}$$

6°. В ряде случаев для перевода осей некоторой системы координат D_{a_1} в параллельность осям другой системы D_{an} приходится выполнить не один, а несколько поворотов. Рассмотрим вопрос о том, как в этом случае определить матрицу $M_{a_n a_1}$.

Через $D_{a_2}, D_{a_3}, \ldots, D_{a_n}$ обозначим положения, в которые мы последовательно переводим систему координат D_{a_1}.

Для вывода нужной нам зависимости с помощью формулы (8.17) переведем проекции некоторого вектора w из системы D_{a_1} в ее последующие положения. Будем иметь

$$\begin{aligned}
w^{(a_2)} &= M_{a_2 a_1} w^{(a_1)},\\
w^{(a_3)} &= M_{a_3 a_2} w^{(a_2)} = M_{a_3 a_2} M_{a_2 a_1} w^{(a_1)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
w^{(a_n)} &= M_{a_n a_{n-1}} w^{(a_{n-1})} = M_{a_n a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot M_{a_3 a_2} M_{a_2 a_1} w^{(a_1)}.
\end{aligned}$$

Сопоставление последнего выражения с формулой (8.17) приводит нас к выводу, что

$$M_{a_n a_1} = M_{a_n a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot M_{a_3 a_2} M_{a_2 a_1}. \tag{8.22}$$

Замечаем, что в матрице-произведении $M_{a_n a_1}$ множители следуют слева направо в порядке, обратном последовательности поворотов.

Аналогично предыдущему можно записать

$$M_{a_1 a_n} = M_{a_1 a_2} M_{a_2 a_3} \cdot \ldots \cdot M_{a_{n-1} a_n}. \tag{8.23}$$

если учесть, что при переводе системы D_{an} в положение D_{a_1} она последовательно будет занимать положения $D_{a_{n-1}}, D_{a_{n-2}}, \ldots, D_{a_1}$.

Когда известны множители одной из матриц $M_{a_n a_1}$ или $M_{a_1 a_n}$, то может быть определена любая из них, ибо, согласно (8.18),

$$M_{a_1 a_2} = M'_{a_2 a_1}, \quad M_{a_2 a_3} = M'_{a_3 a_2}, \quad \ldots$$

Если, например, $D_1, D_2, \ldots, D_4$ — положения системы D_0 при переводе ее в параллельность осям системы D_4, то

$$\begin{aligned}
M_{40} &= M_{43} M_{32} M_{21} M_{10},\\
M_{04} &= M_{01} M_{12} M_{23} M_{34},
\end{aligned} \tag{8.24}$$

причем

$$M_{01} = M'_{10}, \quad M_{12} = M'_{21}, \quad \ldots$$

Обычно в равенствах вида (8.22) и (8.23) множителями являются матрицы типа (8.19)—(8.21).

7°. Применим изложенный выше метод к аналитическому решению задач кинематического анализа пространственных механизмов. Рассмотрим вначале механизмы, образованные из незамкнутых или так называемых открытых кинематических цепей, представляющих собой ряд последовательно соединенных звеньев, каждое из которых является ведущим.

Звенья незамкнутой цепи могут иметь различное число степеней свободы, но число степеней подвижности w ее последнего звена равно сумме чисел степеней

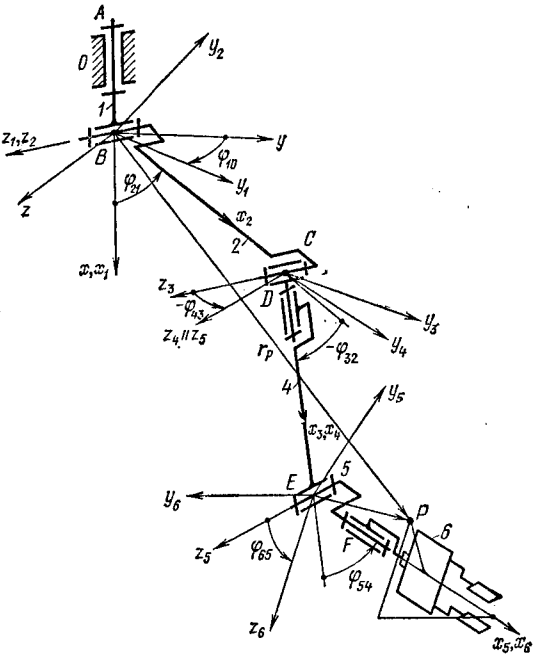


Рис. 8.17. Схема механизма «руки» манипулятора.

свободы всех кинематических пар цепи. Если цепь имеет только пары V класса (рис. 8.17), то w совпадает с числом p_5 этих пар.

Решение задач кинематического анализа открытых цепей будет пояснено на примере схемы, представленной на рис. 8.17 и обычно используемой в манипуляторах в качестве механизма так называемой «руки». Все звенья этой цепи — стойка 0 и шесть подвижных звеньев *1*, *2*, ..., *6* — соединены между собой вращательными парами. Оси соседних пар *A* и *B*, *C* и *D*, *E* и *F* взаимно перпендикулярны и пересекаются между собой. Точки *B*, *C* и *E* лежат в одной плоскости с осью шарнира *A;* этой плоскости (на рис. 8.17 она не показана) перпендикулярны оси шарниров *B* и *C*.

Переменные параметры, с помощью которых мы определяем положение системы, как известно, носят название обобщенных координат. В открытой цепи в качестве обобщенных координат q_1, q_2, ..., q_n следует выбирать линейные и угловые величины, которые определяют взаимное расположение звеньев кинематических пар цепи. Для поступательной пары это изменяемый размер l вдоль

оси пары, а для вращательной пары — это угол $\varphi_{k,\,k-1}$ относительного поворота звеньев пары k и $k-1$. Так, например, в качестве обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_6$ открытой цепи на рис. 8.17 удобно принять шесть углов $\varphi_{10}, \varphi_{21}, \ldots, \varphi_{65}$ относительного поворота соседних звеньев этой цепи.

Для целей кинематического анализа с каждым подвижным звеном k цепи ($k = 1, 2, \ldots$) мы связываем декартову систему координат D_k с осями x_k, y_k, z_k. Наличие этих относительных, иначе локальных, координатных систем позволяет нам:

а) составить матрицы поворота для перевода проекций вектора из относительной системы координат в абсолютную и наоборот;

б) пользоваться определенным правилом знаков для измерения углов поворота и их производной по времени, т. е. относительных угловых скоростей и ускорений звеньев.

8°. В задаче о положениях открытой цепи по заданным значениям ее обобщенных координат нужно в системе координат D_0, связанной со стойкой, определить проекции единичных векторов осей кинематических пар и звеньев, а также абсолютные координаты интересующих нас точек.

Связывая координатную систему D_k со звеном k, одну из ее осей, например z_k, нужно совместить с осью пары (поступательной или вращательной), соединяющей это звено с предшествующей, а другую ось — с осью звена.

Обратимся к схеме механизма, показанного на рис. 8.17. В каждой из точек B, C и E пересечения осей соседних вращательных пар мы располагаем начала координатных систем двух соседних звеньев.

У звеньев *1*, *3* и *5* оси z_1, z_3 и z_5 мы совместили с осями шарниров B, C и E, а оси x_1, x_3 и x_5 направили вдоль осей пар A, D и F.

Связывая координатные оси со звеньями *2*, *4* и *6*, мы должны учесть, что с осями пар B, D и F ранее были совмещены оси z_1, x_3 и x_5. Поэтому с последними удобно совместить одноименные оси z_2, x_4 и x_6. Наконец, совмещаем ось x_2 с осью BC звена *2* и принимаем, что ось z_4 параллельна оси z_5, а ось z_6 параллельна плоскости захвата, т. е. плоскости звена *6*.

В заключение отметим еще, что у неподвижной системы координат $D_0 = Bxyz$ ось x удобно совместить с осью x_1 и также направить ее вниз.

Оси $z_1 \equiv z_2$, z_3 и z_5 перпендикулярны соответственно плоскостям углов

$$\varphi_{21} = \widehat{x_2, x_1}, \qquad \varphi_{32} = \widehat{x_3, x_2}, \qquad \varphi_{54} = \widehat{x_5, x_4} \tag{8.25}$$

и определяют положительное направление их измерения — против хода часовой стрелки, если смотреть с конца координатной оси. Отмеченный на рис. 8.17 угол φ_{43} для удобства чертежа измерен в противоположном направлении и поэтому взят со знаком минус. Три других угла

$$\varphi_{10} = \widehat{z_1, z}, \quad \varphi_{43} = \widehat{z_4, z_3}, \quad \varphi_{65} = \widehat{z_6, z_5} \tag{8.26}$$

измеряются в плоскостях, которым перпендикулярны соответственно оси $x_1 \equiv x$, $x_3 \equiv x_4$ и $x_5 \equiv x_6$. Эти оси определяют правило измерения названных углов.

Имея декартовы системы координат $D_0, D_1, \ldots, D_6$ на звеньях 0, 1, ..., 6, можно определить матрицы поворота

$$\begin{aligned} &M_{01}, \\ &M_{02} = M_{01}M_{12}, \\ &M_{03} = M_{01}M_{12}M_{23} = M_{02}M_{23}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &M_{06} = M_{01}M_{12}\cdot\ldots\cdot M_{56} = M_{05}M_{56}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Эти формулы записаны в соответствии с правилом (8.22). Легко видеть, что по известным множителям M_{01}, M_{12}, ..., M_{56} матрицы M_{06} могут быть определены все нужные нам матрицы поворота M_{01}, M_{02}, ..., M_{06}. Их, естественно,

удобно определять в перечисленной последовательности с помощью правых частей формул (8.27).

Таким образом, мы вначале должны составить матрицы M_{01}, M_{12}, ..., M_{56}. Это связано с рассмотрением взаимного положения осей двух координатных систем, указанных в индексах матриц.

В исследуемой цепи каждые две соседние координатные системы D_k и D_{k-1} ($k = 1, 2, \ldots, 6$) имеют по одной оси $x_k \parallel x_{k-1}$ или $z_k \parallel z_{k-1}$, вокруг которой система D_k повернута относительно другой D_{k-1} на угол $\varphi_{k,\,k-1}$. Поэтому среди $M_{01}, M_{12}, \ldots, M_{56}$ будет всего два типа матриц — матрицы поворота вокруг осей x и z соответствующего номера.

Координатные системы D_0 и D_1, D_3 и D_4, D_5 и D_6 имеют по одной общей оси $x \equiv x_1$, $x_3 \equiv x_4$, $x_5 \equiv x_6$. Взаимное положение этих трех пар координатных систем определяют углы φ_{10}, φ_{43} и φ_{65}.

Используя рис. 8.18, составляем матрицу M_{01}:

$$M_{01} = M'_{10} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} \\ 0 & \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} \end{Vmatrix}. \tag{8.28}$$

Две другие матрицы того же типа M_{34} и M_{56} отличны только тем, что в них вместо угла φ_{10} входят углы φ_{43} и φ_{65} соответственно.

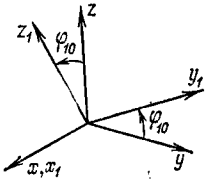


Рис. 8.18. Схема расположения координатных осей с соответствующими углами между ними.

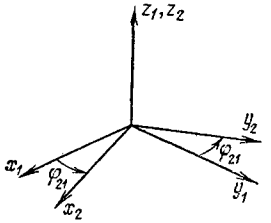


Рис. 8.19. Схема расположения координатных осей с соответствующими углами между ними.

Координатные системы D_1 и D_2, D_2 и D_3, D_4 и D_5 имеют по одной параллельной оси $z_1 \equiv z_2$, $z_2 \parallel z_3$ и $z_4 \parallel z_5$. Взаимное угловое положение этих трех пар координатных систем определяют углы φ_{21}, φ_{32} и φ_{54}.

Используя рис. 8.19, составляем матрицу M_{12}:

$$M_{12} = M'_{21} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} & 0 \\ \sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{8.29}$$

Матрицы M_{23} и M_{45} имеют такой же вид, достаточно только угол φ_{21} соответственно заменить на φ_{32} и φ_{54}.

По известным значениям углов φ_{10}, φ_{21}, ..., φ_{65} вычисляем элементы матриц M_{01}, M_{12}, ..., M_{56}, являющиеся функциями этих шести углов. Далее, используя формулу (8.27), т. е. последовательно перемножая [1]) названные матрицы, мы находим пять матриц M_{02}, M_{03}, ..., M_{06}. Именно эти матрицы вместе с ранее найденной M_{01} подлежали определению.

[1]) Решение этого вопроса, так же как и других задач кинематики рассматриваемой многозвенной цепи, ввиду большого объема вычислений предполагает использование ЭВМ.

9°. Переходим к вопросу определения абсолютных координат точки на звене открытой цепи.

Пусть, например, на звене *6* задана точка *P* (рис. 8.17) с относительными координатами $x_P^{(6)}$, $y_P^{(6)}$, $z_P^{(6)}$, они являются проекциями вектора $\overline{EP} = \boldsymbol{c}$ на оси системы $Ex_6y_6z_6$.

Для определения абсолютных координат точки *P* ее радиус-вектор $\boldsymbol{r}_P = \overline{BP}$ представляем в виде суммы

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{i}_2 l_{BC} + \boldsymbol{i}_4 l_{CE} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}. \tag{8.30}$$

В этом равенстве сумма первых двух векторов $\boldsymbol{i}_2 l_{BC} = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{i}_4 l_{CE} = \boldsymbol{b}$ определяет радиус-вектор $\overline{BE}$ точки *E*.

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ известны нам соответственно в координатных системах D_2, D_4 и D_6. Выписываем матрицы-столбцы

$$a^{(2)} = \begin{Vmatrix} l_{BC} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad b^{(4)} = \begin{Vmatrix} l_{CD} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad c^{(6)} = \begin{Vmatrix} x_P^{(6)} \\ y_P^{(6)} \\ z_P^{(6)} \end{Vmatrix}, \tag{8.31}$$

составленные из проекций одноименных векторов на оси x_k, y_k, z_k (k — номер системы координат D_k), они содержат известные нам величины.

Проекции векторов-слагаемых равенств (8.31) с помощью матричной формулы (8.17) мы переводим в неподвижную систему координат $D_0 = Bxyz$, связанную со стойкой. Получим

$$r_P = M_{02} a^{(2)} + M_{04} b^{(4)} + M_{06} c^{(6)}, \tag{8.32}$$

где

$$r_P = \begin{Vmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Vmatrix}$$

есть матрица-столбец из абсолютных координат точки *P*. При r_P верхний индекс «0» мы опустили, как и при осях *x*, *y*, *z* и их ортах.

Аналогично изложенному выше можно определить абсолютные координаты любой другой точки механизма.

10°. Задачу о положениях мы окончим вопросом о проекциях единичных векторов осей шарниров *A*, *B*, ..., *F*; их мы обозначим через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_6$.

Эти векторы совпадают с одним из ортов координатных осей на звеньях *1*, *2*, ..., *6* и, как мы увидим позже, их проекции на оси неподвижной системы координат D_0 содержатся в матрицах M_{01}, M_{02}, ..., M_{06}, ранее вычисленных.

Возьмем одну из трех матриц M_{0k} ($k = 1, 2, \ldots, 6$). В матрице M_{0k} элементами первого, второго и третьего с т о л б ц о в являются направляющие косинусы осей x_k, y_k, z_k в системе D_0 или, что то же, проекции ортов $\boldsymbol{i}_k$, $\boldsymbol{j}_k$, $\boldsymbol{k}_k$ на оси *x*, *y* и *z*.

Для получения проекций интересующих нас ортов мы можем ограничиться рассмотрением только трех матриц M_{01}, M_{03} и M_{05} из шести ранее перечисленных. Это объясняется взаимной перпендикулярностью трех пар шарниров *A* и *B*, *C* и *D*, *E* и *F*.

Проекции ортов $\boldsymbol{e}_1 \equiv \boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{e}_2 \equiv \boldsymbol{k}_1 \equiv \boldsymbol{k}_2$ осей шарниров *A* и *B* содержатся в первом и третьем столбцах матрицы M_{01}.

Проекции ортов $\boldsymbol{e}_3 \equiv \boldsymbol{k}_3$ и $\boldsymbol{e}_4 \equiv \boldsymbol{i}_3 \equiv \boldsymbol{i}_4$ осей вращательных пар *C* и *D* в матрице M_{03} занимают соответственно третий и первый столбцы.

Проекции ортов $e_5 \equiv k_5$ и $e_6 \equiv i_5 \equiv i_6$ осей пар E и F содержатся соответственно в третьем и первом столбцах матрицы M_{05}:

$$M_{05} = \begin{Vmatrix} m_{11}^{(05)} & m_{12}^{(05)} & m_{13}^{(05)} \\ m_{21}^{(05)} & m_{22}^{(05)} & m_{23}^{(05)} \\ m_{31}^{(05)} & m_{32}^{(05)} & m_{33}^{(05)} \end{Vmatrix}. \tag{8.33}$$

Ниже в качестве примера мы приводим матрицы-столбцы:

$$e_5 = \begin{Vmatrix} e_{5x} \\ e_{5y} \\ e_{5z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_{13}^{(05)} \\ m_{23}^{(05)} \\ m_{33}^{(05)} \end{Vmatrix},$$
$$e_6 = \begin{Vmatrix} e_{6x} \\ e_{6y} \\ e_{6z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m_{11}^{(05)} \\ m_{21}^{(05)} \\ m_{31}^{(05)} \end{Vmatrix}, \tag{8.34}$$

составленные из проекций векторов e_5 и e_6 на координатные оси x, y, z. В них представлены элементы третьего и первого столбцов матрицы M_{05}.

Из предыдущего видно, что определение проекций ортов e_1, e_2, ..., e_6 сводится к тому, что этим проекциям мы приписываем («присваиваем» — в терминах программирования на ЭВМ) значения определенных элементов матриц M_{01}, M_{03} и M_{05}.

11°. Переходим к рассмотрению вопроса об определении угловых скоростей и ускорений звеньев механизма (рис. 8.17). При определении этих векторных величин считается известным движение каждого звена k по отношению к предыдущему $k-1$. В рассматриваемой нами цепи (рис. 8.17) эти движения определяют производные относительных угловых скоростей и ускорений $\dot{\varphi}_{k,\,k-1}$ и $\ddot{\varphi}_{k,\,k-1}$ ($k = 1, 2, \ldots, 6$) (это производные по времени от обобщенных координат $q_k = \varphi_{k,\,k-1}$ цепи, и поэтому их можно называть еще *обобщенными скоростями* и *ускорениями, или их аналогами*).

В относительном движении звена k по отношению к звену $k-1$ угловая скорость и угловое ускорение звена есть векторы

$$\omega_{k,\,k-1} = e_k \dot{\varphi}_{k,\,k-1}, \tag{8.35}$$
$$\varepsilon_{k,\,k-1} = e_k \ddot{\varphi}_{k,\,k-1}, \tag{8.36}$$

коллинеарные оси вращательной пары, соединяющей звенья k и $k-1$, e_k является единичным вектором оси этой пары. После вычисления проекций этих векторов можно перейти к определению абсолютных угловых скоростей и ускорений.

Абсолютное движение звена k складывается из двух движений — переносного *вместе* со звеном $k-1$ и относительного по отношению к этому звену. Векторы ω_{k-1} и $\omega_{k,\,k-1}$ есть угловые скорости этих двух движений.

Известно, что угловая скорость звена, совершающего сложное движение, складывается из угловых скоростей его в переносном и относительном движениях. Следовательно, угловая скорость звена k равна

$$\omega_k = \omega_{k-1} + \omega_{k,\,k-1}. \tag{8.37}$$

Эта формула позволяет последовательно определить угловые скорости всех звеньев 1, 2, ..., 6. Имеем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 + \omega_{10} = e_1 \dot{\varphi}_{10}, \\ \omega_2 &= \omega_1 + \omega_{21} = e_1 \dot{\varphi}_{10} + \dot{e}_2 \dot{\varphi}_{21}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{8.38}$$

Из последних равенств видно, что угловая скорость ω_k звена k равна

$$\omega_k = \sum_{i=1}^{k} \omega_{i,\,i-1} = \sum_{i=1}^{k} e_i \dot{\Phi}_{i,\,i-1} \tag{8.39}$$

слагается из относительных угловых скоростей звена k и всех ему предшествующих в цепи.

Формулы для вычисления проекций угловых скоростей имеют схожий с (8.37) и (8.39) вид. Схожа и матричная запись этих формул, например

$$\omega_k = \omega_{k-1} + \omega_{k,\,k-1}, \tag{8.40}$$

если через ω_k, ω_{k-1} и $\omega_{k,\,k-1}$ обозначить матрицы-столбцы из проекций одноименных векторов на координатные оси x, y и z.

Угловые ускорения звеньев цепи можно определить, применяя последовательно к ее звеньям 1, 2, ..., 6 формулу

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k,\,k-1} + \omega_{k-1} \times \omega_{k,\,k-1}, \tag{8.41}$$

которая является векторной записью теоремы об угловых ускорениях в сложном движении звена.

В этой формуле, полученной в результате дифференцирования по времени выражения (8.37), первый член $\varepsilon_{k-1} = d\omega_{k-1}/dt$ есть угловое ускорение переносного движения (звена $k-1$). Совокупность двух других членов выражает производную $d\omega_{k,\,k-1}/dt$; вектор $\varepsilon_{k,\,k-1}$ углового ускорения звена k в относительном движении характеризует изменение вектора $\omega_{k,\,k-1}$ по отношению к находящемуся в движении звену $k-1$ (это относительная производная вектора $\omega_{k,\,k-1}$), а член $\omega_{k-1} \times \omega_{k,\,k-1}$ учитывает влияние поворота звена $k-1$.

12°. Переходим к определению линейных скоростей и ускорений звеньев. После того как найдены угловые скорости и ускорения звеньев исследуемого механизма, эта задача не представляет особых трудностей.

Как известно, движение звена механизма можно разложить на переносное поступательное с полюсом в произвольной точке O и вращательное (сферическое) около этой точки. Поэтому, если через v_0 и a_0 обозначить скорость и ускорение полюса O, то скорость и ускорение какой-либо точки M тела мы можем представить в виде сумм

$$v_M = v_O + v_{MO}, \tag{8.42}$$

$$a_M = a_O + a_{MO}, \tag{8.43}$$

в которых через v_{MO} и a_{MO} обозначены скорость и ускорение точки O в движении по отношению к полюсу O. Эти векторные величины вычисляются по формулам

$$v_{MO} = \omega \times \rho, \tag{8.44}$$

$$a_{MO} = \omega \times (\omega \times \rho) + \varepsilon \times \rho, \tag{8.45}$$

где ω и ε — угловая скорость и ускорение тела, а $\rho = \overline{OM}$ есть радиус-вектор, определяющий относительное положение точек O и M.

С помощью приведенных выше формул можно определить скорость и ускорение любой точки рассматриваемого нами механизма.

Пусть, например, нужно определить скорость и ускорение точки P на звене 6 (рис. 8.17).

Выбрав в качестве полюса точку E, будем иметь

$$v_P = v_E + v_{PE} = v_E + \omega_6 \times \overline{EP}. \tag{8.46}$$

Если сюда вместо вектора v_E на основании аналогичных равенств подставить

$$v_E = v_C + v_{EC} = v_B + v_{CB} + v_{EC} = \omega_2 \times \overline{BC} + \omega_4 \times CE,$$

т. к. $v_B = 0$, то, следовательно,

$$v_P = v_{CB} + v_{EC} + v_{PE} = \omega_2 \times \overline{BC} + \omega_4 \times \overline{CE} + \omega_6 \times \overline{EP}. \qquad (8.47)$$

В этой формуле векторы $\overline{BC} = a$, $\overline{CE} = b$, $\overline{EP} = c$ нам известны своими проекциями на оси x, y, z. Эти проекции определялись с помощью матричной формулы (8.32) при вычислении абсолютных координат точки P. В проекциях на те же оси нами были определены все угловые скорости и ускорения. Поэтому использование формулы (8.47) затруднений не вызовет.

Ускорение точки P можно записать в виде равенства типа (8.43), т. е.

$$a_P = a_E + a_{PE}. \qquad (8.48)$$

Из аналогичных соотношений следует, что

$$a_E = a_C + a_{EC} = a_B + a_{CB} + a_{EC},$$

так как $a_B = 0$, то, следовательно,

$$a_P = a_{CB} + a_{EC} + a_{PE}, \qquad (8.49)$$

где

$$a_{CB} = \omega_2 \times (\omega_2 \times \overline{BC}) + \varepsilon_2 \times \overline{BC},$$
$$a_{EC} = \omega_4 \times (\omega_4 \times \overline{CE}) + \varepsilon_4 \times \overline{CE},$$
$$a_{PE} = \omega_6 \times (\omega_6 \times \overline{EP}) + \varepsilon_6 \times \overline{EP}.$$

Аналогичным образом можно определить скорость и ускорение любой другой точки механизма.

13°. Рассмотрим вопрос о том, как с помощью векторного метода, изложенного нами выше для общего случая пространственной кинематической цепи, могут быть решены некоторые частные виды пространственных механизмов. Начнем с рассмотрения кинематики ранее приводившегося сферического механизма.

На рис. 8.20 изображена схема сферического четырехзвенного механизма. Оси всех четырех вращательных пар A, B, C и D механизма пересекаются в точке O. На сферах с центром в точке O располагаются траектории всех точек механизма.

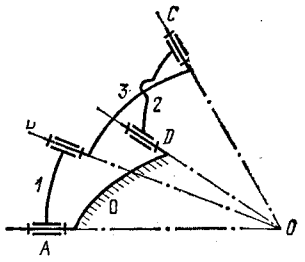


Рис. 8.20. Схема сферического четырехзвенного механизма.

Как это было изложено выше, в § 35, в практике наиболее распространен частный вид сферического четырехзвенника, в нем углы AOB, BOC и COD равны 90°.

Для целей кинематического анализа со стойкой 0 связана (рис. 8.21, *а*) основная система координат $Oxyz$, ее ось z совмещена с осью вращения ведомого звена *2*, а ось x лежит в плоскости осей шарниров A и D. У вспомогательной системы координат $Ox_by_bz_b$ ось z_b направлена по оси вращения ведущего звена *1*, а ось y_b совмещена с осью y.

Через u_B, u_C и $u_D = k$ мы обозначим единичные векторы осей вращательных пар B, C и D ведомых звеньев *2* и *3* [1]). Вектор u_B нам известен, ибо положение звена *1* задано.

[1]) Некоторые необходимые сведения по векторной алгебре даны в приложении 2 (стр. 635).

Неизвестен только орт u_C оси OC, находящейся в плоскости Oxy. Проекции орта u_C на оси x, y и z связаны с углом φ_2 поворота звена 2 соотношениями

$$u_{Cx}=\cos\varphi_2, \qquad u_{Cy}=\sin\varphi_2, \qquad u_{Cz}=0. \tag{8.50}$$

Поэтому, если будут определены проекции орта u_C, мы без труда найдем угол φ_2.

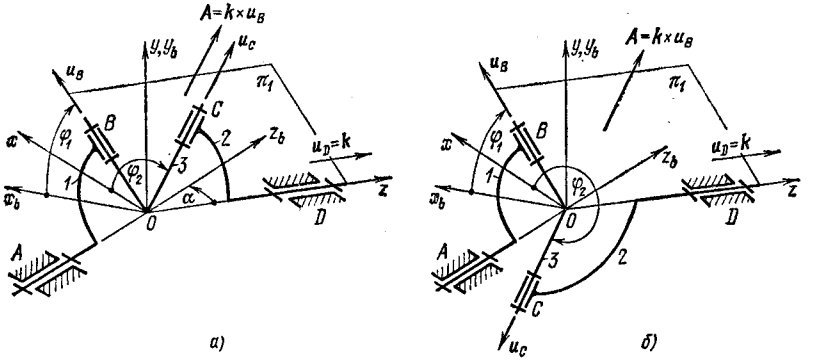


Рис. 8.21. К определению кинематических параметров крестовины механизма шарнира Гука.

Для последующего нам потребуются проекции орта u_B на оси x, y и z. Они таковы:

$$u_{Bx}=\cos\alpha\cos\varphi_1, \qquad u_{By}=\sin\varphi_1, \qquad u_{Bz}=-\sin\alpha\cos\varphi_1. \tag{8.51}$$

Получить эти выражения несложно. Раскладывая вектор u_B по осям x_b, $y_b = y$ и z_b, имеем

$$u_B=i_b\cos\varphi_1+j\sin\varphi_1+k_b\cdot 0. \tag{8.52}$$

Ось x_b лежит в плоскости Oxy и образует угол $90°+\alpha$ с осью z. Поэтому ее орт i_b можно представить таким разложением:

$$i_b=k\cos(90°+\alpha)+i\sin(90°+\alpha).$$

Подставив это выражение в равенство (8.52), получим

$$u_B=i\cos\alpha\cos\varphi_1+j\sin\varphi_1-k\sin\alpha\cos\varphi_1,$$

откуда мы приходим к формулам (8.51).

Перейдем к определению орта u_C. Этот вектор образует прямые углы с осями шарниров D и B. Эти два условия можно записать в виде равенства нулю скалярных произведений $k\cdot u_C$ и $u_B\cdot u_C$. Вектор u_C является единичным, и поэтому его скалярный квадрат $u_C^2=1$.

Таким образом, для нахождения проекций вектора u_C мы имеем систему трех уравнений:

$$k\cdot u_C=0, \qquad u_B\cdot u_C=0, \qquad u_C^2=1. \tag{8.53}$$

Такая система уравнений рассмотрена и в общем виде решена в приложении 2. Сопоставив уравнения (8.53) и (1) приложения 2, применяем формулы (6) к нашему случаю ($c_1 = c_2 = 0$). Получим $u_{Cz} = 0$ и

$$u_{Cx} = \left(-\delta u_{By}\sqrt{u_{Bx}^2 + u_{By}^2}\right) : (u_{Bx}^2 + u_{By}^2),$$
$$u_{Cy} = \left(\delta u_{Bx}\sqrt{u_{Bx}^2 + u_{By}^2}\right) : (u_{Bx}^2 + u_{By}^2)$$

или

$$\cos\varphi_2 = u_{Cx} = \frac{-\delta \sin\varphi_1}{\sqrt{\sin^2\varphi_1 + \cos^2\alpha\cos^2\varphi_1}},$$
$$\sin\varphi_2 = u_{Cy} = \frac{\delta\cos\alpha\cos\varphi_1}{\sqrt{\sin^2\varphi_1 + \cos^2\alpha\cos^2\varphi_1}}. \qquad (8.54)$$

Нетрудно видеть, что мы получили те же формулы, что и в § 36, но эти формулы содержат коэффициент δ. Его значениями могут быть $+1$ либо -1. Ниже мы увидим, что в шарнире Гука с помощью коэффициента δ мы выбираем положительное направление оси OC шарнира C.

При заданном положении звена *1* (оси OB) принципиально возможны две сборки ведомой части *2 — 3* механизма. Эти две сборки показаны на рис. 8.21, *а*, *б*; в них ось OC перпендикулярна к плоскости π_1 осей шарниров D и B (в других сферических механизмах этой перпендикулярности нет) и, следовательно, располагается на одной и той же прямой. Но положительное направление оси OC в обоих сборках противоположно.

Для определения δ нужно мысленно представить направление вектора $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_B$, нормального к плоскости π_1 (см. приложение 2). Если принятое направление орта $\boldsymbol{u}_C$ совпадает с A, то $\delta = +1$. Для рис. 8.21, *а*, *б* соответственно $\delta = +1$ и $\delta = -1$.

14°. Продолжим исследование кинематики ведомого звена *2*. Определим аналог угловой скорости этого звена, т. е. передаточное отношение $d\varphi_2/d\varphi_1 = \varphi_2'$.

Разделим второе равенство из (18.54) на первое. Получим

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\cos\alpha\operatorname{ctg}\varphi_1.$$

Дифференцируя это выражение по φ_1, находим

$$\frac{1}{\cos^2\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \cos\alpha\frac{1}{\sin^2\varphi_1},$$

откуда следует, что

$$\varphi_2' = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{\cos\alpha\cos^2\varphi_2}{\sin^2\varphi_1}.$$

Если в этом равенстве $\cos\varphi_2$ заменить соответствующим выражением из (8.54), то получим окончательно с учетом того, что $\delta^2 = 1$:

$$\varphi_2' = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\varphi_1 + \cos^2\alpha\cos^2\varphi_1}. \qquad (8.55)$$

Определим еще функцию $\varphi_2'' = d^2\varphi_2/d\varphi_1^2$, т. е. аналог углового ускорения звена *2*. Дифференцируя (8.55), получим

$$\varphi_2'' = \frac{-2\sin\varphi_1\cos\varphi_1\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}{(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\alpha\cos^2\varphi_1)^2},$$

или

$$\varphi_2'' = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} = -\frac{\sin 2\varphi_1\sin^2\alpha}{\cos\alpha}(\varphi_2')^2, \qquad (8.56)$$

если для более простой записи использовать затем выражение (8.55).

Угловую скорость и угловое ускорение звена *2* можно определить с помощью равенств

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \varphi_2'\omega_1, \tag{8.57}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \varphi_2''\omega_1^2 + \varphi_2'\varepsilon; \tag{8.58}$$

они содержат найденные нами величины, а также угловую скорость звена *1* $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ и его угловое ускорение $\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1$.

15°. Переходим к вопросам кинематики звена *2* (крестовины). Звено имеет одну неподвижную точку O (рис. 18.21, *а*), около которой совершает сферическое движение.

Свяжем со звеном (рис. 8.22) систему координат $Ox_3y_3z_3$. Две ее оси x_3 и y_3 мы совместим с осями OB и OC шарниров B и C. Ось z_3 будет, очевидно, находиться в плоскости π_1 осей OB и $Oz = OD$. Так как $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{u}_B$, $\boldsymbol{j}_3 = \boldsymbol{u}_C$, то

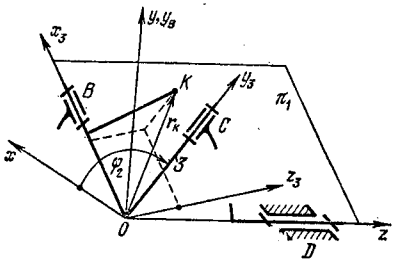


Рис. 8.22. К определению скоростей и ускорений крестовины сферического механизма.

$$\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{j}_3 = \boldsymbol{u}_B \times \boldsymbol{u}_C. \tag{8.59}$$

Проекции орта $\boldsymbol{k}_2$ удобно определять после того, как вычислены проекции векторов $\boldsymbol{u}_B$ и $\boldsymbol{u}_C$. Для этого мы используем формулы

$$k_{3x} = -u_{Bz}u_{Cy}, \quad k_{3y} = u_{Bz}u_{Cx}, \quad k_{3z} = u_{Bx}u_{Cy} - u_{By}u_{Cx}, \tag{8.60}$$

в них учтено, что $u_{Cz} = 0$.

Рассмотрим вопрос об определении абсолютных координат некоторой точки K звена. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}_K = \overline{OK}$ этой точки можно представить следующим разложением по осям x_3, y_3, z_3:

$$\boldsymbol{r}_K = \boldsymbol{i}_3 x_K^{(3)} + \boldsymbol{j}_3 y_K^{(3)} + \boldsymbol{k}_3 z_K^{(3)}, \tag{8.61}$$

где $x_K^{(3)}$, $y_K^{(3)}$, $z_K^{(3)}$ — координаты точки K в системе $Ox_3y_3z_3$.

Проекциями радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_K$ на оси x, y и z являются абсолютные координаты x_K, y_K и z_K точки K. Ниже приводится запись проекции вектора $\boldsymbol{r}_K$ на ось x

$$x_K = i_{3x}x_K^{(3)} + j_{3x}y_K^{(3)} + k_{3x}z_K^{(3)}. \tag{8.62}$$

Величины $i_{3x} = u_{Bx}$, $j_{3x} = u_{Cx}$ вычисляем по известному углу φ_1 с помощью формул (8.51), (8.50) и (8.54), а координату k_{3x} — используя уравнение (8.60).

Определение скоростей связано с привлечением производных по времени $(\boldsymbol{i}_3)^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{u}}_B$, $(\boldsymbol{j}_3)^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{u}}_C$ и $\dot{\boldsymbol{k}}_3$. В расчетные формулы для вычисления этих величин войдет угловая скорость $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ ведущего звена *1*. Формулы для вычисления проекций вектора $(\boldsymbol{i}_3)^{\cdot}$ получаем дифференцированием равенств (8.51)

$$\left.\begin{aligned} (i_{3x})^{\cdot} &= \dot{u}_{Bx} = -\dot{\varphi}_1 \cos\alpha \sin\varphi_1, \\ (i_{3y})^{\cdot} &= \dot{u}_{By} = \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1, \\ (i_{3z})^{\cdot} &= \dot{u}_{Bz} = \dot{\varphi}_1 \cos\alpha \cos\varphi_1. \end{aligned}\right\} \tag{8.63}$$

При дифференцировании по времени равенств (8.50), которыми выражены проекции вектора $\boldsymbol{u}_C = \boldsymbol{j}_3$, мы будем считать, что $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$, а угол φ_1 поворота звена *1* является функцией времени. Получим

$$\left.\begin{aligned} (j_{3x})^{\cdot} &= \dot{u}_{Cx} = -\dot{\varphi}_1\varphi_2' \sin\varphi_2, \\ (j_{3y})^{\cdot} &= \dot{u}_{Cy} = \dot{\varphi}_1\varphi_2' \cos\varphi_2, \\ (j_{3z})^{\cdot} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.64}$$

Эти формулы содержат величины $\sin\varphi_2$, $\cos\varphi_2$ и φ_2', которые вычисляются по формулам (8.54) и (8.55). Теперь можно определить вектор $\dot{\boldsymbol{k}}_3$. Дифференцируя (8.59), мы получим векторное соотношение

$$\dot{\boldsymbol{k}}_3 = (\boldsymbol{i}_3)^{\cdot} \times \boldsymbol{j}_3 + \boldsymbol{i}_3 \times (\boldsymbol{j}_3)^{\cdot}. \tag{8.65}$$

Эта формула, будучи переписана в проекциях на оси x, y и z, позволяет вычислить проекции вектора $\dot{\boldsymbol{k}}_3$ по известным проекциям ортов $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{j}_3$ и их производных по времени.

Определим далее скорость точки K. Выражение для скорости $\boldsymbol{v}_K$ этой точки мы получим в результате дифференцирования выражения (8.61). Получаем

$$\boldsymbol{v}_k = \dot{\boldsymbol{r}}_k = (\boldsymbol{i}_3)^{\cdot} x_k^{(3)} + (\boldsymbol{j}_3)^{\cdot} y_k^{(3)} + \dot{\boldsymbol{k}}_3 z_k^{(3)}. \tag{8.66}$$

Проекция этого вектора на ось x будет

$$v_{kx} = \dot{x}_k = (i_{3x})^{\cdot} x_k^{(3)} + (j_{3x})^{\cdot} y_k^{(3)} + \dot{k}_{3x} z_k^{(3)}, \tag{8.67}$$

как и две другие его проекции, содержат найденные нами величины.

Задача об ускорениях решается аналогично предыдущему. Для этого нужно продифференцировать по времени равенства (8.63)—(8.66).

16°. Переходим к рассмотрению кинематики пространственного кривошипно-коромыслового механизма, схема которого приведена на рис. 8.23. Механизм используется для передачи вращения между скрещивающимися под некоторым углом α осями DM и AN. Ведущее звено *1* и ведомое звено *3* соединены со стойкой 0 вращательными парами; оси AB и CD этих звеньев перпендикулярны осям вращения DM и AN. Шатун *2* присоединен к звеньям *1* и *3* шаровой с пальцем парой B и шаровой парой C.

Как это было показано в § 11, для определения степени подвижности w пространственных механизмов общего вида можно использовать формулу (2.9). В механизме имеются пары только V, IV и III классов. Тогда по формуле Сомова — Малышева находим:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 1,$$

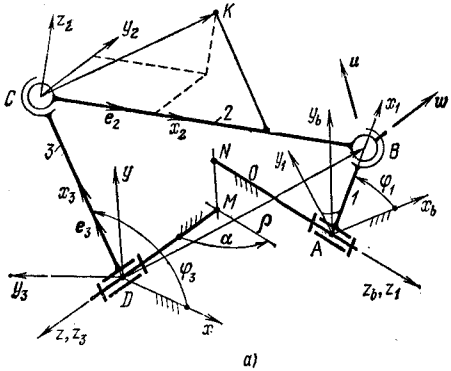
т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

Звено *3*, в отличие от кривошипа *1*, не делает полного оборота, и поэтому его, по принятой терминологии, называют *коромыслом*.

Со стойкой связана основная система координат $Dxyz$, ее ось z совмещена с осью шарнира D, а ось y принята параллельной линии MN кратчайшего расстояния между осями DM и AN. Целесообразность такого расположения осей системы $Dxyz$ будет ясна из дальнейшего.

Со стойкой связана еще вспомогательная система координат $Ax_by_bz_b$, ее ось z_b совмещена с осью шарнира A, а ось y_b параллельна оси y и направлена в ту же сторону.

Углы φ_1 и φ_3 поворота звеньев *1* и *3* измеряются от осей x_b и x против хода часовой стрелки, если смотреть с конца осей z_b и z соответственно. Эти



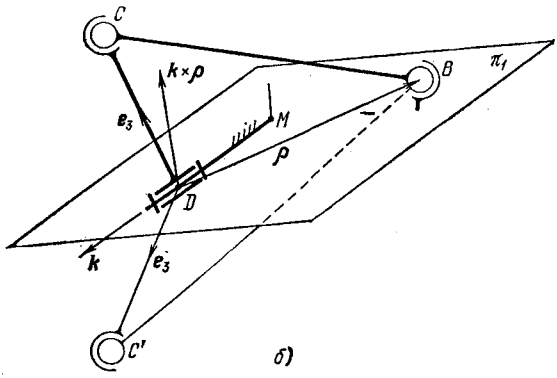


Рис. 8.23. Кинематическая схема пространственного кривошипно-коромыслового механизма.

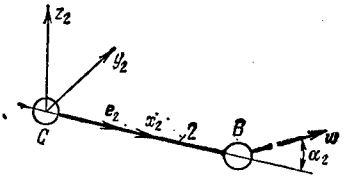


Рис. 8.24. Схема расположения координатных осей на звене CB.

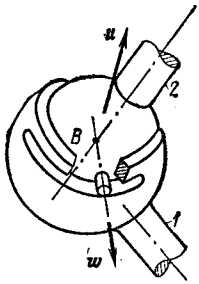


Рис. 8.25. Расположение ортов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ в шаровой паре с пальцем.

направления являются положительными и для угловых скоростей и ускорений.

На рис. 8.24 показана также система координат $Ax_2y_2z_2$, привязанная к звену 2. Этому звену принадлежит один из двух элементов шаровой с пальцем пары B. Такая пара допускает два вращательных движения — около оси пальца и около оси, которая перпендикулярна плоскости прорези.

Для определенности мы примем, что в паре B элемент с плоскостью прорези принадлежит звену 1 и соответственно будем считать, что в осях системы $Ax_1y_1z_1$ нам известны проекции орта $\boldsymbol{u}$ плоскости прорези — единичного вектора, ортогонального этой плоскости (рис. 8.25). Другой, ему перпендикулярный, орт оси пальца на звене 2 мы обозначим через $\boldsymbol{w}$.

В некоторых случаях у шатуна 2 обе пары B и C делаются шаровыми. Это приводит к тому, что шатун приобретает свободу вращения вокруг своей оси, становится «плавающим». Появление этой дополнительной степени свободы у механизма не изменяет, однако, кинематики коромысла 3.

17°. В задаче о положениях мы определим в абсолютной системе координат $Dxyz$ положение осей звеньев 3, 2 и пальца пары B (рис. 8.26). После этого несложно решится вопрос об абсолютных координатах любой точки механизма.

Замкнутость векторного контура $DCBANMD$ (рис. 8.23, a) — одно из условий, с которым связано определение положений осей звеньев 3 и 2. Это условие удобно записать так:

$$e_2l_2+e_3l_3=\rho, \tag{8.68}$$

где $\rho=\overline{DB}=\overline{DM}+\overline{MN}+\overline{NA}+\overline{AB}$, а через e_2, e_3 и l_2, l_3 обозначены единичные векторы осей звеньев 2 и 3 и их длины.

В уравнении (8.68) вектор $\overline{AB}$ мы заменим его разложением

$$\overline{AB}=i_bl_1\cos\varphi_1+j_bl_1\sin\varphi_1,$$

где $l_1=AB$ — длина звена 1. После этого мы легко получим выражение для ρ_x, ρ_y и ρ_z:

$$\begin{aligned}\rho_x&=x_B=l_{AN}\sin\alpha+l_1\cos\alpha\cos\varphi_1,\\ \rho_y&=y_B=y_N+l_1\sin\varphi_1,\\ \rho_z&=z_B=l_{AN}\cos\alpha-l_{DM}-l_1\sin\alpha\cos\varphi_1,\end{aligned}\tag{8.69}$$

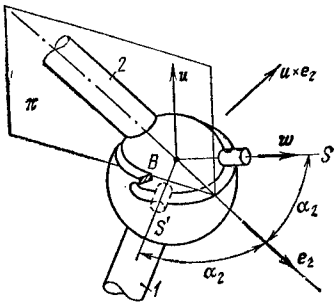


Рис. 8.26. К определению вектора $\boldsymbol{w}$ оси пальца пары.

позволяющие по заданному углу φ_1 вычислить проекции вектора ρ на оси x, y, z. В этих уравнениях y_N — ордината точки N (на рис. 8.23 $y_N>0$).

Для нахождения проекций двух векторов e_2 и e_3 мы располагаем векторным уравнением (8.68), которое эквивалентно трем скалярным в проекциях на оси x, y, z. К этому уравнению мы добавим еще три скалярные

$$k\cdot e_3=0,\quad e_2^2=1,\quad e_3^2=1. \tag{8.70}$$

Первым из них выражена перпендикулярность оси пары D и оси CD звена 3. В двух других уравнениях отмечено, что e_2 и e_3 суть единичные векторы и их скалярный квадрат равен единице.

Исключаем из уравнения (8.68) орт e_2. Векторы e_2 и e_3 можно определить последовательно. Для этого переписываем равенство (8.68) следующим образом:

$$e_3l_3-\rho=-e_2l_2.$$

Возведем далее обе части его в скалярный квадрат. Учитывая, что $e_2^2=e_3^2=1$, получим

$$l_3^2-2l_3\rho\cdot e_3+\rho^2=l_2^2,$$

откуда следует

$$\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{\rho} = \frac{(\rho^2 + l_3^2 - l_2^2)}{2l_3}, \tag{8.71}$$

причем

$$\rho^2 = \rho^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2.$$

Это уравнение вместе с первым и третьим из (8.70) приводит нас к следующей системе уравнений для определения проекций вектора:

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0, \qquad \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{e}_3 = f, \qquad e_3^2 = 1, \tag{8.72}$$

где

$$f = \frac{(\rho^2 + l_3^2 - l_2^2)}{2l_3}.$$

Такая система уравнений рассмотрена и в общем виде решена в приложении 2. Сопоставив (8.72) и уравнения (1) (приложение 2), мы можем воспользоваться системой уравнений (15) (приложение 2), в котором принято $c_1 = 0$.

Получим

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_3 = e_{3x} &= \left(f\rho_x - \delta_1\rho_y\sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 - f^2}\right) : (\rho_x^2 + \rho_y^2), \\ \sin\varphi_3 = e_{3y} &= \left(f\rho_y + \delta_1\rho_x\sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 - f^2}\right) : (\rho_x^2 + \rho_y^2), \\ e_{3z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.73}$$

В уравнениях (8.73) проекциями вектора $\boldsymbol{e}_3$ на оси x и y являются величины $\cos\varphi_3$ и $\sin\varphi_3$.

В формулы (8.73) входит коэффициент δ, т. е. знак величины $\varkappa_1 = \boldsymbol{e}_3 \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\rho})$.

С помощью критерия δ_1 мы имеем возможность различать между собой две возможные сборки ведомой части механизма — она может располагаться (рис. 8.23, *б*) по одну или по другую сторону от плоскости π_1, содержащей ось шарнира D и точку B (или векторы $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{\rho}$).

Представив мысленно направление вектора $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\rho}$, нормального к плоскости π_1, легко заключить, что проекция на это направление орта $\boldsymbol{e}_3$ в сборке BCD положительна, а в сборке $BC'D$ отрицательна. Поэтому для этих сборок соответственно $\delta_1 = +1$ и $\delta_1 = -1$.

Выписанное ниже в соответствии с (8.68) равенство

$$\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{e}_3 l_3) : l_2 \tag{8.74}$$

позволяет вычислить проекции вектора $\boldsymbol{e}_2$ по известным из предыдущего проекциям векторов $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{e}_3$.

18°. Переходим к определению орта $\boldsymbol{w}$ оси пальца пары B (рис. 8.26).

Для решения вопроса нам потребуются проекции на оси x, y и z вектора $\boldsymbol{u}$, известного нам в осях системы $Ax_1y_1z_1$. Их удобно определить с помощью матричной формулы типа (8.17)

$$u^{(0)} = M_{01}u^{(1)}, \tag{8.75}$$

в ней

$$u^{(0)} = \begin{Vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Vmatrix}, \qquad u^{(1)} = \begin{Vmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \end{Vmatrix}$$

суть матрицы-столбцы проекций вектора $\boldsymbol{u}$ соответственно на оси координатных систем $D_0 = Dxyz$ и $D_1 = Ax_1y_1z_1$, а M_{01} есть матрица поворота, осуществляющая совмещение системы D_1 с системой D_0.

Удобно принять, что $D_b = Ax_by_bz_b$ ($z_b \equiv z_1$) есть промежуточное положение системы D_1 при переходе в положение D_0.

Тогда

$$M_{01}=M_{0b}M_{b1}, \tag{8.76}$$

где

$$M_{b1}=\begin{Vmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},$$

$$M_{0b}=\begin{Vmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{Vmatrix}$$

суть матрицы поворотов около осей z_1 и $y_1 \| y$.

Определив матрицу M_{01}, с помощью равенства (8.75) получаем выражения

$$\left.\begin{aligned} u_x&=\cos\alpha\,(u_{x1}\cos\varphi_1-u_{y1}\sin\varphi_1)+u_{z1}\sin\alpha,\\ u_y&=u_{x1}\sin\varphi_1+u_{y1}\cos\varphi_1,\\ u_z&=\sin\alpha\,(u_{x1}\cos\varphi_1+u_{y1}\sin\varphi_1)+u_{z1}\cos\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{8.77}$$

позволяющие вычислить проекции вектора $\boldsymbol{u}$ по заданному значению угла φ_1.

Система трех скалярных уравнений для нахождения проекций единичного вектора $\boldsymbol{w}$ такова:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}=0, \qquad \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{w}=\cos\alpha_2, \qquad \boldsymbol{w}^2=1. \tag{8.78}$$

Первое из этих уравнений выражает условие ортогональности двух осей вращения шаровой с пальцем пары B. Вторым уравнением отмечено, что ось звена *2* и ось пальца (орты этих осей) образуют известный нам угол α_2. Третьим уравнением мы записали, что $\boldsymbol{w}$ является единичным вектором.

Система уравнений (8.78) того же типа, что и система уравнений (1), рассмотренная и решенная в общем виде в приложении 2. Для нахождения проекций орта $\boldsymbol{w}$ следует воспользоваться формулами (5) из приложения 2, положив в них $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{w}$, $c_1=0$, $c_2=\cos\alpha_2$.

Нужно решить еще вопрос о коэффициенте δ из формул (5) приложения 2. В нашем случае это знак величины $\varkappa=\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{e}_2)$.

Коэффициент δ позволяет выбрать решение, отвечающее принятому в механизме сборки шаровой с пальцем пары B (рис. 8.26) — при одном и том же положении оси звена *2* ось пальца (орт $\boldsymbol{w}$) можно расположить по одну или другую сторону от плоскости π, в которой находятся ось звена *2* и орт $\boldsymbol{u}$.

Представив мысленно направление вектора $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{e}_2$, нормального к плоскости π, заключаем, что положения BS и BS' оси пальца соответствуют сборкам, для которых соответственно $\delta=+1$ и $\delta=-1$.

Для целей координирования на звеньях *2* и *3* (рис. 8.23) введены системы координат $C_2x_2y_2z_2$ и $Dx_3y_3z_3$.

У системы координат $C_2x_2y_2z_2$ (рис. 8.23, *а* и 8.24) ось x_2 направлена вдоль оси CB звена *2*, а ось y лежит в плоскости, содержащей ось CB и ось пальца. Такой случай рассмотрен в приложении *2*. С помощью формул (11) и (12) приложения, с учетом, что $\nu=2$, получаем

$$\boldsymbol{j}_2=\frac{(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{i}_2\cos\alpha_2)}{\sin\alpha_2}, \qquad \boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{i}_2\times\boldsymbol{j}_2, \tag{8.79}$$

по известным проекциям векторов $\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{w}$ можно вычислить проекции векторов $\boldsymbol{j}_2$ и $\boldsymbol{k}_2$.

У системы координат $Dx_3y_3z_3$ ось x_3 направлена по оси DC звена *3*, а ось z_3 совмещена с осью z. По известным нам ортам $\boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{k}_3$ этих осей

несложно определить проекции единичного вектора оси y. Имеем

$$j_3 = k_3 \times i_3 = k \times e_3. \tag{8.80}$$

Задачу о положениях мы окончим определением абсолютных координат заданной точки механизма. Пусть этой точкой является точка K на звене 2 с относительными координатами $x_K^{(2)}$, $y_K^{(2)}$ и $z_K^{(2)}$. Составляем выражение для радиуса-вектора $\overline{DK}$ точки K (рис. 8.23, *а*). Оно имеет вид

$$r_K = e_3 l_3 + \overline{CK} = e_3 l_3 + i_2 x_K^{(2)} + j_2 y_K^{(2)} + k_2 z_K^{(2)} \tag{8.81}$$

и содержит известные нам векторы.

Проекциями этого вектора на оси x, y и z являются абсолютные координаты точки K. В частности, например,

$$x_K = e_{3x} l_3 + i_{2x} x_K^{(2)} + j_{2x} y_K^{(2)} + k_{2x} z_K^{(2)}. \tag{8.82}$$

Аналогично этому можно определить абсолютные координаты любой другой точки механизма.

19°. Задачу о скоростях мы начинаем с определения проекций векторов $\dot{\rho} = d\rho/dt$ и $\dot{u} = du/dt$. Для этой цели мы используем соотношения, производные от (8.69) и (8.77). Имеем

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho}_x &= -\dot{\varphi}_1 l_1 \cos\alpha \sin\varphi_1, \qquad \dot{\rho}_y = \dot{\varphi}_1 l_1 \cos\varphi_1, \\ \dot{\rho}_z &= \dot{\varphi}_1 l_1 \sin\alpha \sin\varphi_1, \end{aligned}\right\} \tag{8.83}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_x &= -\dot{\varphi}_1 \cos\alpha\,(u_{x1} \sin\varphi_1 + u_{y1} \cos\varphi_1), \\ \dot{u}_y &= \dot{\varphi}_1\,(u_{x1} \cos\varphi_1 - u_{y1} \sin\varphi_1), \\ \dot{u}_z &= \dot{\varphi}_1 \sin\alpha\,(u_{y1} \cos\varphi_1 - u_{x1} \sin\varphi_1). \end{aligned}\right\} \tag{8.84}$$

Легко видеть, что эти величины являются функциями угла φ_1 ворота ведущего звена *1* и его угловой скорости $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$.

Ближайшей нашей задачей будет определение векторов $\dot{e}_3$, $\dot{e}_2$ и $\dot{w}$. Для этой цели мы используем уравнения, являющиеся производными по времени от (8.72), (8.74) и (8.78) в задаче о положениях при определении ортов e_3, e_2 и w. Задача сведется к решению линейных уравнений и систем, ибо в задаче о положениях не было уравнений выше второй степени.

Проекции вектора $\dot{e}_3$ определяем в результате решения системы уравнений

$$k \cdot \dot{e}_3 = 0, \qquad \rho \cdot \dot{e}_3 = b, \qquad e_3 \cdot \dot{e}_3 = 0, \tag{8.85}$$

в которой

$$b = \frac{1}{l_3}(\rho - e_3 l_3) \cdot \dot{\rho} = e_2 \cdot \dot{\rho} l_2 : l_3.$$

Эта система, полученная дифференцированием уравнений (8.72), в развернутой записи имеет такой вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_{3z} &= 0, \\ \rho_x \dot{e}_{3x} + \rho_y \dot{e}_{3y} + \rho_z \dot{e}_3 &= b, \\ e_{3x} \dot{e}_{3x} + e_{3y} \dot{e}_{3y} + e_{3z} \dot{e}_{3z} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.86}$$

где $b = l_2 (e_{2x}\dot{\rho}_x + e_{2y}\dot{\rho}_y + e_{2z}\dot{\rho}_z) : l_3$.

Теперь, когда определен вектор e_3, с помощью равенства

$$\dot{e}_2=(\dot{\rho}-\dot{e}_3 l_3):l_2, \tag{8.87}$$

производного от (8.74), мы можем вычислить проекции вектора $\dot{e}_2$.

Для нахождения проекций вектора $\dot{w}$ используем систему трех линейных уравнений

$$u\cdot\dot{w}=-\dot{u}\cdot w,\quad e_2\cdot\dot{w}=-\dot{e}_2\cdot w,\quad w\cdot\dot{w}=0, \tag{8.88}$$

она получена в результате дифференцирования уравнений (8.78) и в развернутой записи имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u_x\dot{w}_x+u_y\dot{w}_y+u_z\dot{w}_z&=d_1,\\ e_{2x}\dot{w}_x+e_{2y}\dot{w}_y+e_{2z}\dot{w}_z&=d_2,\\ w_x\dot{w}_x+w_y\dot{w}_y+w_z\dot{w}_z&=0, \end{aligned}\right\} \tag{8.89}$$

где

$$d_1=-\dot{u}\cdot w=-(\dot{u}_x w_x+\dot{u}_y w_y+\dot{u}_z w_z),$$
$$d_2=-\dot{e}_2\cdot w=-(\dot{e}_{2x}w_x+\dot{e}_{2y}w_y+\dot{e}_{2y}w_z).$$

Со звеном 2 связана система координат $Cx_2y_2z_2$. Используя (8.79), имеем такие формулы для вычисления производных ее ортов i_2, j_2, k_2:

$$\left.\begin{aligned} (i_2)'&=\dot{e}_2,\\ (j_2)'&=[\dot{w}-(i_2)'\cos\alpha_2]:\sin\alpha_2,\\ \dot{k}_2&=(i_2)'\times j_2+i_2\times(j_2)'. \end{aligned}\right\} \tag{8.90}$$

С помощью (8.80) мы получим следующие выражения для производных от единичных векторов i_3, j_3, k_3 системы координат $Dx_3y_3z_3$ на звене 3:

$$(i_3)'=\dot{e}_3,\qquad (j_3)'=k\times\dot{e}_3,\qquad \dot{k}_3=0. \tag{8.91}$$

Переписав равенства (8.90) и (8.91) в проекциях на оси x, y и z, мы получим формулы для вычисления проекций соответствующих векторов.

Теперь можно перейти к определению скорости любой точки ведомых звеньев 2 и 3. Для этого нужно продифференцировать предварительно составленное выражение радиуса-вектора выбранной точки. Для задачи о скоростях (а также и ускорений) началом этого вектора может быть любая неподвижная точка.

Определим скорость точки K на звене 2 (рис. 8.23, *а*). Дифференцируя выражение (8.81) ее радиуса-вектора r_K, получим соотношение

$$v_K=\dot{r}_K=e_3 l_3+(i_2)'x_K^{(2)}+(j_2)'y_K^{(2)}+\dot{k}_2 z_K^{(2)}, \tag{8.92}$$

позволяющее определить скорость точки K. Проекция этой скорости на ось x равна

$$\dot{x}_K=\dot{e}_{3x}l_3+(i_{2x})'x_K^{(2)}+(j_{2x})'y_K^{(2)}+\dot{k}_{2x}z_K^{(2)}. \tag{8.93}$$

С помощью аналогичных выражений вычисляем проекции скорости v_K на оси y и z.

Мы не рассмотрели еще вопроса об угловых скоростях звеньев 2 и 3; он решается с помощью общих формул (8.141)—(8.142), которые приводятся в § 37, *31°*. В эти формулы входят известные нам величины.

20°. Задачу об ускорениях мы начинаем с вычислений проекций векторов $\ddot{\boldsymbol{\rho}} = d^2\boldsymbol{\rho}/dt^2$ и $\ddot{\boldsymbol{u}} = d^2\boldsymbol{u}/dt^2$ с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho}_x &= -\ddot{\varphi}_1 l_1 \cos\alpha \sin\varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos\alpha \cos\varphi_1, \\ \ddot{\rho}_y &= \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos\varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin\varphi_1, \\ \ddot{\rho}_z &= \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin\alpha \sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin\alpha \cos\varphi_1 \end{aligned}\right\} \tag{8.94}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \ddot{u}_x &= -\ddot{\varphi}_1 \cos\alpha (u_{x1} \sin\varphi_1 + u_{y1} \cos\varphi_1) - \\ &\quad - \dot{\varphi}_1^2 \cos\alpha (u_{x1} \cos\varphi_1 - u_{y1} \sin\varphi_1), \\ \ddot{u}_y &= \ddot{\varphi}_1 (u_{x1} \cos\varphi_1 - u_{y1} \sin\varphi_1) - \\ &\quad - \dot{\varphi}_1^2 (u_{y1} \sin\varphi_1 + u_{y1} \cos\varphi_1), \\ \ddot{u}_z &= \ddot{\varphi}_1 \sin\alpha (u_{y1} \cos\varphi_1 - u_{x1} \sin\varphi_1) - \\ &\quad - \dot{\varphi}_1^2 (u_{y1} \sin\varphi_1 + u_{x1} \cos\varphi_1), \end{aligned}\right\} \tag{8.95}$$

которые мы получили дифференцированием равенств (8.83) и (8.84). Из этих выражений видно, что искомые величины являются функциями угла φ_1 поворота ведущего звена I, а также его угловой скорости $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ и углового ускорения $\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1$.

Определим векторы $\ddot{\boldsymbol{e}}_3$, $\ddot{\boldsymbol{e}}_2$ и $\ddot{\boldsymbol{w}}$.

Дифференцируя по времени (8.85), получим систему линейных уравнений для определения проекций вектора $\ddot{\boldsymbol{e}}_3$:

$$\boldsymbol{k} \cdot \ddot{\boldsymbol{e}}_3 = 0, \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \ddot{\boldsymbol{e}}_3 = p_2, \quad \boldsymbol{e}_3 \cdot \ddot{\boldsymbol{e}}_3 = p_3, \tag{8.96}$$

где

$$p_2 = \frac{l_2}{l_3} (\dot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \dot{\boldsymbol{e}}_2 + \boldsymbol{e}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{\rho}}) - \dot{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad p_3 = -\dot{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \dot{\boldsymbol{e}}_3 = -\dot{\boldsymbol{e}}_3^2.$$

Левая часть уравнений (8.96) в развернутой форме имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{e}_{3z} &= 0, \\ \rho_x \ddot{e}_{3x} + \rho_y \ddot{e}_{3y} + \rho_z \ddot{e}_{3z} &= p_2, \\ e_{3x} \ddot{e}_{3x} + e_{3y} \ddot{e}_{3y} + e_{3z} \ddot{e}_{3z} &= p_3. \end{aligned}\right\} \tag{8.97}$$

Теперь, когда определен вектор $\ddot{\boldsymbol{e}}_3$, мы из равенства

$$\ddot{\boldsymbol{e}}_2 = (\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \ddot{\boldsymbol{e}}_3 l_3) : l_2, \tag{8.98}$$

производного от (8.87) находим вектор $\ddot{\boldsymbol{e}}_2$.

Определим проекции вектора $\ddot{\boldsymbol{w}}$. Для этой цели используем приводимую ниже систему линейных уравнений, производную от (8.89). Имеем

$$\left.\begin{aligned} u_x \ddot{w}_x + u_y \ddot{w}_y + u_z \ddot{w}_z &= q_1, \\ e_{2x} \ddot{w}_x + e_{2y} \ddot{w}_y + e_{2z} \ddot{w}_z &= q_2, \\ w_x \ddot{w}_x + w_y \ddot{w}_y + w_z \ddot{w}_z &= q_3, \end{aligned}\right\} \tag{8.99}$$

где

$$q_1 = -2\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{w}} - \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{w}, \quad q_2 = -2\dot{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{w}} - \ddot{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{w}, \quad q_3 = -\dot{\boldsymbol{w}} \cdot \dot{\boldsymbol{w}} = -\dot{\boldsymbol{w}}^2.$$

Ниже мы приводим еще равенства для определения вторых производных по времени от i_2, j_2, k_2 — ортов системы координат на звене *2*:

$$\left.\begin{aligned}&(i_2)''=\ddot{e}^2,\\&(j_2)''=\left[\ddot{w}-(i_2)''\cos\alpha_2\right]:\sin\alpha_2,\\&\ddot{k}_2=(i_2)''\times j_2+2(i_2)'\times(j_2)'+i_2\times(j_2)''\end{aligned}\right\}\qquad(8.100)$$

и для вторых производных от i_3, j_3 и k_3 — ортов системы координат на звене *3*:

$$(i_3)''=\ddot{e}_3,\quad (j_3)''=k\times\ddot{e}_3,\quad \ddot{k}_3=0.\qquad(8.101)$$

Для вычисления проекций искомых векторов равенства (8.100) и (8.101) должны быть предварительно переписаны в проекциях на оси x, y и z.

Задачу о линейных ускорениях мы решаем двукратным дифференцированием по времени радиуса-вектора интересующей нас точки. Для точки K на звене *2*

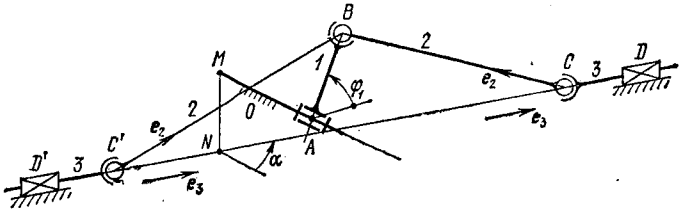


Рис. 8.27. Кинематическая схема пространственного кривошипно-ползунного механизма.

первая производная этой вектор-функции приведена в (8.92). Вторая производная принимает такой вид:

$$a_K=\ddot{r}_K=\ddot{e}_3l_3+(i_2)''x_K^{(2)}+(j_2)''y_K^{(2)}+\ddot{k}_2z_K^{(2)}.\qquad(8.102)$$

Это и подобные ему выражения для практических расчетов нужно переписать в проекциях на оси x, y и z. В частности, проекция $\ddot{x}_K$ ускорения $\ddot{r}_K$ на ось x запишется так:

$$\ddot{x}_K=\ddot{e}_{3x}l_3+(i_{2x})''x_K^{(2)}+(j_{2x})''y_K^{(2)}+\ddot{k}_{2z}z_K^{(2)}.\qquad(8.103)$$

Задача об угловых ускорениях звеньев *2* и *3* решается применением общих формул (8.139) и (8.141) из § 37, *31°*; все нужные для этого величины нами определены.

21°. Переходим к рассмотрению кинематики пространственного кривошипно-ползунного механизма. Схема исследуемого механизма приведена на рис. 8.27. Ведущее звено *1* механизма соединено со стойкой 0 вращательной парой A. Ось AM этой пары скрещивается под некоторым углом α с осью ND поступательной пары D, соединяющей ведомое звено *3* со стойкой. Движение от звена *1* на звено *3* передается с помощью шатуна *2*, присоединенного к звеньям *1* и *3* шаровой с пальцем парой B и шаровой парой C.

В механизме ось ND поступательного перемещения звена *3* не лежит в плоскости вращения оси AB ведущего кривошипа *1*. Это отличает пространственный кривошипно-ползунный механизм от одноименного плоского.

Рассматриваемый механизм принадлежит к пространственным механизмам общего вида. Учтя, что в механизме имеются пары только пятого, четвертого

и третьего классов, по формуле Сомова — Малышева находим:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1,$$

т. е. механизм обладает одной степенью подвижности.

Со стойкой связана система координат $Axyz$ (рис. 8.28), в ней мы будем вести кинематический анализ механизма. Ось y этой системы параллельна линии MN кратчайшего расстояния между осями AM и ND кинематических пар A и D, а ось z совмещена с осью шарнира A. В плоскости Axy вращается ось AB звена *1*, его положение определяет угол φ_1.

С помощью единичного вектора e_3 оси звена *3* мы задаем положительное направление оси ND пары D. Этот вектор образует с осью z отмеченный нами угол α и соответственно его проекции на оси x, y и z:

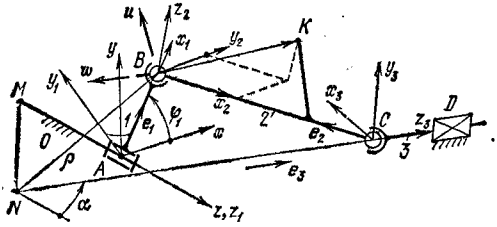


Рис. 8.28. К определению кинематических параметров кривошипно-ползунного механизма.

$$e_{3x} = \sin\alpha, \qquad e_{3y} = 0,$$
$$e_{3z} = \cos\alpha. \qquad (8.104)$$

В шаровой с пальцем паре B имеются две оси вращения; этот вопрос мы рассматривали в пункте *16°* настоящего параграфа. И в данном случае мы примем, что звену *1* принадлежит элемент пары с плоскостью прорези. Единичный вектор u этой плоскости является известным в осях системы координат $Ax_1y_1z_1$, привязанной к звену *1*. Ось x_1 этой системы направлена по оси AB звена, а ось z_1 совмещена с осью z.

Встречается модификация механизма, в которой обе пары B и C — шаровые. Шатун такого механизма имеет свободу вращения около своей оси BC. Но это, как было уже указано выше, не влияет на кинематику ведомого звена *3*.

22°. В задаче о положениях механизма мы вначале определим положение точки C и оси звена *2*, а затем положение оси пальца пары B. После этого несложно решится вопрос об абсолютных координатах любой точки механизма.

Замкнутость векторного контура $NCBAMN$ — основное условие, с которым связано определение положения точки C и оси BC звена *2*.

Это условие удобно записать так:

где
$$\overline{NC} + \overline{CB} = \boldsymbol{\rho},$$
$$\boldsymbol{\rho} = \overline{NM} + \overline{MA} + \overline{AB}. \qquad (8.105)$$

Полученное векторное равенство можно заменить двумя следующими:

$$e_3 s_C + e_2 l_2 = \boldsymbol{\rho} \quad \text{и} \quad e_2^2 = 1, \qquad (8.106)$$

если через s_C обозначить проекцию вектора $\overline{NC}$ на положительное направление оси пары D, а через l_2 и e_2 обозначить длину и единичный вектор оси звена *2*. Равенством $e_2^2 = 1$ мы указываем, что введенный нами вектор e_2 является единичным.

Вектор $\boldsymbol{\rho}$ является функцией угла φ_1, его проекции можно вычислить по формулам

$$\rho_x = l_1 \cos\varphi_1, \quad \rho_y = -y_N + l_1 \sin\varphi_1,$$
$$\rho_z = -l_{AM}, \qquad (8.107)$$

где $l_1 = AB$ — длина звена *1*, а y_N — ордината точки N (на рис. 8.28 $y_N < 0$).

Уравнение (8.106) мы используем для определения алгебраической величины s_C и проекций вектора e_2, т. е. четырех скалярных величин. Это возможно, ибо эти уравнения эквивалентны системе четырех скалярных уравнений. Действительно, если первое уравнение переписать в проекциях на оси x, y, z и развернуть второе, то мы получим

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha\cdot s_C + l_2 e_{2x} &= \rho_x,\\ 0\cdot s_C + l_2 e_{2y} &= \rho_y,\\ \cos\alpha\cdot s_C + l_2 e_{2z} &= \rho_z,\\ e_{2x}^2 + e_{2y}^2 + e_{2z}^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{8.108}$$

Это система трех линейных и одного квадратного уравнения относительно искомых величин, она имеет два решения.

Наличие двух решений для искомых величин объясняется тем, что при одном и том же положении кривошипа *1* ведомая часть *2—3* может быть собрана двояко (рис. 8.27). В этих двух сборках центр шаровой пары C располагается по разные стороны от точки N.

Нам нужен критерий, с помощью которого мы сможем выбрать нужное нам решение системы (8.108). В качестве этого критерия удобно выбрать величину

$$\delta_1 = \operatorname{sign}(e_2\cdot e_3), \tag{8.109}$$

принимающую одно из значений $+1$ или -1; это знак проекции вектора e_2 на направление e_3. В сборке BCD орт e_2 оси звена *2* образует с e_3 тупой угол, и так как в этом случае $e_2\cdot e_3 < 0$, то $\delta = -1$. В сборке $BC'D'$ угол между e_2 и e_3 острый и соответственно $\delta = +1$.

Ниже мы приводим решение системы (8.108). Вначале определяется величина s_C с помощью равенства

$$s_C = -b - \delta_1\sqrt{b^2 - c}, \tag{8.110}$$

где

$$b = -e_3\cdot\rho = -(\rho_x\sin\alpha + \rho_z\cos\alpha),$$
$$c = \rho^2 - l_2^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2 - l_2^2.$$

Далее вычисляем проекции единичного вектора e_2, руководствуясь вытекающей из (8.106) зависимостью

$$e_2 = \frac{(\rho - e_3 s_C)}{l_2}. \tag{8.111}$$

23°. Переходим к определению единичного вектора w оси пальца пары B. Предварительно нужно вычислить проекции орта u плоскости прорези шаровой с пальцем пары B на оси системы координат $D_0 = Axyz$. Помня, что этот вектор известен в осях системы $D_1 = Ax_1y_1z_1$, для получения нужных нам величин используем матричную формулу типа (см. приложение 1)

$$u^{(0)} = M_{01}u^{(1)}, \tag{8.112}$$

где

$$u^{(0)} = \begin{Vmatrix} u_x\\ u_y\\ u_z \end{Vmatrix}, \qquad u^{(1)} = \begin{Vmatrix} u_{x1}\\ u_{y1}\\ u_{z1} \end{Vmatrix}$$

суть матрицы-столбцы из проекций вектора u на оси систем D_0 и D_1, а

$$M_{01} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

есть матрица поворота вокруг оси z, ее столбцами являются проекции ортов i_1, j_1 и k_1 на оси x, y, z.

Развернув (8.112), мы приходим к следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_{x1}\cos\varphi_1 - u_{y1}\sin\varphi_1, \\ u_y &= u_{x1}\sin\varphi_1 + u_{y1}\cos\varphi_1, \\ u_z &= u_{z1}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.113)$$

Искомый вектор w ортогонален к орту u, образует известный нам угол α_2 с ортом e_2 оси звена 2, а по величине равен единице. Эти три условия выражаются следующими скалярными уравнениями:

$$u \cdot w = 0, \quad e_2 \cdot w = \cos\alpha_2, \quad w^2 = 1. \qquad (8.114)$$

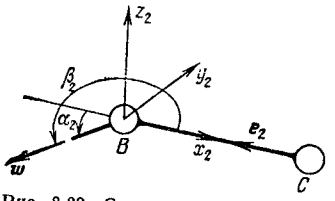


Рис. 8.29. Схема расположения координатных осей на звене BC.

Это система двух линейных и одного квадратного уравнения относительно проекций вектора w. Такая система рассмотрена и в общем виде решена в приложении 2. Поэтому для определения искомых проекций следует использовать общие формулы (5), предварительно сопоставив обозначения параметров уравнений (8.114) и (5).

В формулы (5) приложения 2 входит коэффициент δ, имеющий одно из значений $+1$ или -1. В данном случае с помощью δ мы выбираем то решение, которое отвечает принятой в механизме сборке шаровой с пальцем пары B.

На звене 2 введена система координат $Bx_2y_2z_2$. Если ее ось x_2 совместить с осью BC и направить в сторону точки C (против вектора e_2), то угол между w и осью x_2 будет $\beta_2 = \alpha_2 + 180°$ (рис. 8.29).

В этом случае получаем

$$i_2 = -e_2, \quad j_2 = (w - i_2\cos\beta_2) : \sin\beta_2, \quad k_2 = i_2 \times j_2, \qquad (8.115)$$

если для определения ортов j_2 и k_2 применять формулы (11) и (12) из приложения 2. Для вычисления проекций ортов i_2, j_2 и k_2 эти формулы нужно переписать в проекциях на оси x, y и z.

24°. Определение абсолютных координат заданной точки механизма требует составления выражения для радиуса-вектора этой точки с началом в точке A. Для точки K на звене 2 (рис. 8.28) выражение имеет вид

$$r_K = \overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BK} = e_1 l_1 + i_2 x_K^{(2)} + j_2 y_K^{(2)} + k_2 z_K^{(2)}, \qquad (8.116)$$

где $e_1 = i\cos\varphi_1 + j\cos\varphi_1$, а $x_K^{(2)}$, $y_K^{(2)}$, $z_K^{(2)}$ — координаты точки K в системе $Bx_2y_2z_2$.

Абсолютные координаты точки K есть проекции ее радиуса-вектора r_K на оси x, y и z. Следовательно,

$$x_K = l_1\cos\varphi_1 + i_{2x}x_K^{(2)} + j_{2x}y_K^{(2)} + k_{2x}z_K^{(2)}. \qquad (8.117)$$

Аналогично определяются координаты заданной точки звена 3. У системы координат $Cx_3y_3z_3$ на звене 3 ось z_3 удобно совместить с осью поступательной пары, а ось y_3 принять параллельной оси y. Тогда $i_3 = j$, $k_3 = e_3$, а проекции одного неизвестного нам орта i_3 будут $i_{3x} = \cos\alpha$, $i_{3y} = 0$, $i_{3z} = -\sin\alpha$.

25°. В задаче о скоростях, кроме угла φ_1 поворота ведущего звена 1 задается его угловая скорость $\dot\varphi_1 = \omega_1$. Эти величины входят в формулы для вычисления проекций векторов $\rho = d\rho/dt$ и $u = du/dt$.

Имеем

$$\dot{\rho}_x = -\dot{\varphi}_1 l_1 \sin\varphi_1, \quad \dot{\rho}_y = \dot{\varphi}_1 l_1 \cos\varphi_1, \quad \dot{\rho}_z = 0 \tag{8.118}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_x &= -\dot{\varphi}_1 (u_{x1} \sin\varphi_1 + u_{y1} \cos\varphi_1), \\ \dot{u}_y &= \dot{\varphi}_1 (u_{x1} \cos\varphi_1 - u_{y1} \sin\varphi_1), \\ \dot{u}_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.119}$$

Эти формулы получены дифференцированием выражений (8.107) и (8.113).

Для нахождения линейных скоростей, а также вектора угловой скорости звена 2 нужно определить первую производную по времени от всех тех величин, которые определялись в задаче о положениях.

Определим вектор $\dot{e}_2$ и величину $\dot{s}_C$ — проекцию скорости v_C — на положительное направление оси ND поступательной пары D. Для этой цели мы используем систему уравнений

$$\dot{e}_3 \dot{s}_C + \dot{e}_2 l_2 = \dot{\rho}, \qquad e_2 \cdot \dot{e}_2 = 0, \tag{8.120}$$

которую получаем в результате дифференцирования равенства (8.106).

Наиболее простой путь решения этой системы таков. Обе части первого уравнения умножим скалярно на единичный вектор e_2. Получим

$$e_3 \cdot e_2 \dot{s}_C = \dot{\rho} \cdot e_2, \tag{8.121}$$

учтя, что $e_2 \cdot \dot{e}_2 = 0$.

Из последнего равенства следует, что

$$\dot{s}_C = \frac{\dot{\rho} \cdot e_2}{e_3 \cdot e_2} = \frac{\dot{\rho}_x e_{2x} + \dot{\rho}_y e_{2y} + \dot{\rho}_z e_{2z}}{e_{2x} \sin\alpha + e_{2y} \cos\alpha}. \tag{8.122}$$

Теперь несложно определить проекции вектора $\dot{e}_2$, используя равенство

$$\dot{e}_2 = (\dot{\rho} - e_3 \dot{s}_C) : l_2, \tag{8.123}$$

которое получено из уравнения (8.120).

Для нахождения проекций вектора w используем систему трех уравнений

$$u \cdot \dot{w} = -\dot{u} \cdot w, \qquad e_2 \cdot \dot{w} = -\dot{e}_2 \cdot w, \qquad w \cdot \dot{w} = 0, \tag{8.124}$$

производную от (8.114). Эта система линейна относительно проекций искомого вектора и в развернутой записи имеет такой вид:

$$\left.\begin{aligned} u_x \dot{w}_x + u_y \dot{w}_y + u_z \dot{w}_z &= b_1, \\ e_{2x} \dot{w}_x + e_{2y} \dot{w}_y + e_{2z} \dot{w}_z &= b_2, \\ w_x \dot{w}_x + w_y \dot{w}_y + w_z \dot{w}_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.125}$$

где

$$b_1 = -\dot{u} \cdot w, \qquad b_2 = -\dot{e}_2 \cdot w.$$

Определим теперь производные по времени от ортов i_2, j_2 и k_2 осей системы координат $Bx_2y_2z_2$. Для этой цели мы используем равенства

$$\left.\begin{aligned} (i_2)^{\cdot} &= -\dot{e}_2, \qquad (j_2)^{\cdot} = [\dot{w} - (i_2)^{\cdot} \cos\beta_2] : \sin\beta_2, \\ \dot{k}_2 &= (i_2)^{\cdot} \times j_2 + i_2 \times (j_2)^{\cdot}, \end{aligned}\right\} \tag{8.126}$$

полученные дифференцированием выражений (8.115). Эти равенства соответствующим образом переписываются в проекциях на оси x, y и z.

26°. Задачу о линейных скоростях мы решим на примере скорости точки K (рис. 8.28). Для этой цели мы продифференцируем по времени выражение (8.116) для радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_K$. Имеем

$$\boldsymbol{v}_K=\dot{\boldsymbol{r}}_K=\dot{\boldsymbol{e}}_1 l_1+(\dot{\imath}_2)\cdot x_K^{(2)}+(\dot{\jmath}_2)\cdot y_K^{(2)}+\dot{\boldsymbol{k}}_2 z_K^{(2)}, \tag{8.127}$$

где $\dot{\boldsymbol{e}}_1=-\boldsymbol{\imath}\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1+\boldsymbol{\jmath}\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1$.

Проекция скорости $\boldsymbol{v}_K$ на ось x равна

$$\dot{x}_K=-\dot{\varphi}_1 l_1\sin\varphi_1+(\dot{\imath}_{2x})\cdot x_K^{(2)}+(\dot{\jmath}_{2x})\cdot y_K^{(2)}+\dot{k}_{2x} z_K^{(2)}. \tag{8.128}$$

Аналогичио записываются и две другие проекции вектора $\boldsymbol{v}_K$.

Вектор угловой скорости ω_2 звена *2*, находящегося в пространственном движении, может быть определен по общим формулам (8.138) из § 37,*30°*.

27°. В задаче об ускорениях угловая скорость $\dot{\varphi}_1=\omega_1$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}_1=\varepsilon_1$ ведущего звена *1* входят только в формулы для вычисления проекций векторов $\ddot{\boldsymbol{\rho}}=d^2\boldsymbol{\rho}/dt^2$ и $\ddot{\boldsymbol{u}}=d^2\boldsymbol{u}/dt^2$. Они получены дифференцированием равенств (8.118) и (8.119) и имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\rho}_x&=-\ddot{\varphi}_1 l_1\sin\varphi_1-\dot{\varphi}_1^2 l_1\cos\varphi_1,\\ \ddot{\rho}_y&=\ddot{\varphi}_1 l_1\cos\varphi_1-\dot{\varphi}_1^2 l_1\sin\varphi_1,\\ \ddot{\rho}_z&=0\end{aligned}\right\} \tag{8.129}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\ddot{u}_x&=-\ddot{\varphi}_1(u_{x1}\sin\varphi_1+u_{y1}\cos\varphi_1)-\dot{\varphi}_1^2(u_{x1}\cos\varphi_1-u_{1y}\sin\varphi_1),\\ \ddot{u}_y&=\ddot{\varphi}_1(u_{x1}\cos\varphi_1-u_{y1}\sin\varphi_1)-\dot{\varphi}_1^2(u_{x1}\sin\varphi_1+u_{y1}\cos\varphi_1),\\ \ddot{u}_z&=0.\end{aligned}\right\} \tag{8.130}$$

28°. Для нахождения линейных ускорений и вектора углового ускорения звена *2* определяем вторую производную по времени от всех тех величин, которые определялись в задаче о положениях.

Для определения вектора $\ddot{\boldsymbol{e}}_2$ и величины $\ddot{s}_C$ — проекции ускорения точки C на ось поступательной пары D мы используем систему уравнений

$$\boldsymbol{e}_3\ddot{s}_C+\ddot{\boldsymbol{e}}_2 l_2=\ddot{\boldsymbol{\rho}},\qquad \boldsymbol{e}_2\cdot\ddot{\boldsymbol{e}}=-\dot{\boldsymbol{e}}_2^2, \tag{8.131}$$

производную по времени от уравнений (8.120).

Обе части первого уравнения умножим скалярно на единичный вектор $\boldsymbol{e}_2$. Получим

$$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3\ddot{s}_C+\boldsymbol{e}_2\cdot\ddot{\boldsymbol{e}}_2 l_2=\ddot{\boldsymbol{\rho}}\cdot\boldsymbol{e}_2.$$

Разрешим это равенство относительно искомой величины $\ddot{s}_C$, предварительно заменив $\boldsymbol{e}_2\cdot\ddot{\boldsymbol{e}}_2$ правой частью второго уравнения в (8.131). Будем иметь

$$\ddot{s}_C=\frac{\ddot{\boldsymbol{\rho}}\cdot\boldsymbol{e}_2+\dot{\boldsymbol{e}}_2^2 l_2}{\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3}. \tag{8.132}$$

Теперь, когда найдено $\ddot{s}_C$, определяем проекции вектора $\ddot{\boldsymbol{e}}_2$, используя выражение

$$\ddot{\boldsymbol{e}}_2=(\ddot{\boldsymbol{\rho}}-\boldsymbol{e}_3\ddot{s}_C):l_2, \tag{8.133}$$

оно получено из первого уравнения системы (8.131).

Переходим к определению вектора $\ddot{w}$. Дифференцируя (8.125), мы получим такую систему линейных уравнений для определения проекций этого вектора:

$$\left.\begin{aligned} u_x\ddot{w}_x+u_y\ddot{w}_y+u_z\ddot{w}_z&=c_1,\\ e_{2x}\ddot{w}_x+e_{2y}\ddot{w}_y+e_{2z}\ddot{w}_z&=c_2,\\ w_x\ddot{w}_x+w_y\ddot{w}_y+w_z\ddot{w}_z&=c_3,\end{aligned}\right\} \tag{8.134}$$

где

$$c_1=-\ddot{u}\cdot w-2\dot{u}\cdot\dot{w},\quad c_2=-\ddot{e}_2\cdot w-2\dot{e}_2\cdot\dot{w},\quad c_3=-\dot{w}^2.$$

Обратимся далее к равенствам (8.126) и продифференцируем их по времени:

$$(l_2)''=-\ddot{e}_2,\qquad (j_2)''=[\ddot{w}-(l_2)''\cos\beta_2]:\sin\beta_2, \tag{8.135}$$
$$\ddot{k}_2=(i_2)''\times j_2+2(i_2)'\times(j)_2+i_2\times(j_2)''.$$

Переписав эти равенства в проекциях на оси x, y и z, мы сможем определить по ним проекции искомых векторов.

29°. Для решения задачи о линейных ускорениях мы дважды дифференцируем по времени выражение радиуса-вектора нужной точки. В качестве примера

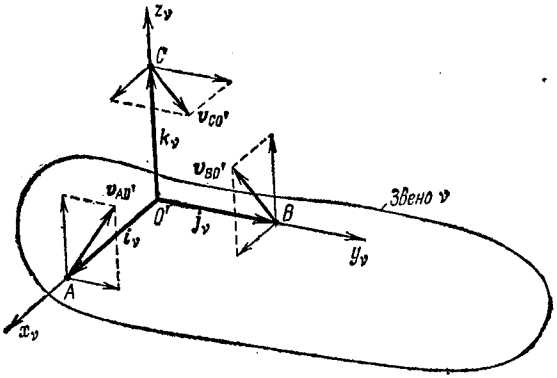


Рис. 8.30. К определению угловых скоростей и ускорений.

определим ускорение точки K на звене 2 (рис. 8.28). Первая производная ее радиуса-вектора была составлена при нахождении скорости v_K. Поэтому, дифференцируя выражение (8.127), находим

$$a_K=\ddot{r}_K=\ddot{e}_1l_1+(i_2)''x_K^{(2)}+(j_2)''y_K^{(2)}+\ddot{k}_2z_K^{(2)}, \tag{8.136}$$

где $\ddot{e}_1=-i(\ddot{\varphi}_1\sin\varphi_1+\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1)+j(\ddot{\varphi}\cos\varphi_1-\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1)$.

Переписать такое выражение в проекциях на оси x, y и z не представляет затруднений. В частности, проекция на ось x запишется так:

$$a_{Kx}=\ddot{x}_K=-(\ddot{\varphi}_1\sin\varphi_1+\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1)l_1+(i_{2x})''x_K^{(2)}+(j_{2x})''y_K^{(2)}+\ddot{k}_{2x}z_K^{(2)}. \tag{8.137}$$

30°. Решение задачи об угловых скоростях и ускорениях мы начнем с рассмотрения случая, когда звено находится в пространственном движении.

Угловую скорость ω_ν и угловое ускорение ε_ν звена ν мы определим в проекциях на координатные оси x_ν, y_ν и z_ν, связанные со звеном ν (рис. 8.30).

Пространственное движение звена ν может быть разложено на поступательное с полюсом в выбранной точке O' и вращательное около этой точки. Во враща-

тельном движении звена скоростями трех его точек A, B и C — концов единичных векторов i_ν, j_ν и k_ν осей x_ν, y_ν и z_ν звена являются производные по времени (i_ν), (j_ν) и $\dot{k}_\nu$.

На рис. 8.31 показано разложение скоростей этих точек по направлениям двух соседних координатных осей. Величины этих составляющих можно представить в виде скалярного произведения векторов $(i_\nu)^\cdot$, $(j_\nu)^\cdot$, $\dot{k}_\nu$ и орта соответствующей оси. Так, например, проекция скорости точки B на ось z_ν равна $(v_{BO'})_{z_\nu} = (j_\nu)\cdot k_\nu$.

Составляющие скоростей точек A, B и C позволяют определить скорость вращения звена ν около осей x_ν, y_ν и z_ν, т. е. проекции ω_{x_ν}, ω_{y_ν} и ω_{z_ν} угловой скорости ω_ν. Помня, что радиус вращения точек A, B и C равен единице, имеем

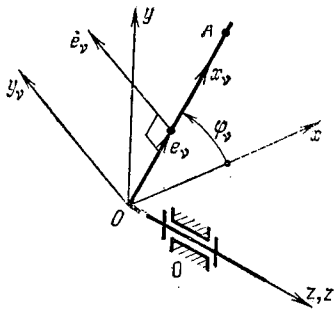


Рис. 8.31. К рассмотрению частного случая, когда ось звена ν неподвижна.

$$\left.\begin{aligned}\omega_{x_\nu} &= (j_\nu)^\cdot \cdot k_\nu = -\dot{k}_\nu \cdot j_\nu,\\ \omega_{y_\nu} &= \dot{k}_\nu \cdot i_\nu = -(i_\nu)^\cdot \cdot k_\nu,\\ \omega_{z_\nu} &= (i_\nu)^\cdot \cdot j_\nu = -(j_\nu)^\cdot \cdot i_\nu.\end{aligned}\right\} \qquad (8.138)$$

Приводимые ниже формулы для вычисления проекций вектора ε_ν на оси x_ν, y_ν и z_ν получены дифференцированием равенств (8.138)

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{x_\nu} &= (j_\nu)^{\cdot\cdot} \cdot k_\nu + (j_\nu)^\cdot \cdot \dot{k}_\nu,\\ \varepsilon_{y_\nu} &= \ddot{k}_\nu \cdot i_\nu + k_\nu \cdot (i_\nu)^\cdot,\\ \varepsilon_{z_\nu} &= (i_\nu)^{\cdot\cdot} \cdot j_\nu + (i_\nu)^\cdot \cdot (j_\nu)^\cdot.\end{aligned}\right\} \qquad (8.139)$$

31°. Перейдем к рассмотрению частного случая — звено ν имеет неподвижную ось вращения (рис. 8.31), ей перпендикулярна ось OA звена.

Если со звеном связана система координат и ее ось z_ν совмещена с осью вращения, то для вычисления угловой скорости $\dot{\varphi}_\nu = \omega_\nu = \omega_{z_\nu}$ и углового ускорения $\ddot{\varphi}_\nu = \varepsilon_\nu = \varepsilon_{z_\nu}$ можно применить последнюю из трех формул в (8.138) и (8.139).

Задача может быть решена и без привязки к звену координатных осей по известным проекциям орта e_ν оси звена и производных по времени этого вектора. Пусть с осью вращения этого ведомого звена совмещена ось z неподвижной системы координат $Oxyz$. Тогда для определения искомых величин можно применить следующие формулы:

$$\dot{\varphi}_\nu = \omega_\nu = e_{\nu x}\dot{e}_{\nu y} - e_{\nu y}\dot{e}_{\nu x}, \qquad (8.140)$$

$$\ddot{\varphi}_\nu = \varepsilon_\nu = e_{\nu x}\ddot{e}_{\nu y} - e_{\nu y}\ddot{e}_{\nu x}. \qquad (8.141)$$

Для вывода формулы (8.140) на время положим, что со звеном ν связана система координат $Ox_\nu y_\nu z_\nu$. Пусть ее ось x_ν совмещена с осью звена, а ось $z_\nu \equiv z$ совмещена с осью вращения. Тогда в третью формулу из (8.138) можно подставить

$$(i_\nu)^\cdot = \dot{e}_\nu, \qquad j_\nu = k_\nu \times i_\nu = k \times e_\nu.$$

Это приведет к выражению

$$\omega_\nu = \omega_{\nu z} = (e_\nu \times \dot{e}_\nu)\cdot k = (e_\nu \times \dot{e}_\nu)_z \qquad (8.142)$$

развернутой записью которого является формула (8.140). Дифференцируя последнюю, мы получаем (8.141).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ
СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА IX
ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

§ 38. Основные задачи

1°. При рассмотрении вопросов кинематического анализа механизмов мы всегда предполагаем движение ведущих звеньев заданным. Движение ведомых звеньев изучается в зависимости от заданного движения ведущих звеньев. При этом силы, действующие на звенья механизма, и силы, возникающие при его движении, нами не изучаются. Таким образом, при кинематическом анализе исследование движения механизмов ведется с учетом *только структуры механизмов и геометрических соотношений между размерами их звеньев*.

Динамический анализ механизмов имеет своими задачами:

а) изучение влияния внешних сил, сил веса звеньев, сил трения и массовых сил (сил инерции) на звенья механизма, на элементы звеньев, на кинематические пары и неподвижные опоры и установление способов уменьшения динамических нагрузок, возникающих при движении механизма;

б) изучение режима движения механизма под действием заданных сил и установление способов, обеспечивающих заданные режимы движения механизма.

Первая задача носит название *силового анализа механизмов*, а вторая задача — название *динамики механизмов*.

В динамический анализ механизмов может быть включен и ряд других задач, имеющих важное техническое значение, а именно: теория колебаний в механизмах, задача о соударении звеньев механизмов и др. Но эти вопросы являются предметом изучения в специальных курсах, так как при решении их необходимо применять методы теории упругости, а в теории механизмов и машин задачи решаются обычно в предположении, что звенья механизмов являются абсолютно жесткими.

2°. Первая из указанных задач динамики механизмов имеет своей целью определение внешних неизвестных сил, действующих на звенья механизма, а также усилий (реакций), возникающих в кинематических парах при движении механизма.

К внешним силам, например, относятся давление рабочей смеси (газа или жидкости) на поршень кривошипно-ползунного механизма двигателя внутреннего сгорания, парового двигателя, компрессора, вращающий момент, развиваемый электродвигателем на валу рабочего механизма, и др. Некоторые силы возникают в результате движения механизма. К этим силам, например, относятся силы трения при движении, силы сопротивления среды и т. д. Некоторые силы, как, например, динамические реакции в кинематических парах, возникают при движении вследствие инерции звеньев.

Изучение природы сил требует не только теоретического, но и экспериментального исследования. С помощью современных измерительных приборов можно весьма точно определять различные силы, действующие на отдельные звенья механизма, и выявлять их зависимости от различных факторов.

Если известны внешние силы, действующие на звенья механизма, и известны законы движения всех его звеньев, то можно методами, излагаемыми в механике, определить силы трения и реакции связей в кинематических парах, силы сопротивления среды, силы инерции звеньев и другие силы, возникающие при движении механизма, и тем самым произвести так называемый *силовой расчет механизма*.

К первой задаче динамического анализа механизмов относится также вопрос об устранении дополнительных динамических нагрузок от сил инерции на опоры механизма соответствующим подбором масс звеньев. Этот вопрос носит название *теории уравновешивания масс в механизмах*.

Вторая задача имеет своей целью определение мощности, необходимой для воспроизведения заданного движения машины или механизма, и изучение законов распределения этой мощности на выполнение работ, связанных с действием различных сил на механизм, а также решение вопроса о сравнительной оценке механизмов с помощью коэффициента полезного действия, характеризующего степень использования общей энергии, потребляемой машиной или механизмом, на полезную работу. К этой же задаче относится вопрос об определении истинного движения механизма под действием приложенных к нему сил, т. е. задачи о режиме его движения, а также вопрос о подборе таких соотношений между силами, массами и размерами звеньев механизма или машины, при которых движение механизма или машины было бы наиболее близким к требуемому условию рабочего процесса.

Эта задача обычно носит название *теории движения машины или механизма под действием заданных сил*.

§ 39. Задачи силового расчета механизмов

1°. Как было указано выше (§ 38), силовой расчет механизмов заключается в определении тех сил, которые действуют на отдельные звенья механизмов при их движении.

Вопрос об определении сил имеет большое практическое значение для расчета на прочность отдельных деталей механизмов, для определения мощности, потребной для работы механизма, для определения трения в кинематических парах, для расчета на износ трущихся деталей в кинематических парах и т. д. Зная силы, действующие на различные звенья механизма, конструктор может выбрать наиболее рациональные размеры звеньев, определить конструктивные их формы, необходимые для достаточной прочности деталей, обеспечить в кинематических парах достаточную смазку и т. д.

До появления в технике быстроходных машин определение сил в механизмах велось без учета тех дополнительных сил, которые возникают при движении механизма. Такие расчеты обычно носили название *статических расчетов*. В связи с появлением в технике быстроходных машин стало необходимым учитывать и те силы, которые возникают при движении механизма и часто значительно превышают статические силы. Расчеты, в которых учитываются как статические, так и динамические нагрузки, носят название *динамических расчетов*.

2°. Определение сил, действующих на различные звенья механизма при его движении, может быть сделано в том случае, если известны законы движения всех звеньев механизма и известны внешние силы, приложенные к механизму. Поэтому общую задачу динамического расчета и проектирования новых механизмов и машин конструктор обычно расчленяет на две части. Сначала он задается приближенным законом движения ведущих звеньев механизма и внешними силами, на него действующими, определяет все необходимые расчетные усилия и по ним подбирает необходимые размеры, массы и моменты инерции звеньев. Это — первая часть задачи. После этого конструктор приступает к решению второй части задачи, а именно, к исследованию вопроса об истинном движении спроектированного механизма, к которому приложены различные действующие на него силы. Определив истинный закон движения механизма, конструктор вносит в ранее проведенный расчет все необходимые исправления и добавления.

3°. Силовой расчет механизмов может быть произведен самыми разнообразными методами. В теории машин и механизмов весьма широкое применение получил метод силового расчета механизмов на основе обыкновенных уравнений равновесия твердых тел.

Сущность этого метода сводится к применению при решении задач динамики уравнений равновесия в форме Даламбера. Как

известно из теоретической механики, для этого силу инерции, которая является противодействием ускоряемого тела, приложенным к телу, сообщающему это ускорение, условно переносят на ускоряемое тело. Перенесенная сила уравновешивается со всеми остальными внешними силами, в том числе и с реакциями, действующими на это тело.

В применении к механизмам сущность метода может быть сформулирована так: если ко всем внешним действующим на звено механизма силам присоединить силы инерции, то под действием всех этих сил можно звено рассматривать условно находящимся в равновесии. Таким образом, при применении принципа Даламбера к расчету механизмов, кроме внешних сил, действующих на каждое звено механизма, вводятся в рассмотрение еще силы инерции, величины которых определяются как произведение массы отдельных материальных точек на их ускорения. Направления этих сил противоположны направлениям ускорений рассматриваемых точек. Составляя для полученной системы сил уравнения равновесия и решая их, определяем силы, действующие на звенья механизма и возникающие при его движении. Метод силового расчета механизма с использованием сил инерции и применением уравнений динамического равновесия носит иногда название *кинетостатического расчета механизмов*, в отличие от статического расчета, при котором не учитываются силы инерции звеньев.

§ 40. Силы, действующие на звенья механизма

1°. При работе механизма к его звеньям приложены внешние задаваемые силы, а именно: силы движущие, силы производственных сопротивлений, силы тяжести и др. Кроме того, при движении механизмов в результате реакций связей в кинематических парах возникают силы трения, которые можно рассматривать как составляющие этих реакций. Реакции в кинематических парах, так же как и силы трения, по отношению ко всему механизму являются силами внутренними, но по отношению к каждому звену, входящему в кинематическую пару, оказываются силами внешними.

Реакции в кинематических парах возникают не только вследствие действия внешних задаваемых сил на звенья механизма, но и вследствие движения отдельных масс механизма с ускорениями. Составляющие реакции, возникающие от движения звеньев с ускорениями, можно считать *дополнительными динамическими давлениями* в кинематических парах. Как было указано в § 39, эти дополнительные динамические давления могут быть определены из уравнений равновесия звеньев, если к задаваемым силам и реакциям связей добавить силы инерции.

2°. Будем называть в механизме *движущими силами* те силы, которые стремятся *ускорить* движение ведущего звена. Иначе,

движущими силами будем называть те *силы, приложенные к звеньям механизма, которые совершают положительную работу.*

Силами сопротивления в механизме будем называть те силы, которые стремятся *замедлить* движение ведущего звена. Иначе, силами сопротивления будем называть те *силы, приложенные к звеньям механизма, которые совершают отрицательную работу.*

Силами производственного сопротивления, или *силами полезного сопротивления*, будем считать *те силы сопротивления, которые совершают работу, необходимую для выполнения требуемого технологического процесса.*

Силами непроизводственных сопротивлений, или *силами вредных сопротивлений*, будем называть те силы сопротивления, *на преодоление которых затрачивается дополнительная работа сверх той, которая необходима для преодоления полезного сопротивления.*

Например, у двигателя внутреннего сгорания движущей силой является давление расширяющегося газа на поршень. Силами сопротивления будут: сила трения в подшипниках и цилиндрах, сопротивление воздуха, сопротивление той рабочей машины, которая приводится в движение двигателем, и т. п. При этом сопротивление рабочей машины, которая приводится двигателем в движение, будет производственным сопротивлением, а силы трения, сопротивление воздуха и т. д. будут непроизводственными сопротивлениями.

Необходимо отметить некоторую условность в разделении сил на силы движущие и силы сопротивления. Например, силы тяжести звеньев при подъеме их центров тяжести оказываются силами сопротивления, а при опускании центров тяжести — силами движущими. Силы трения, возникающие в подшипниках, являются силами сопротивления, а силы трения, возникающие в точках контакта при обхвате ремнем шкива ременной передачи, являются силами движущими и т. д. Работа движущих сил называется иногда *затрачиваемой работой*, работа сил производственных сопротивлений — *полезной работой* и работа непроизводственных сопротивлений — *вредной работой*.

ГЛАВА X

СИЛЫ ДВИЖУЩИЕ И СИЛЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

§ 41. Диаграммы сил, работ и мощностей

1°. Силы движущие и силы производственных сопротивлений в зависимости от их физических и технологических характеристик могут быть функциями различных кинематических параметров: перемещений, скоростей, ускорений и времени. В теории механизмов мы предполагаем эти силы обычно известными и заданными в ана-

литической или графической форме. В последнем случае — это диаграммы сил, работ или мощностей.

Рассмотрим наиболее типичные диаграммы и связь этих диаграмм между собой.

На рис. 10.1 представлена диаграмма силы P, которая действует на ведущее звено механизма убирающегося шасси самолета при подъеме шасси. Сила P дана в функции пути s точки ее приложения. Имея диаграмму $P = P(s)$ (рис. 10.1), можно построить диаграмму $A = A(s)$ работы A

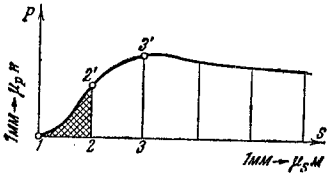


Рис. 10.1. Диаграмма зависимости силы от пути точки ее приложения.

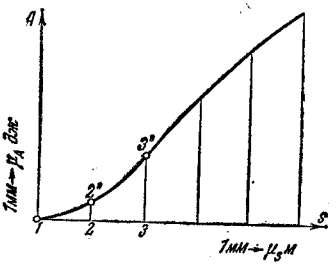


Рис. 10.2. Диаграмма зависимости работы силы от пути, построенная интегрированием диаграммы, изображенной на рис. 10.1.

в функции пути s (рис. 10.2). В самом деле, работа A_{1k} на интервале пути от начального положения 1 до любого последующего k равна

$$A_{1k} = \int_{s_1}^{s_k} P\,ds, \tag{10.1}$$

где s_1 и s_k — величины пути соответственно в положениях 1 и k.

Следовательно, построение диаграммы $A = A(s)$ (рис. 10.2) сводится к интегрированию функции $P = P(s)$ (рис. 10.1). Метод графического интегрирования был рассмотрен нами в § 18, 3°. Так, на интервале от s_1 до s_2 работа A_{12} равна

$$A_{12} = \int_{s_1}^{s_2} P\,ds = \mu_P \mu_s \text{ пл. } [12'2] = \mu_A (2 - 2''),$$

где пл. $[12'2]$ — площадь, ограниченная кривой 1, $2'$ и прямыми 1, 2 и 2, $2'$ и измеренная в квадратных миллиметрах (на рис. 10.1 площадь заштрихована), а μ_P и μ_s — масштабы сил и путей. Полученное значение A_{12} отложено в масштабе μ_A на ординате в точке 2 диаграммы $A = A(s)$ (рис. 10.2) в виде отрезка $(2 - 2'')$.

Работа A_{13} в интервале от s_1 до s_3 равна

$$A_{13} = \int_{s_1}^{s_3} P\,ds = \mu_P \mu_s \text{ пл. } [12'3'3] = \mu_A (3 - 3'')$$

(рис. 10.2) и т. д.

На рис. 10.3 дана диаграмма момента M, развиваемого на валу двигателя внутреннего сгорания, в функции угла φ поворота вала двигателя (диаграмма $M = M(\varphi)$). Для построения диаграммы работы $A = A(\varphi)$ можно воспользоваться равенством

$$A_{1k} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_k} M\, d\varphi. \qquad (10.2)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию функций $M = M(\varphi)$ (рис. 10.3). Диаграмма функции $A = A(\varphi)$ дана на рис. 10.4.

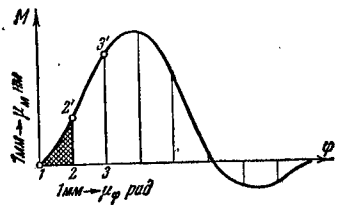


Рис. 10.3. Диаграмма зависимости момента на коренном валу поршневого двигателя от угла поворота коренного вала.

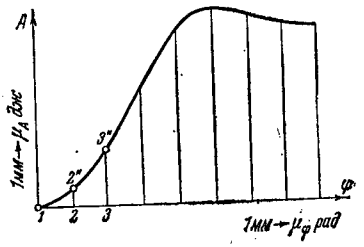


Рис. 10.4. Диаграмма зависимости работы поршневого двигателя от угла поворота коренного вала, построенная интегрированием диаграммы, изображенной на рис. 10.3.

2°. В рассмотренных примерах сила P и момент M были заданы в функции перемещений s и φ ведущих звеньев. В некоторых случаях эта сила или момент могут быть заданы в функции времени t. На рис. 10.5 показана диаграмма $P = P(t)$, характерная для многих рабочих машин. Например, приближенно по такому закону изме-

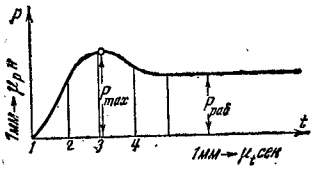


Рис. 10.5. Диаграмма зависимости силы от времени ее действия.

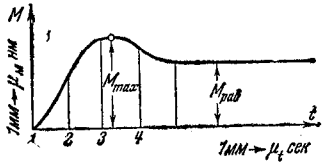


Рис. 10.6. Диаграмма зависимости момента силы от времени ее действия.

няется сила тяги многих сельскохозяйственных машин. Если рассматривать процесс с момента трогания с места, т. е. с момента начала перемещения машины по полю, то сила тяги вначале быстро растет до некоторого значения P_{max} (рис. 10.5), после чего уменьшается, приближаясь к некоторому постоянному значению $P_{раб}$, соответствующему рабочему времени движения машин.

На рис. 10.6 показана аналогичная диаграмма $M = M(t)$ изменения момента M центрифуги в функции времени t.

Для построения диаграмм работ по диаграммам $P = P(t)$, и $M = M(t)$ необходимо дополнительно знать зависимость перемещения s от времени t или угла поворота φ от времени t, т. е. зависимость $s = s(t)$ или $\varphi = \varphi(t)$. Эти зависимости могут быть, например, экспериментально определены одновременно с регистрацией силы P или момента M в функции времени t.

Имея диаграммы $P = P(t)$ и $s = s(t)$, можно исключить из них время t и построить диаграмму $P = P(s)$, после чего построение диаграммы $A = A(s)$ может быть сделано так, как это указано выше.

Аналогично, имея диаграммы $M = M(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, можно построить диаграмму $M = M(\varphi)$ и по ней диаграмму $A = A(\varphi)$.

3°. При экспериментальном исследовании машин в некоторых случаях записывается диаграмма мощности N, потребляемой машиной в функции времени t, т. е. диаграмма $N = N(t)$. Такую диаграмму мы получаем, например, при записи на самопишущем ваттметре мощности, потребляемой электродвигателем, приводящим в движение рабочую машину. По диаграмме $N = N(t)$ можно построить диаграмму зависимости работы A от времени t — диаграмму $A = A(t)$, так как работа A_{1k} на интервале времени от t_1 до t_k равна

$$A_{1k} = \int_{t_1}^{t_k} N\,dt. \tag{10.3}$$

Таким образом, построение диаграммы $A = A(t)$ сводится к интегрированию по времени функции $N = N(t)$. Если дополнительно построены диаграммы $s = s(t)$ или диаграмма $\varphi = \varphi(t)$, то, исключая время t из диаграмм $A = A(t)$ и $s = s(t)$ или из диаграмм $A = A(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, получаем диаграмму $A = A(s)$ или $A = A(\varphi)$. Диаграммы $P = P(s)$ или $M = M(\varphi)$ могут быть получены дифференцированием функций $A = A(s)$ или $A = A(\varphi)$ по пути s или углу φ, так как

$$P = \frac{dA}{ds} \quad \text{и} \quad M = \frac{dA}{d\varphi}. \tag{10.4}$$

§ 42. Механические характеристики машин

1°. При динамическом исследовании и расчете машин большое значение имеет вопрос о мощности, которая может быть развита машиной-двигателем при различных скоростях вращения ведомого вала, или о мощности, необходимой для приведения в движение рабочей машины при различных скоростях вращения ведомого вала. В большинстве машин момент на валу при различных скоро-

стях вращения вала не постоянен. Во всех машинах при изменении скорости вращения изменяются динамические давления в кинематических парах, и, следовательно, меняются силы трения в них. В рабочих машинах при изменении скорости вращения ведущего вала изменяются производственные сопротивления, сопротивления среды и т. д. Зависимость момента M, приложенного к ведомому валу машины-двигателя или к ведущему валу рабочей машины, от угловой скорости этих валов носит название *механической характеристики машины.*

Таким образом, механическими характеристиками являются зависимости вида $M = M(\omega)$ или $M = M(n)$, где n — число оборотов машины в минуту, равное

$$n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Так как мощность N, момент M и угловая скорость ω связаны соотношением

$$N = M\omega, \tag{10.5}$$

то, зная зависимость $M = M(\omega)$, можно определить зависимость $N = N(\omega)$. Зависимость $N = N(\omega)$ также может быть названа механической характеристикой машины.

2°. Рассмотрим типовые механические характеристики машин-двигателей и рабочих машин.

Для машин-двигателей характерным является уменьшение вращающего момента M с увеличением угловой скорости ω.

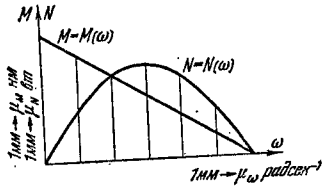


Рис. 10.7. Механические характеристики электродвигателя постоянного тока с параллельным возбуждением (зависимость момента ротора от угловой скорости и зависимость мощности от угловой скорости ротора).

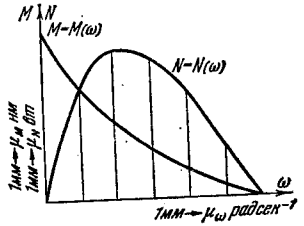


Рис. 10.8. Механические характеристики электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением (зависимость момента ротора от угловой скорости и зависимость мощности от угловой скорости).

На рис. 10.7 и 10.8 показаны механические характеристики электродвигателей постоянного тока. На рис. 10.7 момент $M = M(\omega)$ изменяется линейно, а на рис. 10.8 — по более сложному закону. Кривые $N = N(\omega)$ имеют параболический характер. На рис. 10.9 показана механическая характеристика водяной турбины. Все

механические характеристики вида $M = M(\omega)$ для машин-двигателей, показанные на рис. 10.7 — 10.9, являются нисходящими кривыми. На рис. 10.10 показаны механические характеристики асинхронного электродвигателя трехфазного тока. Эти характеристики имеют как нисходящий, так и восходящий участки кривой.

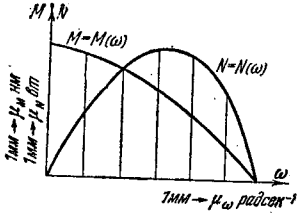


Рис. 10.9. Механические характеристики водяной турбины в виде зависимости момента на коренном валу от угловой скорости и в виде зависимости мощности от угловой скорости.

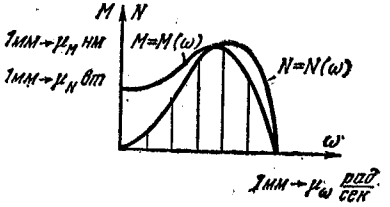


Рис. 10.10. Механические характеристики асинхронного электродвигателя трехфазного тока в виде зависимости момента на роторе от угловой скорости и в виде зависимости мощности от угловой скорости.

По механическим характеристикам вида $N = N(\omega)$ можно определить те угловые скорости, при которых двигатель развивает максимальную мощность N.

3°. На рис. 10.11 и 10.12 показаны механические характеристики рабочих машин — центробежного насоса и прядильной машины. Как видно из характеристик, у рабочих машин момент M возрастает с увеличением угловой скорости, что объясняется, как это указано

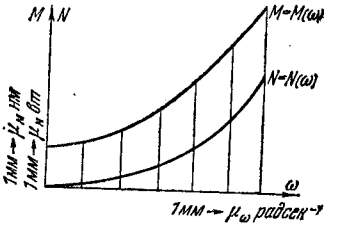


Рис. 10.11. Механические характеристики центробежного насоса в виде зависимости момента на роторе от угловой скорости и в виде зависимости мощности от угловой скорости.

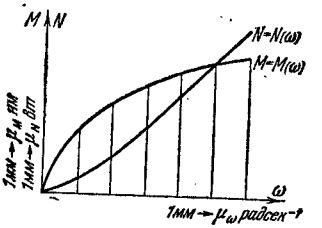


Рис. 10.12. Механические характеристики прядильной машины в виде зависимостей момента и мощности от угловой скорости.

выше, увеличением сил трения, сил сопротивлений обрабатываемых сред и объектов и т. д. Таким образом, все механические характеристики как вида $M = M(\omega)$, так и вида $N = N(\omega)$ для рабочих машин являются обычно восходящими кривыми. Более подробно вопрос о механических характеристиках рассматривается в специальных курсах при решении задач, связанных с наиболее выгодным подбором двигателей к рабочим машинам.

ГЛАВА XI
ТРЕНИЕ В МЕХАНИЗМАХ

§ 43. Виды трения

1°. Вопрос о природе трения до сих пор изучен недостаточно. Как показывают экспериментальные исследования, трение представляет собой сложный комплекс механических, физических и химических явлений, причем те или иные явления преобладают в зависимости от условий, при которых происходит процесс трения.

В нашу задачу не входит подробное изложение современных теорий трения и методов расчета трущихся элементов машин. Мы остановимся только на изложении элементарных сведений по теории трения, необходимых для решения простейших задач теории механизмов.

Обычно различают два основных вида трения: *трение сухое* (или трение несмазанных поверхностей) и *трение жидкостное* (или трение смазанных поверхностей). Кроме того, различают иногда еще два промежуточных вида трения: *полусухое трение* и *полужидкое трение*.

2°. Явление сухого трения может быть объяснено схематически следующим образом. Рассматривая под большим увеличением поверхности трущихся тел, можно обнаружить, что эти поверхности не абсолютно гладкие, а шероховатые и покрыты большим количеством неровностей. На рис. 11.1 схематически изображены трущиеся поверхности A и B. Если эти поверхности двигать друг относительно друга, то выступы одной поверхности будут задевать за выступы другой поверхности. Выступы будут деформироваться. Деформации эти могут быть упругими и неупругими в зависимости от величины нагрузки, приложенной к трущимся поверхностям, скорости относительного движения, различных физических свойств трущихся тел (упругость, характер поверхностей и т. д.).

Если в точках соприкасания приложить опорные реакции $\boldsymbol{R}$, направленные по нормали к элементарным площадкам соприкасания (рис. 11.1), и разложить их на составляющие, перпендикулярные и параллельные направлению движения, то нормальные составляющие $\boldsymbol{N}$ будут уравновешиваться заданными нормальными нагрузками, а касательные составляющие $\boldsymbol{Q}$ в сумме создадут некоторую силу сопротивления относительному перемещению поверхностей A и B. Эта сила сопротивления и называется *силой трения*.

Если выступающие неровности поверхностей A и B непосредственно соприкасаются друг с другом, то такой вид трения называется *сухим трением*. Если же между поверхностями A и B имеется промежуточный слой смазки (рис. 11.2) и поверхности A и B непосредственно не соприкасаются, то такой вид трения называется *жидкостным трением*. Поэтому при жидкостном трении силами трения являются силы сопротивления сдвигу отдельных слоев

смазки. Многие из различных явлений, которые имеют место при жидкостном трении, отсутствуют при сухом трении, и наоборот. *Полусухим трением* называют такой вид трения, при котором наиболее выступающие шероховатости не разделяются слоем смазки и приходят в непосредственное соприкосновение. Разница между полусухим и полужидкостным видами трения заключается главным образом в том, какой из основных видов трения преобладает.

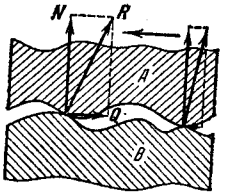


Рис. 11.1. Увеличенное изображение двух трущихся поверхностей.

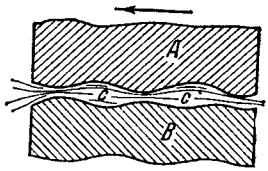


Рис. 11.2. Увеличенное изображение двух трущихся поверхностей, разделенных слоем смазки.

3°. Явления сухого и жидкостного трения по своей природе совершенно различны. Поэтому различны и методы учета сил трения в механизмах. Во фрикционных, ременных и других передачах наблюдается сухое трение, в смазанных подшипниках, подпятниках и т. д. — жидкостное трение, переходящее иногда в полусухое или даже сухое трение (периоды пуска машины). Поэтому необходимо изучать оба вида трения.

По видам относительного движения различают: *трение скольжения и трение качения* (*сопротивление перекатыванию*).

При трении скольжения одни и те же площадки соприкасающейся поверхности одного тела соприкасаются с различными площадками другого тела. При трении качения различные площадки соприкасающейся поверхности одного тела последовательно совпадают с соответствующими площадками другого тела.

§ 44. Трение скольжения несмазанных тел

1°. Рассмотрим основные закономерности, характеризующие явление трения скольжения несмазанных тел. Пусть тело, вес которого равен G, находится на наклонной плоскости (рис. 11.3), имеющей угол наклона α к горизонту. Если обозначить нормальную реакцию наклонной плоскости через N, а силу, возникающую вследствие трения и направленную параллельно плоскости, — через F_0, то для равновесия тела (влиянием опрокидывающего момента пренебрегаем) необходимо, чтобы удовлетворялись равенства

$$F_0 = G\sin\alpha, \qquad N = G\cos\alpha.$$

Из этих равенств следует:

$$\frac{F_0}{N} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{11.1}$$

Наблюдения показывают, что равновесие возможно, пока угол α не превышает некоторого предельного значения φ_0 и пока имеет место неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi_0.$$

Если обозначить $\operatorname{tg}\varphi_0$ через f_0, то можно написать:

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f_0.$$

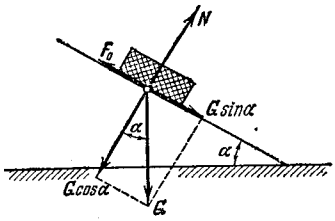


Рис. 11.3. К исследованию вопроса о трении на наклонной плоскости.

Число f_0 называется *коэффициентом трения покоя*, а угол φ_0 — *углом трения покоя*.

Из равенства (11.1) следует, что величина силы F_0 удовлетворяет неравенству

$$F_0 \leqslant f_0 N. \tag{11.2}$$

Трение, имеющее место при относительном покое соприкасающихся тел, называется *трением покоя* или *статическим трением*.

Физический смысл неравенства (11.2) можно пояснить следующим образом. Если представить себе, что на тело действует сдвигающая сила, величина которой постепенно увеличивается от нулевого значения, то эта сила будет вызывать постепенно увеличивающуюся деформацию сдвига трущихся поверхностей, но тело не будет находиться в движении. Когда величина сдвигающей силы достигнет значения, равного величине $f_0 N$, то в дальнейшем начнется уже движение одного тела относительно другого.

Неравенство (11.2) устанавливает только максимально возможную величину силы трения покоя, так как сила трения является слагающей пассивной реакции связи и ее сначала неизвестное направление определяется в дальнейшем только активными силами. Из этого неравенства также следует, что сила трения покоя имеет всегда такую величину, которая необходима для предотвращения скольжения тел одного относительно другого, но не может превзойти некоторого предельного значения. Если бы трение отсутствовало, то равновесие было бы возможно при вполне определенных значениях сил или координат, определяющих положение тела. При трении имеется целая область положений равновесия и бесконечное множество значений активных сил, при которых имеет место равновесие.

2°. Если соприкасающиеся тела находятся в относительном движении, то имеет место не трение покоя, а *трение движения* или *кинетическое трение*.

В отличие от силы трения покоя, сила трения движения производит определенную работу. В конце XVII века французским ученым Кулоном было опубликовано сочинение, в котором он на основе собственных наблюдений и исследований других ученых (главным образом Амонтона) сформулировал следующие основные положения:

а) сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению;

б) трение зависит от материалов и состояния трущихся поверхностей;

в) трение почти не зависит от величины относительной скорости трущихся тел;

г) трение не зависит от величины поверхностей соприкасания трущихся тел;

д) трение покоя больше трения движения;

е) трение возрастает с увеличением времени предварительного контакта соприкасающихся поверхностей.

Анализ положений, выдвинутых Амонтоном и Кулоном, сделанный последующими исследователями, показал, что эти положения могут считаться правильными только в применении к определенным трущимся материалам и только в некоторых пределах изменения скоростей и нагрузок. Так, например, на основе ряда экспериментов было установлено, что зависимость силы трения от нормального давления выражается следующим равенством:

$$F = A + f_c N. \tag{11.3}$$

В этом равенстве F есть сила трения, f_c — коэффициент трения движения, принимаемый для рассматриваемых тел постоянным, N — нормальное давление и A — некоторая постоянная трения, не зависящая от давления, а зависящая от способности соприкасающихся поверхностей к предварительной сцепленности. Таким образом, хотя зависимость силы трения от нормального давления линейна, закон изменения силы трения в функции нормального давления выражается в виде прямой, не проходящей через начало координат (рис. 11.4, *а*). Постоянная величина A характеризует как бы «цепкость» соприкасающихся поверхностей и показывает необходимость приложения некоторой дополнительной силы для преодоления предварительной сцепленности соприкасающихся поверхностей.

Разделив обе части равенства (11.3) на величину N, получим

$$\frac{F}{N} = \frac{A}{N} + f_c. \tag{11.4}$$

Если принять, согласно положению Амонтона — Кулона, что величина силы трения F прямо пропорциональна величине нормального давления, т. е. $F=fN$, $f=\frac{F}{N}$, то равенство (11.4) можно будет переписать так:

$$f=\frac{A}{N}+f_c. \tag{11.5}$$

Графическое изображение зависимости, выраженной соотношением (11.5), показано на рис. 11.4, *б*. График представляет собой

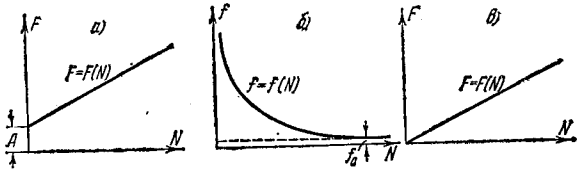


Рис. 11.4. К исследованию вопроса о трении: *а*) график линейной зависимости силы сухого трения от нормальной силы; *б*) график гиперболической зависимости коэффициента трения от нормальной силы; *в*) график зависимости силы трения от нормальной силы, применяемый в расчетной практике.

гиперболу. Таким образом, коэффициент трения, вообще говоря, зависит от нормального давления.

В большинстве технических расчетов обычно пользуются уравнением Амонтона — Кулона в простейшей его форме, пренебрегая цепкостью поверхности, и считают

$$F=fN, \tag{11.6}$$

где f — некоторое среднее значение коэффициента трения, определяемого из опыта и принимаемого постоянным. Графическое изображение соотношения (11.6) дано на рис. 11.4, *в*.

Опыты показали, что коэффициент трения f для большинства материалов убывает с увеличением относительной скорости, достигая при значительных скоростях некоторого постоянного значения. В отдельных случаях, как, например, при трении кожи о сталь и чугун, коэффициент трения возрастает с увеличением скорости.

Опыты также показывают, что коэффициент трения f изменяется при увеличении нагрузки на единицу площади соприкасания. Зависимость силы трения от относительной скорости и удельного давления легко объясняется тем, что величины и характер деформаций отдельных выступов соприкасающихся поверхностей являются различными в зависимости от относительной скорости и удельного давления.

3°. Опытное определение силы трения движения F и силы трения покоя F_0 может быть сделано, если приложить к телу движущую силу, параллельную плоскости соприкасания. Тело, как указывалось выше, выходит из состояния покоя, когда величина этой движущей силы достигает значения

$$P_0 = F_0 = f_0 N.$$

Чтобы тело продолжало двигаться с постоянной скоростью, необходимо приложить к нему движущую силу, несколько меньшую силы P_0 и равную по величине

$$P = fN.$$

Значение коэффициентов трения f и f_0 для наиболее употребительных сочетаний материалов соприкасающихся пар приводится во всех инженерных справочниках.

Рассмотрим далее вопрос о направлении сил трения для некоторых случаев движения соприкасающихся тел.

Пусть тело A движется со скоростью v_A относительно неподвижного тела B (рис. 11.5). Сила трения F_A, приложенная к телу A, имеет направление, противоположное скорости v_A. Если необходимо определить, в каком направлении действует сила F_B, приложенная к телу B, то надо рассмотреть движение тела B относительно тела A. Для этого сообщаем обоим телам скорость $-v_A$, противоположную скорости v_A. В этом случае тело A станет неподвижным, а тело B начнет двигаться относительно A со скоростью $-v_A$, и, следовательно, сила трения F_B будет направлена в сторону, противоположную скорости $-v_A$. Силы F_A и F_B равны между собой по величине и имеют противоположные направления. Таким образом, *сила трения всегда имеет направление, противоположное относительной скорости движения.*

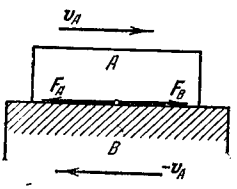


Рис. 11.5. К вопросу о связи между направлениями силы трения и относительной скорости движения трущихся тел.

Когда относительная скорость движения равна нулю, сила трения движения отсутствует, но тогда может появиться в зависимости от внешних действующих сил сила статического трения.

4°. Основные положения о силах сухого трения в уточненной форме могут быть сформулированы так:

а) коэффициент трения можно считать постоянным и силы трения прямо пропорциональными нормальным давлениям только в определенном диапазоне скоростей и нагрузок;

б) силы трения всегда направлены в сторону, противоположную относительным скоростям;

в) трение покоя в начальный момент движения в большинстве случаев несколько больше трения движения;

г) с увеличением скорости движения сила трения в большинстве случаев уменьшается, приближаясь к некоторому постоянному значению;

д) с возрастанием удельного давления сила трения в большинстве случаев увеличивается;

е) с увеличением времени предварительного контакта сила трения возрастает.

§ 45. Трение в поступательной кинематической паре

1°. Пусть ползун A нагружен некоторой силой $\boldsymbol{P}$ (рис. 11.6), представляющей собой результирующую всех действующих на ползун сил, и пусть коэффициенты трения покоя и движения соответственно равны f_0 и f. Рассмотрим, при каких условиях ползун A начнет двигаться по неподвижной направляющей B. Для этого перенесем точку приложения силы $\boldsymbol{P}$ в точку O и разложим эту силу на составляющие $\boldsymbol{P}'$ и $\boldsymbol{P}''$, из которых первая параллельна поверхности соприкасания, а вторая к ней перпендикулярна. Если обозначить угол, образуемый силой $\boldsymbol{P}$ с нормалью $n-n$, через φ_0, то величины составляющих $\boldsymbol{P}'$ и $\boldsymbol{P}''$ будут соответственно равны

$$P' = P\sin\varphi_0 \quad \text{и} \quad P'' = P\cos\varphi_0.$$

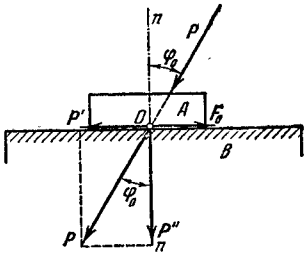


Рис. 11.6. К вопросу о трении в поступательной паре.

Под действием силы $\boldsymbol{P}''$ поверхности соприкасания сближаются друг с другом, а под влиянием силы $\boldsymbol{P}'$ ползун A стремится сдвинуться относительно направляющей B. Величина силы трения покоя F_0 по закону Амонтона — Кулона равна

$$F_0 = P''f_0 = Pf_0\cos\varphi_0.$$

Ползун сдвинется с места в тот момент, когда величина силы $\boldsymbol{P}'$ достигнет значения F_0 и будет иметь место равенство

$$P' = F_0.$$

Подставив вместо P' и F_0 их значения, можно написать:

$$P\sin\varphi_0 = Pf_0\cos\varphi_0;$$

отсюда

$$f_0 = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \operatorname{tg}\varphi_0.$$

Из этой формулы следует, что ползун A выходит из состояния покоя, когда тангенс угла φ_0 становится равным коэффициенту трения покоя f_0.

Угол φ_0, как было указано выше, называется *углом трения покоя*.

Величина силы трения движения F меньше величины силы трения покоя F_0. Следовательно, и угол *трения движения* φ меньше угла трения покоя φ_0, т. е. $\varphi < \varphi_0$.

Угол φ может быть определен из равенства $f = \operatorname{tg}\varphi$.

2°. Углы трения покоя и движения позволяют в очень простой геометрической форме представить взаимодействие сил, приложенных к ползуну, перемещающемуся с трением по направляющей. Рассмотрим условия равновесия ползуна *1*, движущегося с трением по направляющей *2* (рис. 11.7) с постоянной скоростью v. На ползун действуют силы T и Q. Сила T параллельна оси направляющей *2* и стремится перемещать ползун *1* вдоль оси направляющей *2*. Сила Q, перпендикулярная к оси направляющей, прижимает ползун *1* к направляющей *2*.

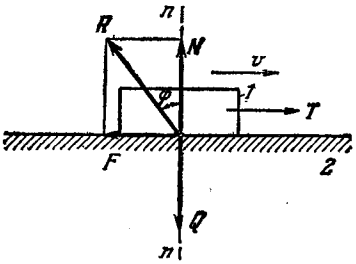


Рис 11.7. К определению равнодействующей реакции трущихся поверхностей во время движения одного тела по другому.

Воздействие направляющей *2* на ползун *1* сводится к действию на него нормальной реакции N и силы трения F. Пусть задан угол трения φ, тогда величина силы трения F будет равна

$$F = Nf. \tag{11.7}$$

Сложением сил F и N находим результирующую силу R, представляющую собой полную реакцию звена *2*, равную по величине

$$R = \sqrt{N^2 + F^2} = \sqrt{N^2 + N^2 \operatorname{tg}^2\varphi} = N\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = N\frac{1}{\cos\varphi},$$

откуда

$$R\cos\varphi = N.$$

Из этого равенства следует, что полная реакция R отклонена от нормали $n - n$ на угол трения φ.

Таким образом, для учета сил трения в поступательной паре надо отклонить реакцию R от направления нормали $n - n$ на угол трения φ в сторону, обратную скорости v движения ползуна относительно неподвижной направляющей.

Отложим от нормали $n - n$ (рис. 11.8) углы φ_0 и φ трения покоя и движения. Если тело находится в покое, то направление реакции R всегда располагается внутри угла, равного $2\varphi_0$ и большего угла 2φ.

3°. Покажем теперь, что если результирующая внешняя сила P, действующая на ползун *1*, приложена под углом α к нормали $n - n$, меньшим угла трения покоя φ_0, то неподвижный ползун *1*

не может быть приведен в движение (рис. 11.9). Разложим силу $\boldsymbol{P}$ на две силы: силу $\boldsymbol{P}'$ и силу $\boldsymbol{P}''$, равные

$$P' = P\sin\alpha \quad \text{и} \quad P'' = P\cos\alpha.$$

Величина силы трения покоя F_0 равна

$$F_0 = f_0 N = f_0 P'' = P\cos\alpha\,\operatorname{tg}\varphi_0.$$

Подставив в это равенство значение $P = \dfrac{P'}{\sin\alpha}$, получим

$$F_0 = P'\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Так как по условию $\varphi_0 > \alpha$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\alpha} > 1,$$

откуда

$$P' < F_0,$$

т. е. сила $\boldsymbol{P}'$, стремящаяся сдвинуть ползун *1* по направляющей *2*, меньше силы трения покоя $\boldsymbol{F}_0$. Таким образом, если $\alpha < \varphi_0$, то

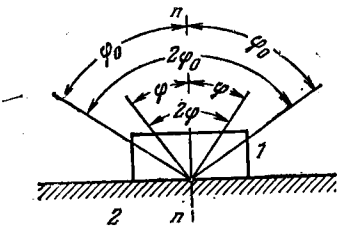


Рис. 11.8. Углы трения покоя и движения.

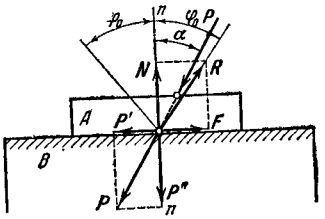


Рис. 11.9. К определению возможности движения ползуна по направляющей.

неподвижный ползун продолжает оставаться в покое вне зависимости от величины силы $\boldsymbol{P}$. Ползун *1* начнет перемещаться, если $\alpha \geqslant \varphi_0$. Отложим угол φ_0 вправо и влево от нормали $n - n$ (рис. 11.9). Тогда угол $2\varphi_0$ будет ограничивать некоторую область равновесия тела. Любая сила, приложенная в этой области под углом $\alpha < \varphi_0$, не сможет вывести ползун из состояния покоя.

Если давать силе $\boldsymbol{P}$ различные направления в пространстве, то область равновесия будет ограничена *конусом трения покоя*, который может быть образован вращением угла трения φ_0 вокруг нормали $n - n$ к соприкасающимся поверхностям (рис. 11.10).

Из аналогичных рассуждений можно установить, что если тело находится в движении, то направление приложенной к ползуну силы должно проходить по стороне угла или вне угла, равного 2φ,

или по образующей, или вне конуса, раствор которого равен также 2φ.

4°. Перейдем к рассмотрению возможных случаев движения ползуна в неподвижных направляющих. На рис. 11.11 показан кривошипно-ползунный механизм с симметричным относительно точки C ползуном *4*, двигающимся в неподвижных направляющих *1*. К ведущему кривошипу *2* приложен движущий момент $M_д$, а к ведомому ползуну *4* — сила $\boldsymbol{T}$ — результирующая сила сопротивления веса и силы инерции ползуна. Если пренебречь весом и силами инерции шатуна *3*, то ползун *4* будет находиться под действием движущей силы $\boldsymbol{P}$, направленной вдоль оси BC шатуна *3* и равной $P = M_д/h$,

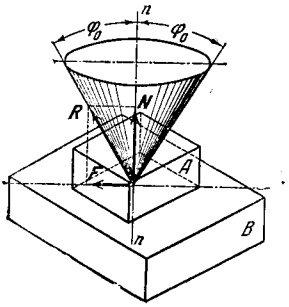


Рис. 11.10. Конус трения покоя.

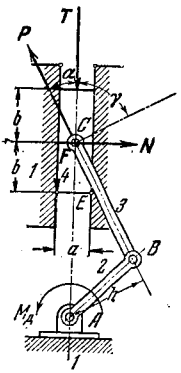


Рис. 11.11. Распределение сил в кривошипно-ползунном механизме.

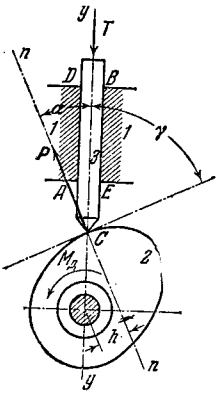


Рис. 11.12. Распределение сил в кулачковом механизме.

силы $\boldsymbol{T}$, реакции $\boldsymbol{N}$ со стороны направляющей *1* и силы трения $\boldsymbol{F}$ (рис. 11.11). Величина силы трения F, если пренебречь размерами a и b ползуна и считать, что ползун всей поверхностью прижимается к одной из сторон направляющих, будет равна

$$F = fN = fP\sin\alpha, \tag{11.8}$$

где N — реакция направляющей *1*, проходящей через точку C.

Аналогичную схему нагрузки имеем в кулачковом механизме (рис. 11.12), в котором к ползуну *3* приложены движущая сила $\boldsymbol{P}$, направленная по нормали n — n к профилю кулачка, сила $\boldsymbol{T}$, нормальные реакции $\boldsymbol{N}$ направляющих и сила трения $\boldsymbol{F}$. Силы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{F}$ на рис. 11.12 не показаны.

Если опорные поверхности направляющих *1* (рис. 11.13) считать упругими, то давление на эти поверхности будет распределяться по сложному закону, определяемому внешними нагрузками и упругими свойствами ползуна и поверхностей направляющих. Точное решение такой задачи представляет значительные трудности, а по-

тому примем некоторые упрощающие предположения. Так как между ползуном и направляющими всегда имеется производственный зазор, то под действием приложенных к ползуну сил ползун может или прижиматься к левой AD, или к правой EB поверхности направляющих, или перекашиваться так, как это схематично показано на рис. 11.13. В первом случае сила трения может быть определена по формуле (11.8). Во втором случае реакции опор надо считать приложенными в точках A и B или D и E (рис. 11.13).

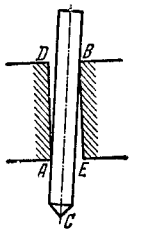


Рис. 11.13. Явление перекоса ползуна в направляющих.

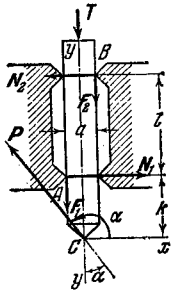


Рис. 11.14. Расчетная схема действия сил в случае перекоса ползуна в направляющих.

На рис. 11.14 показана расчетная схема действия сил на ползун в случае его перекоса и учета его размеров. Движущая сила $\boldsymbol{P}$ приложена к ползуну в точке C под углом α к оси Cx. Сила сопротивления $\boldsymbol{T}$ действует по оси Cy ползуна. В точках A и B к ползуну приложены реакции $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$, направленные параллельно оси Cx и силы трения $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Для решения задачи силового анализа сила $\boldsymbol{T}$ должна быть задана, определению подлежит необходимая для движения сила $\boldsymbol{P}$. Известно, что силы трения $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ соответственно равны

$$F_1 = fN_1 \quad \text{и} \quad F_2 = fN_2.$$

Составляем уравнения проекций сил на оси координат Cx и Cy и уравнение моментов всех сил относительно точки C:

$$\left.\begin{aligned} N_1 - N_2 + P\cos\alpha &= 0, \\ P\sin\alpha - fN_1 - fN_2 - T &= 0, \\ -N_1 k + N_2(l+k) + fN_1\frac{a}{2} - fN_2\frac{a}{2} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11.9}$$

где a — ширина ползуна, k — консольный вылет ползуна и l — расстояние между точками контакта ползуна с направляющими.

Совместно решая два первых уравнения системы (11.9) относительно N_1 и N_2, получаем

$$N_1 = \frac{P\sin\alpha - fP\cos\alpha - T}{2f}, \tag{11.10}$$

и

$$N_2 = \frac{P\sin\alpha + fP\cos\alpha - T}{2f}. \tag{11.11}$$

Подставляя выражения для N_1 и N_2 в третье уравнение системы (11.9) и решая полученное после этого равенство относительно P, окончательно имеем

$$P=\frac{T}{\sin\alpha+f\left(1+\frac{2k}{l}-\frac{fa}{l}\right)\cos\alpha}. \qquad (11.12)$$

Соотношение (11.12) устанавливает зависимость движущей силы $\boldsymbol{P}$ от силы сопротивления $\boldsymbol{T}$, приложенной к ползуну.

Вылет k ползуна имеет всегда конечную величину, поэтому в практических расчетах можно в соотношении (11.12) пренебречь членом $f(a/l)$, потому что он весьма мал по сравнению с членом $2k/l$, входящим в соотношение (11.12). Например, если принять коэффициент $f=0{,}1$, то при размерах, показанных на рис. 11.14, величина $f(a/l)$ приблизительно в 40 раз меньше величины $2k/l$. Следовательно, можно практически пользоваться соотношением

$$P=\frac{T}{\sin\alpha+f\left(1+\frac{2k}{l}\right)\cos\alpha}. \qquad (11.13)$$

Формула (11.13) показывает, что для уменьшения движущей силы $\boldsymbol{P}$ при одной и той же силе $\boldsymbol{T}$ сопротивления надо стремиться к тому, чтобы сила $\boldsymbol{P}$ как можно меньше отклонялась от направления Cy.

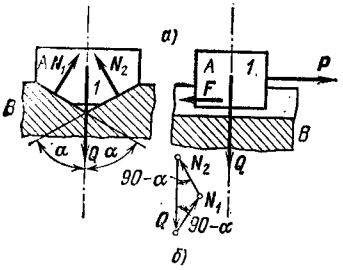


Рис. 11.15. Направляющая поступательной пары в виде желоба: *а*) схема; *б*) треугольник сил.

$5°$. В некоторых случаях поверхность соприкасания ползуна и направляющей в поперечном сечении имеет вид симметричного двугранного угла или желоба (рис. 11.15, *а*). Такой ползун называется клинчатым. К ползуну *1* приложена движущая сила $\boldsymbol{P}$, параллельная оси желоба, сила $\boldsymbol{Q}$, перпендикулярная к этой оси, нормальные реакции $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$, перпендикулярные к граням желоба, и две равные силы трения $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Сила трения $\boldsymbol{F}$, равная $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$, определяется по формуле

$$F=(N_1+N_2)f=2N_1f, \qquad (11.14)$$

так как $N_2=N_1$. Далее имеем

$$\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2+\boldsymbol{Q}=0. \qquad (11.15)$$

Строим треугольник сил (рис. 11.15, *б*) согласно уравнению (11.15). Из этого треугольника получаем

$$2N_1=\frac{Q}{\sin\alpha}.$$

Тогда формула (11.4) будет иметь вид

$$F = Q\frac{f}{\sin\alpha}, \tag{11.16}$$

или $F = f'Q$, где

$$f' = \frac{f}{\sin\alpha}. \tag{11.17}$$

Из формулы 11.17 видно, что величина f', условно называемая *коэффициентом трения клинового ползуна*, больше коэффициента трения плоского ползуна в направляющих.

В некоторых случаях находят применение круглые ползуны, движущиеся в желобе, имеющем форму круглого цилиндра (рис. 11.16).

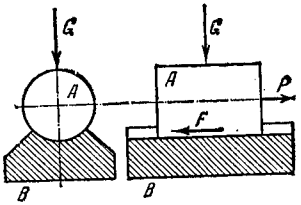


Рис. 11.16. Направляющая поступательной пары в виде круглого цилиндра.

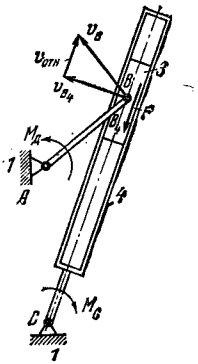


Рис. 11.17. Схема кулисного механизма.

Для таких ползунов рекомендуется определять силу трения F по формуле

$$F = f'G,$$

где

$$f' = 1{,}27f.$$

6°. Мы рассмотрели вопрос об определении сил трения при движении ползуна по неподвижным направляющим. В случае движения ползуна по подвижным направляющим, как это имеет место, например, в кулисном механизме (рис. 11.17), метод определения величины силы трения такой же, как и для движения ползуна по неподвижным направляющим, но для определения силы трения надо пользоваться правилом, изложенным в § 44, 3°, и направлять силу трения в сторону, обратную относительной скорости движения ползуна по подвижной направляющей.

На рис. 11.17 ползун *3* скользит в направляющих звена *4*. Из треугольника скоростей, построенного на схеме, видно направление относительной скорости $v_{отн}$. Сила трения F, приложенная к ползуну *3*, по направлению противоположна вектору $v_{отн}$.

§ 46. Трение в винтовой кинематической паре

1°. При рассмотрении трения в винтовой кинематической паре обычно делают целый ряд допущений. Во-первых, так как закон распределения давлений по винтовой резьбе неизвестен, то условно считают, что давление гайки на винт или, наоборот, винта на гайку приложено по средней линии резьбы. Средняя линия резьбы расположена на расстоянии r от оси винта (рис. 11.18, *а*). Во-вторых, предполагается, что действие сил в винтовой паре может быть сведено к действию сил на ползун, находящийся на наклонной плоскости. Развертывая среднюю линию винтовой резьбы на плоскость, сводят пространственную задачу к плоской, для чего поступают следующим образом (рис. 11.18, *б*).

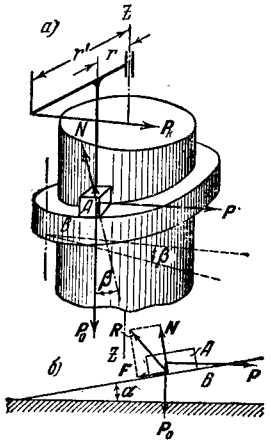


Рис. 11.18. Пространственная схема винтовой пары.

Пусть на гайку A действует некоторая сила $\boldsymbol{P}_0$ и некоторая пара сил в плоскости, перпендикулярной к оси винта (рис. 11.18, *б*). Момент $\boldsymbol{M}$ этой пары мы можем представить в виде момента силы $\boldsymbol{P}_k$, приложенной на расстоянии r' от оси $z - z$, т. е. $M = P_k r'$.

Чтобы гайка двигалась равномерно вдоль оси $z - z$ в направлении, противоположном направлению силы $\boldsymbol{P}_0$, необходимо, чтобы момент $\boldsymbol{M}$ равнялся моменту силы $\boldsymbol{P}$ относительно той же оси $z - z$.

Имеем

$$P_k r' = Pr.$$

В этом равенстве P есть сила, необходимая для равномерного перемещения тела A (гайки) по наклонной плоскости B (рис. 11.19, *а*), угол подъема α которой равняется углу подъема винтовой резьбы β (рис. 11.18). Строим план сил согласно уравнению равновесия сил, действующих на гайку A. Имеем

$$\boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F} = 0.$$

Из плана сил (рис. 11.19, *б*) следует, что величина силы $\boldsymbol{P}$ равна

$$P = P_0 \operatorname{tg}(\beta + \varphi),$$

следовательно,

$$P_k r' = P_0 r \operatorname{tg}(\beta + \varphi),$$

или

$$P_k = P_0 \frac{r}{r'} \operatorname{tg}(\beta + \varphi). \qquad (11.18)$$

Равенство (11.18) связывает величину силы P_0 с параметрами винтовой пары и углом трения φ. В случае движения гайки по нап-

равлению, совпадающему с направлением силы P_0, формула (11.18) принимает следующий вид:

$$P_k = P_0 \frac{r}{r'} \operatorname{tg}(\beta - \varphi). \tag{11.19}$$

При $\beta < \varphi$ двухзвенный механизм, состоящий из винта и гайки, является *самотормозящимся*, т. е. гайка под действием силы P_0 (рис. 11.18) не будет вращаться и скользить вдоль оси $z - z$.

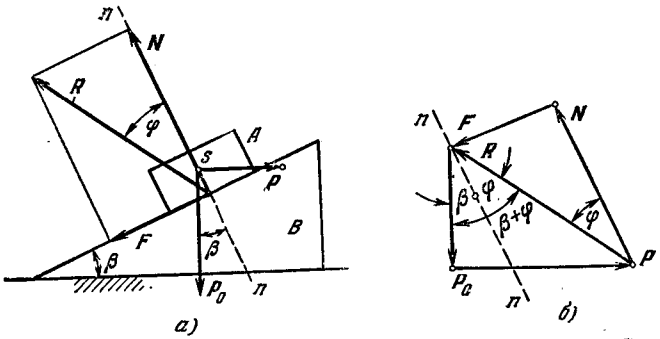


Рис. 11.19. К силовому расчету винтовой пары: *а*) распределение сил; *б*) план сил.

Из плана сил (рис. 11.19, *б*) имеем, что сила трения F равна

$$F = R \sin \varphi. \tag{11.20}$$

Так как реакция R равна $R = \frac{P}{\sin(\beta + \varphi)}$, то, подставляя это значение R в равенство (11.20), получаем

$$F = P \frac{\sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)} = P \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \beta + \cos \beta \operatorname{tg} \varphi} = P \frac{f}{\sin \beta + f \cos \beta}, \tag{11.21}$$

так как коэффициент трения $f = \operatorname{tg} \varphi$.

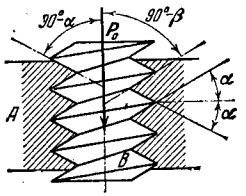


Рис. 11.20. Винтовая пара с треугольной резьбой.

2°. Выведенными соотношениями можно пользоваться при определении сил трения в винтовых парах с прямоугольной резьбой. При треугольной резьбе (рис. 11.20) весьма приближенно считают, что движение гайки аналогично движению клинового ползуна по желобу, у которого угол между вертикалью и стенками желоба равен $90° - \alpha$, где α — угол подъема резьбы. Тогда коэффициент трения f' выразится (см. формулу (11.17)) так:

$$f' = \frac{f}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{f}{\cos \alpha},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\alpha}.$$

Формула для определения силы трения F в винтовой паре с треугольной резьбой имеет следующий вид:

$$F = P\frac{f'}{\sin\beta + f'\cos\beta}. \qquad (11.22)$$

Так как коэффициент трения f' больше коэффициента трения f, то трение в винтовой паре с треугольной резьбой больше, чем в винтовой паре с резьбой прямоугольной.

§ 47. Трение во вращательной кинематической паре

1°. При рассмотрении явления сухого трения во вращательной кинематической паре пользуются различными гипотезами о законах распределения нагрузки на поверхностях элементов этой пары. С помощью этих гипотез могут быть выведены соответствующие формулы для определения сил трения и мощности, затрачиваемой на преодоление этих сил. Такие гипотезы были предложены некоторыми учеными (Рейе, Вейсбах и др.). Недостатком всех этих гипотез, так же как это имело место и для винтовой пары, является отсутствие достаточного экспериментального материала по вопросам распределения давлений во вращательных парах, работающих без смазки. Поэтому мы не будем останавливаться на всех различных формулах определения сил трения во вращательных парах, ограничившись выводом простейших из них, сделанным на основе элементарнейших предположений, схематизирующих явление.

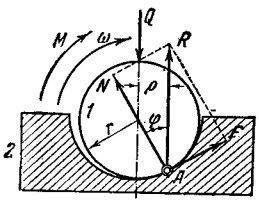


Рис. 11.21. Вал в подшипнике.

2°. Начнем с простейшего предположения, что вал *1*, располагающийся в подшипнике *2*, находится под действием радиальной силы $\boldsymbol{Q}$ и внешнего момента $\boldsymbol{M}$ и вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 11.21). Между валом *1* и подшипником *2* имеется радиальный зазор. Тогда при вращении вала в направлении, указанном стрелкой, при наличии трения между валом и подшипником его цапфа будет как бы «взбегать» на подшипник. Предположим, что вследствие «взбегания» цапфы на подшипник соприкасание элементов кинематической пары оказывается в точке A, где реакция $\boldsymbol{R}$ параллельна силе $\boldsymbol{Q}$. На основании ранее установленных положений полная реакция $\boldsymbol{R}$ должна быть отклонена от нормали на угол трения φ, и величина силы трения $\boldsymbol{F}$ получается равной

$$F = fN = fR\cos\varphi = fQ\cos\varphi, \qquad (11.23)$$

так как при равновесии цапфы $R = Q$.

Момент M, приложенный к цапфе, уравновешивается моментом трения $M_{тр}$ равным

$$M_{тр} = Fr = fQr\cos\varphi = Qr\sin\varphi = R\rho, \qquad (11.24)$$

где $\rho = r\sin\varphi$.

Если из центра вала O описать радиусом ρ окружность (рис. 11.22), то полная реакция R будет направлена по касательной к этой окружности. Круг радиуса ρ по аналогии с углом и конусом трения называется *кругом трения*.

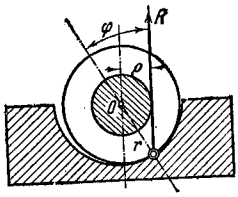


Рис. 11.22. Круг трения

Так как углы трения малы, то можно считать $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$. Вследствие этого радиус ρ круга трения будет приближенно равен $\rho = rf$. Момент трения $M_{тр}$ во вращательной паре обычно определяется по формуле

$$M_{тр} = Qrf', \qquad (11.25)$$

где r — есть радиус цилиндрического элемента пары, f' — коэффициент трения во вращательной паре и Q — результирующая нагрузка на цапфу.

Коэффициент трения f' определяется экспериментально для различных условий работы вращательных пар и изменяется в значительных пределах в зависимости от материалов и состояния трущихся поверхностей, от условий их работы и т. п. Для неприработавшихся цапф при сухом трении обычно f' принимают равным $f' = \frac{3}{2}f$, а для приработавшихся $f' = \frac{4}{3}f$, где f — коэффициент трения плоских соприкасающихся поверхностей из того же материала.

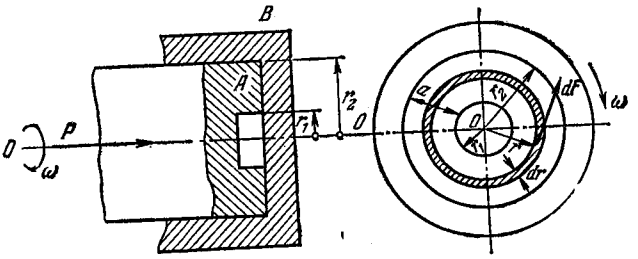


Рис. 11.23. Пята с подпятником.

3°. В некоторых случаях вращательные пары выполняют в виде пяты A и подпятника B (рис. 11.23), нагруженных осевой силой $\boldsymbol{P}$. В этом случае на поверхности соприкасания пяты и подпятника возникает сила *трения верчения*, подчиняющаяся закону Амонтона — Кулона. На рис. 11.23 показана кольцевая пята, имеющая в качестве опорной поверхности кольцо шириной a, равной $a =$

$= r_2 - r_1$. Если принять распределение давления равномерным по всей ширине кольца, то величина удельного давления p на единицу опорной площади будет равна

$$p = \frac{P}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}. \tag{11.26}$$

Выделим на пяте кольцо радиуса r, ширина которого равна бесконечно малой величине dr. Элементарный момент трения $dM_{тр}$ на этой площади равен

$$dM_{тр} = dF_{тр} r. \tag{11.27}$$

Элементарная сила трения $dF_{тр}$ равна

$$dF_{тр} = f\, dN = fp2\pi r\, dr, \tag{11.28}$$

где N — нормальное усилие на упомянутое кольцо, следовательно,

$$dM_{тр} = fp2\pi r^2\, dr. \tag{11.29}$$

Интегрируя равенство (11.29) в пределах от r_1 до r_2, получаем

$$M_{тр} = 2\pi fp \int_{r_1}^{r_2} r^2\, dr = \frac{2}{3}\pi fp\,(r_2^3 - r_1^3), \tag{11.30}$$

или, с учетом равенства (11.26),

$$M_{тр} = \frac{2}{3} Pf \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}. \tag{11.31}$$

Если пята не кольцевая, а сплошная, то $r_1 = 0$ и $r_2 = r$. Равенство (11.31) принимает вид

$$M_{тр} = \frac{2}{3} Pfr. \tag{11.32}$$

§ 48. Трение скольжения смазанных тел

1°. Выше были рассмотрены основные вопросы теории сухого трения в кинематических парах. В настоящем параграфе изложим некоторые основные сведения по теории жидкостного трения. Как указывалось выше, при жидкостном трении непосредственное соприкасание между двумя поверхностями, движущимися друг относительно друга, отсутствует, ибо между этими поверхностями имеется промежуточный смазочный слой жидкости. При относительном движении поверхностей наблюдается сдвиг отдельных слоев жидкости друг относительно друга. Таким образом, трение в жидкостном слое сводится к вязкому сдвигу.

Для удобства технических расчетов при изучении жидкостного трения вводят понятие коэффициента трения, но, в отличие от коэффициента сухого трения, *коэффициент жидкостного трения* f зави-

сит от скорости v движения слоев смазки друг относительно друга, от нагрузки p и от коэффициента вязкости η, т. е.

$$f = f(v,\ p,\ \eta),$$

Коэффициент вязкости η называется *динамическим коэффициентом вязкости* и имеет размерность $н \cdot сек/м^2$.

Исследуя плоскопараллельное движение вязкой жидкости, Ньютон нашел опытным путем, что величина силы T, необходимой для перемещения одного слоя жидкости параллельно другим, равна

$$T = F\eta \frac{dv}{dy}, \tag{11.33}$$

где T есть сила вязкого сдвига, F — площадь поверхности скольжения, η — динамический коэффициент вязкости, dv/dy — изменение скорости по высоте слоя (*градиент скорости*). Сила вязкого сдвига на единицу поверхности, или напряжение сдвига, равняется

$$\tau = \frac{T}{F} = \eta \frac{dv}{dy}. \tag{11.34}$$

2°. Основоположник теории трения смазанных тел Н. П. Петров в 1883 г. в работе «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» сформулировал основные требования, необходимые для жидкостного трения. Эти требования следующие:

а) смазочная жидкость, заполняющая зазор между скользящими поверхностями, должна удерживаться в зазоре;

б) в слое смазки при относительном скольжении смазываемых поверхностей должно возникать и поддерживаться внутреннее давление, уравновешивающее внешнюю нагрузку, прижимающую скользящие поверхности одну к другой;

в) смазочная жидкость должна полностью разделять скользящие поверхности;

г) слой жидкости, находящийся между скользящими поверхностями, должен иметь толщину не менее минимального предела, определяемого наиболее выступающими частями шероховатостей трущихся поверхностей.

Для выполнения первого требования необходимо, чтобы при смачивании смазочной жидкостью твердых тел силы сцепления между поверхностями твердых тел и прилегающим слоем жидкости были больше сил сцепления между частицами смазочной жидкости. Тогда при относительном движении смоченных твердых поверхностей возникает относительное скольжение слоев смазочной жидкости и не наблюдается скольжения жидкости относительно твердых тел.

Для удовлетворения второго требования необходимо, чтобы между скользящими поверхностями непрерывно нагнеталась смазочная жидкость и между этими поверхностями был обеспечен

клиновидный зазор. В применении к цапфе, лежащей в подшипнике (рис. 11.24), это достигается тем, что радиусы подшипника R и цапфы r не равны между собой. Благодаря этому между цапфой и подшипником создается клиновидный зазор $a - a$, в который при вращении цапфы нагнетается смазочная жидкость. При этом в смазочном слое возникают силы, уравновешивающие внешнюю нагрузку на цапфу и цапфа как бы «всплывает» на слое смазочной жидкости. При этом при увеличении угловой скорости центральная ось цапфы стремится совпасть с центральной осью подшипника.

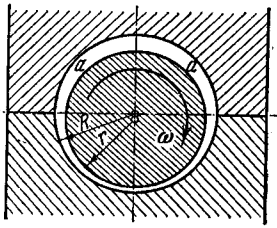


Рис. 11.24. Клиновидный зазор между цапфой и подшипником.

Третье и четвертое требования сводятся к обеспечению такой обработки поверхности цапфы и подшипника, при которой уменьшились бы возможные неровности и шероховатости на их поверхностях; кроме того, необходимо стремиться к возможно меньшим деформациям цапфы и производить самую тщательную очистку смазочной жидкости от посторонних твердых примесей.

Расчет кинематических пар при жидкостном трении подробно излагается в курсе деталей машин и в специальных курсах при изложении вопросов расчета и конструирования подшипников и направляющих.

§ 49. Трение качения и трение скольжения в высших парах

1°. При рассмотрении относительного движения элементов звеньев, входящих в высшие пары, мы встречаемся не только со скольжением одного элемента относительно другого, но и с качением элементов друг по другу. В том случае, когда элементы звеньев являются центроидами или аксоидами, имеет место чистое качение элементов без скольжения; в том же случае, когда элементы являются взаимоогибаемыми кривыми или поверхностями, имеет место качение и скольжение.

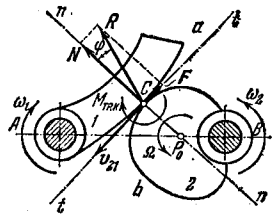


Рис. 11 25. К трению в высшей паре с взаимоогибаемыми кривыми.

Пусть элементы a и b (рис. 11.25) высшей кинематической пары плоского механизма представляют собой две взаимоогибаемые кривые. Проведем нормаль $n - n$ к профилям a и b. Эта нормаль проходит через точку C соприкосновения профилей и пересекает линию AB, соединяющую центры вращения A и B, в точке P_0. Точка P_0 будет мгновенным центром вращения в относительном движении A относительно зве-

на B. Скорость v_{21} звена 2 относительно звена 1 будет скоростью скольжения, направленной вдоль касательной $t-t$ и равной

$$v_{21}=|\Omega|(P_0C),$$

где Ω — мгновенная угловая скорость в относительном движении, абсолютная величина которой равна

$$|\Omega|=|\omega_1|+|\omega_2|.$$

Так же, как и в ранее рассмотренных задачах, полная реакция $\boldsymbol{R}$ звена 2 на звено 1 приложена к точке соприкасания C звеньев и отклонена от направления общей нормали на угол трения φ в сторону, противоположную вектору относительной скорости скольжения v_{21}. Величина силы трения F, приложенной к звену 1, определяется по формуле $F=fN$, где f — коэффициент трения скольжения.

Сопротивление, возникающее при перекатывании элементов пар друг по другу с угловой скоростью Ω может быть учтено введением *момента трения качения* $M_{\text{тр. к}}$ (рис. 11.25), направление которого противоположно угловой скорости Ω.

2°. Рассмотрим вопрос о том, как определяется момент трения качения $M_{\text{тр. к}}$. Физические явления, вызывающие трение качения, изучены мало, в технических расчетах пользуются в основном данными, полученными при экспериментах, проводимых над различными конкретными объектами: катками, колесами, роликами и шариками в подшипниках и т. д. Опыт показывает, что сопротивление перекатыванию зависит от упругих свойств материалов соприкасающихся тел, кривизны соприкасающихся поверхностей и величины прижимающейся силы. На преодоление сопротивлений при перекатывании тел тратится работа. Работа эта расходуется на деформацию поверхностей соприкасания. Пусть, например, имеется неподвижный цилиндр, лежащий на плоскости (рис. 11.26) и нагруженный некоторой силой $\boldsymbol{Q}$.

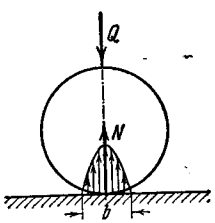


Рис. 11.26. Эпюра напряжений контактного сжатия на деформированной площадке цилиндра.

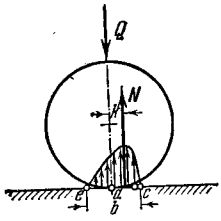


Рис. 11.27. Искаженная форма эпюры напряжений контактного сжатия, получающаяся при перекатывании цилиндра.

В зоне соприкасания цилиндра и плоскости возникает местная деформация контактного сжатия на площадке шириной b. Согласно положениям теории упругости напряжения приближенно могут быть приняты распределенными по эллиптическому закону. При этом кривая распределения напряжений симметрична и, следова-

тельно, линия действия равнодействующей N этих напряжений совпадает с линией действия силы Q.

Начнем перекатывать цилиндр (рис. 11.27). Тогда участок ac площадки контактного сжатия будет находиться в зоне нарастающих деформаций, а участок ae — в зоне исчезающих деформаций. Из-за внутреннего трения в материале имеет место несовпадение кривых нагрузки и разгрузки материала (явление упругого последствия или гистерезиса). Поэтому кривая напряжений в области нарастающих деформаций выше кривой в области исчезающих деформаций. Следовательно, распределение напряжений по площадке b оказывается несимметричным с максимумом, сдвинутым в сторону движения. Равнодействующая N напряжений смещена вправо от точки a на величину k. Величину k называют *плечом силы трения качения*. При качении необходимо преодолеть некоторый момент $M_{тр.к}$, называемый *моментом трения качения*, величина которого равна

$$M_{тр.к} = Qk. \tag{11.35}$$

Здесь коэффициентом пропорциональности является плечо трения качения k, которое называется также *коэффициентом трения качения*.

3°. Из формулы (11.35) следует, что коэффициент трения качения имеет *размерность длины*. Пусть под действием внешней силы P (рис. 11.28), приложенной в точке O, цилиндр A равномерно перекатывается без скольжения по плоскости B. Равномерное перекатывание цилиндра происходит под действием пары сил P и F_0, где F_0 — сила трения скольжения, приложенная в точке C и равная по величине силе P. Сила F_0 есть сила трения покоя, равная по величине $F_0 \leqslant Qf_0$, где f_0 — коэффициент трения покоя, или как его называют в этих случаях, — *коэффициент сцепления* цилиндра с плоскостью. Пара сил, под действием которой цилиндр A перекатывается по плоскости, имеет момент $M = Pr$, где r есть радиус цилиндра.

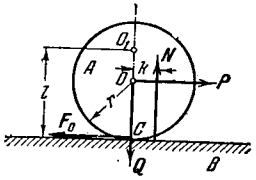


Рис. 11.28. Распределение сил, действующих на катящийся цилиндр.

При равномерном качении цилиндра этот момент M равняется по абсолютной величине моменту сопротивления перекатыванию, т. е. моменту трения качения

$$Pr = M_{тр.к} = Qk, \tag{11.36}$$

откуда

$$P = k\frac{Q}{r}. \tag{11.37}$$

Из равенства (11.37) следует, что величина силы P прямо пропорциональна коэффициенту трения качения и обратно пропорциональна радиусу цилиндра.

Коэффициент трения качения обычно измеряется в миллиметрах или сантиметрах. Таблицы этих коэффициентов приводят в инженерных справочниках.

4°. Под действием силы $\boldsymbol{P}$ (рис. 11.28) при одних условиях цилиндр может перекатываться, а при других — скользить. Рассмотрим, при каких условиях наблюдается трение качения и при каких трение скольжения. Пусть цилиндр A перемещается равномерно по плоскости B под действием силы $\boldsymbol{P}$, приложенной в центре O и параллельной плоскости B (рис. 11.28). Если нормальное давление в точке C соприкасания равно Q, то сопротивление трения скольжения F_0 равно

$$F_0 = f_0 Q,$$

и, следовательно, чтобы цилиндр равномерно скользил по плоскости, необходимо, чтобы величина силы $\boldsymbol{P}$ была равна

$$P = f_0 Q.$$

Условие равномерного качения определяется равенством

$$Pr = kQ.$$

Чтобы цилиндр *только скользил* по плоскости, необходимо, чтобы кроме условия $P = f_0 Q$ удовлетворялось еще условие

$$Pr < kQ,$$

откуда

$$Qf_0 r < kQ, \quad \text{или} \quad f_0 < \frac{k}{r}.$$

Таким образом, чтобы имело место *чистое скольжение*, необходимо, чтобы коэффициент трения скольжения был *меньше* отношения k/r.

Чтобы цилиндр *только перекатывался* по плоскости, необходимо, чтобы, кроме условия $Pr = kQ$, удовлетворялось еще условие

$$P < f_0 Q,$$

откуда

$$f_0 > \frac{k}{r}.$$

Таким образом, чтобы имело место *чистое качение*, необходимо, чтобы коэффициент трения скольжения был *больше* отношения k/r.

Если сила $\boldsymbol{P}$ приложена не в точке O цилиндра (рис. 11.28), а в какой-либо другой точке, например в точке O_1, находящейся на заданном расстоянии l от плоскости, необходимо во всех выведен-

ных соотношениях величину r заменять величиной l. Так как на практике работа сопротивлений перекатыванию почти всегда меньше работы сопротивлений трению скольжения, то в технике трением качения широко пользуются, применяя катки, шариковые и роликовые подшипники и т. д.

§ 50. Трение в передачах с фрикционными колесами

1°. Силы трения могут быть использованы для передачи движения отдельным звеньям механизмов. Рассмотрим вопрос о передаче движения круглыми фрикционными колесами (кинематика которых была нами рассмотрена в § 30). Передача движения с помощью круглых центроид *1* и *2* (рис. 11.29), представляющих собой окружности, невозможна, так как эти центроиды практически проскальзывают относительно друг друга. Передача движения станет возможной, если между центроидами *1* и *2* возникает сила сцепления F, достаточная для преодоления окружной силы P, равной по величине моменту M_c сопротивления на ведомом колесе, деленному на радиус r колеса.

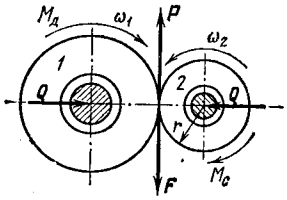


Рис. 11.29. Схема передачи с фрикционными колесами.

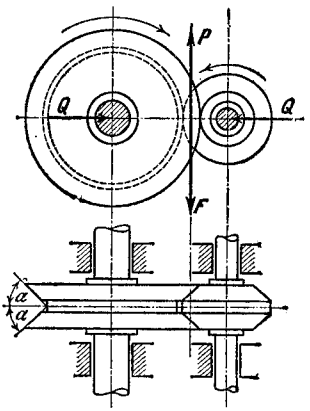


Рис. 11.30. Схема передачи с фрикционными клинчатыми колесами.

Для этого фрикционные колеса прижимаются друг к другу с некоторой силой Q, и предельное значение силы сцепления F оказывается равным

$$F = Qf, \tag{11.38}$$

где f — коэффициент трения.

Если $F > P$, то проскальзывания не будет. Отношение χ, равное $\chi = \frac{F}{P} = \frac{Qfr}{M_c}$, называется *коэффициентом запаса сцепления*. Сила нажима Q передается на опоры колеса и вызывает их износ. Поэтому стремятся получить необходимую силу P при небольшом нажимающем усилии Q. Для этого применяют иногда клинчатые фрикционные колеса (рис. 11.30). В этих колесах для определения

окружного усилия можно воспользоваться коэффициентом трения f' для клинчатых ползунов (см. § 45, формулу (11.17)). Имеем

$$f' = f/\sin\alpha,$$

где f есть коэффициент трения. Величина окружного усилия $\boldsymbol{P}$, которое может быть передано, определяется по формуле

$$P \leqslant F = \frac{Qf}{\sin\alpha}. \qquad (11.39)$$

Из этого соотношения следует, что для создания окружного усилия, по величине равного P, при клинчатых фрикционных колесах надо прижимать колеса с меньшей силой Q, чем при обыкновенных круглых фрикционных колесах.

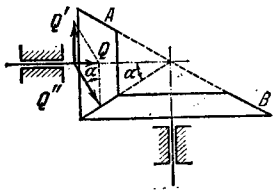


Рис. 11.31. Схема конической фрикционной передачи.

2°. При пересекающихся осях применяется коническая фрикционная передача (рис. 11.31). В этих передачах колесо A прижимается к колесу B силой $\boldsymbol{Q}$. Разлагая силу $\boldsymbol{Q}$ по направлению, перпендикулярному к оси подшипника, и по направлению, перпендикулярному к общей образующей конусов, получаем величину первой слагающей, равную $Q' = Q/\mathrm{tg}\,\alpha$ и величину второй — равную $Q'' = Q/\sin\alpha$. Величина окружного усилия $\boldsymbol{P}$ определяется по формуле

$$P \leqslant F = \frac{Qf}{\sin\alpha} = Qf'. \qquad (11.40)$$

Таким образом, окружное усилие в конических фрикционных колесах определяется по формуле для клинчатых фрикционных колес.

§ 51. Трение в передачах с гибкими звеньями

1°. Как было указано в § 34, широкое применение в некоторых отраслях техники имеют механизмы с гибкими звеньями в виде ремней, канатов и лент. Так же как и в механизмах с фрикционными колесами, в этих механизмах передача движения становится возможной при достаточной силе трения между гибким звеном и шкивом.

Формула, связывающая основные параметры передачи гибким звеном, была выведена в 1765 году Л. Эйлером. Пусть гибкое звено охватывает круглый шкив (рис. 11.32). Ту ветвь гибкого звена, которая при своем движении набегает на шкив, назовем *набегающей ветвью*, а ту ветвь, которая сбегает со шкива, — *сбегающей ветвью*. Дуга, на которой гибкое звено соприкасается со шкивом, называется *дугой обхвата*, а соответствующий ей центральный

угол — *углом обхвата*. Пусть натяжение набегающей ветви равно S_1, а сбегающей — S_2. Найдем связь между этими натяжениями. При этом примем следующие упрощения. Будем считать гибкое звено нерастяжимым и не оказывающим сопротивления изгибу при набегании и сбегании. Далее будем предполагать движение этого звена происходящим с постоянной скоростью v. Будем пренебрегать массой гибкого звена и его центробежной силой.

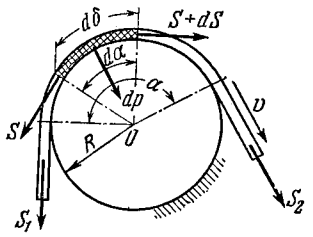


Рис. 11.32. К определению соотношения между натяжениями сбегающей и набегающей ветвей ремня.

Чтобы сообщить гибкому звену равномерное движение, необходимо преодолеть силу трения F. Таким образом, натяжение S_2 должно быть больше натяжения S_1 на величину силы F:

$$S_2 = S_1 + F, \tag{11.41}$$

откуда

$$F = S_2 - S_1. \tag{11.42}$$

Таким образом, при установившемся движении гибкого звена с постоянной скоростью разность натяжений сбегающей и набегающей ветвей этого звена равна силе трения между нитью и шкивом.

2°. Рассмотрим бесконечно малый элемент дуги обхвата $d\delta$, которому соответствует угол обхвата $d\alpha$ (рис. 11.32). Пусть натяжение гибкого звена в начале этого элемента есть S, тогда натяжение в конце элемента оказывается равным $S + dS$. Линии действия сил S и $S + dS$ касательны к шкиву и перпендикулярны к радиусам, проведенным из точки O в точки касания.

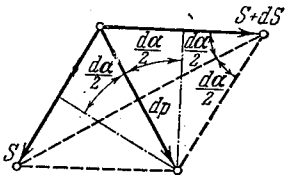


Рис. 11.33. Силовая схема к рис. 11.32.

Элементарная сила трения dF, согласно равенству (11.42), равна

$$dF = (S + dS) - S = dS. \tag{11.43}$$

С другой стороны, сила трения dF равна

$$dF = f\,dp, \tag{11.44}$$

где p — элементарная сила давления элемента $d\delta$ на шкив, а f — коэффициент трения. Из соотношений (11.43) и (11.44) следует

$$dS = f\,dp. \tag{11.45}$$

Величина силы dp может быть определена, если сложить по правилу параллелограмма силы S и $S + dS$. С точностью до величин второго порядка малости можно параллелограмм заменить ромбом (рис. 11.33) со сторонами, равными S.

Тогда dp будет равна

$$dp = 2S \sin\frac{d\alpha}{2} \approx 2S\,\frac{d\alpha}{2} \approx S\,d\alpha. \tag{11.46}$$

Подставляя полученное значение для силы $d\boldsymbol{p}$ в равенство (11.45), получаем

$$dS = fS\,d\alpha. \tag{11.47}$$

откуда

$$\frac{dS}{S} = f\,d\alpha. \tag{11.48}$$

Интегрируя левую и правую части равенства (11.48), имеем

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = \int_0^{\alpha} f\,d\alpha,$$

или

$$\ln \frac{S_2}{S_1} = f\alpha,$$

откуда получаем

$$S_2 = S_1 e^{f\alpha}, \tag{11.49}$$

где α — полный угол обхвата (рис. 11.32).

Формула (11.49) носит название *формулы Эйлера.*

Из формулы Эйлера следует, что сила натяжения S_2 возрастает с увеличением угла обхвата α и коэффициента трения f. При постоянном коэффициенте трения f увеличение угла обхвата α дает весьма быстрое увеличение силы S_2. Подставляя в равенство (11.42) значение S_2 из формулы (11.49), получаем для силы трения F выражение

$$F = S_1 (e^{f\alpha} - 1). \tag{11.50}$$

Сила F есть та наибольшая сила, которая может быть передана шкиву. Если окружное сопротивление на ведомом шкиве равно или меньше силы F, то гибкое звено заставит шкив вращаться. Если же окружное сопротивление больше силы F, то гибкое звено будет скользить по шкиву, не приводя его во вращение. Таким образом, натянутое усилиями S_1 и S_2 гибкое звено при $S_2 > S_1$ может передавать ведомому шкиву вращающий момент M, равный

$$M = (S_2 - S_1) R = S_1 R (e^{f\alpha} - 1), \tag{11.51}$$

где R — радиус шкива.

Формула Эйлера дает только приближенную связь между натяжениями ветвей гибкой нити. Поэтому в последние годы в советской технической литературе рекомендуются также и другие методы расчета, которые здесь не излагаются.

ГЛАВА XII
СИЛЫ ИНЕРЦИИ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 52. Определение сил инерции звеньев

1°. Как известно из теоретической механики, в общем случае *все силы инерции звена BC* (рис. 12.1), *совершающего плоскопараллельное движение и имеющего плоскость симметрии, параллельную плоскости движения, могут быть сведены к силе инерции* $P_и$, *приложенной в центре масс S звена, и к паре сил инерции, момент которой равен* $M_и$.

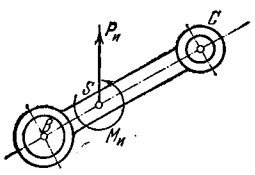


Рис. 12.1. Схема звена с приложенными к нему главным вектором и главным моментом сил инерции материальных точек звена.

Сила $P_и$ может быть определена по формуле

$$P_и = -ma_S. \qquad (12.1)$$

В формуле (12.1) $P_и$ есть вектор силы инерции звена BC, m — масса звена, измеряемая в килограммах, и a_S — вектор полного ускорения центра масс S звена, измеряемого в *м/сек²*.

Таким образом, для определения силы инерции $P_и$ звена плоского механизма надо знать его массу m и вектор полного ускорения a_S его центра масс S или проекции этого вектора на координатные оси. Из формулы (12.1) следует, что сила инерции $P_и$ имеет размерность *кг·м/сек²*, т. е. измеряется в *ньютонах*.

Вектор полного ускорения центра масс в механизмах удобно определять из построенного плана ускорений, применяя известное из кинематики свойство подобия. Пусть, например (рис. 12.2), дано звено BC и известны ускорения a_B и a_C его точек B и C, которые на плане ускорений (рис. 12.2) изображаются отрезками (πb) и (πc), построенными в масштабе μ_a. Чтобы определить полное ускорение a_S центра S масс звена, соединяем точки b и c прямой и делим этот отрезок в том же отношении, в котором точка S делит отрезок BC. Соединив полученную на плане ускорений точку s с точкой π, получим величину полного ускорения a_S точки S:

$$a_S = \mu_a (\pi s).$$

Сила инерции звена $P_и$ направлена противоположно полному ускорению a_S точки S и равна по величине

$$P_и = -ma_S.$$

2°. Момент $M_и$ пары сил инерции направлен противоположно угловому ускорению ε и может быть определен по формуле

$$M_и = -J_S\varepsilon, \qquad (12.2)$$

В формуле (12.2) J_S — момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс S и перпендикулярной к плоскости движения звена, а ε — угловое ускорение звена.

Таким образом, для определения момента $M_и$ пары сил инерции звена плоского механизма надо знать величину его момента инерции J_S, а также величину и направление углового ускорения ε этого звена.

Момент инерции J_S имеет размерность $кг \cdot м^2$. Угловое ускорение ε имеет размерность $рад/сек^2$. Следовательно, момент $M_и$ пары сил инерции имеет размерность $кг \cdot м^2/сек^2 = нм$, ибо $кгм/сек^2$ есть *ньютон*.

Величина углового ускорения ε, входящая в формулу (12.2), определяется из равенства

$$|\varepsilon| = \frac{a^t_{CB}}{l_{BC}}, \qquad (12.3)$$

где a^t_{CB} — тангенциальное ускорение (рис. 12.2, *б*) в относительном движении звена и l_{BC} — длина звена BC.

Таким образом, все силы инерции звена в общем случае могут быть сведены к главному вектору сил инерции $P_и$, приложенному в центре масс S звена, и главному моменту сил инерции $M_и$ (рис. 12.2, *а*).

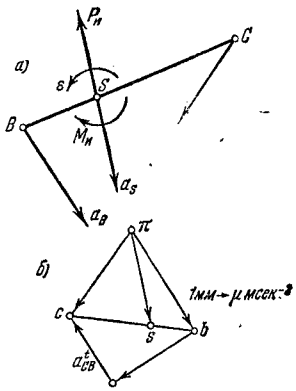


Рис. 12.2. Схема звена с планом ускорений: *а*) схема с показанным на ней главным вектором и главным моментом сил инерции материальных точек; *б*) план ускорений.

3°. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи движения звеньев механизма. Если звено движется поступательно с некоторым ускорением, то его сила инерции $P_и$ равна

$$P_и = -ma_S, \qquad (12.4)$$

где m есть масса звена, a_S — ускорение его центра масс S. Так как угловое ускорение ε звена при этом равно нулю, то момент пары сил инерции будет также равен нулю, и все силы инерции сведутся к одной результирующей силе $P_и$, приложенной в центре масс S звена и направленной противоположно ускорению a_S (рис. 12.3).

Если звено находится только во вращательном движении вокруг оси, проходящей через его центр масс, то ускорение a_S центра масс S этого звена равно нулю и сила инерции $P_и$ также равна нулю $P_и = 0$.

Если при этом угловое ускорение ε этого звена не равно нулю, то силы инерции составят пару с моментом $M_и$, равным

$$M_и = -J_S\varepsilon, \qquad (12.5)$$

Такой случай может иметь место, например, для неравномерно вращающихся деталей (шкивы, барабаны, роторы и т. д.), центр масс S которых находится на оси вращения (рис. 12.4). При равномерном вращении этих деталей результирующие сил инерции и моментов от сил инерции равны нулю (при плоской задаче).

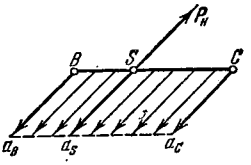


Рис. 12.3. Схема поступательно движущегося звена с показанными на ней ускорениями отдельных точек и главным вектором сил инерции материальных точек.

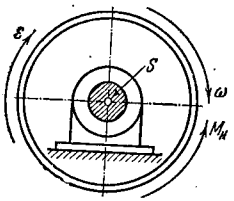


Рис. 12.4. Схема звена, центр масс которого расположен на оси вращения.

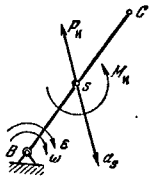


Рис. 12.5. Схема звена, вращающегося вокруг оси, не совпадающей с осью, на которой расположен центр масс.

В случае вращательного движения звена BC вокруг некоторой оси, например оси B, не проходящей через центр масс S (рис. 12.5), его силы инерции могут быть сведены к приложенной в центре масс S силе $\boldsymbol{P}_и$, направленной противоположно ускорению $\boldsymbol{a}_S$ и равной

$$\boldsymbol{P}_и = -m\boldsymbol{a}_S, \tag{12.6}$$

и к паре сил инерции с моментом $M_и$, равным

$$M_и = -J_S\varepsilon, \tag{12.7}$$

где J_S есть момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс S.

§ 53. Метод замещающих точек

1°. Вместо приведения всех сил инерции звена к силе и паре или к результирующей силе, приложенной в определенной точке этого звена, в некоторых случаях удобно заменить эти силы силами инерции масс, сосредоточенных соответствующим образом в выбранных точках, которые носят название *замещающих точек*. В этом случае определение сил инерции звеньев сводится к определению сил инерции масс, сосредоточенных в определенных точках, и, таким образом, отпадает необходимость определения пары сил инерции от углового ускорения звена.

Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять выбранные точки, чтобы полученная система была эквивалентна первоначаль-

ной. Пусть дано звено Q (рис. 12.6), имеющее плоскость симметрии, параллельную плоскости его движения (плоскости чертежа). Чтобы результирующая сила инерции масс, сосредоточенных в замещающих точках, равнялась силе инерции всего звена, необходимо, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1) сумма масс, сосредоточенных в замещающих точках, должна равняться массе всего звена;

2) общий центр масс, сосредоточенных в замещающих точках, должен совпадать с центром масс звена.

Удовлетворение этих условий дает так называемое *статическое размещение массы звена*. Чтобы результирующая пара сил инерции масс, сосредоточенных в замещающих точках, была эквивалентна паре сил инерции звена, необходимо, кроме соблюдения двух указанных условий, удовлетворить еще третьему условию, которое сводится к тому, чтобы сумма моментов инерции масс, сосредоточенных в замещающих точках, относительно оси, проходящей через общий центр масс, равнялась моменту инерции звена относительно этой же оси. Удовлетворение этого третьего условия вместе с двумя первыми дает так называемое *динамическое* размещение массы звена.

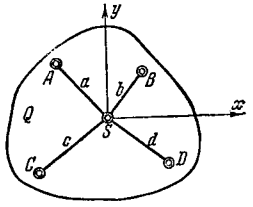


Рис. 12.6. К вопросу о размещении массы звена по четырем точкам.

Указанные условия статического и динамического размещений могут быть выражены следующими уравнениями:

$$\sum_1^n m_i = m; \tag{12.8}$$

$$\sum_1^n m_i x_i = 0; \tag{12.9}$$

$$\sum_1^n m_i y_i = 0; \tag{12.10}$$

$$\sum_i^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_S. \tag{12.11}$$

В уравнениях (12.8) — (12.11) m_i — масса, сосредоточенная в замещающей точке с индексом i, m — масса всего звена, x_i и y_i — координаты i-й точки относительно осей, проходящих через центр масс, и J_S — момент инерции звена относительно оси, проходящей через точку S и перпендикулярной к плоскости движения. Уравнения (12.8) — (12.10) соответствуют *статическому размещению* массы звена, а уравнение (12.11) вместе с уравнениями (12.8) — (12.10) соответствуют *динамическому размещению*.

2°. Рассмотрим вопрос о выборе замещающих точек для некоторых, наиболее часто встречающихся в технических расчетах случаев распределения масс звеньев. Пусть требуется разместить массу m звена, имеющего центр масс в точке S, по четырем произвольно выбранным точкам A, B, C и D (рис. 12.6).

Задаемся восемью координатами точек A, B, C и D, т. е. положениями этих четырех точек.

Далее, составляя уравнения вида (12.8) — (12.11), имеем:

$$\left.\begin{aligned} m_A + m_B + m_C + m_D &= m;\\ m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C + m_D x_D &= 0;\\ m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C + m_D y_D &= 0;\\ m_A a^2 + m_B b^2 + m_C c^2 + m_D d^2 &= J_S. \end{aligned}\right\} \qquad (12.12)$$

В уравнениях (12.12) m_A, m_B, m_C и m_D суть массы, сосредоточенные в точках A, B, C и D; x_A, y_A; x_B, y_B; x_C, y_C и x_D, y_D — координаты точек A, B, C и D в системе координатных осей x и y с началом в центре масс S, взятые с соответствующими знаками; J_S — момент инерции звена относительно оси, проходящей через точку S, и a, b, c и d — соответственно расстояния точек A, B, C и D от точки S. Массы m_A, m_B, m_C и m_D определятся решением системы уравнений (12.12).

3°. В механизмах при размещении масс звеньев удобнее всего выбирать в качестве тех точек, по которым размещаются массы,

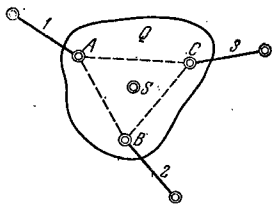


Рис. 12.7. К вопросу о размещении массы базисного звена трехповодковой группы.

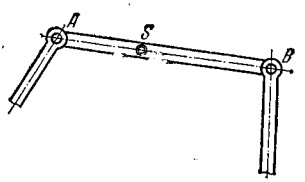


Рис. 12.8. К вопросу о размещении массы звена, центр масс которого расположен на прямой, проходящей через центры двух шарниров.

оси кинематических пар. Например, при размещении массы базисного звена группы III класса с тремя поводками (рис. 12.7) в качестве точек, по которым удобно разместить массу m звена Q, могут быть выбраны точки A, B и C присоединения поводков *1*, *2* и *3* и точка S — центр масс звена.

В звеньях, у которых центр масс S расположен на оси звена (рис. 12.8), удобно выбирать в качестве замещающих точек точки A и B присоединения соседних звеньев и центр масс S звена и т. п.

При решении ряда практических задач бывает достаточно ограничиться только статическим размещением масс и удовлетворить уравнениям

$$\sum_1^n m_i = m, \quad \sum_1^n m_i x_i = 0, \quad \sum_1^n m_i y_i = 0. \tag{12.13}$$

При размещении массы звена по двум точкам мы можем ограничиться уравнениями

$$m_A + m_B = m, \quad m_A a = m_B b. \tag{12.14}$$

Из этих уравнений следует, что точки A, B и S должны лежать на одной прямой и положения точек A и B могут быть выбраны на этой прямой произвольно. Величины масс m_A и m_B равны

$$m_A = m\frac{b}{a+b} \quad \text{и} \quad m_B = m\frac{a}{a+b}.$$

При статическом размещении массы звена по трем произвольным точкам (рис. 12.7) получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m_A + m_B + m_C &= m; \\ m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C &= 0; \\ m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.15}$$

Из этих уравнений следует, что точки A, B и C могут быть выбраны произвольно, и статическое размещение допускает размещение массы по трем произвольным точкам. Величины этих масс могут быть определены из системы уравнений (12.15).

При статическом размещении масс не удовлетворяется уравнение (12.11), так как момент инерции звена с размещенными массами вообще говоря не равен действительному моменту инерции J_S звена. Следовательно, при этом будет допускаться ошибка в моменте $M_и$ пары сил инерции. Этой ошибкой можно пренебречь, если угловое ускорение ε невелико.

Таким образом, при статическом размещении масс можно разместить их или *по трем произвольно выбранным точкам или по двум точкам, но лежащим на одной общей прямой, проходящей через центр масс.*

Пример. Определить силы инерции звеньев кривошипно-ползунного механизма (рис. 12.9, *а*), если ведущее звено *2* вращается с угловой скоростью ω_2 и угловым ускорением ε_2. Заданными являются массы m_2, m_3 и m_4 звеньев *2*, *3* и *4*, моменты инерции J_2 и J_3 звеньев *2* и *3* относительно осей, проходящих через центры масс S_2 и S_3. Центр масс S_4 ползуна *4* совпадает с точкой C.

Рассмотрим отдельно перманентное движение механизма, когда угловая скорость $\omega_2 = \text{const}$, а угловое ускорение $\varepsilon_2 = 0$. Строим

план скоростей механизма (рис. 12.9, *б*) и план ускорений (рис. 12.9, *в*).

Согласно уравнению (12.1) величины сил инерции $P^{\text{п}}_{\text{и}2}$ звеньев механизма в перманентном движении будут равны

$$P^{\text{п}}_{\text{и}2} = m_2 a^{\text{п}}_{S_2} = m_2 \mu_a (\pi s_2);$$
$$P^{\text{п}}_{\text{и}3} = m_3 a^{\text{п}}_{S_3} = m_3 \mu_a (\pi s_3);$$
$$P^{\text{п}}_{\text{и}4} = m_4 a^{\text{п}}_{C} = m_4 \mu_a (\pi c),$$

где $a^{\text{п}}_{S_2}$, $a^{\text{п}}_{S_3}$ и $a^{\text{п}}_{C}$ — ускорения точек S_2, S_3 и C механизма в его перманентном движении; (πs_2), (πs_3) и (πc) — отрезки (рис. 12.9, *б*),

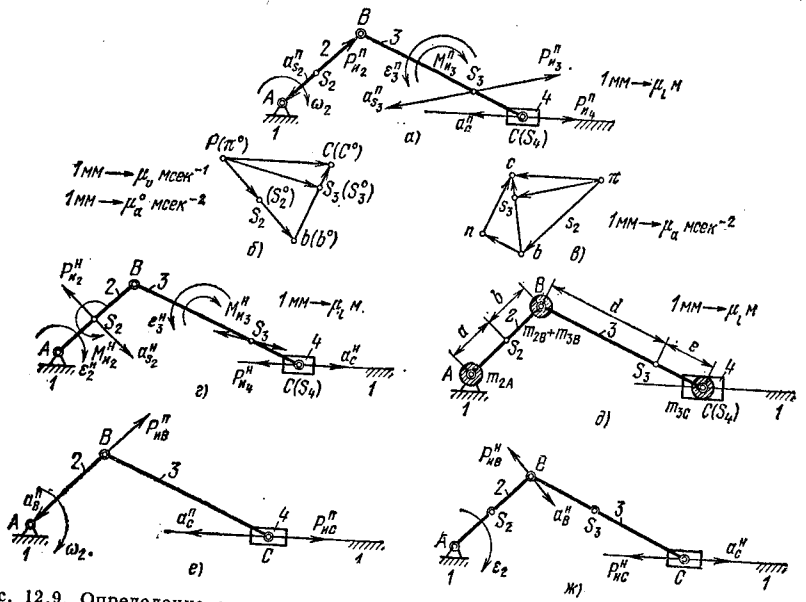


Рис. 12.9. Определение сил инерции кривошипно-ползунного механизма: *а*) схема нагружения силами инерции в перманентном движении механизма; *б*, *в*) планы скоростей и ускорений в перманентном движении; *г*) схема нагружения силами инерции в начальном движении механизма; *д*) схема статического размещения масс; *е*) схема нагружения силами инерции размещенных масс в перманентном движении механизма; *ж*) схема нагружения силами инерции размещенных масс в начальном движении механизма.

изображающие вышеуказанные ускорения и μ_a — масштаб плана ускорений.

Сила инерции $\boldsymbol{P}^{\text{п}}_{\text{и}2}$ приложена в центре масс S_2 звена *2* (рис. 12.9, *а*) и направлена в сторону, противоположную вектору ускорений $\boldsymbol{a}^{\text{п}}_{S_2}$ (рис. 12.9, *а*). Сила инерции $\boldsymbol{P}^{\text{п}}_{\text{и}3}$ (рис. 12.9, *а*) приложена в центре масс S_3 звена *3* и направлена в сторону, противоположную вектору ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{п}}_{S_3}$. Наконец, сила инерции $\boldsymbol{P}^{\text{п}}_{\text{и}4}$

(рис. 12.9, *а*) приложена в точке C (S_4) и направлена в сторону, противоположную направлению вектора ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{п}}_C$. Кроме силы $\boldsymbol{P}^{\text{п}}_{\text{из}}$, на звено *3* действует момент $M^{\text{п}}_{\text{из}}$ пары сил инерции в переманентном движении механизма (рис. 12.9, *а*), направленный в сторону, обратную направлению ускорения $\varepsilon^{\text{п}}_3$ звена *3* и равный, согласно уравнению (12.2), $M^{\text{п}}_{\text{из}} = J_{S_3}\varepsilon^{\text{п}}_3$, где J_{S_3} — момент инерции звена *3* относительно оси, проходящей через центр масс S_3 звена *3*.

Переходим к рассмотрению начального движения механизма, когда угловая скорость $\omega_2 = 0$ и звено *2* имеет только угловое ускорение ε_2.

Как это было показано в § 16, в начальном движении механизма нормальные и кориолисовы ускорения звеньев равны нулю. Следовательно, план ускорений механизма в этом движении будет подобен плану скоростей (рис. 12.9, *б*). Поэтому принимая за начало плана ускорений в начальном движении точку π^0, совпадающую с точкой p (рис. 12.9, *б*) обнаруживаем, что план ускорений в этом движении представится треугольником $\pi^0 b^0 c^0$.

Согласно уравнению (12.1) величины сил инерции звеньев механизма в начальном движении будут равны

$$P^{\text{н}}_{\text{и}2} = m_2 a^{\text{н}}_{S_2} = m_2 \mu^0_a (\pi^0 s^0_2);$$

$$P^{\text{н}}_{\text{и}3} = m_3 a^{\text{н}}_{S_3} = m_3 \mu^0_a (\pi^0 s^0_3);$$

$$P^{\text{н}}_{\text{и}4} = m_4 a^{\text{н}}_C = m_4 \mu^0_a (\pi^0 c^0),$$

где $a^{\text{н}}_{S_2}$, $a^{\text{н}}_{S_3}$ и $a^{\text{н}}_C$ — ускорения точек S_2, S_3, C механизма в его начальном движении; $(\pi^0 s^0_2)$, $(\pi^0 s^0_3)$, $(\pi^0 c^0)$ — отрезки на плане ускорений (рис. 12.9, *б*), изображающие вышеуказанные ускорения, и μ^0_a — масштаб плана ускорений. Сила инерции $\boldsymbol{P}^{\text{н}}_{\text{и}2}$ приложена в центре масс S_2 звена *2* (рис. 12.9, *г*) и направлена в сторону, противоположную направлению вектора ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{н}}_{S_2}$. Аналогично определяется направление силы инерции $\boldsymbol{P}^{\text{н}}_{\text{из}}$. Наконец, сила инерции $\boldsymbol{P}^{\text{н}}_{\text{и}4}$ (рис. 12.9, *г*) приложена в точке C (S_4) и направлена в сторону, противоположную направлению вектора ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{н}}_C$. Кроме того на звенья *2* и *3* (рис. 12.9, *г*) будут действовать моменты $M^{\text{н}}_{\text{и}2}$ и $M^{\text{н}}_{\text{из}}$ пар сил инерции, направленные в стороны, противоположные направлению угловых ускорений $\varepsilon^{\text{н}}_2$ и $\varepsilon^{\text{н}}_3$ звеньев *2* и *3*. В начальном движении эти моменты, согласно уравнению (12.2), будут равны

$$M^{\text{н}}_{\text{и}2} = -J_{S_2}\varepsilon^{\text{н}}_2,$$

$$M^{\text{н}}_{\text{из}} = -J_{S_3}\varepsilon^{\text{н}}_3,$$

где J_{S_2} — момент инерции звена 2 относительно оси, проходящей через центр масс S_2 звена 2.

Приближенное решение задачи об определении сил инерции механизма может быть сделано с применением метода замещающих точек (см. § 53). Произведем статическое размещение масс звеньев 2 и 3 (рис. 12.9, д). Массу m_2 звена 2 разместим в точках A и B. Тогда массы m_{2A} и m_{2B}, сосредоточенные в этих точках, будут, согласно уравнениям (12.14), равны

$$m_{2A} = m_2 \frac{b}{a+b} \quad \text{и} \quad m_{2B} = m_2 \frac{a}{a+b}.$$

Массу m_3 звена 3 разместим в точках B и C. Тогда массы m_{3B} и m_{3C}, сосредоточенные в этих точках, будут соответственно равны

$$m_{3B} = m_3 \frac{e}{d+e} \quad \text{и} \quad m_{3C} = m_3 \frac{d}{d+e}.$$

Таким образом, в точке A будет сосредоточена масса m_{2A}, в точке B — масса $m_B = m_{2B} + m_{3B}$, в точке C — масса $m_C = m_4 + m_{3C}$ (рис. 12.9, д), где m_4 — масса ползуна 4. Так как ускорение точки A равно нулю, то массу m_{2A} исключаем из дальнейшего рассмотрения, и поэтому получаем кривошипно-ползунный механизм, у которого в точках B и C точечно сосредоточены массы m_B и m_C. В случае перманентного движения механизма (рис. 12.9, е) все силы инерции звеньев можно свести к двум: силе $\boldsymbol{P}^{\text{п}}_{\text{и}B}$ и силе $\boldsymbol{P}^{\text{п}}_{\text{и}C}$. Сила $\boldsymbol{P}^{\text{п}}_{\text{и}B}$ приложена в точке B, направлена в сторону, противоположную направлению вектора ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{п}}_B$, и равна $P^{\text{п}}_{\text{и}B} = (m_{2B} + m_{3B})\, a^{\text{п}}_B = m_B a^{\text{п}}_B = m_B \mu_a\, (\pi b)$, где (πb) — отрезок, взятый из плана ускорений (рис. 12.9, в). Сила $\boldsymbol{P}^{\text{п}}_{\text{и}C}$ приложена в точке C, направлена в сторону, противоположную вектору ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{п}}_C$, и равна

$$P^{\text{п}}_{\text{и}C} = (m_4 + m_{3C})\, a^{\text{п}}_C = m_C a^{\text{п}}_C = m_C \mu_a\, (\pi c),$$

где (πc) — отрезок, взятый из плана ускорений (рис. 12.9, в).

Аналогично для начального движения механизма (рис. 12.9, ж) силы инерции его звеньев сводятся к двум: силе $\boldsymbol{P}^{\text{н}}_{\text{и}B}$ и силе $\boldsymbol{P}^{\text{н}}_{\text{и}C}$. Сила $\boldsymbol{P}^{\text{н}}_{\text{и}B}$ приложена в точке B, направлена в сторону, противоположную вектору ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{н}}_B$, и равна

$$P^{\text{н}}_{\text{и}B} = (m_{2B} + m_{3B})\, a^{\text{н}}_B = m_B a^{\text{н}}_B = m_B \mu^0_a\, (\pi^0 b^0),$$

где $(\pi^0 b^0)$ — отрезок, взятый из плана ускорений (рис. 12.9, б).

Сила $\boldsymbol{P}^{\text{н}}_{\text{и}C}$ приложена в точке C, направлена в сторону, противоположную вектору ускорения $\boldsymbol{a}^{\text{н}}_B$, и равна

$$P^{\text{н}}_{\text{и}B} = (m_4 + m_{3C})\, a^{\text{н}}_C = m_C a^{\text{н}}_C = m_C \mu^0_a\, (\pi^0 c^0),$$

где $(\pi^0 c^0)$ — отрезок, взятый из плана ускорений (рис. 12.9, *б*). Результирующие сил инерции звеньев механизма, когда звено 2 вращается с угловой скоростью ω_2 и имеет угловое ускорение ε_2, определятся сложением векторов сил инерции в перманентном и начальном движениях.

ГЛАВА XIII

КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 54. Условия статической определимости кинематических цепей

1°. При решении задач силового расчета механизмов закон движения ведущего звена предполагается заданным; точно так же предполагаются известными массы и моменты инерции звеньев механизма. Таким образом, всегда могут быть определены те силы инерции, которые необходимы для решения задач силового расчета с помощью уравнений равновесия.

Вопрос о силовом расчете механизмов начнем с рассмотрения вопроса об определении реакций в кинематических парах.

В тех случаях, когда при расчете в число заданных сил не входят силы инерции звеньев, расчет называется *статическим*. Если

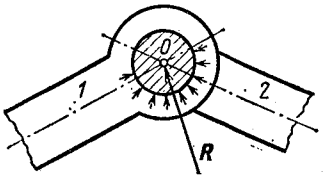


Рис. 13.1. Изображение вращательной кинематической пары со схематизированными конструктивными формами.

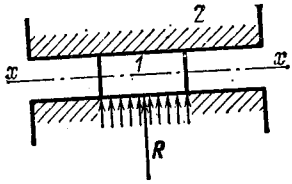


Рис. 13.2. Схема поступательной кинематической пары.

в число заданных сил при расчете входят и силы инерции звеньев, то такой расчет называется *кинетостатическим*. Так как метод расчета для обоих случаев является общим, то в дальнейшем будем предполагать, что в число заданных сил входят и силы инерции, известные нам по величине, направлению и точкам приложения. Далее в первом приближении будем вести расчет без *учета сил трения*.

2°. Рассмотрим, как будут направлены реакции в различных кинематических парах плоских механизмов. Во вращательной паре V класса результирующая сила реакции $\boldsymbol{R}$ проходит через центр шарнира (рис. 13.1). Величина и направление этой реакции

неизвестны, так как они зависят от величины и направления заданных сил, приложенных к звеньям пары. В поступательной паре V класса (рис. 13.2) реакция перпендикулярна к оси движения $x - x$ этой пары. Она известна по направлению, но неизвестны ее точка приложения и величина. Наконец, в высшей паре IV класса (рис. 13.3) реакция $\boldsymbol{R}$ приложена в точке C соприкасания звеньев *1* и *2* и направлена по общей нормали $N - N$, проведенной к соприкасающимся профилям звеньев *1* и *2* в точке C, т. е. для высшей пары IV класса нам известны направление реакции и ее точка приложения.

Таким образом, для определения реакции в каждой из низших пар V класса необходимо найти по две неизвестных, а для определения реакции в высшей паре IV класса — только одну неизвестную величину.

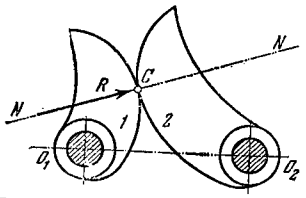


Рис. 13.3. Изображение высшей кинематической пары со схематизированными конструктивными формами.

3°. Обозначим число подвижных звеньев плоской кинематической цепи через n, число пар V класса — через p_5 и число пар IV класса — через p_4.

Составим теперь условие статической определимости плоских кинематических цепей. Так как для каждого звена, имеющего плоскопараллельное движение, можно написать три уравнения равновесия, то число уравнений, которое мы сможем составить при n звеньях, будет равно $3n$. Число неизвестных, которое необходимо определить, будет равно для пар V класса $2p_5$ и для пар IV класса p_4.

Следовательно, кинематическая цепь будет статически определима, если удовлетворяется условие

$$3n = 2p_5 + p_4. \tag{13.1}$$

Как это было показано в § 10, любой механизм с парами IV и V классов может быть заменен механизмом с парами только V класса. Поэтому для рассмотрения общего случая достаточно ограничиться рассмотрением групп, звенья которых входят только в пары V класса.

Группы с парами IV класса могут быть приведены к группам с парами V класса и могут быть рассчитаны теми же методами. Тогда формула (13.1) может быть написана так:

$$3n = 2p_5, \tag{13.2}$$

откуда

$$p_5 = \frac{3}{2} n.$$

Таким образом, числа звеньев и пар связаны между собой соотношением (13.2). Так как числа n и p_5 должны быть целыми, то этому соотношению удовлетворяют следующие ряды чисел звеньев и кинематических пар (таблица 4):

Таблица 4

№ п/п	n	p_5
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
.	.	.
.	.	.

Как нам уже известно, первое сочетание звеньев и пар, т. е. два звена, входящих в три пары, представляет собой группу II класса; второе сочетание из четырех звеньев, входящих в шесть пар, представляет собой группу III класса, третьего порядка или группу IV класса второго порядка и т. д. Таким образом, статически определимыми являются кинематические цепи, названные выше группами (см. § 12). Поэтому наиболее рациональным является рассмотрение методов определения реакций в кинематических парах по тем классам и порядкам групп, которые были нами установлены выше.

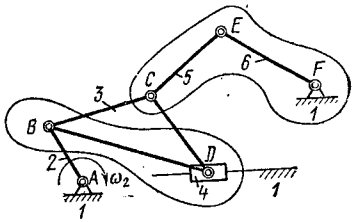


Рис. 13.4. Схема шестизвенного рычажного механизма, образованного присоединением двух групп II класса.

4°. Как это было показано в § 13, при кинематическом исследовании механизма порядок исследования совпадает с порядком присоединения групп, т. е. вначале рассматривается группа, присоединяемая к ведущему или ведущим звеньям и стойке. Потом рассматривается следующая группа и т. д. Порядок силового расчета является *обратным* порядку кинематического исследования, т. е. *силовой расчет начинается с последней, считая от ведущего звена, присоединенной группы и кончается силовым расчетом ведущего звена*. Пусть, например, подлежит силовому расчету шестизвенный механизм, показанный на рис. 13.4. К ведущему звену и стойке *1* присоединена первая группа II класса, состоящая из звеньев *3* и *4*. Далее к звену *3* и стойке *1* присоединена вторая

группа II класса, состоящая из звеньев *5* и *6*. Силовой расчет следует начинать с последней по присоединению группы, т. е. с группы, состоящей из звеньев *5* и *6*, после этого следует перейти к группе, состоящей из звеньев *3* и *4* и, наконец, к силовому расчету ведущего звена *2*.

§ 55. Определение реакций в кинематических парах групп

1°. Рассмотрим задачу об определении реакций в кинематических парах группы II класса *BCD* первого вида (рис. 13.5). Введем следующие обозначения: звено, к которому присоединяется звено *BC*, обозначим номером *1*, звено *BC* — номером *2*, звено *CD* — номером *3* и звено, к которому присоединяется звено *CD*, номером *4*. Силу, действующую на звено с номером *l* со стороны звена с номером *k*, будем обозначать через $\boldsymbol{P}_{kl}$, момент силы $\boldsymbol{P}_k$ относительно точки *A* — через $M_A(P_k)$, расстояние между двумя какими-либо точками *A* и *B* звена *AB* — через l_{AB} и, наконец, момент пары,

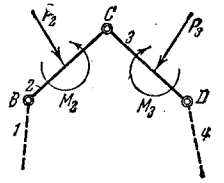


Рис. 13.5. Кинематическая схема двухповодковой группы первого вида.

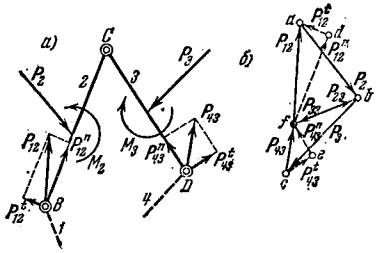


Рис. 13.6. Двухповодковая группа первого вида: *а*) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; *б*) план сил.

действующий на звено с номером *k*, — через M_k. Пусть рассматриваемая группа II класса (рис. 13.5) нагружена силами $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$ и парами с моментами M_2 и M_3. Требуется определить реакции в кинематических парах. Эта задача может быть решена методом *планов сил*. В точках *B* и *D* прикладываем неизвестные пока реакции $\boldsymbol{P}_{12}$ и $\boldsymbol{P}_{43}$ и, составляя уравнение равновесия группы *BCD* (рис. 13,6, *а*), приравниваем нулю сумму всех сил, действующих на группу. Имеем

$$\boldsymbol{P}_{12}+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_{43}=0. \tag{13.3}$$

В этом уравнении нам известны силы $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$ по величине, направлению и точкам приложения. Реакции же $\boldsymbol{P}_{12}$ и $\boldsymbol{P}_{43}$ нам известны только по точкам приложения. Для определения величин этих реакций раскладываем каждую из них на две составляющие: одну, действующую по оси звена, и другую, перпендикулярную

к оси звена. Будем обозначать первую составляющую реакции индексом n, а вторую составляющую — индексом t. Тогда получаем

$$\boldsymbol{P}_{12}=\boldsymbol{P}_{12}^{n}+\boldsymbol{P}_{12}^{t}, \qquad \boldsymbol{P}_{43}=\boldsymbol{P}_{43}^{n}+\boldsymbol{P}_{43}^{t}. \tag{13.4}$$

Величины $\boldsymbol{P}_{12}^{t}$ и $\boldsymbol{P}_{43}^{t}$ могут быть получены из уравнений равновесия, написанных для каждого из звеньев *2* и *3* в отдельности. Для этого рассмотрим сначала равновесие звена *2*. Звено *2* находится под действием следующих сил и пар: силы $\boldsymbol{P}_2$, составляющих $\boldsymbol{P}_{12}^{n}$ и $\boldsymbol{P}_{12}^{t}$ реакции $\boldsymbol{P}_{12}$, реакции $\boldsymbol{P}_{32}$ и пары с моментом M_2. Составим уравнение моментов всех сил относительно точки C. Так как знак силы $\boldsymbol{P}_{12}^{t}$ нам неизвестен, то при составлении уравнения моментов задаемся произвольным знаком момента этой силы. Если после определения величины этой силы она окажется *отрицательной*, то ее истинное направление должно быть выбрано *противоположным*.

Имеем

$$M_C(\boldsymbol{P}_2)+M_C(\boldsymbol{P}_{12}^{t})+M_2=0.$$

В это уравнение моменты от сил $\boldsymbol{P}_{12}^{n}$ и $\boldsymbol{P}_{32}$ не входят, так как линии действия этих сил проходят через точку C, т. е.

$$M_C(\boldsymbol{P}_{12}^{n})=0 \quad \text{и} \quad M_C(\boldsymbol{P}_{32})=0.$$

Далее, так как $M_C(P_{12}^{t}) = P_{12}^{t}l_{BC}$, то составленное уравнение моментов принимает вид

$$M_C(\boldsymbol{P}_2)+P_{12}^{t}l_{BC}+M_2=0,$$

откуда и определяем величину силы P_{12}^{t}. Имеем

$$P_{12}^{t}=-\left[\frac{M_C(P_2)}{l_{BC}}+\frac{M_2}{l_{BC}}\right]. \tag{13.5}$$

Знак силы $\boldsymbol{P}_{12}^{t}$, как было указано выше, определяется знаком правой части формулы (13.5). Аналогично из условия равновесия звена *3* получаем уравнение моментов

$$M_C(\boldsymbol{P}_3)+M_C(\boldsymbol{P}_{43}^{t})+M_3=0,$$

так как $M_C(\boldsymbol{P}_{43}^{n}) = 0$ и $M_C(\boldsymbol{P}_{23}) = 0$. Для величины силы $\boldsymbol{P}_{43}^{t}$ теперь получаем

$$P_{43}^{t}=-\left[\frac{M_C(P_3)}{l_{DC}}+\frac{M_3}{l_{DC}}\right]. \tag{13.6}$$

Знак силы $\boldsymbol{P}_{43}^{t}$ определяется знаком правой части уравнения (13.6). Полученные выражения для $\boldsymbol{P}_{12}^{t}$ и $\boldsymbol{P}_{43}^{t}$ подставляем в уравнение (13.3):

$$\boldsymbol{P}_{12}^{n}+\boldsymbol{P}_{12}^{t}+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3+\boldsymbol{P}_{43}^{t}+\boldsymbol{P}_{43}^{n}=0.$$

В этом уравнении нам неизвестны только величины составляющих P^n_{12} и P^n_{43} реакций P_{12} и P_{43}, направленных по осям звеньев BC и DC. Величины этих составляющих могут быть определены построением плана сил. Для этого из произвольной точки a (рис. 13.6, $б$) откладываем в произвольном масштабе μ_P силу P_2 и прибавляем к ней силу P_3. Прикладываем к ним в том же масштабе соответственно силы P^t_{12} и P^t_{43}, которые определены по формулам (13.5) и (13.6). Эти силы перпендикулярны к осям звеньев BC и CD. Далее из точки d проводим прямую, параллельную оси BC, а из точки e — прямую, параллельную оси звена DC. Точка f пересечения этих двух прямых и определяет величины составляющих P^n_{12} и P^n_{43}.

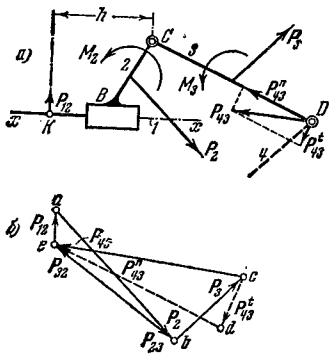


Рис. 13.7. Двухповодковая группа второго вида: $а$) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; $б$) план сил.

Полные реакции P_{12} и P_{43} могут быть получены как результирующие согласно уравнениям (13.4). Первая реакция на плане сил получается, если соединить точки f и a, вторая — если соединить точки c и f. Для определения реакции P_{23} звена 2 на звено 3 напишем уравнение равновесия сил, действующих на звено 3:

$$P_{43} + P_3 + P_{23} = 0.$$

Единственной неизвестной по величине и направлению силой в этом уравнении является сила P_{23}. Величина ее может быть получена построением по уравнению силового треугольника. Для этого на плане сил на рис. 13.6, $б$ достаточно соединить точки f и b. Очевидно, что реакция P_{32}, равная по величине реакции P_{23}, но противоположная ей по знаку, может быть определена из уравнения равновесия звена 2

$$P_{12} + P_2 + P_{32} = 0.$$

На плане сил вектор P_{32} представлен тем же отрезком (bf), что и реакция P_{23}, но имеет противоположное направление.

2°. Переходим к рассмотрению группы II класса второго вида (рис. 13.7, $а$). Эта группа имеет одну крайнюю поступательную пару B с осью x — x. На группу действуют внешние силы P_2 и P_3 и пары с моментом M_2 и M_3. Реакции в кинематических парах могут быть определены методом планов сил. Векторное уравнение равновесия всех сил, действующих на группу (рис. 13.7, $а$), имеет следующий вид:

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \qquad (13.7)$$

Реакция P_{12} известна по направлению: она перпендикулярна к оси x — x направляющей. Точка приложения этой реакции и ее

величина неизвестны. Для реакции P_{43} известна точка приложения, но неизвестны ни ее величина, ни направление.

Разлагаем реакцию P_{43} на две составляющие: одну P^n_{43}, направленную по оси звена DC, и вторую P^t_{43}, перпендикулярную к этой оси. Получаем: $P_{43} = P^n_{43} + P^t_{43}$.

Величина силы P^t_{43} определяется из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 3, относительно точки C. Имеем

$$M_C(P_3) + M_C(P^t_{43}) + M_3 = 0,$$

так как $M_C(P_{23}) = 0$ и $M_C(P^n_{43}) = 0$. Момент $M_C(P^t_{43})$ равен

$$M_C(P^t_{43}) = P^t_{43} l_{DC},$$

и, следовательно,

$$P^t_{43} = -\left[\frac{M_C(P_3)}{l_{DC}} + \frac{M_3}{l_{DC}}\right].$$

Знак силы P^t_{43} определяется знаком суммы моментов $M_C(P_3)$ и M_3. Подставляя полученное выражение для P_{43} в уравнение (13.7), имеем

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P^t_{43} + P^n_{43} = 0.$$

В этом уравнении неизвестны только величины сил P_{12} и P^n_{43}. Величины этих сил определяются построением плана сил. Из произвольно выбранной точки a (рис. 13.7, *б*) в выбранном масштабе μ_P откладываем силу P_2. В том же масштабе прибавляем к ней силу P_3. Из точки c откладываем известную силу P^t_{43}, перпендикулярную к оси звена DC, а из точки d проводим прямую в направлении силы P^n_{43}, параллельную оси звена DC. Далее из точки a проводим прямую в направлении силы P_{12}, перпендикулярную к оси $x - x$. Точка e пересечения этих прямых определяет величины реакций P_{43} и P_{12}. Реакция P_{43} представлена в масштабе μ_P отрезком (ce), а реакция P_{12} — отрезком (ea). Из уравнений равновесия звеньев 2 и 3

$$P_{12} + P_2 + P_{32} = 0;$$

$$P_{43} + P_3 + P_{23} = 0$$

определяем реакции P_{32} и P_{23}. Реакция P_{23} или равная ей по величине и противоположная по направлению реакция P_{32} представлены отрезком (be).

Остается еще определить точку K приложения силы P_{12} на оси $x - x$ направляющей (рис. 13.7, *а*). Для этого составляем уравнение моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки C. Имеем

$$M_C(P_2) + M_C(P_{12}) + M_2 = 0,$$

так как $M_C(P_{32}) = 0$.

В этом уравнении неизвестным является только плечо h силы $\boldsymbol{P}_{12}$ (рис. 13.7, *а*), которое из этого уравнения может быть определено. Имеем

$$h = -\left[\frac{M_C(P_2)}{P_{12}} + \frac{M_2}{P_{12}}\right]. \qquad (13.8)$$

Положение плеча h относительно точки C определяется знаком правой части уравнения (13.8).

Так как ползун B (рис. 13.7, *а*) показан схематично, то точка K приложения силы $\boldsymbol{P}_{12}$ оказалась лежащей как бы вне ползуна. В действительности же сила $\boldsymbol{P}_{12}$ приложена в зоне контакта звеньев *1* и *2*. Если, например, ползун конструктивно выполнен в виде параллелепипеда, длина которого равна l, скользящего в направляющих $q - q$ (рис. 13.8), то можно перенести точку приложения силы $\boldsymbol{P}_{12}$ в точку O — центр ползуна (рис. 13.8). Тогда на ползун будет действовать сила $\boldsymbol{P}_{12}$ и пара сил с моментом M, равным по величине

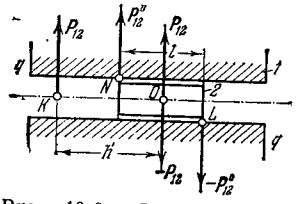


Рис. 13.8. Распределение реакций на направляющей поступательной пары.

$$M = P_{12}h',$$

где h' — расстояние от точки K до точки O.

Пару сил с моментом M удобнее представить в виде двух сил $\boldsymbol{P}^0_{12}$ и $-\boldsymbol{P}^0_{12}$, приложенных в крайних точках N и L ползуна (рис. 13.8). Величина силы $\boldsymbol{P}^0_{12}$ равна

$$P^0_{12} = \frac{M}{l} = P_{12}\frac{h'}{l}.$$

Таким образом, ползун будет находиться под действием силы $\boldsymbol{P}_{12}$, приложенной в точке O, и сил $\boldsymbol{P}^0_{12}$ и $-\boldsymbol{P}^0_{12}$, приложенных в точках N и L и создающих пару с моментом M.

Выше мы рассмотрели подробно вопрос об определении реакций в кинематических парах групп II класса первого и второго вида. Решение этой задачи для групп II класса других видов будет аналогичным.

3°. При определении реакций в кинематических парах групп III класса наиболее удобным является метод планов сил с использованием особых точек. К изложению этого метода мы и переходим.

Пусть задана трехповодковая группа III класса *BCDEFG* (13.9, *а*), на которую действуют заданные силы $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$ и $\boldsymbol{P}_5$ и пары сил с моментами M_2, M_3, M_4 и M_5. Требуется определить реакции в кинематических парах B, C, D, E, F, G.

Разложим реакции $\boldsymbol{P}_{12}$, $\boldsymbol{P}_{63}$ и $\boldsymbol{P}_{74}$ на две составляющие: вдоль оси соответствующего поводка и по направлению, к нему перпендикулярному, и поставим своей задачей определение этих составляющих. Имеем

$$\boldsymbol{P}_{12} = \boldsymbol{P}^n_{12} + \boldsymbol{P}^t_{12}, \quad \boldsymbol{P}_{63} = \boldsymbol{P}^n_{63} + \boldsymbol{P}^t_{63}, \quad \boldsymbol{P}_{74} = \boldsymbol{P}^n_{74} + \boldsymbol{P}^t_{74}. \qquad (13.9)$$

Напишем уравнение моментов всех сил, действующих на звено 2, относительно точки E. Имеем

$$M_2+M_E(\boldsymbol{P}_{12}^t)+M_E(\boldsymbol{P}_2)=0. \qquad (13.10)$$

Из уравнения (13.10) определяем величину реакции P_{12}^t:

$$P_{12}^t=-\frac{M_E(\boldsymbol{P}_2)+M_2}{l_{BE}}.$$

Далее из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 3, относительно точки F определяем величину реакции P_{63}^t. Имеем

$$M_3+M_F(\boldsymbol{P}_{63}^t)+M_F(\boldsymbol{P}_3)=0, \qquad (13.11)$$

отсюда

$$P_{63}^t=-\frac{M_F(\boldsymbol{P}_3)+M_3}{l_{CF}}.$$

Из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 4, относительно точки G определяем величину реакции P_{74}^t. Имеем

$$M_4+M_G(\boldsymbol{P}_{74}^t)+M_G(\boldsymbol{P}_4)=0; \qquad (13.12)$$

отсюда

$$P_{74}^t=-\frac{M_G(\boldsymbol{P}_4)+M_4}{l_{DG}}.$$

Далее находим на пересечении осей каких-либо двух поводков особую точку S и составляем уравнение моментов всех сил,

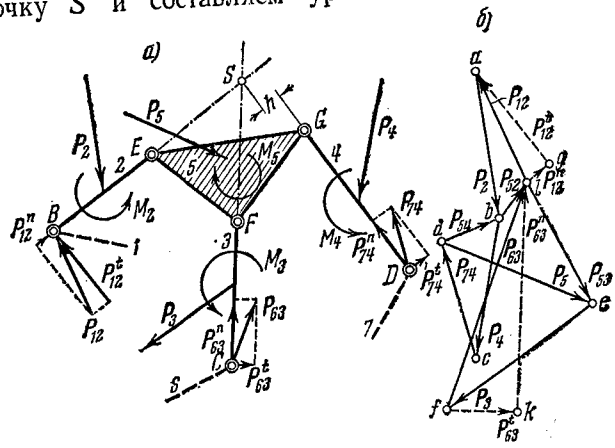


Рис. 13.9. Трехповодковая группа III класса: *а*) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; *б*) план сил.

действующих на группу, относительно точки S. Имеем

$$M_S(\boldsymbol{P}_2)+M_S(\boldsymbol{P}_3)+M_S(\boldsymbol{P}_4)+M_S(\boldsymbol{P}_5)+M_S(\boldsymbol{P}_{12}^t)+$$
$$+M_S(\boldsymbol{P}_{63}^t)+M_S(\boldsymbol{P}_{74}^t)+M_S(\boldsymbol{P}_{74}^n)+M_2+M_3+M_4+M_5=0. \qquad (13.13)$$

В этом уравнении моменты сил $\boldsymbol{P}^n_{12}$ и $\boldsymbol{P}^n_{63}$ относительно точки S равны нулю. Реакции $\boldsymbol{P}^t_{12}$, $\boldsymbol{P}^t_{63}$ и $\boldsymbol{P}^t_{74}$ нами уже определены. Единственной неизвестной силой, входящей в уравнение (13.13), является реакция $\boldsymbol{P}^n_{74}$, момент которой относительно точки S равен $M_S(\boldsymbol{P}^n_{74}) = P^n_{74}h$. Из (13.13) определяем величину реакции $\boldsymbol{P}^n_{74}$.

Определив реакцию $\boldsymbol{P}^n_{74}$, находим реакцию $\boldsymbol{P}_{74}$ как геометрическую сумму двух известных нам составляющих

$$\boldsymbol{P}_{74} = \boldsymbol{P}^n_{74} + \boldsymbol{P}^t_{74}. \tag{13.14}$$

Приравниваем далее нулю геометрическую сумму всех сил, действующих на группу. Имеем

$$\boldsymbol{P}^n_{12} + \boldsymbol{P}^t_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_4 + \boldsymbol{P}_{74} + \boldsymbol{P}_5 + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}^t_{63} + \boldsymbol{P}^n_{63} = 0. \tag{13.15}$$

В этом уравнении неизвестными оказываются только величины составляющих $\boldsymbol{P}^n_{12}$ и $\boldsymbol{P}^n_{63}$, которые и могут быть определены из уравнения построением плана сил в выбранном масштабе (рис. 13.9, *б*). Из произвольной точки a откладываем силу $\boldsymbol{P}_2$ в виде отрезка (ab). В точке b к ней прикладываем силу $\boldsymbol{P}_4$ в виде отрезка (bc), в точке c прикладываем силу $\boldsymbol{P}_{74}$ в виде отрезка (cd). Далее в точке d прикладываем силу $\boldsymbol{P}_5$ в виде отрезка (de). Наконец, в точке e прикладываем силу $\boldsymbol{P}_3$ в виде отрезка (ef). В точках a и f прикладываем ранее определенные силы $\boldsymbol{P}^t_{12}$ и $\boldsymbol{P}^t_{63}$ в виде отрезков (ag) и (fk) и через полученные точки g и k проводим прямые, параллельные силам $\boldsymbol{P}^n_{12}$ и $\boldsymbol{P}^n_{63}$. Находим далее точку l пересечения этих прямых. Соединив точки a и l плана сил, получим в масштабе μ_P полную реакцию $\boldsymbol{P}_{12}$ в виде отрезка (la). Соединяя точки f и l, получаем в том же масштабе полную реакцию $\boldsymbol{P}_{63}$ в виде отрезка (fl).

Реакции $\boldsymbol{P}_{52}$, $\boldsymbol{P}_{53}$ и $\boldsymbol{P}_{54}$ определяем из уравнений, выражающих условия равновесия отдельно взятых звеньев *2*, *3* и *4*:

$$\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_{52} = 0, \qquad \boldsymbol{P}_{63} + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}_{53} = 0, \qquad \boldsymbol{P}_{74} + \boldsymbol{P}_4 + \boldsymbol{P}_{54} = 0.$$

В первом из этих уравнений неизвестной является реакция $\boldsymbol{P}_{52}$, во втором уравнении неизвестна реакция $\boldsymbol{P}_{53}$ и в третьем уравнении — реакция $\boldsymbol{P}_{54}$. Эти реакции определятся построением дополнительных силовых треугольников. Первая реакция определится, если на плане сил соединить точки b и l; вторая реакция определится, если соединить точки l и e, и третья реакция — если соединить точки b и d. Отрезок (bl) в масштабе μ_P представляет реакцию $\boldsymbol{P}_{52}$; отрезок (le) в том же масштабе — реакцию $\boldsymbol{P}_{53}$ и отрезок (bd) — реакцию $\boldsymbol{P}_{54}$. Так определяются реакции во всех кинематических парах трехповодковой группы.

Этот метод может быть распространен на любые группы III класса, в которых могут быть найдены особые точки.

4°. Переходим к рассмотрению вопроса об определении реакций в кинематических парах групп, в состав которых входят высшие

пары. Из уравнения (13.1) следует, что статическая определимость этих групп удовлетворяется, если, например, число звеньев n равно $n = 1$, число p_5 пар V класса равно $p_5 = 1$ и число p_4 пар IV класса также равно $p_4 = 1$. Эта группа показана на рис. 13.10, *а*. Звено *2* входит во вращательную пару B со звеном *1* и в высшую пару E со звеном *4*, выполненную в виде двух соприкасающихся кривых $p - p$ и $q - q$. Находим на нормали $n - n$, проведенной через точку E, центры кривизны C и D соприкасающихся кривых $p - p$ и $q - q$ и вводим заменяющее звено *3*. Тогда имеем группу II класса BCD первого вида, аналогичную группе, показанной на рис. 13.6, *а*.

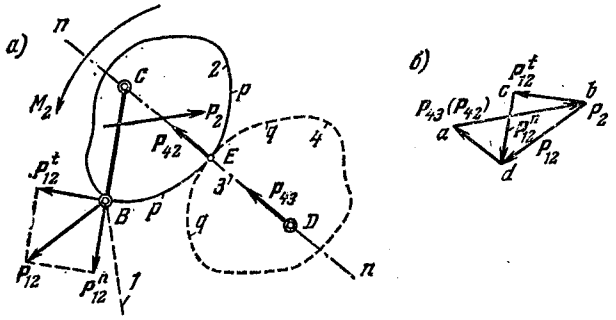


Рис. 13.10. Группа с одной высшей и одной низшей кинематическими парами: *а*) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментом пары сил; *б*) план сил.

Пусть звено *2* нагружено силой $\boldsymbol{P}_2$ и парой с моментом M_2 (рис. 13.10, *а*). Реакция $\boldsymbol{P}_{12}$ может быть представлена как сумма двух составляющих

$$\boldsymbol{P}_{12} = \boldsymbol{P}_{12}^n + \boldsymbol{P}_{12}^t.$$

Так как звено *3* является фиктивным и не нагружено внешними силами и парами, то реакция $\boldsymbol{P}_{43}$ направлена по прямой CD. Эта реакция равна реакции $\boldsymbol{P}_{42}$:

$$\boldsymbol{P}_{43} = \boldsymbol{P}_{42}.$$

Таким образом, уравнение равновесия группы имеет вид

$$\boldsymbol{P}_{12}^n + \boldsymbol{P}_{12}^t + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_{42} = 0. \qquad (13.16)$$

В уравнении (13.16) неизвестными являются величины составляющих $\boldsymbol{P}_{12}^n$ и $\boldsymbol{P}_{12}^t$ реакции $\boldsymbol{P}_{12}$ и величина реакции $\boldsymbol{P}_{42}$. Составляющая $\boldsymbol{P}_{12}^t$ определяется из уравнения моментов всех сил, действующих на звено *2*, относительно точки C. Имеем

$$P_{12}^t = -\left[\frac{M_C(P_2)}{l_{BC}} + \frac{M_2}{l_{BC}}\right]. \qquad (13.17)$$

Следовательно, в уравнении (13.16) будут неизвестными только величины составляющей $\boldsymbol{P}_{12}^{n}$ и реакции $\boldsymbol{P}_{42}$.

Для определения величин составляющей $\boldsymbol{P}_{12}^{n}$ и реакции $\boldsymbol{P}_{42}$ строим план сил (рис. 13.10, *б*).

Для этого из произвольной точки *a* откладываем в некотором масштабе μ_p силу $\boldsymbol{P}_2$ и прикладываем к ней в том же масштабе силу $\boldsymbol{P}_{12}'$, вычисленную по формуле (13.17). Из точки *c* проводим прямую, параллельную направлению *BC*, а из точки *a* — прямую, параллельную направлению *DC*. Точка *d* пересечения этих прямых определит реакции $\boldsymbol{P}_{42}$ и $\boldsymbol{P}_{12}^{n}$. Полная реакция $\boldsymbol{P}_{12}$ изображается отрезком (*bd*).

Из рассмотренного примера видно, что кинетостатический расчет групп с высшими парами можно вести путем приведения этих групп к группам только с одними низшими парами V класса и исследования условий равновесия полученной группы.

§ 56. Определение реакций в кинематических парах групп с учетом сил трения

1°. В § 55 нами был рассмотрен метод определения реакций в кинематических парах в предположении, что трение в парах отсутствует.

Рассмотрим теперь, какие должны быть внесены изменения в методику изложенных расчетов, если учитываются силы трения, возникающие в кинематических парах.

В качестве примера рассмотрим группу II класса первого вида (рис. 13.11, *а*), нагруженную силами $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$. В состав группы входят три вращательные кинематические пары, и в этих парах возникают моменты $M_{12}^{\text{тр}}$, $M_{23}^{\text{тр}}$, $M_{32}^{\text{тр}}$ и $M_{43}^{\text{тр}}$ от сил трения. Величины этих моментов, согласно формуле (11.25), равны

$$M_{12}^{\text{тр}}=P_{12}f'_B r_B, \quad M_{23}^{\text{тр}}=-M_{32}^{\text{тр}}=P_{23}f'_C r_C, \quad M_{43}^{\text{тр}}=P_{43}f'_D r_D, \qquad (13.18)$$

где P_{12}, P_{23}, P_{43} — величины реакций в парах B, C, D; f'_B, f'_C, f'_D — коэффициенты трения во вращательных парах; r_B, r_C и r_D — радиусы цилиндрических элементов этих пар (см. § 47). Направление этих моментов зависит от направления соответствующих угловых скоростей относительного движения звеньев группы. Так, если угловая скорость ω_{21} звена *2* относительно звена *1* направлена по часовой стрелке (рис. 13.11, *а*) то момент $M_{12}^{\text{тр}}$ при рассмотрении равновесия звена *2* должен быть направлен противоположно вращению часовой стрелки. Если угловая скорость ω_{23} звена *2* относительно звена *3* имеет направление, противоположное направлению вращения часовой стрелки, то знак момента $M_{32}^{\text{тр}}$ при рассмотрении равновесия звена *2* должен соответствовать направлению вращения часовой стрелки, и т. д. Естественно, что при рассмотрении равновесия звена *3* знак момента $M_{23}^{\text{тр}}$ противоположен

знаку того же момента при рассмотрении равновесия звена *2*, так как

$$\omega_{23} = -\omega_{32} \quad \text{и} \quad M^{\text{тр}}_{23} = -M^{\text{тр}}_{32}.$$

Векторное уравнение равновесия сил, действующих на группу, имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{P}^n_{12} + \boldsymbol{P}^t_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}^t_{43} + \boldsymbol{P}^n_{43} = 0,$$

где $\boldsymbol{P}^n_{12}$, $\boldsymbol{P}^t_{12}$, $\boldsymbol{P}^n_{43}$ и $\boldsymbol{P}^t_{43}$ — соответствующие составляющие реакций $\boldsymbol{P}_{12}$ и $\boldsymbol{P}_{43}$ (рис. 13.11, *а*).

Для определения величин составляющих $\boldsymbol{P}^t_{12}$ и $\boldsymbol{P}^t_{43}$ составляем уравнения моментов всех сил, действующих на звенья *2* и *3*:

$$M_C(\boldsymbol{P}^t_{12}) + M_C(\boldsymbol{P}_2) + M^{\text{тр}}_{12} + M^{\text{тр}}_{32} = 0, \qquad (13.19)$$

$$M_C(\boldsymbol{P}^t_{43}) + M_C(\boldsymbol{P}_3) + M^{\text{тр}}_{43} + M^{\text{тр}}_{23} = 0. \qquad (13.20)$$

В уравнения (13.19) и (13.20) входят моменты трения, которые определяются из уравнений (13.18), но так как реакции $\boldsymbol{P}_{21}$, $\boldsymbol{P}_{23}$ и $\boldsymbol{P}_{43}$ неизвестны и подлежат определению, то из уравнений (13.19) и (13.20) не могут быть непосредственно определены и составляющие $\boldsymbol{P}^t_{12}$ и $\boldsymbol{P}^t_{43}$. Таким образом, задача сводится к совместному решению всех шести уравнений равновесия, которые в общем случае могут быть составлены для звеньев *2* и *3*. Совместное решение такой системы уравнений приводит к чрезвычайно громоздким вычислениям, поэтому для практических расчетов лучше применять способ последовательных приближений, к изложению сущности которого мы и перейдем.

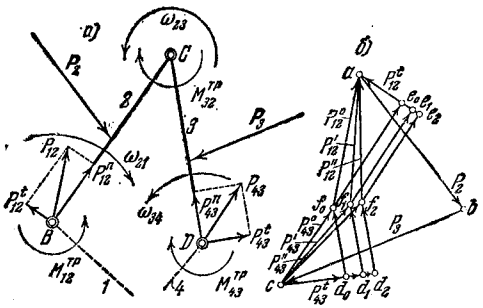


Рис. 13.11. Двухповодковая группа первого вида: *а*) кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; *б*) план сил.

2°. Предположим в первом приближении, что моменты сил трения равны нулю $M^{\text{тр}}_{12} = 0$, $M^{\text{тр}}_{23} = -M^{\text{тр}}_{32} = 0$ и $M^{\text{тр}}_{43} = 0$. Тогда задача сводится к ранее рассмотренному в § 56 случаю расчета группы без учета сил трения в кинематических парах. Указанными там методами находим составляющие $\boldsymbol{P}^t_{12}$ и $\boldsymbol{P}^t_{43}$ и строим план сил (рис. 13.11, *б*). Пусть на этом плане сил полученные реакции в парах *B*, *C* и *D* соответственно равны $\boldsymbol{P}^0_{12}$, $\boldsymbol{P}^0_{23}$ и $\boldsymbol{P}^0_{43}$. На рис. 13.11, *б* реакция $\boldsymbol{P}^0_{23}$ не показана, чтобы не загружать чертеж. Полученные значения реакций $\boldsymbol{P}^0_{12}$, $\boldsymbol{P}^0_{23}$ и $\boldsymbol{P}^0_{43}$ подставляем в формулы (13.18). Имеем

$$(M^{\text{тр}}_{12})' = P^0_{12} f' r_B, \quad (M^{\text{тр}}_{23})' = -(M^{\text{тр}}_{32})' = P^0_{23} f' r_C, \quad (M^{\text{тр}}_{43})' = P^0_{43} f' r_D.$$

Эти новые значения моментов трения подставляем в уравнения (13.19) и (13.20) и определяем из них новые значения величин составляющих $(\boldsymbol{P}^t_{12})'$ и $(\boldsymbol{P}^t_{43})'$. Вновь полученные величины этих составляющих, очевидно, отличаются от тех, которые были получены в предположении равенства нулю моментов трения. Поэтому, если в первом случае конец вектора силы $\boldsymbol{P}^t_{43}$ находился в точке d_0, то теперь он будет находиться в некоторой другой точке d_1. Точно так же начало вектора силы $\boldsymbol{P}^t_{12}$ будет находиться не в точке e_0, а в точке e_1. Проведя прямые в направлениях составляющих $(\boldsymbol{P}^n_{12})'$ и $(\boldsymbol{P}^n_{43})'$, найдем, что конец вектора силы $\boldsymbol{P}'_{43}$, начало вектора силы $\boldsymbol{P}'_{12}$ и начало вектора силы $\boldsymbol{P}'_{23}$ будет находиться не в точке f_0, а в точке f_1. Таким образом, будет построен второй план сил, из которого определятся новые значения $\boldsymbol{P}'_{12}$, $\boldsymbol{P}'_{23}$ и $\boldsymbol{P}'_{43}$ реакций в парах B, C и D.

Для еще большего уточнения величин реакций в парах можно снова повторить проведенный расчет, для чего полученные значения $\boldsymbol{P}'_{12}$, $\boldsymbol{P}'_{23}$ и $\boldsymbol{P}'_{43}$ надо снова подставить в формулы (13.18), определить новые значения моментов трения $(M^{\text{тр}}_{12})''$, $(M^{\text{тр}}_{23})''$, $(M^{\text{тр}}_{32})''$ и $(M^{\text{тр}}_{43})''$ и их в свою очередь подставить в уравнения (13.19) и (13.20). Тогда будут определены новые значения составляющих $(\boldsymbol{P}^t_{12})''$ и $(\boldsymbol{P}^t_{43})''$, и может быть построен новый план сил (рис. 13.11, *б*), в котором мы получим соответственно точки d_2, e_2, f_2 и, следовательно, определим новые реакции $\boldsymbol{P}''_{12}$, $\boldsymbol{P}''_{23}$ и $\boldsymbol{P}''_{43}$. Указанный процесс может быть продолжен и дальше, но практически вполне достаточно бывает ограничиться вторым или даже первым приближением и найти силы $\boldsymbol{P}''_{12}$, $\boldsymbol{P}''_{23}$ и $\boldsymbol{P}''_{43}$ или только $\boldsymbol{P}'_{12}$, $\boldsymbol{P}'_{23}$ и $\boldsymbol{P}'_{43}$.

Указанный метод может быть распространен на группы всех классов с любым сочетанием вращательных, а также поступательных высших пар. Метод является приближенным и может применяться только в тех случаях, когда имеет место процесс сходимости и каждое последующее приближение дает меньшее изменение приращения силы или момента, чем предыдущее.

§ 57. Кинетостатический расчет ведущего звена механизма

1°. Рассмотрим теперь, как может быть определена в общем случае реакция в кинематической паре, в которую входит со стойкой ведущее звено. Это звено обычно входит со стойкой или в поступательную пару V класса или во вращательную пару V класса. Поэтому рассмотрим оба эти случая отдельно. Из формулы (13.1) следует, что под действием произвольно приложенных к нему сил, в том числе и сил инерции, ведущее звено не находится в равновесии, так как при числе подвижных звеньев, равном единице, и числе пар V класса, равном также единице, число уравнений равновесия, которое мы можем составить, на единицу меньше числа неизвестных, подлежащих определению, так как

$$3n - 2p_5 = 3 - 2 = 1.$$

Чтобы имело место равновесие, необходимо дополнительно ввести силу или пару, уравновешивающую все силы, приложенные к ведущему звену. Эта сила и момент носят название *уравновешивающей силы* и *уравновешивающего момента*. Условимся уравновешивающую силу обозначать через P_y, а уравновешивающий момент через M_y. Рассмотрим вопрос о том, какие же силы и моменты будут в машинах уравновешивающими.

Предположим, что рассматривается задача о силовом расчете кривошипно-ползунного механизма одноцилиндрового поршневого двигателя, приводящего во вращение какую-либо рабочую машину. Если в качестве ведущего звена выбран кривошип *1* (рис. 13.12, *а*) двигателя, то присоединяемая группа II класса будет состоять из шатуна *2* и поршня *3*. После силового расчета этой группы определится реакция шатуна *2* на кривошип *1* — сила P_{21}. Кроме того,

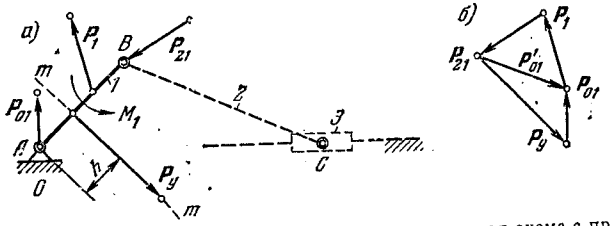


Рис. 13.12. Кривошипно-ползунный механизм: *а*) кинематическая схема с приложенными к ведущему звену силами; *б*) план сил.

кривошип находится под действием силы P_1 и пары сил с моментом M_1, представляющих собой результирующие от внешних нагрузок и сил инерции. Под действием этих сил и реакции P_{01} стойки кривошип в общем случае не будет находиться в равновесии. Для равновесия необходимо приложить уравновешивающую силу P_y или уравновешивающий момент M_y. Этими уравновешивающими силой и моментом являются реактивные силы или момент от той рабочей машины, которая приводится в движение рассматриваемым двигателем. Если коленчатый вал двигателя и главный вал рабочей машины соединены посредством муфты, то мы будем иметь в качестве уравновешивающего момента, приложенного к валу двигателя, реактивный момент сил сопротивления рабочей машины. Если коленчатый вал двигателя соединен с главным валом рабочей машины посредством зубчатой передачи, то мы будем иметь в качестве уравновешивающей силы, приложенной к зубчатому колесу, сидящему на валу двигателя, реактивную силу рабочей машины. Очевидно, что эта реактивная сила, если пренебречь трением в сопряженных профилях зубьев, будет направлена по нормали к профилям сопряженных зубьев зубчатой передачи. Таким образом, линия действия уравновешивающей силы полностью определяется конструкцией передаточного механизма от машины (уравновеши-

вающими силой или моментом будут реактивная сила или момент от двигателя).

2°. Пусть ведущее звено *1* (рис. 13.12, *а*) входит с неподвижным звеном по вращательную пару A и на это звено действуют сила $\boldsymbol{P}_{21}$, представляющая собой реакцию звена *2* на звено *1*, заданная сила $\boldsymbol{P}_1$ и пара сил с моментом M_1. Пусть линией действия уравновешивающей силы $\boldsymbol{P}_y$ будет прямая $m-m$. Тогда величина момента $M_A(\boldsymbol{P}_y)$ уравновешивающей силы найдется из уравнения моментов всех сил, действующих на звено относительно точки A:

$$M_A(\boldsymbol{P}_y)+M_A(\boldsymbol{P}_1)+M_A(\boldsymbol{P}_{21})+M_1=0.$$

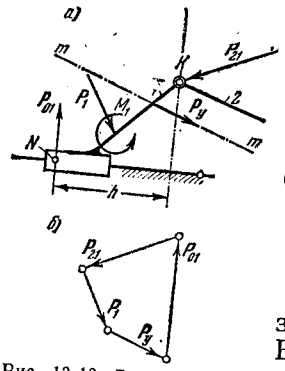


Рис. 13.13. Ведущее звено, входящее в поступательную пару со стойкой: *а*) кинематическая схема с показанными на ней силами; *б*) план сил.

Отсюда получаем значение момента $M_A(P_y)$:

$$M_A(\boldsymbol{P}_y)=-[M_A(\boldsymbol{P}_1)+M_A(\boldsymbol{P}_{21})+M_1]. \tag{13.21}$$

Знак момента определится величинами и знаком моментов $M_A(\boldsymbol{P}_1)$, $M_A(\boldsymbol{P}_{21})$ и M_1. Величина уравновешивающей силы $\boldsymbol{P}_y$ определится из условия

$$P_y h=M_A(\boldsymbol{P}_y),$$

где h есть известное плечо уравновешивающей силы $\boldsymbol{P}_y$ (рис. 13.12, *а*).

Тогда имеем $P_y=-\dfrac{[M_A(\boldsymbol{P}_1)+M_A(\boldsymbol{P}_{21})+M_1]}{h}$. Так как величина и направление силы $\boldsymbol{P}_y$ теперь нам известны, то реакция $\boldsymbol{P}_{01}$ в кинематической паре A определится из векторного уравнения

$$\boldsymbol{P}_y+\boldsymbol{P}_{01}+\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_{21}=0. \tag{13.22}$$

Графическое решение этого уравнения показано на рис. 13.12, *б*. Если уравновешивающей будет не сила, а пара сил, то величина уравновешивающего момента M_y определится из уравнения, аналогичного уравнению (13.21):

$$M_y=-[M_A(\boldsymbol{P}_1)+M_A(\boldsymbol{P}_{21})+M_1].$$

Реакция $\boldsymbol{P}'_{01}$ в кинематической паре A определится из векторного уравнения

$$\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_{21}+\boldsymbol{P}'_{01}=0. \tag{13.23}$$

План сил для определения реакции $\boldsymbol{P}'_{01}$ показан на рис. 13.12, *б*.

3°. Предположим далее, что ведущее звено *1* входит с неподвижным звеном в поступательную пару N (рис. 13.13, *а*). Тогда реакция $\boldsymbol{P}_{01}$ в паре N оказывается направленной перпендикулярно

к оси движения этой поступательной пары. Пусть уравновешивающая сила P_y направлена по линии $m-m$. Величина силы P_y определится из уравнения (13.22).

В этом уравнении силы P_1 и P_{21} заданы, а силы P_{01} и P_y известны по направлению. Графическое решение этого уравнения показано на рис. 13.13, *б*.

Для определения точки N приложения реакции P_{01} составляем уравнение моментов всех сил относительно точки K приложения силы P_{21}:

$$M_K(P_y)+M_K(P_1)+M_K(P_{01})+M_1=0. \qquad (13.24)$$

В этом уравнении неизвестно только плечо h силы P_{01}, которое и может быть определено:

$$h=-\frac{[M_K(P_1)+M_K(P_y)+M_1]}{P_{01}}. \qquad (13.25)$$

Направление, в котором должен быть отложен отрезок h, зависит от величины и знаков моментов M_1, $M_K(P_y)$ и $M_K(P_1)$.

§ 58. Силовой расчет типовых механизмов

1°. В данном параграфе рассмотрим вопрос о силовом расчете некоторых типовых механизмов: рычажного, кулачкового и зубчатого.

2°. В качестве примера рычажного механизма проведем силовой расчет кулисно-рычажного механизма с ведущим звеном *1*, показанного на рис. 13.14. Найти реакции в кинематических парах от силы P_5, приложенной в точке S_5 звена *5*, силы P_4, приложенной в точке S_4 звена *4*, силы P_3, приложенной в точке S_3 звена *3*, и пары сил с моментом M_3, приложенной к тому же звену. Сила P_3 образует с направлением BD угол α. Сила P_5 параллельна оси $x-x$, а сила P_4 перпендикулярна к ней. Линия действия $m-m$ уравновешивающей силы P_y проходит через точку S_1 звена *1* перпендикулярно к его оси.

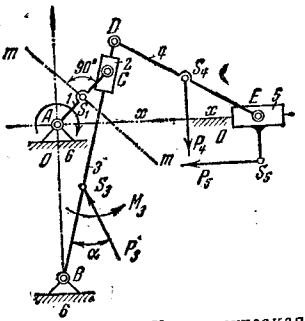


Рис. 13.14. Кинематическая схема кулисного механизма с показанными на ней силами.

Рассматриваемый кулисно-рычажный механизм — это механизм II класса и состоит из двух групп II класса: группы третьего вида (группа, состоящая из звеньев *2* и *3*) и группы второго вида (группа, состоящая из звеньев *4* и *5*).

Определение реакций в кинематических парах начнем с последней в порядке присоединения группы, состоящей из звеньев *5* и *4*.

Разлагаем реакцию P_{34} (рис. 13.15, *а*), действующую в паре D, на составляющие P^n_{34} и P^t_{34}:

$$P_{34} = P^n_{34} + P^t_{34}.$$

Составляем далее уравнение моментов всех сил, действующих на звено *4*, относительно точки E (рис. 13.15, *а*):

$$M_E(P^t_{34}) + M_E(P_4) = 0,$$

откуда получаем

$$P^t_{34} = \frac{P_4 h_4}{l_{DE}},$$

где h_4 — плечо силы P_4 относительно точки E и l_{DE} — расстояние между точками D и E звена *4*.

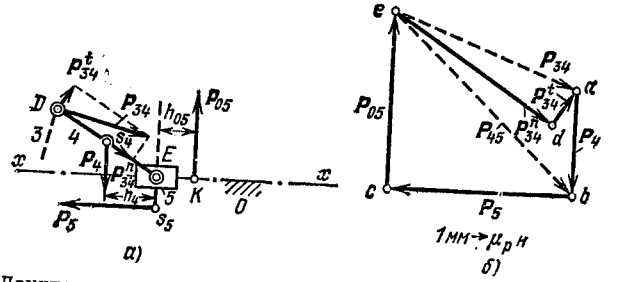


Рис. 13.15. Двухповодковая группа *4—5* механизма, изображенного на рис. 13.14: *а*) кинематическая схема группы *4—5*; *б*) план сил.

Составляем далее общее уравнение равновесия всей группы, приравнивая нулю сумму всех сил, действующих на группу:

$$P^n_{34} + P^t_{34} + P_4 + P_5 + P_{05} = 0.$$

Силы P_4, P_5 и P^t_{34} нам известны. Силы P^n_{34} и P_{05} известны по направлению. Сила P^n_{34} параллельна оси DE звена *4*, сила P_{05} перпендикулярна к оси $x - x$.

Для определения величин сил P^n_{34} и P_{05} строим в произвольно выбранном масштабе μ_P план сил (рис. 13.15, *б*). Для этого из точки d откладываем силу P^t_{34} в виде отрезка (da). К силе P^t_{34} прикладываем силу P_4 в виде отрезка (ab) и к ней прикладываем силу P_5 в виде отрезка (bc). Через точку c проводим прямую в направлении силы P_{05}, т. е. перпендикулярно к оси $x - x$, а через точку d — в направлении силы P^n_{34}, т. е. параллельно направлению DE звена *4*. Точка e пересечения этих прямых определяет начало вектора силы P^n_{34} и конец вектора силы P_{05}. Соединив точку e с точкой a, получим силу P_{34} в виде отрезка (ea). Реакция P_{45} в виде отрезка (eb) определяется, если соединить точки e и b.

Точку K приложения силы P_{05} (рис. 13.15, *а*) найдем из уравнения моментов всех сил, действующих на звене 5, относительно точки E:

$$M_E(P_5)+M_E(P_{05})=0,$$

откуда получаем величину плеча $h_{05}=EK$ (рис. 13.15, *а*) силы P_{05} относительно точки E

$$h_{05}=-\frac{M_E(P_5)}{P_{05}}.$$

Если заданы конструктивные размеры ползуна 5, то необходимо силу привести к центру E ползуна, как это было показано на рис. 13.8 (§ 55).

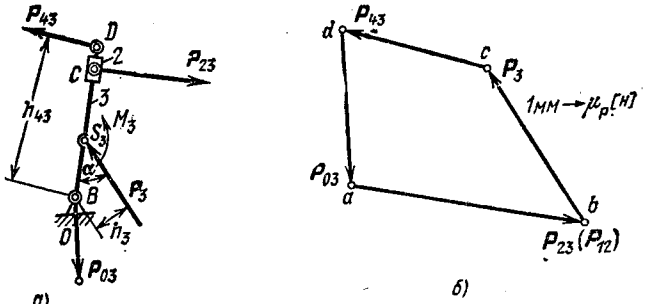


Рис. 13.16. Двухповодковая группа 2—3 механизма, изображенного на рис. 13.14: *а*) кинематическая схема группы 2—3; *б*) план сил.

Переходим далее к рассмотрению группы, состоящей из звеньев 2 и 3 (рис. 13.16, *а*). На эту группу действует внешняя сила P_{43}, приложенная в точке D, равная по величине и противоположная по направлению силе P_{34}, сила P_3, приложенная в точке S_3, и пара с моментом M_3.

Рассмотрим равновесие звена 3. Так как звено 2 не нагружено, то реакция P_{23} оказывается приложенной в точке C и направлена перпендикулярно к направлению BD звена 3.

Величина силы P_{23} определяется из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 3, относительно точки B:

$$M_B(P_{43})+M_B(P_{23})+M_B(P_3)+M_3=0.$$

Из этого уравнения определяем величину силы P_{23}. Имеем

$$P_{23}=-\left[\frac{P_{43}h_{43}}{l_{BC}}+\frac{P_3h_3}{l_{BC}}+\frac{M_3}{l_{BC}}\right],$$

где h_3 и h_{43} — плечи сил P_3 и P_{43} относительно точки B. После определения силы P_{23} можно найти силу P_{03}, приравнивая нулю сумму всех сил, действующих на звено 3:

$$P_{23}+P_3+P_{43}+P_{03}=0.$$

Решаем графически это уравнение. Из точки a (рис. 13.16, $б$) откладываем в масштабе μ_P силу $\boldsymbol{P}_{23}$ в виде отрезка (ab) и к ней прикладываем силу $\boldsymbol{P}_3$ в виде отрезка (bc). Далее из точки c откладываем силу $\boldsymbol{P}_{43}$ в виде отрезка (cd). Отрезок (da) представляет силу $\boldsymbol{P}_{03}$.

Далее рассматриваем равновесие ведущего звена *1* (рис. 13.17). На него действует сила $\boldsymbol{P}_{21}$, равная по величине и противоположно направленная силе $\boldsymbol{P}_{12}$. Линия действия уравновешивающей силы $\boldsymbol{P}_y$ задана прямой $m-m$, перпендикулярной к оси AC звена *1*

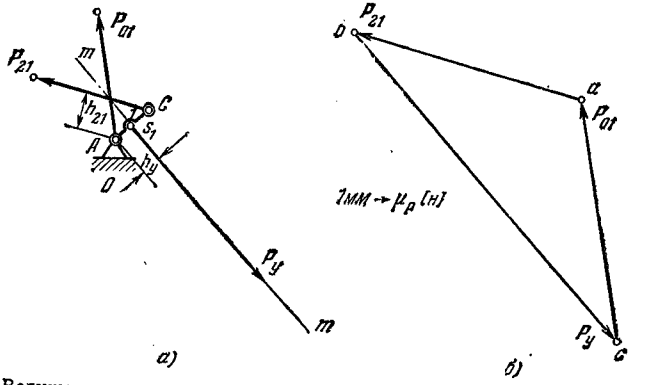


Рис. 13.17. Ведущее звено *1* механизма, изображенного на рис. 13.14: *а*) кинематическая схема звена *1*; *б*) план сил.

(рис. 13.17, *а*). Величина уравновешивающей силы P_y определяется из уравнения

$$M_A(\boldsymbol{P}_y)+M_A(\boldsymbol{P}_{21})=0,$$

откуда

$$P_y=\frac{P_{21}h_{21}}{h_y},$$

где h_{21} и h_y — плечи сил $\boldsymbol{P}_{21}$ и $\boldsymbol{P}_y$ относительно точки A. Определение реакции $\boldsymbol{P}_{01}$ в паре A производим графически (рис. 13.17, *б*) при помощи векторного уравнения равновесия всех сил, действующих на ведущее звено *1*,

$$\boldsymbol{P}_{21}+\boldsymbol{P}_y+\boldsymbol{P}_{01}=0.$$

Из точки a откладываем в масштабе μ_P силу $\boldsymbol{P}_{21}$ в виде отрезка (ab) и к ней прикладываем силу $\boldsymbol{P}_y$ в виде отрезка (bc). Отрезок (ca) представляет собой силу $\boldsymbol{P}_{01}$.

3°. Для механизмов с парами IV класса силовой расчет может быть произведен методами, изложенными в § 55, если предварительно механизм привести к механизму с парами только V класса.

Пусть дан кулачковый механизм с парами IV класса (рис. 13.18) с приложенными к нему внешними силами P_2 и P_3 и парой с моментом M_2. Требуется определить реакции в кинематических парах и величину уравновешивающего момента M_y, приложенного к кулачку *1*. Приводим заданный механизм к механизму с парами V класса (рис. 13.19). Буквами O_1 и O_2 обозначены центры кривизны профилей звеньев *1* и *2* в точке их соприкосновения. При ведущем звене *1* полученный механизм представляет собой механизм II класса. В его состав входят две группы II класса. Первая группа составлена из звеньев *4* и *2* и трех вращательных кинематических пар O_1, O_2 и B. Вторая группа II класса составлена из звеньев *3* и *5*,

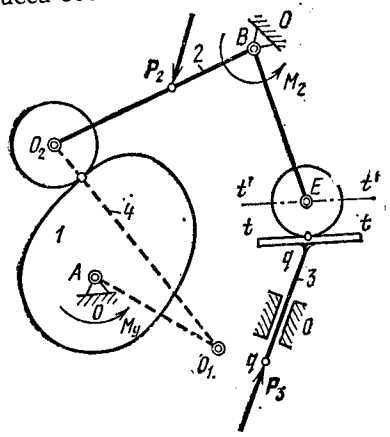


Рис. 13.18. Схема рычажно-кулачкового механизма с показанными на ней силами.

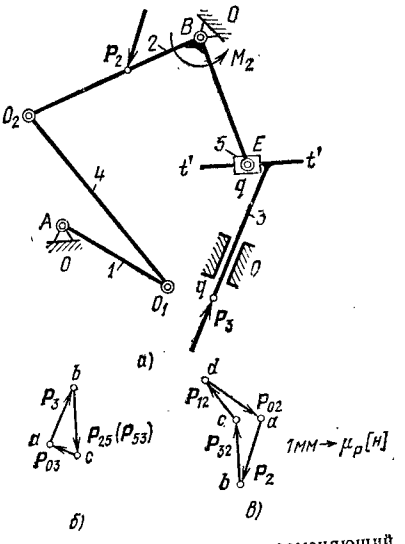


Рис. 13.19. Механизм, заменяющий кулачковый механизм, изображенный на рис. 13.18: *а*) кинематическая схема; *б*) план сил группы *3—5*; *в*) план сил группы *2—4*.

одной вращательной кинематической пары E и двух поступательных кинематических пар с осями $t'-t'$ и $q-q$. Расчет необходимо вести, начиная со второй группы II класса. В этой группе нагруженным силой P_3 является звено *3*. Звено *5* как фиктивное не нагружено. Таким образом, звено *3* находится под действием силы P_3, реакции P_{53}, направленной перпендикулярно к оси $t'-t'$ направляющей, и реакции P_{03}, направленной перпендикулярно к оси $q-q$. Для определения реакций $P_{25}=P_{53}$ и P_{03} воспользуемся уравнением сил, действующих на группу (*3—5*),

$$P_3+P_{25}+P_{03}=0.$$

Построением плана сил (рис. 13.19, *б*) определяются реакции P_{03} и P_{25}. Реакция $P_{25}=P_{53}$ вследствие отсутствия нагрузки на звене *5* проходит через точку E перпендикулярно к прямой $t'-t'$.

Для расчета группы (*2—4*) прикладываем к звену *2* в точке *E* силу $\boldsymbol{P}_{32}$, равную по величине и противоположную по направлению силе $\boldsymbol{P}_{25}$. Таким образом, звено *2* этой группы будет нагружено силами $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_{32}$ и моментом M_2. Звено *4*, как фиктивное, не нагружено. Реакция $\boldsymbol{P}_{42}$ вследствие отсутствия внешней нагрузки у звена *4* направлена по оси O_1O_2 этого звена. Из уравнения моментов всех сил, действующих на звено *2*, относительно точки *B* определяется реакция $\boldsymbol{P}_{42}$, равная реакции $\boldsymbol{P}_{12}$:

$$P_{42}=P_{12}=-\left[\frac{M_B(\boldsymbol{P}_2)+M_B(\boldsymbol{P}_{32})+M_2}{h}\right],$$

где h — плечо силы $\boldsymbol{P}_{42}$ относительно точки *B*.

После этого из уравнения равновесия сил, действующих на звено *2*,

$$\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_{32}+\boldsymbol{P}_{12}+\boldsymbol{P}_{02}=0$$

построением плана сил (рис. 13.19, *в*) определяется реакция $\boldsymbol{P}_{02}$. Ведущее звено *1* нагружено силой $\boldsymbol{P}_{21}=-\boldsymbol{P}_{12}$ и уравновешивающим моментом M_y.

Величина уравновешивающего момента M_y определяется из уравнения моментов

$$M_y+M_A(\boldsymbol{P}_{21})=0,$$

или

$$M_y=-M_A(\boldsymbol{P}_{21}).$$

Реакция $\boldsymbol{P}_{01}$ тогда определяется из уравнения

$$\boldsymbol{P}_{01}+\boldsymbol{P}_{21}=0,$$

или

$$\boldsymbol{P}_{01}=-\boldsymbol{P}_{21}.$$

Из рассмотренного примера следует, что приведение кулачкового механизма к механизму с парами только V класса не является обязательным, если реакции в высших парах, согласно § 54, принимать направленными по нормалям к элементам высших пар в точке соприкасания.

4°. Переходим к рассмотрению силового расчета зубчатых механизмов с круглыми цилиндрическими колесами. На рис. (13.20, *а*) показан простейший трехзвенный зубчатый механизм с неподвижными осями *A* и *B*, радиусы начальных окружностей колес которого соответственно равны r_1 и r_2. Будем в дальнейшем предполагать, что центры масс колес лежат всегда на их осях, и таким образом, колеса уравновешены. Тогда центробежные силы инерции колес оказываются равными нулю и при неравномерном вращении колес могут возникать только дополнительные пары от сил инерции, моменты которых определяются по формуле (12.2) (см. § 52).

Пусть ведущим колесом, к которому приложен уравновешивающий момент M_y, является колесо *1*, а ведомым, к которому прило-

жен момент M_2 — колесо 2. Момент M_2 представляет собой результирующий момент от внешних сил и пары сил инерции. По направлению вектора v_C скорости точки C (рис. 13.20) определяем направления угловых скоростей ω_1 и ω_2 колес *1* и *2*. Направление действия момента M_y должно совпадать с направлением угловой скорости ω_1, так как колесо *1* является ведущим. Направление действия момента M_2 должно быть противоположным направлению угловой скорости ω_2, потому что колесо *2* является ведомым. Где бы ни происходило соприкасание профилей q_1 и q_2 зубьев колес *1* и *2*, нормаль n — n к этим профилям будет проходить через точку C соприкасания начальных окружностей, являющуюся мгновенным центром в относительном движении колес *1* и *2*. В дальнейшем удобно будет всегда считать силы P_{12} или P_{21} приложенными в точке C и направленными по нормали n — n. Для определения того, в какую сторону надо откладывать угол α (рис. 13.20, *а*) между нормалью n — n и касательной t — t к начальным окружностям в точке C, будем руководствоваться простым правилом.

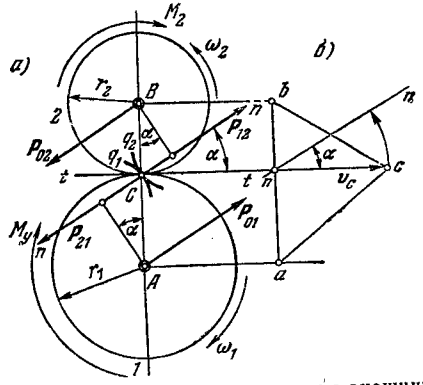


Рис. 13.20. Зубчатый механизм с внешним зацеплением: *а*) схема механизма; *б*) картина скоростей.

Если ведущим колесом является колесо с внешним зацеплением, то, поворачивая вектор скорости v_C точки касания C (рис. 13.20, *б*) на угол α в сторону, обратную угловой скорости ω_1 вращения ведущего колеса, найдем положение нормали n — n. Если ведущим колесом будет колесо с внутренним зацеплением, то вектор скорости точки касания надо поворачивать по направлению угловой скорости ведущего колеса.

При силовом расчете зубчатых колес можно не производить замены высших пар IV класса цепями с парами V класса, а рассматривать равновесие колес, образующих статически определимые системы. Такой статически определимой системой является колесо *2* (рис. 13.20), на которое действует внешний момент M_2, реакция P_{12} ведущего колеса на ведомое колесо *2* и реакция P_{02} стойки *0* на колесо *1*. Из уравнения моментов всех сил, действующих на колесо *2*, относительно неподвижной точки B имеем

$$P_{12} r_2 \cos\alpha + M_2 = 0,$$

откуда определяем реакцию P_{12}:

$$P_{12} = -\frac{M_2}{r_2 \cos\alpha}.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на колесо *2*,

$$\boldsymbol{P}_{12}+\boldsymbol{P}_{02}=0$$

определяем реакцию P_{02}:

$$P_{02}=P_{12}=\frac{M_2}{r_2\cos\alpha}.$$

Рассматриваем далее равновесие ведущего колеса *1*. Из уравнения моментов всех сил, действующих на колесо *2*, относительно неподвижной точки *A*

$$M_y+P_{21}r_1\cos\alpha=0$$

находим уравновешивающий момент M_y:

$$M_y=-P_{21}r_1\cos\alpha.$$

Далее из уравнения равновесия всех сил, действующих на колесо *1*,

$$\boldsymbol{P}_{21}+\boldsymbol{P}_{01}=0$$

определяем реакцию $\boldsymbol{P}_{01}$ стойки *0* на колесо *1*. Имеем

$$P_{01}=-P_{21}=\frac{M_2}{r_1\cos\alpha}.$$

5°. Рассмотрим двухступенчатый зубчатый редуктор с неподвижными осями колес (рис. 13.21, *а*), у которого ведущим колесом является колесо *1*, а ведомым — колесо *3*, нагруженное внешним моментом M_3. Для определения направлений уравновешивающего момента M_y и момента M_3 определяем скорости v_C и v_D точек соприкосновения колес *1*, *2* и *2'*, *3* (рис. 13.21, *б*); по скоростям v_C и v_D определяем направление угловой скорости ω_3 колеса *3* при заданной угловой скорости ω_1 колеса *1*. Тогда определяется и направление моментов M_y и M_3 (рис. 13.21, *б*). Далее рассматриваем колесо *3* (рис. 13.21, *в*), которое находится в равновесии под действием момента M_3 и реакций $\boldsymbol{P}_{2'3}$ и $\boldsymbol{P}_{03}$. Из уравнения моментов всех сил относительно точки *A*

$$M_3+P_{2'3}r_3\cos\alpha'=0$$

где α' — угол, образованный нормалью $n'-n'$ к профилям зубьев колес *2'* и *3* и касательной $t'-t'$ к их начальным окружностям, вычисляем реакцию $P_{2'3}$. Имеем

$$P_{2'3}=-\frac{M_3}{r_3\cos\alpha'}.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на колесо *3*,

$$\boldsymbol{P}_{2'3}+\boldsymbol{P}_{03}=0$$

определяем реакцию P_{03}:

$$P_{03}=P_{2'3}=\frac{M_3}{r_3\cos\alpha'}.$$

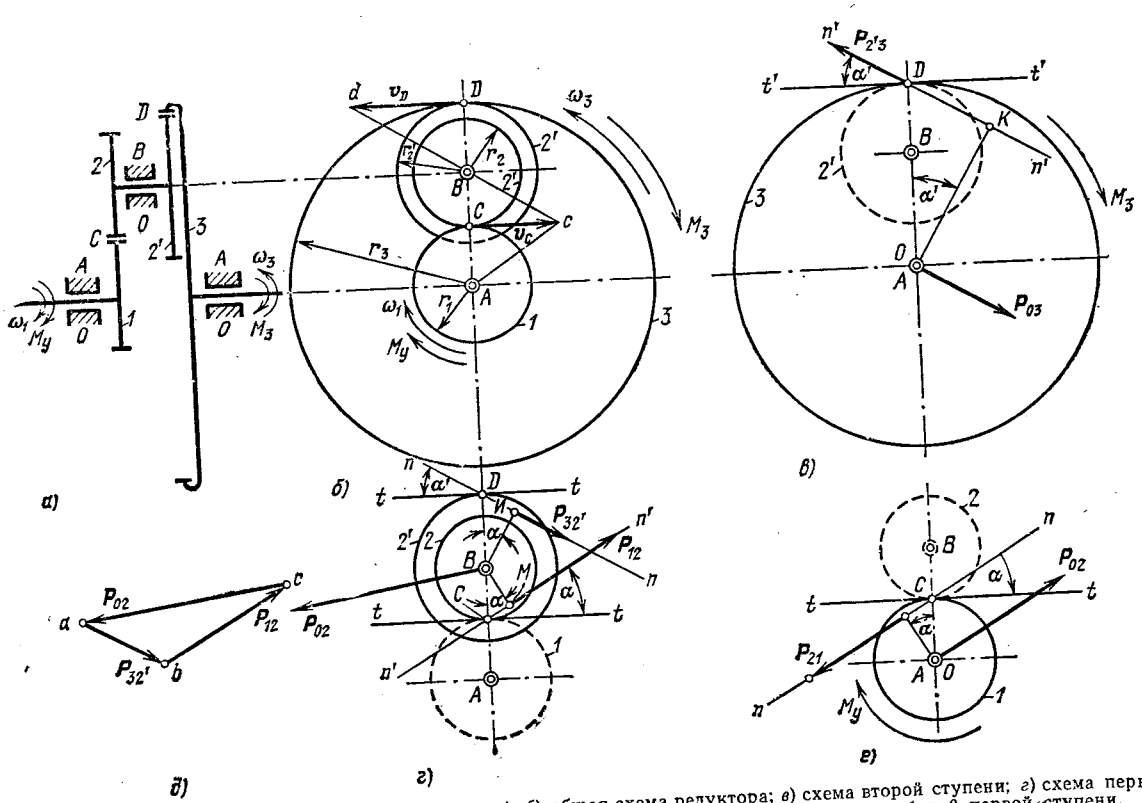


Рис. 13.21. Двухступенчатый зубчатый редуктор: *а*), *б*) общая схема редуктора; *в*) схема второй ступени; *г*) схема первой ступени; *д*) треугольник сил, приложенный к колесам первой ступени; *е*) схема колес *1* и *2* первой ступени.

Только что определенная нами реакция $\boldsymbol{P}_{03}$ приложена к оси колеса *3* в плоскости, совпадающей со средней плоскостью колеса *2'* (рис. 13.21, *а*). Реакции, приложенные к подшипникам колеса *3*, можно определить, если известны конструкция и относительное расположение этих подшипников.

Далее переходим к рассмотрению колес *2* и *2'* (рис. 13.21, *г*) которые находятся в равновесии под действием силы $\boldsymbol{P}_{32'} = -\boldsymbol{P}_{2'3}$ и реакций $\boldsymbol{P}_{12}$ и $\boldsymbol{P}_{02}$. Указанные силы располагаются в трех параллельных плоскостях (рис. 13.21, *а*). Перенесем их в среднюю плоскость колес *1* и *2*. При этом переносе получаются пары сил, действия которых могут быть учтены, если будет известно конструктивное оформление редуктора. Из уравнения моментов упомянутых сил относительно оси колес *2* и *2'* (рис. 13.21, *г*)

$$P_{12}r_2\cos\alpha + P_{32'}r_{2'}\cos\alpha' = 0,$$

где α — угол, образованный нормалью $n'-n'$ к профилям зубьев колес *1* и *2* и касательной $t-t$ к их начальным окружностям, вычисляем реакцию P_{12}:

$$P_{12} = -P_{32'}\frac{r_{2'}\cos\alpha'}{r_2\cos\alpha}.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на колеса *2* и *2'*

$$\boldsymbol{P}_{32'} + \boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{P}_{02} = 0$$

определяем реакцию $\boldsymbol{P}_{02}$. Решение этого уравнения с помощью плана сил показано на рис. 13.21, *д*.

Последним рассматриваем ведущее колесо *1* (рис. 13.21, *е*), которое находится в равновесии под действием силы $\boldsymbol{P}_{21} = -\boldsymbol{P}_{12}$, момента M_y и реакции $\boldsymbol{P}_{01}$. Из уравнения моментов всех сил относительно точки *A*

$$M_y + P_{21}r_1\cos\alpha = 0$$

вычисляем уравновешивающий момент M_y. Имеем

$$M_y = -P_{21}r_1\cos\alpha.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на колесо *1*,

$$\boldsymbol{P}_{01} + \boldsymbol{P}_{21} = 0$$

определяем реакцию $\boldsymbol{P}_{01}$:

$$\boldsymbol{P}_{01} = -\boldsymbol{P}_{21}.$$

6°. Рассмотрим далее двухступенчатый планетарный редуктор (рис. 13.22, *а*) у которого ведущим является водило *H*, а ведомое колесо *3* нагружено внешним моментом M_3. Кроме того, внешними силами, действующими на редуктор, являются центробежная сила инерции $\boldsymbol{P}^n_{\text{ис}}$ сателлитов *2* и *2'*, условно приложенная в точке *B* (рис. 13.22, *б*), равна $P^n_{\text{ис}} = m_c\omega_H^2(r_3 + r_{2'})$, где m_c — масса

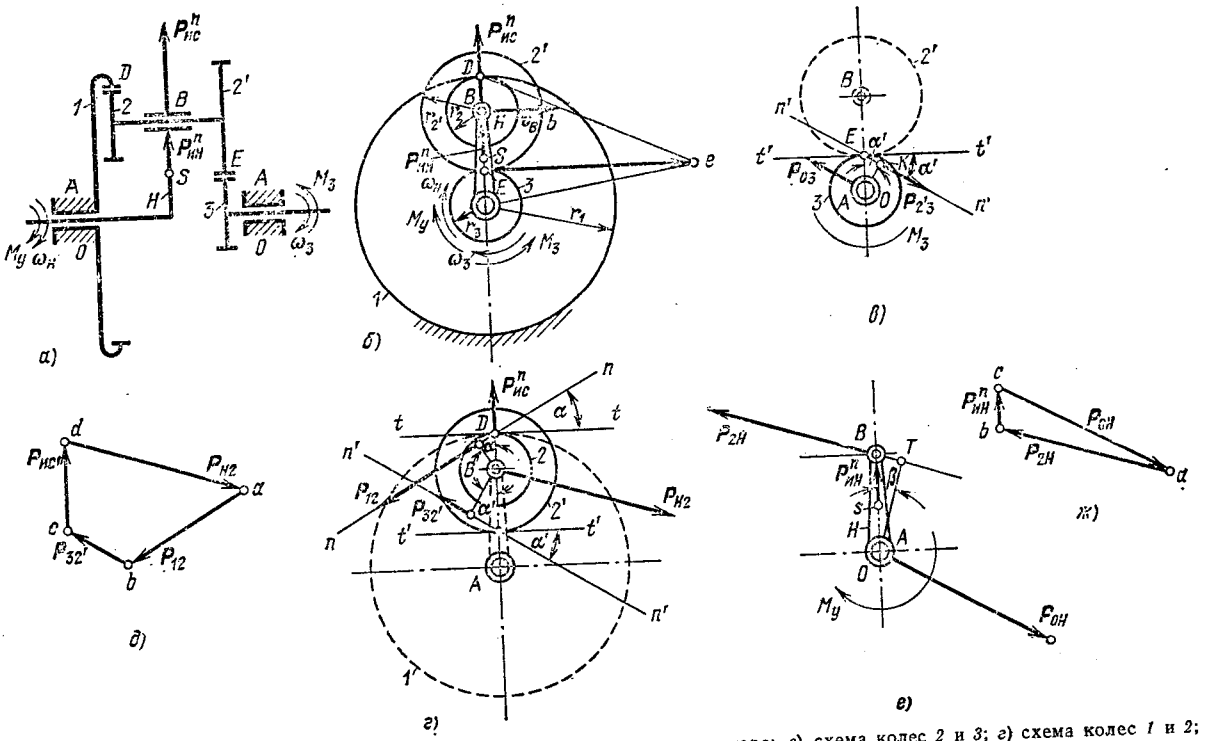


Рис. 13.22. Двухступенчатый планетарный редуктор: *а*), *б*) схемы редуктора; *в*) схема колес *2* и *3*; *г*) схема колес *1* и *2*; *д*) план сил колес *1* и *2*; *е*) схема водила; *ж*) план сил водила.

обоих сателлитов и ω_H — угловая скорость водила H, а также центробежная сила инерции $P^n_{иH}$ водила H, приложенная в его центре масс S и равная

$$P^n_{иH} = m_H \omega_H^2 (AS),$$

где m_H — масса поводка H. Для определения направлений уравновешивающего момента $M_у$ и внешнего момента $M_з$ находим скорость v_E точки E соприкосновения колес 3 и $2'$ и скорость v_B точки B водила H (рис. 13.22, *б*). По векторам скоростей $\boldsymbol{v}_E$ и $\boldsymbol{v}_B$ устанавливаем направление угловой скорости колеса 3 при заданном направлении угловой скорости $\omega_з$ водила H, после чего определяются и направления моментов $M_з$ и $M_у$ (рис. 13.22, *в*).

Рассмотрим колесо 3, которое находится под действием момента $M_з$ и реакций $P_{2'3}$ и P_{03}. Из уравнения моментов всех сил относительно точки A

$$M_з + P_{2'3} r_з \cos\alpha' = 0,$$

где α' — угол, образованный нормалью $n'-n'$ к профилям зубьев колес $2'$ и 3 и касательной $t'-t'$ к их начальным окружностям, вычисляем реакцию $P_{2'3}$:

$$P_{2'3} = -\frac{M_з}{r_з \cos\alpha'}.$$

Из уравнения всех сил, действующих на колесо 3,

$$\boldsymbol{P}_{2'3} + \boldsymbol{P}_{03} = 0$$

определяем реакцию $\boldsymbol{P}_{03}$:

$$\boldsymbol{P}_{03} = -\boldsymbol{P}_{2'3}.$$

Далее переходим к рассмотрению жестко связанных сателлитов 2 и $2'$ (рис. 13.22, *г*), которые находятся в равновесии под действием силы $\boldsymbol{P}_{32'} = -\boldsymbol{P}_{2'3}$, силы инерции $\boldsymbol{P}^n_{ис}$ и реакций $\boldsymbol{P}_{12}$ и $\boldsymbol{P}_{H2}$. Из уравнения моментов всех сил относительно оси сателлитов 2 и $2'$

$$P_{12} r_2 \cos\alpha + P_{32'} r_{2'} \cos\alpha' = 0,$$

где α — угол, образованный нормалью $n-n$ к профилям зубьев колес 1 и 2 и касательной $t-t$ к их начальным окружностям, определяем реакцию P_{12}:

$$P_{12} = -P_{32'} \frac{r_{2'} \cos\alpha'}{r_2 \cos\alpha}.$$

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на сателлиты 2 и $2'$,

$$\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{P}_{32'} + \boldsymbol{P}^n_{ис} + \boldsymbol{P}_{H2} = 0$$

определяем реакцию $\boldsymbol{P}_{H2}$. Решение этого уравнения с помощью плана сил показано на рис. 13.22, *д*.

Последним рассматриваем ведущее водило H (рис. 13. 22, *е*), которое находится в равновесии под действием силы $\boldsymbol{P}_{2H} = -\boldsymbol{P}_{H2}$, силы инерции $\boldsymbol{P}^n_{иH}$, уравновешивающего момента $M_у$ и реакции $\boldsymbol{P}_{0H}$. Из уравнения моментов относительно точки A

$$M_у + P_{2H}(AT) = 0$$

определяем уравновешивающий момент $M_у$:

$$M_у = -P_{2H}(AT) = -P_{2H}(r_3 + r_{2'})\cos\beta,$$

где β — угол между направлением силы $\boldsymbol{P}_{2H}$ и перпендикуляром к оси AB водила или равный ему угол между перпендикуляром AT к направлению силы $\boldsymbol{P}_{2H}$ и осью AB водила.

Из уравнения равновесия всех сил, действующих на водило,

$$\boldsymbol{P}_{2H} + \boldsymbol{P}^n_{иH} + \boldsymbol{P}_{0H} = 0$$

определяем реакцию P_{0H}. Решение этого уравнения с помощью плана сил показано на рис. 13.22, *ж*.

7°. В рассматриваемых примерах силового расчета механизмов мы предполагали все силы, действующие на каждое звено, расположенными в одной плоскости. В действительности силы лежат в различных плоскостях, что ясно видно на примере зубчатых механизмов, показанных на рис. 13.21, *а* или на рис. 13.22, *а*. Расположение действительных опор и их конструкции на этих рисунках не показаны. При расчете реальных конструкций, о чем было сказано выше, необходимо учитывать конструктивное оформление как промежуточных кинематических пар, так и опор. Соответственно должна составляться и расчетная схема элементов механизма. Например, нами были определены силы $\boldsymbol{P}_{32'}$, $\boldsymbol{P}_{12}$ и $\boldsymbol{P}_{H2}$, действующие на колеса 2 и 2′ (рис. 13.21, *г*). Все эти силы расположены в трех параллельных плоскостях. Сила $\boldsymbol{P}_{32'}$ расположена в плоскости колеса 2′, сила $\boldsymbol{P}_{12}$ — в плоскости колеса 2 и сила P_{H2} — в плоскости, перпендикулярной к оси колес 2 и 2′. Опоры оси колес 2 и 2′ могут быть конструктивно выполнены различным образом в зависимости от требований прочности, надежности, габаритов конструкции, условий сборки и т. д.

В каждом конкретном случае мы получаем ту или иную схему нагружения и можем определить истинные нагрузки на элементы кинематических пар с целью их расчета на прочность.

§ 59. Уравновешивание масс звеньев механизма на фундаменте

1°. При движении звеньев механизма в кинематических парах возникают дополнительные динамические нагрузки от сил инерции звеньев. Так как всякий механизм имеет неподвижное звено-стойку, то и стойка механизма также испытывает вполне определенные динамические нагрузки. В свою очередь через стойку эти нагрузки

передаются на фундамент механизма. Динамические нагрузки, возникающие при движении механизма, являются источниками дополнительных сил трения в кинематических парах, вибраций в звеньях и фундаменте, дополнительных напряжений в отдельных звеньях механизма, являются причиной шума и т. д. Поэтому при проектировании механизма часто ставится задача о рациональном подборе масс звеньев механизма, обеспечивающем полное или частичное погашение указанных динамических нагрузок. Эта задача носит название *задачи об уравновешивании масс механизма*. Так как при определении динамических нагрузок мы пользуемся по преимуществу приемами кинетостатики, то иногда эта задача носит также название *уравновешивания сил инерции звеньев механизма*.

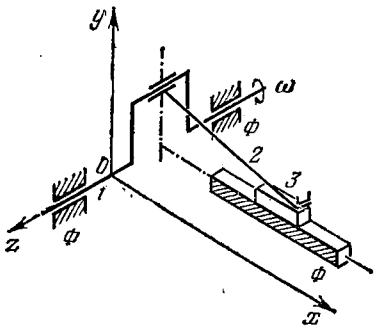


Рис. 13.23. Кривошипно-ползунный механизм на фундаменте

Задача уравновешивания сил инерции звеньев может быть разделена на две самостоятельные задачи: *задачу об уравновешивании динамических нагрузок на фундамент и задачу об уравновешивании динамических нагрузок в кинематических парах*.

2°. Рассмотрим вопрос об уравновешивании динамических нагрузок на стойку и фундамент механизма. Как известно, любая система сил, приложенных к твердому телу, приводится к одной силе, приложенной в произвольно выбранной точке, и к одной паре, причем вектор этой результирующей силы равен *главному вектору* данной системы сил, а момент пары равен *главному моменту* данной системы сил относительно выбранного центра приведения. Пусть дан механизм ABC (рис. 13.23), установленный на фундаменте $Ф$.

Приводим силы инерции всех звеньев механизма к силе и паре. Для этого выбираем какую-либо точку O механизма за центр приведения и за начало координат. Такой точкой удобно выбрать точку, лежащую где-либо на оси вращения ведущего звена *1*, вращающегося с угловой скоростью ω. Из точки O проводим взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz. Проекции на оси координат главного вектора всех сил инерции механизма выразятся так:

$$P_{ux} = -\sum m_i \ddot{x}_i, \quad P_{uy} = -\sum m_i \ddot{y}_i, \quad P_{uz} = -\sum m_i \ddot{z}_i. \quad (13.26)$$

В этих уравнениях m_i есть масса i-й точки звена, $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$ и $\ddot{z}_i$ суть проекции ускорений i-й точки на оси x, y и z, равные вторым производным от соответствующих координат по времени. Проекции на оси x, y и z главного момента всех сил инерции относительно начала

координат выразятся формулами

$$\left.\begin{aligned} M_{ux} &= \sum (y_i P_{uzi} - z_i P_{uyi}) = -\sum m_i (y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i), \\ M_{uy} &= \sum (z_i P_{uxi} - x_i P_{uzi}) = -\sum m_i (z_i \ddot{x}_i - x_i \ddot{z}_i), \\ M_{uz} &= \sum (x_i P_{uyi} - y_i P_{uxi}) = -\sum m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i). \end{aligned}\right\} \quad (13.27)$$

В случае плоского механизма удобно выбрать одну из осей, например ось Oz, перпендикулярной к плоскости, параллельно которой происходит движение механизма, как это сделано на рис. 13.23, а оси Ox и Oy расположить в этой плоскости. Тогда для плоского механизма будем иметь

$$P_{uz} = 0, \quad (13.28)$$

и формулы, определяющие проекции на оси координат главного вектора и главного момента сил инерции, примут вид

$$\left.\begin{aligned} &P_{ux} = -\sum m_i \ddot{x}_i, \quad P_{uy} = -\sum m_i \ddot{y}_i, \quad P_{uz} = 0, \\ &M_{ux} = -\sum z_i P_{uyi} = \sum m_i z_i \ddot{y}_i, \\ &M_{uy} = \sum z_i P_{uxi} = -\sum m_i z_i \ddot{x}_i, \\ &M_{uz} = -\sum m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i). \end{aligned}\right\} \quad (13.29)$$

Так как x_i и y_i суть функции угла поворота φ ведущего звена механизма, а угол φ есть функция времени t, то вторые производные от координат x_i и y_i по времени, как это было показано ранее (см. § 16), равны

$$\ddot{x}_i = \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} \omega^2 + \frac{dx_i}{d\varphi} \varepsilon, \quad \ddot{y}_i = \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} \omega^2 + \frac{dy_i}{d\varphi} \varepsilon.$$

Выражения $d^2x_i/d\varphi^2$, $d^2y_i/d\varphi^2$, $dy_i/d\varphi$ и $dx_i/d\varphi$ суть аналоги ускорений и скоростей i-й точки, ω — угловая скорость ведущего звена 1 и ε — угловое ускорение ведущего звена 1.

Подставив полученные выражения для $\ddot{x}_i$ и $\ddot{y}_i$ в формулы (13.29), получим

$$\left.\begin{aligned} P_{ux} &= -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi}, \\ P_{uy} &= -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi}, \\ M_{ux} &= \omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi}, \\ M_{uy} &= -\omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi}, \\ M_{uz} &= \omega^2 \left(\sum m_i y_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} - \sum m_i x_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} \right) + \\ &\quad + \varepsilon \left(\sum m_i y_i \frac{dx_i}{d\varphi} - \sum m_i x_i \frac{dy_i}{d\varphi} \right). \end{aligned}\right\} \quad (13.30)$$

Для полного уравновешивания сил инерции звеньев плоского механизма необходимо, чтобы проекции на оси координат результирующей сил инерции и главные моменты сил инерции относительно осей x, y и z равнялись нулю, т. е. чтобы удовлетворялись условия $P_{ux}=0$, $P_{uy}=0$, $M_{ux}=0$, $M_{uy}=0$, $M_{uz}=0$.

Воздействие на фундамент Φ момента M_{uz} относительно оси z, перпендикулярной к плоскости движения механизма, должно рассматриваться совместно с моментами заданных сил, приводящих в движение механизм, и с моментами сил сопротивления. Влияние всех этих моментов на режим движения механизма и на динамические нагрузки на фундамент и стойку будут рассмотрены далее в разделе динамики механизмов. Поэтому дальнейшему анализу подвергнем только следующие уравнения:

$$P_{ux}=0,\quad P_{uy}=0,\quad M_{ux}=0,\quad M_{uy}=0,$$

или

$$\left.\begin{aligned}
-\omega^2\sum m_i\frac{d^2x_i}{d\varphi^2}-\varepsilon\sum m_i\frac{dx_i}{d\varphi}=0,\\
-\omega^2\sum m_i\frac{d^2y_i}{d\varphi^2}-\varepsilon\sum m_i\frac{dy_i}{d\varphi}=0,\\
\omega^2\sum m_iz_i\frac{d^2y_i}{d\varphi^2}+\varepsilon\sum m_iz_i\frac{dy_i}{d\varphi}=0,\\
-\omega^2\sum m_iz_i\frac{d^2x_i}{d\varphi^2}-\varepsilon\sum m_iz_i\frac{dx_i}{d\varphi}=0.
\end{aligned}\right\}$$

Чтобы последние уравнения удовлетворялись при любых значениях угловой скорости ω и углового ускорения ε ведущего звена *1*, необходимо, чтобы каждая из сумм, входящих в эти уравнения, в отдельности равнялась нулю, т. е. необходимо, чтобы соблюдались следующие условия:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(I)}\quad \sum m_i\frac{d^2x_i}{d\varphi^2}=0, && \text{(V)}\quad \sum m_i\frac{dx_i}{d\varphi}=0,\\
&\text{(II)}\quad \sum m_i\frac{d^2y_i}{d\varphi^2}=0, && \text{(VI)}\quad \sum m_i\frac{dy_i}{d\varphi}=0,\\
&\text{(III)}\quad \sum m_iz_i\frac{d^2x_i}{d\varphi^2}=0, && \text{(VII)}\quad \sum m_iz_i\frac{dx_i}{d\varphi}=0,\\
&\text{(IV)}\quad \sum m_iz_i\frac{d^2y_i}{d\varphi^2}=0, && \text{(VIII)}\quad \sum m_iz_i\frac{dy_i}{d\varphi}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad (13.31)$$

Таким образом, для полного уравновешивания механизма необходимо так подобрать массы и размеры его звеньев, чтобы удовлетворялись уравнения (13.31). Из этих уравнений видно, что четыре уравнения (I)—(IV), в которые входят вторые производные, могут быть получены дифференцированием по φ четырех уравнений (V)—(VIII). Если удовлетворяются четыре последних уравнения,

то будут удовлетворяться и четыре первых. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением только условий

$$\left.\begin{aligned} &\text{(V)}\quad \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi}=0, \qquad \text{(VII)}\quad \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi}=0,\\ &\text{(VI)}\quad \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi}=0, \qquad \text{(VIII)}\quad \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi}=0. \end{aligned}\right\} \tag{13.32}$$

Рассмотрим выражения

$$\sum m_i x_i = m x_S \quad \text{и} \quad \sum m_i y_i = m y_S.$$

Эти выражения представляют собой *статические моменты масс* всех звеньев механизма и могут быть представлены как произведение массы m всех звеньев механизма на соответствующие координаты x_S и y_S его общего центра масс S. Дифференцируя эти выражения по φ, получаем

$$\sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = m \frac{dx_S}{d\varphi} \quad \text{и} \quad \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} = m \frac{dy_S}{d\varphi}.$$

Подставляя эти выражения в первые два уравнения (13.32), получаем следующие необходимые условия:

$$m \frac{dx_S}{d\varphi}=0 \quad \text{и} \quad m \frac{dy_S}{d\varphi}=0$$

или, так как $m \neq 0$, то

$$\frac{dx_S}{d\varphi}=0 \quad \text{и} \quad \frac{dy_S}{d\varphi}=0. \tag{13.33}$$

Рассмотрим далее выражения

$$\sum m_i z_i x_i \quad \text{и} \quad \sum m_i z_i y_i.$$

Эти суммы представляют собой так называемые *центробежные моменты инерции* относительно плоскостей xz и yz. Обозначим их соответственно через J_{xz} и J_{yz} и продифференцируем написанные выражения по φ. Имеем

$$\sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = \frac{dJ_{xz}}{d\varphi} \quad \text{и} \quad \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} = \frac{dJ_{yz}}{d\varphi},$$

так как $dz_i/d\varphi = 0$. Подставляя полученные выражения в третье и четвертое уравнения (13.32), находим

$$\frac{dJ_{xz}}{d\varphi}=0 \quad \text{и} \quad \frac{dJ_{yz}}{d\varphi}=0. \tag{13.34}$$

Таким образом, для уравновешивания сил инерции необходимо, чтобы удовлетворялись равенства (13.33) и (13.34). Из этих равенств непосредственно следует, что для уравновешивания сил

инерции звеньев плоского механизма необходимо выполнение следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} x_S &= \text{const}, & J_{xz} &= \text{const}, \\ y_S &= \text{const}, & J_{yz} &= \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{13.35}$$

Анализируя равенства (13.35), приходим к выводу, что для уравновешивания главного вектора сил инерции звеньев плоского механизма необходимо и достаточно так подобрать массы этого механизма, чтобы *общий центр масс всех звеньев механизма оставался неподвижным*. Для уравновешивания главных моментов относительно осей x и y необходимо и достаточно подобрать массы механизма так, чтобы *центробежные моменты инерции масс всех звеньев механизма относительно плоскостей xz и yz были постоянными*.

В практике машиностроения при уравновешивании механизмов указанные условия обычно выполняются только частично, в зависимости от конкретно поставленной задачи. Так, в некоторых механизмах уравновешивается полностью только результирующая сила инерции, в других — уравновешиваются только моменты сил инерции и частично результирующая сила инерции и т. д. В последующих параграфах настоящей главы мы и займемся рассмотрением как общих, так и частных приближенных методов уравновешивания.

§ 60. Определение положения общего центра масс механизма

1°. Как было показано в § 59, для уравновешивания главного вектора сил инерции механизма необходимо удовлетворить условию постоянства координат центра масс механизма. В настоящем параграфе рассмотрим вопрос об определении положения центра масс механизма.

В общем виде формулу для нахождения вектора $\boldsymbol{r}_S$, определяющего положение общего центра масс S отдельных точечно сосредоточенных масс m_1, m_2, m_3, ..., напишем так:

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_1^n m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_1^n m_i}. \tag{13.36}$$

Произведения $m_1\boldsymbol{r}_1$, $m_2\boldsymbol{r}_2$, ..., $m_n\boldsymbol{r}_n$ представляют собою статические моменты точечно сосредоточенных масс относительно произвольно выбранной точки.

Пользуясь формулой (13.36), можно для любой кинематической цепи определить положение ее центра масс. Пусть, например, задана кинематическая цепь $ABC \ldots FGK$, состоящая из n звеньев (рис. 13.24). Центрами масс звеньев пусть будут точки S_1, S_2, S_3, ..., S_n. Длины звеньев обозначим соответственно через l_1, l_2,

l_3, ..., l_n, а расстояния центров масс S_1, S_2, S_3, ..., S_n от крайних левых осей шарниров при обходе цепи по часовой стрелке — через a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Требуется определить положение общего центра масс S рассматриваемой цепи.

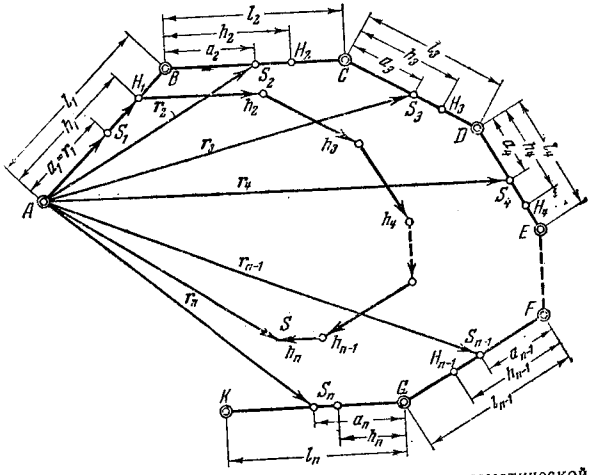


Рис. 13.24. К определению общего центра масс кинематической цепи.

Из точки A проводим векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, ..., $\boldsymbol{r}_n$, определяющие положение центров масс S_1, S_2, S_3, ..., S_n. По формуле (13.36) имеем

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}.$$

Векторы $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ могут быть представлены как суммы векторов:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{a}_1,\\
\boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{a}_2,\\
\boldsymbol{r}_3 &= \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{a}_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\boldsymbol{r}_n &= \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3 + \ldots + \boldsymbol{l}_{n-1} + \boldsymbol{a}_n;
\end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{a}_2) + \ldots + m_n(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3 + \ldots + \boldsymbol{l}_{n-1} + \boldsymbol{a}_n)}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}.$$

Открываем скобки и группируем члены:

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{a}_1 + (m_2 + m_3 + \ldots + m_n)\boldsymbol{l}_1}{m} + \frac{m_2\boldsymbol{a}_2 + (m_3 + m_4 + \ldots + m_n)\boldsymbol{l}_2}{m} + \ldots + \frac{m_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1} + m_n\boldsymbol{l}_{n-1}}{m} + \frac{m_n\boldsymbol{a}_n}{m}, \quad (13.37)$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n$.

Из равенства (13.37) следует, что первый член правой части этого равенства представляет собой некоторый вектор $\boldsymbol{h}_1$, определяющий положение центра масс звена *1* относительно точки A (рис. 13.25), если условно предположить, что в точке A звена сосредоточена масса всех предшествующих звеньев, в точке B — масса всех последующих звеньев и, наконец, в точке S_1 — масса m_1 самого звена AB (рис. 13.25). Так как до звена *1* звеньев нет (рис. 13.24), то масса, сосредоточенная в точке A, равна нулю. После звена *1* следуют звенья *2*, *3*, *4*, ..., общая масса которых равна $m_2 + m_3 + m_4 + \ldots + m_n$, и, нако-

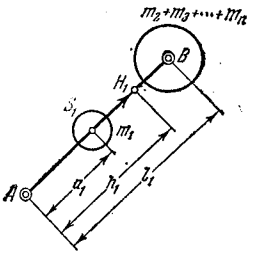


Рис. 13.25. Схема звена AB кинематической цепи, изображенной на рис. 13.24.

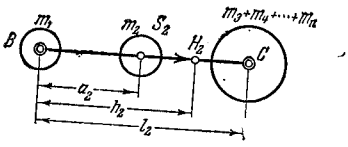


Рис. 13.26. Схема звена BC кинематической цепи, изображенной на рис. 13.24.

нец, в точке S_1 сосредоточена масса m_1. Чтобы определить центр этого условного расположения масс, воспользуемся формулой (13.36)

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{m_1 \boldsymbol{a}_1 + (m_2 + m_3 + \ldots + m_n)\, \boldsymbol{l}_1}{m}.$$

Сравнивая полученное выражение с первым членом формулы (13.37), мы видим их полную тождественность. Таким образом, первый член формулы (13.37) представляет собой вектор $\boldsymbol{h}_1$, определяющий положение некоторого фиктивного центра масс H_1.

Аналогично, если для звена *2* предположить, что в его точке B сосредоточена масса всех предшествующих ему звеньев, т. е. масса m_1, а в точке C сосредоточена масса всех последующих звеньев, т. е. масса $m_3 + m_4 + m_5 + \ldots + m_n$, и, наконец, в точке S_2 сосредоточена масса m_2 (рис. 13.26), то общий центр H_2 такого расположения масс определится вектором $\boldsymbol{h}_2$, представляющим собой второй член формулы (13.37). Имеем

$$\boldsymbol{h}_2 = \frac{m_2 \boldsymbol{a}_2 + (m_3 + m_4 + \ldots + m_n)\, \boldsymbol{l}_2}{m},$$

так как статический момент массы m_1, условно сосредоточенной в точке B, равен нулю.

Проведя аналогичные рассуждения для всех остальных звеньев, приходим к выводу, что формула (13.37) может быть представлена так:

$$\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3 + \ldots + \boldsymbol{h}_n \qquad (13.38)$$

и вектор общего центра масс может быть определен как геометрическая сумма векторов $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3, \ldots, \boldsymbol{h}_n$.

Векторы $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3, \ldots, \boldsymbol{h}_n$ параллельны осям AB, BC, CD, ..., GK соответствующих звеньев *1*, *2*, *3*... (рис. 13.24). Модули этих векторов постоянны вследствие неизменности масс звеньев и расстояний $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$. Таким образом, определение положения общего центра масс звеньев кинематической цепи сводится к геометрическому сложению постоянных по модулю векторов, направленных параллельно осям соответствующих звеньев.

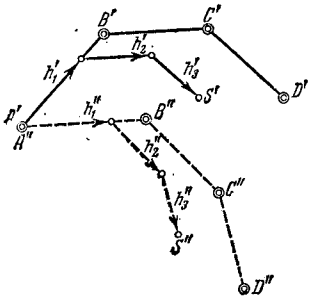


Рис. 13.27. Определение общего центра масс звеньев трехзвенной кинематической цепи в двух положениях.

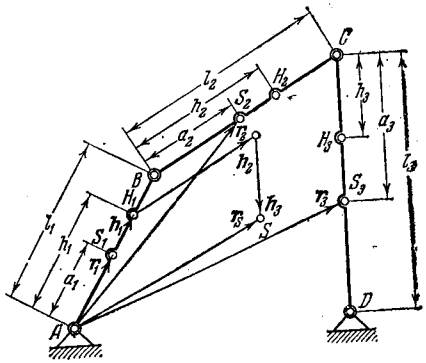


Рис. 13.28. К определению положения общего центра масс.

В сокращенном виде формула (13.38) может быть написана так:

$$\boldsymbol{r}_S = \sum_1^n \boldsymbol{h}_i. \qquad (13.39)$$

На рис. 13.27 показано определение с помощью векторов $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ и $\boldsymbol{h}_3$ двух положений S' и S'' общего центра масс S кинематической цепи $ABCD$, которая последовательно занимала положения $A'B'C'D'$ и $A''B''C''D''$. Точки $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ (рис. 13.24) будем называть *главными точками*, а векторы $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3, \ldots, \boldsymbol{h}_n$ — *векторами главных точек*.

2°. Применим рассмотренный метод к решению задачи об определении общего центра масс звеньев механизма шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 13.28). Пусть даны длины звеньев l_1, l_2 и l_3 и расстояния a_1, a_2 и a_3 их центров масс S_1, S_2 и S_3 от осей левых шарниров. За начальную точку возьмем точку A и соединим ее прямыми с точками S_1, S_2 и S_3. Векторы $\overline{AS_1}$, $\overline{AS_2}$ и $\overline{AS_3}$ соответственно обозначим через $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$. Если далее обозначить массы

звеньев через m_1, m_2 и m_3, а сумму всех масс — через m, то, согласно формуле (13.36), можно написать:

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{m}.$$

Пользуясь равенствами (13.37) и (13.38), получаем

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{a}_1 + (m_2+m_3)\,\boldsymbol{l}_1}{m} + \frac{m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{l}_2}{m} + \frac{m_3\boldsymbol{a}_3}{m} = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3, \quad (13.40)$$

где

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{m_1\boldsymbol{a}_1 + (m_2+m_3)\,\boldsymbol{l}_1}{m}, \quad (13.41)$$

$$\boldsymbol{h}_2 = \frac{m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{l}_2}{m}, \quad (13.42)$$

$$\boldsymbol{h}_3 = \frac{m_3\boldsymbol{a}_3}{m}. \quad (13.43)$$

Определяя векторы $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ и $\boldsymbol{h}_3$ и зная, что их сумма должна давать вектор $\boldsymbol{r}_S$, складываем векторы $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ и $\boldsymbol{h}_3$ (рис. 13.28). Результирующая этих векторов представляет собой вектор $\boldsymbol{r}_S$, а конец вектора $\boldsymbol{r}_S$ определяет точку S — центр масс всего механизма. Так как все главные точки H при перемещении звеньев не меняют своего положения относительно этих звеньев, то нетрудно, зная положение этих точек при одном каком-либо положении механизма, найти все последующие положения точки S путем построения ломаной линии, состоящей из отрезков h_1, h_2 и h_3, параллельных соответствующим направлениям звеньев механизма.

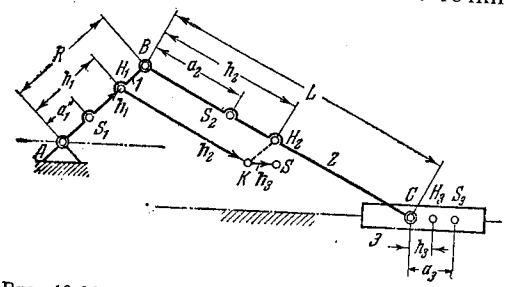


Рис. 13.29. К определению общего центра масс кривошипно-ползунного механизма.

3°. Рассмотрим вопрос об определении общего центра масс кривошипно-ползунного механизма. Пусть дан дезаксиальный кривошипно-ползунный механизм ABC, радиус кривошипа AB которого равен R, а длина шатуна BC равна L (рис. 13.29). Требуется определить положение центра масс S механизма.

Пусть масса кривошипа равна m_1, масса шатуна — m_2 и масса поступательно движущегося ползуна — m_3. Определяем главные векторы $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ и $\boldsymbol{h}_3$. Пусть центр масс кривошипа AB лежит в точке S_1 на расстоянии a_1 от точки A. Сосредоточиваем в точке B все последующие массы, а в точке A — предшествующие массы. Так как звено AB — первое, то в точке A сосредоточена масса, равная

нулю, в точке B сосредоточена масса $m_2 + m_3$, а в точке S_1 — масса m_1. Выражение для определения вектора $\boldsymbol{h}_1$ напишем так:

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3)\boldsymbol{R}}{m}. \qquad (13.44)$$

Модуль вектора $\boldsymbol{h}_1$ равен расстоянию от точки A до первой главной точки H_1 (рис. 13.29).

Переходим теперь к шатуну BC. Представим, что в точке B сосредоточена масса m_1 кривошипа AB. В точке S_2 сосредоточена масса m_2 шатуна BC, а в точке C — масса m_3 ползуна 3. Выражение для определения вектора $\boldsymbol{h}_2$ напишем так:

$$\boldsymbol{h}_2 = \frac{m_2 a_2 + m_3 \boldsymbol{L}}{m}. \qquad (13.45)$$

Для поступательно движущегося ползуна при определении вектора $\boldsymbol{h}_3$ надо сосредоточить массу $m_1 + m_2$ в точке C, а массу

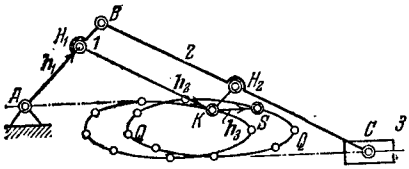


Рис. 13.30. Схема кривошипно-ползунного механизма с показанной на ней траекторией движения общего центра масс.

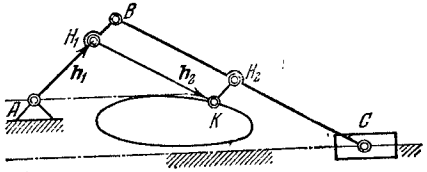


Рис. 13.31. Схема кривошипно-ползунного механизма с траекторией движения общего центра масс, построенной при помощи добавочной двухповодковой группы.

m_3 — в точке S_3 на расстоянии a_3 от точки C. Выражение для определения вектора $\boldsymbol{h}_3$ напишем так:

$$\boldsymbol{h}_3 = \frac{m_3 a_3}{m}. \qquad (13.46)$$

Согласно предыдущему вектор $\boldsymbol{h}_1$ имеет направление оси AB звена 1, вектор $\boldsymbol{h}_2$ параллелен оси BC звена 2, а вектор $\boldsymbol{h}_3$ параллелен оси движения ползуна 3. Для определения центра S масс всего механизма по оси звена AB (рис. 13.29) откладываем от точки A отрезок, равный h_1, из точки H_1 проводим прямую, параллельную звену BC, и откладываем на ней отрезок, равный h_2. Из точки K проводим прямую, параллельную перемещению звена 3, и откладываем на ней отрезок, равный h_3. Конец этого отрезка точка S и представляет собой центр масс всего механизма ABC.

Рассмотрим теперь, как перемещается найденный центр масс при движении механизма. Так как вектор h_3 при всех положениях механизма будет параллелен самому себе, то все его точки опишут одни и те же траектории. Так, например, точка K опишет такую же траекторию, как и центр масс S, только смещенную на отрезок,

равный h_3 (рис. 13.30). Таким образом, если траекторией точки S является некоторая кривая Q, то траекторией точки K будет та же кривая, но сдвинутая влево на величину, равную $h_3 = KS$. Кроме того, так как отрезок BH_2 равен и параллелен H_1K, то фигура H_1BH_2K представляет собой параллелограмм со сторонами постоянной длины $H_1B = KH_2$, $BH_2 = H_1K$ и с переменными углами. Траекторию точки K можно построить, если к механизму ABC присоединить группу II класса H_1KH_2 (рис. 13.31), состоящую из двух звеньев, длины которых H_1K и KH_2 и которые входят в три вращательные пары H_1, K и H_2. Траектория точки K этого механизма и представляет собой траекторию центра масс S механизма, сдвинутую на постоянный отрезок KS (рис. 13.30).

Указанный метод может быть применен для решения задачи определения центра масс и его траектории для механизмов любых классов.

§ 61. Уравновешивание сил инерции звеньев механизма

1°. Для уравновешивания только главного вектора сил инерции плоского механизма (без уравновешивания моментов сил инерции), как было показано выше (см. формулу (13.35)), достаточно, чтобы общий центр S масс всех звеньев механизма оставался неподвижным и удовлетворялось условие

$$x_S = \text{const} \text{ и } y_S = \text{const}. \quad (13.47)$$

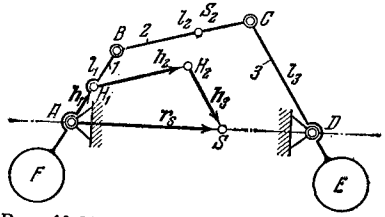


Рис. 13.32. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с противовесами на звеньях *1* и *3*.

Два равенства (13.47) могут быть заменены одним векторным

$$\boldsymbol{r}_S = \text{const}, \quad (13.48)$$

где $\boldsymbol{r}_S$ — вектор, определяющий положение общего центра масс звеньев механизма.

Как было показано в § 60, радиус-вектор $\boldsymbol{r}_S$ центра S масс звеньев механизма определяется как геометрическая сумма отрезков, представляющих векторы главных точек отдельных звеньев. Так, для механизма шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис.13.32), если обозначить массы звеньев *1*, *2* и *3* соответственно через m_1, m_2 и m_3, расстояния центров тяжести S_1, S_2 и S_3 этих звеньев от точек A, B и C — через a_1, a_2 и a_3, и длины звеньев — через l_1, l_2 и l_3, то радиус-вектор $\boldsymbol{r}_S$ центра S масс его звеньев будет равен геометрической сумме векторов главных точек

$$\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3,$$

где модули векторов $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ и $\boldsymbol{h}_3$ определяются по формулам (13.41), (13.42) и (13.43).

Для удовлетворения условия (13.48) необходимо, чтобы соблюдалось условие

$$\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{h}_2+\boldsymbol{h}_3=\text{const}. \tag{13.49}$$

Это условие может быть удовлетворено, если модули векторов $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ и $\boldsymbol{h}_3$ подобрать так, что векторный многоугольник, образованный ими, будет подобен четырехугольнику $ABCD$, образуемому осями звеньев механизма (рис. 13.32). При таком подборе модули h_1, h_2 и h_3 должны удовлетворять пропорциям

$$\frac{h_1}{l_1}=\frac{h_2}{l_2}=\frac{h_3}{l_3}. \tag{13.50}$$

Вследствие параллельности векторов $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ и $\boldsymbol{h}_3$ соответственно сторонам AB, BC и CD их векторный многоугольник является как бы вторым шарнирным четырехзвенным механизмом AH_1H_2S, подобным основному механизму, и следовательно, все точки фигуры AH_1H_2S описывают траектории, подобные траекториям соответствующих точек звеньев данного механизма. Общий центр S масс звеньев механизма $ABCD$ в этом случае находится на прямой AD и за все время движения механизма остается неподвижным, при этом удовлетворяется условие (13.47), или условие (13.48), и следовательно, силы инерции звеньев шарнирного четырехзвенника оказываются уравновешенными.

Механизм будет уравновешен при любом положении точки S на прямой AD как между точками A и D, так и вправо или влево от них.

Подставляя в пропорции (13.50) значения h_1, h_2 и h_3 из формул (13.41), (13.42) и (13.43), получаем для заданных размеров l_1, l_2 и l_3 следующие два уравнения:

$$m_1a_1=-m_2\frac{l_1}{l_2}(l_2-a_2), \tag{13.51}$$

$$m_2a_2=-m_3\frac{l_3}{l_2}(l_3-a_3). \tag{13.52}$$

Из этих уравнений непосредственно следует, что при решении задачи о подборе масс механизмов, удовлетворяющих условию его уравновешенности, можно получить бесчисленное множество решений, так как в эти два уравнения входят шесть переменных: m_1, m_2, m_3, a_1, a_2 и a_3, из которых четыре могут быть выбраны произвольно.

Из уравнений (13.51) и (13.52) также следует, что если задать одно из трех расстояний a_1, a_2 или a_3 на оси звена между шарнирами, остальные два расстояния до центров тяжести получатся за крайними шарнирами звена, и, считая, что расположение центра масс за шарнирами соответствует как бы установке *противовеса* (дополнительной массы), можно сказать, что уравновешивание результи-

рующей силы инерции звеньев механизма шарнирного четырехзвенника может быть достигнуто путем установки противовесов на двух его звеньях. Например, при $a_3 > l_3$ и при установке противовеса E на звене CD за точкой D (рис. 13.32) из уравнения (13.52) следует, что $a_2 > 0$, т. е. центр масс S_2 звена BC должен быть расположен от точки B вправо. Если при этом $a_2 < l_2$, то из уравнения (13.51) имеем $a_1 < 0$ и центр масс звена AB должен быть расположен вне звена, за точкой A. Следовательно, противовесы F и E необходимо расположить на звеньях *1* и *3* так, как это показано на рис. 13.32. Если $a_2 > l_2$, то $a_1 > 0$, и следовательно, звенья *2* и *3* имеют центры масс вне этих звеньев, то противовесы должны быть расположены на звеньях *2* и *3* так, как это показано на рис. 13.33.

2°. В практических расчетах задачу о подборе масс звеньев и положений их центров масс решают в следующем порядке. Задаются положением центра масс и массой одного из звеньев. Тогда массы и расстояния центров масс других звеньев легко подбираются с помощью уравнений (13.51) и (13.52). Например, задаваясь значениями m_3 и a_3, получаем из уравнения (13.52) значение m_2a_2, в котором можно задаваться одним из переменных, учитывая при этом соответствующий знак a_2. Подставляя далее полученные значения в уравнение (13.51), получаем значение m_1a_1, в котором также можно задаться одним из переменных, соблюдая знак у расстояния a_1. Точно такой же расчет может быть произведен путем первоначального выбора значений m_2 и a_2 или m_1 и a_1 и т. д.

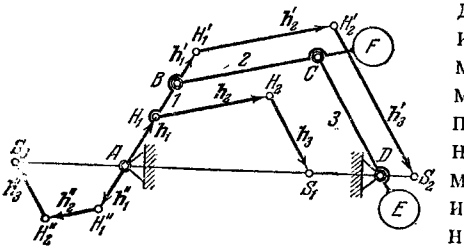


Рис. 13.33. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с противовесами на звеньях *2* и *3*.

При различных исходных заданиях можно получить различные схемы уравновешивания и получить положение точки S — центра масс механизма — в любом месте прямой AD или на ее продолжении, как это показано на рис. 13.33. При всех трех положениях центров масс S_1, S_2 и S_3 механизм будет уравновешен, но для положений S_2 и S_3, когда центр масс S находится вне отрезка AD, противовесы должны быть расположены на больших расстояниях от шарниров, что конструктивно неудобно. Кроме того, расположение общего центра масс S за точками A и D дает неравномерное распределение сил веса на опоры и невыгодно с точки зрения устойчивости механизма. Поэтому надо считать, что наиболее рациональным является расположение центра масс механизма между точками A и D. В каждом конкретном случае это расположение может быть задано в зависимости от поставленных конструктивных требований.

Условие (13.48) удовлетворяется, в частности, и тогда, когда вектор $\boldsymbol{r}_S = 0$. В этом случае центр масс механизма совпадает с точкой A. Такое условие практически приводит к неконструктивным размерам звеньев и величинам их масс.

3°. В кривошипно-ползунном механизме для удовлетворения условия (13.48) неподвижности центра масс S механизма ABC с кривошипом длины R и шатуном длины L необходимо (рис. 13.34), чтобы была неподвижна точка S или, что то же, точка K. Для этого она должна совпадать с точкой A, единственной неподвижной точкой механизма, и должно быть соблюдено условие $\boldsymbol{r}_S = 0$.

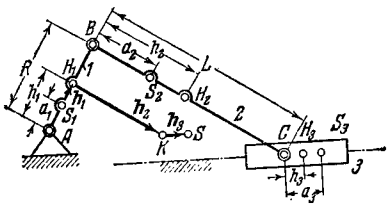


Рис. 13.34. Схема кривошипно-ползунного механизма с векторами главных точек.

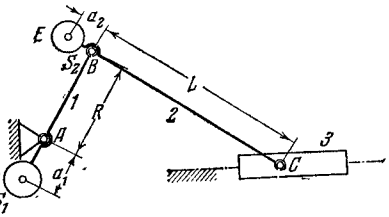


Рис. 13.35. Схема кривошипно-ползунного механизма с противовесами на кривошипе и шатуне.

Но это может иметь место только в том случае, если векторы $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ каждый в отдельности равны нулю:

$$\boldsymbol{h}_1 = 0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{h}_2 = 0.$$

Подставляя в эти уравнения значения h_1 и h_2, равные, согласно § 60 (см. уравнения (13.44) и (13.45)),

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{m_1\boldsymbol{a}_1 + (m_2 + m_3)\boldsymbol{R}}{m} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{h}_2 = \frac{m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{L}}{m},$$

получаем

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + (m_2 + m_3)\boldsymbol{R} = 0, \quad m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{L} = 0,$$

или

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = -(m_2 + m_3)\boldsymbol{R}, \tag{13.53}$$

$$m_2\boldsymbol{a}_2 = -m_3\boldsymbol{L}. \tag{13.54}$$

Из этих уравнений видно, что как a_1, так и a_2 отрицательны, и потому центры тяжести S_1 и S_2 должны лежать не вправо от точек A и B, а влево. Если масса m_3 ползуна *3* (рис. 13.35) задана, то, задаваясь в уравнении (13.54), например, расстоянием a_2, находим массу m_2, которая представляет собой массу шатуна *2* с насаженными на него противовесом E (рис. 13.35). Полученное значение массы m_2 подставляем далее в уравнение (13.53). Если теперь задаться расстоянием a_1, то из этого уравнения определится масса m_1, представляющая собой массу кривошипа *1* с насаженным на него противовесом F. Если задаться в уравнениях (13.53) и (13.54) желаемыми массами m_1, m_2 и m_3, то определятся необходимые расстояния a_2

и a_1 центров масс S_2 и S_1 шатуна *2* и кривошипа *1* соответственно от точек B и A. Так как по конструктивным соображениям противовес E обычно располагается вблизи от точки B и a_2 выбирается малым, то, как это видно из уравнения (13.54), масса противовеса получается весьма большой, что ведет к появлению добавочных нагрузок в шарнирах направляющей ползуна. Поэтому подобное полное уравновешивание результирующей силы инерции звеньев кривошипно-ползунных механизмов, несмотря на все его динамические достоинства, на практике применяется редко.

4°. В современных конструкциях чаще всего применяют частичное уравновешивание сил инерции звеньев кривошипно-ползунных механизмов.

Аналогично уравновешиванию шарнирных четырехзвенных механизмов и для кривошипно-ползунного механизма можно подобрать массы звеньев и их центры масс так, чтобы главные векторы $\boldsymbol{h}$ образовывали фигуру, подобную кривошипно-ползунному механизму, но, в отличие от механизма шарнирного четырехзвенника, центр масс кривошипно-ползунного механизма не будет неподвижным, а будет двигаться по прямой, параллельной оси ползуна. В этом случае в механизме останутся неуравновешенными силы инерции, направленные вдоль этой оси. Такое частичное уравновешивание весьма часто применяется на практике, например, в механизмах сельскохозяйственных машин, двигателей и др.

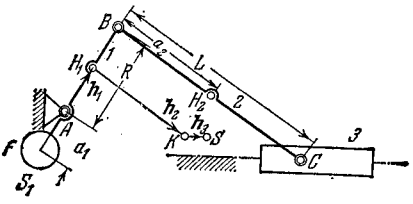


Рис. 13.36. Схема кривошипно-ползунного механизма с противовесом на кривошипе.

Чтобы центр масс S механизма или, что равносильно, точка K (рис. 13.36) двигались параллельно оси ползуна *3*, надо удовлетворить пропорции, аналогичной пропорции (13.50), а именно:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R}{L}, \tag{13.55}$$

где R — радиус кривошипа *1*, а L — длина шатуна *2*. В этом случае мы как бы получаем второй кривошипно-ползунный механизм с кривошипом длиной h_1 и шатуном длиной h_2. Звено h_1 этого механизма вращается с угловой скоростью, равной угловой скорости кривошипа *1*; точка K этого механизма, а следовательно, и точка S движутся по прямой, параллельной оси движения ползуна *3*.

Подставляя в пропорцию (13.55) величины

$$h_1 = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) R}{m} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{m_2 a_2 + m_3 L}{m},$$

получаем

$$\frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) R}{m_2 a_2 + m_3 L} = \frac{R}{L}.$$

При практических расчетах величины a_2, R и L в большинстве случаев бывают заданы. В этом случае имеем

$$m_1 a_1 = -m_2 \frac{R}{L}(L - a_2). \qquad (13.56)$$

Так как обычно центр масс шатуна лежит между точками B и C ($a_2 < L$), то центр тяжести S_1 кривошипа *1* должен лежать ниже точки A, потому что величина $m_1 a_1$ в уравнении (13.56) стоит со знаком минус. Определив из уравнения (13.56) необходимую массу кривошипа *1*, установим, что на фундамент будут действовать только силы инерции, параллельные оси движения ползуна, и следовательно, механизм и фундамент могут под действием этих сил перемещаться только в указанном направлении. Подобное уравновешивание весьма часто применяется на практике, но оно решает задачу об уравновешивании сил инерции только частично, причем в некоторых случаях слагающие силы инерции, действующие по направлению движения ползуна, могут достигать значительной величины.

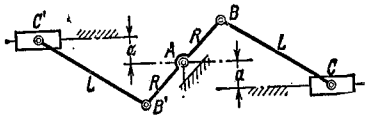


Рис. 13.37. Схема сдвоенного самоуравновешенного кривошипно-ползунного механизма.

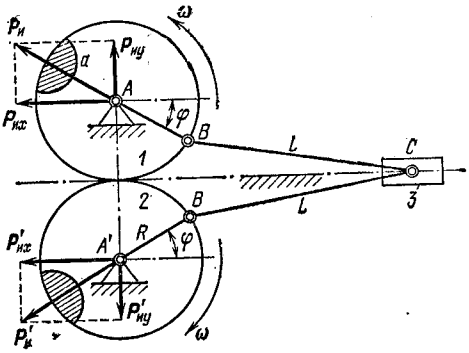


Рис. 13.38. Схема кривошипно-ползунного механизма с установленными на зубчатых колесах противовесами.

5°. В некоторых случаях на практике частичное или даже полное уравновешивание сил инерции звеньев достигается установкой симметрично расположенных механизмов с равными массами симметрично расположенных звеньев, благодаря чему получается самоуравновешивание механизма в целом. На рис. 13.37 показана одна из таких схем. Механизм состоит из двух симметрично расположенных кривошипно-ползунных механизмов ABC и $AB'C'$. В этом механизме силы инерции масс звеньев уравновешиваются, но остается неуравновешенной пара сил инерции.

Далее следует указать на схему уравновешивания сил инерции ползуна *3* кривошипно-ползунного механизма, показанную на рис. 13.38.

На валах A и A' жестко укрепляются два одинаковых зубчатых колеса *1* и *2*, снабженные двумя противовесами a равной массы.

При своем вращении противовесы развивают силы инерции $P_и$ и $P'_и$, равные по величине

$$P_и = P'_и = m\omega^2 s,$$

где m — масса противовеса и s — расстояние центра масс противовеса от оси вращения.

Разлагая эти силы по горизонтальному и вертикальному направлениям, получаем:

$$P_{иx} = -m\omega^2 s\cos\varphi,$$
$$P'_{иx} = -m\omega^2 s\cos\varphi,$$
$$P_{иy} = m\omega^2 s\sin\varphi,$$
$$P'_{иy} = -m\omega^2 s\sin\varphi.$$

Силы $P_{иy}$ и $P'_{иy}$ взаимно уравновешиваются, а силы $P_{иx}$ и $P'_{иx}$ складываются, создавая силу

$$2P_{иx} = -2m\omega^2 s\cos\varphi.$$

Эта сила передается на опоры механизма и уравновешивает так называемые *силы инерции первого порядка* (см. § 24, формулу (5.42)), если подобрать величины масс так, чтобы удовлетворялось условие

$$m_C\omega^2 R\cos\varphi = 2m\omega^2 s\cos\varphi,$$

где m_C — масса ползуна C. В этом случае масса противовеса m и расстояние s его центра масс до оси вращения должны быть связаны соотношением $ms = m_C\frac{R}{2}$.

В рассматриваемой схеме уравновешивания колеса *1* и *2* с равными противовесами не создают никакой дополнительной пары.

В настоящем курсе мы не рассматриваем вопроса об уравновешивании составляющих главного момента сил инерции по осям x и y (см. § 59). Этот вопрос обычно рассматривается в специальных курсах динамики двигателей и других машин.

§ 62. Уравновешивание вращающихся звеньев

1°. Решение задачи об уравновешивании динамических нагрузок в кинематических парах механизмов от сил инерции звеньев в общем виде представляет весьма большие практические трудности. Решение этой задачи заключается в таком распределении масс звеньев, при котором полностью или частично устраняются динамические нагрузки. При этом подборе масс конфигурации звеньев и их вес в большинстве случаев получаются мало конструктивными, а потому такой способ применяется главным образом при уравновешивании вращающихся деталей, обладающих значительной массой и большими угловыми скоростями. Сюда надо отнести валы

быстроходных двигателей, барабаны центрифуг, турбины, тарелки сепараторов, барабаны молотилок, якори динамомашин, веретено, роторы гироскопов и т. д. Число оборотов некоторых из этих деталей достигает 20 000÷50 000 в минуту и более. При этих условиях работы чрезвычайно важным является вопрос о правильном распределении масс этих двигателей относительно их оси вращения.

Пусть, например, мы имеем коленчатый вал A (рис. 13.39), вращающийся вокруг неподвижной оси z—z с угловой скоростью ω. Как это было показано в § 59, чтобы подшипники B не испытывали дополнительных динамических давлений от сил инерции масс вала, необходимым и достаточным является условие равенства нулю главного вектора сил инерции масс материальных точек вала.

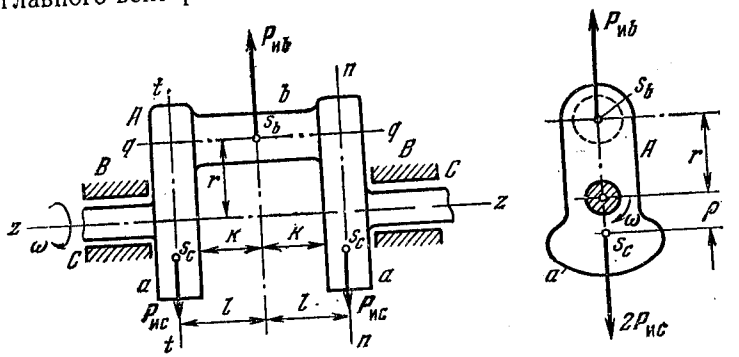


Рис. 13.39. Коленчатый вал двигателя.

Как известно из теоретической механики, это условие всегда удовлетворяется, если центр масс вращающегося звена лежит на его оси вращения, которая должна быть одной из его главных осей инерции. Если конструктивное оформление вала (рис. 13.39) удовлетворяет этому условию, то вал получается уравновешенным, что при проектировании достигается соответствующим выбором формы уравновешиваемой детали. Например, коленчатый вал (рис. 13.39) имеет фигурные щеки a, коренные шейки C и шатунную шейку b. Рассматривая в отдельности эти элементы вала, мы видим, что центр масс материальных точек коренных шеек располагается на оси вращения z—z вала. Центр масс S_b точек шатунной шейки b находится на ее геометрической оси q—q на равных расстояниях от щек a. Центробежная сила инерции $\boldsymbol{P}_{иb}$ шейки b равна по величине

$$P_{иb} = m_b \omega^2 r, \tag{13.57}$$

где m_b — общая масса шатунной шейки.

Сила инерции $\boldsymbol{P}_{иb}$ может быть полностью уравновешена соответствующим подбором масс m_C щек и их центров масс S_C (рис. 13.39).

Для этого центры масс S_C должны лежать в плоскостях $t—t$ и $n—n$, симметрично расположенных относительно точки S_b на расстоянии ρ от оси $z—z$ вала так, чтобы удовлетворялось условие

$$2m_C\rho = m_b r. \tag{13.58}$$

В самом деле, если помножить правую и левую части равенства на ω^2, то получим

$$2m_C\omega^2\rho = m_b\omega^2 r,$$

или, согласно формуле (13.57),

$$2P_{иC} = P_{иb}.$$

Таким образом, суммарная сила инерции $2\boldsymbol{P}_{иC}$ щек C полностью уравновешивает силу инерции $\boldsymbol{P}_{иb}$ шатунной шейки. Из уравнения

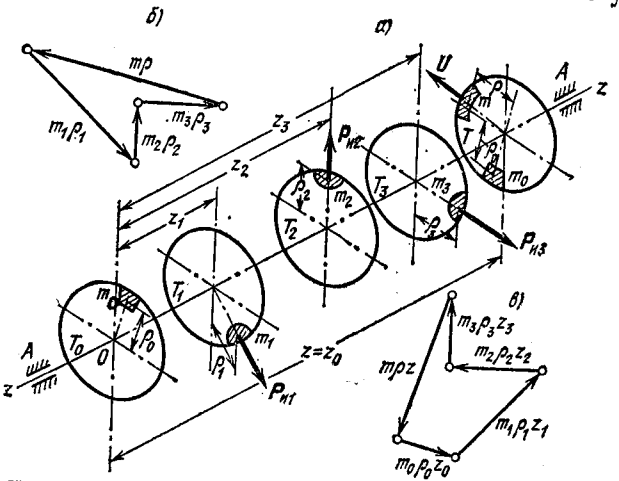


Рис. 13.40. К уравновешиванию нескольких масс, жесткоустановленных на валу.

моментов всех сил инерции относительно точки S_b следует, что момент от всех сил инерции масс вала также равен нулю. Таким образом, мы имеем равенство нулю как главного вектора сил инерции, так и главного вектора момента от сил инерции вала, т. е. этот вал полностью уравновешен.

При этом, как было показано выше в § 59, динамические нагрузки от сил инерции масс звеньев будут равны нулю и при вращении вала с угловым ускорением ε.

2°. Рассмотрим более общий случай уравновешивания вращающегося звена, когда с валом, вращающимся в подшипниках A, жестко связаны заданные массы m_1, m_2 и m_3 (рис. 13.40, *а*). Пусть центры масс m_1, m_2 и m_3 расположены в трех плоскостях T_1, T_2

и T_3, перпендикулярных к оси вращения $z—z$, на расстояниях ρ_1, ρ_2 и ρ_3. Величины центробежных сил инерции, развиваемых этими массами, равны

$$P_{и1}=m_1\omega^2\rho_1, \quad P_{и2}=m_2\omega^2\rho_2 \quad \text{и} \quad P_{и3}=m_3\omega^2\rho_3.$$

Переносим все эти силы в какую-либо плоскость T_0, проведенную через произвольную точку O вала, перпендикулярно к оси $z—z$. Для этого в точке O каждый раз прикладываем по две равные, но противоположно направленные силы, величины которых равны $P_{и1}$, $P_{и2}$ и $P_{и3}$. Далее складываем все перенесенные силы, для чего строим силовой многоугольник (рис. 13.40, *б*). Так как величины сил $P_{и1}$, $P_{и2}$ и $P_{и3}$ пропорциональны произведениям масс m на соответствующие расстояния ρ, то вместо сил $\boldsymbol{P}_{и1}$, $\boldsymbol{P}_{и2}$ и $\boldsymbol{P}_{и3}$ можно откладывать в силовом многоугольнике произведения $m_1\boldsymbol{\rho}_1$, $m_2\boldsymbol{\rho}_2$ и $m_3\boldsymbol{\rho}_3$, являющиеся статическими моментами масс относительно оси вращения. Вектор $m\boldsymbol{\rho}$ определяет величину уравновешивающей силы $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{U}=m\omega^2\boldsymbol{\rho}. \tag{13.59}$$

Уравновешивающая масса m может быть установлена в любой точке по длине вала и на любом расстоянии ρ от его оси вращения, отложенном в направлении вектора $m\boldsymbol{\rho}$ (рис. 13.40, *а*). Необходимо только, чтобы произведение $m\rho$ удовлетворяло плану сил, построенному на рис. 13.40, *б*. В рассматриваемом примере центр массы m расположен в плоскости T.

Установкой противовеса, удовлетворяющего формуле (13.59), уравновешиваются статические нагрузки на подшипники A от результирующей силы инерции. Для уравновешивания динамических нагрузок от моментов сил инерции находим моменты M_1, M_2 и M_3 этих сил относительно точки O. Имеем

$$M_1=m_1\omega^2\rho_1z_1, \quad M_2=m_2\omega^2\rho_2z_2, \quad M_3=m_3\omega^2\rho_3z_3, \quad M=m\omega^2\rho z. \tag{13.60}$$

Строим многоугольник моментов (рис. 13.40, *в*). Так как плоскости действия всех пар содержат ось $z—z$, то многоугольник моментов лежит в плоскости, перпендикулярной к оси $z—z$. Направление векторов моментов выбираем так, чтобы, смотря вдоль по вектору, видеть вращение происходящим против часовой стрелки. Так как величина ω^2 в равенствах (13.60) входит в виде постоянного множителя, то величину вектора результирующего момента можно подсчитать, не вводя этого множителя.

Замыкающий вектор $m_0\rho_0z_0$ в многоугольнике моментов (рис. 13.40, *в*) определит величину момента и плоскости действия уравновешивающей пары. Обозначим этот момент через M_0. Имеем тогда

$$M_0=m_0\omega^2\rho_0z_0. \tag{13.61}$$

Плоскость действия уравновешивающей пары вполне определится замыкающим вектором $\overline{m_0 \rho_0 z_0}$. Она перпендикулярна к этому вектору и содержит ось z—z. Уравновешивающие массы m_0 могут быть в этой плоскости установлены в любых точках вала. В качестве плоскостей установки уравновешивающих грузов с массой m_0 по оси z—z выбираем те же плоскости T_0 и T. Тогда при заданном расстоянии z_0 между этими плоскостями необходимо подобрать такие значения масс m_0 и расстояний ρ_0 их центров масс от оси z—z, чтобы удовлетворялось равенство (13.61). Одна из этих масс устанавливается так, чтобы ее центр масс находился в плоскости T_0; другая масса устанавливается так, чтобы ее центр масс находился в плоскости T. Знак момента этой пары определяется замыкающим вектором многоугольника моментов (рис. 13.40, *в*).

Таким образом, установкой двух противовесов массы m_0 и одного противовеса массы m достигается полное уравновешивание всех масс, закрепленных на валу. Так как один из противовесов массы m_0 расположен в той же плоскости T (рис. 13.40, *а*), что и противовес массы m, то массы m_0 и m можно заменить одной массой. Следовательно, полное уравновешивание масс, закрепленных на валу, может быть достигнуто установкой двух противовесов, центры масс которых лежат в двух *произвольно выбранных плоскостях*.

3°. Правильно спроектированная с точки зрения полного уравновешивания деталь все же может иметь некоторую неуравновешенность вследствие неоднородности материала, из которого она изготовлена, неточности обработки и т. д. Поэтому все быстро вращающиеся детали проверяют опытно на специальных машинах, которые называются *балансировочными машинами*. Конструкции балансировочных машин очень разнообразны, но большинство из них основано на принципе установки испытуемой детали на упругое основание (люлька на пружинах, подшипники на упругом основании и т. д.) и сообщения этой детали скорости, близкой к резонансной. Тогда неуравновешенные силы создают значительные амплитуды колебаний, которые регистрируются специальными устройствами, позволяющими определить места, в которых надо установить уравновешивающие массы или удалить лишнее количество материала.

Рассмотрим процесс динамической балансировки на станке Б. В. Шитикова, схема которого показана на рис. 13.41. Балансируемая деталь *1*, представляющая собой в рассматриваемом случае ротор с фланцем B, укладывается в подшипники люльки *2*, которая свободно вращается вокруг оси O—O. Второй конец люльки в точке A скреплен с пружиной *3*, имеющей регулировку, позволяющую устанавливать вал z—z горизонтально. Амплитуды колебаний люльки вокруг оси O—O записываются индикатором D.

Как это было показано выше, все центробежные силы отдельных частиц вращающегося тела могут быть сведены к эквивалентной

системе двух сил $P_{и1}$ и $P_{и2}$, лежащих в двух произвольно выбранных плоскостях I и II (рис. 13.42). В рассматриваемом примере плоскость I проходит через среднее сечение фланца (рис. 13.41). Эти силы могут быть представлены как центробежные силы, возникающие от двух точечных масс m_1 и m_2, расположенных в плоскостях I и II на расстояниях ρ_1 и ρ_2 от оси вращения. Силы $P_{и1}$ и $P_{и2}$ равны по величине

$$P_{и1} = m_1\omega^2\rho_1$$

и

$$P_{и2} = m_2\omega^2\rho_2.$$

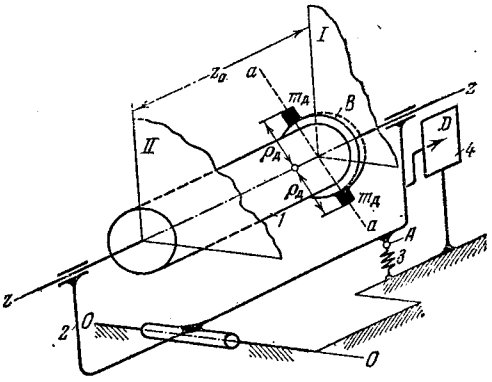


Рис. 13.41. Схема балансировочного станка Шитикова.

Как это было показано выше, угловая скорость ω^2 входит в выражения для сил постоянным множителем. Поэтому величины сил $P_{и1}$ и $P_{и2}$ можно характеризовать статическими моментами масс $m_1\rho_1$ и $m_2\rho_2$.

Если в плоскостях I и II установить массы m_I и m_{II} на расстояниях r_I и r_{II}, так чтобы удовлетворялись условия

$$m_1\rho_1 = -m_1r_1 \qquad (13.62)$$

и

$$m_2\rho_2 = -m_{II}r_{II}, \qquad (13.63)$$

то силы инерции ротора будут полностью уравновешены.

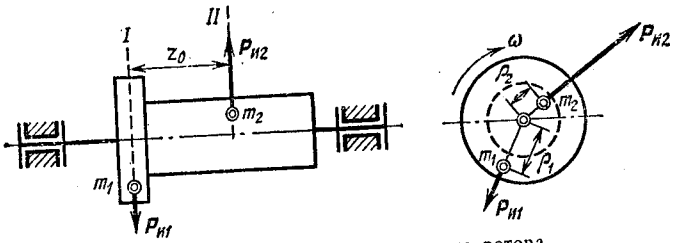


Рис. 13.42. Схема балансируемого ротора.

Если вывести раму с ротором из равновесия (например, надавить на один из подшипников, а потом отпустить его), то рама придет в колебательное движение, которое вследствие сопротивления воздуха и трения в оси O—O будет затухающим и прекратится.

Частота k этого колебания является постоянным параметром для данной установки; она зависит от момента инерции колеблю-

щейся системы относительно оси OO, жесткости пружины и в малой степени от сопротивления среды и называется частотой *собственных (свободных) колебаний системы.*

Установим ротор в подшипниках так, чтобы плоскость II (она, вообще говоря, может быть выбрана произвольно) проходила через ось вращения $O—O$. Приведем ротор в быстрое вращение. Вертикальная слагающая центробежной силы $P_{и1}$, равная $P_{и1}\cos\omega t$ (рис. 13.43), создает вокруг оси $O—O$ момент $M_{и1} = P_{и1}z_0\cos\omega t$. Сила $P_{и2}$ располагается в одной плоскости II с осью $O—O$, и потому момент ее вокруг этой оси равен нулю.

Момент $M_{и1}$, изменяющийся по гармоническому закону с частотой ω, равной угловой скорости ротора, вызывает вынужденные незатухающие колебания люльки. По мере убывания угловой скорости ω ротора уменьшается и частота изменения возмущающего момента $M_{и1}$. Когда эта частота станет близкой к собственной частоте колебаний системы k, возникает состояние резонанса; в это время амплитуда колебаний люльки станет наибольшей. Из теории колебаний известно, что при резонансе амплитуда A вынужденных колебаний может считаться пропорциональной амплитуде возмущающего фактора:

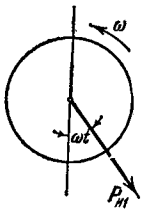


Рис. 13.43. Вектор центробежной силы неуравновешенной массы ротора.

$$A = \mu P_{и1}, \tag{13.64}$$

где μ — коэффициент пропорциональности, зависящий от постоянных параметров данной установки.

Если определить постоянную μ данного станка, то по амплитуде A, зафиксированной на индикаторе D, можно установить величину силы $P_{и1}$, определяющей дисбаланс, отнесенный к плоскости I. Это дает возможность определить искомое значение $m_I r_I$.

Таким же образом, повторив испытание, но установив ротор плоскостью I на место плоскости II, можно определить и значение $m_{II} r_{II}$.

4°. Однако остался нерешенным еще вопрос о линии действия сил $P_{и1}$ и $P_{и2}$, т. е. об отыскании тех направлений в плоскостях I и II, на которых нужно укрепить противовесы с точечными массами m_I и m_{II}.

Для определения коэффициента пропорциональности μ и направлений, в которых необходимо установить массы m_I и m_{II}, можно воспользоваться приемом, который сводится к тому, что к балансируемой детали искусственно присоединяется дополнительная масса $m_д$ на некотором расстоянии $\rho_д$ от оси вращения детали. Обычно в качестве такой массы берут кусок пластелина массы $m_д$, и этот кусок прикрепляют к поверхности балансируемой детали. На рис. 13.41 куски этой массы показаны на поверхности фланца B. Масса $m_д$ носит название *корректирующей массы.*

Разгоняем ротор до быстрого вращения, после чего отключаем приводное устройство, переводим ротор в режим выбега и измеряем величину максимальной амплитуды на индикаторе D. Пусть эта амплитуда равна A_1 (*мм*).

Устанавливаем корректирующую массу $m_д$ (рис. 13.41) в плоскости I на расстоянии $\rho_д$ от оси z—z, равном внешнему радиусу фланца, приводим во вращение ротор и снова замеряем на индикаторе наибольшую амплитуду. Пусть эта амплитуда равна A_2. Наконец, устанавливаем корректирующую массу $m_д$ на том же расстоянии $\rho_д$ от центра фланца B, но по другую сторону от него, и приводим во вращение ротор и снова замеряем наибольшую амплитуду. Пусть эта амплитуда равна A_3. По полученным амплитудам A_1, A_2 и A_3 можно определить величину m_1r_1 (см. формулу

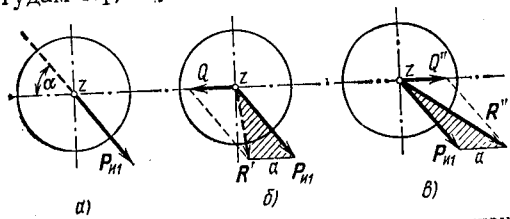


Рис. 13.44. К определению положения корректирующей массы при уравновешивании ротора: *а*) положение вектора центробежной силы при первом испытании; *б*) векторная диаграмма действующих сил после установки корректирующей массы; *в*) векторная диаграмма действующих сил при третьем испытании с корректирующей массой.

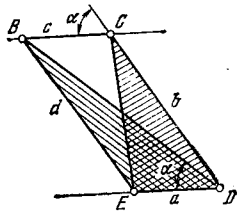


Рис. 13.45. Диаграмма для определения статического момента противовеса, уравновешивающего ротор.

(13.64)). На рис. 13.44, *а* показана сила $P_{и1}$, вызывающая вынужденные колебания в первом испытании.

На рис. 13.44, *б* показана сила $\boldsymbol{R}'$, полученная вследствие установки корректирующей массы $m_д$ при втором испытании. Имеем

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{P}_{и1} + \boldsymbol{Q}' = \overline{m_1r_1} + \overline{m_д\rho_д}.$$

На рис. 13.44, *в* показана сила $\boldsymbol{R}''$, полученная вследствие установки корректирующей массы при третьем испытании. Имеем

$$\boldsymbol{R}'' = \boldsymbol{P}_{и1} + \boldsymbol{Q}'' = \boldsymbol{P}_{и1} - \boldsymbol{Q}' = \overline{m_1r_1} - \overline{m_д\rho_д},$$

так как $\boldsymbol{Q}'' = -\boldsymbol{Q}_1$.

Совместим заштрихованные на рис. 13.44, *б* и 13.44, *в* треугольники так, чтобы равные их стороны a совпадали (рис. 13.45). Тогда получаем параллелограмм $BCDE$, у которого стороны a, b, c и d и диагонали связаны условием

$$2c^2 + 2d^2 = (BD)^2 + (CE)^2$$

или

$$c = \sqrt{\frac{(BD)^2 + (CE)^2 - 2d^2}{2}}. \qquad (13.65)$$

Так как, согласно равенству (13.64), $A_1 = \mu P_{и1}$, $A_2 = \mu R'$, $A_3 = \mu R''$ и $A_д = \mu Q' = \mu Q''$, где μ — общий коэффициент пропорциональности, зависящий от параметров установки, то, заменяя в равенстве (13.65) отрезки (c), (d), (BD) и (CE) их значениями, равными

$$c = Q' = Q'' = \frac{A_д}{\mu}, \quad d = P_{и1} = \frac{A_1}{\mu},$$

$$(BD) = R'' = \frac{A_3}{\mu} \quad \text{и} \quad (CE) = R' = \frac{A_2}{\mu},$$

получаем

$$A_д = \sqrt{\frac{A_3^2 + A_2^2 - 2A_1^2}{2}}. \tag{13.66}$$

Так как амплитуды A_1, A_2 и A_3 нами могут быть замерены, то из формулы (13.66) можно определить амплитуду $A_д$. Согласно условию (13.64)

$$A_д = \mu Q' = \mu Q'' = \mu m_д \rho_д.$$

Из последнего равенства определяем коэффициент пропорциональности μ:

$$\mu = \frac{A_д}{m_д \rho_д}.$$

Величина статического момента $m_1 r_1$ уравновешивающего противовеса может быть теперь получена из формулы

$$m_1 r_1 = P_{и1} = \frac{A_1}{\mu} = \frac{A_1}{A_д} m_д \rho_д. \tag{13.67}$$

Угол α (рис. 13.44, $а$) между направлением, на котором надо установить противовес m_1, и направлением установки корректирующей массы $m_д$ определяется, согласно рис. 13.45, из соотношения

$$\alpha_{1,2} = \arccos \frac{A_1^2 + A_д^2 - A_3^2}{2A_1 A_д}. \tag{13.68}$$

Из последнего соотношения будут получены два значения угла α. Вопрос о пригодности того или другого значения решается испытанием на станке: противовес m_1 на выбранном расстоянии r_1 устанавливается сначала под углом α_1, а затем под углом α_2; пригодной является та установка, при которой вибрации отсутствуют (даже при критической, т. е. резонансной угловой скорости).

Поменяв местами плоскости *I* и *II*, т. е. установив ротор на станке так, чтобы его ось была повернута на 180° относительно первоначального положения, мы тем же способом можем найти статический момент $m_{II} r_{II}$ уравновешивающего противовеса m_{II}, устанавливаемого в плоскости *II*. Практически устранение неуравновешенности производится или удалением части массы детали, или закреплением дополнительной массы.

Таким образом, установив в плоскостях *I* и *II* противовесы m_1 и m_{II}, мы полностью уравновешиваем силы инерции ротора.

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

ГЛАВА XIV

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЗМОВ

§ 63. Режимы движения механизмов

1°. *Полным временем движения механизма* назовем промежуток времени от момента начала движения механизма до момента конца его движения. Так как закон движения всех звеньев механизма определяется законом движения ведущего звена, то полным временем движения механизма является также промежуток времени от момента начала движения *ведущего звена* до момента конца его движения.

Полное время движения механизма состоит из трех частей:

а) *времени разбега*,

б) *времени установившегося движения*,

в) *времени выбега*.

Время разбега характеризуется возрастанием скорости ведущего звена от нулевого значения до некоторого среднего значения, соответствующего нормальной рабочей скорости ведущего звена механизма. Во *время установившегося движения* обычно скорость ведущего звена механизма колеблется около среднего значения, соответствующего нормальной рабочей скорости ведущего звена механизма, периодически при этом повторяющейся. *Время выбега* характеризуется убыванием скорости ведущего звена от среднего значения нормальной рабочей скорости механизма до нулевого ее значения.

На рис. 14.1 показана так называемая *тахограмма механизма* — кривая $\omega = \omega(t)$ зависимости угловой скорости ω ведущего звена от времени t. Полное время T движения механизма состоит из времени $T_р$ разбега, времени $T_{у.д}$ установившегося движения и времени $T_в$ выбега. Рис. 14.1 показывает, что в течение времени установившегося движения кривая скорости $\omega = \omega(t)$ обычно имеет некоторые периодические колебания около среднего значения $\omega_{ср}$, соответствующего нормальной рабочей скорости ведущего звена.

Циклом движения ведущего звена механизма называется промежуток времени, по истечении которого положение, скорость и ускорение ведущего звена принимают первоначальные значения. На рис. 14.1 время установившегося движения имеет четыре цикла. Каждому циклу движения соответствует время $T_ц$. Таким образом, общее время T равно

$$T = T_р + T_{у.д} + T_в,$$

а время $T_{у.д}$ равно

$$T_{у.д} = kT_ц,$$

где k — число циклов.

Продолжительность времени $T_р$, времени $T_в$ и времени $T_ц$ зависит от соотношений между действующими силами, массами и метрическими параметрами механизма, и если эти соотношения известны и достаточны, то всегда можно определить время $T_р$ разбега, время $T_в$ выбега и время $T_ц$ одного цикла движения.

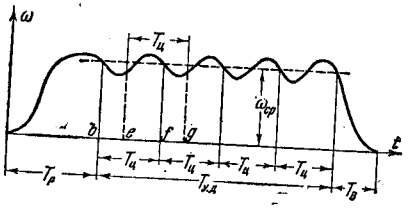


Рис. 14.1. Тахограмма механизма.

Полное время $T_{у.д}$ установившегося движения может состоять из любого числа циклов движения и зависит от того, сколь долго необходимо и возможно поддерживать рабочий режим движения механизма — режим со средней рабочей угловой скоростью $\omega_{ср}$. Необходимо отметить, что многие машины и механизмы могут и не иметь четко разграниченных стадий движения. Так, например, в грузоподъемных кранах, экскаваторах, некоторых транспортирующих машинах и др. полное время движения того или иного механизма может состоять из времени разгона и времени выбега, и в этих механизмах отсутствует время установившегося движения с характерными для него циклами движения.

Периодическим движением механизма называется такое движение, при котором в течение некоторого промежутка времени механизм обладает постоянными циклами движения, причем в течение каждого цикла движение происходит по одному и тому же закону.

Например, рис. 14.1 показывает, что механизм имеет периодическое движение на участке времени $T_{у.д}$. Периодическое движение механизма отличается также и тем, что при любом сдвиге начала отсчета времени $T_ц$ это время остается постоянным. Если, например, время $T_ц$ начать отсчитывать не от точки b, а от точки e, то соответственно конец цикла передвинется из точки f в точку g; при этом отрезки (bf) и (eg) будут равны между собой.

Цикл может соответствовать одному или нескольким оборотам ведущего вала. Так, например, ведущий вал насоса с кривошипно-

ползунным механизмом в течение цикла делает один оборот. У четырехтактного двигателя внутреннего сгорания в течение цикла ведущий вал делает два оборота. В некоторых машинах один цикл соответствует и большему числу оборотов ведущего вала.

2°. Рассмотрим теперь, чем характеризуются с точки зрения динамики разбег, установившееся движения и выбег. Для этого напишем уравнение кинетической энергии. Это уравнение применительно к механизму может быть написано так:

$$A_д - A_с = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}, \qquad (14.1)$$

где $A_д$ есть работа всех движущих сил, $A_с$ — работа всех сил сопротивления, $\sum mv^2/2$ — кинетическая энергия механизма, а v_0 и v суть скорости в начале и в конце рассматриваемого перемещения. Для времени разбега механизма необходимым является условие, в соответствии с которым конечная скорость v была бы по величине больше начальной скорости v_0, а это влечет за собой требование, чтобы работа сил движущих за все это время была больше работы сил сопротивления:

$$A_д > A_с.$$

Для времени установившегося движения через каждый цикл движения величина скорости v становится равной величине скорости v_0, и, следовательно, за тот же цикл работа движущих сил должна быть равна работе сил сопротивления:

$$A_д = A_с.$$

Для времени выбега $v < v_0$ и потому должно быть

$$A_д < A_с.$$

Соответственно указанному, правая часть уравнения (14.1) принимает последовательно следующие значения:

для времени разбега

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} > 0; \qquad (14.2)$$

для целого числа циклов во время установившегося движения

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = 0; \qquad (14.3)$$

для времени выбега

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} < 0. \qquad (14.4)$$

Из полученных выражений видно, что за время разбега механизма происходит приращение его кинетической энергии. Во время установившегося движения это приращение за целый цикл движе-

ния механизма равно нулю. За время выбега механизма происходит отдача кинетической энергии, накопленной им за время разбега.

3°. Рассмотрим вопрос об энергии, потребляемой машиной на преодоление различных видов сопротивлений, и установим соотношения между работами, производимыми отдельными силами, действующими на машину.

Для этого уравнение кинетической энергии механизма (14.1) представим в следующем виде:

$$A_д - A_с - \left(\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}\right) = 0. \qquad (14.5)$$

Величина, стоящая в скобках, может быть условно представлена как работа $A_и$ сил инерции. Тогда уравнение (14.5) будет иметь вид

$$A_д - A_с \pm A_и = 0. \qquad (14.6)$$

Двойной знак у работы $A_и$ стоит в силу того, что кинетическая энергия в зависимости от значений величин v_0 и v может быть положительной и отрицательной. Далее в уравнении (14.6) выделим отдельно работу $A_{п.с}$ *производственных сопротивлений*, работу $A_т$ *сил трения и других непроизводственных сопротивлений* и работу $A_{с.т}$ *сил тяжести звеньев* (см. § 40).

Тогда уравнение (14.6) будет иметь следующий вид:

$$A_д - A_{п.с} - A_т \pm A_и \pm A_{с.т} = 0. \qquad (14.7)$$

Работа $A_{с.т}$ имеет двойной знак, так как при подъеме общего центра масс звеньев механизма работа $A_{с.т}$ получается отрицательной, а при его опускании — положительной.

Если кроме указанных в уравнении (14.7) работ имеются работы и других сил, то они также могут быть включены в уравнение (14.7) с соответствующими знаками. Например, в некоторых случаях в это уравнение необходимо включать работу сил упругости пружин в зависимости от конструкции механизма и характера его работы.

4°. Уравнение (14.7) справедливо и для элементарных работ:

$$dA_д - dA_{п.с} - dA_т \pm dA_и \pm dA_{с.т} = 0. \qquad (14.8)$$

Разделив все члены уравнения (14.8) на дифференциал времени dt, получим

$$\frac{dA_д}{dt} - \frac{dA_{п.с}}{dt} - \frac{dA_т}{dt} \pm \frac{dA_и}{dt} \pm \frac{dA_{с.т}}{dt} = 0,$$

или

$$N_д - N_{п.с} - N_т \pm N_и \pm N_{с.т} = 0, \qquad (14.9)$$

где $N_д$ — мощность, развиваемая силами движущими, $N_{п.с}$ — мощность, затрачиваемая на преодоление производственных сопротивлений, $N_т$ — мощность, затрачиваемая на преодоление всех сил

трения и других непроизводственных сопротивлений, $N_и$ — мощность, затрачиваемая на изменение кинетической энергии механизма или, наоборот (в зависимости от знака), получаемая за счет изменения кинетической энергии машины, $N_{с.т}$ — мощность, затрачиваемая на преодоление сил тяжести или, наоборот (в зависимости от знака), развиваемая силами тяжести.

Уравнение (14.9) можно назвать *уравнением энергетического баланса машины.*

Из уравнения (14.9) следует, что в некоторые моменты времени мощности $N_и$ и $N_{с.т}$ могут быть положительными, в другие моменты времени — отрицательными. В случае знака плюс они увеличивают мощность $N_д$, которую надо развить на ведущем звене механизма, в случае знака минус они ее уменьшают. Например, в течение времени разбега (см. уравнение (14.2)) мощность $N_и$ положительна, и, следовательно, при разбеге машины мощность $N_д$ должна быть больше, чем для времени выбега, когда мощность $N_и$ отрицательна.

§ 64. Механический коэффициент полезного действия

1°. Рассмотрим отдельно установившееся движение. Для каждого цикла этого движения приращение кинетической энергии механизма равно нулю (см. уравнение (14.3)):

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = 0.$$

Следовательно, работа $A_и$ в уравнении (14.7) равна нулю. Точно так же для каждого цикла равна нулю и работа сил тяжести $A_{с.т}$.

Для установившегося движения уравнение (14.7) имеет следующий вид:

$$A_д = A_{п.с} + A_т. \tag{14.10}$$

Таким образом, за полный цикл установившегося движения работа всех движущих сил равна работе всех производственных $A_{п.с}$ и всех непроизводственных $A_т$ сил сопротивления.

Механическим коэффициентом η *полезного действия называется отношение абсолютной величины работы сил производственных сопротивлений к работе всех движущих сил за время установившегося движения:*

$$\eta = \frac{A_{п.с}}{A_д}, \tag{14.11}$$

или, принимая во внимание уравнение (14.10), получаем

$$\eta = \frac{A_{п.с}}{A_{п.с} + A_т}. \tag{14.12}$$

Формулу (14.11) можно представить также в следующем виде:

$$\eta = \frac{A_д - A_т}{A_д} = 1 - \frac{A_т}{A_д}, \qquad (14.13)$$

ибо согласно уравнению (14.10)

$$A_{п.с} = A_д - A_т.$$

Отношение работы $A_т$ непроизводственных сопротивлений к работе движущих сил принято обозначать через φ и называть *коэффициентом потерь* в механизме. В соответствии с этим формулу (14.13) можно написать так:

$$\eta = 1 - \varphi. \qquad (14.14)$$

Чем меньше в механизме работа непроизводственных сопротивлений, тем меньше его коэффициент потерь и тем совершеннее механизм в энергетическом отношении.

В некоторых случаях удобно вводить в рассмотрение коэффициент ψ, представляющий собой отношение $\psi = A_т/A_{п.с}$. Из формул (14.13) и (14.14) получаем связь между коэффициентами η, φ и ψ:

$$\psi = \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{\varphi}{\eta}. \qquad (14.15)$$

Из уравнения (14.13) следует: так как ни в одном механизме работа $A_т$ непроизводственных сопротивлений (например, сил трения) практически не может равняться нулю, то коэффициент полезного действия η всегда меньше единицы.

Из формулы (14.13) следует, далее, что коэффициент полезного действия может быть равен нулю, если

$$A_д = A_т;$$

значит, коэффициент полезного действия равен нулю, если работа движущих сил равна работе всех сил непроизводственных сопротивлений, которые имеются в механизме. В этом случае движение механизма является *возможным, но без совершения какой-либо полезной работы.* Такое движение механизма обычно называют *движением вхолостую.*

Коэффициент полезного действия не может быть меньше нуля, так как для этого необходимо (см. формулу (14.13)), чтобы отношение работ $A_т/A_д$ было больше единицы:

$$\frac{A_т}{A_д} > 1, \quad \text{или} \quad A_д < A_т.$$

Из этих неравенств следует, что если механизм, удовлетворяющий указанному условию, находится в покое, то действительного движения механизма произойти не может. Это явление носит название *самоторможения механизма.* Если же механизм находится

в движении, то под действием сил непроизводственных сопротивлений он постепенно будет замедлять свой ход, пока не остановится (затормозится). Следовательно, получение при теоретических расчетах отрицательного значения коэффициента полезного действия служит признаком самоторможения механизма или невозможности движения механизма в заданном направлении.

Таким образом, коэффициент полезного действия механизма может изменяться в пределах

$$0 \leqslant \eta < 1. \tag{14.16}$$

Из формул (14.14) и (14.15) следует, что коэффициент φ изменяется в пределах $0 < \varphi \leqslant 1$, а коэффициент ψ — в пределах $0 < \psi \leqslant \infty$.

2°. В большинстве механизмов движущие силы и силы сопротивления в течение времени установившегося движения непостоянны. Поэтому для определения коэффициента полезного действия подсчитывают работу всех движущих сил и производственных сопротивлений за один полный цикл времени установившегося движения машины. Например, если задан график (рис. 14.2) суммарной движущей силы $P_д = P_д(s)$, то для определения работы $A_д$ движущих сил весь график разбивают на отдельные участки и определяют площади этих участков. Полная работа $A_д$ движущих сил будет равна сумме всех этих площадей, умноженной на соответствующие масштабы силы $P_д$ и пути s. Если, далее, определить величину средней движущей силы $P_{ср}$, то работа $A_д$ движущих сил будет равна

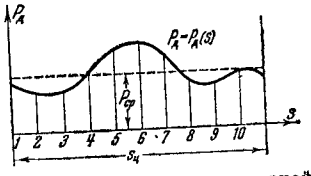


Рис. 14.2. График суммарной движущей силы.

$$A_д = P_{ср} s_ц,$$

где $s_ц$ есть путь, пройденный точкой приложения силы $P_д$ за один полный цикл времени установившегося движения.

Аналогично может быть определена работа $A_{п.с}$, если задан график $P_{п.с} = P_{п.с}(s)$ сил производственных сопротивлений.

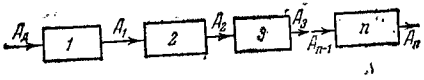


Рис. 14.3. Схема последовательного соединения механизмов.

3°. Рассмотрим теперь вопрос об определении коэффициента полезного действия нескольких механизмов, соединенных *последовательно* друг с другом. Пусть имеется n последовательно связанных между собой механизмов (рис. 14.3). Первый механизм приводится в движение движущими силами, совершающими работу $A_д$. Так как полезная работа каждого предыдущего механизма, затрачиваемая на производственные сопротивления, является работой

движущих сил для каждого последующего, то коэффициент полезного действия η_1 первого механизма равен

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_д}.$$

Для второго механизма коэффициент полезного действия равен

$$\eta_2 = \frac{A_2}{A_1}.$$

Для третьего механизма он равен

$$\eta_3 = \frac{A_3}{A_2}$$

и, наконец, для n-го механизма равен

$$\eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Общий коэффициент полезного действия η_{1n} равен

$$\eta_{1n} = \frac{A_n}{A_д}.$$

Величина этого коэффициента полезного действия может быть получена, если перемножить все отдельные коэффициенты полезного действия η_1, η_2, ..., η_n. Имеем

$$\eta_{1n} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \ldots \cdot \eta_n = \frac{A_1}{A_д} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdot \ldots \cdot \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_д}. \quad (14.17)$$

Таким образом, *общий механический коэффициент полезного действия последовательно соединенных механизмов равняется произведению механических коэффициентов полезного действия отдельных механизмов, составляющих одну общую систему.* Значения работ за полное время установившегося движения машины пропорциональны средним значениям мощностей за тот же период времени; поэтому формулы (14.11) и (14.13) можно написать так:

$$\eta = \frac{N_{п.с}}{N_д}, \quad (14.18)$$

или

$$\eta = 1 - \frac{N_т}{N_д}, \quad (14.19)$$

где $N_{п.с}$ — средняя мощность, поглощаемая силами производственных сопротивлений, $N_т$ — средняя мощность, поглощаемая силами непроизводственных сопротивлений, и $N_д$ — средняя мощность, развиваемая движущими силами.

При определении общего коэффициента полезного действия последовательно соединенных механизмов необходимо остерегаться того, чтобы одни и те же сопротивления не были одновременно

учтены в коэффициентах полезного действия двух механизмов. Так, если рассматривать некоторый механизм i, то в соединениях его с механизмами $(i-1)$ и $(i+1)$ имеют место потери, которые при определении коэффициентов полезного действия η_{i-1}, η_i, η_{i+1} должны быть отнесены либо к механизму i, либо к $(i-1)$, либо к $(i+1)$. Чтобы избежать такой ошибки, можно отдельно подсчитать коэффициент полезного действия для каждого механизма без учета потерь в соединениях с соседними механизмами и отдельно коэффициенты полезного действия для соединений и после этого воспользоваться формулой (14.17). Обычно на практике этим пренебрегают и пользуются формулой (14.17) без учета указанных условий. При этом, очевидно, общий коэффициент полезного действия будет приближенным и несколько меньшим действительного.

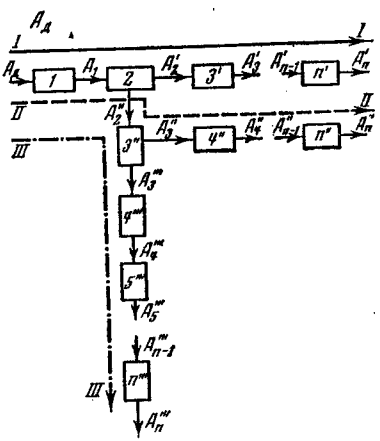


Рис. 14.4. Пример последовательно-параллельного соединения механизмов.

4°. Выше (рис. 14.3) был рассмотрен простейший случай последовательного соединения механизмов. В современных машинах весьма часто соединение механизмов оказывается более сложным. На рис. 14.4 показана схема сложного соединения механизмов. Поток энергии от механизма 2 распределяется по двум направлениям. В свою очередь от механизма 3″ поток энергии распределяется также по двум направлениям. Общая работа $A_{\text{п.с}}$ сил производственных сопротивлений равна $A_{\text{п.с}} = A'_n + A''_n + A'''_n$.

Следовательно, общий коэффициент полезного действия η всей системы механизмов равен

$$\eta = \frac{A_{\text{п.с}}}{A_{\text{д}}} = \frac{A'_n + A''_n + A'''_n}{A_{\text{д}}}. \qquad (14.20)$$

Работа $A_{\text{д}}$ может быть выражена через работы A'_n, A''_n, A'''_n и через соответствующие коэффициенты полезного действия отдельных механизмов.

На рис. 14.4 показаны сплошной линией *I—I*, штриховой линией *II—II* и штрих-пунктирной линией *III—III* три потока энергии от общего источника энергии, производящего работу $A_{\text{д}}$. Работа $A_{\text{д}}$ может быть представлена как сумма

$$A_{\text{д}} = \frac{A'_n}{\eta_{1n'}} + \frac{A''_n}{\eta_{1n''}} + \frac{A'''_n}{\eta_{1n'''}}, \qquad (14.21)$$

где $\eta_{1n'}$, $\eta_{1n''}$ и $\eta_{1n'''}$ — общие коэффициенты полезного действия каждого из потоков *I—I*, *II—II*, *III—III*, равные

$$\eta_{1n'} = \eta_1\eta_2\eta_3'\eta_4' \ldots \eta_{n'},$$
$$\eta_{1n''} = \eta_1\eta_2\eta_3''\eta_4'' \ldots \eta_{n''},$$
$$\eta_{1n'''} = \eta_1\eta_2\eta_3'''\eta_4''' \ldots \eta_{n'''}.$$

Общий коэффициент полезного действия η всей системы механизмов равен

$$\eta = \frac{A_n' + A_n'' + A_n'''}{\dfrac{A_n'}{\eta_{n'}} + \dfrac{A_n''}{\eta_{1n''}} + \dfrac{A_n'''}{\eta_{1n'''}}}. \qquad (14.22)$$

Из формулы (14.22) следует, что общий коэффициент полезного действия в значительной степени зависит от той схемы распределения потоков энергии, которая была принята при проектировании общей схемы системы механизмов.

§ 65. Определение коэффициентов полезного действия типовых механизмов

1°. Из формулы (14.19) следует, что для определения коэффициентов полезного действия отдельных механизмов необходимо каждый раз определять работу или мощность, затрачиваемые на преодоление всех сил непроизводственных сопротивлений за один полный цикл времени установившегося движения. Для этого определяют для ряда положений механизма соответствующие силы непроизводственных сопротивлений. Для большинства механизмов — это силы трения. Далее, по известным скоростям движения отдельных звеньев механизма определяются мощности, затрачиваемые на преодоление сил трения. По полученным значениям мощностей определяют среднюю мощность, затрачиваемую в течение одного полного цикла установившегося движения на преодоление сил трения. Тогда, если мощность движущих сил будет известна, коэффициент полезного действия определится по формуле (14.19).

Коэффициент полезного действия механизма всегда зависит от характера сил трения, которые возникают в кинематических парах, от вида смазки и т. д. Поэтому нельзя точно указать для тех или иных механизмов их коэффициенты полезного действия. В каждом отдельном случае этот вопрос должен подлежать теоретическому и экспериментальному анализу. В дальнейшем мы рассмотрим только некоторые расчетные приемы, которые могут быть применены для решения этих вопросов. Начнем с рассмотрения механизма с низшими парами.

2°. Пусть, например, задан механизм (рис. 14.5, *а*) и требуется определить его коэффициент полезного действия. Предположим,

что все непроизводственные сопротивления в механизме сводятся к сопротивлению трения и коэффициенты трения в кинематических парах заданы. Реакции P_A, P_B, P_C, P_D, P_E, P_G и P_H в кинематических парах для каждого положения механизма также известны. Величины сил трения соответственно равны

$$F_A = f_A P_A, \quad F_B = f_B P_B, \quad F_C = f_C P_C,$$
$$F_D = f_D P_D, \quad F_E = f_E P_E, \quad F_G = f_G P_G, \quad F_H = f_H P_H,$$

где f_A, f_B, f_C, f_D, f_E, f_G и f_H суть заданные коэффициенты трения в соответствующих шарнирах и направляющей ползуна 5.

Для определения мощностей, расходуемых на трение в различных кинематических парах, необходимо определить относительные угловые скорости в шарнирах и относительную скорость ползуна по направляющей. Относительная угловая скорость ω_{16} звена 1 относительно стойки 6 равна заданной угловой скорости ω_1, так как вал A вращается в неподвижном подшипнике. Для определения относительных угловых скоростей в остальных шарнирах строим план скоростей механизма (рис. 14.5, б) и находим из построенного плана скоростей угловые скорости звеньев BC, CD и EG. Величины этих скоростей определяются из соотношений (см. § 18)

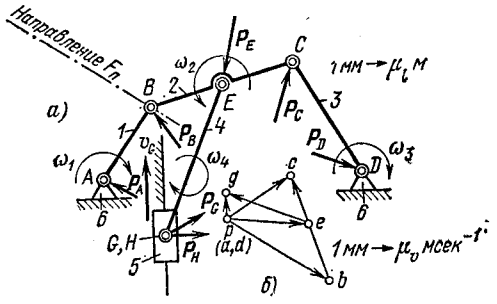


Рис. 14.5. К определению коэффициента полезного действия рычажного механизма: а) кинематическая схема; б) план скоростей.

$$\omega_2 = \mu_v \frac{(bc)}{l_{BC}}, \quad \omega_3 = \mu_v \frac{(cd)}{l_{CD}} \quad \text{и} \quad \omega_4 = \mu_v \frac{(eg)}{l_{EG}}.$$

В этих соотношениях (bc), (cd) и (eg) суть отрезки, взятые из плана скоростей, l_{BC}, l_{CD} и l_{EG} — длины звеньев BC, CD и EG и μ_v — масштаб плана скоростей. Угловая скорость ω_{21} движения звена 2 относительно звена 1 определяется, если условно сообщить обоим этим звеньям общую угловую скорость $-\omega_1$ (рис. 14.6, а). Тогда звено 1 как бы остановится, а звено 2 относительно звена 1 будет вращаться с угловой скоростью ω_{21}, абсолютная величина которой равна $|\omega_{21}| = |\omega_2| + |\omega_1|$.

Угловые скорости движения звеньев 3 и 4 относительно звена 2 определятся, если звеньям сообщить общую угловую скорость $-\omega_2$. В таком случае абсолютная величина относительной угловой скорости ω_{32} звена 3 относительно звена 2 равна

$$|\omega_{32}| = |\omega_3| + |\omega_2|.$$

Абсолютная величина относительной угловой скорости ω_{42} звена *4* относительно звена *2* равна

$$|\omega_{42}| = |\omega_4| + |\omega_2|.$$

Угловая скорость ω_{36} звена *3* относительно неподвижного подшипника *D* равна угловой скорости ω_3. Наконец, угловая скорость ω_{54} звена *5* относительно звена *4* равна

$$|\omega_{54}| = |\omega_4|.$$

Вообще относительная угловая скорость двух звеньев с номерами i и k находится по формуле

$$\omega_{ik} = \omega_i - \omega_k$$

и в случае угловых скоростей разных знаков приводит к сложению их абсолютных величин, а при угловых скоростях одного знака — к вычитанию меньшей абсолютной величины из большей.

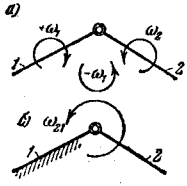


Рис. 14.6. К определению относительной угловой скорости двух звеньев, входящих во вращательную пару.

Относительная скорость ползуна *5* по направляющей *a* равна скорости v_G. Мощности, затрачиваемые на трение в кинематических парах, равны (см. § 47) $N_A = F_A r_A |\omega_1|$, $N_B = F_B r_B |\omega_{21}|$, $N_C = F_C r_C |\omega_{32}|$, $N_D = F_D r_D |\omega_3|$, $N_E = F_E r_E |\omega_{42}|$, $N_G = F_G r_G |\omega_4|$ и $N_H = F_H v_G$.

В этих выражениях r_A, r_B, r_C, r_D, r_E и r_G суть радиусы цапф соответствующих шарниров. Подставляя в полученные формулы значения сил трения и абсолютные значения относительных скоростей, получаем соответственно

$$N_A = f_A P_A r_A |\omega_1|, \qquad N_B = f_B P_B r_B [|\omega_2| + |\omega_1|],$$
$$N_C = f_C P_C r_C [|\omega_3| + |\omega_2|], \qquad N_D = f_D P_D r_D |\omega_3|,$$
$$N_E = f_E P_E r_E [|\omega_4| + |\omega_2|], \qquad N_G = f_G P_G r_G |\omega_4|$$

и

$$N_H = f_H P_H v_G.$$

В написанных формулах величины угловых скоростей могут быть заменены их значениями, определенными из плана скоростей (рис. 14.5, *б*).

Общая мощность $N_т$ сил трения в каждый момент времени равна

$$N_т = N_A + N_B + N_C + N_D + N_E + N_G + N_H.$$

Построив график изменения мощности $N_т$ за один полный цикл движения механизма, можно определить среднее значение $N_{т.ср}$ мощности, затрачиваемой на трение. Далее по заданным силам производственных сопротивлений определяют мощность $N_{п.с}$, затрачиваемую на преодоление этих сопротивлений в каждый данный момент времени, и по графику изменения этой мощности находят

среднее значение $N_{\text{п. с. ср}}$ мощности сил производственных сопротивлений.

Средняя мощность $N_{\text{д. ср}}$ движущих сил равна

$$N_{\text{д. ср}} = N_{\text{п. с. ср}} + N_{\text{т. ср}},$$

а общий коэффициент полезного действия η всего механизма равен, согласно формуле (14.19),

$$\eta = 1 - \frac{N_{\text{т. ср}}}{N_{\text{д. ср}}}. \qquad (14.23)$$

3°. Переходим к рассмотрению механизмов с высшими парами. Пусть, например, требуется определить коэффициент полезного действия зубчатого механизма, показанного на рис. 14.7. Если принять во внимание только силы трения, то для определения коэффициента полезного действия необходимо определить потери на трение скольжения в подшипниках O_1 и O_2, на трение скольжения между зубьями и, наконец, на трение качения зубьев друг по другу.

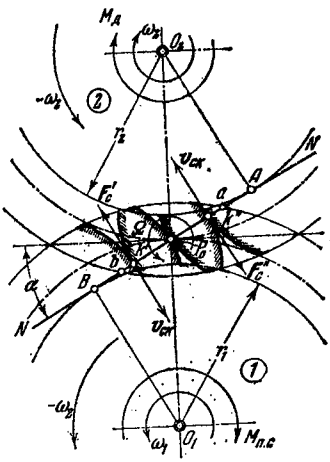


Рис. 14.7. К определению коэффициента полезного действия зубчатого механизма с внешним зацеплением.

Мощности $N_{\text{т}}'$ и $N_{\text{т}}''$, затрачиваемые на трение в подшипниках O_1 и O_2, равны

$$N_{\text{т}}' = M_{\text{т}}' |\omega_1| \quad \text{и} \quad N_{\text{т}}'' = M_{\text{т}}'' |\omega_2|,$$

где $M_{\text{т}}'$ и $M_{\text{т}}''$ суть абсолютные величины моментов сил трения скольжения в подшипниках O_1 и O_2, определенные по формулам, указанным в § 47.

Мощность $N_{\text{т}}'''$, затрачиваемая на трение скольжения в зубьях, равна

$$N_{\text{т}}''' = F_c v_{\text{ск}}, \qquad (14.24)$$

где F_c — величина силы трения скольжения в зубьях, $v_{\text{ск}}$ — величина скорости скольжения зубьев друг по другу.

Величина F_c силы трения скольжения равна $F_c = fP_{12}$, где P_{12} — давление зуба колеса *1* на зуб колеса *2* в предположении, что давление воспринимается одной парой зубьев и направлено по нормали N—N к профилям зубьев, f — коэффициент трения. Величина силы P_{12} может быть определена обычными методами кинетостатики, указанными выше (см. § 55).

Таким образом, формулу (14.24) можно написать так:

$$N_{\text{т}}''' = fP_{12} v_{\text{ск}}.$$

Величина скорости скольжения равна

$$v_{\text{ск}} = [|\omega_1| + |\omega_2|](P_0 k),$$

где (P_0k) — расстояние от мгновенного центра вращения P_0 в относительном движении колес *1* и *2* до точек k' или k'' соприкасания профилей. На рис. 14.7 видно, что скорость скольжения на участке P_0a, например, в случае зацепления в точке k'' имеет одно направление, а в случае зацепления на участке P_0b, например в точке k', имеет противоположное направление. Соответственно меняют свое направление и силы трения.

Мощность $N_т'''$, затрачиваемая на трение скольжения в зубьях, равна

$$N_т''' = fP_{12}[|\omega_1| + |\omega_2|](P_0k).$$

Мощность, затрачиваемая на трение перекатывания зубьев друг по другу (см. § 49), равна

$$N_т^{IV} = M_{тр.к}|\Omega| = M_{тр.к}[|\omega_1| + |\omega_2|],$$

где $M_{тр.к}$ — величина момента трения качения, равная

$$M_{тр.к} = kP_{12},$$

где k — коэффициент трения качения, и $\Omega = \omega_1 + \omega_2$.

Мощность $N_т$, затрачиваемая на трение во всем механизме, равна сумме мощностей трения:

$$N_т = N_т' + N_т'' + N_т''' + N_т^{IV}.$$

Построив график изменения мощности $N_т$, определим среднюю мощность $N_{т.ср}$. Средняя мощность $N_{п.с.ср}$ производственных сопротивлений равна

$$N_{п.с.ср} = M_{п.с.ср}|\omega_{ср}|,$$

где $M_{п.с.ср}$ — абсолютная величина среднего момента производственных сопротивлений, $\omega_{ср}$ — средняя угловая скорость того вала, к которому приложен момент $M_{п.с.ср}$.

Средняя мощность $N_{д.ср}$ движущих сил равна

$$N_{д.ср} = N_{п.с.ср} + N_{т.ср},$$

и, следовательно, общий коэффициент полезного действия η рассматриваемого зубчатого механизма равен

$$\eta = 1 - \frac{N_{т.ср}}{N_{д.ср}}.$$

На практике обычно коэффициенты полезного действия зубчатых механизмов определяются экспериментально. В предварительных расчетах принимают коэффициент полезного действия η при учете потерь в зубьях равным: для колес с шлифованными зубьями 0,99; для колес с нарезанными и нешлифованными зубьями от 0,975 до 0,995; для косозубых колес от 0,97 до 0,975 и т. д.

4°. Коэффициент полезного действия винтовых механизмов определяется приближенно по формулам для коэффициента полезного действия наклонной плоскости. При этом средняя линия резьбы винта заменяется условно наклонной плоскостью, а гайка заменяется условно ползуном *1* (рис. 14.8). Вывод формул тогда может быть сделан следующим образом. Пусть ползун *1*, находящийся под действием постоянной вертикальной силы $\boldsymbol{P}_0$ производственных сопротивлений и под действием постоянной горизонтальной движущей силы $\boldsymbol{P}$, переместился из положения A в положение A_1. Из точки A_1 опустим на направление силы $\boldsymbol{P}$ перпендикуляр A_1a. Производственная работа, произведенная силой $\boldsymbol{P}_0$, состоит в подъеме ползуна *1* на высоту A_1a; при этом на преодоление производственных сопротивлений затрачивается работа $A_{\text{п. с}}$, равная

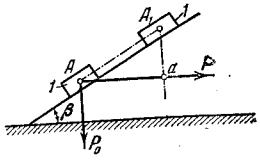


Рис. 14.8. К определению коэффициента полезного действия винтовых механизмов.

$$A_{\text{п. с}} = P_0 (A_1 a).$$

Работа движущей силы $\boldsymbol{P}$ равна

$$A_{\text{д}} = P (Aa);$$

следовательно, коэффициент полезного действия η, на основании формулы (14.11), равен

$$\eta = \frac{A_{\text{п. с}}}{A_{\text{д}}} = \frac{P_0 (A_1 a)}{P (Aa)} = \frac{P_0}{P} \operatorname{tg} \beta.$$

Как это было показано в § 46, в винтовой паре силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P}_0$ связаны условием

$$P = P_0 \operatorname{tg} (\beta + \varphi),$$

где φ — угол трения. Следовательно, коэффициент полезного действия η будет равен

$$\eta = \frac{P_0 \operatorname{tg} \beta}{P_0 \operatorname{tg} (\beta + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\beta + \varphi)}. \qquad (14.25)$$

При опускании груза под действием силы $\boldsymbol{P}$ коэффициент полезного действия η равен

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} (\beta - \varphi)}{\operatorname{tg} \beta}, \qquad (14.26)$$

так как в этом случае $P = P_0 \operatorname{tg} (\beta - \varphi)$ и сила $\boldsymbol{P}_0$ является движущей.

Из формулы (14.25) следует, что коэффициент полезного действия наклонной плоскости при подъеме груза обращается в нуль при $\beta = 0$ и при $\beta = \pi/2 - \varphi$. В промежутке между значениями $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2 - \varphi$ коэффициент полезного действия положителен, а при $\beta > \pi/2 - \varphi$ — отрицателен; в последнем случае движение ползуна под действием силы $\boldsymbol{P}$ невозможно. Для определения угла

β, при котором η будет максимальным, берем производную от η по углу β и приравниваем ее нулю:

$$\frac{d\eta}{d\beta} = \frac{d\left[\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta+\varphi)}\right]}{d\beta} = 0.$$

Решая это уравнение относительно β, находим

$$\beta_0 = 45° - \varphi.$$

Таким образом, максимальный коэффициент полезного действия имеет место при угле β_0.

Далее, из равенства (14.26) следует, что при опускании ползуна под действием силы $\boldsymbol{P}_0$ коэффициент полезного действия η оказывается отрицательным при значениях угла β, лежащих в пределах от 0 до φ. В этих пределах движение груза под действием силы $\boldsymbol{P}_0$ невозможно. Движение груза возможно в пределах значений угла β от φ до $\pi/2$, так как в этих пределах коэффициент полезного действия положителен.

Можно показать, что при подъеме ползуна по наклонной плоскости, у которой угол подъема меньше угла φ, коэффициент полезного действия всегда меньше 0,5. В самом деле, уже при $\beta = \varphi$ формула (14.25) принимает следующий вид:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}{2\operatorname{tg}\varphi} = 0{,}5 - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2};$$

следовательно, в этом случае η всегда меньше 0,5.

Только что выведенные формулы применяются также для приближенного определения коэффициента полезного действия винтовых и червячных механизмов. В случае передачи от червяка к колесу применяется формула (14.25), а в случае передачи от колеса к червяку — формула (14.26). Все следствия, вытекающие из этих формул для наклонной плоскости, остаются действительными и для винтовых и червячных механизмов.

5°. Рассмотрим, далее, вопрос об определении коэффициента полезного действия планетарных зубчатых механизмов на примере механизма, показанного на рис. 14.9, *а*.

Рассмотрим соотношения между моментами и силами, действующими на механизмы в целом и на отдельные его звенья. Обозначим момент на ведущем колесе *1* через M_1, момент на ведомом водиле H — через M_H и момент на неподвижном колесе *3* — через M_3 (реактивный или опорный момент). Если пренебречь потерями на трение в зубьях и опорах, можно написать уравнение мощностей для всего механизма в форме

$$M_1\omega_1 + M_H\omega_H = 0. \qquad (14.27)$$

В уравнение (14.27) входит алгебраическая сумма мощностей, подводимых и отводимых от механизма. Моменты M_1, M_H и M_3

связаны между собой также уравнением равновесия всех внешних моментов, приложенных к механизму, которое запишется так:

$$M_1 + M_H + M_3 = 0. \tag{14.28}$$

Моменты, входящие в уравнение (14.27) и (14.28), могут быть всегда выражены через окружные усилия на колесах и радиусы колес. Для этого рассмотрим в отдельности равновесие каждого из звеньев, входящих в состав механизма.

Составим схему (рис. 14.9, *б*) для каждого звена редуктора в профильной плоскости. На колесо *1* действуют момент M_1 и сила P_{21} от колеса *2*. На звено, состоящее из сателлитов *2* и *2'*, — сила P_{12} от колеса *1*, сила $P_{32'}$ от колеса *3* и сила P_{H2} от водила *H*.

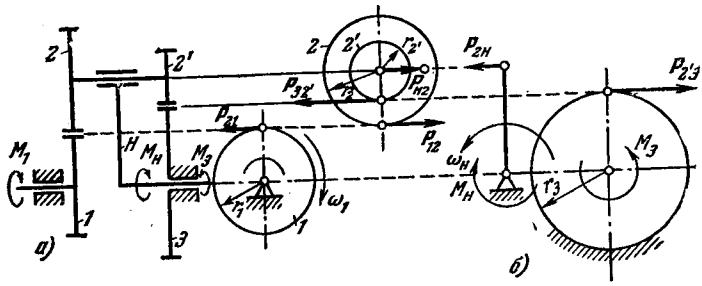


Рис. 14.9. К определению коэффициента полезного действия планетарного зубчатого механизма: *а*) схема механизма; *б*) отдельные звенья с приложенными к ним силами.

На водило *H* действует момент M_H и сила P_{2H} от звена, состоящего из сателлитов. Наконец, на колесо *3* действуют момент M_3 и сила $P_{2'3}$ от звена, состоящего из сателлитов. Углами наклона реакций в высших парах можно пренебречь ввиду их несущественного влияния на коэффициент полезного действия передачи.

Все указанные силы могут быть выражены через соответствующие моменты и радиусы r_1, r_2, $r_{2'}$ и r_3 колес *1*, *2*, *2'* и *3*. Из уравнений равновесия звеньев *1*, *H* и *3* получаем

$$P_{21} = \frac{M_1}{r_1}, \tag{14.29}$$

$$P_{2H} = \frac{M_H}{r_1 + r_2}, \tag{14.30}$$

$$P_{2'3} = \frac{M_3}{r_3}. \tag{14.31}$$

Из уравнения равновесия звена, состоящего из сателлитов, определяются как направления, так и величины сил $P_{32'}$ и P_{H2}:

$$P_{12} r_2 = P_{32'} r_{2'},$$

откуда

$$P_{32'} = P_{12}\frac{r_2}{r_{2'}}, \tag{14.32}$$

и, далее,

$$P_{12}(r_2 - r_{2'}) = P_{H2}r_{2'},$$

откуда

$$P_{H2} = P_{12}\frac{r_2 - r_{2'}}{r_{2'}}. \tag{14.33}$$

Кроме того, имеем

$$P_{12} = -P_{21}, \quad P_{H2} = -P_{2H}, \quad P_{32'} = -P_{2'3}. \tag{14.34}$$

Используем далее формулу (7.57) § 33 для передаточного отношения планетарного зубчатого механизма. Имеем

$$i_{13}^{H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = (-1)^2\frac{r_2 r_3}{r_1 r_{2'}} = \frac{r_2 r_3}{r_1 r_{2'}}. \tag{14.35}$$

Из соотношения (14.32) следует:

$$\frac{r_2}{r_{2'}} = \frac{P_{32'}}{P_{12}}.$$

Тогда равенство (14.35) может быть написано так:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{P_{32'}r_3}{P_{12}r_1},$$

откуда получаем

$$P_{12}r_1(\omega_1 - \omega_H) = P_{32'}r_3(\omega_3 - \omega_H) = -P_{32'}r_3\omega_H, \tag{14.36}$$

ибо угловая скорость ω_3 при неподвижном колесе *3* равна нулю.

Так как $M_1 = P_{12}r_1$ и $M_3 = P_{32'}r_3$, получаем

$$M_1(\omega_1 - \omega_H) = -M_3\omega_H, \tag{14.37}$$

или

$$N_1^H = -N_3^H. \tag{14.38}$$

Правая и левая части равенств (14.37) и (14.38) представляют собой мощности в каждой паре колес (находящихся в зацеплении) механизма, который мы рассматриваем в условном предположении о неподвижности водила H. Таким образом, *мощность в зацеплении* пары колес равняется моменту, передаваемому данным колесом, умноженному на угловую скорость этого колеса относительно водила.

Мощность в зацеплении характеризует возможные потери в механизме. Чем больше эта мощность, тем больше потери и тем, следовательно, ниже коэффициент полезного действия.

6°. В планетарных механизмах ведущим звеном может быть как одно из центральных колес, так и водило H, при этом второе

центральное колесо является неподвижным. В том случае, когда ведущим звеном является колесо *1* (рис. 14.9, *а*), мощность N_1 на этом колесе представляет собой мощность движущих сил, в то время как мощность N_H сил производственных сопротивлений снимается с водила H и равна

$$N_H = N_1 - N_т, \tag{14.39}$$

где $N_т$ — мощность, теряемая на трение в кинематических парах.

Мощность $N_т$ может быть подсчитана по мощности в зацеплении, т. е. по величине мощности N_1^H (см. формулу (14.38)), передаваемой редуктором в обращенном движении всего механизма относительно водила H.

Таким образом, коэффициент полезного действия η механизма при ведущем колесе *1* и ведомом водиле H определяется по формуле

$$\eta_{1H} = \frac{N_1 - N_т}{N_1}. \tag{14.40}$$

Величина мощности $N_т$ может быть выражена через мощность N_1^H в зацеплении и коэффициент потерь φ_H (см. § 64, *1°*). Имеем

$$N_т = |N_1^H| \varphi_H, \tag{14.41}$$

если в обращенном движении колесо *1* будет ведущим, и

$$N_т = |N_1^H| \frac{\varphi_H}{1 - \varphi_H}, \tag{14.42}$$

если в обращенном движении колесо *1* будет ведомым. Практически, если общий коэффициент полезного действия η_H редуктора при неподвижном водиле $\eta_H > 0{,}9$, а следовательно, $\varphi_H < 0{,}1$, то с достаточной точностью можно пользоваться формулой (14.41) вне зависимости от того, будет ли колесо *1* в обращенном движении ведущим или ведомым. Следует подчеркнуть, что в формулы (14.41) и (14.42) входит абсолютное значение мощности N_1^H. Учитывая равенство (14.37), можно написать формулу (14.41) в таком виде:

$$N_т = |M_1(\omega_1 - \omega_H)| \varphi_H. \tag{14.43}$$

В том случае, когда ведущим звеном является водило H, мощность N_1 на колесе *1* является мощностью сил производственных сопротивлений, в то время как мощность N_H на водиле H оказывается мощностью движущих сил и равна

$$N_H = N_1 + N_т.$$

Таким образом, коэффициент полезного действия η механизма при ведущем водиле H и ведомом колесе *1* определяется по формуле

$$\eta_{H1} = \frac{N_1}{N_1 + N_т}, \tag{14.44}$$

где $N_т$ может быть определено из формулы (14.43).

Для этого представим эту формулу в следующем виде:

$$N_т = \left| M_1\omega_1 \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_1} \right| \varphi_H = N_1 |(1 - i_{H1})| \varphi_H, \qquad (14.45)$$

где

$$i_{H_1} = \frac{\omega_H}{\omega_1}.$$

Подставляя полученное выражение для $N_т$ из формулы (14.45) в формулы (14.40) и (14.44), получаем

$$\eta_{1H} = 1 - |(1 - i_{H1})| \varphi_H \qquad (14.46)$$

и

$$\eta_{H1} = \frac{1}{1 + |(1 - i_{H1})| \varphi_H}. \qquad (14.47)$$

Полученные формулы являются *приближенными формулами* для определения коэффициента полезного действия планетарных механизмов. Для большинства механизмов указанные формулы дают значения коэффициента полезного действия, незначительно отклоняющиеся от действительных величин, за исключением тех механизмов, для которых передаточное отношение i_{13}^H в обращенном движении близко к единице. В этом случае передача может оказаться самотормозящейся и найденное по формулам (14.46) и (14.47) значение коэффициента полезного действия не будет соответствовать истинной его величине [1]).

Пример 1. Определить коэффициент полезного действия для механизма, представленного на рис. 14.9, при условии, что числа зубьев соответственно равны $z_1 = 40$, $z_2 = 50$, $z_{2'} = 30$, $z_3 = 60$ и коэффициент полезного действия каждой пары колес равен $\eta = 0{,}95$.

Имеем для передаточного отношения (см. § 33, формула (7.46))

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = \frac{1}{1 - i_{13}^H} = \frac{1}{1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}} = \frac{1}{1 - \frac{50 \cdot 60}{40 \cdot 30}} = -\frac{2}{3}.$$

Общий коэффициент полезного действия η_H редуктора при неподвижном водиле равен, согласно формуле (14.17),

$$\eta_H = \eta_{12}\eta_{2'3} = (0{,}95)^2 = 0{,}9,$$

а коэффициент потерь

$$\varphi_H = 1 - \eta_H = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

[1]) Изложенный метод разработан Т. С. Жегаловой и В. Н. Кудрявцевым.

Подставляя полученные выражения для i_{H1} и φ_H в формулы (14.46) и (14.47), соответственно получаем

$$\eta_{1H} = 1 - |(1 - i_{H1})|\varphi_H = 1 - \left(1 + \frac{2}{3}\right)0{,}1 = 0{,}833$$

и

$$\eta_{H1} = \frac{1}{1 + |(1 - i_{H1})|\varphi_H} = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{2}{3}\right)0{,}1} = 0{,}856.$$

Пример 2. Определим коэффициент полезного действия механизма, показанного на рис. 14.10.

Пусть числа зубьев соответственно равны $z_{2'} = 20$, $z_3 = 40$, $z_{3'} = 15$ и $z_4 = 60$. Коэффициент полезного действия каждой пары колес равен $\eta = 0{,}95$. Передаточное отношение $i_{H2'}$ равно

$$i_{H2'} = \frac{1}{i_{2'H}} = \frac{1}{1 - (-1)\frac{z_3 z_4}{z_{2'} z_{3'}}} = \frac{1}{1 + \frac{40 \cdot 60}{20 \cdot 15}} = \frac{1}{9}.$$

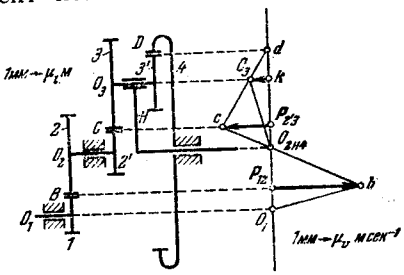


Рис. 14.10. Схема сложного планетарного зубчатого редуктора с картиной скоростей.

Следовательно, коэффициент полезного действия всего редуктора вместе с колесами *1* и *2* равен

$$\eta_{1H} = \eta_{12}\eta_{2'H} = \eta_{12}[1 - |(1 - i_{H2'})|\varphi_H] = 0{,}95\left[1 - \left(1 - \frac{1}{9}\right)0{,}1\right] = 0{,}855,$$

так как $\varphi_H = 1 - \eta_H = 1 - (0{,}95)^2 \approx 0{,}1$.

Соответственно для коэффициента полезного действия η_{H1} получаем

$$\eta_{H1} = \eta_{21}\eta_{H2'} = \eta_{21}\frac{1}{1 + |(1 - i_{H2'})|\varphi_H} = 0{,}95\frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{9}\right)0{,}1} = 0{,}872.$$

Пример 3. Определить коэффициент полезного действия механизма червячной передачи, если шаг t червячной передачи равен 100 *мм*, радиус r начальной линии червяка равен 60 *мм*, коэффициент трения f равен 0,1.

Угол β наклона резьбы равен

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{t}{2\pi r} \approx 15°,$$

угол трения φ равен $\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}1 \approx 6°$.

Если ведущим будет червяк, то коэффициент полезного действия $\eta_{ч.\,п}$ определится по формуле (14.25):

$$\eta_{ч.\,п}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta+\varphi)}=\frac{\operatorname{tg}15^\circ}{\operatorname{tg}21^\circ}=\frac{0{,}267}{0{,}383}\approx 0{,}7.$$

Если ведущим будет колесо, то коэффициент полезного действия определится по формуле (14.26):

$$\eta_{ч.\,п}=\frac{\operatorname{tg}(\beta-\varphi)}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}9^\circ}{\operatorname{tg}15^\circ}=\frac{0{,}158}{0{,}267}\approx 0{,}63.$$

ГЛАВА XV
ПРИВЕДЕНИЕ СИЛ И МАСС В МЕХАНИЗМАХ

§ 66. Приведенные силы и моменты

1°. Переходим к рассмотрению вопросов, связанных с изучением движения механизмов.

При исследовании движения механизма, находящегося под действием заданных сил, удобно все силы, действующие на звенья, заменять силами, приложенными к одному из звеньев механизма. *При этом необходимо, чтобы работа на рассматриваемом возможном перемещении или мощность, развиваемая заменяющими силами, были соответственно равны сумме работ или мощностей, развиваемых силами, приложенными к звеньям исследуемых механизмов.* Заменяющие силы, удовлетворяющие этим условиям, получили название *приведенных сил*.

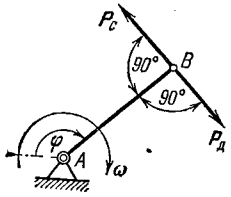


Рис. 15.1. Схема звена приведения.

Звено механизма, к которому приложены приведенные силы, носит название *звена приведения*, а точка приложения приведенных сил — *точки приведения*. Если рассматриваемый механизм имеет одну степень подвижности, то для изучения его движения достаточно знать закон движения одного из его звеньев (закон изменения обобщенной координаты).

Обычно за звено приведения выбирают то звено, по обобщенной координате которого проводится исследование механизма. Тогда вместо рассмотрения всего комплекса звеньев механизма можно рассмотреть звено, например кривошип AB (рис. 15.1), обобщенной координатой которого является угол φ. В точке B этого звена перпендикулярно к оси кривошипа приложены две приведенные силы: сила $\boldsymbol{P}_д$ — приведенная движущая сила и сила $\boldsymbol{P}_c$ — приведенная сила сопротивления. При этом сила $\boldsymbol{P}_д$ должна производить работу $A_д$, равную работе всех движущих сил, или, что то же, развивать мощность $N_д$, равную мощности всех движущих сил,

а сила $\boldsymbol{P}_c$ — производить работу A_c, равную работе всех сил сопротивлений, или, иначе, развивать мощность N_c, равную мощности всех сил сопротивлений.

2°. Для определения приведенных сил или их моментов может быть использовано равенство

$$N_п = \sum_1^k N_i. \tag{15.1}$$

В этом равенстве $N_п$ — мощность, развиваемая приведенной силой или приведенным моментом, а N_i — мощности, развиваемые силами или моментами, приложенными к звену i и подлежащими приведению.

Мощность $N_п$ может быть представлена так:

$$N_п = P_п v_B = M_п \omega, \tag{15.2}$$

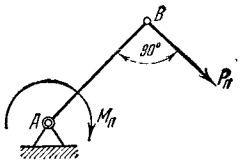


Рис. 15.2. Схема звена приведения с показанными на ней приведенной силой и приведенным моментом пары сил.

где $P_п$ — величина приведенной к точке B звена приведения силы (рис. 15.2), могущей быть в частном случае или приведенной движущей силой $\boldsymbol{P}_д$, или приведенной силой сопротивления $\boldsymbol{P}_c$ (рис. 15.1), v_B — скорость точки B приведения, $M_п$ — приведенный момент пары сил, который может быть приведенным моментом $M_д$ движущих сил или приведенным моментом M_c сил сопротивления, и ω — угловая скорость звена приведения.

Величины приведенной силы $\boldsymbol{P}_п$ и приведенного момента $M_п$ можно представить в следующем виде:

$$P_п = \frac{\sum_1^k M_i}{v_B}, \tag{15.3}$$

$$M_п = \frac{\sum_1^k M_i}{\omega}. \tag{15.4}$$

Сумма $\sum_1^k M_i$ в развернутом виде может быть представлена так:

$$\sum_1^k M_i = \sum_1^k P_j v_i \cos \alpha_i + \sum_1^k M_j \omega_i, \tag{15.5}$$

где P_j и M_j — сила и момент, приложенные к звену j, v_i — скорость точки приложения силы $\boldsymbol{P}_i$, ω_i — угловая скорость звена i и α_i — угол, образованный силой $\boldsymbol{P}_i$ и вектором скорости $\boldsymbol{v}_i$.

Подставляя выражение для $\sum_1^k M_i$ из уравнения (15.5) в уравнения (15.3) и (15.4), получаем

$$P_{\text{п}} = \sum_1^k P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_B} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{v_B} \tag{15.6}$$

и

$$M_{\text{п}} = \sum_1^k P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{\omega}. \tag{15.7}$$

Из уравнений (15.6) и (15.7) следует, что если для каждого положения механизма известны приложенные к его звеньям силы и моменты, то приведенная сила $\boldsymbol{P}_{\text{п}}$ и приведенный момент $M_{\text{п}}$ будут зависеть только от отношений скоростей, которые, как было показано в кинематике механизмов, зависят только от положения его звеньев, т. е. от обобщенной координаты.

Из уравнений (15.6) и (15.7) также следует, что при заданных силах $\boldsymbol{P}_i$ и моментах M_i определение приведенной силы $\boldsymbol{P}_{\text{п}}$ и момента $M_{\text{п}}$ не представляет значительных трудностей и может быть сделано, если для каждого исследуемого положения механизма будет построен план скоростей и отношения скоростей в уравнениях (15.6) и (15.7) будут выражены через соответствующие отрезки плана скоростей.

§ 67. Рычаг Жуковского

1°. Силовой расчет и динамическое исследование механизмов могут быть всегда произведены, если пользоваться принципом возможных перемещений. Согласно этому принципу, если на какую-либо механическую систему действуют силы, то, прибавляя к задаваемым силам силы инерции и давая всей системе возможные для данного ее положения перемещения, получаем ряд элементарных работ, сумма которых должна равняться нулю. Аналитически это может быть представлено так. Пусть к системе приложены силы $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \ldots, \boldsymbol{P}_n$, причем в число этих сил входят и силы инерции. Обозначим проекции возможных для данного момента перемещений на направления сил $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ через $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3, \ldots, \delta p_n$. Тогда согласно принципу возможных перемещений при условии, что все связи, наложенные на отдельные звенья механизма, — неосвобождающие, будем иметь

$$\sum_1^n P_i \delta p_i = 0, \tag{15.8}$$

или

$$P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + \ldots + P_n \delta p_n = 0. \tag{15.9}$$

Так как механизм является кинематической цепью принужденного движения, т. е. с вполне определенным движением всех звеньев при заданном движении ведущих звеньев, и так как связи в механизме нами приняты не зависящими от времени, то в механизме действительные перемещения содержатся в числе возможных и уравнение (15.8) можно написать так:

$$\sum_{1}^{n} P_i\, dp_i = 0, \tag{15.10}$$

или

$$P_1\, dp_1 + P_2\, dp_2 + P_3\, dp_3 + \ldots + P_n\, dp_n = 0, \tag{15.11}$$

где dp_1, dp_2, dp_3, ..., dp_n суть проекции действительных перемещений на направления приложенных сил.

2°. Рассмотрим, как может быть представлена элементарная работа какой-либо силы $\boldsymbol{P}_i$, входящей в уравнение (15.10). Пусть на звено AB в точке C действует сила $\boldsymbol{P}_i$, и пусть нам известны скорости точек A и B (рис. 15.3, *а*). Действительное элементарное перемещение точки C имеет направление скорости $\boldsymbol{v}_C$. Направление скорости $\boldsymbol{v}_C$ определяется после построения мгновенного центра вращения O, находящегося на пересечении перпендикуляров, восставленных в точках A и B к скоростям этих точек. Соединив точку C прямой с точкой O и проведя через точку C прямую, перпендикулярную к OC, получим направление скорости $\boldsymbol{v}_C$. Направление вектора скорости $\boldsymbol{v}_C$ определится знаком мгновенной угловой скорости Ω. Направление действительного перемещения ds точки C совпадает с направлением скорости $\boldsymbol{v}_C$ этой точки. Элементарная работа силы $\boldsymbol{P}_i$ равна

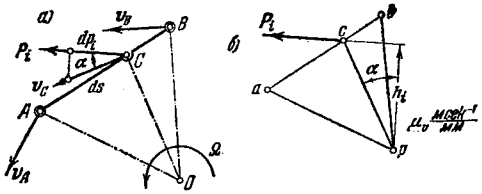


Рис. 15.3. К доказательству теоремы Н. Е. Жуковского: *а*) схема звена с показанной на ней силой; *б*) повернутый план скоростей.

$$dA_i = P_i\, dp_i. \tag{15.12}$$

Перемещение dp_i, входящее в уравнение (15.12), может быть представлено так:

$$dp_i = ds \cos\alpha,$$

где α есть угол, образуемый скоростью $\boldsymbol{v}_C$ и силой $\boldsymbol{P}_i$. Подставляя это значение dp_i в уравнение (15.12), получаем

$$dA_i = P_i\, ds \cos\alpha,$$

или, так как $ds = v_C dt$, то

$$dA_i = P_i v_C \cos\alpha\, dt. \tag{15.13}$$

Величину скорости v_C удобно определить построением плана скоростей звена AB. Для этого строим в произвольном масштабе *повернутый план* скоростей звена AB (рис. 15.3, *б*). На плане скоростей скорость v_C точки C изображается отрезком (pc), отложенным в масштабе μ_v от полюса p плана скоростей в направлении, перпендикулярном скорости v_C точки C, т. е.

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Полученное значение величины скорости v_C подставляем в равенство (15.13), получаем

$$dA_i = P_i \mu_v (pc) \cos\alpha \, dt. \tag{15.14}$$

Переносим далее силу P_i со схемы звена в точку c плана скоростей и из точки p опускаем на направление этой силы перпендикуляр h_i. При этом перенесении оставляем без изменения величину и направление силы P_i. Угол, образуемый отрезком (pc) и перпендикуляром h_i, равен углу α, так как отрезок (pc) перпендикулярен к направлению v_C, а отрезок h_i перпендикулярен к направлению силы P_i. Имеем

$$h_i = (pc) \cos\alpha.$$

Подставляя полученное выражение в равенство (15.14), записываем:

$$dA_i = P_i h_i \mu_v \, dt.$$

Произведение величины силы P_i на плечо h_i представляет собой величину момента $M_p(P_i)$ этой силы относительно точки p полюса плана скоростей. Так как все скорости на плане повернуты в одну сторону, то знак момента для всех сил совпадает со знаком элементарной работы силы, следовательно,

$$dA_i = M_p(P_i) \mu_v \, dt. \tag{15.15}$$

Таким образом, получаем, что элементарная работа силы, действующей на звено механизма, пропорциональна моменту относительно полюса плана скоростей этой же силы, перенесенной в соответствующую точку плана.

Аналогичные выражения для элементарных работ можно получить и для сил, действующих на другие звенья механизма. Тогда уравнение (15.10) может быть представлено так:

$$\mu_v \, dt \sum_1^n M_p(P_i) = 0, \tag{15.16}$$

или

$$M_p(P_1) + M_p(P_2) + \ldots + M_p(P_n) = 0, \tag{15.17}$$

так как в эти уравнения входит общий множитель $\mu_v\, dt$, не равный нулю. Уравнение (15.17) может быть написано так:

$$\sum_1^n M_p(P_i) = 0. \tag{15.18}$$

3°. Уравнения (15.17) или (15.18) геометрически могут быть представлены следующим образом.

Переносим все заданные силы, действующие в рассматриваемый момент времени на звенья механизма, в том числе и силы инерции, в одноименные точки повернутого плана скоростей, не изменяя при этом величины и направления этих сил, и составляем далее уравнение моментов (17.15) всех перенесенных сил относительно полюса плана скоростей, т. е. рассматриваем план скоростей как некоторый *рычаг* с опорой в полюсе плана скоростей, находящийся под действием всех рассматриваемых сил в равновесии. Подобная геометрическая интерпретация принципа возможных перемещений представляет значительные удобства для решения многих задач динамики механизмов. Метод этот получил название *метода Жуковского* по имени ученого, которым он был предложен, а рычаг, которым пользуются в этом методе, назван *рычагом Жуковского.*

Метод Жуковского может быть применен для нахождения величины какой-либо силы, если точка приложения и направление этой силы заданы, а также заданы величины, направления и точки приложения всех остальных сил. В самом деле, в этом случае в уравнении (15.17) будет только одна неизвестная величина искомой силы, которая из него и определится.

В заключение заметим, что если кроме сил $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ на звенья механизма действуют еще пары сил, моменты которых суть M_1, M_2, ..., M_n, то уравнение (15.11) принимает вид

$$P_1\, dp_1 + P_2\, dp_2 + P_3\, dp_3 + \ldots + P_n\, dp_n + M_1\, d\varphi_1 + \\ + M_2\, d\varphi_2 + M_3\, d\varphi_3 + \ldots + M_n\, d\varphi_n = 0, \tag{15.19}$$

где $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$, ..., $d\varphi_n$ — углы поворота звеньев, к которым приложены моменты M_1, M_2, M_3, ..., M_n.

Моменты M_1, M_2, M_3, ..., M_n могут быть также приложены к отрезкам, соответствующим на плане скоростей звеньям механизма, но величина прикладываемого момента M_i° должна удовлетворять условию

$$M_i^\circ = M_i \frac{l_i^\circ}{l_i},$$

где l_i° — отрезок, соответствующий на плане скоростей отрезку l_i на схеме.

Необходимо иметь в виду, что знак у момента M_i° сохраняется, если направление отрезка l_i° (порядок букв) совпадает с направлением отрезка l_i, и получается противоположным, если направления не совпадают.

§ 68. Определение приведенных и уравновешивающих сил методом Жуковского

1°. Применим метод Жуковского к нахождению приведенной и уравновешивающей сил (или приведенного и уравновешивающего моментов).

Пусть, например, на механизм действуют силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, ..., $\boldsymbol{P}_n$, причем под действием всех этих сил механизм не находится в равновесии. Требуется определить приведенную силу. Если приведенную силу обозначить через $\boldsymbol{P}_п$, а проекцию на направление силы элементарного перемещения точки приложения этой силы — через $dp_п$, то элементарная работа силы $\boldsymbol{P}_п$ выразится так:

$$P_п\, dp_п = \sum_1^n P_i\, dp_i. \tag{15.20}$$

Если перенести приведенную силу $\boldsymbol{P}_п$ и силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, ..., $\boldsymbol{P}_n$ в соответствующие точки плана скоростей и применить метод Жуковского (§ 67), то уравнение (15.20) может быть заменено уравнением

$$M_p(P_п) = \sum_1^n M_p(P_i), \tag{15.21}$$

т. е. момент приведенной силы $\boldsymbol{P}_п$ относительно точки p — полюса плана скоростей — равняется сумме моментов всех заданных сил относительно той же точки.

Методом Жуковского можно определять также уравновешивающую силу $\boldsymbol{P}_у$ или уравновешивающий момент $M_у$ (см. § 57).

Для этого следует найти приведенную силу $\boldsymbol{P}_п$ или приведенный момент $M_п$, предполагая их приложенными к тому же звену, к которому приложены сила $\boldsymbol{P}_у$ и момент $M_у$. При этом линия действия силы $\boldsymbol{P}_у$ должна совпадать с линией действия силы $\boldsymbol{P}_п$. Тогда силы $\boldsymbol{P}_п$ и $\boldsymbol{P}_у$ будут как бы приложены к одной общей точке звена, как правило ведущего, и будут направлены во взаимно противоположных направлениях, т. е. будут иметь место условия:

$$\boldsymbol{P}_у = -\boldsymbol{P}_п, \tag{15.22}$$

и

$$M_у = -M_п. \tag{15.23}$$

Из условия (15.22) следует:

$$P_у\, dp_у = -P_п\, dp_п = -\sum_1^n P_i\, dp_i. \tag{15.24}$$

Как это было показано выше (§ 57), если к ведомым звеньям механизма приложена система сил $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, ..., $\boldsymbol{P}_n$, в число которых

входят и силы инерции, то для равновесия механизма необходимо к ведущему звену приложить уравновешивающую силу $\boldsymbol{P}_{\text{у}}$. Уравнение равновесия механизма может быть тогда написано в следующем виде с учетом уравнения (15.24):

$$P_{\text{у}}\, dp_{\text{у}} + \sum_{1}^{n} P_i\, dp_i = 0. \tag{15.25}$$

В случае применения рычага Жуковского это уравнение может быть заменено следующим (см. уравнение 15.18)):

$$M_p(P_{\text{у}}) + \sum_{1}^{n} M_p(P_i) = 0. \tag{15.26}$$

Таким образом, если на звенья механизма действуют заданные силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, ..., $\boldsymbol{P}_n$, под действием которых механизм не находится в равновесии, то из уравнения моментов всех этих сил относительно полюса плана скоростей всегда можно определить величину силы $\boldsymbol{P}_{\text{у}}$, уравновешивающей заданные силы.

Определив силу $\boldsymbol{P}_{\text{у}}$ и изменив ее направление на противоположное, получим, согласно уравнению (15.22), силу $\boldsymbol{P}_{\text{п}}$.

Аналогично для уравновешивающего момента $M_{\text{у}}$ получаем

$$M_{\text{у}} + \sum_{1}^{n} M_p(P_i) = 0. \tag{15.27}$$

2°. Рассмотрим вопрос об определении уравновешивающей силы механизма, показанного на рис. 15.4, *а*. Пусть на звенья механизма действуют внешние силы $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$ и $\boldsymbol{P}_5$. В общем случае под действием этих сил механизм как система, обладающая одной степенью подвижности, не будет находиться в равновесии. Для приведения механизма в уравновешенное состояние надо в какой-либо точке механизма приложить уравновешивающую силу $\boldsymbol{P}_{\text{у}}$.

В качестве такой точки выбираем точку T ведущего звена. Задаемся направлением действия $q - q$ силы $P_{\text{у}}$. Для определения величины уравновешивающей силы воспользуемся методом Жуковского. Строим в произвольном масштабе повернутый план скоростей механизма (рис. 15.4, *б*) и переносим все силы, действующие на механизм, в том числе и уравновешивающую силу $\boldsymbol{P}_{\text{у}}$, в одноименные точки плана. Составляем далее уравнение моментов всех перенесенных сил относительно полюса плана скоростей. Имеем

$$M_p(P_2) + M_p(P_3) + M_p(P_4) + M_p(P_5) + M_p(P_{\text{у}}) = 0.$$

Обозначая плечи сил $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_5$ и $\boldsymbol{P}_{\text{у}}$ относительно полюса плана скоростей соответственно через h_2, h_3, h_4, h_5 и $h_{\text{у}}$, получаем

$$P_2 h_2 - P_3 h_3 - P_4 h_4 + P_5 h_5 - P_{\text{у}} h_{\text{у}} = 0.$$

Знаки моментов сил $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$ и $\boldsymbol{P}_5$ выбираем в зависимости от направления вращения вокруг полюса p. Из последнего уравнения определяем искомую величину уравновешивающей силы $\boldsymbol{P}_y$. Имеем

$$P_y = \frac{1}{h_y}(P_2 h_2 - P_3 h_3 - P_4 h_4 + P_5 h_5). \qquad (15.28)$$

Направление вектора силы $\boldsymbol{P}_y$ определяется после численного подсчета правой части равенства (15.28). Если правая часть уравнения окажется положительной, то это означает, что направление силы $\boldsymbol{P}_y$ было выбрано правильно. При отрицательном значении

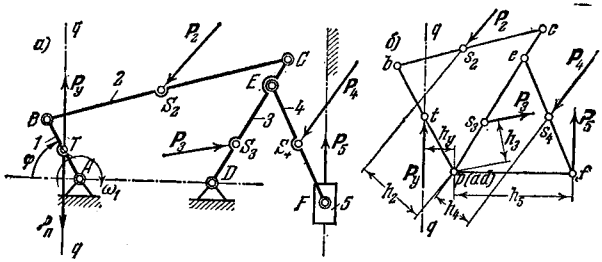


Рис. 15.4. К определению уравновешивающей силы механизма: *а*) схема механизма; *б*) повернутый план скоростей.

правой части направление силы $\boldsymbol{P}_y$ должно быть изменено на противоположное. Произведя в правой части формулы (15.28) почленное деление на h_y, получаем

$$P_y = P_2\frac{h_2}{h_y} - P_3\frac{h_3}{h_y} - P_4\frac{h_4}{h_y} + P_5\frac{h_5}{h_y}. \qquad (15.29)$$

Таким образом, величина уравновешивающей силы $\boldsymbol{P}_y$ равна алгебраической сумме произведений действующих на механизм сил на соответствующие отношения отрезков h_2/h_y, h_3/h_y, h_4/h_y и h_5/h_y, взятых из плана скоростей.

Изложенный метод является общим для механизмов любого класса.

3°. Аналогично решается задача и об определении приведенной силы. Пусть, например, на звенья механизма, показанного на рис. 15.4, *а*, действуют силы $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_5$. Требуется определить приведенную силу $P_п$, действующую на звено *1*, причем точка приложения T приведенной силы и линия ее действия q—q заданы. Для определения приведенной силы $\boldsymbol{P}_п$ воспользуемся условиями (15.22) и (15.29).

Величина приведенной силы $\boldsymbol{P}_п$, очевидно, будет равна

$$P_п = -P_y = -P_2\frac{h_2}{h_y} + P_3\frac{h_3}{h_y} + P_4\frac{h_4}{h_y} - P_5\frac{h_5}{h_y}. \qquad (15.30)$$

Таким образом, определение приведенной силы сводится к определению уравновешивающей силы с помощью плана скоростей. Определив уравновешивающую силу, мы найдем приведенную силу, изменив направление уравновешивающей силы на противоположное.

Применение рычага Жуковского позволяет определить искомые силы с помощью только одного уравнения моментов всех сил, действующих на механизм, относительно полюса плана скоростей. В случае применения метода планов сил пришлось бы произвести последовательно определение всех давлений в парах, т. е. произвести полный силовой расчет механизма. При применении рычага Жуковского план скоростей обычно строится *повернутым*. Можно пользоваться также и неповернутым планом скоростей. В этом случае необходимо все силы при их переносе на план скоростей повернуть в одну и ту же сторону на угол 90°.

4°. Метод Жуковского является геометрической интерпретацией уравнений (15.6) и (15.7), позволяющей с исключительной простотой и изяществом определять приведенные силы и моменты. При динамическом исследовании механизмов обычно силы, действующие на механизм, приводятся раздельно. Так, отдельно определяют приведенную силу от производственных сопротивлений, далее определяют приведенную силу от сил трения и от других. При приведении движущих сил обычно одновременно учитывают и силы тяжести, которые в зависимости от положения механизма увеличивают или уменьшают приведенную движущую силу. Раздельное определение приведенных сил позволяет лучше учесть влияние каждой из них на механизм.

Пример. На рис. 15.5, *а* показана схема механизма двигателя с прицепным шатуном. На звенья *3* и *5* действуют силы $\boldsymbol{P}_3$ и $\boldsymbol{P}_5$. Требуется определить уравновешивающую силу $\boldsymbol{P}_y$, приложенную в точке *B* кривошипа *1*, при условии, что сила $\boldsymbol{P}_y$ направлена по прямой *q—q*, перпендикулярной к кривошипу *AB*.

Строим в произвольном масштабе повернутый план скоростей (рис. 15.5, *б*) и прикладываем в точках *c* и *e* силы $\boldsymbol{P}_3$ и $\boldsymbol{P}_5$. Через точку *b* проводим линию действия уравновешивающей силы, параллельную *q—q*. Составляем далее уравнение моментов всех сил относительно полюса *p* плана скоростей. Имеем

$$M_p(P_y) + M_p(P_3) + M_p(P_5) = 0,$$

или, подставляя в это уравнение соответствующие отрезки плана скоростей, являющиеся плечами сил $\boldsymbol{P}_y$, $\boldsymbol{P}_3$ и $\boldsymbol{P}_5$, находим

$$P_y(pb) = P_3(pc) + P_5(pe),$$

откуда получаем величину уравновешивающей силы:

$$P_y = P_3\frac{(pc)}{(pb)} + P_5\frac{(pe)}{(pb)}.$$

Так как правая часть уравнения положительна, то направление силы P_y было нами выбрано правильно. Полученную силу P_y прикладываем в точке B механизма.

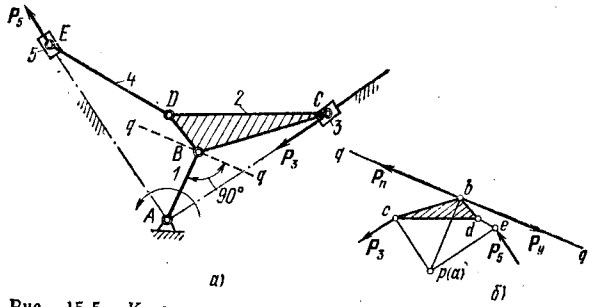


Рис. 15.5. К определению приведенной силы: *а*) схема механизма; *б*) повернутый план скоростей.

Если требуется определить приведенную силу $P_п$, приложенную в точке B и действующую по линии q—q, то можно воспользоваться условием (15.22), т. е. приведенная сила $P_п$ имеет ту же величину, что и уравновешивающая сила P_y, а ее направление противоположно направлению уравновешивающей силы P_y:

$$P_п = -P_y.$$

§ 69. Кинетическая энергия механизма

1°. Как было показано в § 63, 2°, уравнение кинетической энергии применительно к механизму имеет вид (см. уравнение (14.1))

$$A_д - A_c = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (15.31)$$

Пользуясь методами, указанными в § 66 или § 68, можно все движущие силы заменить одной приведенной силой $P_д$, приложенной к выбранному звену приведения AB (рис. 15.6) в точке B. Точно так же можно все силы сопротивления заменить одной приведенной силой P_c, приложенной к тому же звену AB в той же точке B.

Моменты сил движущих и сил сопротивления $M_д$ и M_c также можно заменить приведенными моментами на валу A.

Имея заданными приведенные силы или моменты, мы можем уравнение движения механизма в виду уравнения кинетической энергии написать так:

$$A_{P_д} - A_{P_c} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (15.32)$$

В уравнении (15.32) $A_{P_д}$ есть работа приведенной силы $P_д$, A_{P_c} — работа приведенной силы P_c. Левая часть этого уравнения

может быть выражена и через работы приведенных моментов. Имеем

$$A_{M_д} - A_{M_с} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (15.33)$$

В уравнении (15.33) $A_{M_д}$ есть работа приведенного момента $M_д$ движущих сил и $A_{M_с}$ — работа приведенного момента $M_с$ сил сопротивления.

Введем обозначения:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} \quad \text{и} \quad T_0 = \sum \frac{mv_0^2}{2}.$$

Тогда уравнения (15.32) и (15.33) можно написать так:

$$A_{P_д} - A_{P_с} = T - T_0 \qquad (15.34)$$

и

$$A_{M_д} - A_{M_с} = T - T_0. \qquad (15.35)$$

Если приведенные силы $P_д$ и $P_с$ или моменты $M_д$ и $M_с$ заданы в функции пути точки приведения или в функции угла поворота звена приведения, то не составляет труда определить работу $A_{P_д}$ и $A_{P_с}$ или $A_{M_д}$ и $A_{M_с}$ этих сил на заданном интервале. Таким образом, всегда может быть найдена разность работ, стоящая в левой части уравнений (15.34) и (15.35). Переходя к правой части этих уравнений, мы видим, что в этих частях стоят величины кинетической энергии механизма в рассматриваемых его положениях.

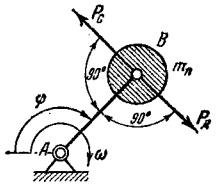


Рис. 15.6. Схема звена приведения с приведенной массой.

Рассмотрим вопрос о том, как может быть определена кинетическая энергия механизма.

2°. В общем случае плоскопараллельного движения звена его кинетическую энергию можно представить в виде суммы энергий в поступательном вместе с центром масс звена и вращательном вокруг его центра масс движениях. Поэтому для механизма можно написать

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n (m_i v_i^2 + J_i \omega_i^2). \qquad (15.36)$$

В формуле (15.36) m_i — масса звена i, v_i — скорость центра масс, J_i — его момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, и ω_i — его угловая скорость. Рассмотрим, как подсчитывается кинетическая энергия отдельных звеньев в зависимости от вида их движения.

Кинетическая энергия звена, движущегося поступательно, равна

$$T=\frac{mv_S^2}{2}. \tag{15.37}$$

В этой формуле m есть масса звена и v_S — скорость центра масс поступательно движущегося звена.

Для звена, имеющего вращательное движение, кинетическая энергия равна

$$T=\frac{J\omega^2}{2}. \tag{15.38}$$

Здесь J есть момент инерции звена относительно оси вращения и ω — угловая скорость звена.

Для звена, имеющего сложное плоскопараллельное движение, кинетическую энергию можно представить так:

$$T=\frac{J_p\omega^2}{2}, \tag{15.39}$$

где J_p есть момент инерции звена относительно оси, проходящей через мгновенный центр вращения p, и ω — мгновенная угловая скорость звена. Момент инерции J_p относительно оси, проходящей через мгновенный центр вращения, может быть выражен через момент инерции J_S относительно оси, проходящей через центр масс S звена:

$$J_p=J_S+ml_{pS}^2. \tag{15.40}$$

В этом равенстве l_{pS} есть расстояние от центра масс S звена до мгновенного центра вращения p. Подставляя выражение для J_p из равенства (15.40) в уравнение (15.39) и принимая во внимание, что $\omega l_{pS}=v_S$ есть скорость центра масс звена, получаем известную формулу для кинетической энергии звена, имеющего сложное вращательно-поступательное движение:

$$T=\frac{J_S\omega^2}{2}+\frac{mv_S^2}{2}. \tag{15.41}$$

Складывая алгебраически кинетические энергии отдельных звеньев, по формуле (15.36) получаем значение кинетической энергии всего механизма.

§ 70. Приведенная масса и приведенный момент инерции механизма

1°. Механизм с одной степенью подвижности имеет одно ведущее звено, которое может быть выбрано за звено приведения. Пусть рассматриваемый механизм, состоящий из n звеньев (рис. 15.7, *а*), имеет одну степень подвижности. В этом механизме выбираем одно звено, например звено AB, в качестве звена приведения, а одну из точек этого звена, например точку B, примем за точку приведения.

Развернем уравнение (15.36), помножим и разделим правую часть равенства (15.36) на квадрат скорости v_B^2 точки приведения B и вынесем величину v_B^2 за скобки. Тогда равенство (15.36) в развернутом виде можно представить так:

$$T=\frac{v_B^2}{2}\left[m_1\left(\frac{v_1}{v_B}\right)^2+J_1\left(\frac{\omega_1}{v_B}\right)^2+m_2\left(\frac{v_2}{v_B}\right)^2+\right.$$
$$\left.+J_2\left(\frac{\omega_2}{v_B}\right)^2+\ldots+m_n\left(\frac{v_n}{v_B}\right)^2+J_n\left(\frac{\omega_n}{v_B}\right)^2\right], \qquad (15.42)$$

где v_1, v_2, ..., v_n — скорости центров масс звеньев.

В равенстве (15.42) кинетическая энергия T выражена в функции скорости v_B точки приведения. Кинетическую энергию можно

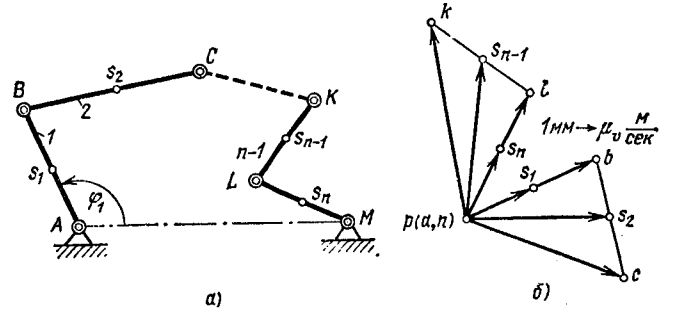


Рис. 15.7. К определению приведенной массы механизма: *а*) схема механизма; *б*) план скоростей.

также выразить в функции угловой скорости ω звена приведения. В этом случае правую часть равенства (15.36) умножаем и делим на квадрат угловой скорости ω_1^2 звена AB. Получаем

$$T=\frac{\omega_1^2}{2}\left[m_1\left(\frac{v_1}{\omega_1}\right)^2+J_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2+m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2+\right.$$
$$\left.+J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+\ldots+m_n\left(\frac{v_n}{\omega_1}\right)^2+J_n\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2\right]. \qquad (15.43)$$

Обозначим величину, стоящую в квадратных скобках равенства (15.42), через $m_\text{п}$, а величину, стоящую в квадратных скобках равенства (15.43), — через $J_\text{п}$. Тогда будем иметь

$$m_\text{п}=m_1\left(\frac{v_1}{v_B}\right)^2+J_1\left(\frac{\omega_1}{v_B}\right)^2+m_2\left(\frac{v_2}{v_B}\right)^2+$$
$$+J_2\left(\frac{\omega_2}{v_B}\right)^2+\ldots+m_n\left(\frac{v_n}{v_B}\right)^2+J_n\left(\frac{\omega_n}{v_B}\right)^2 \qquad (15.44)$$

и

$$J_\text{п}=m_1\left(\frac{v_1}{\omega_1}\right)^2+J_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2+m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2+$$
$$+J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+\ldots+m_n\left(\frac{v_n}{\omega_1}\right)^2+J_n\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2. \qquad (15.45)$$

Из равенств (15.44) и (15.45) видно, что величина $m_п$ имеет размерность массы [*кг*], а величина $J_п$ имеет размерность момента инерции [*кгм*^{2}]. Таким образом, $m_п$ представляет собой некоторую условную массу, сосредоточенную в точке B, *кинетическая энергия* T *которой равна в каждом рассматриваемом положении кинетической энергии звеньев механизма* $ABC\ldots KLM$ (рис. 15.7, *а*), т. е. сумме кинетической энергии всех его звеньев. Масса $m_п$ получила название *приведенной массы.*

Из равенства (15.44) следует, что в общем случае приведенная масса переменна и зависит от квадратов отношений линейных и угловых скоростей, и поэтому она всегда положительна.

Аналогично величина $J_п$ в равенстве (15.45) представляет собой *приведенный* к звену AB *момент инерции* звеньев механизма. Это есть момент инерции вращающегося вместе со звеном AB тела, *кинетическая энергия которого в каждом рассматриваемом положении механизма равна сумме кинетических энергий всех его звеньев.*

2°. Подставляя в формулы (15.42) и (15.43) значения $m_п$ и $J_п$ и принимая во внимание формулу (15.36), получаем

$$T=\frac{1}{2}\sum_1^n(m_iv_i^2+J_i\omega_i^2)=\frac{v_B^2}{2}\sum_1^n\left[m_i\left(\frac{v_i}{v_B}\right)^2+J_i\left(\frac{\omega_i}{\omega_B}\right)^2\right]=\frac{m_пv_B^2}{2} \qquad (15.46)$$

и

$$T=\frac{1}{2}\sum_1^n(m_iv_i^2+J_i\omega_i^2)=\frac{\omega_1^2}{2}\sum_1^n\left[m_i\left(\frac{v_i}{\omega_1}\right)^2+J_i\left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2\right]=\frac{J_п\omega_1^2}{2}. \qquad (15.47)$$

Из равенств (15.46) и (15.47) следует, что приведенная масса $m_п$ и приведенный момент инерции $J_п$ связаны условием $m_пv_B^2=J_п\omega_1^2$, или так как $v_B^2=\omega_1^2l_{AB}^2$, то

$$m_п=\frac{J_п}{l_{AB}^2}, \qquad (15.48)$$

где l_{AB} — длина звена приведения.

Приведенная масса $m_п$ и приведенный момент инерции $J_п$ могут быть выражены также через соответствующие отрезки плана скоростей (рис. 15.7, *б*). Имеем

$$m_п=m_1\left(\frac{ps_1}{pb}\right)^2+\frac{J_1}{l_{AB}^2}\left(\frac{ab}{pb}\right)^2+m_2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2+$$
$$+\frac{J_2}{l_{BC}^2}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2+\ldots+m_n\left(\frac{ps_n}{pb}\right)^2+\frac{J_n}{l_{LN}^2}\left(\frac{ln}{pb}\right)^2$$

и

$$J_п=m_1l_{AB}^2\left(\frac{ps_1}{pb}\right)^2+J_1\frac{l_{AB}^2}{l_{AB}^2}\left(\frac{ab}{pb}\right)^2+m_2l_{AB}^2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2+$$
$$+J_2\frac{l_{AB}^2}{l_{BC}^2}\left(\frac{pc}{pb}\right)^2+\ldots+m_nl_{AB}^2\left(\frac{ps_n}{pb}\right)^2+J_n\frac{l_{AB}^2}{l_{LN}^2}\left(\frac{ln}{pb}\right)^2,$$

так как $v_{s_1} = \mu_v (ps_1)$, $v_{s_2} = \mu_v (ps_2)$, ..., $v_{s_n} = \mu_v (ps_n)$,

$$\omega_1 = \mu_v \frac{(ab)}{l_{AB}}, \quad \omega_2 = \mu_v \frac{(bc)}{l_{BC}}, \quad \ldots, \quad \omega_n = \mu_v \frac{(ln)}{l_{LN}}$$

и $v_B = \mu_v (pb)$, где μ_v есть масштаб плана скоростей. Нетрудно видеть, что приведенные масса $m_п$ и момент инерции $J_п$ являются функциями обобщенной координаты φ_1 (рис. 15.7), т. е. $m_п = m_п (\varphi_1)$ и $J_п = J_п (\varphi_1)$.

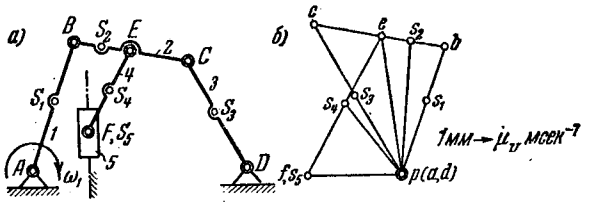


Рис. 15.8. К определению приведенной массы механизма: *а*) схема механизма; *б*) повернутый план скоростей.

Как было показано выше, в качестве звена приведения обычно выбирается звено, являющееся ведущим (рис. 15.7, *а*). Таким образом, звено AB будет находиться под воздействием сил $\boldsymbol{P}_д$ и $\boldsymbol{P}_c$, в общем случае переменных, и будет обладать массой $m_п$, сосредоточенной в точке B, в общем случае также переменной (рис. 15.6). Приведя все силы, действующие на звенья механизма, и их массы к ведущему звену AB, мы тем самым условно заменили механизм эквивалентой в динамическом отношении системой звена с массой $m_п$ или моментом инерции $J_п$.

Пример. Определить кинетическую энергию, приведенные массы и момент инерции механизма (рис. 15.8, *а*) в положении, показанном на чертеже, если известны массы и моменты инерции его звеньев. Скорости центров масс и угловые скорости звеньев заданы повернутым планом скоростей (рис. 15.8, *б*). В качестве звена приведения выбрано звено AB.

Общая кинетическая энергия T механизма, согласно формуле (15.36), равна

$$T = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{J_3\omega_3^2}{2} + \frac{m_4 v_4^2}{2} + \frac{J_4\omega_4^2}{2} + \frac{m_5 v_5^2}{2}.$$

В этой формуле J_2 и J_4 суть моменты инерции звеньев *2* и *4* относительно осей, проходящих через центры масс S_2 и S_4; J_1 и J_3 — моменты инерции звеньев *1* и *3* относительно осей, проходящих через точки A и D; ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 — угловые скорости звеньев *1*, *2*, *3*, *4*; v_2, v_4 и v_5 — скорости центров масс S_2, S_4 и S_5 звеньев *2*, *4* и *5* и m_2, m_4 и m_5 — массы звеньев *2*, *4* и *5*. Так как в качестве звена приведения выбрано звено AB, то кинетическая энергия T

механизма, согласно формуле (15.43), может быть выражена так:

$$T=\frac{\omega_1^2}{2}\left[J_1+m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2+J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+J_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2+\right.$$
$$\left.+m_4\left(\frac{v_4}{\omega_1}\right)^2+J_4\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2+m_5\left(\frac{v_5}{\omega_1}\right)^2\right]=\frac{J_\text{п}\omega_1^2}{2},$$

где $J_\text{п}$ — выражение, стоящее в квадратных скобках.

Величина приведенного момента инерции $J_\text{п}$ может быть выражена через соответствующие отрезки плана скоростей (рис. 15.8, *б*). Для этого вычисляем все значения линейных и угловых скоростей, входящих в выражение для кинетической энергии. Имеем

$$\omega_1=\frac{\mu_v(pb)}{l_{AB}},\quad \omega_2=\frac{\mu_v(bc)}{l_{BC}},\quad \omega_3=\frac{\mu_v(pc)}{l_{DC}},$$
$$\omega_4=\frac{\mu_v(fe)}{l_{FE}},\quad v_2=\mu_v(ps_2),\quad v_4=\mu_v(ps_4),\quad v_5=\mu_v(ps_5).$$

Подставив эти выражения в формулу (15.45) для приведенного момента инерции $J_\text{п}$, получим его значение для механизма (рис. 15.8, *а*):

$$J_\text{п}=J_1+m_2l_{AB}^2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2+J_2\frac{l_{AB}^2}{l_{BC}^2}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2+J_3\frac{l_{AB}^2}{l_{DC}^2}\left(\frac{pc}{pb}\right)^2+$$
$$+m_4l_{AB}^2\left(\frac{ps_4}{pb}\right)^2+J_4\frac{l_{AB}^2}{l_{FE}^2}\left(\frac{fe}{pb}\right)^2+m_5l_{AB}^2\left(\frac{ps_5}{pb}\right)^2.$$

Кинетическая энергия механизма (рис. 15.8, *а*) может быть также выражена через приведенную массу $m_\text{п}$, причем за точку приведения может быть выбрана любая точка звена AB. Если за точку приведения мы выберем точку B, то формула (15.46) для кинетической энергии примет следующий вид:

$$T=\frac{m_\text{п}v_B^2}{2}.$$

Так как согласно формуле (15.48) $m_\text{п}=J_\text{п}/l_{AB}^2$, то, разделив первую часть уравнения для приведенного момента инерции $J_\text{п}$ на l_{AB}^2, получим значение приведенной массы:

$$m_\text{п}=\frac{J_1}{l_{AB}^2}+m_2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2+\frac{J_2}{l_{BC}^2}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2+$$
$$+\frac{J_3}{l_{DC}^2}\left(\frac{pc}{pb}\right)^2+m_4\left(\frac{ps_4}{pb}\right)^2+\frac{J_4}{l_{FE}^2}\left(\frac{fe}{pb}\right)^2+m_5\left(\frac{ps_5}{pb}\right)^2.$$

Величины отрезков, взятых из плана скоростей, можно брать в миллиметрах без умножения на масштаб μ_v плана, так как при делении одного отрезка на другой масштаб сокращаются.

ГЛАВА XVI

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА

§ 71. Основные формы уравнения движения

1°. Как было указано выше (§ 1, *3°*), под *машинным агрегатом понимается совокупность механизмов двигателя, передаточных механизмов и механизмов рабочей машины.* Примерами машинных агрегатов могут быть поршневой двигатель внутреннего сгорания и поршневой насос, электродвигатель и кривошипный пресс для обработки металлов давлением, электродвигатель и ротационный насос, поршневой двигатель внутреннего сгорания и генератор электрического тока и т. д.

В § 41 и 42 было показано, что движущие силы и силы производственных сопротивлений могут зависеть одновременно или раздельно от положения звена, выбранного за ведущее, и от угловой скорости этого звена. Например, в машинном агрегате с поршневым двигателем и поршневым насосом движущие силы и силы производственных сопротивлений зависят от положения ведущих звеньев.

В машинном агрегате электродвигатель — кривошипный пресс для обработки металлов давлением движущие силы зависят от угловой скорости и могут быть представлены в виде соответствующей механической характеристики (см. § 42, *2°*). Для пресса сопротивление является функцией положения его ведущего звена. В машинном агрегате электродвигатель — ротационный насос движущая сила и сила производственного сопротивления зависят от угловой скорости ведущих звеньев. Наконец, для машинного агрегата поршневой двигатель внутреннего сгорания — генератор электрического тока движущая сила может считаться с достаточной точностью зависящей только от положения ведущего звена, а сила производственного сопротивления — от угловой скорости вала генератора и т. д.

Приведенные моменты инерции $J_п$ машинного агрегата могут быть или постоянными, или же зависящими от положения ведущего звена. Так, у электродвигателя с ротационным насосом, генератором электрического тока и т. д. приведенный момент инерции $J_п$ постоянный ($J_п = \text{const}$). У кривошипного пресса, поршневого двигателя внутреннего сгорания, строгального станка и т. д. приведенный момент инерции $J_п$ зависит от угла поворота φ ведущего звена ($J_п = J_п(\varphi)$).

Приведенная масса $m_п$ или приведенный момент инерции $J_п$, очевидно, постоянны для всех машин и механизмов, для которых передаточные отношения, входящие в равенства (15.44) и (15.45), постоянны.

2°. Уравнение движения машинного агрегата может быть написано в форме уравнения кинетической энергии (см. § 63, формула (14.1)):

$$A_д - A_с = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (16.1)$$

Если привести все силы и массы к выбранному звену приведения, то уравнение (16.1) может быть написано так:

$$A_{P_д} - A_{P_с} = \frac{m_п v^2}{2} - \frac{m_{п0} v_0^2}{2}, \qquad (16.2)$$

где $A_{P_д}$ — работа приведенной к звену приведения движущей силы на рассматриваемом перемещении, $A_{P_с}$ — работа приведенной силы сопротивления на том же перемещении, $m_п$ и $m_{п0}$ — приведенные массы, соответствующие конечному и начальному положениям рассматриваемого перемещения, и v и v_0 — скорости точки приведения, соответствующие конечному и начальному положениям рассматриваемого перемещения.

Обычно удобнее в левую часть уравнения кинетической энергии вводить работу приведенных к звену приведения моментов сил $A_{M_д}$ и $A_{M_с}$, а правую часть выражать через приведенные моменты инерции $J_п$ и $J_{п0}$ звеньев. Уравнение (16.2) принимает тогда следующий вид:

$$A_{M_д} - A_{M_с} = \frac{J_п \omega^2}{2} - \frac{J_{п0} \omega_0^2}{2}. \qquad (16.3)$$

3°. Уравнение движения машинного агрегата может быть также написано в форме дифференциального уравнения.

Обозначим разность приведенных силы движущей $P_д$ и силы сопротивления $P_с$ через P, т. е. $P = P_д - P_с$.

Тогда уравнению кинетической энергии можно придать вид

$$dA = P\,ds = dT,$$

или

$$P = \frac{dA}{ds} = \frac{dT}{ds}, \qquad (16.4)$$

где dA — элементарная работа приведенной силы, ds — элементарное перемещение точки приведения и dT — элементарное приращение кинетической энергии агрегата.

Подставляя в уравнение (16.4) значение кинетической энергии, получаем

$$P = P_д - P_с = \frac{dT}{ds} = \frac{d\left(\frac{m_п v^2}{2}\right)}{ds}, \qquad (16.5)$$

где $m_п$ — приведенная масса, в общем случае переменная и являющаяся функцией пути s. Далее имеем

$$\frac{d\left(\frac{m_п v^2}{2}\right)}{ds} = m_п \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} + \frac{v^2}{2}\frac{dm_п}{ds},$$

но

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} = \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dv}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds} = v\frac{dv\,dt}{dt\,ds} = \frac{dv}{dt};$$

поэтому уравнение (16.5) принимает вид

$$P = P_д - P_с = m_п \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2}\frac{dm_п}{ds}. \qquad (16.6)$$

Другой вид уравнению движения механизмов машинного агрегата можно придать, если воспользоваться приведенным моментом $M = M_д - M_с$, приведенным моментом инерции $J_п$ и угловой скоростью ω звена приведения. Имеем тогда

$$M = M_д - M_с = J_п \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_п}{d\varphi}, \qquad (16.7)$$

где φ — угол поворота звена приведения. Последнее уравнение получается аналогично уравнению (16.5) из уравнения

$$M = M_д - M_с = \frac{dT}{d\varphi} = \frac{d\left(\frac{J_п\omega^2}{2}\right)}{d\varphi}. \qquad (16.8)$$

Для определения истинного движения всех механизмов машинного агрегата, очевидно, достаточно знать закон движения звена, выбранного за звено приведения, т. е. определить из уравнения (16.6) или (16.7) обобщенные координаты звена приведения как функции времени.

4°. В § 16 было показано, что в общем случае движение любого механизма может быть представлено как сумма двух движений, перманентного и начального. В перманентном движении скорость $\boldsymbol{v}$ точки приведения или угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ звена приведения постоянны. Соответственно ускорение $\boldsymbol{a}$ точки приведения или угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ звена приведения равны нулю. В начальном движении скорости $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ соответственно равны нулю, а ускорения $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ не равны нулю. Такая интерпретация движения механизма, предложенная Н. Е. Жуковским, становится особенно ясной, если обратиться к уравнению движения звена приведения механизма, написанному в форме дифференциального уравнения вида (16.6) или (16.7).

Рассмотрим уравнение (16.7). Имеем

$$M = J_п \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_п}{d\varphi}. \qquad (16.9)$$

В перманентном движении $\omega = \text{const}$ и $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$, и, следовательно, равен нулю первый член правой части уравнения (16.9). В начальном движении $\omega = 0$, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \neq 0$, следовательно, будет равен нулю второй член правой части уравнения (16.9). Обозначим:

$$M_{\text{нач}} = -J_{\text{п}} \frac{d\omega}{dt}, \tag{16.10}$$

$$M_{\text{пер}} = -\frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\text{п}}}{d\varphi}, \tag{16.11}$$

где $M_{\text{нач}}$ — момент от сил инерции в начальном движении, а $M_{\text{пер}}$ — момент от сил инерции в перманентном движении.

Тогда

$$M - J_{\text{п}} \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\text{п}}}{d\varphi} = 0 \tag{16.12}$$

или

$$M + M_{\text{нач}} + M_{\text{пер}} = 0. \tag{16.13}$$

Уравнение (16.13) есть уравнение динамического равновесия звена приведения, к которому приложен внешний момент M и моменты $M_{\text{нач}}$ и $M_{\text{пер}}$ сил инерции звеньев в начальном и перманентном движениях.

Таким образом, при динамическом исследовании механизма можно и не пользоваться понятием приведенной массы или приведенного момента инерции, а определять моменты $M_{\text{нач}}$ и $M_{\text{пер}}$ от сил инерции, приводя силы инерции звеньев, найденные в условиях перманентного и начального движений, к выбранному звену приведения.

§ 72. Интегрирование уравнений движения

1°. В дифференциальное уравнение движения механизма машинного агрегата в форме (16.7) в левую часть входят приведенные моменты $M_{\text{д}}$ и $M_{\text{с}}$ движущих сил и сил сопротивления. Как было указано выше (§ 71, *1°*), эти моменты могут быть функциями обобщенной координаты φ, или ее первой производной $\dot{\varphi} = \omega$, или, наконец, времени t.

Если рассмотреть возможные сочетания этих функций, то можно установить следующие виды уравнений движения, в которых моменты $M_{\text{д}}$ и $M_{\text{с}}$ являются функциями одной и той же переменной.

Первый вид уравнений:

$$M_{\text{д}}(\varphi) - M_{\text{с}}(\varphi) = J_{\text{п}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\text{п}}}{d\varphi}, \tag{16.14}$$

$$M_{\text{д}}(\omega) - M_{\text{с}}(\omega) = J_{\text{п}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\text{п}}}{d\varphi}, \tag{16.15}$$

$$M_{\text{д}}(t) - M_{\text{с}}(t) = J_{\text{п}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{\text{п}}}{d\varphi}. \tag{16.16}$$

В уравнениях (16.14)—(16.16) моменты $M_д$ движущих сил и моменты $M_с$ сил сопротивления в каждом из уравнений являются функциями или от φ, или от ω, или от t. Но не менее часто мы имеем случаи, когда моменты $M_д$ и $M_с$ являются функциями различных переменных. Тогда мы получаем уравнения второго вида:

$$M_д(\varphi) - M_с(t) = J_п \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_п}{d\varphi}, \tag{16.17}$$

$$M_д(\omega) - M_с(\varphi) = J_п \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_п}{d\varphi}, \tag{16.18}$$

$$M_д(t) - M_с(\omega) = J_п \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_п}{d\varphi}. \tag{16.19}$$

Уравнения (16.14)—(16.19) в общем случае являются нелинейными дифференциальными, решение которых может быть проведено только приближенными методами.

2°. Нетрудно видеть, что только уравнение (16.14) может быть решено, и притом в квадратурах, а не в конечном виде. В самом деле, если $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$, то, согласно уравнению (16.8), уравнение (16.14) может быть представлено в следующей форме:

$$(M_д - M_с)\, d\varphi = d\left(\frac{J_п\omega^2}{2}\right),$$

откуда имеем

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_д - M_с)\, d\varphi = \frac{J_{пi}\omega_i^2}{2} - \frac{J_{п0}\omega_0^2}{2}, \tag{16.20}$$

где $J_{пi}$ и ω_i — приведенный момент инерции и угловая скорость звена приведения в положении i и $J_{п0}$ и ω_0 — приведенный момент инерции и угловая скорость звена приведения в начальном положении. Уравнение (16.20) есть уравнение движения механизма машинного агрегата в форме уравнения кинетической энергии.

Из уравнения (16.20) определяется угловая скорость ω_i:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{пi}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_д - M_с)\, d\varphi + \frac{J_{п0}}{J_{пi}}\omega_0^2}. \tag{16.21}$$

Из формулы (16.21) следует, что если заданы функции $M_д = M_д(\varphi)$, $M_с = M_с(\varphi)$ и $J_п = J_п(\varphi)$, то для определения угловой скорости ω_i необходимо еще иметь заданной величину угловой скорости ω_0. Если исследование механизма машинного агрегата начинается с момента пуска его в ход, то угловая скорость ω звена приведения $\omega_0 = 0$ и формула (16.21) принимает вид

$$\omega_i = \sqrt{\frac{1}{J_{пi}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_д - M_с)\, d\varphi}. \tag{16.22}$$

Из формул (16.21) и (16.22) можно определить значения угловой скорости ω звена приведения в функции его угла поворота, т. е. $\omega = \omega(\varphi)$. Для определения времени t движения механизма машинного агрегата можно воспользоваться условием

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{16.23}$$

Из соотношения (16.23) получаем

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}, \tag{16.24}$$

или

$$t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \tag{16.25}$$

и, далее,

$$t_i = t_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \tag{16.26}$$

Если исследование движения механизма ведется с момента пуска его в ход, то $t_0 = 0$ и уравнение (16.26) примет вид

$$t_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \tag{16.27}$$

Из формулы (16.26) или (16.27) можно определить время t движения механизма в функции угла φ поворота звена приведения, т. е. $t = t(\varphi)$. Таким образом, мы имеем две функции: $\omega = \omega(\varphi)$ и $t = t(\varphi)$. Исключая из них угол φ, можно получить функцию $\omega = \omega(t)$ — зависимость угловой скорости ω от времени t. Угловое ускорение ε звена приведения определяется из соотношения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}.$$

В частном случае, когда приведенный момент инерции $J_\text{п}$ постоянен, формулы (16.20) и (16.21) принимают вид

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_\text{д} - M_\text{с})\, d\varphi = \frac{J_\text{п}}{2}(\omega_i^2 - \omega_0^2) \tag{16.28}$$

и

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_\text{п}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} (M_\text{д} - M_\text{с})\, d\varphi + \omega_0^2}. \tag{16.29}$$

Если заданы не приведенные моменты, а приведенные силы $P_д = P_д(s)$, $P_с = P_с(s)$ и приведенная к точке приведения масса $m_п = m_п(s)$, где s — путь точки приведения, то равенства, получаемые решением уравнения движения агрегата, будут аналогичными уравнению (16.20) и формулам (16.21) и (16.26). Имеем

$$\int_{s_0}^{s_i} (P_д - P_с)\, ds = \frac{m_{пi} v_i^2}{2} - \frac{m_{п0} v_0^2}{2}, \tag{16.30}$$

откуда

$$v_i = \sqrt{\frac{2}{m_{пi}} \int_{s_0}^{s_i} (P_д - P_с)\, ds + \frac{m_{п0}}{m_{пi}} v_0^2} \tag{16.31}$$

и, далее,

$$t_i = t_0 + \int_{s_0}^{s_i} \frac{ds}{v(s)}, \tag{16.32}$$

где v, v_i и v_0 — скорости точки приведения.

3°. Уравнения (16.15) и (16.16) могут быть решены в квадратурах в частном случае, когда приведенные моменты инерции $J_п = \text{const}$. В этом случае уравнение (16.15) получает вид

$$M_д(\omega) - M_с(\omega) = J_п \frac{d\omega}{dt}. \tag{16.33}$$

Так как моменты $M_д = M_д(\omega)$ и $M_с = M_с(\omega)$ заданы и известен постоянный момент инерции $J_п$, то уравнение (16.33) приводится к виду

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = J_п \int_{\varphi_0}^{\omega_i} \frac{d\omega}{M_д(\omega) - M_с(\omega)}. \tag{16.34}$$

Из уравнения (16.34) определяется время t движения агрегата в функции угловой скорости ω, т. е. $t = t(\omega)$. Производя интегрирование левой части, получаем

$$t_i = t_0 + J_п \int_{\omega_0}^{\omega_i} \frac{d\omega}{M_д(\omega) - M_с(\omega)}. \tag{16.35}$$

Уравнение (16.16) при $J_п = \text{const}$ приводится к виду

$$M_д(t) - M_с(t) = J_п \frac{d\omega}{dt}. \tag{16.36}$$

Так как моменты $M_д = M_д(t)$ и $M_с = M_с(t)$ заданы и известен постоянный момент инерции $J_п$, то из уравнения (16.36) получаем

$$\int_{\omega_0}^{\omega_i} d\omega = \frac{1}{J_п} \int_{t_0}^{t_i} [M_д(t) - M_с(t)]\, dt. \tag{16.37}$$

Из уравнения (16.37) определяется угловая скорость ω движения звена приведения в функции времени t:

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{1}{J_\text{п}} \int_{t_0}^{t_i} [M_\text{д}(t) - M_\text{с}(t)]\, dt. \qquad (16.38)$$

Получение решений уравнений (16.17)—(16.19) в конечном виде возможно в частных случаях, когда функции, стоящие в левой части этих уравнений, достаточно простые.

4°. Как было указано выше, уравнения (16.14)—(16.19) в общем случае могут быть проинтегрированы приближенными методами. В качестве такого метода может быть применен, в частности, метод, разработанный Г. Г. Барановым, заключающийся в том, что угол поворота φ звена приведения разбивается на достаточно малые интервалы $\Delta\varphi$, принимаемые за шаг интегрирования. В каждом интервале $\Delta\varphi$ заданные функции приведенных моментов движущих сил $M_\text{д}$ и сил сопротивления $M_\text{с}$ считаются постоянными, а приведенный момент инерции $J_\text{п}$ принимается изменяющимся линейно.

Обозначим левые части уравнений (16.14)—(16.19) обобщенно в виде $M(\varphi, \omega, t)$, так как моменты $M_\text{д}$ и $M_\text{с}$ могут быть функциями угла поворота φ, угловой скорости ω и времени t. Тогда эти уравнения можно написать в общем виде так:

$$M(\varphi, \omega, t) = J_\text{п} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_\text{п}}{d\varphi}. \qquad (16.39)$$

Так как

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi},$$

то уравнение (16.39) можно представить в следующем виде:

$$M(\varphi, \omega, t) = J_\text{п}\omega \frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_\text{п}}{d\varphi}, \qquad (16.40)$$

или

$$\frac{2M(\varphi, \omega, t)}{\omega} d\varphi = 2J_\text{п}\, d\omega + \omega\, dJ_\text{п}. \qquad (16.41)$$

Заменим в уравнении (16.41) $d\varphi$ шагом интегрирования $\Delta\varphi$. Тогда величина $d\omega$ приращения скорости может быть заменена разностью $(\omega_{i+1} - \omega_i)$, а величина $dJ_\text{п}$ приращения приведенного момента инерции — разностью $J_{\text{п}(i+1)} - J_{\text{п}i}$, где i и $i+1$ — два положения звена приведения, соответствующие началу и концу интервала $\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$.

С учетом сказанного уравнение (16.41) принимает вид

$$\frac{2M(\varphi_i, \omega_i, t_i)}{\omega_i} \Delta\varphi = 2J_{\text{п}i}(\omega_{i+1} - \omega_i) + \omega_i (J_{\text{п}(i+1)} - J_{\text{п}i}). \qquad (16.42)$$

Решая уравнение (16.42) относительно угловой скорости ω_{i+1}, получаем

$$\omega_{i+1}=\frac{M(\varphi_i, \omega_i, t_i)\,\Delta\varphi}{J_{\text{п}i}\omega_i}+\frac{3J_{\text{п}i}-J_{\text{п}(i+1)}}{2J_{\text{п}i}}\omega_i. \qquad (16.43)$$

Зная значения для $M(\varphi_i, \omega_i, t_i)$, $J_{\text{п}i}$, $J_{\text{п}(i+1)}$ и ω_i, из формулы (16.43) при выбранном шаге интегрирования $\Delta\varphi$ можно определить угловую скорость ω_{i+1}. Проводя шаг за шагом вычисления угловой скорости ω_i, получаем функцию $\omega = \omega(\varphi)$.

Для определения времени t движения агрегата можно воспользоваться условием

$$dt=\frac{d\varphi}{\omega}. \qquad (16.44)$$

Заменим в этом уравнении dt через разность $t_{i+1} - t_i$, $d\varphi$ — через шаг $\Delta\varphi$ интервала и угловую скорость ω — через ее среднее значение $\frac{\omega_i+\omega_{i+1}}{2}$. В таком случае можно написать

$$t_{i+1}-t_i=\frac{2\Delta\varphi}{\omega_i+\omega_{i+1}}, \qquad (16.45)$$

откуда определяем время t_{i+1}:

$$t_{i+1}=t_i+\frac{2\Delta\varphi}{\omega_i+\omega_{i+1}}. \qquad (16.46)$$

Изложенный метод приближенного интегрирования может быть применен как в случае аналитического, так и в случае графического задания всех функций, входящих в уравнения (16.14) — (16.19).

§ 73. Исследование движения с помощью уравнения кинетической энергии

1°. В большинстве технических задач приведенный момент движущих сил и приведенный момент сил сопротивления задаются в виде графиков, в виде графика также задается и приведенный момент инерции. Поэтому решение уравнений движения механизма ведется графочисленными методами. При графочисленном решении уравнений движения удобно применить уравнение кинетической энергии. Для этого можно использовать диаграмму $T = T(J_{\text{п}})$, устанавливающую связь между кинетической энергией T и приведенным моментом инерции $J_{\text{п}}$.

Рассмотрим тот случай, когда приведенные моменты являются функциями угла поворота φ звена приведения.

Пусть момент $M_{\text{д}}$ задан графиком $M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\varphi)$ (рис. 16.1, *а*, сплошная линия), момент $M_{\text{с}}$ задан графиком $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\varphi)$ (рис. 16.1, *а*, штриховая линия), а момент инерции $J_{\text{п}}$ задан графиком $J_{\text{п}} = J_{\text{п}}(\varphi)$ (рис. 16.2).

Работа приведенного момента $M_д$ на выбранном интервале равна

$$A_{M_д} = \int_0^{\varphi} M_д \, d\varphi,$$

где φ — угол поворота звена приведения. Величина этой работы выражается произведением площади, ограниченной кривой $M_д = M_д(\varphi)$, осью φ и начальной и конечной ординатами, на соответствующие масштабы. Работа приведенного момента $M_с$ равна

$$A_{M_с} = \int_0^{\varphi} M_с \, d\varphi$$

и выражается произведением площади, ограниченной кривой $M_с = M_с(\varphi)$, осью φ, начальной и конечной ординатами, на соответствующие масштабы.

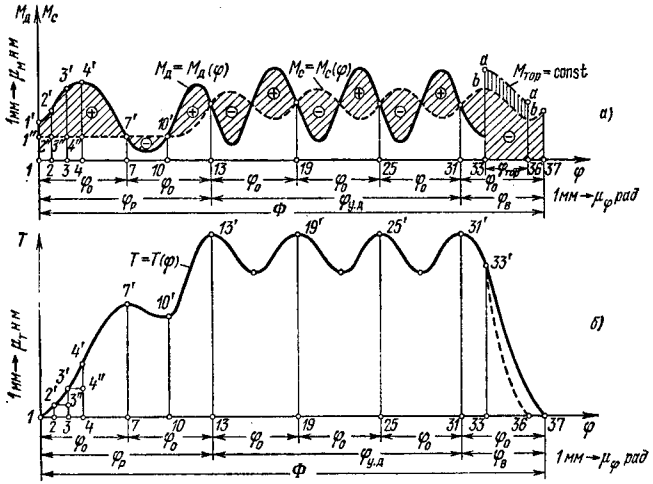


Рис. 16.1. К графочисленному решению уравнения движения в форме уравнения кинетической энергии: *а*) графики моментов движущих сил и сил сопротивления; *б*) график кинетической энергии механизма.

На рис. 16.1, *а* угол Φ, соответствующий полному времени движения механизма, равен сумме углов: $\Phi = \varphi_р + \varphi_{у.д} + \varphi_в$, где угол $\varphi_р$ соответствует времени разбега, $\varphi_{у.д}$ — угол времени установившегося движения и $\varphi_в$ — угол времени выбега. Угол φ_0 соответствует времени одного оборота звена приведения. Приращение кинетической энергии механизма за какой-либо промежуток времени, согласно уравнению (15.35), выражается разностью площадей кривых $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$, помноженной на соответствующие масштабы μ_M и μ_φ. Например, на участке (*1*—*2*) (рис. 16.1, *а*) работа приведенного момента $M_д$ выражается площадью [*11'2'2*] *мм*^{2},

умноженной на масштабы μ_M и μ_φ моментов и угла поворота, а работа приведенного момента M_c — площадью $[11''2''2]$, умноженной на те же масштабы. Приращение кинетической энергии ΔT_{12} представляется тогда площадью $[1'2'2'']$, умноженной на те же масштабы. Таким образом,

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \mu_\varphi \mu_M \{\text{пл.}[11'2'2] - \text{пл.}[11''2''2]\} = \mu_\varphi \mu_M \text{ пл.}[1'2'2''1''].$$

В этом равенстве μ_φ есть масштаб углов поворота и μ_M — масштаб моментов. Приращение кинетической энергии на участке (*2—3*) пропорционально площади $[2''2'3'3'']$, приращение кинетической энергии на участке (*3—4*) пропорционально площади $[3''3'4'4'']$ и т. д.

Изменение кинетической энергии всегда пропорционально площадям, заключенным между кривыми моментов движущих сил и сил сопротивления (на рис. 16.1, *а* эти площади заштрихованы). Этим площадям следует приписывать знак плюс или минус в зависимости от того, какая работа будет больше: момента движущих сил или момента сил сопротивления. Так, на участке (*1—7*) кривая момента движущих сил расположена выше кривой момента сил сопротивления, и, следовательно, приращение кинетической энергии положительно; наоборот, на участке (*7—10*) приращение кинетической энергии отрицательно и т. д. За все время работы механизма, соответствующее углу поворота Ф, приращение кинетической энергии равно нулю, и сумма всех заштрихованных площадей со знаком плюс должна равняться сумме площадей со знаком минус, так как в момент пуска механизма и в момент его остановки скорость точки приведения равна нулю. Точно такое же равенство должно иметь место и за время установившегося движения на участке (*13—25*), потому что в этом случае угловая скорость звена приведения механизма через каждый цикл возвращается к прежнему значению.

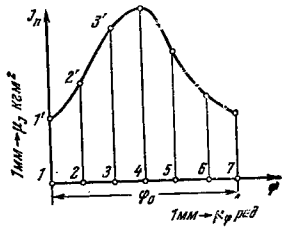


Рис. 16.2. График приведенного момента инерции.

На рис. 16.1, *а* условно показано три полных цикла установившегося движения. Практически число этих циклов может быть очень велико, в зависимости от времени непрерывной работы машины.

2°. Подсчитав величины указанных выше площадей, можно построить диаграмму $T = T(\varphi)$ изменения кинетической энергии T звена приведения в функции угла поворота φ (16.1, *б*). Построение начнем с положения *1*. Подсчитаем площадь $[1'2'2''1'']$ в квадратных миллиметрах. Пусть эта площадь равна F_{12} *мм*², тогда приращение кинетической энергии на участке (*1—2*) равно

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \mu_\varphi \mu_M \text{ пл.}[1'2'2''1''] = \mu_\varphi \mu_M F_{12},$$

где μ_M есть масштаб $M_д$ и M_c, а μ_φ — масштаб углов поворота звена приведения. Так как механизм начал двигаться с положения, соответствующего точке *1*, в которой первоначальный запас кинетической энергии T_1 был равен нулю, то полный запас кинетической энергии механизма в положении *2* выразится величиной T_2. Эту величину и откладываем в виде отрезка (*2—2'*) в масштабе μ_T на ординате, приведенной в точке *2* (рис. 16.1, *б*). Имеем

$$\Delta T_{12} = T_2 = \mu_\varphi \mu_M F_{12} = \mu_T (2 - 2').$$

Далее подсчитываем следующую площадку $F_{23} = [2''2'3'3'']$ *мм*². Имеем, по предыдущему,

$$\Delta T_{23} = T_3 - T_2 = \mu_\varphi \mu_M \{\text{пл. } [22'3'3] - \text{пл. } [22''3''3]\} =$$
$$= \mu_\varphi \mu_M \text{ пл. } [2''2'3'3''] = \mu_\varphi \mu_M F_{23} = \mu_T [3'' - 3'],$$

т. е. приращение кинетической энергии T_{23} на участке (*2—3*) выражается площадью $[2''2'3'3'']$ *мм*², умноженной на произведение масштабов μ_φ и μ_M. Полученную величину откладываем (рис. 16.1, *б*) на ординате в точке *3* в виде отрезка (*3''—3'*) в масштабе μ_T, прибавляя его к предыдущему отрезку (*2—2'*) = (*3—3''*), и т. д. Ординаты диаграммы кинетической энергии увеличиваются до положения *7*, где в точке *7'* она имеет вершину, соответствующую одному из максимумов кинетической энергии. Далее на участке (*7—10*) кривая опускается, так как заштрихованная площадь (рис. 16.1, *а*), заключенная между этими точками оси абсцисс, имеет знак минус. Начиная с точки *10* кривая кинетической энергии $T = T(\varphi)$ поднимается до положения *13*, где эта кривая опять имеет вершину в точке *13'*, и т. д. На участке (*13—31*), где диаграмма описывает установившееся движение, кривая повторяется через каждый цикл движения механизма, соответствующий углу φ_0, причем ордината ее достигает то своего максимума, то своего минимума. В положении *31* ордината кривой $T = T(\varphi)$ имеет последний максимум, после чего кривая опускается вследствие наличия на участке (*31—37*) только одних сил сопротивления. Точка *37*, соответствующая моменту остановки механизма, определяется путем постепенного вычитания из ординат кривой кинетической энергии величин, пропорциональных площадям кривой сопротивлений на участке (*31—37*). Момент остановки механизма соответствует полному исчерпыванию кинетической энергии, накопленной в период разбега. Очевидно, что расход накопленной кинетической энергии может быть ускорен путем введения дополнительных сопротивлений (например, с помощью тормозов). Так, например, вводя дополнительное сопротивление в виде тормозного момента $M_{тор} = \text{const}$, показанного на рис. 16.1, *а* штрих-пунктирной кривой $a - a$, можно кинетическую энергию механизма израсходовать раньше, и тогда механизм остановится в положении, соответствующем точке *36* (рис. 16.1, *б*). Это изменение кривой $T = T(\varphi)$ кинетической энергии показано штриховой линией.

Нетрудно для этого случая подсчитать работу, которую надо затратить. Она выражается площадью $F_{тор}$ *мм*^{2} (рис. 16.1, *а*), и полная работа торможения $A_{тор}$ равна

$$A_{тор} = \mu_\varphi \mu_M F_{тор} = \mu_\varphi \mu_M (ab)\, \varphi_{гор},$$

где $\varphi_{тор}$ — угол поворота звена приведения, на котором производится торможение.

Таким образом, с помощью диаграммы кинетической энергии $T = T(\varphi)$ определяется полный угол поворота Φ звена приведения при заданных моментах движущих сил и сил сопротивления. Для рассматриваемого примера этот угол равен отрезку (*1—37*) оси абсцисс, помноженному на масштаб μ_φ, если тормозной момент $M_{тор}$ отсутствует, и соответствует отрезку (*1—36*) при введении дополнительного тормозного момента $M_{тор}$.

3°. Перейдем теперь к определению угловых скоростей звена приведения. Для этого воспользуемся выражением кинетической энергии механизма. Из уравнения (15.47) имеем

$$T = \frac{J_п \omega^2}{2}. \qquad (16.47)$$

В этой формуле $J_п$ есть приведенный момент инерции и ω — угловая скорость звена приведения механизма. Диаграмма $J_п = J_п(\varphi)$ приведенного момента инерции в функции угла поворота дана на рис. 16.2. Равенство (16.47) можно представить в виде

$$\omega^2 = \frac{2T}{J_п}, \qquad (16.48)$$

т. е. квадрат угловой скорости звена приведения в каждом рассматриваемом его положении пропорционален отношению кинетической энергии T, которой обладает машина в рассматриваемом положении, к приведенному моменту инерции $J_п$, взятому для того же положения.

Для определения значений этого отношения строим диаграммы: приведенного момента инерции $J_п = J_п(\varphi)$ (рис. 16.3, *а*) и кинетической энергии $T = T(\varphi)$ (рис. 16.3, *в*). Для удобства построений повернем диаграмму $J_п = J_п(\varphi)$ на угол 90°, т. е. ось ординат, на которой отложены значения приведенного момента инерции $J_п$, расположим горизонтально, а ось абсцисс, где отложены значения угла φ поворота звена приведения, расположим вертикально. Так как кривая $J_п = J_п(\varphi)$ повторяется через каждый цикл, то можно ограничиться вычерчиванием этой диаграммы на угле поворота φ_0, как это сделано на рис. 16.3, *а*. На диаграмме $J_п = J_п(\varphi)$ отмечаем точку $1'$, соответствующую точке $1'$ диаграммы кинетической энергии $T = T(\varphi)$ (рис. 16.3, *в*), и через эту точку проводим вертикальную прямую до пересечения с горизонтальной прямой, проведенной через точку $1'$ кривой $T = T(\varphi)$. Точку пересече-

ния этих прямых отметим цифрой *1* (рис. 16.3, *б*). Далее отмечаем на диаграмме $J_п = J_п(\varphi)$ точку *2'* и соответствующую ей точку *2'* на диаграмме $T = T(\varphi)$. Пересечение соответствующих вертикали и горизонтали дает точку *2*. Пересечение прямых, проведенных через точки *3'* и *3'*, дает точку *3*, через точки *4'* и *4'* — дает точку *4* и т. д. Соединяя полученные точки плавной

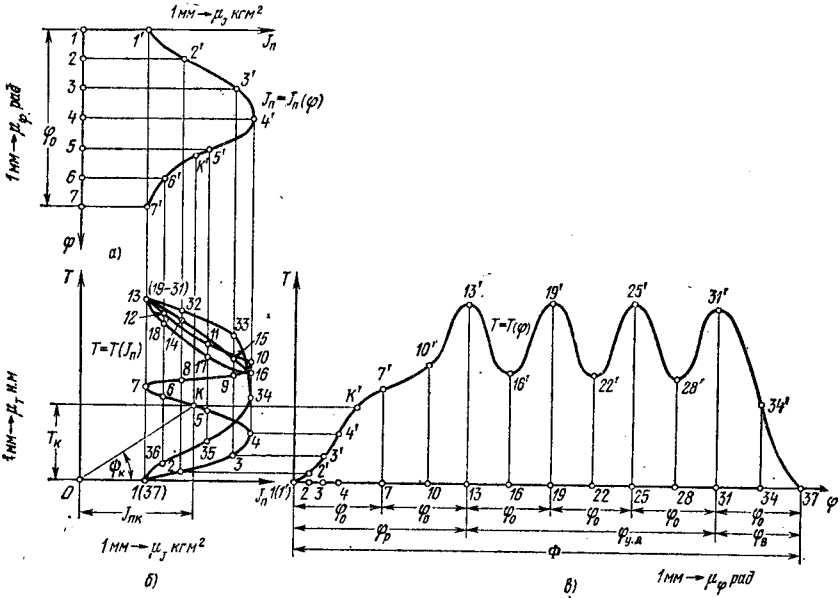


Рис. 16.3. К определению скорости звена приведения: *а*) диаграмма приведенного момента инерции в функции угла поворота; *б*) диаграмма кинетической энергии в функции приведенного момента инерции: *в*) диаграмма кинетической энергии в функции угла поворота.

кривой, получаем кривую кинетической энергии T в функции приведенного момента инерции $J_п$ (рис. 16.3, *б*). Эта кривая представляет зависимость между кинетической энергией T и приведенным моментом инерции $J_п$, т. е. зависимость $T = T(J_п)$. Построим кривую $T = T(J_п)$ для всего времени движения механизма от положения *1* до положения *37*. На участке установившегося движения (*13—31*) кривая $T = T(J_п)$ должна быть замкнутой, так как одни и те же значения величин T и $J_п$ периодически повторяются через каждый цикл. Часть кривой $T = T(J_п)$, соответствующая времени разбега (*1—13*), не совпадает с частью кривой, соответствующей времени выбега (*31—37*), так как характер кривой $T = T(\varphi)$ на этих участках различен. Кривая $T = T(J_п)$ носит название «диаграммы Виттенбауэра» по имени ученого, впервые рассмотревшего эту зависимость.

4°. Выберем на кривой $T = T(J_п)$ какую-либо точку K и соединим эту точку с точкой O — началом координат (рис. 16.3, *б*). Обозначим угол, образованный прямой OK с осью абсцисс, через ψ_K. Так как по оси абсцисс отложен приведенный момент инерции $J_{пK}$ в масштабе μ_J, соответствующий точке K, а по оси ординат — кинетическая энергия T_K, соответствующая той же точке K, в масштабе μ_T, то отношение этих величин даст тангенс угла ψ_K наклона прямой OK к оси $OJ_п$:

$$\frac{T_K}{J_{пK}} = \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_K. \tag{16.49}$$

Если соединить последовательно все точки кривой $T = T(J_п)$ с началом O, определить последовательно все углы ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... и, воспользовавшись формулой (16.49), подставить значения тангенсов этих углов в равенство (16.48), то можно получить значение

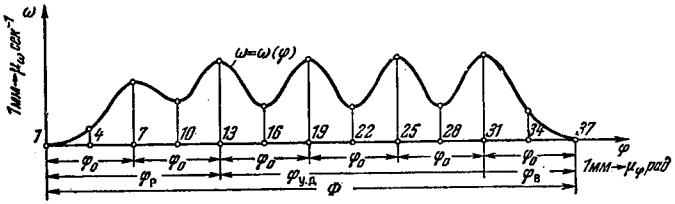


Рис. 16.4. График угловой скорости звена приведения в функции его угла поворота.

квадратов угловых скоростей ω звена приведения для всех положений механизма. Имеем

$$\omega_1^2 = 2\frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_1, \quad \omega_2^2 = 2\frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_2. \tag{16.50}$$

Из формул (16.50) следует, что угловые скорости ω ведущего звена пропорциональны корням квадратным из тангенсов углов ψ_1, ψ_2, ..., т. е.

$$\omega_1 = \sqrt{2\frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{2\frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_2}. \tag{16.51}$$

Так определяются значения угловой скорости ω звена приведения механизма. Пользуясь этими значениями, можно построить графики угловой скорости ω звена приведения в функции угла φ (рис. 16.4).

График времени t движения в функции угла φ может быть построен, если воспользоваться формулой (16.25), так как любой промежуток времени от начала движения, соответствующего времени t_1, до рассматриваемого момента времени t_K равен

$$t_K - t_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_k} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \tag{16.52}$$

Интеграл в правой части формулы (16.52) может быть определен графически, если построить график величины $\frac{1}{\omega(\varphi)}$ в функции угла φ, что можно выполнить, потому что функция $\omega = \omega(\varphi)$ известна. По графикам $\omega = \omega(\varphi)$ и $t = t(\varphi)$ может быть построен график $\omega = \omega(t)$. Угловое ускорение ε звена приведения определяется графическим дифференцированием функции $\omega = \omega(t)$.

Зная угловую скорость ω и угловое ускорение ε звена приведения, можно определить скорость и силы инерции отдельных звеньев, а также провести полный силовой расчет механизма в условиях неравномерно вращающегося звена приведения.

Таким образом, с помощью диаграммы $T = T(J_п)$ и последующих графочисленных расчетов может быть полностью исследован вопрос о движении агрегата при силах, зависящих от положения звена приведения.

ГЛАВА XVII

НЕРАВНОМЕРНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

§ 74. Общая постановка задачи

1°. Переходим к следующей важной задаче об определении наивыгоднейших соотношений между силами, массами и скоростями звеньев механизмов, обеспечивающих заданный режим движения механизма или машины.

Как было показано в предыдущей главе, в общем случае скорости ведущего звена механизма, при установившемся движении механизма, являются величинами переменными. Колебания скоростей ведущего звена вызывают в кинематических парах дополнительные динамические давления, понижающие общий коэффициент полезного действия машины и надежность ее работы. Кроме того, эти колебания скоростей в некоторых случаях могут вызвать значительные упругие колебания в звеньях механизма или машины, что является нежелательным как с точки зрения прочности этих звеньев, так и с точки зрения потери мощности, затрачиваемой на эти упругие колебания. Наконец, колебания скорости могут ухудшить тот рабочий технологический процесс, который выполняется механизмами машины.

Рассматривая колебания скорости ведущего звена за время установившегося движения механизма, можно обнаружить, что эти колебания бывают двух различных типов.

В самом деле, как было установлено выше, у большей части механизмов только за полный цикл установившегося движения работа всех движущих сил равна работе сил сопротивления. Внутри же этого цикла мы не наблюдаем равенства этих работ, и, следо-

вательно, ведущее звено механизма движется внутри этого цикла неравномерно. Так как через каждый полный цикл установившегося движения кинетическая энергия механизма принимает начальное значение, скорости ведущего звена механизма тоже периодически повторяются с тем же самым циклом. Такие колебания скоростей назовем *периодическими*.

Таким образом, *периодическими колебаниями скоростей механизма называются колебания, при которых скорости всех звеньев механизма имеют вполне определенные циклы, по истечении которых эти скорости принимают каждый раз свои первоначальные значения.*

Кроме периодических колебаний скоростей в механизме могут иметь место и непериодические колебания скоростей, вызываемые различными причинами: внезапным изменением полезных или вредных сопротивлений, включением в механизм дополнительных масс и т. д. Такое внезапное изменение нагрузки на механизм вызывает внезапное увеличение или уменьшение скорости его звена приведения, и так как эти колебания скорости в некоторых случаях не имеют определенного цикла, то такие колебания скорости звена приведения назовем *непериодическими*. Во многих механизмах мы наблюдаем оба вида колебаний скоростей.

2°. Колебания скоростей во время установившегося движения могут достигнуть такой величины, которая не будет допустимой с точки зрения обеспечения всех надлежащих условий работы механизма. Тогда может возникнуть вопрос о регулировании в заранее заданных пределах величин этих колебаний. Задача о регулировании колебаний скоростей во время установившегося движения механизма имеет большое значение в технике, потому что в большинстве механизмов это время является рабочим временем их движения — промежутком времени, в течение которого механизм выполняет свои производственные функции.

Регулирование периодических колебаний скоростей при установившемся движении механизма обычно выполняется соответствующим подбором масс его звеньев. Массы звеньев должны быть подобраны так, чтобы они могли аккумулировать все приращения кинетической энергии механизма, имеющие место при приращении работы движущих сил над силами сопротивления. Эта аккумулированная массами звеньев кинетическая энергия должна быть отдана механизму обратно, когда работа сил сопротивления будет превышать работу движущих сил.

Подбором масс звеньев механизма можно решить задачу о регулировании периодических колебаний скорости ведущего звена при его установившемся движении. В случае же непериодических колебаний скоростей при установившемся движении подбором масс его звеньев можно решить задачу о регулировании колебаний скоростей только в тех случаях, когда эти колебания незначительны. При

значительных непериодических колебаниях скоростей задача о регулировании решается установкой специальных механизмов, регулирующих законы изменения или движущих сил, или сил сопротивления. Такие регулирующие механизмы получили название *регуляторов*.

Рассмотрение вопроса о регулировании движения механизма начнем с рассмотрения задачи о регулировании периодических колебаний скоростей во время его установившегося движения.

§ 75. Средняя скорость машины и ее коэффициент неравномерности движения

1°. Для изучения периодических колебаний скоростей во время установившегося движения механизма или машины введем понятие о *средней скорости звена приведения* и дальнейшее рассмотрение задачи будем вести для этого времени движения.

Обозначим путь, проходимый выбранной на звене приведения точкой B за один цикл ее движения от положения i до положения k, через s. Будем называть *действительной средней скоростью* $(v_{ср})_д$ скорость такого равномерного движения, при котором точка прошла бы путь s в тот же промежуток времени t, который требуется и при неравномерном движении.

Так как $dt=\frac{ds}{v}$, то

$$t=t_k-t_i=\int_{s_i}^{s_k}\frac{ds}{v},$$

откуда, с учетом того, что $t_k-t_i=\frac{s}{(v_{ср})_д}$, получаем

$$(v_{ср})_д=\frac{s}{\int_{s_i}^{s_k}\frac{ds}{v}}. \tag{17.1}$$

Действительную среднюю скорость часто заменяют средней арифметической скоростью $v_{ср}$ и полагают

$$v_{ср}\approx\frac{v_{max}+v_{min}}{2}, \tag{17.2}$$

где v_{max} и v_{min} суть максимальные и минимальные значения скорости точки B (рис. 17.1). Для механизмов с малой неравномерностью движения разница между этими значениями пренебрежимо мала, вследствие чего обычно в качестве средней скорости пользуются тем из них, которое удобнее для решения поставленной задачи.

На паспорте двигателя, рабочей машины или механизма такая условная средняя скорость бывает обычно указана, причем в этом

случае ее обыкновенно называют номинальной скоростью (от латинского слова «nomen», обозначающего имя, наименование).

Для механизма с малой равномерностью движения предпочтительнее пользоваться действительной средней скоростью.

Если разность максимального и минимального значений скорости v_B точки B (рис. 17.1) разделить на среднюю скорость, то получим так называемый *коэффициент неравномерности движения механизма или машины*, обозначаемый через δ и равный

$$\delta = \frac{v_{max} - v_{min}}{v_{cp}}. \qquad (17.3)$$

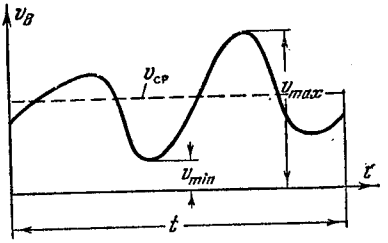


Рис. 17.1. График скорости точки в функции времени.

Чем меньше разность между v_{max} и v_{min}, тем равномернее вращается ведущее звено. Задача регулирования движения механизма или машины в период их установившегося движения сводится к подбору такого соотношения между массами звеньев механизмов и действующими на них силами, при котором коэффициент неравномерности δ не превышал бы какого-либо заранее заданного значения. На практике величина δ колеблется в весьма значительных пределах.

В таблице 5 приводятся допустимые коэффициенты неравномерности хода для некоторых типов машин.

Таблица 5

Типы машин	Коэффициенты неравномерности движения
Насосы	1/5—1/30
Сельскохозяйственные машины	1/5—1/50
Металлообрабатывающие станки	1/20—1/50
Ткацкие, полиграфические, мукомольные машины	1/10—1/50
Бумагопрядильные машины	1/60—1/100
Судовые двигатели	1/20—1/150
Двигатели внутреннего сгорания	1/80—1/100
Компрессоры	1/50—1/100
Электрические генераторы постоянного тока	1/100—1/200
Электрические генераторы переменного тока	1/200—1/300
Авиационные двигатели	1/200 и меньше
Турбогенераторы	1/200 и меньше

Удобно среднюю скорость механизма или машины и коэффициент неравномерности хода выражать через углы поворота и угловые скорости звена приведения. Тогда по аналогии с равенствами

(17.1) — (17.3) будем иметь для действительной средней угловой скорости ($\omega_{ср}$) выражение

$$(\omega_{ср})_д = \frac{\varphi}{\int_{\varphi_t}^{\varphi_k} \frac{d\varphi}{\omega}}; \qquad (17.4)$$

для средней арифметической угловой скорости выражение

$$\omega_{ср} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \qquad (17.5)$$

и для коэффициента неравномерности движения выражение

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{ср}}. \qquad (17.6)$$

Коэффициент неравномерности движения характеризует только перепад угловой скорости звена приведения в пределах от ω_{min} до ω_{max}, но не характеризует динамики движения звена приведения

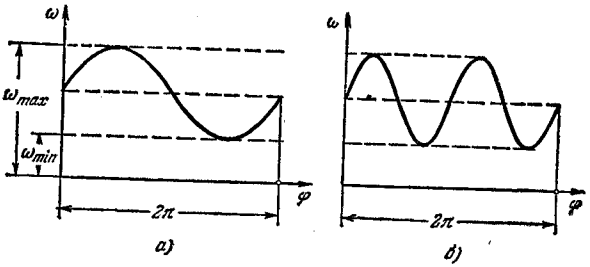


Рис. 17.2. Графики зависимости угловой скорости от угла поворота: *а*) с плавным и *б*) менее плавным изменением угловой скорости.

внутри одного полного цикла периода установившегося движения. Так, на рис. 17.2, *а* и *б* показаны два графика зависимости $\omega = \omega(\varphi)$, у которых ω_{max} и ω_{min} равны, но угловые ускорения ε для рис. 17.2, *б* значительно больше, чем для рис. 17.2, *а*. Динамические характеристики механизмов с этими значениями ε различны. Сравнительная оценка динамических свойств механизма или машины в период установившегося движения может быть охарактеризована *коэффициентом динамичности* x, в качестве которого берут отношение экстремального (наибольшего) значения углового ускорения ε_{ext} к квадрату средней угловой скорости $\omega_{ср}^2$:

$$x = \frac{\varepsilon_{ext}}{\omega_{ср}^2}. \qquad (17.7)$$

Помножим числитель и знаменатель выражения (17.7) на среднее значение приведенного момента инерции $J_{\text{п.ср}}$. Тогда получим

$$x=\frac{J_{\text{п. ср}}\varepsilon_{\text{ext}}}{J_{\text{п. ср}}\omega_{\text{ср}}^2}=\frac{M_{\text{ext}}}{2T_{\text{ср}}}, \tag{17.8}$$

и, таким образом, коэффициент динамичности механизма равен отношению экстремального момента M_{ext}, приложенного к звену приведения, к удвоенной величине средней кинетической энергии $T_{\text{ср}}$ механизма.

Коэффициент динамичности x режима движения механизма, показанного на рис. 17.2, *б*, больше, чем для механизма, режим движения которого показан на рис. 17.2, *а*, при одной и той же величине приведенного момента инерции $J_{\text{п.ср}}$.

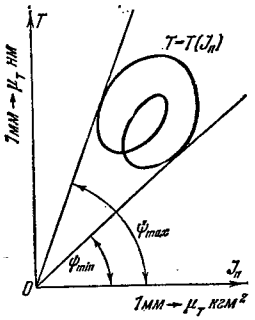


Рис. 17.3. Диаграмма кинетической энергии в функции приведенного момента инерции для установившегося движения механизма.

2°. Если для всего времени движения механизма построена диаграмма $T=T(J_{\text{п}})$ (см. § 73), то определение величины δ во время установившегося движения не представляет трудностей. Для этого рассмотрим участок диаграммы $T=T(J_{\text{п}})$, соответствующий установившемуся движению (рис. 17.3). Это замкнутый участок диаграммы $T=T(J_{\text{п}})$. Из формулы (16.51) следует, что максимальная угловая скорость $\omega_{\max}$ за время установившегося движения соответствует максимальному значению тангенса угла $\psi_{\max}$, определяемого по формуле (16.51), а минимальная угловая скорость $\omega_{\min}$ соответствует минимальному значению тангенса угла $\psi_{\min}$. Для определения максимального $\psi_{\max}$ и минимального $\psi_{\min}$ значения угла ψ проводим из точки O к замкнутой части кривой $T=T(J_{\text{п}})$ две касательные. Одна касательная образует с осью абсцисс максимальный угол $\psi_{\max}$, другая образует с осью абсцисс минимальный угол $\psi_{\min}$. Согласно равенству (16.50) можно написать

$$\omega_{\max}^2=2\frac{\mu_T}{\mu_{J_{\text{п}}}}\operatorname{tg}\psi_{\max},\quad \omega_{\min}^2=2\frac{\mu_T}{\mu_{J_{\text{п}}}}\operatorname{tg}\psi_{\min}, \tag{17.9}$$

где $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$ суть максимальная и минимальная угловые скорости звена приведения. Коэффициент неравномерности движения δ равен (см. формулу (17.6))

$$\delta=\frac{\omega_{\max}-\omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}. \tag{17.10}$$

Умножая числитель и знаменатель правой части формулы (17.10) на $(\omega_{max} + \omega_{min})$, получим

$$\delta = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})(\omega_{max} + \omega_{min})}{\omega_{cp}(\omega_{max} + \omega_{min})} = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_{cp}^2}, \qquad (17.11)$$

так как $\omega_{max} + \omega_{min} = 2\omega_{cp}$ (см. формулу (17.5)). Подставляя в формулу (17.11) выражения для ω_{max}^2 и ω_{min}^2 из формулы (17.9), получаем

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_{J_п}} \frac{\operatorname{tg}\psi_{max} - \operatorname{tg}\psi_{min}}{\omega_{cp}^2}. \qquad (17.12)$$

Углы ψ_{max} и ψ_{min} можно найти непосредственно по чертежу, а величина ω_{cp} определяется по формуле (17.4).

Если принять $\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$, то, решая совместно уравнения (17.5), (17.6) и (17.9), получаем, что коэффициент неравномерности хода δ механизма равен

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}} = 2\frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{max} + \omega_{min}} = 2\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\psi_{max}} - \sqrt{\operatorname{tg}\psi_{min}}}{\sqrt{\operatorname{tg}\psi_{max}} + \sqrt{\operatorname{tg}\psi_{min}}}. \qquad (17.13)$$

Определить коэффициент неравномерности движения δ механизма можно и непосредственно, если построена диаграмма скоростей (например, по диаграмме скоростей, построенной на рис. 17.1). Для этого определяем v_{max} и v_{min} по диаграмме и подставляем их значения в формулы (17.2) и (17.3).

§ 76. Связь между приведенным моментом инерции, приведенными силами и коэффициентом неравномерности движения механизма

1°. Рассмотрим вопрос о связи между приведенным моментом инерции, приведенными силами и коэффициентом неравномерности движения механизма. Разрешая уравнения (17.5) и (17.6) относительно ω_{max} и ω_{min}, находим

$$\omega_{max} = \omega_{cp}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{и} \quad \omega_{min} = \omega_{cp}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right). \qquad (17.14)$$

Возводя правые и левые части этих уравнений в квадрат, получаем

$$\left.\begin{aligned} \omega_{max}^2 &= \omega_{cp}^2\left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega_{cp}^2(1 + \delta), \\ \omega_{min}^2 &= \omega_{cp}^2\left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega_{cp}^2(1 - \delta). \end{aligned}\right\} \qquad (17.15)$$

При малых значениях коэффициента δ членом $\delta^2/4$ можно пренебречь. Для механизмов с большой неравномерностью движения этот член должен учитываться. Подставляя в уравнения (17.15)

выражения для ω_{max} и ω_{min} из формул (17.9), получаем

$$2\frac{\mu_T}{\mu_{J_п}}\operatorname{tg}\psi_{max}=\omega_{ср}^2\left(1+\delta+\frac{\delta^2}{4}\right)\approx\omega_{ср}^2(1+\delta),$$

$$2\frac{\mu_T}{\mu_{J_п}}\operatorname{tg}\psi_{min}=\omega_{ср}^2\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{4}\right)\approx\omega_{ср}^2(1-\delta),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\psi_{max}&=\frac{\mu_{J_п}}{2\mu_T}\omega_{ср}^2\left(1+\delta+\frac{\delta^2}{4}\right)\approx\frac{\mu_{J_п}}{2\mu_T}\omega_{ср}^2(1+\delta),\\ \operatorname{tg}\psi_{min}&=\frac{\mu_{J_п}}{2\mu_T}\omega_{ср}^2\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{4}\right)\approx\frac{\mu_{J_п}}{2\mu_T}\omega_{ср}^2(1-\delta).\end{aligned}\right\}\quad(17.16)$$

С помощью формул (17.16) можно для заданной угловой скорости $\omega_{ср}$ и для любого заданного значения коэффициента неравномерности движения δ определить соответствующие углы ψ_{max} и ψ_{min}. Тогда, если при заданных приведенном моменте инерции и кинетической энергии известна зависимость между ними и построена диаграмма $T=T(J_п)$, то всегда может быть выяснен вопрос о том, как должны быть изменены эти величины при изменении δ. Пусть задана диаграмма $T=T(J_п)$ для времени установившегося движения (рис. 17.4), и пусть коэффициент неравномерности движения равен δ для заданных значений кинетической энергии и приведенного момента инерции. Соответствующие касательные под углами ψ_{max} и ψ_{min} пересекаются в начале координат O.

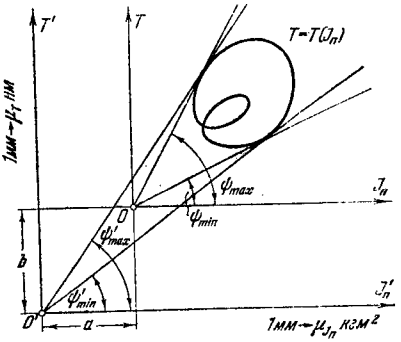


Рис. 17.4. К исследованию зависимости коэффициента неравномерности движения от величины приведенного момента инерции.

Задаемся каким-либо новым коэффициентом δ' и подсчитаем по формулам (17.16) соответствующие ему значения углов ψ'_{max} и ψ'_{min}. Касательные к кривой $T=T(J_п)$ при коэффициенте неравномерности хода, равном δ', должны иметь углы наклона к оси абсцисс, соответственно равные углам ψ'_{max} и ψ'_{min}. Проводим эти касательные к кривой $T=T(J_п)$ (рис. 17.4) и находим их точку пересечения O'. Точка O' является новым началом координат диаграммы $T=T(J_п)$, т. е. изменение коэффициента δ на δ' влечет за собой переход от осей координат $TOJ_п$ к параллельным им осям координат $T'O'J'_п$. При этом переходе кинетическая энергия увеличивается на величину T_0, а приведенный момент инерции — на величину J_0. Отрезки a и b, измеренные в миллиметрах, изображают в выбранных

масштабах $\mu_{J_п}$ и μ_T величины добавочного приведенного момента инерции J_0 и добавочной кинетической энергии T_0, которые необходимы для того, чтобы механизм двигался с выбранным коэффициентом неравномерности δ'. Таким образом,

$$J_0 = \mu_{J_п} a \quad \text{и} \quad T_0 = \mu_T b.$$

Из построения непосредственно следует, что чем меньше коэффициент неравномерности δ, тем меньше разница между углами ψ_{max} и ψ_{min} и тем дальше, очевидно, от участка кривой $T = T(J_п)$, соответствующего времени установившегося движения, будет находиться начало координат. Таким образом, при уменьшении величины δ возрастает приведенная масса механизма и его кинетическая энергия, потребная для приведения в движение механизма с заданной средней угловой скоростью $\omega_{ср}$. Итак, увеличение равномерности движения звена приведения механизма или машины может быть достигнуто *увеличением приведенного момента инерции механизма.*

2°. Как было показано выше, во время установившегося движения в общем случае движение звена приведения механизма или машины происходит с *переменной* скоростью. Эти колебания скорости звена приведения вызывают колебания скоростей всех остальных звеньев механизмов машины, что ведет к повышению динамических нагрузок на их звенья и кинематические пары. Кроме того, большинство процессов, для выполнения которых применяется механизм или машина, требует определенных скоростей рабочих органов, что достигается только в том случае, если ведущее звено приведения механизма или машины не будет иметь сколько-нибудь большого отклонения величины своей скорости от заданной.

Выше было показано, что движение звена приведения тем ближе к равномерному, чем больше приведенный момент инерции или приведенная масса механизмов машины. Увеличение приведенных масс или приведенных моментов инерции может быть сделано за счет увеличения масс отдельных звеньев механизмов. Практически это увеличение масс производится посадкой на один из валов машины добавочной детали, имеющей заданный момент инерции. Эта деталь носит название *махового колеса* или *маховика.* Задачей маховика является уменьшение амплитуды периодических колебаний скорости звена приведения, обусловленных свойствами самих механизмов машины или периодическими изменениями соотношений между величинами движущих сил и сил сопротивления.

Подбором массы и момента инерции маховика можно заставить звено приведения механизма или машины двигаться с заранее заданным отклонением от некоторой его средней скорости.

Маховик является как бы аккумулятором кинетической энергии механизмов машины, накапливая ее во время их ускоренного движения и отдавая обратно при замедлении движения. В некоторых

машинах, в которых полезная нагрузка периодически меняется в значительных пределах (дробилки, прокатные станы и т. п.), маховик аккумулирует весьма значительнее запасы кинетической энергии во время ускоренного движения (при уменьшении величин полезных нагрузок). Такая аккумулирующая роль маховика позволяет использовать накопленную им энергию для преодоления повышенных полезных нагрузок без увеличения мощности двигателя.

Форма маховика, вообще говоря, может быть выбрана любой, но по конструктивным соображениям наиболее удобной является форма в виде диска с тяжелым ободом, колеса со спицами или вообще форма, симметричная относительно главных осей инерции. При такой форме легче всего достигается совпадение оси вращения с одной из главных центральных осей инерции, что позволяет избежать дополнительных давлений на подшипник того вала, на который насажено маховое колесо.

§ 77. Основные данные, необходимые для определения момента инерции маховика

1°. Для определения момента инерции махового колеса необходимо иметь заданными приведенные силы или приведенные моменты сил движущих и сил сопротивления за один полный цикл времени установившегося движения. Рассмотрим вначале тот случай, когда приведенные моменты сил движущих и сил сопротивления зависят от угла φ поворота звена приведения. На рис. 17.5, *а* даны графики $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$ изменения приведенных момента $M_д$ движущих сил и момента $M_с$ сил сопротивления в функции угла поворота φ звена приведения на участке $\varphi_ц$, соответствующем одному полному циклу. Так как момент инерции махового колеса неизвестен и подлежит определению, то диаграмма кинетической энергии $T = T(J_п)$ не может быть построена. В самом деле, не имея данных об изменении моментов $M_д$ и $M_с$ во время разгона механизма или машины и не зная полной величины приведенного момента инерции $J_п$ звеньев механизма, мы не можем определить ту кинетическую энергию разгона $T_р$ (рис. 17.6), которой механизм обладает к моменту начала установившегося

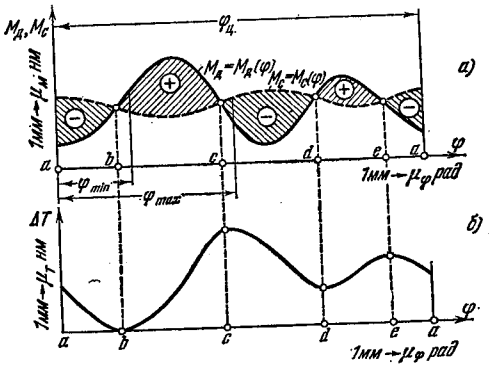


Рис. 17.5. К расчету маховика: *а*) диаграммы движущих сил и сил сопротивления; *б*) диаграмма приращения кинетической энергии.

движения. Но изменение кинетической энергии ΔT внутри одного полного цикла во время установившегося движения может быть всегда определено по заданным диаграммам $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$ (рис. 17.5, *а*).

Построение диаграммы $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ (рис. 17.5, *б*) ведем путем подсчета площадей, заключенных между кривыми $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$, как это было указано в § 73 (на рис. 17.5, *а* эти площадки заштрихованы). Построение диаграммы $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ удобно начать с положения *b*.

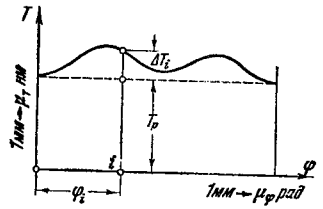


Рис. 17.6. Диаграмма полной кинетической энергии, которой обладает механизм во время установившегося движения.

На участке (*bc*) кинетическая энергия возрастает, на участке (*cd*) кинетическая энергия убывает и т. д. Сумма всех площадок со знаком плюс должна равняться сумме всех площадей со знаком минус, ибо за один полный цикл установившегося движения приращение кинетической энергии равно нулю. Таким образом, полная кинетическая энергия T_i в каком-либо положении i звена приведения (рис. 17.6) равна

$$T_i = T_р + \Delta T_i. \qquad (17.17)$$

При этом первое слагаемое выражения (17.17) нам неизвестно, а второе может быть определено по заданным диаграммам $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$.

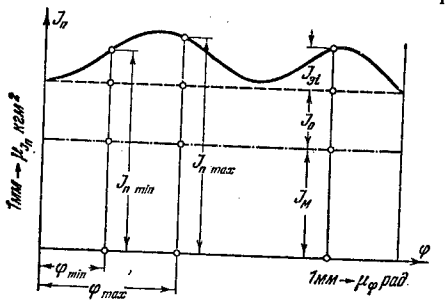


Рис. 17.7. Диаграмма полного приведенного момента инерции механизма, состоящего из момента инерции маховика, постоянного приведенного момента инерции звеньев и переменного приведенного момента инерции звеньев.

2°. Величина приведенного момента инерции $J_п$ механизма или машины состоит из трех слагаемых: момента инерции $J_м$ маховика, момента инерции J_0 звена приведения и тех вращающихся звеньев механизма, которые связаны со звеном приведения постоянным передаточным отношением, и, наконец, приведенного момента инерции $J_з$ всех остальных звеньев механизма. Таким образом, полный приведенный момент инерции $J_{пi}$ в каком-либо положении (рис. 17.7) равен

$$J_{пi} = J_м + J_0 + J_{зi} = J_м + \Delta J_{пi}, \qquad (17.18)$$

где $\Delta J_{пi} = J_0 + J_{зi}$.

Первые два слагаемых всегда постоянны, а последнее слагаемое в общем случае зависит от угла поворота φ, т. е. $J_з = J_з(\varphi)$. Момент

инерции $J_м$ маховика является неизвестным и подлежит определению.

Величина $\Delta J_п = J_0 + J_з$ методом, указанным в § 70, может быть определена для одного полного цикла установившегося движения механизма. Диаграмма $\Delta J_п = \Delta J_п(\varphi)$ показана на рис. 17.8. Из этой диаграммы видно, что $\Delta J_п$ состоит из постоянного момента инерции J_0 и переменного $J_з$. Диаграмма $J_п = J_п(\varphi)$ зависимости полного момента инерции $J_п$ от угла поворота φ согласно равенству (17.18) показана на рис. 17.7.

3°. Для определения необходимого момента инерции $J_м$ маховика надо иметь заданной среднюю угловую скорость $\omega_{ср}$ звена приведения. Она принимается равной номинальной угловой скорости, которая проставляется на паспорте двигателя, рабочей машины или механизма, т. е. ее можно принять равной

$$\omega_{ср} = \frac{\pi n}{30},$$

где n — число оборотов в минуту звена приведения.

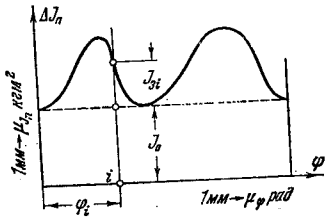


Рис. 17.8. Диаграмма приведенного момента инерции звеньев.

Далее, при решении задачи о маховике задаются желательным для машины коэффициентом неравномерности движения (см. формулу (17.10)). Имея заданными $\omega_{ср}$ и δ, можно определить по формулам (17.14) максимальную ω_{max} и минимальную ω_{min} угловые скорости. Имеем

$$\omega_{max} = \omega_{ср}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right), \quad \omega_{min} = \omega_{ср}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \tag{17.19}$$

и, далее,

$$\left.\begin{aligned} \omega^2_{max} &= \omega^2_{ср}\left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega^2_{ср}(1 + \delta), \\ \omega^2_{min} &= \omega^2_{ср}\left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega^2_{ср}(1 - \delta). \end{aligned}\right\} \tag{17.20}$$

4°. Связь между кинетической энергией T, приведенным моментом инерции $J_п$ и угловыми скоростями ω_{max} и ω_{min} может быть получена с помощью уравнения движения механизма, написанного в форме уравнения кинетической энергии (см. уравнение (16.3)). Имеем

$$A_д - A_с = \frac{J_{п\,max}\omega^2_{max}}{2} - \frac{J_{п\,min}\omega^2_{min}}{2}. \tag{17.21}$$

В уравнении (17.21) работа $A_д$ равна

$$A_д = \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} M_д\, d\varphi,$$

работа A_c равна

$$A_c = \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} M_c \, d\varphi,$$

где φ_{max} и φ_{min} — углы, соответствующие максимальному ω_{max} и минимальному ω_{min} значениям угловой скорости звена приведения. Если эти углы известны, то определение разности работ $A = A_д - A_c$ сводится к определению соответствующей площади F ($мм^2$), заключенной между кривыми $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_c = M_c(\varphi)$ (рис. 17.5, *а*) и ограниченной ординатами, соответствующими углам φ_{max} и φ_{min}. Тогда разность работ A выразится так:

$$A = \mu_м \mu_\varphi F.$$

В уравнении (17.21) $J_{п\,max}$ и $J_{п\,min}$ — приведенные моменты инерции, соответствующие углам φ_{max} и φ_{min} (рис. 17.7).

Необходимо заметить, что в общем случае значения приведенных моментов инерции $J_{п\,max}$ и $J_{п\,min}$ не совпадают с абсолютными величинами максимального и минимального значений $J_п$.

Уравнение (17.21) перепишем в следующем виде, учитывая формулы (17.18) и (17.20):

$$A = \frac{[J_м + J_0 + J_{з\,max}]\,\omega_{ср}^2\,(1+\delta)}{2} - \frac{[J_м + J_0 + J_{з\,min}]\,\omega_{ср}^2(1-\delta)}{2}. \quad (17.22)$$

Решаем уравнение (17.22) относительно $J_м$:

$$J_м = \frac{A}{\omega_{ср}^2 \delta} - J_0 - \frac{J_{з\,max}(1+\delta) - J_{з\,min}(1-\delta)}{2\delta}. \quad (17.23)$$

Из формулы (17.23) следует, что если известны углы φ_{max} и φ_{min}, при которых угловая скорость звена приведения достигает значений ω_{max} и ω_{min}, то определение момента инерции $J_м$ не представляет затруднений, потому что величины A, J_0, $J_{з\,max}$ и $J_{з\,min}$ могут быть всегда определены, а величины $\omega_{ср}$ и δ являются заданными. Ниже будет показано, как может быть решена задача об определении углов φ_{max} и φ_{min}.

Из рассмотрения формулы (17.23) следует еще, что если приведенный момент инерции $J_з$ является постоянным ($J_з = \text{const}$), то уравнение (17.23) принимает вид

$$J_м = \frac{A}{\omega_{ср}^2 \delta} - (J_0 + J_з). \quad (17.24)$$

При некоторых практических расчетах, когда величина $J_0 + J_з$ мала по сравнению с первым числом равенства (17.24), для определения момента инерции маховика пользуются приближенной формулой

$$J_м \approx \frac{A}{\omega_{ср}^2 \delta}. \quad (17.25)$$

5°. Если пользоваться формулами (17.24) и (17.25), то определение углов φ_{max} и φ_{min} не представляет трудностей. В самом деле, угловой скорости ω_{max} при постоянном моменте инерции $J_з$ соответствует максимальное значение T_{max} кинетической энергии, а угловой скорости ω_{min} соответствует минимальное значение T_{min} кинетической энергии. Например (рис. 17.5), минимальным угловым скоростям соответствуют положения b и d, а максимальным угловым скоростям — положения c и e. Наименьшее значение угловой скорости соответствует положению b, а наибольшее — положению c, так как в этих положениях кинетическая энергия достигает наименьшего и наибольшего значений. Поэтому в формуле (17.25) величину A следует положить равной

$$A = \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} M_д \, d\varphi - \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} M_с \, d\varphi = \mu_м \mu_\varphi F_{bc},$$

где F_{bc} — площадь в $мм^2$, заключенная между кривыми $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$ (рис. 17.5, a) на интервале (bc).

Если диаграмма кинетической энергии не построена, то определение наименьшего из минимальных и наибольшего из максимальных значений угловой скорости может быть сделано сравнением избыточных площадок, заключенных между кривыми $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$. Например, для диаграмм, показанных на рис. 17.5, a, наибольшая максимальная угловая скорость соответствует положению c, если площадь F_{cd} больше площади F_{de}, и, наоборот, если $F_{cd} < F_{de}$, то наибольшая максимальная угловая скорость соответствует положению e. Если $F_{bc} > F_{cd}$, то наименьшая минимальная угловая скорость соответствует положению b, и, наоборот, если $F_{bc} < F_{cd}$, то наименьшая минимальная угловая скорость соответствует положению d.

Максимальные и минимальные значения угловых скоростей соответствуют максимальным и минимальным значениям кинетической энергии только в тех случаях, когда приведенный момент инерции $J_з = \text{const}$. Если же приведенный момент $J_з = J_з(\varphi)$ переменный, то для определения момента инерции $J_п$ маховика надо пользоваться формулой (17.23). При этом максимальные и минимальные значения угловой скорости не совпадают с максимальными и минимальными значениями кинетической энергии, а сдвинуты относительно этих положений, как это схематично показано на рис. 17.5.

Определение наибольшей максимальной скорости и наименьшей минимальной скорости может быть также сделано методом сравнения избыточных площадок, заключенных между ординатами, соответствующими углам φ_{max} и φ_{min}, при условии малого сдвига максимальных и минимальных значений угловой скорости по

отношению к максимальным и минимальным значениям кинетической энергии. В практических инженерных расчетах во многих случаях сдвиги эти весьма малы, поэтому применение изложенного метода сравнения избыточных площадок вполне допустимо.

§ 78. Определение момента инерции махового колеса по диаграмме $T = T(J_п)$

1°. При определении момента инерции махового колеса с помощью уравнения кинетической энергии заданными являются коэффициент δ неравномерности движения механизма и средняя угловая скорость $\omega_{ср}$. Также задаются диаграммы приведенных движущих моментов и моментов сопротивления и диаграмма приведенного момента инерции в функции угла поворота ведущего звена. Необходимо подчеркнуть, что при расчете маховика с помощью диаграммы $T = T(J_п)$ силы инерции не должны входить в диаграммы движущих сил и сил сопротивления. Диаграммы моментов движущих сил и моментов сил сопротивления даются только для времени установившегося движения. Следовательно, определение разностей площадей, заключенных между этими двумя кривыми так, как это было показано выше, позволяет определить только изменение кинетической энергии механизма или машины. Обозначим это изменение кинетической энергии через ΔT (см. равенство (17.17)). Далее, так как нам известны массы и моменты инерции всех звеньев механизмов машины кроме момента инерции махового колеса, величину которого мы и должны найти, то нами может быть определено только изменение $\Delta J_п$ приведенного момента инерции звеньев механизма (см. формулу (17.18)). Таким образом, не зная момента инерции маховика и величины кинетической энергии, накопленной механизмом или машиной за время их разбега, нельзя построить диаграмму $T = T(\varphi)$, а можно построить только диаграмму $\Delta T = \Delta T(\varphi)$. Переменную величину $\Delta J_п$ определяют по заданным моментам инерции и массам звеньев с помощью планов скоростей механизмов (см. § 70).

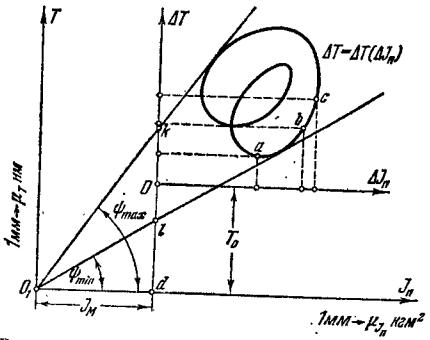


Рис. 17.9. К расчету маховика по диаграмме зависимости кинетической энергии от приведенного момента инерции звеньев.

2°. Чтобы построить диаграмму $\Delta T = \Delta T(\Delta J_п)$ для одного полного цикла времени установившегося движения механизма или машины, достаточно знать только изменение кинетической энергии и изменение приведенных моментов инерции. Для этого (рис. 17.9)

откладываем полученное изменение кинетической энергии ΔT по оси ординат от точки O, а переменный приведенный момент инерции $\Delta J_{\text{п}}$ — от той же точки по оси абсцисс. Соединяя полученные точки a, b, c и т. д. плавной кривой, получаем диаграмму $\Delta T = \Delta T(\Delta J_{\text{п}})$, соответствующую времени установившегося движения механизма.

Для определения величины $J_{\text{м}}$ приведенного момента инерции маховика воспользуемся формулами (17.16). Имеем

$$\operatorname{tg}\psi_{\max} = \frac{\mu_{J_{\text{п}}}}{2\mu_T}\omega_{\text{ср}}^2\left(1+\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{J_{\text{п}}}}{2\mu_T}\omega_{\text{ср}}^2(1+\delta) \qquad (17.26)$$

и

$$\operatorname{tg}\psi_{\min} = \frac{\mu_{J_{\text{п}}}}{2\mu_T}\omega_{\text{ср}}^2\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{J_{\text{п}}}}{2\mu_T}\omega_{\text{ср}}^2(1-\delta). \qquad (17.27)$$

Подставляя данные значения для $\omega_{\text{ср}}$ и δ в формулы (17.26) и (17.27), определяем углы $\psi_{\max}$ и $\psi_{\min}$. Проводим, далее, одну касательную к кривой $\Delta T = \Delta T(\Delta J_{\text{п}})$ под углом $\psi_{\max}$, а другую — под углом $\psi_{\min}$ и определяем точку пересечения O_1 этих касательных (рис. 17.9). Точка O_1 является началом осей координат диаграммы $T = T(J_{\text{п}})$ полной кинетической энергии T механизма в функции полного приведенного момента инерции $J_{\text{п}}$. Следовательно, для определения полного приведенного момента инерции $J_{\text{п}}$ в каждом положении механизма необходимо отсчитать абсциссы от нового начала координат O_1. Приведенный момент инерции махового колеса равен произведению отрезка (O_1d) в миллиметрах на масштаб $\mu_{J_{\text{п}}}$, т. е. $J_{\text{м}} = \mu_{J_{\text{п}}}(O_1d)$.

3°. Необходимо отметить, что при малых значениях коэффициента δ вследствие незначительной разности между углами $\psi_{\max}$ и $\psi_{\min}$ точка пересечения O_1 касательных очень часто уходит за пределы чертежа. В этом случае можно поступить следующим образом. Обозначим точки пересечения касательных с осью ординат $O\Delta T$ (рис. 17.9) первой системы координат через k и l. Тогда

$$\operatorname{tg}\psi_{\max} = \frac{(kd)}{(O_1d)}, \qquad \operatorname{tg}\psi_{\min} = \frac{(ld)}{(O_1d)}$$

и

$$\operatorname{tg}\psi_{\max} - \operatorname{tg}\psi_{\min} = \frac{(kd)-(ld)}{(O_1d)} = \frac{(kl)}{(O_1d)}.$$

Подставляя только что найденное выражение для разности тангенсов в формулу (17.12), имеем

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_{J_{\text{п}}}}\frac{(kl)}{(O_1d)}\frac{1}{\omega_{\text{ср}}^2},$$

откуда, имея в виду, что $\mu_{J_{\text{п}}}(O_1d) = J_{\text{м}}$, получаем

$$J_{\text{м}} = \frac{\mu_T(kl)}{\omega_{\text{ср}}^2\delta}. \qquad (17.28)$$

Приведенный момент инерции махового колеса, следовательно, может быть определен по величине отрезка (kl) на оси ординат $O\Delta T$.

4°. Если маховик посажен на общий вал со звеном приведения, то его момент инерции $J_м$ относительно оси вращения вала может быть уменьшен на величину момента инерции звена приведения относительно той же оси.

Так как маховик обычно выполняется в виде колеса, имеющего массивный обод, соединенный со втулкой спицами, то моментами инерции этих соединительных частей часто пренебрегают и приближенно считают, что масса маховика равномерно расположена по окружности радиуса R, представляющей собой геометрическое место центров тяжести поперечных сечений обода. Тогда момент инерции $J_м$ маховика может быть выражен так:

$$J_м = mR^2 = m\frac{D^2}{4}, \tag{17.29}$$

где D — диаметр окружности центров тяжести сечений обода, а m — масса обода маховика. Из формулы (17.29), пользуясь также формулой (17.28), находим

$$mD^2 = \frac{4\mu_T\,(kl)}{\omega_{ср}^2\delta} = \frac{3600\mu_T\,(kl)}{\pi^2 n^2\delta},$$

где n есть число оборотов в минуту звена приведения. Принимая $\pi^2 \approx 10$, можем написать

$$mD^2 = 360\frac{\mu_T\,(kl)}{n^2\delta}. \tag{17.30}$$

Произведение массы обода маховика на квадрат его диаметра носит название *махового момента* или *характеристики маховика*. Характеристика маховика имеет размерность *кгм*^{2}. По этой характеристике можно определить необходимую массу маховика, если задан его диаметр, величина которого определяется в большинстве случаев из чисто конструктивных соображений. Если маховик устанавливается не на звене приведения, а на каком-либо вращающемся звене i машины, то всегда должно удовлетворяться условие равенства кинетических энергий

$$\frac{J_м\omega^2}{2} = \frac{J_{мi}\omega_i^2}{2}, \tag{17.31}$$

где $J_{мi}$ — момент инерции маховика, установленного на звене i, а ω_i — величина угловой скорости этого звена. Из равенства (17.31) следует:

$$J_{мi} = J_м\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2. \tag{17.32}$$

Значит, чем больше угловая скорость звена i, тем меньше должен быть момент инерции устанавливаемого маховика. Поэтому выгодно,

вообще говоря, с точки зрения уменьшения веса махового колеса устанавливать его на звеньях, обладающих *большими угловыми скоростями*.

Из формулы (17.32) также следует, что для соблюдения условия постоянства момента инерции $J_{мi}$ необходимо, чтобы передаточное отношение ω/ω_i было постоянным, что приводит к условию установки маховика на звеньях, которые связаны со звеном приведения передаточным отношением постоянной величины (механизмы круглых зубчатых колес, червячные механизмы и т. д.).

При установке маховика не на звене приведения необходимо учитывать жесткость промежуточной кинематической цепи.

При малой жесткости кинематической цепи упругие колебания могут оказаться настолько большими, что маховое колесо не будет выполнять своего назначения.

§ 79. Определение момента инерции махового колеса по уравнению моментов

1°. Момент инерции маховика может быть также определен при помощи уравнения моментов. Согласно уравнению (16.7) имеем

$$M_д - M_с = J_п \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dJ_п}{d\varphi}. \qquad (17.33)$$

Разность $M_д - M_с$ создает *избыточный момент* M. Величина избыточного момента M может быть определена, если заданы зависимости $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$. На рис. 17.10, *а* построены кривые $M_д = M_д(\varphi)$ и $M_с = M_с(\varphi)$, а на рис. 17.10, *б* — кривая избыточного момента $M = M(\varphi)$. Подставляя в формулу (17.33) значение для $J_п$ согласно формуле (17.18), получаем

$$M = (J_м + \Delta J_п)\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{d(J_м + \Delta J_п)}{d\varphi}; \qquad (17.34)$$

так как $J_м = \text{const}$, то

$$\frac{dJ_п}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(J_м + \Delta J_п) = \frac{dJ_м}{d\varphi} + \frac{d(\Delta J_п)}{d\varphi} = \frac{d(\Delta J_п)}{d\varphi},$$

Следовательно, уравнение (17.34) перепишется так:

$$M = (J_м + \Delta J_п)\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{d(\Delta J_п)}{d\varphi}. \qquad (17.35)$$

Рассмотрим положения механизма, при которых угловая скорость звена приведения равна ω_{max} и ω_{min}. В этих положениях угловое ускорение ε равно $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$.

Следовательно, формула (17.35) для этих положений имеет вид

$$M' = \frac{\omega^2_{max}}{2}\frac{d(\Delta J_п)}{d\varphi} \quad \text{и} \quad M'' = \frac{\omega^2_{min}}{2}\frac{d(\Delta J_п)}{d\varphi}, \qquad (17.36)$$

где M' и M'' — значения избыточных моментов, соответствующих углам φ_{max} и φ_{min}, при которых угловая скорость достигает одного из максимумов или одного из минимумов.

2°. Для определения правой части равенств (17.36) можно воспользоваться методом Жуковского, изложенным в § 71,4°. В самом деле, из равенства (16.11) следует:

$$M'_{пер} = -\frac{\omega^2_{max}}{2}\frac{d(\Delta J_п)}{d\varphi}, \qquad M''_{пер} = -\frac{\omega^2_{min}}{2}\frac{d(\Delta J_п)}{d\varphi}, \qquad (17.37)$$

где $M'_{пер}$ и $M''_{пер}$ — приведенные моменты сил инерции в перманентном движении, т. е. с постоянными угловыми скоростями ω_{max} и ω_{min}.

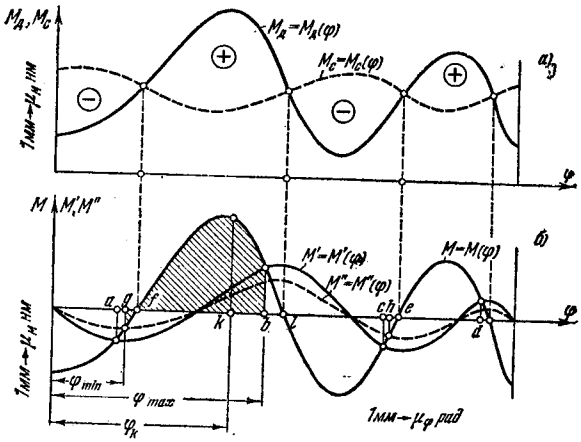


Рис. 17.10. К расчету маховика по уравнению моментов: *а*) диаграмма моментов движущих сил и сил сопротивления; *б*) диаграмма избыточного момента.

Величины моментов $M'_{пер}$ и $M''_{пер}$ могут быть определены, если провести кинетостатический расчет механизма и определить все силы инерции звеньев в предположении постоянства угловой скорости. Можно также с помощью рычага Жуковского (см. § 67) или методом приведения сил и моментов (см. § 68) определить те же моменты $M'_{пер}$ и $M''_{пер}$.

Динамическому расчету механизма обычно предшествует его кинетостатический расчет, при котором величина угловой скорости принимается равной $\omega_{ср}$. Поэтому для определения моментов $M'_{пер}$ и $M''_{пер}$ можно пользоваться моментом $M_{пер}$, полученным при кинетостатическом исследовании:

$$M_{пер} = -\frac{\omega^2_{ср}}{2}\frac{d(\Delta J_п)}{d\varphi}. \qquad (17.38)$$

Тогда, учитывая зависимости (17.20) и (17.37), получаем

$$M'_{\text{пер}} = M_{\text{пер}}(1+\delta), \qquad M''_{\text{пер}} = M_{\text{пер}}(1-\delta). \tag{17.39}$$

Формулы (17.37) заменяются теперь следующими:

$$M' = M_{\text{пер}}(1+\delta) \tag{17.40}$$

и

$$M'' = M_{\text{пер}}(1-\delta). \tag{17.41}$$

3°. Определив моменты M' и M'' в функции угла φ, т. е. $M' = M'(\varphi)$ и $M'' = M''(\varphi)$, строим кривые этих зависимостей в том же масштабе, в каком построена и кривая зависимости избыточного момента $M = M(\varphi)$, изображенная на рис. 17.10, *б*. Равенство (17.40) удовлетворяется в положениях *a*, *b*, *c* и *d*, где кривая $M' = M'(\varphi)$ пересекает кривую $M = M(\varphi)$. Но угловая скорость ω может иметь максимум только в положениях *b* и *d*, потому что на интервалах *fb* и *ed* происходит увеличение кинетической энергии. Определение наибольшего максимума может быть сделано с достаточной для практики точностью сопоставлением величин площадок $(F_{bl} + F_{ed})$ *мм*^{2} и F_{le} *мм*^{2}, заключенных в интервале *bd* между кривой $M = M(\varphi)$ и осью φ (рис. 17.10, *б*).

Если

$$F_{le} > F_{bl} + F_{ed},$$

то наибольшая угловая скорость оказывается в положении *b*.

Если же

$$F_{le} < F_{bl} + F_{ed},$$

то наибольшая угловая скорость получается в положении *d*.

Общим правилом нахождения наибольшего максимума является следующее. Если алгебраическая сумма избыточных площадок на интервале между двумя максимумами больше нуля, то наибольший максимум находится в правом конце интервала; если алгебраическая сумма меньше нуля, то наибольший максимум находится в левом конце интервала.

Аналогично, если построить кривую зависимости $M'' = M''(\varphi)$ (на рис. 17.10, *б* она показана штриховой линией), то минимумы будут в точках *g* и *h* пересечения кривых зависимостей $M'' = M''(\varphi)$ и $M = M(\varphi)$. Определение наименьшего минимума ведется также методом сравнения площадок.

Если углы $\varphi_{\max}$ и $\varphi_{\min}$ (рис. 17.10, *б*), в которых угловые скорости равны $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$, соответствуют положениям *b* и *g*, то определение момента инерции $J_{\text{м}}$ махового колеса может вестись по одной из формул (17.23) и (17.24) или (17.25) в зависимости от требуемой точности расчета. При этом избыточная работа A, входящая в эти формулы, подсчитывается по диаграмме $M = M(\varphi)$ (рис. 17.10, *б*):

$$A = \mu_{\text{м}}\mu_{\varphi}F_{gb},$$

где F_{gb} — алгебраическая сумма площадей в квадратных миллиметрах, заключенных в интервале gb.

Если построить зависимость между моментом инерции $J_м$ маховика и коэффициентом неравномерности движения δ, то можно обнаружить, что эта зависимость имеет приближенно гиперболический характер (рис. 17.11). Таким образом, с приближением δ к нулю момент инерции $J_м$ маховика быстро возрастает, и, следовательно, незначительное уменьшение δ в этой области дает значительное увеличение необходимого момента инерции $J_м$ маховика, что является, конечно, нежелательным. Это обстоятельство заставляет в некоторых случаях отказываться от установки на машинах маховиков с большим моментом инерции, обеспечивающим малый коэффициент неравномерности движения.

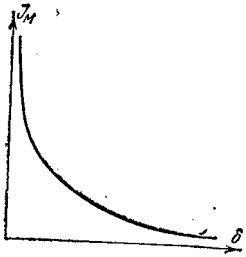


Рис. 17.11. График зависимости момента инерции маховика от коэффициента неравномерности движения.

4°. Определив момент инерции $J_м$ махового колеса, можно по заданной угловой скорости ω_{max} и по диаграмме $M = M(\varphi)$ (рис. 17.10, *б*) определить угловую скорость ω для любого угла поворота φ, т. е. построить зависимость $\omega = \omega(\varphi)$. Пусть, например, требуется определить угловую скорость ω_k в положении k, соответствующему углу φ_k (рис. 17.10, *б*).

Напишем уравнение кинетической энергии для интервала kb:

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi_b} M\,d\varphi = (J_м + \Delta J_{пb})\frac{\omega_{max}^2}{2} - (J_м + \Delta J_{пk})\frac{\omega_k^2}{2},$$

откуда

$$\omega_k = \sqrt{\frac{J_м + \Delta J_{пb}}{J_м + \Delta J_{пk}}\omega_{max}^2 - \frac{2}{J_м + \Delta J_{пk}}\int_{\varphi_k}^{\varphi_b} M\,d\varphi}. \qquad (17.42)$$

В этих равенствах $\Delta J_{пb}$ — приведенный момент инерции всех звеньев механизма (без махового колеса) в положении b, соответствующем максимальной угловой скорости ω_{max}; $\Delta J_{пk}$ — приведенный момент инерции всех звеньев механизма (без махового колеса) в положении k; $J_м$ — приведенный момент инерции махового колеса.

Интеграл $\int_{\varphi_k}^{\varphi_b} M\,d\varphi$ пропорционален площади диаграммы $M = M(\varphi)$, заключенной в интервале kb. Аналогично определяются угловые скорости ω и для других значений угла φ. Таким образом может быть построена кривая зависимости $\omega = \omega(\varphi)$.

Угловая скорость ω_{max} в формуле (17.42) может быть также выражена через заданную угловую скорость $\omega_{ср}$ и коэффициент неравномерности движения δ, так как

$$\omega_{max} = \omega_{ср}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right),$$

или

$$\omega^2_{max} \approx \omega^2_{ср}(1 + \delta).$$

§ 80. Определение момента инерции махового колеса при движущем моменте, зависящем от скорости

1°. Выше мы рассмотрели вопрос об определении момента инерции махового колеса при приведенных моментах, зависящих от угла поворота звена приведения. В настоящем параграфе рассмотрим вопрос об определении маховых масс для тех случаев, когда приведенный момент $M_д$ движущих масс является функцией угловой скорости ω звена приведения, а приведенный момент $M_с$ сил сопротивления является функцией угла поворота φ или функцией времени t.

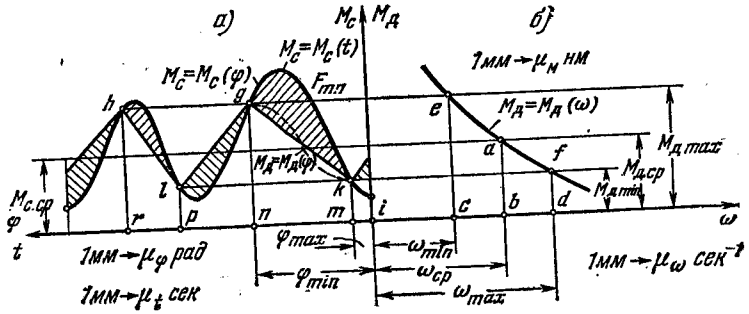


Рис. 17.12. К расчету маховика при движущем моменте, зависящем от скорости: *а*) диаграмма момента сил сопротивления, зависящего от угла поворота звена приведения или от времени; *б*) диаграмма момента движущих сил, зависящего от угловой скорости.

Пусть заданы графики (рис. 17.12) приведенных моментов движущих сил $M_д = M_д(\omega)$ и сил сопротивления $M_с = M_с(\varphi)$; требуется определить момент инерции $J_м$ махового колеса, если задан коэффициент неравномерности движения δ. Задача эта может быть решена только приближенно, если принять переменную часть равенства (17.18), т. е. $J_з$ (приведенный момент инерции звеньев механизма), равной некоторому среднему планиметрическому приведенному моменту инерции $J_{з.ср}$. Тогда полный приведенный момент инерции J будет равен моменту инерции $J_м$ маховика и приведенному моменту инерции J_0 звена приведения тех звеньев механизма,

которые связаны со звеном приведения постоянством передаточного отношения и среднего значения $J_{з.ср}$, т. е.

$$J = J_м + J_0 + J_{з.\,ср}. \tag{17.43}$$

Графическим интегрированием определяем площадь диаграммы $M_с = M_с(\varphi)$ (рис. 17.12, *а*) и находим среднее значение момента $M_{с.ср}$ сил сопротивления. Если приближенно принять, что средняя угловая скорость $\omega_{ср}$ звена приведения соответствует равенству средних моментов сил движущих и сил сопротивления:

$$M_{с.\,ср} \approx M_{д.\,ср},$$

то, продолжая прямую среднего момента $M_{с.ср}$ до пересечения в точке *а* с кривой $M_д = M_д(\omega)$ (рис. 17.12, *б*), определим отрезок (*ab*), представляющий в масштабе $\mu_м$ момент $M_{д.\,ср}$.

Отрезок (*ib*) по абсциссе в масштабе μ_ω будет представлять собою искомую среднюю скорость $\omega_{ср}$.

Далее, по равенствам (17.19) определяем угловые скорости ω_{max} и ω_{min} и откладываем их в виде отрезков (*1d*) и (*1c*) в том же масштабе μ_ω. Отрезки (*if*) и (*ie*) в масштабе $\mu_м$ представляет собою моменты $M_{д\,min}$ и $M_{д\,max}$.

Уравнение движения механизма или машины при постоянном моменте инерции J будет иметь вид

$$M_д(\omega) - M_с(\varphi) = J\frac{d\omega}{dt}. \tag{17.44}$$

Так как мы рассматривали положения механизма, в которых угловая скорость ω принимает значения ω_{max} и ω_{min}, т. е. когда $\frac{d\omega}{dt} = 0$, то уравнение (17.44) перепишется так:

$$M_д(\omega) - M_с(\varphi) = 0, \quad \text{или} \quad M_д(\omega) = M_с(\varphi), \tag{17.45}$$

т. е. в положениях, когда угловая скорость ω звена приведения достигает экстремальных значений, моменты движущих сил и сил сопротивления должны быть равны. Через точки *e* и *f* проводим горизонтали до пересечения с кривой $M_с = M_с(\varphi)$ в точках *g*, *h*, *k* и *l* (рис. 17.12, *а*). Из точек *g*, *h*, *k* и *l* опускаем перпендикуляры на ось абсцисс и находим соответственно точки *n*, *r*, *m* и *p*. При углах φ, определяемых точками *m* и *p*, звено приведения имеет максимальную угловую скорость ω_{max}, а при углах φ, определяемых точками *n* и *r*, — минимальную скорость ω_{min}. Рассмотрим интервал угла поворота φ_{mn}. В точке *m*, соответствующей углу φ_{max}, угловая скорость ω равна ω_{max}; в точке *n*, соответствующей углу φ_{min}, угловая скорость ω равна ω_{min}; следовательно, на интервале φ_{mn} кривая $M_д = M_д(\varphi)$ может иметь перегиб (штриховая кривая на рис. 17.12,*а*). Заменим кривую $M_д = M_д(\varphi)$ на участке φ_{mn} приближенной прямой *gk*. Площадь F_{mn} *мм*^{2}, заключенная между кривой $M_с = M_с(\varphi)$ и прямой *gk*, помноженная на масштабы $\mu_м$ и μ_φ, представляет собою

избыточную работу A, равную

$$A = \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} M_д \, d\varphi - \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} M_c \, d\varphi. \qquad (17.46)$$

На рис. 17.12, *а* все площадки, определяющие избыточную работу, заштрихованы.

Для определения момента инерции $J_м$ махового колеса надо выбрать наибольшую площадку, а таковой является площадка F_{mn} (рис. 17.12, *а*) на интервале mn. Наибольшая избыточная работа, соответствующая этой площадке, равна

$$A = \mu_м \mu_\varphi F_{mn}. \qquad (17.47)$$

При помощи формулы (17.24) определяем момент инерции маховика

$$J_м = \frac{A}{\omega_{ср}^2 \delta} - (J_0 + J_{з.ср}). \qquad (17.48)$$

2°. Если приведенный момент сил сопротивления M_c является функцией времени t, т. е. $M_c = M_c(t)$, то порядок расчета остается прежним, но в этом случае точки m и n соответствуют промежуткам времени t_{max} и t_{min}, в которых скорость ω достигает значений ω_{max} и ω_{min} (на рис. 17.12, *а* кривая $M_c(t)$ показана совпадающей с кривой $M_c(\varphi)$). Формулу (17.45) в этом случае применить нельзя, ибо избыточная площадка F_{mn} определяет импульс момента U, равный

$$U = \mu_м \mu_t F_{mn} \ [н \cdot м \cdot сек]. \qquad (17.49)$$

Приближенную формулу для определения момента инерции $J_м$ маховика получаем, пользуясь уравнением движения, написанным в следующем виде:

$$M_д(\omega) - M_c(t) = (J_м + J_0) \frac{d\omega}{dt} \qquad (17.50)$$

или

$$[M_д(\omega) - M_c(t)] \, dt = (J_м + J_0) \, d\omega \qquad (17.51)$$

и, далее,

$$\int_{t_{min}}^{t_{max}} [M_д(\omega) - M_c(t)] \, dt = (J_м + J_0) \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} d\omega. \qquad (17.52)$$

Левая часть уравнения (17.52) равна U (см. формулу (17.49)). Тогда из уравнения (17.52) получаем

$$J_м = \frac{U}{\omega_{max} - \omega_{min}} - J_0, \qquad (17.53)$$

или, так как $\omega_{max} - \omega_{min} = \omega_{ср}\delta$, имеем окончательно

$$J_м = \frac{U}{\omega_{ср}\delta} - J_0. \qquad (17.54)$$

3°. Если приведенные моменты $M_д$ и $M_с$ движущих сил и сил сопротивления являются функциями угловой скорости ω, то механизм всегда работает устойчиво с некоторой угловой скоростью $\omega_у$ звена приведения, величина которой определится точкой пересечения кривых $M_д = M_д(\omega)$ и $M_с = M_с(\omega)$. В самом деле, если угловая скорость ω уменьшится и будет равна $\omega_с$ (рис. 17.13), то момент $M_д$ увеличится, а момент $M_с$ уменьшится и, следовательно, возникнет восстанавливающий момент

$$M_д - M_с > 0,$$

и звено приведения механизма возвратится к прежней устойчивой угловой скорости $\omega_у$. Если угловая скорость ω увеличится и будет равна ω_d (рис. 17.13), то возникнет момент

$$M_д - M_с < 0,$$

и звено приведения будет также возвращаться к прежней устойчивой угловой скорости $\omega_у$.

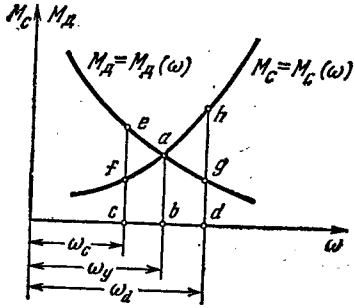


Рис. 17.13. Диаграмма моментов движущих сил и сил сопротивления, зависящих от угловой скорости.

4°. Рассмотренный в настоящем параграфе метод определения момента инерции маховика является приближенным. Величину момента инерции маховика можно уточнить, если после определения его момента инерции приближенным методом построить одним из способов, указанных в § 73, кривую угловой скорости ω на участке φ_{mn} (рис. 17.12, *а*) и определить, значительно ли отклоняются полученные значения для ω_{max} и ω_{min} от заданных. Если эти отклонения значительны, то, увеличив или уменьшив полученное приближенное значение для момента инерции маховика, можно получить более точное решение задачи.

ГЛАВА XVIII
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 81. Общая постановка задачи

1°. Как было указано в § 74,*2°*, при периодических колебаниях скоростей ведущего вала машины (звена приведения механизма) во время установившегося и неустановившегося движений необходимо соединить звено приведения регулируемого объекта с особым механизмом, носящим название *скоростного регулятора*. Задача регулятора состоит в установлении устойчивого (стационарного) изменения скорости, режима движения звена приведения регулируемого объекта, что может быть достигнуто выравниванием разницы

между движущими силами и силами сопротивления. Если по каким-либо причинам уменьшается полезное сопротивление и регулируемый объект начинает ускорять свое движение, то регулятор автоматически уменьшает приток движущих сил. Наоборот, если силы сопротивления увеличиваются и регулируемый объект начинает замедлять свое движение, то регулятор увеличивает движущие силы. Таким образом, как только нарушается равновесие между движущими силами и силами сопротивления, регулятор должен вновь их сбалансировать и заставить регулируемый объект работать с прежними или близкими к прежним скоростями.

Конструкции регуляторов и схемы регулирования разнообразны. Например, в практике применяются так называемые *центробежные регуляторы,* плоские и пространственные, в которых используется центробежная сила инерции. Имеются также *инерционные регуляторы,* использующие тангенциальные силы инерции. Применяются *регуляторы электрического типа* и др.

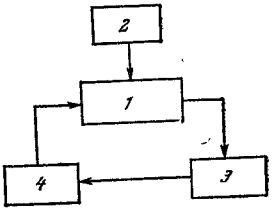


Рис. 18.1. Принципиальная схема системы регулирования; *1* — регулируемый объект; *2* — источник возмущений; *3* — чувствительный элемент; *4* — регулирующий орган.

2°. Хотя конструкции механизмов регуляторов и схемы регулирования различные, но в большинстве случаев автоматическое регулирование выполняется по схеме замкнутого контура. Принципиальная схема автоматического регулирования по замкнутому контуру представлена на рис. 18.1.

Регулируемый объект 1 находится под внешним воздействием *источника возмущения 2.* В результате этого воздействия происходит отклонение регулируемого параметра от заданного. Эти изменения воспринимаются *чувствительным элементом 3,* который передает необходимую информацию *регулирующему органу 4,* восстанавливающему заданный параметр у регулируемого объекта: *1—3—4—1* (обратная связь).

Регулируемый объект *1* посредством обратной связи воздействует на чувствительный элемент *3,* который в свою очередь действует на регулируемый объект *1.*

На рис. 18.1 дана простейшая схема системы автоматического регулирования. Обычно в состав системы автоматического регулирования входят различные дополнительные устройства, обеспечивающие надежность действия этой системы.

В машинном агрегате регулируемым объектом обычно бывает двигатель, а источником возмущения является рабочая машина, приводимая в движение двигателем. Чувствительный элемент может быть механическим устройством, чаще всего механизмом регулятора центробежного типа, или электрическим типа тахогенератора, представляющего собой электрический генератор, развивающий напряжение, пропорциональное угловой скорости. Этим напряжением

можно пользоваться для воздействия на регулирующий орган. Регулирующие органы могут быть различными в зависимости от технологического назначения машины.

3°. Рассмотрим некоторые схемы автоматического регулирования угловой скорости звена приведения машинного агрегата. На рис. 18.2 показан машинный агрегат, состоящий из рабочей машины *2* и теплового двигателя *1*. Чувствительным элементом является центробежный регулятор *3*. Регулятор состоит из двух тяжелых шаров K, сидящих на звеньях AC и BD. Эти звенья входят во вращательные пары C и D со звеньями CE и DF, которые в свою очередь входят во вращательные пары E и F с муфтой N, имеющей возможность свободно скользить вдоль направляющей $z - z$. Звенья AC и BD связаны пружиной L, стремящейся сблизить шары. Регулятор приводится в движение от звена приведения двигателя посредством промежуточного механизма, например парой конических колес H и G. При вращении звена приведения двигателя с угловой скоростью ω_1 регулятор вращается с угловой скоростью

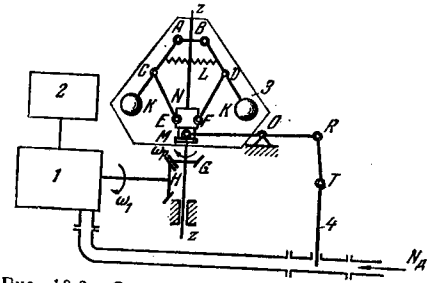


Рис. 18.2. Схема прямого регулирования машинного агрегата: *1* — двигатель; *2* — рабочая машина; *3* — регулятор; *4* — заслонка паропровода.

$$\omega_p = \omega_1 \frac{1}{i_{1p}},$$

где i_{1p} есть передаточное отношение от звена приведения к регулятору.

При различных угловых скоростях ω_1 звена приведения муфта N занимает различные положения. С муфтой N соединен рычажный механизм, увеличивающий или уменьшающий подачу движущей энергии (например, пара или газа) в двигатель. Этот механизм состоит из звеньев OR и RT и заслонки *4*. Палец M, принадлежащий звену OR, скользит в направляющих, принадлежащих муфте N.

Предположим, что в результате уменьшения сил полезных сопротивлений в рабочей машине *2* угловая скорость ω_1 регулятора увеличилась. Тогда шары K под действием центробежных сил будут удаляться от оси вращения $z - z$ и муфта N будет перемещаться вверх. При этом звено RT будет действовать на заслонку *4*, которая, опускаясь вниз, уменьшит сечение канала, по которому поступает в двигатель *1* рабочее вещество (пар, газ и т. д.). Тогда движущие силы уменьшатся, угловая скорость ω_p также уменьшится, муфта N начнет перемещаться вниз и, следовательно, заслонка *4* будет перемещаться вверх, увеличивая сечение канала. После увеличения подачи движущей энергии процесс может снова повторяться и т. д.

Таким образом, работа регулятора представляет собой некоторый *колебательный процесс.* Регулятор отзывается автоматически на изменение величины угловой скорости звена приведения двигателя и обеспечивает подачу необходимой энергии для передвижения регулирующего органа.

Следует отметить, что описанный способ регулирования обладает тем недостатком, что после сброса нагрузки угловая скорость оказывается несколько выше той, с которой двигатель вращался до сброса нагрузки, хотя движение машинного агрегата вновь получается установившимся, но скорости этого движения уже иные и несколько больше, чем в начале процесса регулирования. Чтобы избежать указанного изменения скорости, в технике применяются более сложные схемы регулирования.

Описанная система регулирования называется системой *прямого регулирования,* так как в ней регулятор *непосредственно соединен с механизмом,* увеличивающим или уменьшающим подачу движущей энергии.

4°. В рассмотренном примере перемещение заслонки *4* производится за счет центробежных сил шаров регулятора. В некоторых случаях этих сил может оказаться недостаточно для перемещения заслонки, тогда необходимо включить в схему регулирования вспомогательный источник энергии, называемый *сервомотором.* Такие системы называются системами *непрямого регулирования.* На рис. 18.3 показана схема непрямого регулирования. Эта система имеет те же основные элементы, что и в принципиальной схеме автоматического регулирования (рис. 18.1), но перемещение регулирующего органа *4* (заслонки) происходит посредством гидравлических сервомоторов. Пусть, например, угловая скорость ω_1 звена приведения машинного агрегата увеличилась. Тогда муфта N начнет подниматься и через систему рычагов поднимет золотник *5.* В цилиндр *6* золотника по трубкам *7* и *8* нагнетается масло под постоянным давлением. При равновесном режиме маслопроводы *10* и *11* перекрыты золотни-

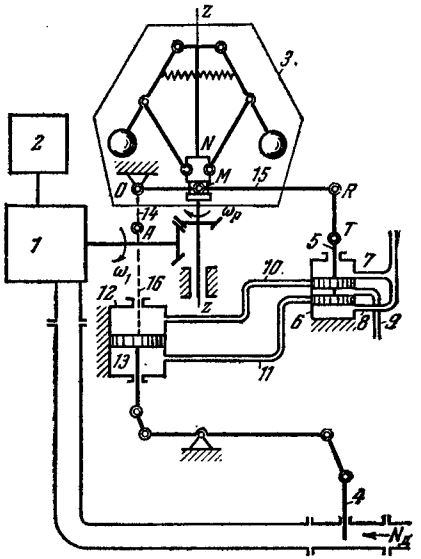


Рис. 18.3. Схема непрямого регулирования машинного агрегата: *1* — двигатель; *2* — рабочая машина; *3* — чувствительный элемент; *4* — заслонка; *5* — золотник; *6, 7, 8, 9, 10, 11* — маслопроводы; *12* — цилиндр сервомотора; *13* — поршень сервомотора; *14* — дополнительное звено; *15* — рычаг; *16* — шток поршня *13.*

ком *5*. При подъеме золотника *5* масло по трубопроводам *8* и *6* начнет поступать в нижнюю полость цилиндра *12* сервомотора, поршень *13* переместится вверх и системой рычагов опустит заслонку *4*, уменьшая доступ движущей энергии $N_д$. При движении поршня *13* вверх масло, находящееся в верхней полости цилиндра *12*, по трубопроводу *10* и маслопроводу *9* вытесняется в приемник масла. После того как заслонка *4* опустится, угловая скорость ω_1 уменьшится, муфта *N* начнет опускаться вниз, золотник *5* перекроет трубопроводы *6* и *10*, и доступ масла в цилиндр *12* сервомотора прекратится. После возвращения золотника *5* в исходное положение процесс регулирования должен закончиться. Рассмотренная система регулирования обеспечивает поддержание постоянной установившейся угловой скорости звена приведения и носит название *астатической системы регулирования*.

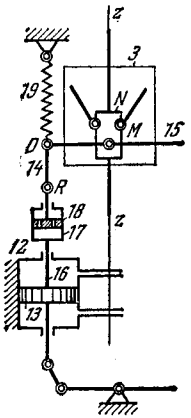


Рис. 18.4. К системе непрямого регулирования: *12* — цилиндр сервомотора; *13* — поршень сервомотора; *14* — дополнительное звено; *15* — рычаг; *16* — шток поршня; *17* — цилиндр катаракта; *18* — поршень катаракта; *19* — пружина.

Чтобы регулятор во всех случаях регулирования выключал сервомотор, рассмотренная система регулирования снабжается дополнительным звеном *14*, входящим во вращательные кинематические пары *O* и *A* со звеном *15* и штоком *16* поршня *13*, а звено *15* входит во вращательную пару *M* с муфтой *N*. При этом точка *O* освобождается от закрепления со стойкой. Звено *14* и шток *16* показаны на рис. 18.3 штриховой линией. Звенья *14*, *15* и *16* образуют жесткую обратную связь. Поэтому такая система регулирования получила название *системы непрямого регулирования с жесткой обратной связью*. Недостатком этой системы является то, что после окончания процесса регулирования муфта займет отличное от исходного положение и угловая скорость звена приведения будет несколько отличаться от первоначальной.

5°. Чтобы избежать неравномерности процесса регулирования в системах с обратной связью между штоком *16* и звеном *14* (рис. 18.4), устанавливается масляный тормоз, состоящий из цилиндра *17*, жестко связанного со штоком *16*, и поршня *18*, входящего во вращательную кинематическую пару со звеном *14*. Поршень *18* имеет отверстия, через которые масло может перетекать из верхней полости в нижнюю и наоборот. Как показывает опыт, сопротивление при перетекании масла пропорционально скорости перемещения поршня *18* в цилиндре *17*. Такая система регулирования получила название *изодромной системы регулирования*, а масляный тормоз, состоящий из поршня *18* и цилиндра *17*, называется *катарактом*. Изодромная система регулирования является астатической и под-

держивает постоянную установившуюся угловую скорость звена приведения. Специальная пружина *19* снабжена устройствами, позволяющими изменять затяжку пружины и тем самым производить настройку системы регулирования на требуемый режим.

§ 82. Кинетостатика центробежного регулятора

1°. Выясним вопрос о зависимости угловой скорости регулятора ω_p от высоты подъема z муфты N регулятора (рис. 18.5, *а*). Для этого предположим, что угловая скорость ω_p регулятора для рассматриваемого момента времени есть величина постоянная.

Если под действием всех внешних сил, в том числе и сил инерции, регулятор находится в равновесии, то должно удовлетвориться условие равенства нулю суммы всех этих сил:

$$\sum_1^n \boldsymbol{P} = 0.$$

Силы инерции грузов F и E обозначаем через $\boldsymbol{P}_и$ и $-\boldsymbol{P}_и$. Силами инерции самих звеньев можно пренебречь, так как их массы малы по сравнению с массами грузов. Силами трения в кинематических парах также пренебрегаем. При постоянной угловой скорости ω_p силы инерции муфты взаимно уравновешиваются. Кроме силы инерции, на регулятор действуют силы тяжести $\boldsymbol{G}_2$ грузов, сила тяжести муфты $\boldsymbol{G}_1$ и силы пружины $\boldsymbol{P}$ и $-\boldsymbol{P}$ (на рис. 18.5 пружина не показана).

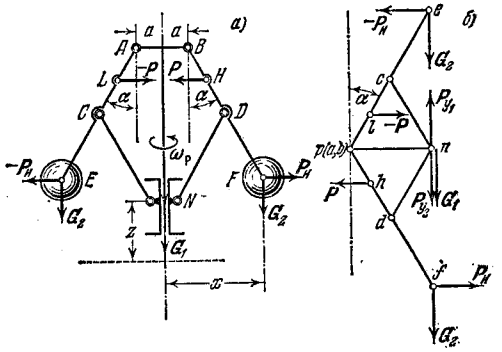


Рис. 18.5. К кинетостатическому исследованию центробежного регулятора: *а*) схема регулятора; *б*) повернутый план скоростей.

Определим приведенную к муфте силу $\boldsymbol{P}_{п1}$ от силы тяжести и сил сопротивления пружины. Для этого строим повернутый план скоростей механизма регулятора в его движении относительно оси вращения, т. е. в плоскости чертежа (рис. 18.5, *б*), прилагаем в соответствующих точках силы $\boldsymbol{P}$, $-\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}_1$ и $\boldsymbol{G}_2$ и силу $\boldsymbol{P}_{y1}$, являющуюся уравновешивающей силой, приложенной к муфте N и параллельной оси z (рис. 18.5, *а*), и далее составляем уравнение моментов всех сил относительно точки p — полюса плана скоростей (см. § 68). Имеем

$$-G_1(pn) - G_2(pf)\sin\alpha - G_2(pe)\sin\alpha - \\ -P(pl)\cos\alpha - P(ph)\cos\alpha + P_{y1}(pn) = 0. \quad (18.1)$$

Так как $(pf) = (pe)$ и $(pl) = (ph)$, то уравновешивающая сила P_{y1} будет равна

$$P_{y1} = G_1 + 2G_2\left(\frac{pf}{pn}\right)\sin\alpha + 2P\left(\frac{ph}{pn}\right)\cos\alpha. \qquad (18.2)$$

Отрезки (pf), (pn) и (ph) представляют в масштабе μ_v величины скоростей v_F, v_N и v_H точек F, N и H, т. е.

$$v_F = \mu_v (pf), \quad v_N = \mu_v (pn) \quad \text{и} \quad v_H = \mu_v (ph).$$

Поэтому формула (18.2) может быть представлена так:

$$P_{y1} = G_1 + 2G_2\frac{v_F}{v_N}\sin\alpha + 2P\frac{v_H}{v_N}\cos\alpha.$$

Модуль приведенной силы $P_{п1}$ равен

$$P_{п1} = P_{y1} = G_1 + 2G_2\frac{v_F}{v_N}\sin\alpha + 2P\frac{v_H}{v_N}\cos\alpha, \qquad (18.3)$$

а направлена она противоположно P_{y1}, в данном случае вниз вдоль вертикальной оси. Аналогично определяется приведенная сила $P_{п2}$ от сил инерции $P_и$ и $-P_и$. Имеем

$$P_и (pf)\cos\alpha + P_и (pe)\cos\alpha - P_{y2}(pn) = 0, \qquad (18.4)$$

где P_{y2} есть уравновешивающая сила.

Из уравнения (18.4) получаем

$$P_{y2} = 2P_и\left(\frac{pf}{pn}\right)\cos\alpha, \quad \text{или} \quad P_{y2} = 2P_и\frac{v_F}{v_N}\cos\alpha,$$

где $v_F = \mu_v (pf)$ и $v_N = \mu_v (pn)$. Отсюда модуль приведенной силы $P_{п2}$ равен

$$P_{п2} = P_{y2} = 2P_и\frac{v_F}{v_N}\cos\alpha, \qquad (18.5)$$

направлена же она противоположно P_{y2}, т. е. вверх.

Так как сила $P_и$ по величине равна

$$P_и = m\omega_p^2 x,$$

где x есть переменное расстояние центров тяжести грузов от оси регулятора, а m — масса груза (рис. 18.5, *а*), то формулу (18.5) можно написать так:

$$P_{п2} = 2m\omega_p^2 x\cos\alpha\frac{v_F}{v_N}. \qquad (18.6)$$

Равновесие регулятора определяется равенством нулю суммы приведенных к муфте сил $P_{п1}$ и $P_{п2}$, т. е.

$$P_{п1} + P_{п2} = 0. \qquad (18.7)$$

Приведенная сила $\boldsymbol{P}_{\text{п1}}$ в равенстве (18.7) носит название *поддерживающей силы регулятора*. В самом деле, если при невращающемся регуляторе мы будем поднимать муфту регулятора, то должны будем прилагать к ней силу, равную по величине и противоположную по направлению силе $\boldsymbol{P}_{\text{п1}}$. Из равенства (18.3) следует, что поддерживающая сила регулятора зависит от координаты z муфты N и в каждом положении уравновешивается приведенной силой $\boldsymbol{P}_{\text{п2}}$ от сил инерции грузов, которые также зависят от положения z муфты N, т. е.

$$P_{\text{п1}} = P_{\text{п1}}(z) \quad \text{и} \quad P_{\text{п2}} = P_{\text{п2}}(z).$$

Сила $P_{\text{п2}}$ называется *приведенной к муфте регулятора центробежной силой*.

Подставляя в равенство (18.7) значения $P_{\text{п1}}$ и $P_{\text{п2}}$ из формул (18.3) и (18.6), получаем

$$G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin\alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos\alpha - 2m\omega_{\text{р}}^2 x \cos\alpha \frac{v_F}{v_N} = 0. \quad (18.8)$$

Введем следующие обозначения:

$$A = 2mx \cos\alpha \frac{v_F}{v_N} \quad (18.9)$$

и

$$B = G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin\alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos\alpha. \quad (18.10)$$

Тогда уравнение (18.8) примет вид

$$A\omega_{\text{р}}^2 - B = 0. \quad (18.11)$$

Уравнение (18.11) является уравнением равновесия регулятора при силах трения, равных нулю.

Из соотношений (18.9) и (18.10) следует, что величины A и B являются функциями положения одного из звеньев механизма регулятора. Если A и B рассматривать как функции положения z муфты регулятора и положить $A = A(z)$ и $B = B(z)$, то уравнение (18.11) примет вид

$$A(z)\,\omega_{\text{р}}^2 - B(z) = 0. \quad (18.12)$$

Из этого уравнения следует:

$$\omega_{\text{р}}^2 = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (18.13)$$

Таким образом, каждому положению равновесия муфты N, определяемому координатой z, соответствует вполне определенная угловая скорость $\omega_{\text{р}}$. Эта угловая скорость носит название *равновесной угловой скорости регулятора*.

2°. Пользуясь формулами (18.9), (18.10), (18.13) и планом скоростей, можно построить диаграмму зависимости перемещения z муфты N от квадрата равновесной угловой скорости ω_p^2 (рис. 18.6), т. е. $z = z(\omega_p^2)$. Эта диаграмма регулятора имеет обычно вид, указанный на рис. 18.6. Пользуясь этой диаграммой, всегда можно определить по заданной угловой скорости ω_p координату z муфты. Например, значению угловой скорости ω_{pi} соответствует точка i диаграммы $z = z(\omega_p^2)$ и, следовательно, положение z_i муфты N.

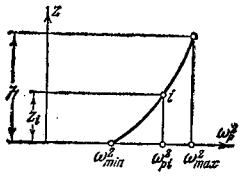


Рис. 18.6. Диаграмма зависимости перемещения муфты регулятора от квадрата его угловой скорости.

Если построена равновесная диаграмма регулятора для интервала, соответствующего полному перемещению h муфты регулятора, то можно определить значения ω_{min} и ω_{max} минимальной и максимальной угловых скоростей регулятора, при которых муфта занимает свои крайние положения.

Величина

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}, \qquad (18.14)$$

где

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}, \qquad (18.15)$$

называется *степенью неравномерности регулятора.*

Из формул (18.14) и (18.15) следует, что величина δ равна

$$\delta = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_{cp}^2}. \qquad (18.16)$$

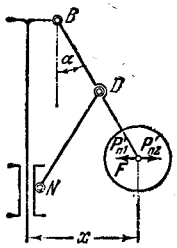


Рис. 18.7. Приведение сил, действующих на регулятор, к центру груза.

3°. В некоторых случаях бывает удобнее силы, действующие на регулятор, приводить не к муфте, а к центру F груза (рис. 18.7), направляя их по линии центробежной силы инерции $\boldsymbol{P}_и$.

Равновесие регулятора определяется равенством нулю суммы приведенных к точке F сил $\boldsymbol{P}'_{п1}$ и $\boldsymbol{P}'_{п2}$. Имеем:

$$\boldsymbol{P}'_{п1} + \boldsymbol{P}'_{п2} = 0, \qquad (18.17)$$

где $\boldsymbol{P}'_{п1}$ — приведенная сила весов G_1 и G_2 грузов, муфты N и сил $\boldsymbol{P}$ и $-\boldsymbol{P}$ пружины и $\boldsymbol{P}'_{п2}$ — приведенная сила сил инерции $\boldsymbol{P}_и$ и $-\boldsymbol{P}_и$. Модуль силы $\boldsymbol{P}'_{п1}$ определяется, если в равенстве (18.3) помножить все его члены на отношение скорости v_N муфты N к проекции скорости v_F точки F на горизонталь, т. е. на $\frac{v_N}{v_F \cos\alpha}$.

Имеем

$$P'_{\text{п1}}=\frac{G_1 v_N}{v_F\cos\alpha}+2G_2\operatorname{tg}\alpha+2P\,\frac{v_H}{v_F}. \qquad (18.18)$$

Модуль силы $P'_{\text{п2}}$ определяется, если помножить правую часть формулы (18.6) на то же самое отношение. Имеем

$$P'_{\text{п2}}=2m\omega_{\text{р}}^2 x. \qquad (18.19)$$

Сила $P'_{\text{п2}}$ направлена противоположно силе $P'_{\text{п1}}$. Подставляя в уравнение (18.17) выражения для $P'_{\text{п1}}$ и $P'_{\text{п2}}$ из формул (18.18) и (18.19), получаем уравнение равновесия регулятора в следующем виде:

$$\frac{G_1 v_N}{v_F\cos\alpha}+2G_2\operatorname{tg}\alpha+2P\,\frac{v_H}{v_F}-2m\omega_{\text{р}}^2 x=0. \qquad (18.20)$$

Вводя обозначения

$$D=2mx \qquad (18.21)$$

и

$$C=\frac{G_1 v_N}{v_F\cos\alpha}+2G_2\operatorname{tg}\alpha+2P\,\frac{v_H}{v_F}, \qquad (18.22)$$

перепишем уравнение (18.20) так:

$$D\omega_{\text{р}}^2-C=0. \qquad (18.23)$$

Уравнение (18.23) является также уравнением равновесия регулятора при силах трения, равных нулю. Величины D и C суть функции расстояния x центров тяжести шаров до оси вращения регулятора, т. е.

$$D=D(x), \quad C=C(x).$$

Из уравнения (18.23) следует:

$$\omega_{\text{р}}^2=\frac{C(x)}{D(x)}. \qquad (18.24)$$

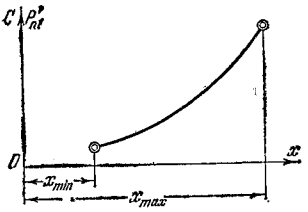


Рис. 18.8. Характеристика регулятора.

Диаграмма зависимости $C=C(x)$ или, что то же, $P'_{\text{п1}}=P'_{\text{п1}}(x)$ носит название *характеристики регулятора*. На рис. 18.8 показан один из возможных видов диаграммы $C=C(x)$.

§ 83. Устойчивость регулятора

1°. С помощью характеристики регулятора может быть выяснен ряд важных свойств регулятора, к ознакомлению с которыми мы и переходим.

Если обратиться к равновесной кривой регулятора (рис. 18.6), то из нее следует, что при $z=0$ имеем наименьшее значение $\omega_{\min}$

равновесной угловой скорости, а при $z = h$, где h — полный ход муфты, имеем наибольшее значение ω_{max} равновесной угловой скорости. Степень неравномерности регулятора, согласно формуле (18.16), равна

$$\delta = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_{ср}^2}. \qquad (18.25)$$

Таким образом, δ зависит от пределов скоростей, в которых может работать регулятор.

Как следует из формулы (18.19), величина силы $P'_{п2}$ равна сумме центробежных сил инерции грузов:

$$P'_{п2} = 2m\omega_р^2 x.$$

Если скорость $\omega_р$ постоянная, то величина силы $P'_{п2}$ пропорциональна расстоянию x и ее изменение в функции этого расстояния выразится прямой линией Om (рис. 18.9), проходящей через начало координат и наклоненной к оси Ox под углом β, тангенс которого равен

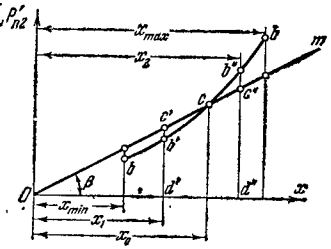


Рис. 18.9. К исследованию устойчивости регулятора.

$$\operatorname{tg}\beta = m\omega_р^2 \frac{\mu_x}{\mu_р},$$

где $\mu_р$ и μ_x — масштабы построения диаграммы (рис. 18.9). Прямая Om носит название *линии центробежной силы*.

2°. Рассмотрим, далее, в тех же масштабах характеристику регулятора, т. е. его зависимость $P'_{п1} = P'_{п1}(x)$ (рис. 18.9, кривая $b - b$). Точка c пересечения прямой Om с характеристикой $b - b$ регулятора определяет то положение x_0 центра груза, при котором регулятор находится в равновесном положении при постоянной угловой скорости $\omega_р$, так как в этом положении равны по величине и противоположны по направлению силы $P'_{п1}$ и $P'_{п2}$. Пусть, далее, регулятор выведен из своего равновесного положения, например, опусканием муфты; при этом центры грузов сблизятся и будут находиться от оси вращения регулятора на расстоянии $x_1 < x_0$. Если после этого мы предоставим регулятор самому себе, то он окажется под действием центробежной силы $P'_{п2}$, величина которой определится ординатой $d'c'$, большей ординаты $d'b'$, соответствующей величине силы $P'_{п1}$. Под действием избыточных центробежных сил грузы будут расходиться, пока не вернутся в равновесное положение, соответствующее точке c.

Если, наоборот, мы поднимем муфту N, то грузы будут расходиться и центры грузов займут некоторое новое положение, опре-

деляемое расстоянием $x_2 > x_0$. Если после этого мы предоставим регулятор самому себе, то он окажется под действием силы P'_{n1}, величина которой определится ординатой $d''b''$, большей ординаты $d''c''$, соответствующей величине центробежной силы P'_{n2}, и, следовательно, грузы начнут сближаться, пока не вернутся в равновесное положение, соответствующее точке c.

Таким образом, равновесие регулятора является *устойчивым*, если характеристика регулятора расположена так, что до точки пересечения c она лежит *ниже* линии центробежной силы и после

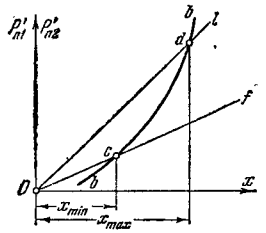


Рис. 18.10. Характеристика статического регулятора.

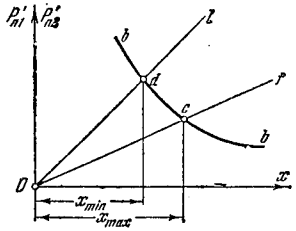


Рис. 18.11. Характеристика нестатического регулятора.

точки c она лежит *выше* линии центробежной силы. Так как регулятор должен работать в пределах, определяемых степенью неравномерности δ, равной

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}},$$

то сформулированный выше признак устойчивости регулятора должен выполняться для всех линий центробежных сил между двумя их предельными положениями, определяемыми равенствами

$$P'_{n2\,max} = 2m\omega^2_{max}x,$$
$$P'_{n2\,min} = 2m\omega^2_{min}x,$$

в которых ω_{max} и ω_{min} представляют собой максимальное и минимальное значения угловой скорости регулятора, принятые постоянными.

На рис. 18.10 нанесена характеристика регулятора $b - b$ и линии Ol и Of центробежных сил P'_{n2max} и P'_{n2min}. Для любых линий центробежных сил, проведенных между линиями Ol и Of, регулятор с характеристикой $b - b$ устойчив для равновесных положений от x_{min} до x_{max}. Регуляторы, для которых выполняются эти условия, называются *статическими*.

На рис. 18.11 показана характеристика $b - b$, при которой условия устойчивости *не выполняются на всем интервале от* x_{min} *до* x_{max}. Такие регуляторы называются *нестатическими*.

Если любому значению x соответствует одна и та же равновесная скорость и равновесная кривая регулятора имеет вид прямой, параллельной оси ординат, то $\omega_{max} = \omega_{min}$ и $\delta = 0$. В этом предельном случае характеристика совпадает с линией центробежной силы и регулятор находится в динамическом равновесии в любом положении. Такой регулятор называется *астатическим*. Теоретически он может поддерживать постоянную угловую скорость при всех положениях муфты. Однако астатические регуляторы не обладают динамической устойчивостью, и если и применяются, то при введении в схему регулирования дополнительных устройств.

§ 84. Нечувствительность регулятора

1°. В предыдущих параграфах при рассмотрении равновесного состояния регулятора мы не учитывали влияния сил трения на равновесное положение регулятора. Полная приведенная к муфте сила трения F всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения муфты. Следовательно, при подъеме муфты сила F направлена вниз, а при опускании муфты — вверх. Тогда в момент начала движения муфты вверх мы будем иметь, учитывая уравнение (18.11), условие

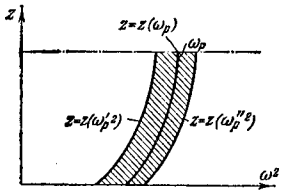


Рис. 18.12. Диаграмма, характеризующая нечувствительность регулятора.

$$A(\omega_p'')^2 - B - F = 0, \qquad (18.26)$$

где ω_p'' — предельная равновесная угловая скорость при подъеме.

Соответственно в момент начала движения муфты вниз получаем

$$A(\omega_p')^2 - B + F = 0, \qquad (18.27)$$

где ω_p' — предельная равновесная угловая скорость при опускании.

Из уравнений (18.26) и (18.27) следует, что

$$(\omega_p'')^2 = \frac{B+F}{A} \quad \text{и} \quad (\omega_p')^2 = \frac{B-F}{A}.$$

Так как согласно формуле (18.13) равновесная угловая скорость регулятора при отсутствии трения равна $\omega_p^2 = B/A$, то

$$\omega_p' \leqslant \omega_p \leqslant \omega_p''. \qquad (18.28)$$

Таким образом, для каждого значения угловой скорости и, следовательно, для каждого положения муфты регулятора имеется некоторый интервал изменения угловой скорости, внутри которого положение муфты оказывается неизмененным.

2°. Рассмотренное свойство регулятора может быть представлено графически следующим образом. Построим равновесные кривые для значений ω_p, ω_p' и ω_p'' (рис. 18.12). Область, заключенная

между кривыми $z = z(\omega_p'^2)$ и $z = z(\omega_p''^2)$, называется *областью нечувствительности регулятора*. В этой области муфта регулятора остается неподвижной при изменении угловой скорости в пределах, определяемых неравенством (18.28).

Мерой нечувствительности регулятора принимается коэффициент нечувствительности ε, равный

$$\varepsilon = \frac{\omega_p'' - \omega_p'}{\omega_p}, \tag{18.29}$$

где

$$\omega_p \approx \frac{\omega_p' + \omega_p''}{2}. \tag{18.30}$$

Коэффициент нечувствительности ε может быть приближенно представлен так:

$$\varepsilon \approx \frac{(\omega_p'')^2 - (\omega_p')^2}{2\omega_p^2}. \tag{18.31}$$

Подставляя в формулу (18.31) значения для $(\omega_p')^2$ и $(\omega_p'')^2$, получаем

$$\varepsilon = \frac{F}{B}. \tag{18.32}$$

Итак, коэффициент нечувствительности ε прямо пропорционален силе трения F. Из формул (18.29) и (18.30) имеем

$$\omega_p'' = \omega_p\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \omega_p' = \omega_p\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{18.33}$$

Приближенно можно считать

$$(\omega_p'')_{max} = \omega_{max}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (\omega_p')_{min} = \omega_{min}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{18.34}$$

и, далее,

$$\omega_p \approx \omega_{cp}.$$

Тогда действительную степень неравномерности $\delta_д$ регулятора можно представить так:

$$\delta_д = \frac{\omega_{max}'' - \omega_{min}'}{\omega_{cp}}. \tag{18.35}$$

Подставляя в равенство (18.35) значения ω_{max}'' и ω_{min}' из формул (18.34), получаем

$$\delta_д = \frac{\omega_{max}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \omega_{min}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\omega_{cp}} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}} + \varepsilon = \delta + \varepsilon. \tag{18.36}$$

Таким образом, действительная степень неравномерности $\delta_д$ равна приближенно сумме степени неравномерности δ, полученной при условии отсутствия трения, и коэффициента нечувствительности ε.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ
СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ
ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТИПОВЫХ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

ГЛАВА XIX
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. СИНТЕЗ ЦЕНТРОИДНЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 85. Задачи проектирования механизмов

1°. Проектирование механизмов представляет собой сложную комплексную проблему, решение которой может быть разбито на несколько самостоятельных этапов. Первым этапом проектирования является установление кинематической схемы механизма, которая обеспечивала бы требуемый вид и закон движения. Вторым этапом проектирования является разработка конструктивных форм механизма, обеспечивающих его прочность, долговечность, высокий коэффициент полезного действия и т. д. Третьим этапом проектирования является разработка технологических и технико-экономических показателей проектируемого механизма, определяемых эксплуатацией в производстве, ремонтом и т. д.

В теории механизмов в основном излагаются методы, с помощью которых может быть разрешен первый этап проектирования— разработка кинематических схем механизмов, воспроизводящих требуемый закон движения. При этом, конечно, учитываются и некоторые вопросы, связанные со вторым и третьим этапами проектирования, как, например, наличие у механизма необходимого коэффициента полезного действия, возможность изготовления его деталей на современном станочном оборудовании, возможность сборки механизма и т. д.

В дальнейшем при изложении данного раздела курса мы будем под проектированием механизмов понимать проектирование их *кинематических схем* с учетом некоторых из вышеуказанных дополнительных условий. Раздел теории механизмов, посвященный методам проектирования по заданным кинематическим условиям схем механизмов, получил название *синтеза механизмов*.

Синтез кинематической схемы механизма состоит в определении некоторых постоянных его параметров, удовлетворяющих заданным структурным, кинематическим и динамическим условиям, при этом одна часть этих параметров может быть задана, а другая должна быть определена.

В общем случае задачи синтеза механизмов являются многопараметрическими, так как число параметров механизма никогда не бывает *однозначным*. Как уже было указано выше, условия, которым должен удовлетворять механизм, являются иногда противоречивыми, и очевидно, что при проектировании механизма надо стремиться к тому, чтобы было найдено такое решение задачи, которое можно считать оптимальным.

В настоящее время существует ряд способов решения подобного рода задач, объединяемых так называемым *методом многопараметрической оптимизации*. При использовании этого метода обычно одно условие принимается за основное. Тогда все остальные условия будут дополнительными. Например, при проектировании механизма шарнирного четырехзвенника мы можем в качестве основного условия поставить требование заданного движения ведомого звена, минимальной величины динамических давлений на стойку и т. д. В качестве дополнительных мы можем поставить условие заданных габаритов механизма, его проворачиваемость и т. д.

Основное условие обычно выражается в виде некоторой функции, экстремум которой должен определить требуемые параметры синтезируемого механизма. Эту функцию обычно называют *целевой функцией*. Ниже, при рассмотрении задач приближенного синтеза зубчатых, кулачковых и рычажных механизмов будут показаны примеры различных целевых функций. Так, например, для зубчатого механизма это может быть его передаточное отношение, для кулачкового механизма — заданный закон движения ведомого звена, для рычажного механизма — оценка отклонения шатунной кривой от заданной и т. д. Дополнительные ограничения, накладываемые на синтезируемый механизм, могут быть представлены или в форме каких-либо функций, или чаще в виде некоторых алгебраических неравенств.

Таким образом, большинство задач синтеза механизмов может быть сведено к задаче отыскания таких параметров механизма, при которых удовлетворяются принятые ограничения и целевая функция имеет минимальное значение. Как уже было сказано выше, задача эта многопараметрическая, и решение ее обычно проводится с использованием счетно-решающих машин с применением методов Монте-Карло, т. е. случайного поиска, направленного поиска и комбинированного поиска. Многие задачи синтеза механизмов могут быть решены только в приближенной форме. Тогда, кроме применения методов параметрической оптимизации, широко используются методы теории приближения функций и, в частности, метода наилуч-

шего приближения функций, предложенного Чебышевым, и различные методы интерполирования функций, метод квадратического приближения функций, метод использования взвешенной разности, предложенный Н. И. Левитским, и т. д.

Основной задачей синтеза механизмов является воспроизведение заданного движения одного или нескольких звеньев путем непосредственного их воздействия друг на друга или путем введения между ними промежуточных звеньев. Как в первом, так и во втором случае решение этой задачи сводится к проектированию кинематической цепи заданного определенного движения, т. е. механизма.

2°. При решении задач синтеза механизмов должны быть приняты во внимание все условия, обеспечивающие осуществление требуемого движения. Такими условиями являются следующие: правильная структура проектируемого механизма, кинематическая точность осуществляемого движения, возможность создавать проектируемым механизмом заданное движение с точки зрения динамики и, наконец, условие, чтобы размеры звеньев проектируемого механизма допускали воспроизведение заданного движения. В настоящей главе мы остановимся на общем решении основных задач синтеза и покажем, как могут быть при этом учтены вышеуказанные структурные, кинематические, динамические и метрические условия.

Основными задачами синтеза механизмов, имеющими особенно важное значение в технике, являются следующие:

1) преобразование *вращательного* движения вокруг одной оси во *вращательное* движение вокруг другой оси;

2) преобразование *вращательного* движения вокруг одной оси в *поступательное* движение вдоль некоторой заданной прямой, и наоборот;

3) преобразование *поступательного* движения вдоль одной заданной прямой в *поступательное* движение вдоль другой заданной прямой и

4) воспроизведение одной из точек звеньев рычажного механизма требуемой траектории, воспроизведение заданных углов поворота ведомого звена, движения ведомого звена с остановками.

При решении первых трех задач обычно задаются требуемые законы движения тех звеньев, между которыми осуществляется передача движения, в виде заданных в функции времени линейных и угловых перемещений или линейных и угловых скоростей.

При решении четвертой задачи задается требуемая траектория аналитически (в виде уравнения) или графически (отдельными точками, лежащими на заданной траектории). Задаются требуемые углы поворота ведомого звена в зависимости от угла поворота ведущего звена, длительность периода остановки ведомого звена и т. д.

Кроме того, как было упомянуто выше, указываются желательные конструктивные формы механизмов, которые должны осущест-

влять заданные движения, и некоторые условия динамического характера, влияющие на к. п. д. механизма, на устойчивость его движения, на прочность деталей и т. д.

Обычно решить вышеуказанные задачи синтеза можно с помощью механизмов различной структуры, некоторые из которых имеют только низшие кинематические пары, а в состав других входят и низшие и высшие кинематические пары.

Практически оказывается, что решение задач о воспроизведении заданных форм движения с помощью механизмов, в состав которых входят низшие и высшие пары, является более простым, чем воспроизведение тех же форм движения с помощью механизмов, в состав которых входят только низшие пары. Это объясняется в первую очередь тем, что высшие пары обладают большим разнообразием своих видов, в то время как низшие пары, например в плоских механизмах, представлены только двумя видами: парой поступательной и парой вращательной. Вот почему в громадном большинстве случаев в технике теоретически точное воспроизведение заданных форм движения осуществляется механизмами, в состав которых входят и высшие и низшие пары, а механизмами, в состав которых входят только низшие пары, осуществляется приближенное воспроизведение заданных форм движения.

Поэтому в зависимости от того, какие требования ставит конструктор при проектировании механизма, он выбирает ту или иную кинематическую схему механизма.

3°. В данном отделе курса мы рассмотрим синтез плоских механизмов и некоторые примеры синтеза пространственных механизмов.

Как уже было показано в главе второй, элементы высших пар плоских механизмов могут быть или центроидами в относительном движении, или взаимоогибаемыми кривыми. В первом случае элементы высших пар перекатываются без скольжения, во втором случае они перекатываются со скольжением. Таким образом, если в состав проектируемого механизма входят высшие пары, то проектирование их элементов сводится или к проектированию центроид в относительном движении, или к проектированию взаимоогибаемых кривых. Механизмы, у которых элементы высших пар являются центроидами, называются *центроидными*. Механизмы, у которых элементы высших пар являются взаимоогибаемыми кривыми, в зависимости от их конструктивного оформления называются *кулачковыми* или *зубчатыми механизмами*.

Если в состав механизма входят только низшие пары, то такие механизмы в зависимости от их конструктивного оформления называются *рычажными, кулисными, клиновыми, винтовыми* и т. д. В настоящей главе мы рассмотрим некоторые общие методы проектирования центроидных механизмов для воспроизведения заданных законов движения.

§ 86. Синтез трехзвенного центроидного механизма

1°. Простейшим механизмом для преобразования вращательного движения вокруг одной оси во вращательное движение вокруг другой оси является трехзвенный центроидный механизм (рис. 19.1), образованный двумя вращательными и одной центроидной парами.

Рассмотрим, в какой форме может быть задано движение подвижных звеньев *2* и *3* этого механизма.

Пусть ведущим звеном будет звено *2*, а ведомым — звено *3*. Если текущие углы поворота звеньев *2* и *3* относительно неподвижного звена *1* обозначить соответственно через φ_2 и φ_3, то законы движения звеньев *2* и *3* в общей форме могут быть записаны в виде следующих равенств:

$$\varphi_2 = \varphi_2(t), \qquad \varphi_3 = \varphi_3(t). \tag{19.1}$$

Исключая из равенства (19.1) время t, получаем

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2). \tag{19.2}$$

Зависимость (19.2) будем называть *функцией положения*, так как она определяет положение ведомого звена *3* в зависимости от положения ведущего звена *2*. Дифференцируя равенство (19.2) по углу поворота φ_2, получаем

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \varphi_3'(\varphi_2). \tag{19.3}$$

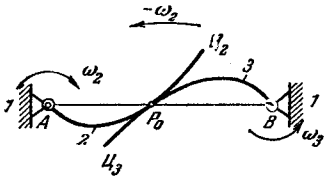


Рис. 19.1. Схема центроидного механизма.

Далее, имеем

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \frac{\dfrac{d\varphi_3}{dt}}{\dfrac{d\varphi_2}{dt}} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = i_{32},$$

где ω_2 и ω_3 — угловые скорости звеньев *2* и *3* относительно неподвижного звена *1* и i_{32} — передаточное отношение звеньев *2* и *3*. Тогда равенство (19.3) окончательно примет такой вид:

$$i_{32} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \varphi_3'(\varphi_2). \tag{19.4}$$

Зависимость (19.4) будем называть *функцией передаточного отношения*. Соответственно величину

$$i_{23} = \frac{1}{i_{32}} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_3} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{1}{\varphi_3'(\varphi_2)} \tag{19.5}$$

будем называть *функцией передаточного числа*. Функция положения (19.2) является *геометрической характеристикой* механизма, так как она не включает в себя параметр времени. Функция передаточного отношения (19.4) или функция передаточного числа (19.5) представляют собой также геометрическую характеристику механизма, но записанную в дифференциальной форме. Общая связь между

ними может быть представлена как в дифференциальной форме в виде зависимости (19.3), так и в интегральной форме в таком виде:

$$\varphi_3 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} \varphi_3'(\varphi_2)\, d\varphi_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} i_{32}\, d\varphi_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} \frac{1}{i_{23}}\, d\varphi_2, \qquad (19.6)$$

где φ_0 — угол, соответствующий исходному положению звена *2*.

Таким образом, при решении задач проектирования *движение может быть задано или как функция положения, или как функция передаточного отношения, или, наконец, как функция передаточного числа.*

2°. Связь между угловыми скоростями ω_2 и ω_3 (рис. 19.1) и основными размерами звеньев механизма может быть установлена на основании соотношения между угловыми скоростями и расстояниями между мгновенными центрами вращения. Мгновенными центрами вращения звеньев *2* и *3* являются точки A и B (рис. 19.1), а мгновенным центром вращения звеньев в их относительном движении является точка P_0, лежащая на прямой AB и совпадающая с точкой соприкасания центроид $Ц_2$ и $Ц_3$.

Следовательно, для центроидного механизма, показанного на рис. 19.1, должно удовлетворяться условие

$$i_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{AP_0}{BP_0}, \qquad (19.7)$$

а для скоростей ω_2, ω_3 и ω_{32} — условие

$$\omega_{32} = -\omega_2 + \omega_3. \qquad (19.8)$$

Так, сообщив всему механизму общую угловую скорость, равную и обратную по знаку угловой скорости ω_2 звена *2*, мы можем рассматривать движение звена *3* с угловой скоростью ω_{32} относительно звена *2* как происходящее с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей $-\omega_2$ и ω_3. Из условия, что мгновенные центры вращения A, B и P_0 всегда должны лежать на одной прямой, получаем

$$(AB) = (AP_0) + (P_0B). \qquad (19.9)$$

3°. Основная задача проектирования механизмов состоит в том, чтобы при заданном движении ведущего звена механизма обеспечить заданное движение ведомого звена. Требуемое движение может быть задано в виде функции положения, или в виде функции передаточного отношения, или в виде функции передаточного числа. Таким образом, применительно к трехзвенному центроидному механизму исходными зависимостями, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем, являются следующие:

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2) \qquad (19.10)$$

или

$$i_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{AP_0}{BP_0}. \qquad (19.11)$$

Условие (19.10) для центроидного механизма (рис. 19.1) будет означать, что для каждого заданного положения звена *2* мы имеем

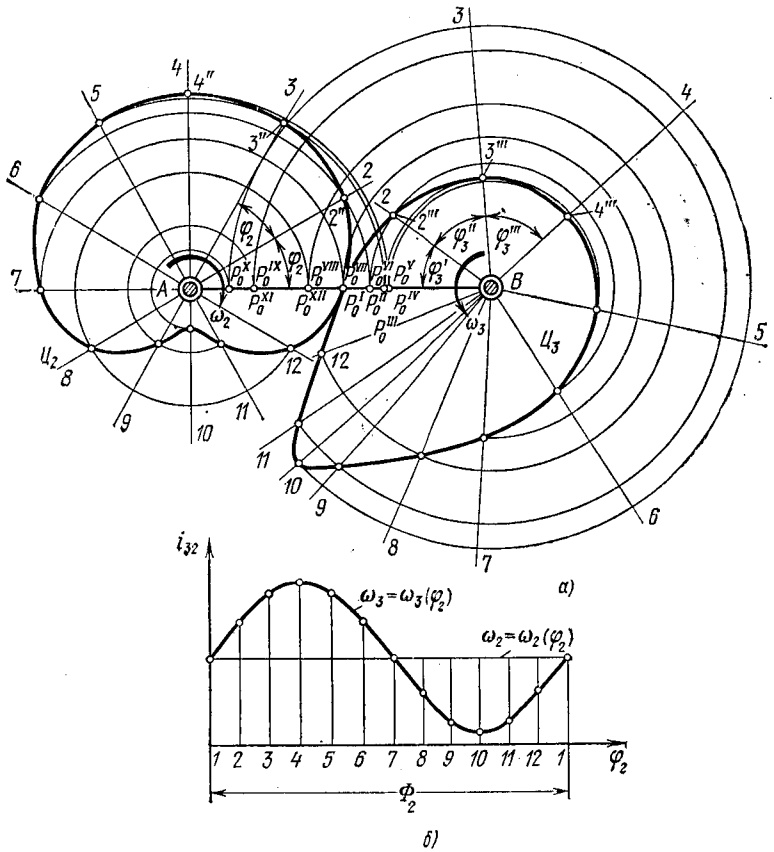


Рис. 19.2. К проектированию кинематической схемы центроидного механизма: *а*) схема механизма; *б*) графики угловых скоростей звеньев *2* и *3*.

вполне определенное заданное положение звена *3*. Для воспроизведения заданного движения по условиям (19.10) и (19.11) надо найти соответствующие очертания центроид $Ц_2$ и $Ц_3$ в относительном движении звеньев *2* и *3*.

4°. Переходим к рассмотрению вопроса о проектировании трехзвенных центроидных механизмов, образованных одной центроидной парой и двумя низшими парами. К этим механизмам относятся

механизмы некруглых колес, механизмы перекатывающихся рычагов и др.

Механизмы некруглых колес получили распространение в современном приборостроении и в общем машиностроении. Они могут воспроизводить большое число разнообразных функций передаточного отношения. Рассмотрим геометрический метод решения задачи о построении центроид этих механизмов. Как было показано выше (§ 86, *1°*), требуемый закон движения ведущего и ведомого звеньев может быть задан или в виде функции положения, или в виде функции передаточного отношения. Предположим, что нам заданы графики угловых скоростей ω_2 и ω_3 ведущего и ведомого звеньев в функции угла поворота φ_2 ведущего звена *2* и задано расстояние AB между осями вращения звеньев *2* и *3* (рис. 19. 2, *а*). Так как угловая скорость ведущего звена $\omega_2 = \omega_2(\varphi_2)$ может быть всегда принята постоянной и равной $\omega_2 = 1$, то функция передаточного отношения $i_{32} = i_{32}(\varphi_2)$, представленная на рис. 19.2, *б*, имеет вид кривой, совпадающей с кривой $\omega_3 = \omega_3(\varphi_2)$.

Если за начальные положения сопряженных центроид принять положения, при которых углы поворота центроид, отсчитываемые

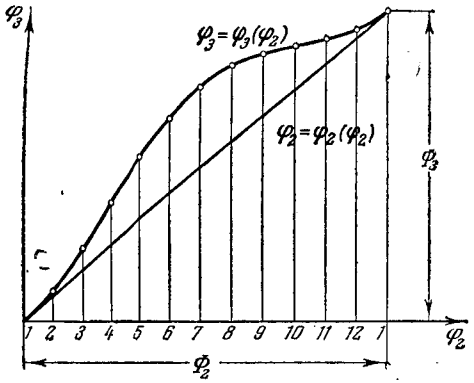


Рис. 19.3. Графики углов поворота звеньев *2* и *3* в функциях угла поворота звена *2*.

от направления AB, равны нулю, то функция положения $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2)$ (рис. 19.2) может быть получена из условия (19.6):

$$\varphi_3 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} i_{32}\, d\varphi_2. \qquad (19.12)$$

Для этого производим графическое интегрирование графика (рис. 19.2, *б*) и получаем функцию положения (рис. 19.3).

Имея функцию передаточного отношения (рис. 19.2, *б*) и функцию положений (рис. 19.3), переходим к графическому по-

строению сопряженных центроид, принадлежащих звеньям *2* и *3*. Пусть угловые скорости ω_2 и ω_3 противоположны по знаку. Тогда положение мгновенных центров вращения (рис. 19.2, *а*) в относительном движении звеньев *2* и *3* будет определяться из условия (19.7):

$$i_{32} = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{AP_0}{BP_0} = \frac{AB - BP_0}{BP_0}. \qquad (19.13)$$

Таким образом, расстояние AB из-за разных знаков угловых скоростей ω_2 и ω_3 должно быть разделено внутренним образом согласно условию (19.13). Полученные из этого условия положения мгновенных центров вращения P_0^{I}, P_0^{II}, P_0^{III}, ... (рис. 19. 2, *а*) образуют геометрическое место точек, называемое *бицентроидой*. Таким образом, *бицентроидой называется геометрическое место мгновенных центров вращения в относительном движении двух звеньев, принадлежащее неподвижной плоскости.* Для построения профилей центроид находим точки, принадлежащие звеньям *2* и *3*, последовательно совпадающие с точками P_0^{I}, P_0^{II}, P_0^{III}, ... бицентроиды. Для этого от направления AB (рис. 19.2, *а*) откладываем углы φ_2 и φ_3. Углы φ_2 поворота центроиды *2* между соседними положениями (рис. 19.3) являются равными. Поэтому из точки A (рис. 19.3, *а*) проводим лучи *A2*, *A3*, ... под равными углами φ_2. Углы φ_3 поворота центроиды *3* между двумя соседними положениями переменные (рис. 19.3). Поэтому из точки B проводим лучи *B2*, *B3*, ... под углами φ_3', φ_3'', φ_3''', полученными из графика рис. 19.3. Из точки A (рис. 19.2, *а*) радиусами AP_0'', AP_0''', ... проводим дуги до пересечения в точках *2″*, *3″*, *4″*, ... с соответственными лучами *A2*, *A3*, *A4*, ... Соединив плавной кривой полученные точки P_0', *2″*, *3″*, ..., получим профиль центроиды $Ц_2$, принадлежащей звену *2*. Точно так же из точки B проводим дуги радиуса BP_0'', BP_0''', ... до пересечения в точках *2‴*, *3‴*, *4‴*, ... с соответственными лучами *B2*, *B3*, *B4*, ... Соединив плавной кривой полученные точки P_0', *2‴*, *3‴*, ..., получим профиль центроиды $Ц_3$, принадлежащей звену *3*. Для возможности передачи непрерывного периодического движения длины профилей центроид должны быть равны и, следовательно, полные углы поворота Φ_2 и Φ_3 (рис. 19.3) сопряженных центроид должны быть равны между собой и за полный цикл движения должны давать угол, равный $\Phi_2 = \Phi_3 = 2\pi$.

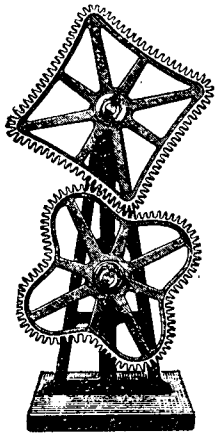


Рис. 19.4. Зубчатый механизм с некруглыми колесами.

Возможны профили центроид с разными углами поворота за полный цикл движения, но при этом углы должны быть

кратны целому числу. Профили центроид должны иметь симметрию, чтобы была обеспечена симметрия в графике кривой (рис. 19.2, *б*), изображающем передаточную функцию. Из изложенного следует, что для случая среднего передаточного отношения, равного $(i_{32})_{ср} = -1$ за один оборот ведущего и ведомого звена, как это имеет место для рассматриваемого механизма (рис. 19.2, *б*), необходимым условием должно быть равенство углов $\Phi_2 = \Phi_3$. Это условие требует, чтобы площади, ограниченные кривыми $\omega_2 = \omega_2(\varphi_2)$ и $\omega_3 = \omega_3(\varphi_2)$ (рис. 19.2, *б*), были бы равны между собой, т. е. чтобы всегда удовлетворялось условие

$$\int_0^{\Phi_3} \omega_2 \, d\varphi_2 = \int_0^{\Phi_2} \omega_3 \, d\varphi_2. \qquad (19.14)$$

Построенные на рис. 19.2, *а* сопряженные центроиды $Ц_2$ и $Ц_3$, практически будут работоспособны, если они будут снабжены зубьями. Такие механизмы носят название некруглых зубчатых колес (рис. 19.4).

§ 87. Некоторые условия, обеспечивающие передачу сил в механизмах

1°. В § 85 было указано, что при проектировании кинематических схем механизмов необходимо учитывать возможность движения проектируемого механизма под действием приложенных к нему сил с возможно большим коэффициентом полезного действия. Выполнение этого условия в значительной мере зависит от выбранных размеров и формы звеньев механизма.

Пусть ведущее звено действует на ведомое звено с некоторой силой $\boldsymbol{P}$, и пусть направление абсолютной скорости точки C ведомого звена, к которой приложена сила $\boldsymbol{P}$, образует с линией действия этой силы некоторый острый угол α. Тогда работа A силы $\boldsymbol{P}$ на некотором пути s будет

$$A = \int_0^s P \cos\alpha \, ds. \qquad (19.15)$$

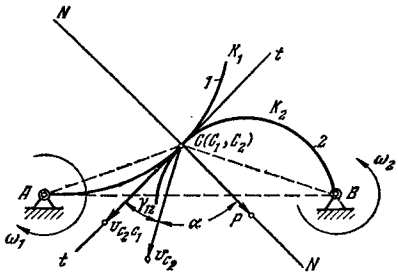


Рис. 19.5. К определению угла передачи в кулачковом механизме.

Из формулы (19.15) следует, что чем меньше угол α, тем больше работа силы $\boldsymbol{P}$. Работа A будет максимальной при $\alpha = 0$. Угол α, образованный направлением действия силы $\boldsymbol{P}$, приложенной к ведомому звену в точке C, и скоростью v_C точки C, называется *углом давления*. Таким образом, чтобы вся работа силы P расходовалась на

движении ведомого звена, нужно обеспечить совпадение направления этой силы с направлением абсолютной скорости той точки ведомого звена, к которой приложена сила $\boldsymbol{P}$. Обычно в механизмах угол давления α не равен нулю, вследствие чего только одна слагающая силы $\boldsymbol{P}$ сообщает движение ведомому звену, другая же вызывает дополнительные вредные сопротивления трения в кинематических парах.

Мало того, при большом угле давления α сопротивления от трения иногда настолько велики, что работа силы $\boldsymbol{P}$ оказывается недостаточной, чтобы привести в движение ведомое звено. Это явление носит название *заклинивания механизма* и наблюдается в неправильно спроектированных механизмах.

Рассмотрим, как изложенные условия могут быть учтены при решении задач синтеза механизмов. Для этого введем понятие о так называемом *угле передачи движения*. Пусть звено *1* (рис. 19.5), входящее в точке C со звеном *2* в высшую пару качения и скольжения, действует на это звено с силой $\boldsymbol{P}$. Пусть, далее, абсолютная скорость точки C звена *2* равна $\boldsymbol{v}_{C_2}$.

В том случае, когда сила трения в высшей паре не учитывается, направление силы $\boldsymbol{P}$ совпадает с направлением нормали $N - N$. Тогда углом давления будет угол между нормалью $N - N$ и направлением скорости $\boldsymbol{v}_{C_2}$. В том случае, когда учитывается трение скольжения звеньев высшей пары, необходимо силу давления (силу реакции) одного звена на другое отклонять от нормали на угол трения.

Проведем касательную $t - t$ к кривым K_1 и K_2 и обозначим угол, образованный касательной $t - t$ с вектором скорости v_{C_2}, через γ_{12}. Угол γ_{12} равен

$$\gamma_{12} = 90^\circ - \alpha. \tag{19.16}$$

Угол γ_{12} называется *углом передачи движения* или, для краткости, *углом передачи*.

Таким образом, угол передачи γ_{12} является углом, добавочным до 90° к углу давления α.

Так как направление касательной $t - t$ совпадает с направлением скорости $\boldsymbol{v}_{C_2C_1}$ точки C_2 звена *2* относительно звена *1*, то угол передачи в высших парах есть угол между направлениями абсолютной и относительной скоростей точки соприкасания ведомого звена. Чем меньше угол γ_{12}, тем больше возможность появления заклинивания.

Условимся угол передачи обозначать двумя индексами, причем первый индекс будет обозначать номер ведущего звена, а второй индекс — номер ведомого звена. Так как на рис. 19.5 ведущим является звено *1*, а ведомым — звено *2*, то угол передачи обозначен через γ_{12}. При ведущем звене *2* и ведомом звене *1* угол передачи будем обозначать через γ_{21}.

2°. При синтезе механизмов с парой качения и скольжения необходимо учитывать также и те потери на трение скольжения, которые будут иметь место за счет скольжения взаимоогибаемых кривых друг по другу.

Так как мощность, расходуемая на трение, пропорциональна относительной скорости движения взаимоогибаемых кривых, то чем больше эта скорость, тем больше потери на трение. Пусть, например, передача движения между звеньями *1* и *2* осуществляется

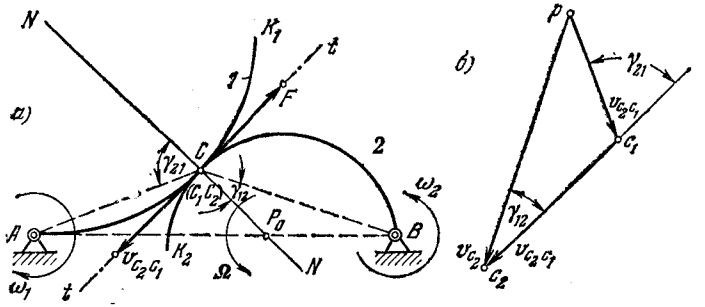


Рис. 19.6. К определению потерь на трение: *а*) схема механизма; *б*) план скоростей.

посредством взаимоогибаемых кривых K_1 и K_2 (рис. 19.6, *а*), соприкасающихся в точке C (C_1, C_2). Мощность $N_т$, расходуемая на трение скольжения этих кривых, равна

$$N_т = Fv_{C_2C_1}, \tag{19.17}$$

где F — сила трения и $v_{C_2C_1}$ — величина скорости точки C_2 кривой K_2 относительно точки C_1 кривой K_1.

Величина силы трения F равна

$$F = fP, \tag{19.18}$$

где P — реакция в точке C, направленная по нормали N — N, и f — коэффициент трения скольжения.

Далее имеем:

$$v_{C_2C_1} = \Omega\,(P_0C), \tag{19.19}$$

где Ω — мгновенная угловая скорость движения звена *2* относительно звена *1* или наоборот.

Угловая скорость Ω, согласно формуле (19.8), равна

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2, \tag{19.20}$$

следовательно,

$$v_{C_2C_1} = (\omega_1 + \omega_2)\,(P_0C). \tag{19.21}$$

Подставляя выражения (19.18) и (19.21) в равенство (19.17), получаем

$$N_т = fP(\omega_1 + \omega_2)(P_0C). \qquad (19.22)$$

Из равенства (19.22) следует, что мощность зависит от расстояния точки соприкасания C кривых K_1 и K_2 до мгновенного центра вращения P_0 в относительном движении и тем больше, чем больше расстояние P_0C.

3°. В механизмах с низшими парами угол передачи определяется из аналогичных соображений.

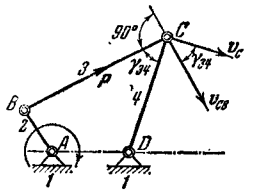


Рис. 19.7. К определению угла передачи в механизме шарнирного четырехзвенника.

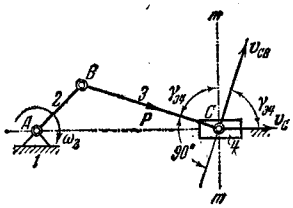


Рис. 19.8. К определению угла передачи в кривошипно-ползунном механизме.

Например, в механизме шарнирного четырехзвенника (рис. 19.7) для ведомого звена *4* угол передачи γ_{34} равен углу между векторами скоростей $\boldsymbol{v}_C$ и $\boldsymbol{v}_{CB}$.

На рис. 19.8 показан угол передачи γ_{34} для ведомого ползуна *4* кривошипно-ползунного механизма. Угол γ_{34} образован в этом механизме прямой BC и перпендикуляром $m - m$ к оси движения ползуна *4*. В рассмотренных механизмах мы полагаем силу $\boldsymbol{P}$ действия звена *3* на звено *4* направленной по оси звена BC.

ГЛАВА XX

СИНТЕЗ ТРЕХЗВЕННЫХ ПЛОСКИХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ С КРУГЛЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КОЛЕСАМИ

§ 88. Основные сведения из теории зацеплений

1°. Пусть передача вращения между двумя осями O_1 и O_2 (рис. 20.1, *а*) с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ осуществляется посредством двух взаимоогибаемых кривых K_1 и K_2, принадлежащих звеньям *1* и *2*. Проведем в точке соприкосновения C кривых K_1 и K_2 нормаль $n - n$ и касательную $t - t$ к этим кривым.

Скорости $\boldsymbol{v}_{C_1}$ и $\boldsymbol{v}_{C_2}$ точек C_1 и C_2, принадлежащих звеньям *1* и *2*, связаны условием

$$\boldsymbol{v}_{C_2} = \boldsymbol{v}_{C_1} + \boldsymbol{v}_{C_2C_1}.$$

План скоростей механизма, построенный по этому уравнению, показан на рис. 20,1, *б*.

Из точек O_1 и O_2 (рис. 20.1, *а*) опускаем на нормаль $n-n$ перпендикуляры O_1A и O_2B, а из полюса плана скоростей (рис. 20.1, *б*)— перпендикуляр pc_0 на направление $t'-t'$.

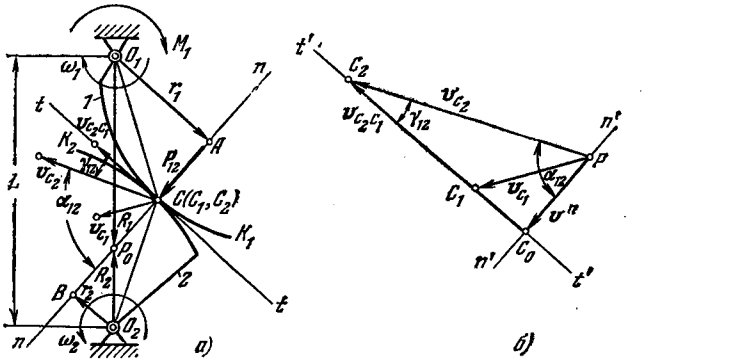


Рис. 20.1. К определению форм профилей двух взаимоогибаемых кривых: *а*) схема механизма с высшей парой; *б*) план скоростей.

Отрезок (pc_0) представляет собою нормальную составляющую v^n векторов скоростей v_{C_1} и v_{C_2}.

Из подобия треугольников O_1AC_1 и pc_0c_1 и треугольников O_2BC_2 и pc_0c_2 имеем

$$\frac{pc_0}{pc_1}=\frac{O_1A}{O_1C_1} \quad \text{и} \quad \frac{pc_0}{pc_2}=\frac{O_2B}{O_2C_2}. \tag{20.1}$$

Отрезки (pc_1), (pc_2) и (pc_0) представляют собой соответственно скорости v_{C_1}, v_{C_2} и v^n. Тогда соотношения (20.1) могут быть представлены так:

$$\frac{v^n}{v_{C_1}}=\frac{O_1A}{O_1C_1} \quad \text{и} \quad \frac{v^n}{v_{C_2}}=\frac{O_2B}{O_2C_2},$$

или

$$v^n=v_{C_1}\frac{O_1A}{O_1C_1} \quad \text{и} \quad v^n=v_{C_2}\frac{O_2B}{O_2C_2}.$$

Заменяя v_{C_1} и v_{C_2} их значениями, равными

$$v_{C_1}=\omega_1(O_1C_1) \quad \text{и} \quad v_{C_2}=\omega_2(O_2C_2),$$

получаем

$$v^n=\omega_1(O_1A) \quad \text{и} \quad v^n=\omega_2(O_2B),$$

откуда

$$\omega_1(O_1A)=\omega_2(O_2B). \tag{20.2}$$

Следовательно, передаточная функция i_{12} равна

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{O_2B}{O_1A}=\frac{r_2}{r_1}. \qquad (20.3)$$

Продолжим нормаль $n-n$ до пересечения в точке P_0 с отрезком (O_1O_2). Тогда из подобия треугольников O_1AP_0 и O_2BP_0 имеем

$$\frac{O_2B}{O_1A}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{O_2P_0}{O_1P_0},$$

и формула (20.3) принимает окончательный вид:

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{O_2P_0}{O_1P_0}=\frac{R_2}{R_1}. \qquad (20.4)$$

Равенство (20.4) называется *основной теоремой зацепления*. Эта теорема может быть сформулирована так:

Нормаль в точке соприкасания элементов высшей пары качения и скольжения делит линию центров на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Точка P_0, делящая линию центров O_1O_2 на части, обратно пропорциональные угловым скоростям, является мгновенным центром вращения в относительном движении звеньев *1* и *2*, а R_1 и R_2 являются радиусами-векторами центроид в относительном движении звеньев *1* и *2*.

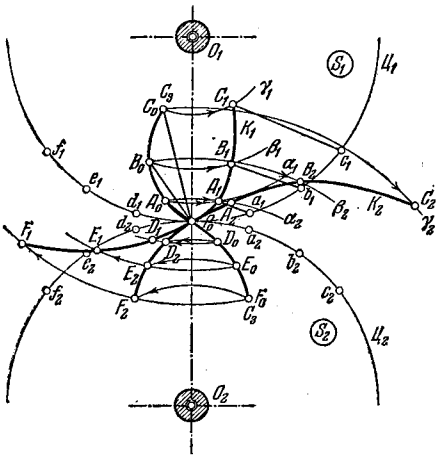


Рис. 20.2. Построение профилей взаимоогибаемых кривых по заданной линии зацепления.

Расстояние L между точками O_1 и O_2 равно

$$L=R_1+R_2. \qquad (20.5)$$

Из равенств (20.4) и (20.5) следует, что радиусы R_1 и R_2 центроид равны

$$R_1=L\frac{1}{1+i_{12}},$$

$$R_2=L\frac{i_{12}}{1+i_{12}}. \qquad (20.6)$$

Точка P_0, являющаяся мгновенным центром вращения в относительном движении, называется в теории зацеплений *полюсом зацепления*. При переменном значении передаточной функции i_{12} полюс зацепления P_0 занимает на линии центров O_1O_2 переменные положения. При постоянном значении i_{12} полюс зацепления располагается в одной и той же точке на прямой O_1O_2.

Если угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют разные знаки (см. рис. 20.1, *а*), то $i_{12}<0$ и полюс зацепления P_0 лежит между точками O_1 и O_2. Этот вид зацепления называется *внешним*.

Если угловые скорости ω_1 и ω_2 имеют один и тот же знак и полюс зацепления P_0 лежит вне отрезка O_1O_2, то $i_{12} > 0$. Такой вид зацепления называется *внутренним*.

2°. Если при передаче вращения между осями O_1 и O_2(рис. 20.2) передаточная функция i_{12} постоянна, $i_{12} = \text{const}$, то полюс зацепления P_0 занимает постоянное положение, удовлетворяющее условию

$$i_{12} = \frac{O_2P_0}{O_1P_0} = \frac{R_2}{R_1}, \tag{20.7}$$

где R_1 и R_2 определяются из формул (20.6). Центроидами звеньев *1* и *2* являются окружности $Ц_1$ и $Ц_2$ с радиусами R_1 и R_2. Рассмотрим вопрос о том, как могут быть построены сопряженные профили K_1 и K_2, принадлежащие звеньям *1* и *2*, если задана линия зацепления $C_3 - C_3$ (рис. 20.2). Находим точки a_1, b_1, c_1, ... и a_2, b_2, c_2, ... последовательного соприкасания центроид, для чего откладываем на центроидах $Ц_1$ и $Ц_2$ дуги

$$\cup P_0a_1 = \cup P_0a_2, \qquad \cup a_1b_1 = \cup a_2b_2, \qquad \cup b_1c_1 = \cup b_2c_2.$$

Пусть указанным точкам соприкасания центроид соответствуют на линии зацепления $C_3 - C_3$ точки A_0, B_0, C_0, ... Например,

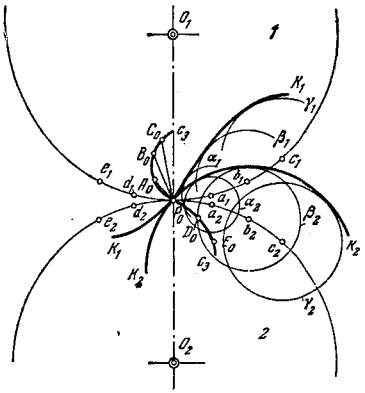


Рис. 20.3. Построение профилей взаимоогибаемых кривых приближенным способом.

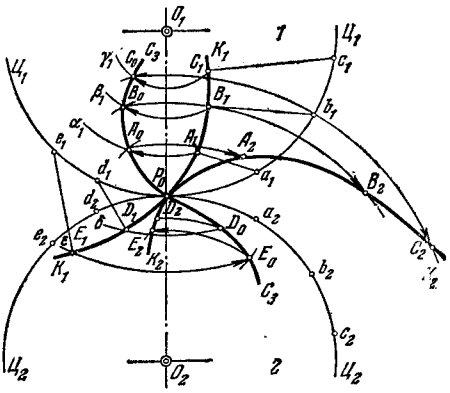


Рис. 20.4. Построение по заданным центроидам кривой, сопряженной с заданной кривой.

когда совместятся точки a_1 и a_2 центроид, то сопряженные профили K_1 и K_2 взаимоогибаемых кривых должны соприкасаться в точке A_0; когда совместятся точки b_1 и b_2 центроид, то сопряженные профили должны соприкасаться в точке B_0 и т. д.

Чтобы найти точки профилей, соприкасающихся в точке A_0, соединим точку A_0 с точкой P_0. Когда точки a_1 и a_2 центроид совпадут, их расстояние до точки A_0 линии зацепления будет равно

P_0A_0. Точка A_1, принадлежащая звену *1* и совмещающаяся в точке A_0 с соответствующей точкой A_2 звена *2*, должна лежать на окружности $A_0\alpha_1$, проведенной из точки O_1 радиусом O_1A_0. Соответственно точка A_2, принадлежащая звену *2*, должна лежать на окружности $A_0\alpha_2$, проведенной из точки O_2 радиусом O_2A_0. Проводим окружности $A_0\alpha_1$ и $A_0\alpha_2$. Положение точек A_1 и A_2 на этих окружностях найдем, если из точек a_1 и a_2 сделаем на них засечки радиусами, равными отрезку P_0A_0. Аналогично для нахождения точек профилей, совмещающихся в точке B_0, соединяем точку B_0 с точкой P_0 и радиусом P_0B_0 делаем засечки из точек b_1 и b_2 на окружностях $B_0\beta_1$ и $B_0\beta_2$. Тогда определятся точки B_1 и B_2 профилей K_1 и K_2, принадлежащие звеньям *1* и *2*.

Аналогичными построениями находим точки C_1, D_1, E_1, ... и C_2, D_2, E_2, ... сопряженных профилей. Соединив полученные точки плавными кривыми K_1 и K_2, получим сопряженные профили, принадлежащие звеньям *1* и *2*. Таким образом, зная центроиды и точки линий зацепления, можно построить по точкам сопряженные профили.

Указанное построение может быть сделано приближенно следующим образом. Проводим из точек a_1, b_1, c_1, ... (рис. 20.3) несколько окружностей α_1, β_1, γ_1, ... радиусами, равными P_0A, P_0B, ... Огибающая всех проведенных окружностей и есть кривая профиля K_1. Аналогично, если из точек a_2, b_2, c_2, ... провести ряд окружностей α_2, β_2, γ_2, ... теми же радиусами, то огибающая окружностей α_2, β_2, γ_2, ... является кривой профиля K_2.

3°. Рассмотрим, далее, следующую задачу: построить кривую K_2, принадлежащую звену *2*, если заданы центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ в виде двух окружностей и кривая K_1, принадлежащая звену *1* (рис. 20.4). Эта задача может быть решена с помощью построения линии зацепления $C_3 - C_3$. Для этого воспользуемся условием, что нормаль в точке соприкосновения сопряженных профилей проходит через мгновенный центр вращения P_0 в их относительном движении. Принимая во внимание, что центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ представляют собой окружности, нормаль, проведенная к сопряженным профилям в точке их соприкосновения, должна проходить через одну и ту же точку P_0. Отмечаем на заданной кривой K_1 несколько точек A_1, B_1, C_1, ... В этих точках проводим к этой кривой нормали A_1a_1, B_1b_1, C_1c_1, ... до пересечения в точках a_1, b_1, c_1, ... с центроидой $Ц_1$. При вращении звена *1* точка A_1 кривой K_1 описывает дугу окружности $A_1\alpha_1$ радиуса O_1A_1, и в тот момент, когда точка a_1 центроиды совпадает с точкой P_0, точка A_1 будет находиться от точки P_0 на расстоянии $P_0A_0 = A_1a_1$. Из точки P_0 проводим дугу радиусом A_1a_1, до пересечения в точке A_0 с дугой $A_1\alpha_1$.

Точка A_0 является той точкой линии зацепления, в которой происходит зацепление точки A_1 кривой K_1 с соответствующей точкой A_2 кривой K_2. Точка B_0 линии зацепления определится, если на

дуге $B_1\beta_1$ из точки P_0 сделать засечку радиусом P_0B_0, равным отрезку B_1b_1 нормали, проведенной к кривой K_1 в точке B_1. Аналогично определятся и остальные точки C_0, D_0, E_0, ... линии зацепления $C_3 - C_3$. Соединив точки A_0, B_0, C_0, ... плавной кривой, получим линию зацепления $C_3 - C_3$.

Построение сопряженной кривой K_2 может быть проведено так, как это было сделано в примере на рис. 20.2.

Отметим (рис. 20.4), что при рассмотренном построении сопряженных профилей K_1 и K_2 дуги P_0a_1, a_1b_1, b_1c_1, ... центроиды $Ц_1$ должны быть соответственно равны дугам P_0a_2, a_2b_2, b_2c_2, ... центроиды $Ц_2$, но между собой эти дуги могут быть и не равны.

§ 89. Геометрические элементы зубчатых колес

1°. Как было показано в § 88, для построения сопряженных профилей (*профилирования*) зубьев необходимо иметь заданными центроиды в относительном движении проектируемых колес. Тогда профили зубьев, являющиеся взаимоогибаемыми кривыми, могут быть построены точно или приближенно методами, изложенными выше, если будут заданы либо точки линии зацепления, либо очертание одного из сопряженных профилей. Какими же соображениями необходимо руководствоваться при выборе этих данных?

При выборе заданий для профилирования зубьев на практике приходится руководствоваться соображениями кинематического, динамического, технологического, и, наконец, эксплуатационного характера.

Соображения кинематического характера заключаются в основном в требовании, чтобы профили сопряженных зубьев могли быть построены достаточно простыми геометрическими приемами и удовлетворяли заданной передаточной функции.

Соображения динамического характера заключаются во многих требованиях, из которых можно упомянуть следующие: необходимо стремиться к тому, чтобы при постоянной мощности, передаваемой зубчатым механизмом, давления на зубья и опоры механизма были постоянными по величине и направлению, далее, чтобы зубья имели форму, обеспечивающую наибольшую их прочность, и, наконец, износ зубьев должен быть минимальным.

Требования технологического характера в основном заключаются в проектировании профилей, которые могли бы быть достаточно просто изготовлены на современных станках.

Требования эксплуатационного характера заключаются в проектировании таких профилей, которые обеспечивали бы долговечность работы механизма, безударность и бесшумность его работы и легкость монтажа механизма. Наконец, важным является требование, чтобы в случае износа одного или двух сопряженных колес их можно было легко заменить новыми. Это условие обычно носит

название *условия взаимозаменяемости* зубчатых колес. При массовом выпуске машин взаимозаменяемость зубчатых колес достигается установлением определенных норм на размеры колес.

Поэтому, хотя теоретически можно построить зубчатый механизм с самыми различными профилями зубьев, практически выбор очертания профилей в значительной степени стеснен вышепоставленными требованиями. Вследствие этого в машиностроении обычно пользуются только несколькими видами кривых в качестве профилей зубьев. Из этих кривых мы остановимся на рассмотрении так называемой *эвольвенты круга*, являющейся основным типом кривых, по которым очерчиваются профили зубьев современных зубчатых механизмов, и на некоторых видах *циклоидальных кривых*.

2°. Прежде чем переходить к теории профилирования эвольвентных профилей, условимся об основных терминах, определениях

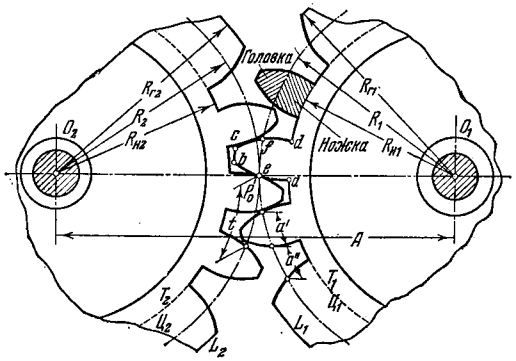


Рис. 20.5. Схема внешнего зубчатого зацепления.

и обозначениях. Центроиды круглых зубчатых колес $Ц_1$ и $Ц_2$ (рис. 20.5) называются *начальными окружностями*. Профиль каждого зуба имеет часть *ebcf*, выступающую за начальную окружность и называемую *головкой зуба*, и часть *aefd*, находящуюся внутри начальной окружности и называемую *ножкой зуба*.

Так как размеры зубьев колеса одинаковы, то все головки зубьев внешнего зацепления ограничиваются снаружи *окружностями головок* радиусов $R_{г1}$ и $R_{г2}$, а все ножки зубьев ограничиваются изнутри *окружностями ножек* радиусов $R_{н1}$ и $R_{н2}$. В случае внутреннего зацепления зубья колеса с внутренним расположением зубьев ограничиваются снаружи окружностью ножек и изнутри окружностью головок. Расстояние между окружностью головок и начальной окружностью, измеренное по радиусу, носит название *высоты головки зуба* и обозначается через h' (рис. 20.6). Расстояние между окружностью ножек и начальной окружностью, измеренное по радиусу, носит название *высоты ножки зуба* и обозначается через h''. Таким образом, полная высота h зуба равна $h = h' + h''$.

Дуга начальной окружности, вмещающая один зуб (без впадины), носит название *толщины зуба* и обозначается через a' (рис. 20.6). Дуга начальной окружности, вмещающая впадину (расстояние между двумя соседними зубьями), называется *шириной впадины* и обозначается через a''. Дуга начальной окружности, состоящая из одной толщины зуба и одной ширины впадины, называется *шагом зацепления* по начальной окружности и обозначается через $t_н$. Таким образом, шаг зацепления $t_н$ равен

$$t_н = a' + a''.$$

При передаче непрерывного движения двумя сопряженными колесами шаг зацепления бывает одинаков для обоих сопряженных колес. Как было показано выше (см. § 31, *1°*, формула (7.25)), передаточная функция i_{12} равна

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{R_2}{R_1} = \pm\frac{z_2}{z_1},$$

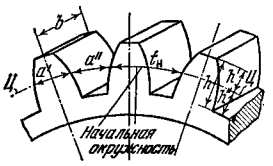


Рис. 20.6. Часть обода зубчатого колеса с внешними зубьями.

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости колес *1* и *2*, R_1 и R_2 — радиусы начальных окружностей этих колес и z_1 и z_2 — числа их зубьев. Знак плюс соответствует внутреннему зацеплению, а знак минус — внешнему зацеплению.

Длины начальных окружностей колес *1* и *2* равны

$$2\pi R_1 = z_1 t_н \quad \text{и} \quad 2\pi R_2 = z_2 t_н. \tag{20.8}$$

Из формул (20.8) следует, что шаг зацепления $t_н$ по начальной окружности равен

$$t_н = \frac{2\pi R_1}{z_1} = \frac{2\pi R_2}{z_2}.$$

Аналогично можно вычислить шаг по любой другой окружности.

Отсюда видно, что шаг зацепления всегда выражается через радиус или через диаметр окружности несоизмеримым числом, так как в правую часть входит трансцендентное число π. Это затрудняет подбор размеров зубчатых колес при проектировании колес и практическое их измерение. Поэтому для определения основных размеров зубчатых колес в качестве основной единицы принят некоторый параметр, называемый *модулем зацепления*. Модуль зацепления измеряется в миллиметрах и обозначается буквой m. Величина модуля равна

$$m = \frac{t}{\pi}.$$

Зубья колес нарезаются на специальных станках режущим инструментом, размеры и форма которого зависят от величины модуля. Чтобы не иметь на машиностроительных заводах, изготовляющих

зубчатые колеса, большие комплекты режущих инструментов, общесоюзным стандартом (ГОСТ 9563-61) установлены два ряда модулей, до которых должны округляться модули, получаемые из расчета.

В первом, предпочтительном ряду предусмотрены следующие модули в *мм*: 0; 0,05; 0,06; 0,08; 0,1; 0,12; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,8; 1,0; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 8; 10; 12; 15; 20; 25; 32; 40; 50; 60; 80; 100.

Во втором ряду предусмотрены модули, промежуточные между модулями первого ряда, например: 3,5; 4,5; 5,5; 7; 9; 11 и др.

Окружность зубчатого колеса, для которой модуль получается стандартным, называется *делительной*. Делительные окружности в зацеплении двух колес иногда совпадают с соответствующими начальными окружностями.

3°. Определим основные размеры зубчатых колес, у которых делительные окружности совпадают с начальными; такие колеса будем называть *коромысловыми*. Эти размеры могут быть всегда выражены в функциях модуля по делительной окружности и числа зубьев. Согласно формуле (20.8) диаметры D_1 и D_2 начальных окружностей могут быть представлены в следующем виде:

$$D_1 = 2R_1 = \frac{t}{\pi} z_1 = mz_1, \tag{20.9}$$

$$D_2 = 2R_2 = \frac{t}{\pi} z_2 = mz_2, \tag{20.10}$$

где z_1 и z_2 — соответственно числа зубьев колес *1* и *2*. Высота h' головки зуба и высота h'' ножки зуба обычно принимаются равными $h' = m$ и $h'' = 1{,}25\ m$. Больший размер ножки по сравнению с головкой обеспечивает зазор между головкой зуба и впадиной. Тогда диаметры $D_{г1}$ и $D_{г2}$ окружностей $L_{г1}$ и $L_{г2}$ головок (рис. 20.5) зубьев будут равны

$$D_{г1} = D_1 + 2h' = mz_1 + 2m = m(z_1 + 2), \tag{20.11}$$

$$D_{г2} = D_2 + 2h' = mz_2 + 2m = m(z_2 + 2). \tag{20.12}$$

Диаметры $D_{н1}$ и $D_{н2}$ окружностей ножек T_1 и T_2 (рис. 20.5) соответственно будут равны

$$D_{н1} = D_1 - 2h'' = mz_1 - 2{,}5m = m(z_1 - 2{,}5), \tag{20.13}$$

$$D_{н2} = D_2 - 2h'' = mz_2 - 2{,}5m = m(z_2 - 2{,}5). \tag{20.14}$$

Кроме колес с указанной выше высотой зуба применяются колеса с укороченными зубьями. Для колес с укороченной высотой зубьев эти диаметры принимаются равными

$$D_{г1} = m(z_1 + 1{,}6), \quad D_{г2} = m(z_2 + 1{,}6),$$

$$D_{н1} = m(z_1 - 2{,}2), \quad D_{н2} = m(z_2 - 2{,}2).$$

Расстояние A между центрами O_1 и O_2 колес (рис. 20.5) может также быть выражено через число зубьев и модуль зацепления:

$$A = \frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2} = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2). \qquad (20.15)$$

В расчетах, связанных с проектированием зубчатых колес, часто пользуются относительными величинами. В частности, высота h' головки зуба часто выражается через модуль m, помноженный на некоторый коэффициент χ':

$$h' = \chi' m. \qquad (20.16)$$

Точно так же высота h'' ножки зуба может быть представлена формулой

$$h'' = \chi'' m. \qquad (20.17)$$

Величина χ' обычно принимается равной $\chi' = 1$ для колес с неукороченной высотой зубьев и $\chi' = 0{,}8$ для колес с укороченной высотой зубьев. Соответственно χ'' принимается равной $\chi'' = 1{,}25$ и $\chi'' = 1{,}1$; поэтому в общем виде формулы (20.11) — (20.14) имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned} D_{г1} &= m(z_1 + 2\chi'), & D_{г2} &= m(z_2 + 2\chi'), \\ D_{н1} &= m(z_1 - 2\chi''), & D_{н2} &= m(z_2 - 2\chi''). \end{aligned}\right\} \qquad (20.18)$$

§ 90. Геометрия эвольвентных профилей

1°. Остановимся на вопросе о том, что представляет собой эвольвента круга и какими важными для теории зацепления свойствами она обладает. Пусть задана окружность с центром в точке O (рис. 20.7). Проведем прямую AB, касательную к этой окружности, и будем катить эту прямую без скольжения по окружности. Для построения эвольвенты круга делим окружность на равные дуги: $\cup A - 1'$, $\cup 1' - 2'$, $\cup 2' - 3'$, $\cup 3' - 4'$, ... На прямой откладываем от точки A участки, равные этим дугам, так, чтобы выполнялись следующие условия: $\cup A - 1' = A - 1$, $\cup 1' - 2' = 1 - 2$, $\cup 2' - 3' = 2 - 3$, ..., $\cup 15' - 16' = 15 - 16$.

Тогда при качении прямой AB без скольжения по окружности точки $1, 2, 3, \ldots, 16$ прямой AB будут последовательно совпадать с точками $1', 2', 3', \ldots, 16'$ окружности. При этом все точки прямой будут описывать кривые, которые носят название *эвольвент круга*. На рис. 20.7 показаны эвольвенты, описанные точками B и C. Из чертежа непосредственно следует, что все точки эвольвенты, описанной точкой B, отстоят на одном и том же расстоянии BC от точек эвольвенты, описанной точкой C. Точки A, $1'$, $2'$, $3'$, ..., $16'$ при качении прямой по окружности будут мгновенными центрами

вращения прямой AB, сама же прямая будет в каждом своем положении нормальна к образуемой ею эвольвенте в соответствующей точке. Окружность, по которой катится прямая AB, является *эволютой* — геометрическим местом центров кривизны эвольвент, описываемых точками прямой AB. Таким образом, центрами кривизны эвольвенты являются точки A, $1'$, $2'$, $3'$, ..., $16'$.

2°. Зависимости отдельных параметров эвольвенты круга между собой особенно ясны, если мы рассмотрим уравнение эвольвенты. Пусть задана окружность радиуса r и прямая $t-t$, касательная

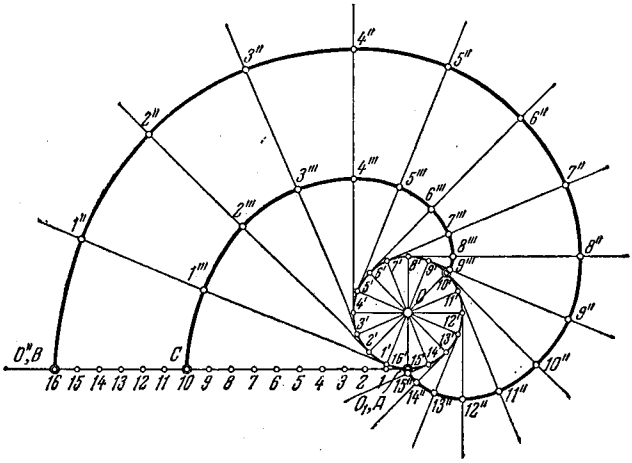


Рис. 20.7. Эвольвенты круга.

к окружности в точке M_0 (рис. 20.8). При качении прямой $t-t$ по окружности точка прямой M_t описывает эвольвенту $M_0Э$. Для точки M эвольвенты имеем

$$\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AM}.$$

Модуль вектора $\overline{OM}$ равен

$$|\overline{OM}|=\sqrt{r^2+\rho^2}=l. \tag{20.19}$$

Модуль вектора $\overline{AM}$ представляет собой радиус кривизны $|\rho|$ эвольвенты в точке M. Из уравнения (20.19) получаем величину

$$\rho=\sqrt{l^2-r^2}. \tag{20.20}$$

Из рис. 20.8 следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\rho}{r}=\frac{\sqrt{l^2-r^2}}{r} \quad \text{и} \quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{l^2-r^2}}{r}. \tag{20.21}$$

Из свойств эвольвенты следует, что отрезок AM равняется дуге M_0A, т. е. $\rho = \cup AM_0$. В свою очередь дуга $\cup AM_0$ (рис. 20.8) равна $\cup AM_0 = r\theta$, откуда

$$\rho = r\theta.$$

Подставляя только что полученное нами выражение для ρ в равенство (20.21), получаем

$$\theta = \operatorname{tg}\alpha \tag{20.22}$$

или, принимая во внимание формулы (20.21), имеем

$$\theta = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{r}.$$

Высота y эвольвенты над окружностью, измеренная на продолжении радиуса окружности, определяется из равенства

$$(y + r)\cos\alpha = r,$$

откуда

$$y = \frac{r}{\cos\alpha}(1 - \cos\alpha).$$

Наконец, угол ϑ, определяющий направление радиуса-вектора $\overline{OM}$ любой точки M эвольвенты, равен

$$\vartheta = \theta - \alpha,$$

откуда, принимая во внимание равенство (20.22), имеем

$$\vartheta = \operatorname{tg}\alpha - \alpha. \tag{20.23}$$

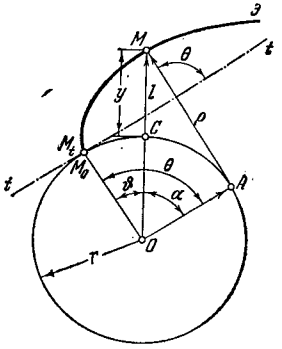


Рис. 20.8. К выводу уравнения эвольвенты.

Полученная функция угла α называется *эвольвентной функцией* и обозначается сокращенно inv (*инволюта*). Имеем

$$\vartheta = \operatorname{inv}\alpha. \tag{20.24}$$

Полученной функцией пользуются для аналитического определения направления радиуса-вектора OM. Для удобства вычислений составляются таблицы invα для различных значений угла α [1]).

3°. Профили зубьев круглых колес, построенные по эвольвентам, всегда обеспечивают передачу движения с постоянным передаточным отношением. Для доказательства покажем, что нормаль к сопряженным профилям, построенным по эвольвентам, всегда проходит через мгновенный центр вращения P_0 в относительном

[1]) См. Артоболевский И. И., Эдельштейн Б. В., Сборник задач по теории механизмов и машин, изд-во «Наука», Москва, 1973.

движении, занимающий постоянное положение на прямой O_1O_2 (рис. 20.9).

Пусть заданы центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ (рис. 20.9). Через мгновенный центр вращения P_0 проводим прямую $N — N$ под произвольно выбранным углом α к касательной $t — t$. Далее, из точек O_1 и O_2 опускаем на прямую $N — N$ перпендикуляры O_1A и O_2B и проводим радиусами $O_1A = r_1$ и $O_2B = r_2$ окружности. Эти окружности примем за эволюты — геометрические места центров кривизны эвольвент. Указанные окружности носят название *основных окружностей*. Прямая $N — N$, являющаяся по построению общей касательной к этим окружностям, называется *образующей прямой*. Мгновенный центр P_0 является *полюсом зацепления*, а угол α — *углом зацепления*. Эвольвенты могут быть получены качением образующей прямой $N — N$ по основным окружностям. Для этого, как было показано на рис. 20.7, делим образующую прямую AB на равные отрезки и откладываем на основных окружностях дуги, равные этим отрезкам. Тогда точка образующей прямой, совпадающая с центром P_0, описывает при качении по основной окружности колеса *1* эвольвенту $P_0Э_1$. При качении той же прямой по основной окружности колеса *2* та же точка опишет эвольвенту $P_0Э_2$. Эвольвенты $P_0Э_1$ и $P_0Э_2$ имеют крайние точки *1′* и *1″*, лежащие на основных окружностях. В противоположном направлении эвольвенты могут быть продолжены безгранично. Если продолжать катить образующие прямые за точки *1′* и *1″*, то мы получим симметрично расположенные ветви эвольвент.

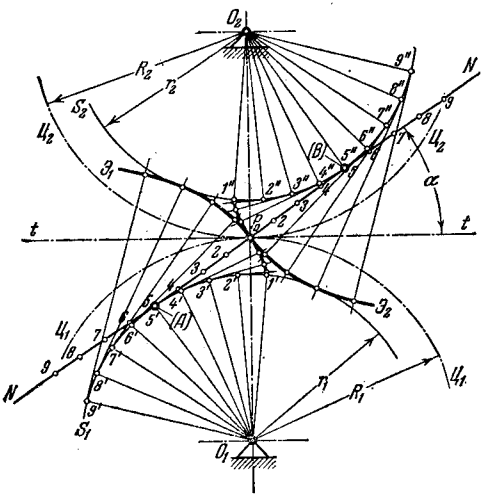


Рис. 20.9. Схема зацепления двух эвольвентных профилей.

4°. Можно доказать, что если указанным способом построены эвольвенты, то общая нормаль в любой точке соприкасания профилей всегда будет проходить через полюс зацепления P_0.

Пусть заданы центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ (рис. 20.10) и угол α наклона образующей прямой $N — N$ к касательной $t — t$. Строим основные окружности S_1 и S_2 и эвольвенты $Э_1$ и $Э_2$.

В показанном на рис. 20.10 исходном положении двух эвольвент $Э_1$ и $Э_2$ их общая нормаль $N — N$ проходит через полюс за-

цепления P_0 и одновременно касается основных окружностей S_1 и S_2. Представим себе, что колеса повернулись и эвольвенты заняли новое положение. Нормаль к эвольвенте $Э_1$ в этом положении должна быть касательной к основной окружности S_1, нормаль к эвольвенте $Э_2$ должна касаться основной окружности S_2. Так как в точке касания эвольвент нормаль должна быть общая, то она должна одновременно касаться и той и другой основной окружности, и, таким образом, при вращении колес их общая нормаль не меняет своего положения и все время проходит через полюс зацепления P_0. Следовательно, передаточная функция i_{12} от колеса *1* к колесу *2*, равная

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{O_2P_0}{O_1P_0},$$

при вращении колес остается постоянной.

Таким образом, *эвольвентное зацепление обеспечивает постоянство передаточной функции (передаточного отношения)*.

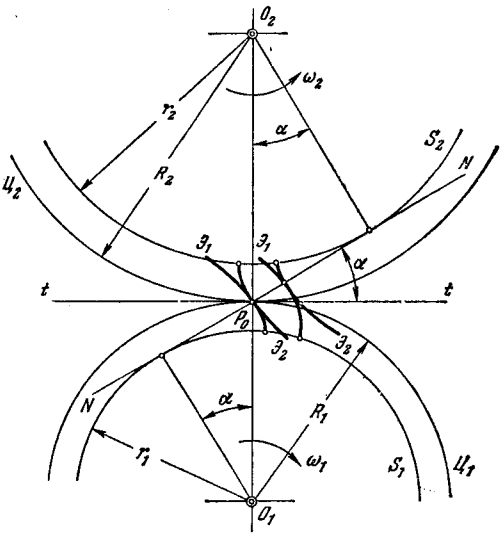


Рис. 20.10. Зацепление эвольвент в двух положениях касания.

5°. Между радиусами r_1, R_1 и r_2, R_2 основных и начальных окружностей (рис. 20.10) существует простая зависимость:

$$r_1 = R_1 \cos\alpha, \qquad r_2 = R_2 \cos\alpha, \tag{20.25}$$

откуда в случае внешнего зацепления имеем

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}, \tag{20.26}$$

где ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны сопряженных эвольвент $Э_1$ и $Э_2$.

Таким образом, передаточное отношение i_{12} не зависит от угла зацепления α, а только от радиусов основных окружностей.

Из условия (20.26) следует, что при изменении расстояния O_1O_2 (рис. 20.11) между осями колес с эвольвентным профилем зубьев передаточное отношение i_{12} не изменяется, если при этом сохранены радиусы основных окружностей. Отступление от расчетного расстояния O_1O_2 может иметь место при монтаже и сборке

механизма. На рис. 20.11 показаны два колеса с центрами в точках O_1 и O_2, находящиеся в зацеплении. Пусть центр O_2 переместится в положение O_2'. Тогда прямая $N-N$ займет положение $N'-N'$. Полюс зацепления будет не в точке P_0, а в точке P_0'. Тем самым изменятся радиусы начальных окружностей. Вместо радиусов R_1 и R_2 будем иметь соответственно R_1' и R_2'.

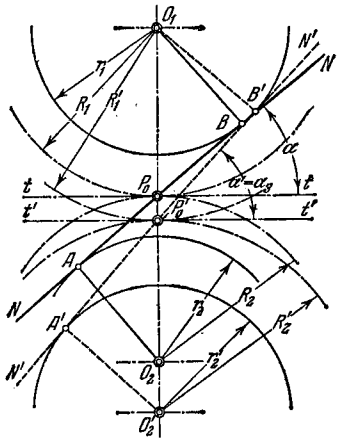


Рис. 20.11. К вопросу об изменении межцентрового расстояния двух колес с эвольвентным зацеплением.

Наконец, изменится и угол зацепления α, который примет значение α'. Передаточное же отношение i_{12} окажется по-прежнему равно

$$i_{12}=-\frac{r_2}{r_1},$$

так как радиусы r_1 и r_2 основных окружностей не изменились.

Из указанного свойства колес с эвольвентными профилями зубьев следует, что угол зацепления α определяется только после сборки и монтажа сопряженных колес. Поэтому различают расчетный угол зацепления α и угол α', который называют *монтажным углом зацепления* и обозначают $\alpha_э$.

§ 91. Проектирование эвольвентных профилей

1°. Вопрос о построении эвольвентных профилей зубьев начнем с рассмотрения внешнего зацепления. Определим радиусы R_1 и R_2 начальных окружностей по заданному передаточному отношению i_{12} и расстоянию A между центрами колес из следующих соотношений:

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{R_2}{R_1}=-\frac{z_2}{z_1},\qquad A=R_1+R_2,$$

где z_1 и z_2 — числа зубьев колес. Рассмотрим нормальные колеса, когда $A=\frac{m}{2}(z_1+z_2)$ (см. формулу (20.15), § 89, *3°*). Пусть $Ц_1$ и $Ц_2$ на рис. 20.12 суть начальные окружности. В полюсе зацепления P_0 проводим касательную $t-t$ к этим окружностям. Далее, проводим образующую прямую $N-N$ под углом зацепления α к касательной $t-t$. В стандартных колесах угол зацепления α обычно принимается $\alpha=20°$. Все соотношения размеров зубьев принимаем в соответствии с § 89. Опускаем из точек O_1 и O_2 перпендикуляры O_1A и O_2B на образующую прямую $N-N$. Обозначая длины этих перпендикуляров через r_1 и r_2, получаем, согласно

формулам (20.25),

$$r_1 = R_1 \cos\alpha, \qquad r_2 = R_2 \cos\alpha. \tag{20.27}$$

Построим радиусами r_1 и r_2 основные окружности S_1 и S_2. Проводим, далее, окружности головок L_1 и L_2 и окружности ножек T_1 и T_2, радиусы которых вычисляем по формулам (20.11) — (20.14). Перекатывая образующую прямую по основным окружностям, находим эвольвенты $M_1Э_1$ и $M_2Э_2$. Как видно из чертежа, эвольвенты начинаются в точках M_1 и M_2, лежащих на основных окружностях S_1 и S_2, и кончаются в точках e и d, лежащих на окружностях L_1 и L_2 головок.

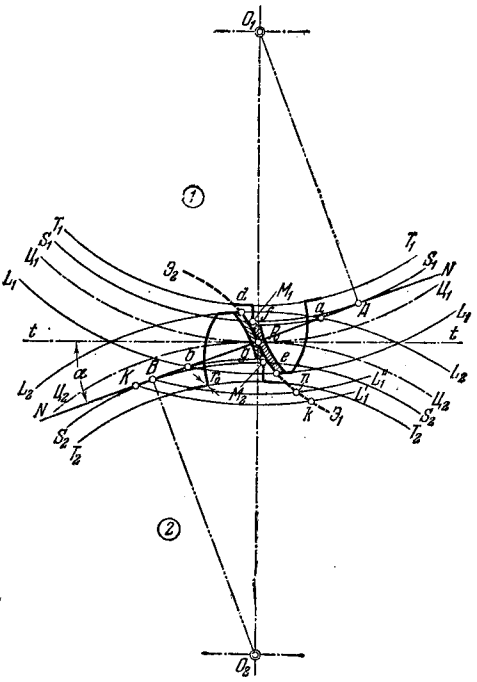


Рис. 20.12. К определению основных параметров внешнего эвольвентного зацепления.

$2°$. Определим крайние точки, в которых соприкасаются сопряженные профили зубьев. Так как линией зацепления служит сама образующая прямая $N — N$, то радиусом O_1e делаем на прямой $N — N$ засечку в точке b. Так как точка e лежит на окружности головок, то точка b и является крайней точкой линии зацепления, в которой зубья могут соприкасаться. Радиусом O_2b на профиле M_2d засекаем точку g. Точка g оказывается той точкой, которая приходит в совпадение с точкой e в точке b; тогда часть профиля зуба колеса 2, участвующего в зацеплении, есть отрезок кривой, расположенный между точками g и d.

Аналогичным построением определим часть профиля зуба колеса 1, участвующего в зацеплении. Это — часть кривой между точками f и e. Отрезки профилей gd и fe носят название *рабочих участков профилей зубьев*. Из построения следует, что участки M_2g и M_1f эвольвент являются *нерабочими*, так же как и остальные части ножек. Нерабочие участки профилей зубьев в общем случае могут быть очерчены любым образом, но так, чтобы сопряженные зубья свободно выходили из зацепления. Участок кривой, по которой очерчен нерабочий участок профиля зуба, называется *галтелью*. Можно,

например, от точек M_1 и M_2 очерчивать ножки по радиальным прямым M_1O_1 и M_2O_2. В местах сопряжения ножек с окружностями T_1 и T_2 дают обычно небольшое закругление радиусом r_0, равным от 0,3 до 0,4 модуля m. Симметричные части зубьев строятся по законам симметрии.

Таким образом, в общем случае действительная линия зацепления эвольвентных профилей представляется в виде участка ab образующей прямой, заключенного между окружностями головок. Указанный участок носит название *практической линии зацепления.*

Длина ab практической линии зацепления зависит от высоты головок зубьев или, иначе, от диаметров окружностей головок. Размеры высоты головок, вообще говоря, могут быть больше, чем показано на рис. 20.12, но не должны выходить за пределы окружностей, описанных из центров O_1 и O_2, проходящих через точки A и B образующей прямой $N-N$. Отрезок AB, определяющий предельную длину линии зацепления, называется *теоретической линией зацепления.*

Таким образом, увеличение рабочих участков профилей зубьев возможно за счет увеличения диаметров окружностей головок. Однако если окружность головок одного из колес пересекает линию зацепления за пределами теоретической линии зацепления, то весь участок профиля, точки которого лежат вне линии зацепления, оказывается нерабочим. Например, если окружностью головок колеса *1* является окружность L_1' (рис. 20.13), то на участке kn профиль получается нерабочим. На участке ne профиль будет рабочим только в том случае, если окружностью головок колеса *1* будет окружность L_1'', пересекающая линию зацепления в точке B.

3°. Аналогично могут быть построены эвольвентные профили зубьев внутреннего зацепления. На рис. 20.13 показаны соприкасающиеся в точке P_0 центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$. Через точку P_0 проводим образующую прямую $N-N$ под углом зацепления α к касательной $t-t$. Из точек O_1 и O_2 опускаем перпендикуляры O_1A и O_2B и проводим основные окружности S_1 и S_2. Далее, перекатывая прямую $N-N$ по основной окружности S_1, получаем эвольвенту $M_1Э_1$. При перекатывании прямой $N-N$ по основной окружности S_2, получаем эвольвенту $M_2Э_2$. Проводим, далее, окружность L_1 головок и окружность T_1 ножек малого зубчатого колеса *1* и строим профиль зуба так, как это было показано выше при построении внешнего зацепления. Для большого колеса *2*, имеющего зубья, расположенные по внутренней поверхности, формулы для диаметров окружностей головок и ножек для зубьев со стандартной высотой головки имеют следующий вид:

$$D_{г2}=D_2-2h'=m(z_2-2),\quad D_{н2}=D_2+2h''=m(z_2+2{,}5). \qquad (20.28)$$

Из построения видно, что окружность головок колеса *2* может пресечь линию $N-N$ правее точки A, левее ее или может пройти

через точку A. В первом случае весь участок головки зуба колеса *2* получается рабочим. При пересечении указанной окружности с линией $N — N$ левее точки A (например, окружность головок L_2'' пересекает прямую $N — N$ в точке b) участок профиля he не может быть использован для целей зацепления, а потому практически не выполняется. Таким образом, головка зуба колеса *2* ограничена

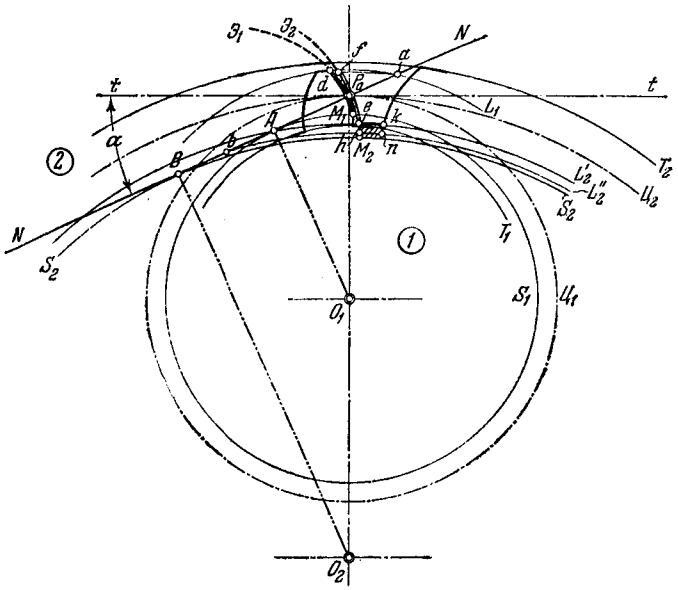


Рис. 20.13. К определению основных параметров внутреннего эвольвентного зацепления.

по высоте отрезком эвольвенты P_0e, где точка e есть пересечение окружности головок, проходящей через предельную точку A на линии зацепления, с профилем зуба. Участок же профиля M_2e эвольвенты в качестве профиля зуба колеса *2* использовать нельзя. Другой предельной точки теоретической линии зацепления быть не может, потому что обе эвольвенты могут быть безгранично продолжены за точки d и f.

Таким образом, фактическая линия зацепления представляет собой отрезок Aa. Рабочей частью профиля зуба малого колеса *1* является участок M_1d профиля, а рабочей частью профиля зуба большого колеса *2* — участок fe профиля.

4°. Переходим к проектированию реечного зацепления между рейкой и колесом. Центроидами в этом зацеплении являются прямая $Ц_1$ и окружность $Ц_2$ (рис. 20.14). Через точку P_0 проводим образующую прямую $N — N$ под углом зацепления α к прямой $Ц_1$. Из точки O_2 опускаем на образующую прямую перпендикуляр O_2A

и проводим основную окружность S_2 колеса. Далее по общим правилам строим профили зубьев колеса так, как это было изложено для зубчатых колес с внешним зацеплением. По свойствам эвольвентных профилей профили зубьев рейки должны соприкасаться с профилями зубьев колеса на прямой $N - N$ и общая нормаль к точке соприкасания должна проходить через полюс зацепления P_0. Так как рейка имеет только поступательное движение, то, чтобы зацепление происходило на прямой $N-N$ и нормаль к соприкасающимся профилям проходила через постоянную точку P_0, необходимо, чтобы все нормали к профилю зуба рейки были параллельны одной и той же прямой $N-N$. Но если все нормали к профилю параллельны одной и той же прямой $N - N$, то, очевидно, сам профиль представляет собой прямую линию, перпендикулярную к этой прямой. Поэтому профиль зуба рейки может быть получен, если через точку P_0 провести прямую ch, перпендикулярную к образующей прямой $N - N$. Головка зуба рейки заканчивается на прямой головок L_1, а ножка — на прямой ножек T_1. Высота головок и ножек подсчитывается по формулам, указанным в § 89. Теоретическая линия зацепления так же, как и при внутреннем зацеплении, имеет только одну предельную точку — точку A. В самом деле, эвольвента $M_2Э_2$ и прямая $c'i$ теоретически могут быть безгранично продолжены за точки g и h. Практическая линия зацепления заключена между окружностью головок L_2 и прямой головок L_1. Так как на рис. 20.14 точка a практической линии зацепления оказалась за точкой A, то, проведя прямую AL_1', параллельную прямой $Ц_1$, видим, что участок ce профиля зуба рейки оказывается нерабочим и, следовательно, часть $nkce$ зуба не должна выполняться. Для определения второй точки рабочего участка профиля зуба проводим через точку b линии зацепления прямую, параллельную прямой $Ц_1$, до пересечения в точке f с профилем зуба рейки. Рабочий участок профиля рейки есть участок профиля fe.

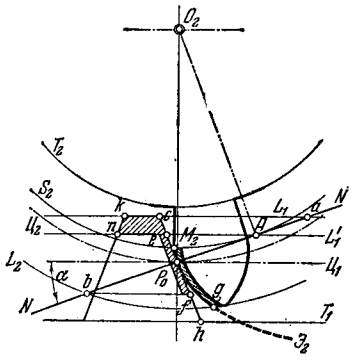


Рис. 20.14. Схема реечного зубчатого зацепления.

§ 92. Дуга зацепления и коэффициент перекрытия

1°. Найдем теперь путь, пройденный любой точкой начальной окружности за время зацепления одной пары сопряженных профилей зубьев. Пусть практическая линия зацепления заключается между точками a и b (рис. 20.15). В момент начала зацепления

профиль зуба колеса *1* занимает положение *I*. В момент конца зацепления тот же профиль находится в положении *II*. Дуга dd' есть дуга, на которую перекатятся начальные окружности за время зацепления одной пары сопряженных профилей. Дуга dd' носит название *дуги зацепления*. Длина дуги зацепления может быть выражена через длину линии зацепления и угол зацепления. Для этого соединим точки d и d' с центром O_1 и обозначим угол dO_1d' через θ_1. Отметим, далее, начальные точки c и c' эвольвенты зуба. Эти точки лежат на основной окружности, и угол cO_1c' также равен углу θ_1. Длина дуги dd'

$$\cup dd' = R_1\theta_1. \quad (20.29)$$

Длина дуги cc'

$$\cup cc' = r_1\theta_1,$$

откуда

$$\theta_1 = \frac{\cup cc'}{r_1}. \quad (20.30)$$

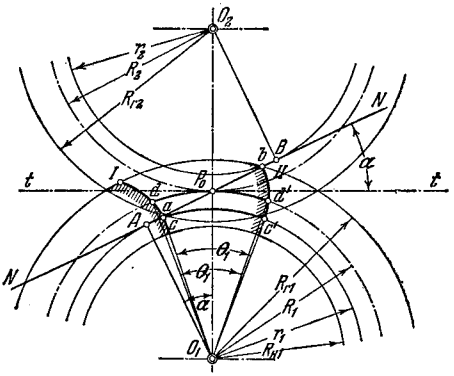


Рис. 20.15. К определению дуги зацепления и коэффициента перекрытия.

Подставляя выражение (20.30) в равенство (20.29), получаем

$$\cup dd' = \frac{R_1}{r_1} \cup cc'. \quad (20.31)$$

Из свойств эвольвенты следует:

$$\cup cc' = \cup Ac' - \cup Ac = Ab - Aa = ab.$$

Далее, из формулы (20.27) имеем

$$r_1 = R_1 \cos\alpha,$$

где α есть угол зацепления. Теперь равенство (20.31) можно написать так:

$$\cup dd' = \frac{R_1\,(ab)}{R_1 \cos\alpha} = \frac{(ab)}{\cos\alpha}. \quad (20.32)$$

Таким образом, *длина дуги зацепления на начальной окружности равна длине линии зацепления, деленной на косинус угла зацепления.*

Аналогичным путем можно определить дугу по любой другой окружности. Если дугу зацепления измерять по основной окружности, то мы получим длину, равную длине рабочего участка линии зацепления.

2°. Если дуга зацепления равна шагу зацепления t, то при перекатывании начальных окружностей на эту дугу только одна пара сопряженных профилей зубьев находится одновременно в за-

цеплении. Если дуга зацепления будет меньше шага зацепления, то в зацеплении произойдет перерыв, и передача будет работать с ударом. Если, наоборот, дуга зацепления будет больше шага зацепления, то некоторое время в зацеплении будет находиться одна пара профилей, а остальное время — две пары, может быть и более.

Так как при изготовлении зубьев возникают некоторые неточности в очертании профилей, то не рекомендуется при проектировании ограничиваться тем предельным случаем, когда дуга зацепления равняется шагу зацепления. Желательно, чтобы дуга зацепления всегда была несколько больше шага зацепления. Тогда передача будет работать плавно, без ударов. Таким образом, в правильно спроектированной передаче желательно, чтобы отношение дуги зацепления к шагу t было больше единицы, т. е.

$$\varepsilon = \frac{\text{дуга зацепления}}{t} > 1.$$

Отношение дуги зацепления к шагу, которое обозначим буквой ε, называется *коэффициентом перекрытия*.

Принимая во внимание формулу (20.32), получаем

$$\varepsilon = \frac{\smile dd'}{t} = \frac{(ab)}{t\cos\alpha} = \frac{(ab)}{\pi m\cos\alpha}, \qquad (20.33)$$

так как шаг зацепления $t = \pi m$.

В современной практике для внешнего зубчатого зацепления коэффициент перекрытия обычно получается в пределах

$$1 < \varepsilon < 2.$$

3°. Величина $t\cos\alpha$, входящая в формулу (20.33), носит название *основного шага зацепления* и обозначается буквой t_0. Таким образом, основной шаг зацепления t_0 связан с шагом зацепления t условием

$$t_0 = t\cos\alpha = \pi m\cos\alpha. \qquad (20.34)$$

Из формулы (20.34) следует, что основной шаг представляет собой дугу, измеренную по основной окружности и вмещающую один зуб и одну впадину. Коэффициент перекрытия ε может быть тогда представлен как отношение длины линии зацепления к основному шагу зацепления:

$$\varepsilon = \frac{(ab)}{t_0}. \qquad (20.35)$$

Коэффициент перекрытия ε может быть определен и аналитически. В самом деле, из рис. 20.15 имеем

$$(ab) = (AB) - (Bb) - (Aa) = (AB) - (AB - Ab) - (AB - Ba) =$$
$$= (AB) - (AB) + (Ab) - (AB) + (Ba) = (Ab) + (Ba) - (AB).$$

Но так как

$$(Ab) = \sqrt{R_{r1}^2 - r_1^2}, \quad (Ba) = \sqrt{R_{r2}^2 - r_2^2}, \quad (AB) = A\sin\alpha. \qquad (20.36)$$

где R_{r1} и R_{r2} — радиусы окружностей головок колес и A — расстояние между осями O_1 и O_2 колес, то

$$(ab)=\sqrt{R_{r1}^2-r_1^2}+\sqrt{R_{r2}^2-r_2^2}-A\sin\alpha. \qquad (20.37)$$

Подставляя последнее выражение в соотношение (20.33), получаем:

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{R_{r1}^2-r_1^2}+\sqrt{R_{r2}^2-r_2^2}-A\sin\alpha}{\pi m\cos\alpha}. \qquad (20.38)$$

§ 93. Коэффициент скольжения зубьев

1°. Рассмотрим два сопряженных эвольвентных профиля $M_1\mathcal{Э}_1$ и $M_2\mathcal{Э}_2$ (рис. 20.16), принадлежащих колесам *1* и *2*. Пусть эти профили касаются в точке C, лежащей на образующей прямой $N-N$. Если на этих профилях выбрать точки m_1 и m_2, лежащие на начальных окружностях, то отрезок Cm_1 профиля $M_1\mathcal{Э}_1$ зуба колеса *1* и отрезок Cm_2 профиля $M_2\mathcal{Э}_2$ зуба колеса *2* не будут равны между собою. В процессе зацепления профилей $M_1\mathcal{Э}_1$ и $M_2\mathcal{Э}_2$ наблюдается не только качение профиля по профилю, но и их скольжение друг по другу. В самом деле, при движении точек m_1 и m_2 к полюсу P_0 они проходят равные пути m_1P_0 и m_2P_0. Одновременно с этим дуга Cm_2 профиля $\mathcal{Э}_2$ перемещается по дуге Cm_1 профиля $\mathcal{Э}_1$. Так как эти дуги не равны, то качение профилей сопровождается скольжением, которое можно измерить разностью длин указанных дуг. Скольжение профилей влияет на износ зубьев, уменьшая износостойкость передачи. Для оценки взаимного скольженя профилей зубьев пользуются понятием *коэффициента скольжения зубьев*. Под коэффициентом скольжения понимается отношение скорости скольжения $v_{ск}$ точек контакта зубьев к касательным составляющим v_{12}^t скоростей точек контакта сопряженных профилей, т. е.

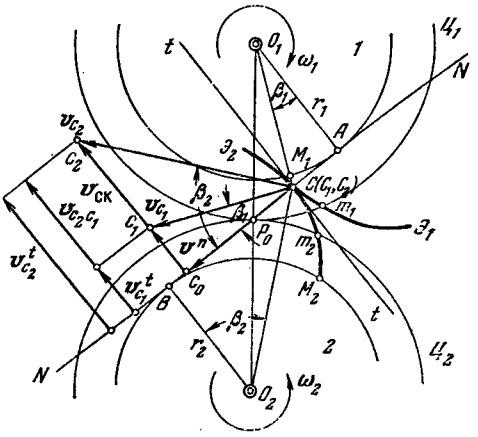


Рис. 20.16. К определению коэффициента скольжения зубьев.

$$\lambda=\frac{v_{ск}}{v_{12}^t}. \qquad (20.39)$$

2°. Рассмотрим вопрос об определении коэффициентов скольжения λ_1 и λ_2 сопряженных зубьев (рис. 20.16). Для определения

скоростей $v_{ск}$ и тангенциальных составляющих скоростей $v^t_{C_1}$ и $v^t_{C_2}$ скоростей точек C_1 и C_2 контакта сопряженных профилей $M_1Э_1$ и $M_2Э_2$ построим план скоростей механизма, приняв для наглядности за полюс плана скоростей точку C.

Скорость скольжения $v_{ск}$ определяется из плана скоростей как вектор, пропорциональный отрезку (c_1c_2). Скорость v'_{C_1} пропорциональна отрезку (c_0c_1), где точка c_0 — конец вектора $\boldsymbol{v}^n$ нормальной составляющей скоростей $\boldsymbol{v}_{C_1}$ и $\boldsymbol{v}_{C_2}$. Наконец, скорость $v^t_{C_2}$ пропорциональна отрезку (c_0c_2).

Скорость скольжения $v_{ск}$ для внешнего зацепления равна

$$v_{ск} = v_{C_2C_1} = \Omega_{21}(P_0C) = (\omega_1 + \omega_2)(P_0C), \qquad (20.40)$$

где Ω_{21} — угловая скорость в движении колеса *2* относительно колеса *1*, равная для внешнего зацепления $\Omega = (\omega_1 + \omega_2)$; ω_1 и ω_2 — угловые скорости колес *1* и *2* и (P_0C) — расстояние от точки зацепления C до полюса зацепления P_0, т. е. до мгновенного центра вращения в относительном движении колес *1* и *2*. Скорость $v^t_{C_1}$ определяется из плана скоростей:

$$v^t_{C_1} = v^n \operatorname{tg}\beta_1, \qquad (20.41)$$

где $\operatorname{tg}\beta_1 = \dfrac{(AC)}{r_1}$; расстояние (AC) по свойству эвольвенты равно радиусу кривизны $\rho_1 = (AC)$ профиля $M_1Э_1$ в точке c_1. Тогда для $v^t_{C_1}$ получаем

$$v^t_{C_1} = \omega_1 r_1 \operatorname{tg}\beta_1 = \omega_1 r_1 \frac{(AC)}{r_1} = \omega_1 (AC) = \omega_1\rho_1, \qquad (20.42)$$

где $r_1 = O_1A$ и $r_2 = O_2B$ — радиусы основных окружностей колес *1* и *2*.

Аналогично для скорости $v^t_{C_2}$ будем иметь

$$v^t_{C_2} = \omega_2 r_2 \operatorname{tg}\beta_2 = \omega_2 r_2 \frac{(BC)}{r_2} = \omega_2 (BC) = \omega_2\rho_2, \qquad (20.43)$$

где $\rho_2 = (BC)$ — радиус кривизны профиля $M_2Э_2$ в точке c_2. Коэффициент скольжения λ_1 для профиля $M_1Э_1$ будет тогда равен

$$\lambda_1 = \frac{v_{C_1C_2}}{v^t_{C_1}} = \frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{P_0C}{\rho_1}\right) = \left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right)\frac{(P_0C)}{\rho_1}. \qquad (20.44)$$

Соответственно для профиля $M_2Э_2$ коэффициент скольжения λ_2 равен

$$\lambda_2 = \frac{v_{C_1C_2}}{v^t_{C_2}} = \frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_2}\left(\frac{P_0C}{\rho_2}\right) = (1 + i_{12})\frac{(P_0C)}{\rho_2} \qquad (20.45)$$

При подсчете коэффициентов λ_1 и λ_2 надо иметь в виду, что если колеса *1* и *2* разные, то зубья большего колеса зацепляются в i_{12}

раз меньше, чем зубья меньшего колеса. Следовательно, надо при подсчете коэффициентов скольжения помножить или разделить один из коэффициентов λ_1 или λ_2 на величину i_{12}. Если, например, большим колесом является колесо 2, то коэффициенты скольжения λ_1' и λ_2' должны подсчитываться по формулам

$$\lambda_1' = \lambda_1 = \left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right)\frac{(P_0C)}{\rho_1}, \tag{20.46}$$

$$\lambda_2' = \frac{\lambda_2}{i_{12}} = \frac{1+i_{12}}{i_{12}}\,\frac{(P_0C)}{\rho_2} = \left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right)\frac{(P_0C)}{\rho_2}. \tag{20.47}$$

В формулы (20.46) и (20.47) следует подставлять абсолютное значение передаточного отношения i_{12}, ибо знаки учтены в формуле (20.40).

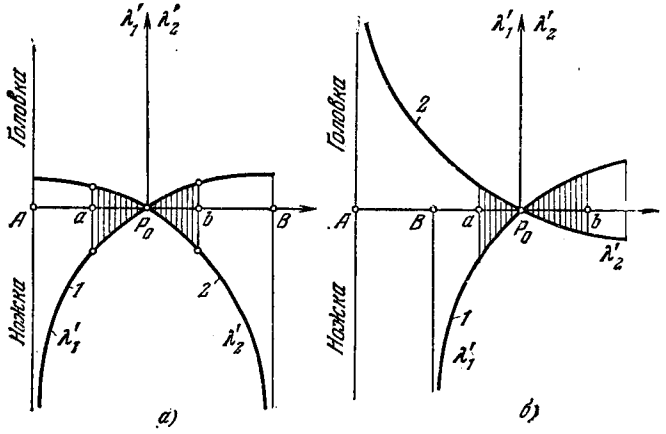


Рис. 20.17. Диаграмма коэффициента скольжения зубьев зубчатой передачи: *а*) диаграмма для внешнего зацепления; *б*) диаграмма для внутреннего зацепления.

Для внутреннего зацепления формула (20.40) имеет вид

$$v_{C_2C_1} = (\omega_1 - \omega_2)\,(P_0C). \tag{20.48}$$

Соответственно формулы для определения коэффициентов скольжения λ_1' и λ_2' для внутреннего зацепления имеют вид

$$\lambda_1' = \left(1 - \frac{1}{i_{12}}\right)\frac{(P_0C)}{\rho_1}, \tag{20.49}$$

$$\lambda_2' = \left(1 - \frac{1}{i_{12}}\right)\frac{(P_0C)}{\rho_2}. \tag{20.50}$$

3°. Из формул (20.46) и (20.47) следует, что коэффициенты скольжения λ_1' и λ_2' возрастают с увеличением расстояния (P_0C) от точки зацепления C до полюса зацепления и уменьшением радиусов кривизны ρ_1 и ρ_2 профилей. В крайних точках A и B теоретической линии зацепления (рис. 20.16) радиусы ρ_1 и ρ_2 равны

нулю, т. е. в этих точках коэффициенты λ_1' и λ_2' равны теоретически бесконечности. Из сравнения формул (20.46), (20.47) и (20.49), (20.50) также видно, что коэффициенты скольжения для внутреннего зацепления при том же передаточном отношении могут быть получены меньшими, чем для внешнего зацепления.

На рис. 20.17 схематично показаны кривые изменения коэффициентов скольжения λ_1' и λ_2'. На рис. 20.17, *а* по оси абсцисс отложена теоретическая линия зацепления AB для колес с внешним зацеплением. По оси ординат отложены коэффициенты скольжения λ_1' и λ_2'. Участки кривых λ_1' и λ_2', расположенные выше оси абсцисс, относятся к головкам зубьев, а участки ниже оси абсцисс — к ножкам зубьев. Чтобы избежать больших потерь на скольжение профилей и уменьшить их износ, практическая линия зацепления ab (рис. 20.17, *а*) должна располагаться в зоне относительно малых коэффициентов скольжения. Эта зона на рис. 20.17, *а* заштрихована. На рис. 20.17, *б* аналогичные кривые построены для внутреннего зацепления. Кривая *2* изображает изменение коэффициента скольжения λ_2' внешнего колеса внутреннего зацепления.

§ 94. Некоторые сведения по методам обработки эвольвентных профилей зубьев

1°. В данном параграфе мы рассмотрим в самых общих чертах методы нарезания зубчатых колес, так как этот вопрос тесно связан с теорией профилирования зубьев.

Зубчатые колеса с эвольвентным профилем зубьев обычно нарезаются на специальных зуборезных станках двумя методами: 1) методом копирования и 2) методом обкатки.

Метод копирования состоит в том, что по чертежам тщательно построенных профилей зубьев изготавливается дисковая фреза (рис. 20.18). Режущая кромка фрезы имеет очертание впадины между зубьями. Вращаясь, фреза перемещается в направлении боковой образующей зуба. За каждый ход фрезы вдоль оси колеса получается нарезанной одна впадина. По прохождении всей впадины фреза возвращается в исходное положение. После этого нарезаемое колесо поворачивается на величину угла $\tau = \frac{2\pi}{z}$, где z — число зубьев нарезаемого колеса, и процесс повторяется. На рис. 20.19 показан процесс нарезания колеса дисковой фрезой.

Метод обкатки заключается в том, что режущему инструменту и заготовке сообщают то относительное движение, которое имели бы два зубчатых колеса, находящихся в правильном зацеплении. В таком случае режущий инструмент должен представлять собой также зубчатое колесо, т. е. колесо-инструмент может быть сделано в виде колеса или рейки. На рис. 20.20 показано такое колесо-инструмент, которое носит название *долбяка*. Долбяк R совершает

поступательное движение параллельно оси x — x нарезаемого колеса T (рис. 20.21). Одновременно долбяку и колесу сообщается вращательное движение с тем же отношением угловых скоростей, как если бы долбяк и колесо находились в зацеплении. Практически процесс долбления происходит не непрерывно, а имеет ряд последовательных операций, состоящих в движении долбяка вверх и вниз, поворота нарезаемого колеса и т. д. Но все эти движения строго согласованы с кинематическими соотношениями, определяющими долбяк и колесо как два колеса, находящихся в зацеплении. Тогда профиль нарезаемого зуба получается как огибающая всех положений режущей кромки долбяка (рис. 20.22), т. е. инструмент как бы обкатывает нарезаемое колесо. Особенность этого способа



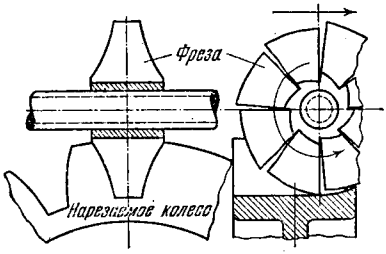


Рис. 20.18. Дисковая фреза для нарезания зубьев методом копирования.

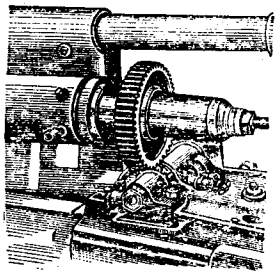


Рис. 20.19. Нарезание зубчатого колеса дисковой фрезой.

заключается в том, что он позволяет нарезать по методу обкатки колеса с внутренним зацеплением (рис. 20.20).

2°. Так как для любого зубчатого колеса может быть спроектирована сопряженная с колесом рейка (см. § 91, *4°*), то, вместо колеса-инструмента, может быть в качестве инструмента использована также и рейка, которая называется инструментальной рейкой. Рейка совершает в вертикальном направлении возвратно-поступательное движение, параллельное оси нарезаемого колеса (рис. 20.23). Заготовка имеет двойное движение в горизонтальной плоскости. Вращаясь вокруг своей оси, она одновременно перемещается вдоль рейки (рис. 20.24). Таким образом, заготовка осуществляет движение колеса относительно рейки, и профили зубьев нарезаемого колеса получаются процессом обкатывания. Весь указанный процесс изготовления выполняется на специальных зуборезных станках.

3°. Вместо инструментальной рейки можно применять червячную фрезу (рис. 20.25), профиль которой может быть получен из рейки. В самом деле, если провести сечение червячной фрезы плоскостью, содержащей ось фрезы, то в сечении мы получим рейку

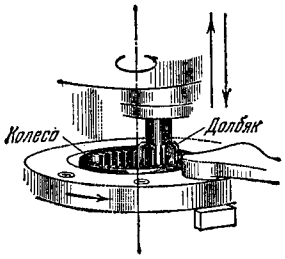


Рис. 20.20. Нарезание долбяком колеса с внутренними зубьями.

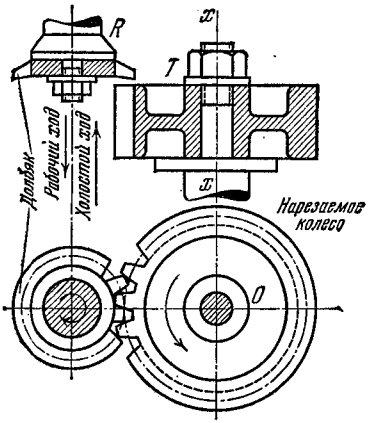


Рис. 20.21. К вопросу о нарезании зубчатого колеса долбяком.

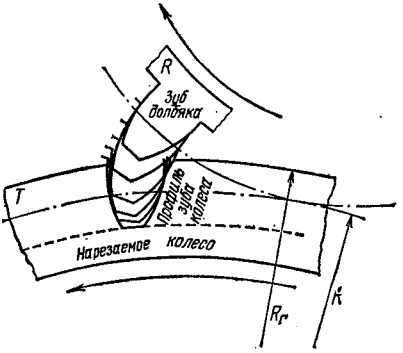


Рис. 20.22. Последовательные относительные положения зуба долбяка при нарезании.

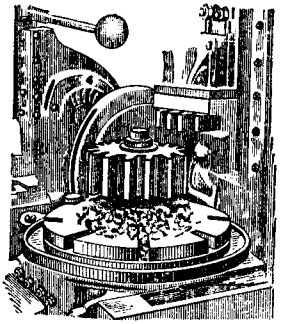


Рис. 20.23. Нарезание зубчатого колеса зубчатой рейкой.

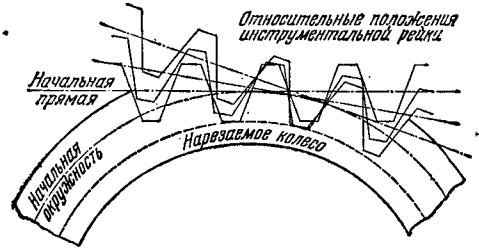


Рис. 20.24. Последовательные положения зубьев рейки при нарезании зубчатого колеса.

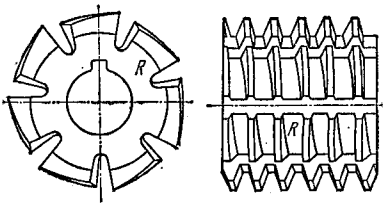


Рис. 20.25. Червячная фреза.

(рис. 20.26). Таким образом, профиль червячной фрезы может быть получен путем перемещения рейки по винтовой линии с некоторым постоянным углом подъема. Обычно угол подъема γ не превышает 5°.

При одноходовой фрезе за каждый оборот фрезы вокруг своей оси заготовка поворачивается на угол, вмещающий один зуб и одну впадину. Одновременно с вращением червячная фреза имеет еще поступательное движение подачи параллельно оси колеса. Процесс нарезания показан на рис. 20.27. Фреза устанавливается в плоскости колеса под углом γ, равным углу подъема (рис. 20.26).

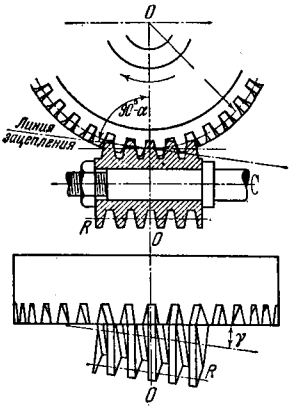


Рис. 20.26. Осевое сечение червячной фрезы.

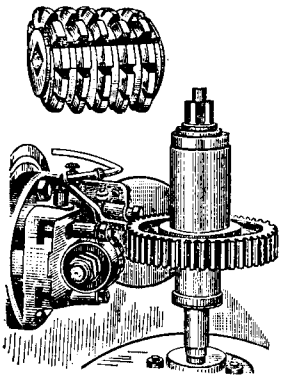


Рис. 20.27. Нарезание зубчатого колеса червячной фрезой.

Из рассмотрения приемов нарезания методом обкатки следует, что в основе этих приемов нарезания лежат свойства зацепления рейки с колесом или колеса с колесом.

4°. В последнее время получает распространение новый метод изготовления колес, называемый *методом накатки*. Инструментом служит *зубчатое инструментальное колесо* (рис. 20.28). Пусть инструментальное колесо имеет $z_и$ зубьев модуля m. Требуется из заготовки получить зубчатое колесо с числом зубьев $z_з$ того же модуля m. Для этого необходимо обеспечить относительное движение инструментального колеса и заготовки с передаточным отношением, равным

$$i_{з.и} = -\omega_з/\omega_и = -z_и/z_з, \qquad (20.51)$$

где $\omega_з$ и $\omega_и$ — угловые скорости заготовки и инструментального колеса. Если материал заготовки достаточно эластичен, то инструментальное колесо выдавит, или, иначе говоря, накатает на заготовке требуемое число зубьев модуля m. С точки зрения кинематики можно одно из колес остановить, тогда второе будет обкатывать первое или вращать оба колеса, но с угловыми скоростями, удовлетворяющими условию (20.51). Накатка может происходить в холод-

ном или нагретом состояниях заготовки в зависимости от пластических свойств ее материала. В настоящее время этим способом обрабатывают мелкомодульные зубчатые колеса. Преимуществом этого метода является то, что одним и тем же инструментальным колесом можно накатывать колеса с любым числом зубьев общего модуля m. Для этого только должно удовлетворяться условие (20.51).

5°. Из рассмотрения различных методов изготовления зубчатых колес эвольвентных профилей нетрудно видеть, что профиль зуба всегда состоит из двух частей: эвольвенты и переходной кривой, называемой *галтелью*, от эвольвенты к окружности ножек. При правильно спроектированной и изготовленной передаче рабочая часть зуба, т. е. тот участок профиля, который входит в зацепление с профилем сопряженного колеса, всегда находится на эвольвентной части профиля. Очертание переходной кривой на передачу движения влияния не оказывает. Все расчетные зависимости значительно проще проводить, если рассматривать нарезание колес реечным инструментом, в основе которого лежит *стандартная инструментальная рейка*, причем эвольвентная часть зуба не зависит от того, каким инструментом колесо будет нарезано. Если колесо будет нарезано долбяком, имеющим к тому же различные степени износа, то при этом могут оказаться несколько отличными от расчета по рейке размер радиуса ножек колеса и форма переходной кривой. Однако отклонение этих параметров не влияет на качество передачи и обычно лежит в пределах допусков. Размер радиуса ножек при этом дается на чертеже как условный, только для справок.

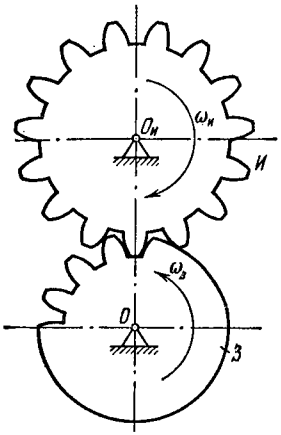


Рис. 20.28. Накатка зубьев инструментальным колесом.

Эта же методика может быть применена и для внутренней передачи несмотря на то, что для колеса с внутренними зубьями зацепление колеса с рейкой невозможно, так как рейка должна находиться внутри тела зуба колеса. Однако можно проводить проектирование профиля впадин между зубьями по их условному теоретическому зацеплению с инструментальной рейкой.

§ 95. Подрезание профилей зубьев

1°. При производстве зубчатых колес по методу обкатки в некоторых случаях получается, что головки режущего инструмента врезаются в ножки зубьев нарезаемого колеса. В результате этого ножки зубьев нарезаемого колеса оказываются как бы подрезанными (рис. 20.29), откуда и само явление получило название *подрезания*.

При подрезании ножки зубьев ослабляются. Кроме того, при этом срезается часть эвольвенты, образующей профиль ножки зуба. Поэтому подрезание является нежелательным при изготовлении зубчатых колес. Выясним вопрос о том, в каком случае будет иметь место явление подрезания.

Явление подрезания объясняется тем, что эвольвента является кривой, ограниченной с одной стороны начальной точкой, которая, как известно, располагается на основной окружности.

Если представить себе зацепление двух эвольвент, скрепленных двумя основными окружностями, вращающимися вокруг двух неподвижных центров O_1 и O_2 (рис. 20.30), то при непрерывном зацеплении точка касания будет перемещаться по одной из эвольвент, удаляясь от начальной точки. Наоборот, по другой эвольвенте точка соприкасания будет перемещаться, приближаясь к начальной точке. При продолжающемся вращении основных окружностей точка касания в определенный момент времени совпадает с начальной точкой одной из эвольвент, что произойдет в конце B теоретической линии зацепления AB. Такое относительное расположение двух рассматриваемых эвольвент является пределом, далее которого эвольвентное зацепление невозможно. В самом деле, если вращение основных окружностей будет продолжаться и дальше, то общей точкой двух зацепляющихся кривых будет начальная точка одной из них (точка b на рис. 20.30). В таком случае общая нормаль $N_0 — N_0$ не будет проходить через полюс зацепления P_0, вследствие чего передаточное отношение, ранее установленное парою зацепляющихся эвольвент, изменится и станет переменным. Итак, *за пределами теоретической линии зацепления не удовлетворяется основной закон зацепления.*

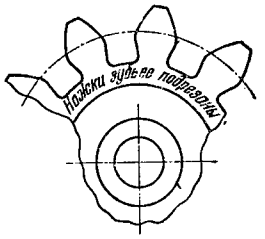


Рис. 20.29. Зубчатое колесо с подрезанными ножками зубьев.

2°. Только что было рассмотрено зацепление двух эвольвентных профилей неограниченной длины. Практически при работе двух зубчатых колес в зацеплении находится пара зубьев ограниченной высоты, имеющих внутри своих основных окружностей ножки, очерченные не по эвольвентам. Пусть, например, у колеса *2* (рис. 20.30) неэвольвентная часть ножки очерчена по прямой M_0O_2, направленной от начальной точки M_0 к центру O_2. При движении колеса *1* относительно колеса *2* конец зуба (точка M) описывает кривую γ, которая пересекает указанную нами неэвольвентную и эвольвентную части ножки зуба. Если колеса *1* и *2* начнут вращаться из положения, показанного на чертеже, то при повороте на небольшой угол зубья неизбежно заклинятся. Если же колесо *1* является нарезающим колесом, то его точка M подрежет заштрихованную на рис. 20.30 часть зуба колеса *2*, вследствие чего ножка

зуба такого колеса будет ослаблена и будет срезана часть эвольвентного профиля.

Явлением подрезания в теории зацепления называется пересечение траектории относительного движения конца профиля зуба одного колеса с эвольвентной частью профиля зуба сопряженного с ним колеса.

На основании изложенного можно сделать заключение, что эвольвентное зацепление возможно только при том условии, что окружность головок зубьев нарезающего колеса пересекает нормаль не далее точки B, т. е. точки, соответствующей концу теоретической линии зацепления AB. При большой высоте зубьев может наступить явление подрезания. Так как размеры зуба колеса-инструмента стандартизированы и выполняются при одном и том же модуле у разных колес-инструментов одной и той же высоты, то при прочих равных условиях возможность подрезания определяется положением точки B на нормали $N-N$ (рис. 20.30), т. е. размерами колеса 2 и, следовательно, его числом зубьев.

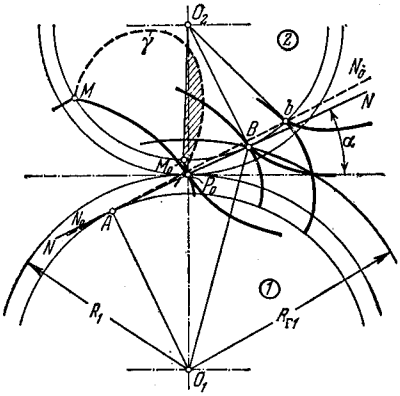


Рис. 20.30. К вопросу о подрезании зубьев зубчатого колеса.

3°. Рассмотрим теперь вопрос о наименьшем числе зубьев $z_{\min}$ на колесе, при котором явление подрезания будет отсутствовать. Для этого рассмотрим тот предельный случай, когда окружности головок проходят через крайние точки A и B теоретической линии зацепления (рис. 20.30), т. е. когда вся возможная линия зацепления является рабочей. Будем предполагать, что число зубьев нарезающего колеса больше числа зубьев нарезаемого.

Если нарезаемым колесом будет колесо 2, то предельный радиус $R_{г1}$ окружности головок нарезающего колеса 1, при котором зацепление происходит без подрезания, равен (см. § 89, *3°*)

$$R_{г1}=O_1B=R_1+\chi' m, \tag{20.52}$$

где $\chi' m$ есть высота h' головки. Расстояние O_1O_2 между центрами колес равно $O_1O_2=R_1+R_2$; наконец, перпендикуляр O_2B равен

$$O_2B=R_2\cos\alpha. \tag{20.53}$$

Из треугольника O_1O_2B имеем:

$$(O_1B)^2=(O_1O_2)^2+(O_2B)^2-2\,(O_1O_2)\,(O_2B)\cos\alpha.$$

Подставляя вместо (O_1B), (O_1O_2) и (O_2B) их значения из равенств

(20.51) — (20.53), после несложных преобразований получаем:

$$z_2 = z_{\min} = 2\chi \frac{\sqrt{i^2 + (2i+1)\sin^2\alpha} + i}{(2i+1)\sin^2\alpha}. \qquad (20.54)$$

Пользуясь формулой (20.54), можно определить наименьшее число зубьев $z_{\min}$ малого колеса в случае *внешнего зацепления*.

В случае *внутреннего зацепления* уравнение (20.54) примет следующий вид:

$$z_2 = z_{\min} = 2\chi \frac{\sqrt{i^2 + (1-2i)\sin^2\alpha} + i}{(2i-1)\sin^2\alpha}. \qquad (20.55)$$

Наконец, в случае *реечного зацепления*, т. е. при $i = \infty$, получаем

$$z_2 = z_{\min} = 2\chi \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{i^2} + \frac{2}{i}\right)\sin^2\alpha} + 1}{\left(2 + \frac{1}{i}\right)\sin^2\alpha} = \frac{2\chi}{\sin^2\alpha}. \qquad (20.56)$$

Не надо забывать, что в уравнениях (20.54), (20.55) передаточное отношение i есть всегда величина, равная или большая единицы.

Формулы (20.51) — (20.56) пригодны как для нормального зацепления, у которого $\chi = 1$, так и для зацеплений с укороченной высотой зуба, у которых χ меньше единицы.

Из этих формул следует, что $z_{\min}$ будет тем меньше, чем меньше коэффициент χ высоты головки зуба и чем больше угол зацепления α.

Уравнения (20.54) — (20.56) могут быть выражены через число зубьев z_1 и z_2 колес *1* и *2*. Для этого выразим R_1 и R_2 через числа зубьев z_1 и z_2. $R_1 = mz_1/2$ и $R_2 = mz_2/2$. Тогда получаем

$$(z_1 + 2\chi')^2 = (z_1 + z_2)^2 + z_2^2\cos^2\alpha - 2(z_1 + z_2)\, z_2\cos^2\alpha. \qquad (20.57)$$

Раскрывая скобки, после несложных преобразований получаем

$$z_1 = \frac{z_2^2\sin^2\alpha - 4\chi'^2}{4\chi' - 2z_2\sin^2\alpha}. \qquad (20.58)$$

Из формулы (20.58) следует, что наименьшее число зубьев z_1, при котором на малом колесе не будет явления подрезания, зависит от угла зацепления α и коэффициента χ' высоты головки.

Выбирая бóльшие значения угла зацепления α и меньшие значения коэффициента χ', можно получить колеса без подрезания с меньшим числом зубьев z_1. Этим объясняется применение в некоторых случаях не стандартного угла зацепления $\alpha = 20°$, а увеличенного до $\alpha = 22°{,}5$ и применение зубьев с укороченными головками, у которых $\chi' = 0{,}8$.

Для нормальных колес, у которых угол зацепления $\alpha = 20°$ и коэффициент $\chi' = 1$, формула (20.58) принимает вид

$$z_1 \leqslant \frac{z_2^2 - 34}{34 - 2z_2}. \qquad (20.59)$$

Так как выше мы условились нарезающим колесом считать большее колесо *1*, то z_2 должно быть всегда меньше z_1, т. е. $z_2 < z_1$. Наименьшее число z_2 зубьев малого колеса *2*, удовлетворяющее неравенству (20.59) и условию $z_2 < z_1$, равно $z_2 = 13$. При этом число зубьев z_1 большого колеса равно $z_2 \approx 17$. Из неравенства (20.59) также следует, что если число зубьев $z_2 = 17$, то число зубьев z_1 большого колеса может иметь любое число зубьев $z_1 \geqslant 17$ и при этом явления подрезания или заклинивания не будет.

Явление заклинивания, при котором головка зуба большого колеса вдавливается в ножку зуба малого колеса, может иметь место и при внутреннем зацеплении. Для нормальных колес с внутренним зацеплением формулы для определения числа зубьев z_1 большого колеса имеют вид, аналогичный формулам (20.58) и (20.59):

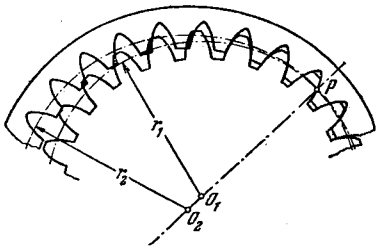


Рис. 20.31. Явление интерференции во внутреннем зубчатом зацеплении.

$$z_1 = \frac{z_2^2 \sin^2 \alpha - 4\chi'^2}{2z_2 \sin^2 \alpha - 4\chi} \qquad (20.60)$$

и

$$z_1 \geqslant \frac{z_2^2 - 34}{2z_2 - 34}. \qquad (20.61)$$

Из формулы (20.61) следует, что наименьшее число зубьев z_2 малого колеса равняется $z_2 = 17$, при этом бо́льшее колесо должно имеет число зубьев $z_2 = \infty$, т. е. бо́льшее колесо превращается в зубчатую рейку.

Таблица 6

Внешнее зацепление		Внутреннее зацепление			
z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1
13	< 17	17	∞	23	> 41
14	< 27	18	> 144	24	> 38
15	< 48	19	> 81	25	> 36
16	< 112	20	> 60	26	> 35
17 и выше	Любое	21	> 50		$> z_2 + 8$
		22	> 44	27 — 79	$> z_2 + 7$
				80 и выше	

Таблица 6 служит для выбора допустимого числа зубьев колес при отсутствии подрезания или заклинивания передачи.

Подсчеты по формуле (20.61) сделаны до числа зубьев $z_2 = 26$, так как при числе зубьев $z_2 > 26$ для внутреннего зацепления не

менее опасным становится явление интерференции зубьев, при котором головка зуба малого колеса вдавливается в головку зуба большого колеса вне области зацепления (рис. 20.31). На этом рисунке участки интерференции заштрихованы. Мы не приводим вывода формулы для установления числа зубьев колес, при котором не будет иметь место явление *интерференции*, а даем в таблице дополнительно сведения по подбору числа зубьев, если $z_2 > 26$.

Из формулы (20.56) следует, что для нормальных колес, у которых $\alpha = 20°$ и $\chi' = 1$, число z_2 зубьев зубчатого колеса реечного зацепления будет равно $z_2 = 17$.

§ 96. Определение основных размеров зубчатых колес, нарезанных методом обкатки

1°. В § 89 были даны формулы для определения основных размеров зубчатых колес при условии, что стандартный модуль соответствует их начальным окружностям, совпадающим с делительными окружностями. Однако это условие накладывает и целый ряд ограничений, затрудняющих конструирование зубчатых передач. Например, это относится к выбору числа зубьев на колесе. Уменьшение числа зубьев, как уже указывалось, удешевляет производство зубчатых колес, уменьшает размеры конструкции и т. д. Но уменьшение числа зубьев может вызвать их подрез, увеличение износа контактных поверхностей и т. д.; поэтому в тех случаях, когда необходимо по каким-либо причинам все же иметь малое число зубьев, проектируют зубчатые колеса с иными размерами. Основной целью, которая при этом преследуется, является улучшение условий работы зубчатых колес за счет отклонения размеров этих колес от указанных в § 89.

Как было показано выше, изменяя отдельные параметры зубчатых колес: модуль m, коэффициент χ' высоты головки зуба, угол зацепления α и т. д., можно получать зубчатые колеса с различными соотношениями размеров зубьев. Например, в некоторых случаях применяют так называемый *укороченный зуб*, у которого коэффициент χ' равен 0,8, а коэффициент χ'' равен 1. Укороченный зуб, следовательно, имеет головку, высота которой равна $h' = 0{,}8m$, и ножку, высота которой равна $h'' = m$. Тогда общая высота h зуба вместо $2{,}2m$ оказывается равной $1{,}8m$. При этом уменьшается коэффициент перекрытия ε; в некоторых случаях увеличивают угол зацепления α. Как следует из формулы (20.58), чем больше угол зацепления α, тем меньшее число зубьев z_2 может быть выбрано на малом колесе *2*. Этим объясняется переход от ранее применявшегося на практике угла зацепления $\alpha = 15°$ к углу зацепления $\alpha = 20° \div 22{,}5°$.

В некоторых случаях применяют одновременное изменение высоты зубьев и угла зацепления.

2°. Так как современные зубчатые колеса, как правило, нарезаются методом обкатки, то получение зубчатых колес с зубьями требуемых параметров легче всего может быть достигнуто соответствующим расположением нарезаемого колеса (заготовки) по отношению к зуборезному инструменту (рейке) или червячной фрезе.

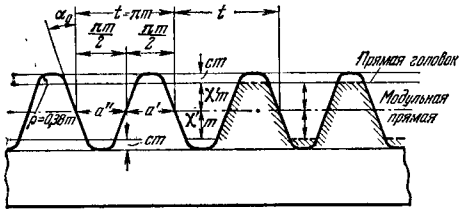


Рис. 20.32. Инструментальная рейка.

Как было показано выше в § 94, при нарезании зубчатых колес методом обкатки с помощью рейки или червячной фрезы в сечении этих инструментов плоскостью, перпендикулярной к оси нарезаемого колеса и содержащей ось червячной фрезы, мы получаем зубчатую рейку. Размеры зубьев этой рейки, носящей название *инструментальной рейки*, обеспечивающие беззазорное зацепление, стандартизированы.

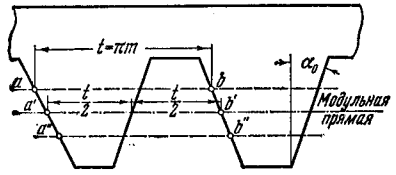


Рис. 20.33. К выбору начальной прямой рейки при нарезании зубьев зубчатого колеса.

На рис. 20.32 показана инструментальная рейка. Прямая, для которой толщина зуба a' равна ширине впадины a'':

$$a' = a'' = \frac{t}{2} = \frac{\pi m}{2}, \quad (20.62)$$

называется *модульной прямой рейки*.

Высота головки и высота ножки зуба стандартной рейки одинаковы и равны $h' = h'' = \chi' m$. К высоте $\chi' m$ добавлена величина, равная cm. Это необходимо для того, чтобы получить соответствующую глубину впадины нарезаемого колеса. Обычно глубина впадины равна $cm = 0{,}25m$, т. е. коэффициент c принимается равным $c = 0{,}25$. Переход с прямолинейного участка профиля зуба на прямую головок осуществляется закруглением, радиус ρ которого равен $\rho = 0{,}38m$.

При нарезании стандартного зацепления модульная прямая должна без скольжения перекатываться по начальной окружности нарезаемого колеса, и в этом случае толщина зуба и ширина впадины нарезаемого колеса так же, как и у рейки, равны между собой.

Часть инструментальной рейки, ограниченную высотой головки h', высотой ножки h'' и прямолинейными участками зубьев, будем называть *исходным контуром рейки*. Этот контур на рис. 20.32 заштрихован. Эвольвентную часть зуба нарезаемого колеса нарезает только исходный контур, а часть зуба рейки выше исходного контура образует галтель зуба колеса (см. § 91, 2°). Поэтому в даль-

нейшем мы будем изучать вопрос об образовании профилей зубьев колеса, рассматривая взаимодействие исходного контура рейки с нарезаемым колесом.

Как уже говорилось выше, нарезание зубчатых колес по методу обкатки производится перекатыванием рабочего инструмента (рейки) по центроиде заготовки нарезаемого колеса. Если зубья рейки пересечь прямыми, параллельными прямой головок (рис. 20.33), то все расстояния: ab, $a'b'$, $a''b''$, ... — будут равны шагу зацепления ($t = \pi m$). Одна из этих прямых и может быть выбрана за начальную прямую зуборезного инструмента рейки, которая в процессе обкатки катится без скольжения по начальной окружности колеса. При этом ширина впадины и толщина зуба будут различны в зависимости от того, какая из прямых ab, $a'b'$, $a''b''$, ... выбрана за начальную прямую. Очевидно, что ширина впадины и толщина зуба будут равны в том случае, когда за начальную прямую выбрана модульная прямая, делящая высоту h зуба пополам. Этот случай зацепления колеса с рейкой показан на рис. 20.34 (положение *I*). Здесь изображена рейка, занимающая положение *I*, и профиль $M_0Э$ зуба колеса, нарезанного этой рейкой; толщина зуба колеса, измеренная по начальной окружности, и ширина впадины между зубьями рейки, измеренная по начальной прямой, равны между собой. Если теперь передвинуть рейку из положения *I* в положение *II*, то ширина впадины между зубьями будет меньше толщины зуба. При этом профиль зуба колеса будет описан по той же эвольвенте и будет при этом несколько увеличен. Из чертежа видно, что при отодвигании рейки от центра нарезаемого колеса точка b практической линии зацепления переходит в точку b' и возможность подрезания зуба колеса уменьшается. При этом зуб получает бо́льшие размеры, измеряемые по начальной окружности. Таким образом, *при сдвиге рейки эвольвента не изменяется.*

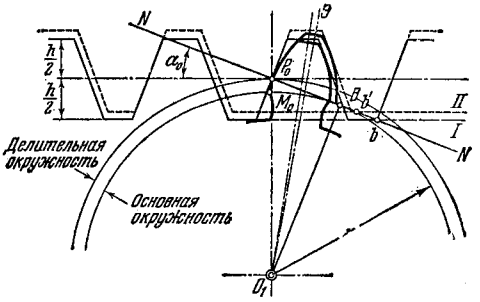


Рис. 20.34. Изменение толщины зуба колеса при изменении относительного расположения рейки.

Если сдвига рейки нет, то колеса носят название *нулевых колес.* Если сдвиг рейки направлен в сторону оси нарезаемого колеса, то колесо называется *отрицательным колесом.* Если сдвиг производится в сторону от оси нарезаемого колеса, то колесо называется *положительным колесом.* Соответственно и сдвигу рейки приписывают отрицательное или положительное значение.

Окружность, по которой при обработке колеса перекатывается соответствующая выбранная прямая рейки, носит название *начальной окружности обработки* или *делительной окружности колеса* (рис. 20.34). Таким образом, начальная окружность обработки колеса в общем случае нарезания зубчатых колес может не совпадать с начальной окружностью колеса. Необходимо отметить, что при сдвиге рейки радиус r основной окружности не изменяется.

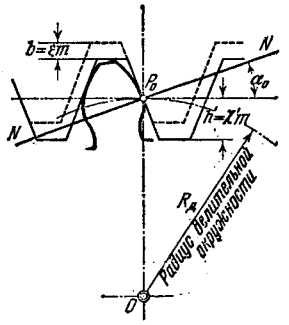


Рис. 20.35. Относительное положение инструментальной рейки при нарезании зубьев колеса со сдвигом.

3°. Несовпадение начальной окружности обработки с начальной окружностью колеса не препятствует воспроизведению колесами требуемого передаточного отношения. Это условие вытекает из важного свойства эвольвентного зацепления, рассмотренного нами в § 90, *5°*, заключающегося в том, что изменение межосевого расстояния O_1O_2 (рис. 20.11) не влияет на передаточное отношение i_{12}, так как передаточное отношение представляет собой отношение радиусов r_2 и r_1 основных окружностей (см. формулу (20.27)).

Таким образом, два колеса с эвольвентными профилями зубьев могут быть собраны с различными межосевыми расстояниями. При этом меняется положение полюса зацепления P_0 и величина угла зацепления α. Отсюда можно сделать и тот вывод, что для зубчатых колес с эвольвентными профилями зубьев величины радиусов начальных окружностей *определяются только после сборки этих колес*. Указанное свойство позволяет вводить в правильное зацепление два любых колеса, нарезанных одной и той же инструментальной рейкой.

4°. Как было сказано выше, одной из основных задач, с которой встречаются конструкторы при проектировании зубчатых колес, является избежание подреза зубьев, увеличение прочности зубьев и уменьшение износа путем соответствующего подбора очертания их профилей. Величина абсолютного сдвига b (рис. 20.35) производящей рейки, нарезающей колесо, обычно вычисляется в долях модуля и принимается равной

$$b = \xi m, \tag{20.63}$$

где ξ — коэффициент, носящий название *относительного сдвига* или *коэффициента сдвига*.

На практике чаще всего можно встретиться со следующими комбинациями колес, находящихся в зацеплении и образующих следующие передачи:

1) нулевая передача, когда оба колеса нарезаны без сдвига или когда одно колесо положительное, а второе отрицательное при

равном для обоих колес коэффициенте сдвига ξ, т. е. одно колесо нарезано с положительным сдвигом, а другое — с равным ему по абсолютной величине отрицательным сдвигом (компенсация сдвига);

2) положительная передача:

а) нулевое колесо с положительным колесом;

б) положительное колесо с отрицательным колесом (при неравных коэффициентах ξ, но при положительной сумме сдвигов).

Все остальные комбинации встречаются сравнительно редко.

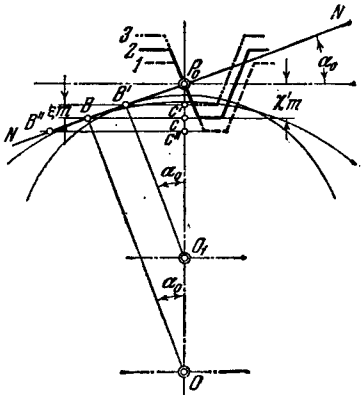


Рис. 20.36. К вопросу о подрезании зубьев колеса.

5°. Рассмотрим теперь, как связан коэффициент сдвига ξ рейки с числом зубьев, которое может быть нарезано рейкой на колесе. Пусть рейка установлена в положении *1* (рис. 20.36). В этом случае прямая головок рейки пересечет линию зацепления $N - N$ в точке B'' и нарезаемое колесо будет подрезано. Отодвинем рейку, сохраняя положение полюса P_0 в положение *2* так, чтобы прямая головок проходила через крайнюю точку B теоретической линии зацепления. В этом случае колесо не будет подрезано и минимальное число зубьев $z_{\min}$, которое может быть нарезано, определится по формуле (20.56):

$$z_{\min} = 2\chi'/\sin^2\alpha. \qquad (20.64)$$

Отодвинем рейку еще дальше от оси колеса в положение *3* на величину ξm. Тогда прямая головок рейки пройдет через точку B' и, следовательно, на колесе может быть без подрезания нарезано некоторое число зубьев z, меньшее, чем $z_{\min}$, подсчитанное по формуле (20.64).

Выведем зависимость между $z_{\min}$, z, χ' и ξ. Так как мы предположили, что полюс зацепления P_0 при сдвиге рейки не изменял своего положения, то из рис. 20.36 следует, что основная окружность после сдвига будет иметь в качестве центра точку, которую мы получим, если в точке B' восставим перпендикуляр к линии зацепления $N - N$ и найдем точку O_1 как точку пересечения этого перпендикуляра с линией P_0O. Из подобия треугольников получаем

$$\frac{P_0c}{P_0c'} = \frac{OB}{O_1B'}.$$

Так как $P_0c = \chi' m$, $P_0c' = \chi' m - \xi m$,

$$OB = OP_0\cos\alpha_0 = \frac{mz_{\min}}{2}\cos\alpha_0 \quad \text{и} \quad O_1B' = O_1P_0\cos\alpha_0 = \frac{mz}{2}\cos\alpha_0,$$

то

$$\frac{\chi' m}{\chi' m - \xi m} = \frac{z_{\min}}{z}, \quad \text{или} \quad \frac{\chi'}{\chi' - \xi} = \frac{z_{\min}}{z}.$$

Отсюда

$$\xi = \frac{\chi' (z_{\min} - z)}{z_{\min}}, \tag{20.65}$$

где $z_{\min}$ подсчитывается по формуле (20.64).

Для угла зацепления $\alpha_0 = 20°$ и коэффициента $\chi' = 1$ имеем

$$z_{\min} = 17; \tag{20.66}$$

для угла зацепления $\alpha_0 = 20°$ и $\chi' = 0{,}8$

$$z_{\min} = 14 \tag{20.67}$$

и для угла $\alpha_0 = 15°$ и $\chi' = 1$

$$z_{\min} = 30. \tag{20.68}$$

Для стандартного угла зацепления $\alpha_0 = 20°$ и $\chi' = 1$; воспользовавшись формулами (20.65) и (20.66), получаем следующее выражение для коэффициента сдвига ξ:

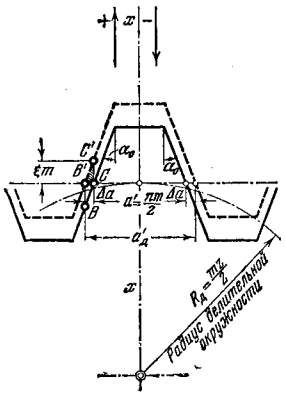


Рис. 20.37. К определению толщины зуба колеса по делительной окружности.

$$\xi = \frac{17 - z}{17}. \tag{20.69}$$

Формула (20.69) позволяет определять требуемую величину сдвига рейки для нарезания желательного числа зубьев без всякого их подрезания при угле зацепления $\alpha_0 = 20°$ и $\chi' = 1$.

В современных практических расчетах допускают некоторый малый подрез, при котором срезается незначительная часть эвольвенты, и часто пользуются формулой

$$\xi = \frac{14 - z}{14}. \tag{20.70}$$

6°. Переходим к определению некоторых основных размеров зубчатых колес, нарезанных со сдвигом. Начнем с определения толщины зуба. Толщина зуба a' (рис. 20.37) у нулевого колеса, т. е. при $\xi = 0$, измеренная по начальной окружности, равна

$$a' = \frac{t}{2} = \frac{\pi m}{2} \tag{20.71}$$

и соответствует ширине впадины на рейке, измеренной по прямой, перекатывающейся по начальной окружности обработки (делительной окружности), которая в этом случае совпадает с начальной

окружностью колеса. Дадим рейке смещение вдоль оси $x - x$, равное ξm. Это положение показано на рис. 20.37 штриховой линией. Тогда толщина зуба колеса (или ширина впадины на производящей рейке), измеренная по делительной окружности, будет равна

$$a'_д = a' + 2\Delta a. \tag{20.72}$$

При сдвиге рейки точка B переместится в положение B', а точка C — в положение C'. Очевидно, что отрезки BB' и CC', равны, т. е. $BB' = CC' = \xi m$. Из прямоугольного треугольника $B'C'C$ имеем $\frac{B'C}{CC'} = \operatorname{tg}\alpha_0$, где α_0 — выбранный угол зацепления при нарезании колеса (обычно 20°), или, так как $B'C = \Delta a$ и $CC' = \xi m$, то

$$\Delta a = \xi m \operatorname{tg}\alpha_0. \tag{20.73}$$

Величина сдвига ξ, являясь величиной алгебраической, может иметь знак плюс или минус. Подставляя полученное выражение в равенство (20.72) и учитывая выражение (20.71), получаем

$$a'_д = m\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg}\alpha_0\right). \tag{20.74}$$

Толщина зуба a'_i, измеренная по любой окружности радиуса R_i (рис. 20.38 и рис. 20.39), определяется из следующих условий. Сумма углов ϑ_i и γ_i равна $\vartheta_i + \gamma_i = \vartheta_д + \gamma_д$, откуда при

$$\gamma_i = \frac{a'_i}{2R_i} \quad \text{и} \quad \gamma_д = \frac{a'_д}{2R_д}$$

получаем

$$\vartheta_i + \frac{a'_i}{2R_i} = \vartheta_д + \frac{a'_д}{2R_д}.$$

Далее, так как согласно формуле (20.24)

$$\vartheta_i = \operatorname{inv}\alpha_i \quad \text{и} \quad \vartheta_д = \operatorname{inv}\alpha_0,$$

то

$$\frac{a'_i}{2R_i} + \operatorname{inv}\alpha_i = \frac{a'_д}{2R_д} + \operatorname{inv}\alpha_0, \tag{20.75}$$

откуда

$$a'_i = 2R_i\left(\frac{a'_д}{2R_д} + \operatorname{inv}\alpha_0 - \operatorname{inv}\alpha_i\right). \tag{20.76}$$

Подставляя в формулу (20.76) вместо $a'_д$ выражение (20.74), получаем окончательно

$$a'_i = m\frac{R_i}{R_д}\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg}\alpha_0\right) + 2R_i(\operatorname{inv}\alpha_0 - \operatorname{inv}\alpha_i), \tag{20.77}$$

где угол α_i определяется из условия $\cos\alpha_i = r/R_i$ (рис. 20.38).

С помощью формулы (20.77) может быть определена толщина зуба на окружности любого заданного радиуса R_i.

Формулы (20.76) или (20.77) позволяют проверить, не имеет ли зуб заострения, т. е. не пересекаются ли боковые профили зуба в точке D (рис. 20.38). На окружности заострения (рис. 20.38) толщина зуба равна нулю. Следовательно, в равенстве (20.76) следует положить $a'_i = 0$, $R_i = R_D$, где R_D — радиус окружности

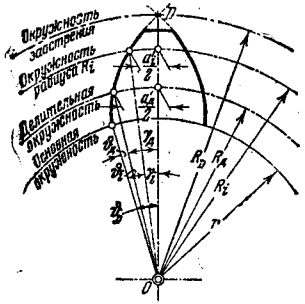


Рис. 20.38. К определению толщины зуба колеса по окружности произвольно заданного радиуса.

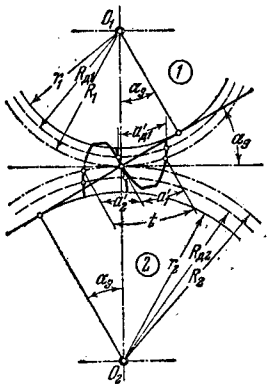


Рис. 20.39. К выводу формулы для определения монтажного угла зацепления.

заострения и $\text{inv}\,\alpha_i = \text{inv}\,\alpha_D = \vartheta_D$ (рис. 20.38). Тогда получаем уравнение $a'_д + 2R_д\vartheta_д - 2R_д\vartheta_D = 0$, откуда

$$\vartheta_D = \frac{a'_д + 2R_д\vartheta_д}{2R_д}.$$

Так как $\vartheta_D = \text{inv}\,\alpha_D$, то, определив угол α_D, можно найти величину радиуса R_D окружности заострения из условия $R_D = \frac{r}{\cos\alpha_D}$.

Обычно толщина зуба по окружности головок не должна быть меньше $0{,}25 \div 0{,}3m$. Определяем угол зацепления $\alpha_з$ колес, нарезанных со сдвигом рейки. Угол зацепления $\alpha_з$ совпадает с углом зацепления α_G только для нулевых колес. Величину этого угла определяем из следующих условий.

По формуле (23.74) размеры толщины a'_1 и a'_2 зубьев колес *1* и *2* (рис. 20.39), измеренные по начальным окружностям, равны

$$\left.\begin{aligned} a'_1 &= 2R_1\left(\frac{a'_{д1}}{2R_{д1}} + \text{inv}\,\alpha_0 - \text{inv}\,\alpha_з\right), \\ a'_2 &= 2R_2\left(\frac{a'_{д2}}{2R_{д2}} + \text{inv}\,\alpha_0 - \text{inv}\,\alpha_з\right), \end{aligned}\right\} \qquad (20.78)$$

где $a'_{д_1}$ и $a'_{д_2}$ — толщины зубьев колес *1* и *2*, измеренные по их делительным окружностям радиусов $R_{д1}$ и $R_{д2}$.

Так как при беззазорном зацеплении толщина зуба по начальной окружности одного колеса равна ширине впадины другого колеса и

$$a_1' + a_2' = t = \frac{2\pi R_1}{z_1} = \frac{2\pi R_2}{z_2}, \qquad (20.79)$$

то, подставляя в равенство (20.79) вместо a_1' и a_2' их значения из формул (20.78), получаем

$$\frac{2\pi R_1}{z_1} = 2R_1\left(\frac{a_{д1}'}{2R_{д1}} + \operatorname{inv}\alpha_0 - \operatorname{inv}\alpha_з\right) + 2R_2\left(\frac{a_{д2}'}{2R_{д2}} + \operatorname{inv}\alpha_0 - \operatorname{inv}\alpha_з\right). \qquad (20.80)$$

Принимая во внимание, что $R_2 = R_1\frac{z_2}{z_1}$ и $R_{д2} = R_{д1}\frac{z_2}{z_1}$, после преобразований, разрешив уравнение (20.80) относительно величины inv $\alpha_з$, получаем

$$\operatorname{inv}\alpha_з = \frac{(a_{д1}' + a_{д2}')\,z_1 - 2\pi R_{д1}}{2R_{д1}(z_1 + z_2)} + \operatorname{inv}\alpha_0. \qquad (20.81)$$

Подставляя в формулу (20.81) величины $a_{д_1}'$ и $a_{д_2}'$, определяемые по формуле (20.74),

$$a_{д1}' = m\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi_1 \operatorname{tg}\alpha_0\right),$$

$$a_{д2}' = m\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi_2 \operatorname{tg}\alpha_0\right),$$

и величину $R_{д1}$, равную

$$R_{д1} = \frac{mz_1}{2},$$

окончательно имеем

$$\operatorname{inv}\alpha_з = \frac{2(\xi_1 + \xi_2)\operatorname{tg}\alpha_0}{(z_1 + z_2)} + \operatorname{inv}\alpha_0. \qquad (20.82)$$

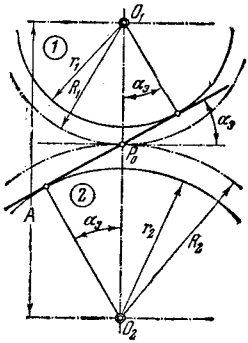


Рис. 20.40. К определению расстояния между центрами колес.

Анализ зависимости (20.82) показывает, что с увеличением суммарного сдвига $\xi_1 + \xi_2$ увеличивается и монтажный угол зацепления.

Из формулы (20.82) также следует, что для нулевой передачи, когда либо $\xi_1 = \xi_2 = 0$, либо $\xi_1 = -\xi_2$, всегда имеем

$$\operatorname{inv}\alpha_з = \operatorname{inv}\alpha_0, \quad \text{т. е.} \quad \alpha_з = \alpha_0.$$

Расстояние A (рис. 20.40) между осями колес, нарезанных со сдвигом, будет равно

$$A = O_1O_2 = O_1P_0 + O_2P_0 = \frac{r_1 + r_2}{\cos\alpha_з}.$$

Так как для колес с углом зацепления α_0 расстояние A_0 между осями равно $A_0 = \frac{r_1 + r_2}{\cos\alpha_0}$, то, следовательно, $A = A_0\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_з}$, откуда,

так как (см. § 89, 3°, формула (20.15))

$$A_0 = \frac{m}{2}(z_1 + z_2),$$

окончательно получаем

$$A = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_з}. \qquad (20.83)$$

Радиусы $R_{г1}$ и $R_{г2}$ окружностей головок колес *1* и *2* выражаются по формулам

$$R_{г1} = A - R_{д2} - \xi_2 m + \chi' m, \qquad (20.84)$$

$$R_{г2} = A - R_{д1} - \xi_1 m + \chi' m. \qquad (20.85)$$

Формулы для радиусов $R_{н1}$ и $R_{н2}$ окружностей ножек имеют вид

$$R_{н1} = R_{д1} - \chi'' m + \xi_1 m - cm, \qquad (20.86)$$

$$R_{н2} = R_{д2} - \chi'' m + \xi_2 m - cm, \qquad (20.87)$$

где $c = 0{,}25$ — коэффициент радиального зазора.

Коэффициент перекрытия может быть определен по формуле, аналогичной формуле (20.38), но при этом величина шага t по начальной окружности при условии нарезания колеса со сдвигом должна быть принята равной

$$t = \frac{\pi m \cos\alpha_0}{\cos\alpha_з}.$$

Соответственно угол α_0 в формуле (20.38) должен быть принят равным $\alpha_з$.

Таким образом, формула для определения коэффициента перекрытия ε для колес, нарезанных со сдвигом, будет иметь следующий вид:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{R_{г1}^2 - r_1^2} + \sqrt{R_{г2}^2 - r_2^2} - A\sin\alpha_з}{\pi m \cos\alpha_з}. \qquad (20.88)$$

Аналогично колесам с внешним зацеплением могут быть нарезаны колеса со сдвигом и с внутренним зацеплением с использованием сдвига долбяка. Формулы для расчета параметров такого зацепления могут быть получены из рассмотрения геометрии зацепления.

7°. Как видно из рассмотрения теории зубчатых колес, зубья которых нарезаны со сдвигом, величины сдвигов влияют на некоторые геометрические параметры зубчатой передачи: увеличиваются толщины зубьев, увеличиваются радиусы кривизны профилей зубьев, изменяется расположение практической линии зацепления относительно полюса зацепления, изменяются коэффициенты удельного скольжения зубьев и т. д. Все эти обстоятельства влияют на прочность и износ зубьев, плавность зацепления и т. д. Выбор того или иного сдвига зависит от назначения зубчатой

передачи, условий, в которых она работает, нагрузок на элементы зубчатой передачи и т. д. Подробно эти вопросы рассмотрены в специальных монографиях. В этих монографиях можно также получить сведения о геометрии колес, нарезаемых долбяком, и, в частности, зубчатых передач с внутренним зацеплением.

Пример 1. Определить необходимый сдвиг $b = \xi m$ рейки (рис. 20.35) для нарезания зубчатого колеса с числом зубьев $z = 10$ и модулем $m = 10$ *мм*. Угол зацепления рейки $\alpha_0 = 20°$. Коэффициент высоты головки зубьев рейки $\chi' = 1$.

Величина коэффициента сдвига определяется по формуле (20.69). Имеем

$$\xi = \frac{17 - z}{17} = \frac{17 - 10}{17} = \frac{7}{17}.$$

Величина b определяется по формуле (20.63). Имеем

$$b = \xi m = \frac{7 \cdot 10}{17} = 4{,}12 \text{ мм}.$$

Пример 2. Определить основные размеры зубчатой передачи из условия отсутствия подрезания зуба малого колеса.

Данные для расчета:

Числа зубьев колес равны $z_1 = 12$, $z_2 = 36$.

Модуль инструментальной рейки равен $m = 10$ *мм*.

Коэффициент высоты головки и ножки зуба $\chi' = \chi'' = \chi = 1$.

Угол зацепления при нарезании (угол наклона образующей прямой рейки) $\alpha_0 = 20°$. Коэффициент радиального зазора $c = 0{,}25$.

Порядок расчета:

1. Выбираем коэффициенты сдвига рейки ξ_1 и ξ_2 из условия отсутствия подрезания зубьев по формуле (20.69):

$$\xi_1 = \frac{17 - z_1}{17} = \frac{17 - 12}{17} = 0{,}2941.$$

Так как число зубьев z_2 больше 17, то принимаем сдвиг ξ_2 на колесе *2* равным нулю: $\xi_2 = 0$.

2. Определяем по формуле (20.82) угол зацепления $\alpha_з$ в сборке при беззазорном зацеплении:

$$\operatorname{inv} \alpha_з = \frac{2(\xi_1 + \xi_2) \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1 + z_2} + \operatorname{inv} \alpha_0 = \frac{2 \cdot 0{,}2941 \cdot 0{,}364}{12 + 36} + 0{,}0149 = 0{,}01936,$$

откуда находим по таблицам значение угла $\alpha_з$. Имеем $\alpha_з \approx 21°45'$.

3. Определяем по формуле (20.83) межцентровое расстояние:

$$A = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_з} = \frac{10}{2}(12 + 36)\frac{0{,}9397}{0{,}9288} = 242{,}81 \text{ мм}.$$

4. Определяем радиусы $R_{д1}$ и $R_{д2}$ делительных окружностей:

$$R_{д1} = \frac{mz_1}{2} = 60 \text{ мм}, \qquad R_{д2} = \frac{mz_2}{2} = 180 \text{ мм}.$$

5. Подсчитываем по формулам (20.84) и (20.85) радиусы $R_{г1}$ и $R_{г2}$ окружностей (радиусы заготовок):

$$R_{г1} = A - R_{д2} - \xi_2 m + \chi m = 242{,}81 - 180 + 10 = 72{,}81 \text{ мм},$$
$$R_{г2} = A - R_{д1} - \xi_1 m + \chi m = 242{,}81 - 60 - 2{,}94 + 10 = 189{,}87 \text{ мм}.$$

6. Определяем радиусы r_1 и r_2 основных окружностей:

$$r_1 = R_{д1} \cos \alpha_0 = 60 \cdot 0{,}94 = 56{,}4 \text{ мм},$$
$$r_2 = R_{д2} \cos \alpha_0 = 180 \cdot 0{,}94 = 169{,}2 \text{ мм}.$$

7. Проверяем зуб малого колеса на отсутствие заострения, для чего подсчитываем по формуле (20.77) толщину зуба $a'_{г_1}$ по окружности головок, положив в указанной форме $R_i = R_{г1}$, причем угол $\alpha_{г1}$ находим из условия

$$\cos \alpha_{г1} = \frac{r_1}{R_{г1}} = \frac{56{,}4}{72{,}81} = 0{,}7745;$$

следовательно, $\alpha_{г1} = 39° 15'$.

По таблицам имеем $\text{inv}\alpha_{г1} = 0{,}1312$. Окончательно получаем

$$a'_{г1} = m \frac{R_{г1}}{R_{д1}} \left(\frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg} \alpha_0 \right) + 2R_г (\text{inv}\, \alpha_0 - \text{inv}\, \alpha_{г1}) =$$
$$= 10 \frac{72{,}81}{60} (1{,}5708 + 2 \cdot 0{,}2941 \cdot 0{,}364) +$$
$$+ 2 \cdot 72{,}81 \cdot (0{,}0149 - 0{,}1312) \approx 4{,}5 \text{ мм}.$$

Следовательно, на окружности головок ширина зуба $a'_{г1}$ не равна нулю, зуб не имеет заострения и $a'_{г1} > 0{,}3m$.

8. Подсчитываем радиусы $R_{н1}$ и $R_{н2}$ окружностей ножек по формулам (20.86) и (20.87):

$$R_{н1} = R_{д1} - \chi m + \xi_1 m - cm = 60 - 10 + 2{,}941 - 2{,}5 = 50{,}45 \text{ мм},$$
$$R_{н2} = R_{д2} - \chi m + \xi_2 m - cm = 180 - 10 - 2{,}5 = 167{,}5 \text{ мм}.$$

9. Подсчитываем величину коэффициента перекрытия ε по формуле (20.88):

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{R_{г1}^2 - r_1^2} + \sqrt{R_{г2}^2 - r_2^2} - A \sin \alpha_з}{\pi m \cos \alpha_0} =$$
$$= \frac{\sqrt{(72{,}81)^2 - (56{,}4)^2} + \sqrt{(189{,}87)^2 - (169{,}2)^2} - 242{,}81 \cdot 0{,}37055}{3{,}14 \cdot 10 \cdot 0{,}9397} \approx 1{,}43.$$

§ 97. Проектирование циклоидальных профилей

1°. Циклоидальным зубчатым зацеплением называется зацепление, профили зубьев которого очерчены по участкам циклоид, эпициклоид и гипоциклоид.

Рассмотрим, каким образом профилируются зубья колес внешнего циклоидального зубчатого зацепления. Пусть задано передаточное отношение i_{12} зубчатого механизма. По формулам

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{R_2}{R_1}=-\frac{z_2}{z_1}$$

и

$$A=R_1+R_2,$$

где A — расстояние между центрами O_1 и O_2 начальных окружностей, находим радиусы R_1 и R_2 начальных окружностей (рис. 20.41). Задаемся, далее, двумя вспомогательными окружностями S_1 и S_2 радиусов r_1 и r_2. Пусть эти окружности касаются начальных окружностей в полюсе зацепления P_0. Окружность S_1 катим без скольжения по начальной окружности $Ц_2$ второго колеса. Тогда точка окружности S_1, совпадающая в начальном положении с точкой P_0, опишет эпициклоиду $P_0Э_2$. Если ту же окружность прокатить без скольжения по начальной окружности $Ц_1$, то эта же точка вспомогательной окружности S_1 опишет гипоциклоиду $P_0Г_1$.

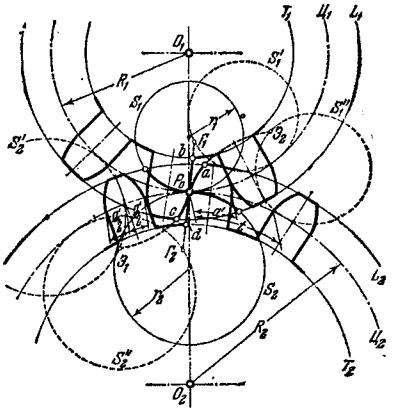


Рис. 20.41. Внешнее циклоидальное зубчатое зацепление.

Построенные эпициклоида и гипоциклоида являются взаимоогибаемыми и, следовательно, могут быть использованы в качестве сопряженных профилей зубьев.

Аналогично вторую вспомогательную окружность S_2 прокатываем без скольжения по начальным окружностям $Ц_1$ и $Ц_2$. Тогда точка окружности S_2, первоначально совпадающая с точкой P_0, опишет эпициклоиду $P_0Э_1$ и гипоциклоиду $P_0Г_2$. Чтобы определить участки эпициклоид и гипоциклоид, которые могут быть использованы в качестве профилей зубьев, проводим окружности L_1 и L_2 головок и окружности T_1 и T_2 ножек зубьев. Эти окружности ограничат действительные практические профили зубьев. Так, участок P_0a эпициклоиды $P_0Э_2$ есть профиль головки зуба второго колеса, а участок P_0b гипоциклоиды $P_0Г_1$ — профиль ножки зуба первого колеса. Точно так же участок P_0c эпициклоиды $P_0Э_1$ является профилем головки зуба первого колеса, а участок P_0d гипоциклоиды $P_0Г_2$ — профилем ножки зуба второго колеса. Таким образом, профиль каждого зуба очерчен по эпициклоиде и гипоциклоиде, причем эпициклоида все время соприкасается с гипоциклоидой.

2°. Из частных видов циклоидального зацепления остановимся на цевочном зацеплении. Пусть заданы центроиды $Ц_1$ и $Ц_2$ (рис. 20.42). За первую вспомогательную окружность S_1 выбираем саму центроиду $Ц_1$. Тогда точка этой центроиды, совпадающая с точкой P_0, опишет при качении по центроиде $Ц_2$ эпициклоиды $P_0Э$ (показаны штриховыми линиями). Вторая вспомогательная окружность пусть будет точкой, совпадающей с точкой P_0. Чтобы обеспечить передачу движения, вместо выбранной точки сцепляют с центроидой $Ц_2$ ролики F радиуса r, а профили зубьев смещают на величину радиуса r ролика, т. е. приводят эквидистанты $Э'Э'$ эпициклоиды. Тогда получаем так называемое *цевочное зацепление*. Ролики F носят название *цевок*. Цевочное зацепление обладает тем недостатком, что в нем быстро изнашиваются цевки. Практическое применение получило так называемое *внецентроидное цевочное зацепление*, являющееся частным видом цевочного зацепления, когда центры цевок цевочного колеса вынесены за пределы центроиды $Ц_1$. При этом соответственно смещаются зубья зубчатого колеса, что позволяет увеличить шаг зацепления.

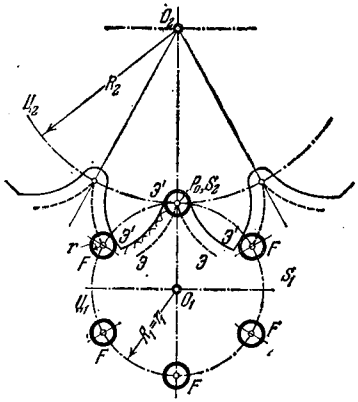


Рис. 20.42. Цевочное зацепление.

§ 98. Проектирование передач с косыми зубьями

1°. В цилиндрических колесах с прямыми зубьями соприкасание двух сопряженных профилей происходит по прямой, параллельной осям колес. Проведем касательную плоскость S к основному цилиндру (рис. 20.43). Пусть плоскость S касается цилиндра по некоторой прямой MM, представляющей собой одну из образующих цилиндра; эта плоскость пересекает боковую поверхность зуба по некоторой прямой AA, параллельной образующей цилиндра. Соприкасание зубьев происходит по прямой AA в тот момент, когда плоскость S совпадает с так называемой плоскостью зацепления. Таким образом, в цилиндрических колесах с прямыми зубьями соприкасание происходит одновременно по всей длине зуба по прямым, параллельным образующим цилиндра.

Если при изготовлении зуба были допущены какие-либо погрешности (неточность профиля, непостоянство шага и т. д.), то эти погрешности могут значительно ухудшать условия работы зубчатой передачи, в частности, например, усиливать шум. Кроме того, как было показано выше, коэффициент перекрытия зубчатых

колес с прямыми зубьями ограничен весьма узкими пределами, вследствие чего вся нагрузка распределяется не более чем на две пары зубьев. С целью уменьшения влияния погрешностей на работу колес и увеличения коэффициента перекрытия можно при изготовлении колес прямые зубья заменить ступенчатыми. Образование ступенчатых зубчатых колес можно представить следующим образом.

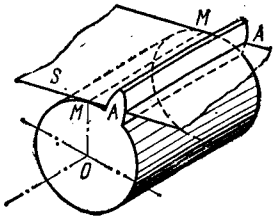


Рис. 20.43. Цилиндрическое колесо с прямыми зубьями.

Рассечем зубчатое колесо с прямыми зубьями на равные части плоскостями, перпендикулярными к оси колеса (рис. 20.44). Тогда получим несколько дисков равной толщины. Каждый из полученных дисков сдвинем один относительно другого на один и тот же угол. Тогда, если два таких колеса привести в соприкасание, то одновременно в зацеплении будут находиться различные участки профилей зубьев. Первый зуб будет соприкасаться по прямой A_1A_1, второй зуб будет соприкасаться по прямой A_2A_2, третий зуб — по прямой A_3A_3 и т. д.

Таким образом, влияние возможных погрешностей уменьшится. Отдельные участки профилей зубьев будут последовательно приходить в зацепление; дуга зацепления увеличится на величину смещения зубьев по начальной окружности, и, следовательно, увеличится коэффициент перекрытия передачи.

2°. Зубчатые колеса редко выполняются так, как это указано на рис. 20.44. Обычно вместо колес со ступенчатыми зубьями применяются *колеса с винтовыми*, или *косыми*, *зубьями* (рис 20.45).

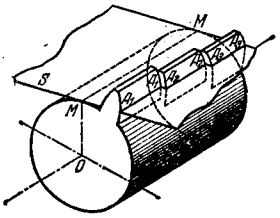


Рис. 20.44. Цилиндрическое колесо со ступенчатыми зубьями.

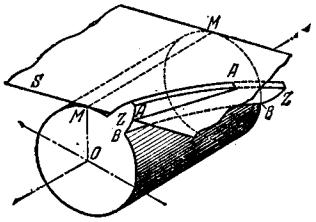


Рис. 20.45. Цилиндрическое колесо с винтовыми зубьями.

Образование боковой поверхности косого зуба можно себе представить, если рассмотреть качение без скольжения плоскости S (рис. 20.45) по основному цилиндру с осью O. Если на плоскости S выбрать прямую AA, составляющую с образующей цилиндра некоторый угол, то каждая из точек прямой AA опишет эвольвенту, а сама прямая опишет поверхность, называемую *развертывающимся геликоидом*. Эвольвенты каждого из поперечных сечений развертыв-

вающегося геликоида имеют основания, расположенные по винтовой линии BB (рис. 20.45). Для получения сопряженных поверхностей двух цилиндрических колес с косыми зубьями необходимо последовательно производить качение общей касательной плоскости сначала по одному, а потом по другому основному цилиндру, при этом прямая AA, выбранная в этой плоскости, опишет поверхности двух взаимоогибаемых геликоидов. Касание геликоидов будет происходить по общей образующей, которая будет всегда располагаться на общей касательной плоскости.

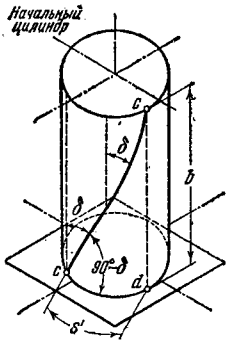


Рис. 20.46. Угол скручивания и дуга скручивания винтовой линии косозубого колеса.

Угол δ (рис. 20.46), образованный осью колеса и винтовой линией, постоянный. Угол δ обычно носит название *угла скручивания*. Дуга s', измеренная по окружности начального цилиндра, называется *дугой скручивания*. Два сопряженных колеса должны иметь равные углы скручивания. При внешнем зацеплении винтовая линия на одном колесе должна быть правой, а на другом — левой. При внутреннем зацеплении винтовые линии должны быть либо обе правыми, либо обе левыми. В плоскостях, перпендикулярных к оси колеса, зацепление происходит так же, как и в обыкновенных зубчатых колесах, но в каждый рассматриваемый момент в зацеплении участвуют различные точки профилей. Поэтому влияние погрешностей при изготовлении этих колес оказывается гораздо меньше, чем у колес с прямыми зубьями. Кроме того, вследствие скручивания зуба на угол δ длина дуги зацепления увеличивается на величину (рис. 20.46)

$$s' = \cup cd.$$

Величина добавочной дуги зацепления

$$s' = b \operatorname{tg} \delta.$$

Если обозначить основную дугу зацепления через s'', то, очевидно, полная дуга зацепления выразится так: $s = s'' + s'$. Таким образом, коэффициент перекрытия ε' колес с косыми зубьями

$$\varepsilon' = \frac{s}{t} = \frac{s''}{t} + \frac{s'}{t} = \varepsilon + \frac{b}{t} \operatorname{tg} \delta, \qquad (20.89)$$

где ε — коэффициент перекрытия для того случая, когда при том же числе зубьев колеса имеют прямые зубья.

Из формулы (20.89) следует, что коэффициент перекрытия косозубых колес может быть значительно больше, чем у прямозубых.

Таким образом, при передаче косозубыми колесами одновременно в зацеплении может находиться уже не одна или две пары зубьев. В некоторых случаях число пар зубьев, находящихся одновременно в зацеплении, может достигать десяти. Нагрузка в этих передачах распределяется на несколько зубьев, благодаря чему плавность передачи повышается. Поэтому косозубые колеса широко применяются для передач с большими скоростями и большими мощностями. На рис. 20.47 приведен пример механизма с косозубыми колесами. Как видно из схематического изображения развертки обода косозубого колеса (рис. 20.48), в колесах с косыми зубьями следует различать три шага зацепления, измеряемых по начальному цилиндру: *окружной шаг* t, получаемый в пересечении колеса плоскостью, перпендикулярной к оси $O-O$ начального

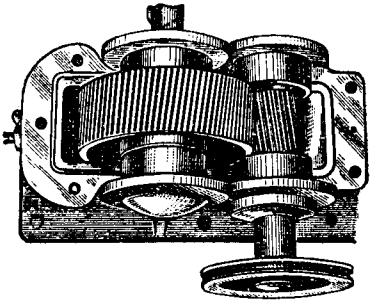


Рис. 20.47. Зубчатый редуктор с косозубыми колесами.

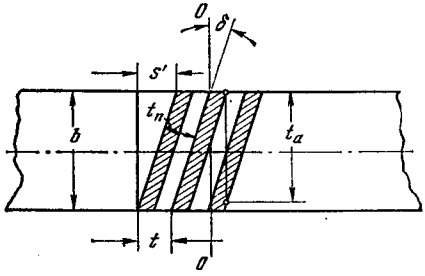


Рис. 20.48. Развертка обода косозубого колеса.

цилиндра в торцовом сечении; *нормальный шаг* t_n, получаемый пересечением колеса плоскостью, нормальной к винтовой линии на начальном цилиндре, и *аксиальный шаг* t_a, получаемый пересечением колеса плоскостью, проходящей через ось $O-O$ начального цилиндра.

Связь между этими шагами, как это следует из рис. 20.48, имеет следующий вид:

$$t = \frac{t_n}{\cos\delta} = \frac{t_a}{\operatorname{ctg}\delta}.$$

Соответственно может быть установлена и связь между модулем m в торцовом сечении, равным $m = t/\pi$, модулем m_n в нормальном сечении, равным $m_n = t_n/\pi$, и модулем m_a в аксиальном сечении, равным $m_a = t_a/\pi$. Стандартным модулем является модуль m_n, так как нарезание зубьев косозубого колеса может быть сделано стандартным реечным инструментом, устанавливаемым под углом δ к оси колеса. Из рис. 20.48 следует, что

$$m = \frac{m_n}{\cos\delta}, \qquad m_a = \frac{m_n}{\sin\delta}. \tag{20.90}$$

Диаметр $D_д$ делительной окружности, измеренный в торцовом сечении, равен

$$D_д = mz = \frac{m_n z}{\cos\delta}. \qquad (20.91)$$

3°. Рассмотрим вопрос о действии сил в зубчатой передаче с косыми зубьями. На зуб ведомого колеса 2 действует сила P_{12}, расположенная в нормальной к зубу плоскости, содержащей прямую O_1O_2 (рис. 20.49, *а*), и отклоненная на угол скручивания δ (рис. 20.49, *б*) от торцового сечения. В этой плоскости сила P_{12} направлена под углом зацепления α_n к нормальной плоскости (рис. 20.49, *в*). Сила P_{12} может быть представлена как сумма трех составляющих, лежащих в трех перпендикулярных плоскостях: силы P^t_{12}, направленной по касательной к начальным цилиндрам, силы P^r_{12}, направленной по радиусу колеса 2, и силы P^a_{12}, направленной параллельно оси колеса 2:

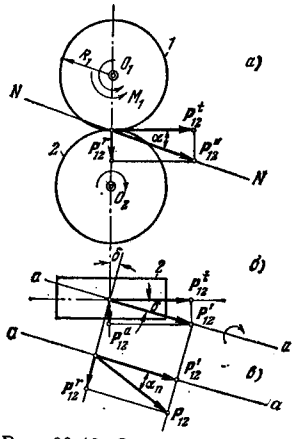


Рис. 20.49. Силы, действующие на зуб косозубого колеса: *а*) слагающая силы, расположенная в торцовой плоскости; *б*) слагающая силы, расположенная в горизонтальной плоскости; *в*) слагающая силы, расположенная в нормальной плоскости.

$$P_{12} = P^t_{12} + P^r_{12} + P^a_{12}. \qquad (20.92)$$

Из рис. 20.49, *а* следует, что сила P^r_{12} равна

$$P^r_{12} = P^t_{12}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (20.93)$$

Далее, из рис. 20.49, *б* имеем

$$P^a_{12} = P^t_{12}\operatorname{tg}\delta. \qquad (20.94)$$

Тогда результирующая сила P_{12}, согласно уравнению (20.92) и формулам (20.93) и (20.94), равна

$$P_{12} = \sqrt{(P^t_{12})^2 + (P^r_{12})^2 + (P^a_{12})^2} = \sqrt{(P^t_{12})^2 + (P^t_{12}\operatorname{tg}\alpha)^2 + (P^t_{12}\operatorname{tg}\delta)^2} =$$
$$= P^t_{12}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\delta} + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{M_1}{R_1}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\delta} + \operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad (20.95)$$

где M_1 — вращающий момент, приложенный к колесу 1, радиус которого равен R_1.

Аналогично определяются и силы, действующие на ведущее колесо 1. Для получения уравнения, связывающего углы α, δ и α_n, повернем на угол 90° плоскость, содержащую силу $P'_{12} = P^t_{12} + P^a_{12}$, и повернем силу P^r_{12} (рис. 20.49, *в*) вокруг прямой $a - a$ до совпадения с плоскостью чертежа. Сила P_{12} будет также лежать в этой плоскости и будет образовывать угол α_n с силой P'_{12}. Из рис. 20.49, *в* получаем

$$\operatorname{tg}\alpha_n = P^r_{12}/P'_{12}. \qquad (20.96)$$

Из рис.20.49, *б* получаем

$$P'_{12} = P^t_{12} \frac{1}{\cos \delta}. \qquad (20.97)$$

Подставляя в равенство (20.96) значения для сил P^r_{12} и P'_{12} из формул (20.93) и (20.97), получаем

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha \cos \delta. \qquad (20.98)$$

Таким образом, особенностью колес с косыми зубьями является то, что, кроме передачи окружного усилия $\boldsymbol{P}^t_{12}$ (рис. 20.50), в этих колесах появляется осевое усилие $\boldsymbol{P}^a_{12}$.

Это усилие вызывает необходимость устройства упорного осевого подшипника и, кроме того, вызывает в нем дополнительные потери на трение. Для устранения указанного недостатка применяют *колеса с шевронными зубьями* (рис. 20.50), представляющими собой как бы два косозубых колеса с симметричным

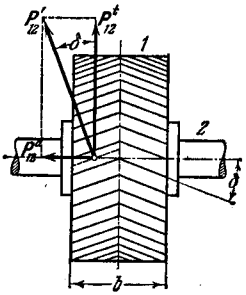


Рис. 20.50. Зубчатое колесо с шевронными зубьями.

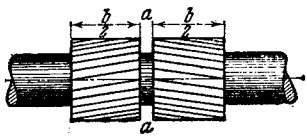


Рис. 20.51. Шевронное колесо с промежуточным желобком.

расположением зубьев. У этих колес осевые усилия взаимно уравновешиваются, и, следовательно, отпадает необходимость в установке опорных подшипников.

Для большего удобства изготовления шевронное колесо делают иногда с промежуточным желобком *a* посередине (рис. 20.51).

4°. Как было показано выше, при зацеплении колес с косыми зубьями с эвольвентным профилем соприкасание зубьев происходит по прямой линии.

Геометрическое место прямых соприкасания представляет собой плоскость, являющуюся плоскостью зацепления. Плоскость зацепления образует угол, равный углу зацепления α, с плоскостью, касательной к начальным цилиндрам колес.

М. Л. Новиков предложил косозубое зацепление с неэвольвентными профилями зубьев. Зубья располагаются по некоторым винтовым линиям, имеющим равные углы скручивания δ (рис. 20.52). На рис. 20.52 показаны две винтовые линии, лежащие на начальных цилиндрах колес *1* и *2*. Дуги P_0a_1 и P_0a_2, на которые перекатываются цилиндры, всегда равны между собой. Вместо плоскости зацепления М. Л. Новиков ввел линию зацепления $C_3 - C_3$,

расположенную параллельно осям начальных цилиндров. Сопряженные профили зубьев колес *1* и *2* последовательно входят в зацепление в точках C', C'', C''', ..., и, таким образом, в этом случае применяется не линейное, а точечное зацепление. При этом нормаль в точке соприкасания пересекает в соответствующей

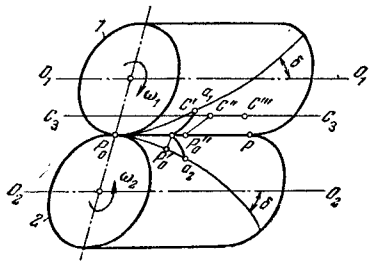


Рис. 20.52. Винтовые линии косозубого зацепления Новикова.

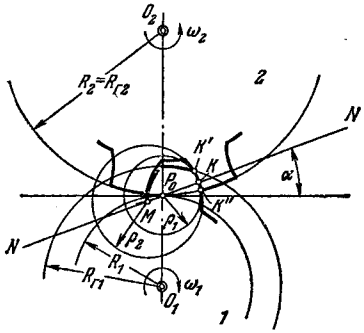


Рис. 20.53. Построение профилей зубьев зацепления Новикова.

точке, например P_0'', прямую $P - P$ соприкасания начальных цилиндров, и тем самым всегда сохраняется заданное передаточное отношение. Профили зубьев зубчатого зацепления Новикова вообще могут быть выполнены по различным кривым. Наиболее простыми, как показали исследования, являются профили, очерченные в торцовом сечении по окружностям.

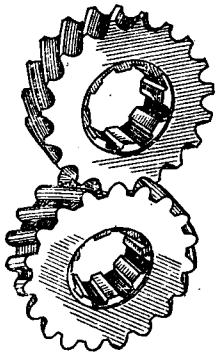


Рис. 20.54. Зубчатая передача с зацеплением Новикова.

Построение профилей указанного вида производится следующим образом. На прямой $N - N$ (рис. 20.53), образующей с начальными окружностями угол α, выбирается точка K. Профиль зуба малого колеса *1* очерчивается по дуге окружности радиуса $\rho_1 = P_0K$ и является выпуклым. Профиль зуба большого колеса *2* очерчивается по дуге окружности радиуса ρ_2, несколько большего радиуса ρ_1. Дуга окружности радиуса ρ_2 очерчивается из точки M как из центра. Точка M лежит также на прямой $N - N$. Профиль зуба большого колеса *2* является вогнутым. Нетрудно видеть (рис. 20.53), что при малой разнице радиусов ρ_1 и ρ_2 профили зубьев на некотором участке $K' - K''$ почти совпадают, что понижает удельные давления на зубья, несмотря на точечный их контакт. Толщина зуба одного из колес может быть выбрана произвольной, а толщина другого определяется построением. Толщины зубьев a_1 и a_2 колес *1* и *2* в данном зацеплении выбираются по условию $a_1 = (1{,}3 \div 1{,}5)\, a_2$ и $(a_1 + a_2)$ несколько

меньше шага t. При проектировании колес Новикова рекомендуется придерживаться следующих соотношений: угол $\alpha = 20° \div 30°$, угол скручивания $\delta = 5° \div 40°$, радиус $\rho_1 = 1{,}35m$, радиус $\rho_2 = (1{,}03 \div 1{,}10)\,\rho_1$. Радиус $R_{г2}$ окружности головок большого колеса следует выбирать равным радиусу R_2 начальной окружности.

К недостаткам зацепления Новикова надо отнести то, что коэффициент перекрытия ε зацепления меньше, чем в косозубых колесах с эвольвентным профилем. Коэффициент перекрытия

$$\varepsilon = \frac{b}{t}\operatorname{tg}\delta, \tag{20.99}$$

и он меньше коэффициента перекрытия ε', определяемого по формуле (20.89), на величину коэффициента перекрытия в торцовом сечении. На рис. 20.54 показана зубчатая передача с зацеплением Новикова.

ГЛАВА XXI

СИНТЕЗ ТРЕХЗВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 99. Проектирование конической зубчатой передачи

1°. При проектировании конической зубчатой передачи обычно задают передаточное отношение i_{12} и угол δ между осями колес *1* и *2* (рис. 21.1).

Тогда углы δ_1 и δ_2, равные половинам углов раствора начальных конусов (аксоид), могут быть определены, если воспользоваться формулой (7.6):

$$i_{12} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1}, \tag{21.1}$$

и условием

$$\delta = \delta_1 + \delta_2. \tag{21.2}$$

Подставляя в формулу (21.1) значение угла δ из равенства (21.2), имеем:

$$i_{12} = \frac{\sin(\delta-\delta_1)}{\sin\delta_1} = \frac{\sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1}{\sin\delta_1} = \sin\delta\operatorname{ctg}\delta_1 - \cos\delta, \tag{21.3}$$

получаем, что угол δ_1 равен

$$\delta_1 = \operatorname{arcctg}\frac{i_{12}+\cos\delta}{\sin\delta}. \tag{21.4}$$

Угол δ_2 будет тогда равен

$$\delta_2 = \delta - \delta_1 = \delta - \operatorname{arcctg}\frac{i_{12}+\cos\delta}{\sin\delta}. \tag{21.5}$$

Если угол $\delta = 90°$, то формулы (21.4) и (21.5) принимают вид

$$\delta_1 = \operatorname{arcctg} i_{12}, \qquad \delta_2 = \delta - \operatorname{arcctg} i_{12}. \tag{21.6}$$

В равенства (21.4) — (21.6) передаточное отношение i_{12} входит как абсолютная величина.

Образование зубьев конических колес можно представить себе следующим образом. Пусть построены конусы S_1 и S_2 (рис. 21.1), являющиеся аксоидами в относительном движении. По аналогии с цилиндрическим зацеплением будем их называть *начальными конусами*. Пересечем эти конусы какой-либо сферой с центром в точке O. Тогда в пересечении получим две окружности I и II,

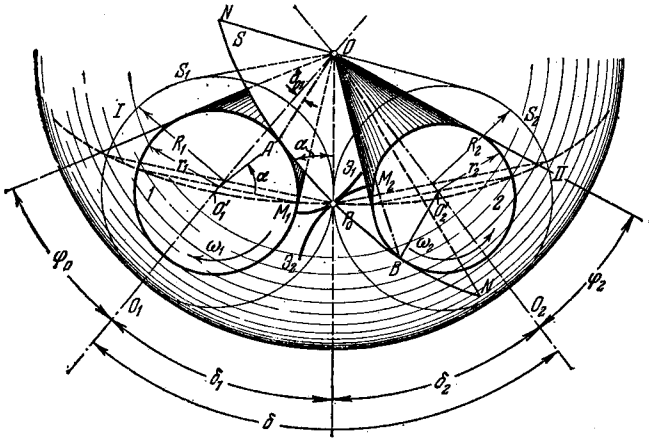


Рис. 21.1. Построение конического зацепления на сфере.

соприкасающиеся в точке P_0. Исследование перекатывания без скольжения начальных конусов может быть заменено рассмотрением перекатывания окружностей I и II одной по другой без скольжения. Так как окружности I и II лежат на сфере, то вместо образующей прямой мы получаем образующую дугу $N — N$ большого круга на построенной сфере. Число сфер, которыми мы можем пересечь указанные конусы, бесконечно велико, и для каждой сферы можно получить соответствующие окружности, аналогичные окружностям I и II, и образующие дуги, аналогичные дуге $N — N$. Геометрическое место всех образующих дуг $N — N$ есть некоторая плоскость S, содержащая прямую OP_0 и наклоненная к плоскости, касательной к начальным конусам, под углом α. Угол α, обычно принимающийся равным 20°, является *углом зацепления*, а плоскость S — *образующей плоскостью*. Если из точек оси OO_1 опустить перпендикуляры на плоскость S, то эти перпендикуляры образуют плоскость, содержащую ось OO_1 и перпендикулярную к плоскости S.

В пересечении этой плоскости с плоскостью S получаем прямую AO. Вращением прямой AO вокруг оси OO_1 получается конус *1*, который называется *основным конусом*. Плоскость S — касательна к основному конусу. Аналогично может быть построен второй основной конус *2*. Профили зубьев могут быть образованы перекатыванием без скольжения плоскости S по основным конусам. В результате этого перекатывания на поверхности сферы получаются сферические эвольвенты.

При качении плоскости S по основному конусу *1* точка плоскости S, совпадающая с точкой P_0, опишет сферическую эвольвенту $M_1\mathcal{Э}_1$, а при качении по основному конусу *2* — сферическую эвольвенту $M_2\mathcal{Э}_2$. При качении окружностей *I* и *II* эвольвенты $M_1\mathcal{Э}_1$ и $M_2\mathcal{Э}_2$ перекатываются со скольжением одна по другой. Если такие же сферические эвольвенты построить для других точек плоскости S, расположенных на прямой OP_0, то эти эвольвенты будут образовывать поверхности зубьев эвольвентного конического зацепления. Таким образом, передача вращения между конусами *1* и *2* осуществляется качением со скольжением сопряженных сферических эвольвентных поверхностей. Разобранное построение позволяет получить теоретически точное коническое эвольвентное зацепление.

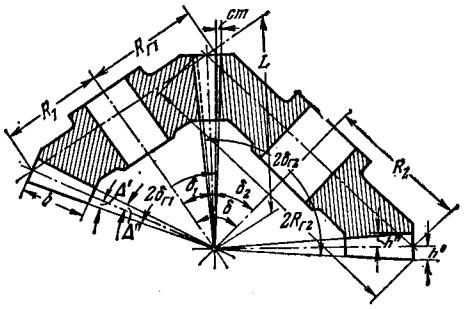


Рис. 21.2. Конструктивная схема зацепления двух конических колес.

2°. Переходим к рассмотрению основных размеров конических зубчатых колес (рис. 21.2).

Размеры зубьев конических зубчатых колес в различных сечениях неодинаковы. Стандартный модуль m принято назначать для внешнего торцового сечения зубьев. Радиусы начальных окружностей колес для внешнего сечения определяются по известным формулам

$$R_1=\frac{mz_1}{2}, \quad R_2=\frac{mz_2}{2}. \tag{21.7}$$

Высота h' головки зуба стандартного колеса $h'=m$ и для укороченного зуба $h'=0{,}8m$. Высота ножки зуба $h''=h'+cm$, где $c=(0{,}2\div 0{,}3)$ — коэффициент зазора в направлении, перпендикулярном к общей образующей начальных конусов. Длина L образующей начальных конусов равна

$$L=\frac{R_1}{\sin\delta_1}=\frac{R_2}{\sin\delta_2}. \tag{21.8}$$

Углы Δ' и Δ'' головки и ножки зуба определяются по соответствующим тангенсам:

$$\operatorname{tg}\Delta' = \frac{h'}{L}, \qquad \operatorname{tg}\Delta'' = \frac{h''}{L}. \tag{21.9}$$

Радиусы $R_{г1}$ и $R_{г2}$ конусов головок равны

$$R_{г1} = R_1 + h' \cos\delta_{г1}, \quad R_{г2} = R_2 + h' \cos\delta_{г2}, \tag{21.10}$$

где углы $\delta_{г1}$ и $\delta_{г2}$ определяются по формулам

$$\delta_{г1} = \delta_1 + \Delta', \qquad \delta_{г2} = \delta_2 + \Delta'. \tag{21.11}$$

3°. Проектирование и выполнение точного эвольвентного конического зацепления сопряжено со многими практическими трудностями, так как сфера не развертывается на плоскость. Поэтому проектирование и изготовление колес этого зацепления не могут быть сведены к аналогичной задаче с плоскими цилиндрическими колесами.

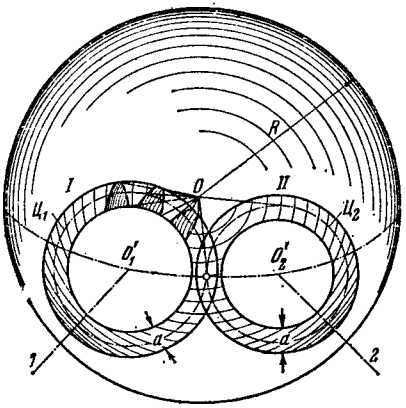


Рис. 21.3. Расположение профилей зубьев конических колес на сферической поверхности.

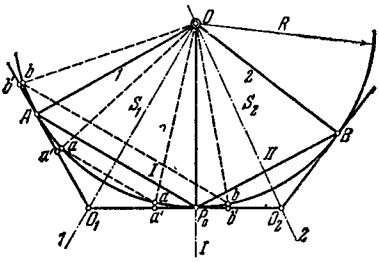


Рис. 21.4. Проекции начальных конусов на плоскость.

Это обстоятельство заставило применять *приближенный метод профилирования зубьев эвольвентных конических колес.* Этот метод заключается в следующем. Рассматривая точное очертание зубьев конических колес (рис. 21.3), можно увидеть, что торцовые поверхности зубьев, расположенные между окружностями головок и ножек на сфере, образуют некоторые сферические пояса шириной a (на рис. 21.3 они заштрихованы). Ширина a поясов весьма мала по сравнению с радиусом R той сферы, на которой эти пояса расположены. Поэтому можно с достаточной точностью заменить сферические пояса поясами, лежащими на конусах, образующие которых касательны к сфере радиуса R в точках, принадлежащих окружностям *I* и *II*.

Если теперь представить два начальных конуса в их проекции на плоскость, содержащую оси начальных конусов (рис. 21.4), то

построение конусов, на поверхности которых лежат торцовые поверхности зубьев, может быть сделано следующим образом. Пусть начальный конус S_1 проектируется в виде треугольника AOP_0. При точном построении профиля конус головок проектируется в виде треугольника bOb, а конус ножек — в виде треугольника aOa. При точном проектировании сечения торцовых поверхностей зубьев плоскость проекций представляется в виде дуг ab, лежащих на проекции сферы радиуса R. Так как конусы, на которых должны лежать торцовые поверхности приближенных профилей зубьев, должны касаться сферы по начальным окружностям, то для нахождения проекций этих конусов через точку P_0 проводим прямую O_1O_2, перпендикулярную к прямой OP_0. В пересечении с осями *1* и *2* получаем точки O_1 и O_2, представляющие собой вершины искомых конусов. Проекцией конуса первого колеса является треугольник O_1AP_0, а проекцией конуса второго колеса — треугольник O_2BP_0. Соответствующие сечения профилей торцов изображаются прямыми $a'b'$, лежащими на построенном конусе. Таким образом, вместо кривых ab мы получаем в сечении прямые $a'b'$. Совершенно очевидно, что чем больше отношение радиуса сферы к модулю зубьев, тем меньше та ошибка, которую мы допускаем, заменяя построение профилей зубьев, образованных сферическими эвольвентами, построением зубьев на поверхности конусов O_1AP_0 и O_2BP_0.

Конусы с вершинами в точках O_1 и O_2 носят название *дополнительных конусов*. Построение профилей торцовых поверхностей зубьев не встретит теперь никаких трудностей, так как дополнительные конусы могут быть развернуты на плоскость, и, следовательно, все построение сведется к построению на плоскости.

4°. Пусть заданы начальные конусы S_1 и S_2 (рис. 21.5). Проводим плоскости DE и EC, ограничивающие длины зубьев. Далее, строим дополнительные конусы O_1AP_0 и O_2BP_0 и развертываем эти конусы на плоскость проекций. Для этого из точек O_1 и O_2 проводим окружности *I* и *II* радиусами ρ_1 и ρ_2. Полученные дуги P_0KL и P_0NM представляют собой развернутые начальные окружности радиусов R_1 и R_2. Эти дуги и могут быть приняты за *начальные окружности условных цилиндрических колес с центрами в точках* O_1 *и* O_2. Далее, профилируем эвольвентные зубья (рис. 21.6) по нормам, указанным выше (§ 89). Тогда получаем два зубчатых сектора *I* и *II*. Затем навертываем эти зубчатые секторы на дополнительные конусы. Соединив все точки полученных профилей прямыми с точкой O (рис. 21.5), будем иметь боковые поверхности зубьев. Таким образом могут быть построены зубья конических колес, соответствующие заданным начальным конусам.

Радиусы ρ_1 и ρ_2 условных начальных окружностей определяются по формулам

$$\rho_1=\frac{R_1}{\cos\delta_1}, \qquad \rho_2=\frac{R_2}{\cos\delta_2}. \tag{21.12}$$

Если обозначить углы зубчатых секторов через β_1 и β_2, то величины этих углов могут быть получены из условий

$$\rho_1\beta_1 = 2\pi R_1 \quad \text{и} \quad \rho_2\beta_2 = 2\pi R_2,$$

откуда, учитывая соотношения (21.12), находим

$$\beta_1 = \frac{2\pi R_1}{\rho_1} = 2\pi\cos\delta_1 \quad \text{и} \quad \beta_2 = \frac{2\pi R_2}{\rho_2} = 2\pi\cos\delta_2. \qquad (21.13)$$

Для определения коэффициента перекрытия и рассмотрения вопроса о подрезании зубьев можно применить формулы для круглых цилиндрических зубчатых колес, но для этого необходимо перейти от зубчатых секторов к зубчатым колесам, так как число

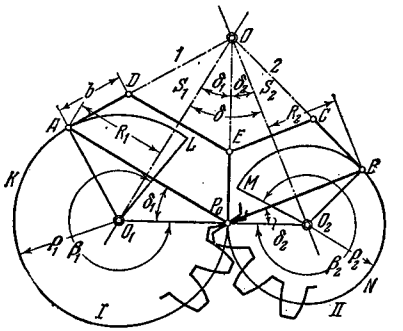


Рис. 21.5. К профилированию зубьев конических колес на поверхностях дополнительных конусов.

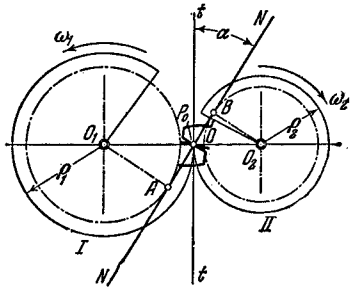


Рис. 21.6. Цилиндрические колеса, эквивалентные соответствующим им коническим колесам.

зубьев z_1 и z_2 секторов I и II не будет равно числу зубьев z_1' и z_2' цилиндрических колес радиусов ρ_1 и ρ_2. Связь между числами зубьев z_1, z_2 и z_1', z_2' может быть получена из условия, что шаг зацепления t является одним и тем же для условных и действительных колес. Имеем

$$z_1 t = \rho_1\beta_1, \quad z_2 t = \rho_2\beta_2, \quad z_1' t = 2\pi\rho_1, \quad z_2' t = 2\pi\rho_2, \qquad (21.14)$$

откуда

$$\frac{z_1'}{z_1} = \frac{2\pi}{\beta_1}, \quad \frac{z_2'}{z_2} = \frac{2\pi}{\beta_2}.$$

Из этих уравнений получаем

$$z_1' = \frac{2\pi}{\beta_1} z_1 = \frac{2\pi}{2\pi\cos\delta_1} z_1 = \frac{z_1}{\cos\delta_1}, \quad z_2' = \frac{2\pi}{\beta_2} z_2 = \frac{2\pi}{2\pi\cos\delta_2} z_2 = \frac{z_2}{\cos\delta_2}.$$

Таким образом, числа зубьев z_1' и z_2' колес, которые называются *эквивалентными цилиндрическими колесами*, всегда больше чисел зубьев соответствующих секторов в отношении $\frac{1}{\cos\delta_1}$ и $\frac{1}{\cos\delta_2}$. Оче-

видно также, что передаточное отношение эквивалентных цилиндрических колес не равно передаточному отношению проектируемых колес.

Имеем для передаточного отношения i_{12} конических колес формулу

$$i_{12}=\frac{z_2}{z_1}.$$

Для передаточного отношения i'_{12} эквивалентных цилиндрических колес имеем

$$i'_{12}=\frac{z'_2}{z'_1}=\frac{z_2\cos\delta_1}{z_1\cos\delta_2}=i_{12}\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2}. \qquad (21.15)$$

Для случая, когда угол $\delta=\delta_1+\delta_2=90°$, имеем

$$i'_{12}=i_{12}\frac{\cos(90°-\delta_2)}{\cos\delta_2}=i_{12}\operatorname{tg}\delta_2,$$

или, так как согласно формуле (21.1)

$$i_{12}=\frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1}=\frac{\sin\delta_2}{\sin(90°-\delta_2)}=\operatorname{tg}\delta_2,$$

то

$$i'_{12}=\operatorname{tg}^2\delta_2=i^2_{12}. \qquad (21.16)$$

Таким образом, зацепление конических колес эквивалентно зацеплению цилиндрических колес, но с бóльшим числом зубьев. Поэтому при равных условиях конические колеса обладают бóльшим, чем цилиндрические, коэффициентом перекрытия ε и меньшим числом зубьев $z_{\min}$, которое может быть выбрано без подрезания на малом колесе стандартного зацепления.

5°. В практике машиностроения широкое распространение получили конические колеса не только с прямыми зубьями, но и с зубьями других форм. Различные формы зубьев получаются при нарезании их по методу обкатки путем придания режущему инструменту различных движений. Так, если режущий инструмент (резец) имеет прямолинейное движение, но под некоторым углом β к радиусу R, то можно нарезать колесо с косыми зубьями (рис. 21.7, *а*). При вращательном движении резцовой головки вокруг оси, не проходящей через вершину конуса, можно нарезать колесо с дуговыми зубьями (рис. 21.7, *б*); могут быть также нарезаны колеса с зубьями, образованными движением резца по архимедовой спирали (рис. 21.7, *в*), по эвольвенте (рис. 21.7, *г*) и т. д.

Нарезание зубьев конических колес ведется также методом обкатки инструментом с прямолинейной режущей кромкой (гранью), связанной с некоторой плоскостью, называемой *плоскостью производящего колеса*. Эта плоскость перекатывается в процессе обработки по делительному конусу заготовки, что дает иногда повод проводить аналогию с процессом нарезания зубьев цилиндрических колес прямолинейной зуборезной рейкой, которая воспроиз-

водит эвольвентное зацепление. В действительности, так как режущая грань поставлена под некоторым углом к плоскости производящего колеса, то она нарезает более сложную поверхность.

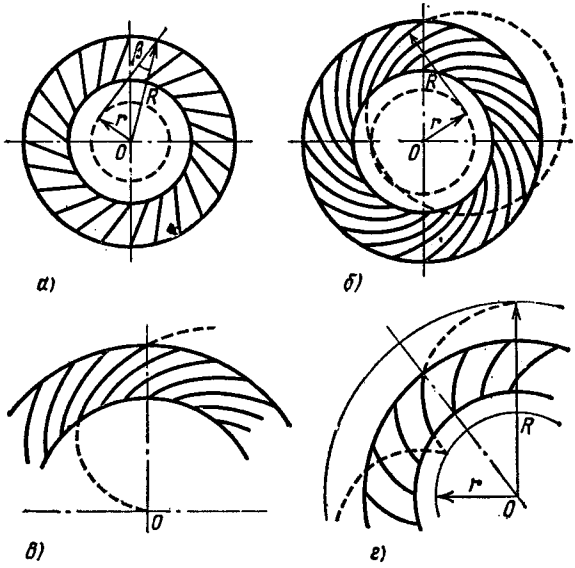


Рис. 21.7. Различные виды конических колес с фигурными зубьями: *а*) с косыми зубьями; *б*) с дуговыми зубьями; *в*) со спиральными зубьями; *г*) с эвольвентными зубьями.

Для колес с прямыми зубьями получают так называемое *октоидальное зацепление*, у которого линии зацепления имеют форму восьмерки.

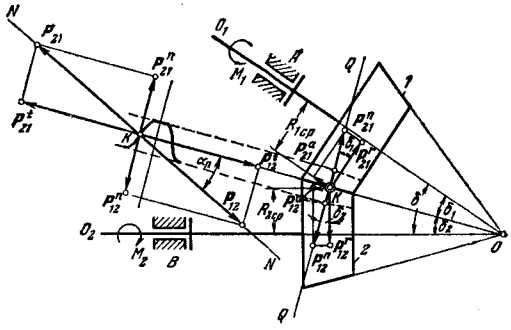


Рис. 21.8. Силы, действующие в конической передаче.

6°. Рассмотрим действие сил в конической зубчатой передаче. Силы $\boldsymbol{P}_{12}$ и $\boldsymbol{P}_{21}$ давления зубьев колес *1* и *2* друг на друга будем считать условно приложенными в середине контактной линии,

в точке K (рис. 21.8), отстоящей от осей OO_1 и OO_2 на средних радиусах $R_{1ср}$ и $R_{2ср}$. Силы $\boldsymbol{P}_{12}$ и $\boldsymbol{P}_{21}$ лежат в плоскости $Q - Q$, перпендикулярной к общей образующей начальных конусов *1* и *2*. Повернем плоскость $Q - Q$ на угол 90° до совпадения с плоскостью чертежа (рис. 21.8). Тогда силы $\boldsymbol{P}_{12}$ и $\boldsymbol{P}_{21}$ будут проектироваться в натуральную величину. Направлены эти силы по нормали $N - N$ под углом зацепления α. Раскладываем эти силы на составляющие $\boldsymbol{P}^t_{12} = -\boldsymbol{P}^t_{21}$ и $\boldsymbol{P}^n_{12} = -\boldsymbol{P}^n_{21}$. Силы $\boldsymbol{P}^t_{12}$ и $\boldsymbol{P}^t_{21}$ связаны с моментами M_1 и M_2, приложенными на валах OO_1 и OO_2, условиями

$$P^t_{12} = \frac{M_1}{R_{1ср}}, \qquad P^t_{21} = \frac{M_2}{R_{2ср}}. \tag{21.17}$$

Из равенств (21.17) следует:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{R_{1ср}}{R_{2ср}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = i_{21}. \tag{21.18}$$

Силы $\boldsymbol{P}^n_{12}$ и $\boldsymbol{P}^n_{21}$ пересекаются с осями OO_1 и OO_2 и могут быть разложены на радиальные составляющие $\boldsymbol{P}^r_{12}$ и $\boldsymbol{P}^r_{21}$ и осевые составляющие $\boldsymbol{P}^a_{12}$ и $\boldsymbol{P}^a_{21}$. Радиальные составляющие $\boldsymbol{P}^r_{12}$ и $\boldsymbol{P}^r_{21}$ будут нагружать радиальные подшипники A и B. Осевые составляющие $\boldsymbol{P}^a_{12}$ и $\boldsymbol{P}^a_{21}$ будут действовать на колеса *1* и *2*, стремясь переместить их вдоль осей OO_1 и OO_2, и должны восприниматься упорными подшипниками.

Силы P^n_{12} и P^n_{21} равны

$$\left.\begin{aligned} P^n_{12} &= P^t_{12}\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_1}{R_{1ср}}\operatorname{tg}\alpha, \\ P^n_{21} &= P^t_{21}\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_2}{R_{2ср}}\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_1}{i_{21}R_{2ср}}\operatorname{tg}\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{21.19}$$

так как согласно соотношению (21.18) $M_2 = M_1/i_{21}$.

Радиальные силы P^r_{12} и P^r_{21} будут равны

$$\left.\begin{aligned} P^r_{12} &= P^n_{12}\cos\delta_2 = P^t_{12}\operatorname{tg}\alpha\cos\delta_2 = \frac{M_1}{R_{1ср}}\operatorname{tg}\alpha\cos\delta_2, \\ P^r_{21} &= P^n_{21}\cos\delta_1 = P^t_{21}\operatorname{tg}\alpha\cos\delta_1 = \\ &= \frac{M_2}{R_{2ср}}\operatorname{tg}\alpha\cos\delta_1 = \frac{M_1}{i_{21}R_{2ср}}\operatorname{tg}\alpha\cos\delta_1. \end{aligned}\right\} \tag{21.20}$$

Наконец, осевые силы P^a_{12} и P^a_{21} будут равны

$$\left.\begin{aligned} P^a_{12} &= P^n_{12}\sin\delta_2 = P^t_{12}\operatorname{tg}\alpha\sin\delta_2 = \frac{M_1}{R_{1ср}}\operatorname{tg}\alpha\sin\delta_2, \\ P^a_{21} &= P^n_{21}\sin\delta_1 = P^t_{21}\operatorname{tg}\alpha\sin\delta_1 = \\ &= \frac{M_2}{R_{2ср}}\operatorname{tg}\alpha\sin\delta_1 = \frac{M_1}{i_{21}R_{2ср}}\operatorname{tg}\alpha\sin\delta_1. \end{aligned}\right\} \tag{21.21}$$

Пример. Определить основные параметры конической зубчатой передачи, если торцовый модуль $m = 5$ *мм*, угол δ между осями

колес $\delta = 90°$, числа зубьев колес $z_1 = 20$ и $z_2 = 40$, угол зацепления $\alpha = 20°$, длина зуба $b = L/3$, где L — длина образующей начальных конусов (см. рис. 21.2). Передаточное отношение i_{12} равно

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{40}{20} = 2.$$

Так как угол $\delta = 90°$, то углы δ_1 и δ_2 определяются по формулам (21.6):

$$\delta_1 = \operatorname{arcctg} i_{12} = \operatorname{arcctg} 2 \approx 26° 30',$$
$$\delta_2 = \delta - \operatorname{arcctg} i_{12} = 90° - \operatorname{arcctg} 2 \approx 63° 30'.$$

Радиусы R_1 и R_2 начальных окружностей, согласно формулам (21.7), равны

$$R_1 = \frac{mz_1}{2} = 50 \text{ мм}, \qquad R_2 = \frac{mz_2}{2} = 100 \text{ мм}.$$

Длина L общей образующей конусов, согласно формуле (21.8), равна

$$L = \frac{R_1}{\sin \delta_1} = \frac{50}{\sin 26° 30'} = \frac{50}{0{,}446} = 112{,}1 \text{ мм}.$$

Угол Δ' головки и угол Δ'' ножки зубьев определяются из условий (21.9):

$$\operatorname{tg} \Delta' = \frac{h'}{L} = \frac{m}{L} = \frac{5}{112{,}1} = 0{,}0458,$$

и

$$\operatorname{tg} \Delta'' = \frac{h''}{L} = \frac{h' + cm}{L} = \frac{m + 0{,}25m}{L} = \frac{5 + 0{,}25 \cdot 5}{112{,}1} = 0{,}0549.$$

Следовательно, углы Δ' и Δ'' равны $\Delta' = 2° 34'$, $\Delta'' = 3° 11'$.

Углы $\delta_{г1}$ и $\delta_{г2}$ конусов головок определяются из формул (21.11):

$$\delta_{г1} = \delta_1 + \Delta' = 26° 30' + 2° 34' = 29° 04',$$
$$\delta_{г2} = \delta_2 + \Delta' = 63° 30' + 2° 34' = 66° 04'.$$

Радиусы $R_{г1}$ и $R_{г2}$ конусов головок вычисляются по формулам (21.10):

$$R_{г1} = R_1 + h' \cos \delta_{г1} = 50 + 5 \cos 29° 04' = 54{,}37 \text{ мм},$$
$$R_{г2} = R_2 + h' \cos \delta_{г2} = 100 + 5 \cos 66° 04' = 102{,}03 \text{ мм}.$$

Радиусы ρ_1 и ρ_2 начальных окружностей условных цилиндрических колес определяем по формулам (21.12):

$$\rho_1 = \frac{R_1}{\cos \delta_1} = \frac{50}{0{,}895} = 55{,}8 \text{ мм}, \qquad \rho_2 = \frac{R_2}{\cos \delta_2} = \frac{100}{0{,}446} = 224{,}2 \text{ мм}.$$

Расстояние A между осями условных цилиндрических колес равно $A = \rho_1 + \rho_2 = 55{,}8 + 224{,}2 = 280{,}0$ мм.

Радиусы r_1^0 и r_2^0 основных окружностей условных цилиндрических колес (рис. 21.6) равны

$$r_1^0 = \rho_1 \cos\alpha = 55{,}8 \cdot 0{,}94 = 52{,}6 \text{ мм},$$
$$r_2^0 = \rho_2 \cos\alpha = 224{,}2 \cdot 0{,}94 = 210{,}7 \text{ мм}.$$

Радиусы $R_{г1}^0$ и $R_{г2}^0$ окружностей головок условных цилиндрических колес:

$$R_{г1} = \rho_1 + h' = \rho_1 + m = 55{,}8 + 5 = 60{,}8 \text{ мм},$$
$$R_{г2} = \rho_2 + h' = \rho_2 + m = 224{,}2 + 5 = 229{,}2 \text{ мм}.$$

Коэффициент перекрытия ε рассматриваемых колес определяется по формуле (20.38):

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(R_{г1}^0)^2 - (r_1^0)^2} + \sqrt{(R_{г2}^0)^2 - (r_2^0)^2} - A\sin\alpha}{\pi m \cos\alpha} =$$
$$= \frac{\sqrt{(60{,}8)^2 - (52{,}6)^2} + \sqrt{(229{,}2)^2 - (210{,}7)^2} - 280 \cdot 0{,}342}{3{,}14 \cdot 5 \cdot 0{,}94} \approx 1{,}77.$$

§ 100. Проектирование винтовой и червячной передач

1°. В § 29, *4°* была рассмотрена кинематика механизма передачи движения с постоянным передаточным отношением между двумя перекрещивающимися в пространстве осями. Аксоидами в относительном движении звеньев такой передачи являются гиперболоиды *1* и *2* (рис. 21.9). Для получения гиперболоидных зубчатых колес поверхности гиперболоидов снабжаются зубьями. Нет необходимости эти зубья располагать по всей поверхности гиперболоидов. Достаточно снабдить зубьями только некоторые участки гиперболоидов, получаемые при пересечении гиперболоидов плоскостями, перпендикулярными к их осям. Например, если на гиперболоиде *1* (рис. 21.9) выбрать в качестве колеса часть *1'* гиперболоида, то на гиперболоиде *2* получаем сопряженное колесо в виде части *2'*. Чем дальше от горлового сечения выбраны части гиперболоидов, снабженные зубьями, тем меньше будет отношение скорости скольжения вдоль осей к окружной скорости колеса. Следовательно, с точки зрения износа и коэффициента полезного

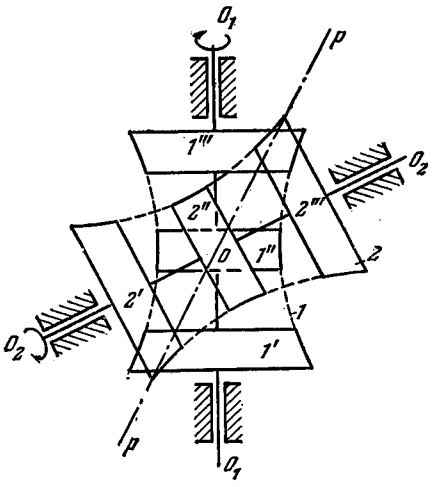


Рис. 21.9. Схема гиперболоидной передачи между двумя перекрещивающимися осями.

действия передачи предпочтительнее выбрать в качестве колес части гиперболоидов, более удаленные от горлового сечения. При замене участков гиперболоидов, удаленных от горлового сечения, коническими поверхностями, например *1'*, *2'* или *1'''*, *2'''*, получаем *гипоидные* колеса.

2°. Вместо гиперболоидных зубчатых механизмов, нарезание зубьев которых представляет большие трудности, для передачи движения между непересекающимися осями применяются винтовые зубчатые механизмы, представляющие собой участки *1''* и *2''* гиперболоидов *1* и *2* (рис. 21.9), приближенно замененные двумя круглыми цилиндрическими поверхностями. Выведем основные соотношения между параметрами этих колес. Рассмотрим передачу между двумя цилиндрами *1* и *2* (рис. 21.10), вращающимися вокруг осей

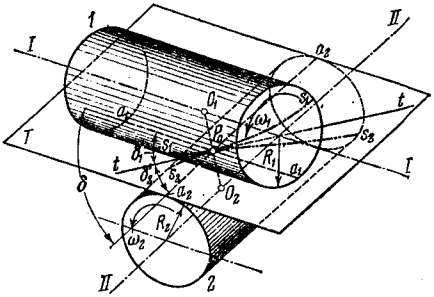


Рис. 21.10. Образование зубьев винтовых колес.

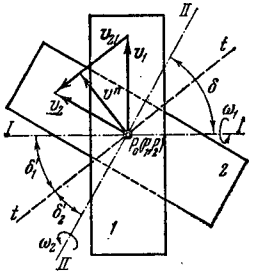


Рис. 21.11. План скоростей для колес винтовой передачи.

I и *II* с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Пусть цилиндры касаются друг друга в точке P_0. Если радиусы цилиндров суть R_1 и R_2, то кратчайшее расстояние A между осями *I* и *II* равно $A = O_1O_2 = R_1 + R_2$. Через точку P_0 проведем плоскость T, перпендикулярную к кратчайшему расстоянию O_1O_2. Эта плоскость будет касаться цилиндра *1* по образующей $a_1 - a_1$, а цилиндра *2* — по образующей $a_2 - a_2$ и будет являться общей касательной плоскостью к этим двум цилиндрам. Проведем в плоскости T через точку P_0 прямую $t - t$. Эта прямая составит с образующими $a_1 - a_1$ и $a_2 - a_2$ углы δ_1' и δ_2', причем

$$\delta_1' + \delta_2' = \delta, \qquad (21.22)$$

где δ есть угол между образующими $a_1 - a_1$ и $a_2 - a_2$, равный углу скрещивания между осями *I* и *II* цилиндров.

Навернем плоскость T последовательно на цилиндры *1* и *2*. Тогда прямая $t - t$ на поверхности цилиндра *1* расположится по винтовой линии $s_1 - s_1$ с углом скручивания δ_1', а на поверхности цилиндра *2* — по винтовой линии $s_2 - s_2$ с углом скручивания δ_2'. Обе эти линии будут соприкасаться в точке P_0, и прямая $t - t$ будет их общей касательной.

Как правило, точка касания начальных цилиндров не будет принадлежать мгновенной оси вращения — скольжения, и углы δ_1' и δ_2' окажутся отличными от углов δ_1 и δ_2, образуемых осями колес с мгновенной осью вращения — скольжения.

Если считать цилиндры *1* и *2* начальными, то винтовые линии $s_1 - s_1$ и $s_2 - s_2$ могут быть приняты за боковые линии зубьев. *Боковой поверхностью зубьев винтовых колес является линейчатая поверхность развертывающегося геликоида.*

Нетрудно установить некоторые основные соотношения между различными параметрами винтовых колес.

Спроектируем начальные цилиндры винтовых колес на плоскость T (рис. 21.10). Оси *I* и *II* и углы δ_1' и δ_2' при этом будут проектироваться без искажения (рис. 21.11). Скорость точки P_1 колеса *1* изобразится вектором $\boldsymbol{v}_1$, перпендикулярным к оси *I*. Скорость точки P_2 колеса *2* представится вектором $\boldsymbol{v}_2$, перпендикулярным к оси *II*. Относительная скорость $\boldsymbol{v}_{21}$ точки P_2 цилиндра *2* относительно точки P_1 цилиндра *1* будет направлена параллельно общей касательной $t - t$ к винтовым линиям сопряженных зубьев. План скоростей передачи представляет собой треугольник, образуемый векторами $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}_{21}$, лежащими в плоскости T. Опустим из точки P_0 перпендикуляр v^n на направление вектора $\boldsymbol{v}_{21}$. Будем иметь

$$v^n = v_1 \cos \delta_1', \qquad v^n = v_2 \cos \delta_2',$$

где δ_1' и δ_2' суть углы закручивания винтовых линий на цилиндрах *1* и *2*. Из этих равенств следует:

$$v_1 \cos \delta_1' = v_2 \cos \delta_2'.$$

Модули скоростей $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ определятся равенствами

$$v_1 = \omega_1 R_1, \qquad v_2 = \omega_2 R_2,$$

где R_1 и R_2 суть радиусы начальных цилиндров. Тогда

$$\omega_1 R_1 \cos \delta_1' = \omega_2 R_2 \cos \delta_2',$$

откуда

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2 \cos \delta_2'}{R_1 \cos \delta_1'}, \tag{21.23}$$

где z_1 и z_2 суть числа зубьев, соответственно, колес *1* и *2*.

В частном случае, когда $\delta = 90°$, имеем

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2}{R_1} \operatorname{tg} \delta_1'. \tag{21.24}$$

Из формулы (21.23) следует, что, в отличие от цилиндрических и конических колес, при передаче вращения винтовыми колесами мы имеем возможность воспроизводить необходимое передаточное отношение подбором не двух, а четырех величин (R_1, R_2, δ_1' и δ_2').

К недостаткам зубчатых винтовых механизмов надо отнести то, что в них сопряженные профили соприкасаются в точке. Следовательно, удельные давления оказываются значительными. Кроме того, значительное скольжение зубьев друг по другу вызывает быстрый их износ.

При проектировании винтовой зубчатой передачи обычно задают передаточное отношение i_{12}, угол δ перекрещивания осей колес и кратчайшее расстояние A между осями. Из равенства (21.23) следует, что заданное передаточное отношение может получиться при различных сочетаниях отношений R_2/R_1 и $\cos\delta_2'/\cos\delta_1'$. Поэтому задача проектирования винтовой зубчатой передачи не приводит к однозначному решению. При проектировании конструктор должен задаться дополнительной зависимостью, связывающей либо углы δ_1' и δ_2' закручивания винтовых линий, либо отношение радиусов.

Если при проектировании добиваться, чтобы скорость скольжения в точке касания начальных цилиндров была минимальной, надо обеспечить условие, согласно которому эта точка оказалась бы точкой пересечения оси мгновенного вращения — скольжения с линией кратчайшего расстояния между осями колес. В таком случае будем иметь

$$\delta_1' = \delta_1, \qquad \delta_2' = \delta_2$$

и сами углы δ_1 и δ_2 должны удовлетворять отношению (7.16):

$$i_{12} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1}. \tag{21.25}$$

Так как согласно равенству (21.22) $\delta = \delta_1 + \delta_2$, то формула (21.25) примет вид

$$i_{12} = \frac{\sin(\delta-\delta_1)}{\sin\delta_1} = \frac{\sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1}{\sin\delta_1} = \frac{\sin\delta}{\operatorname{tg}\delta_1} - \cos\delta. \tag{21.26}$$

Исключая из равенства (21.26) угол закручивания δ_1 колеса *1*, получаем

$$\delta_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sin\delta}{i_{12}+\cos\delta}. \tag{21.27}$$

Далее, из формулы (21.25) имеем

$$i_{12} = \frac{\sin\delta_2}{\sin(\delta-\delta_2)} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta\cos\delta_2 - \cos\delta\sin\delta_2} = \frac{\operatorname{tg}\delta_2}{\sin\delta - \cos\delta\operatorname{tg}\delta_2}. \tag{21.28}$$

Исключая из равенства (21.28) угол закручивания δ_2, получаем

$$\delta_2 = \operatorname{arctg}\frac{i_{12}\sin\delta}{1+i_{12}\cos\delta}. \tag{21.29}$$

Для определения радиусов R_1 и R_2 начальных цилиндров *1* и *2* (рис. 21.10) воспользуемся равенством (21.23) и условием

$$A = R_1 + R_2.$$

Тогда имеем

$$R_1 = \frac{A\cos\delta_2}{i_{12}\cos\delta_1 + \cos\delta_2}, \tag{21.30}$$

$$R_2 = \frac{Ai_{12}\cos\delta_1}{i_{12}\cos\delta_1 + \cos\delta_2}. \tag{21.31}$$

Остальные параметры винтовых колес определяются по нормам, принятым для цилиндрических колес с косыми зубьями.

3°. Большое распространение в машинах имеет один частный вид зубчатых винтовых механизмов, когда угол δ между осями колес равен 90°, а углы закручивания δ_1' и δ_2' значительно отличаются друг от друга. Пусть на колесе *1* угол δ_1' выбран большим, а на колесе *2* угол δ_2' выбран малым (рис. 21.12). Тогда винтовые линии $a_2 - a_2$ зубьев колеса *2* располагаются своей сравнительно небольшой частью на поверхности ци-

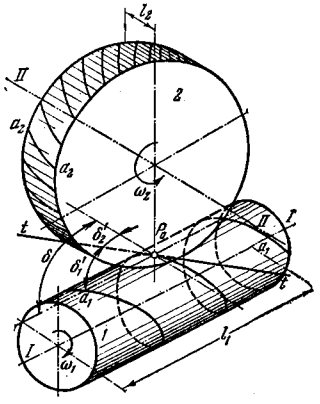


Рис. 21.12. Винтовые линии на цилиндрах червяка и червячного колеса.

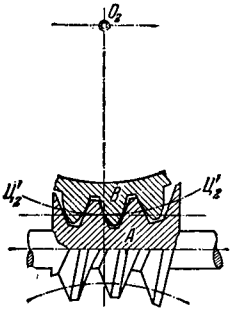


Рис. 21.13. Глобоидная червячная передача.

линдра *2*. Наоборот, винтовые линии $a_1 - a_1$ зубьев колеса *1* могут несколько раз обогнуть поверхность цилиндра *1*. Как было указано в § 31,*4°*, винтовое колесо, у которого зуб имеет по высоте цилиндра несколько оборотов, называется *червяком*, а сопряженное с ним винтовое колесо носит название *червячного колеса*. Все зацепление называется *червячным зацеплением*. Червячное зацепление является частным видом винтового и, следовательно, имеет те же недостатки, какими обладает винтовое зацепление.

Недостатки червячного зацепления могут быть в значительной степени устранены, если нарезать зубья червячного колеса червячной фрезой, представляющей собой точную копию червяка. При нарезании червячного колеса между червячной фрезой и нарезаемым колесом должно быть осуществлено то относительное движение, которое имеют червяк и колесо при правильном зацеплении. В этом случае соприкасание червяка с колесом будет происходить по

некоторой линии. Для увеличения соприкасания ободу червячного колеса придается форма, при которой колесо охватывает червяк (рис. 7.14).

Точки соприкасания сопряженных профилей червячного зацепления образуют весьма сложную линию зацепления, которая может быть всегда построена, если рассечь червячную передачу плоскостями, параллельными плоскости главного сечения, и рассмотреть полученные таким образом реечные зацепления.

С целью улучшения червячного зацепления в некоторых случаях нарезание червяка производится не на цилиндре, а на поверхности вращения, образованной дугой круга $Ц_2'$ (рис. 21.13) с центром в точке O_2 на оси червячного колеса. Эта поверхность получила

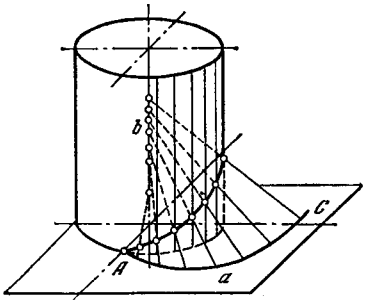


Рис. 21.14. Архимедова винтовая поверхность.

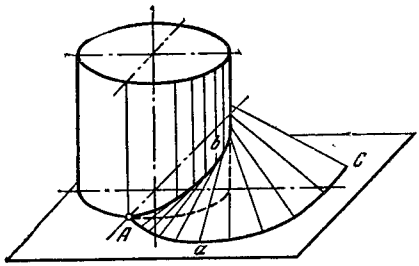


Рис. 21.15. Эвольвентная винтовая поверхность.

название *глобоида (тороида)*, а зацепление называется *глобоидным* или *тороидным зацеплением*.

Форма винтовой поверхности зуба червяка зависит от установки инструмента, нарезающего профиль зуба. Так, если направление режущей грани (рис. 21.14) инструмента резца, установленного на винторезном станке проходит через ось червяка, то получается линейчатая винтовая поверхность, образующие *ba* которой пересекают ее ось. Сечение этой поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси, дает архимедову спираль *AC*. Соответственно червяк носит название *архимедова червяка*.

Если плоскость режущей грани в относительном движении касается винтовой линии, принадлежащей червяку, то сечение плоскостью, перпендикулярной к оси, дает эвольвенту *AC* круга (рис. 21.15). Соответственно червяк называется *эвольвентным*.

4°. Переходим к рассмотрению вопроса об определении основных параметров червячной передачи (рис. 21.16). Согласно формуле (21.24) передаточное отношение $i_{чк}$ от червяка к колесу так же, как и в ортогональной винтовой передаче, равно

$$i_{чк} = \frac{\omega_ч}{\omega_к} = \frac{R_к}{R_ч} \operatorname{tg} \delta_1' = \frac{z_к}{z_ч}, \qquad (21.32)$$

где $\omega_ч$ и $\omega_к$ — угловые скорости червяка и колеса, $R_ч$ и $R_к$ — радиусы их начальных цилиндров, $z_к$ — число зубьев колеса, $z_ч$ — число ниток или ходов червяка и δ_1' — угол закручивания винтовой линии червяка на начальном цилиндре.

Угол закручивания δ_1' удобнее заменять углом β подъема нитки червяка, равным $90° - \delta_1'$. Тогда получаем

$$j_{чк} = \frac{R_к}{R_ч} \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}. \qquad (21.33)$$

Тангенс угла β может быть выражен через шаг зацепления. В самом деле, если развернуть начальный цилиндр червяка на плоскость, то мы получим вместо винтовой линии прямую линию AB, наклоненную к оси абсцисс под углом β подъема нитки (см., например, рис. 1.10). Высота подъема h нитки будет зависеть от числа ниток червяка. В общем случае высота подъема равна

$$h = z_ч t.$$

Тогда тангенс угла β будет равен

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{2\pi R_ч} = \frac{z_ч t}{2\pi R_ч}. \qquad (21.34)$$

Из формулы (21.34) получаем радиус $R_ч$ червяка:

$$R_ч = \frac{z_ч t}{2\pi \operatorname{tg}\beta},$$

или, так как $t/\pi = m$, то

$$R_ч = \frac{m z_ч}{2 \operatorname{tg}\beta} = \frac{qm}{2},$$

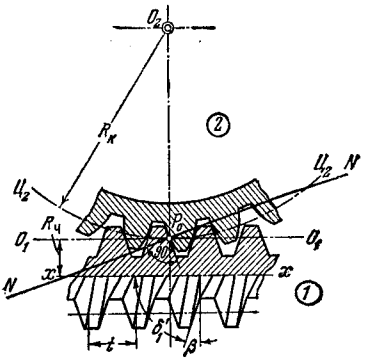


Рис. 21.16. К определению основных параметров червяка и червячного колеса.

где $q = \frac{2R_ч}{m}$ — число модулей в начальном цилиндре червяка. Радиус $R_к$ колеса

$$R_к = \frac{m z_к}{2}.$$

Следует иметь в виду, что в ортогональной червячной передаче осевой модуль червяка равен торцовому модулю колеса. Обычно из условий расчета на прочность величина q выбирается равной $q = (8 \div 13)$. Остальные размеры червячного колеса и червяка определяются по нормам для цилиндрических зубчатых колес.

5°. Рассмотрим действие сил в червячной передаче. К валу червяка *1* приложен движущий момент M_1, а на валу червячного колеса действует момент M_2 сил сопротивления. Со стороны червячного колеса на грань витков резьбы червяка под углом α_n действует нормальная сила $\boldsymbol{P}_{21}^n$, вектор которой располагается в плоскости,

нормальной к винтовой поверхности резьбы. Эта плоскость наклонена к плоскости, в которой находится ось вращения червяка, под углом β, равным углу подъема винтовой линии (рис. 21.17).

На рис. 21.17 представлены сечения резьбы червяка и зубьев червячного колеса плоскостью, перпендикулярной к оси червячного колеса. В плоскости указанных сечений лежит ось вращения червяка.

Разложим силу $\boldsymbol{P}_{21}^{n}$ по трем взаимно перпендикулярным направлениям и напишем следующее равенство:

$$\boldsymbol{P}_{21}^{n} = \boldsymbol{P}_{21}^{t} + \boldsymbol{P}_{21}^{r} + \boldsymbol{P}_{21}^{a}, \tag{21.35}$$

где $\boldsymbol{P}_{21}^{t}$ — окружное усилие червячного колеса, равное $\boldsymbol{P}_{12}^{a}$ — осевому усилию червяка, векторы которого расположены в плоскости, перпендикулярной к оси червячного колеса; $\boldsymbol{P}_{21}^{r}$ — радиальное усилие, направленное к оси червяка по его радиусу; $\boldsymbol{P}_{21}^{a}$ — осевое усилие червячного колеса, равное $\boldsymbol{P}_{12}^{t}$ — окружному усилию червяка.

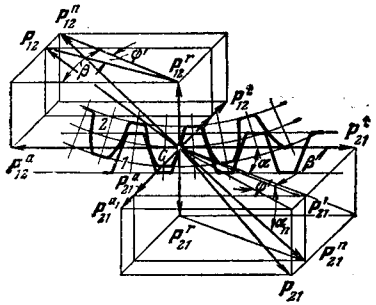


Рис. 21.17. К силовому анализу червячной передачи.

Так как при расчете червячной передачи бывает задан момент M_2 сопротивления, приложенный к ведомому червячному колесу 2, то сначала определим окружное усилие $\boldsymbol{P}_{21}^{t}$ червячного колеса:

$$P_{21}^{t} = \frac{M_2}{R_2}, \tag{21.36}$$

где R_2 — радиус начальной окружности червячного колеса.

После этого можно определить радиальное усилие $\boldsymbol{P}_{21}^{r}$ червячного колеса:

$$P_{21}^{r} = P_{21}^{t} \operatorname{tg}\alpha = \frac{M_2}{R_2} \operatorname{tg}\alpha, \tag{21.37}$$

где α — угол наклона боковой грани осевого сечения резьбы червяка, равный углу зацепления реечного инструмента. Для стандартных зацеплений этот угол принимается равным 20°.

Третья слагающая $\boldsymbol{P}_{21}^{a}$ нормальной силы $\boldsymbol{P}_{21}^{n}$, согласно рис. 21.17, равна

$$P_{21}^{a} = P_{21}^{t} \operatorname{tg}\beta = \frac{M_2}{R_2} \operatorname{tg}\beta. \tag{21.38}$$

Наконец, нормальную силу $\boldsymbol{P}_{21}^{n}$ можно выразить через $\boldsymbol{P}_{21}^{t}$ так:

$$P_{21}^{n} = \frac{P_{21}^{t}}{\cos\alpha_n} = \frac{P_{21}^{t}}{\cos\alpha_n \cos\beta} = \frac{M_2}{R_2 \cos\alpha_n \cos\beta}. \tag{21.39}$$

В этом равенстве нам неизвестен угол α_n наклона вектора $\boldsymbol{P}_{21}^n$ в нормальной плоскости к винтовой поверхности резьбы червяка. Этот угол можно определить следующим образом:

$$\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{P_{21}^r}{P_{21}'},$$

но так как $P_{21}' = \frac{P_{21}^t}{\cos\beta}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{P_{21}^r}{P_{21}^t}\cos\beta = \operatorname{tg}\alpha\cos\beta. \qquad (21.40)$$

Проведенное нами исследование справедливо для идеального механизма, в котором отсутствует трение. В червячном механизме трение имеет место при относительном движении вдоль винтовой линии червяка и вдоль профиля зуба колеса. Трение вдоль профиля зуба колеса незначительно по сравнению с трением вдоль винтовой линии, вследствие чего мы будем учитывать только трение этого последнего вида.

Из рис. 21.17 видно, что осевое усилие $\boldsymbol{P}_{21}^{a_1}$ червяка равно

$$P_{21}^{a_1} = P_{21}^t \operatorname{tg}(\beta+\varphi') = \frac{M_2}{R_2}\operatorname{tg}(\beta+\varphi'), \qquad (21.41)$$

где φ' — угол трения в клиновых направляющих (§ 19, 2°), каковыми являются впадины зубьев червячного колеса. Если коэффициент трения в зацеплении равен f, то угол φ' трения можно определить по следующей формуле:

$$\varphi' = \operatorname{arctg}\frac{f}{\cos\alpha_n}. \qquad (21.42)$$

Для силы $\boldsymbol{P}_{21}$ давления зуба червячного колеса на резьбу червяка можно воспользоваться формулой, аналогичной формуле (21.39):

$$P_{21} = \frac{P_{21}^t}{\cos\alpha_1\cos(\beta+\varphi')} = \frac{M_2}{R_2\cos\alpha_1\cos(\beta+\varphi')}. \qquad (21.43)$$

Угол α_1 определяется по формуле, аналогичной формуле (21.40):

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha\cos(\beta+\varphi'). \qquad (21.44)$$

Так как $\boldsymbol{P}_{21}^{a_1}$ есть окружное усилие червяка, то его величиной можно воспользоваться для определения движущего момента, приложенного к червяку. Имеем

$$M_1 = P_{21}^{a_1}R_1 = M_2\frac{R_1}{R_2}\operatorname{tg}(\beta+\varphi'), \qquad (21.45)$$

где R_1 — радиус начальной окружности червяка.

Если ведущим является червячное колесо 2, то со стороны червяка возникает осевое усилие P_{12}^a, которое представляет собой сопротивление, приложенное к валу червяка (рис. 21.17).

Если задан момент M_1 силы сопротивления на валу червяка, то усилие P_{12}^t на начальной окружности червяка равно

$$P_{12}^t = \frac{M_1}{R_1}.$$

Из рис. 21.17 определяем силу P_{12}^a:

$$P_{12}^a = \frac{P_{12}^t}{\operatorname{tg}(\beta - \varphi')} = \frac{M_1}{R_1 \operatorname{tg}(\beta - \varphi')}. \tag{21.46}$$

Движущий момент M_2 на валу червячного колеса равен

$$M_2 = P_{12}^a R_2 = \frac{M_1 R_2}{R_1 \operatorname{tg}(\beta - \varphi')}. \tag{21.47}$$

Радиальная сила P_{12}^r равна силе P_{21}^r, но действует в противоположном направлении.

Наконец, силу P_{12} можно определить так:

$$P_{12} = \frac{P_{12}^a}{\cos\alpha_2 \cos(\beta - \varphi')}, \tag{21.48}$$

где угол α_2 определяется аналогично углу α_1 (см. равенство (21.44)); имеем

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha \cos(\beta - \varphi'). \tag{21.49}$$

ГЛАВА XXII
СИНТЕЗ МНОГОЗВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 101. Проектирование зубчатых передач с неподвижными осями

1°. Многозвенные зубчатые механизмы могут быть весьма разнообразны по своей кинематической схеме и структуре.

Как было показано в § 32, многозвенный зубчатый механизм можно рассматривать состоящим из нескольких простейших зубчатых механизмов, и общее передаточное отношение i_{1n} для механизма, состоящего из n звеньев, согласно формулам (7.35) и (7.36), равно

$$i_{1n} = (-1)^m i_{12} i_{2'3} i_{3'4} \dots i_{(n-1)'n}, \tag{22.1}$$

или

$$i_{1n} = (-1)^m \frac{r_2 r_3 r_4 \dots r_n}{r_1 r_{2'} r_{3'} \dots r_{(n-1)'}} = (-1)^m \frac{z_2 z_3 z_4 \dots z_n}{z_1 z_{2'} z_{3'} \dots z_{(n-1)'}}, \tag{22.2}$$

где m — число внешних зацеплений в зубчатом механизме.

Проектирование кинематической схемы многозвенного зубчатого механизма заключается в подборе по заданному общему передаточному отношению основных размеров колес и числа их зубьев. При этом необходимо учитывать и некоторые дополнительные условия, связанные с конструктивными требованиями. Рассмотрим эти условия на примере двухступенчатых зубчатых механизмов редукторов, показанных на рис. 22.1. На рис. 22.1, *а* показан механизм, у которого на расположение осей колес не наложено никаких условий. На рис. 22.1, *б* и *в* оси колес *1* и *3* являются соосными, и, следовательно, должно удовлетворяться условие соосности, которое

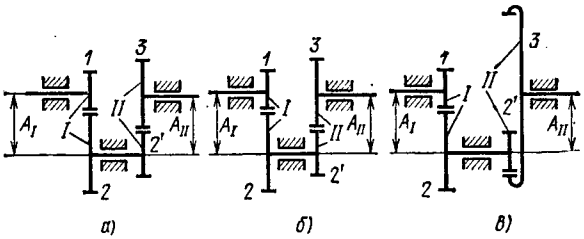


Рис. 22.1. Схемы двухступенчатых зубчатых редукторов: *а*) несоосный с двумя внешними зацеплениями; *б*) соосный с двумя внешними зацеплениями; *в*) соосный с одним внешним и одним внутренним зацеплениями.

может быть выражено через очевидные соотношения. Для механизма, изображенного на рис. 22.1, *б*,

$$R_1 + R_2 = R_{2'} + R_3, \tag{22.3}$$

а для механизма на рис. 22.1, *в*

$$R_1 + R_2 = R_3 - R_{2'}, \tag{22.4}$$

где R_1, R_2, $R_{2'}$, и R_3 — радиусы колес *1*, *2*, *2'* и *3*. Равенства (22.3) и (22.4) называются *условиями соосности*.

Передаточное отношение i для каждой ступени цилиндрических колес рекомендуется принимать в пределах $i \leqslant 8 \div 10$, а для конических колес $i \leqslant 5$. Если во всех механизмах, показанных на рис. 22.1, считать ведущими колеса *1* и *2'* и условиться, что $R_1 < R_2$ и $R_{2'} < R_3$, то ступень *1*, состоящая из колес *1* и *2*, будет *быстроходной*, а ступень, состоящая из колес *2'* и *3*, — *тихоходной*. Из расчета зубьев на прочность обычно получается, что модули зацепления ступеней должны быть различными. Обозначим их соответственно m_I и m_{II}. Как правило, m_{II} оказывается больше m_I. Далее, для редукторов рекомендуется радиусы R_2 и R_3 ведомых колес каждой передачи выбирать так, чтобы $R_3 \geqslant 1{,}1\ R_2$. Число зубьев z_1 и $z_{2'}$, малых колес *1* и *2'*, если они нарезаются без смещения режущего инструмента, рекомендуется выбирать так, чтобы отсутствовало подрезание. Желательно также, чтобы межосевые расстояния A_I и A_{II} (рис. 22.1) выражались целыми числами. Для

быстроходных редукторов рекомендуется числа зубьев колес принимать достаточно большими.

2°. Рассмотрим вопрос о проектировании схемы редуктора, которая изображена на рис. 22.1, *а*. Для такого редуктора можно зафиксировать следующие условия:

$$i_{13} = i_{12} i_{2'3}, \quad R_3 \geqslant 1{,}1 R_2. \tag{22.5}$$

При проектировании приходится определять четыре неизвестных радиуса колес: R_1, R_2, $R_{2'}$ и R_3. Для решения мы имеем два соотношения (22.5), из которых второе представляет собой неравенство. Таким образом, задача имеет бесчисленное множество решений. Число неизвестных можно уменьшить до трех, если решать задачу в относительных единицах, например, считая предварительно радиус R_1 колеса *1* равным единице. В таком случае будем иметь

$$\rho_1 = \frac{R_1}{R_1} = 1, \quad \rho_2 = \frac{R_2}{R_1}, \quad \rho_{2'} = \frac{R_{2'}}{R_1}, \quad \rho_3 = \frac{R_3}{R_1}. \tag{22.6}$$

При проектировании передаточное отношение i_{13} должно быть задано. С самого начала возникает вопрос: как его распределить между двумя ступенями редуктора? Так как сила, приложенная к зубьям колес второй ступени, больше, чем сила, приложенная к колесам первой ступени, то передаточное отношение i_{12} целесообразно сделать больше передаточного отношения $i_{2'3}$. Этим самым можно добиться того, что размеры колес второй ступени окажутся приблизительно равными размерам колес первой ступени. Можно поставить, например, дополнительное условие

$$i_{12} \approx 1{,}44 i_{2'3}. \tag{22.7}$$

В этом случае, имея в виду равенство (22.5), получаем

$$1{,}44 i_{2'3}^2 = i_{13},$$

откуда

$$i_{2'3} = \frac{\sqrt{i_{13}}}{1{,}2} = 0{,}83\sqrt{i_{13}}, \quad i_{12} = 1{,}2\sqrt{i_{13}}. \tag{22.8}$$

После этого можно определить относительные размеры радиусов колес. Для колеса *2* имеем

$$\rho_2 = 1{,}2\sqrt{i_{13}}. \tag{22.9}$$

Принимая во внимание неравенство (22.5), получаем

$$\rho_3 = 1{,}1\rho_2 \tag{22.10}$$

и, наконец, для $\rho_{2'}$ имеем

$$\frac{\rho_3}{\rho_{2'}} = 0{,}83\sqrt{i_{13}},$$

или

$$\rho_{2'} = \frac{1{,}2\rho_3}{\sqrt{i_{13}}}. \tag{22.11}$$

Итак, мы получили необходимые соотношения между радиусами колес, а это значительно облегчает дальнейшее проектирование.

Пример 1. Дано: передаточное отношение $i_{13} = 16$, модуль первой ступени $m_{\text{I}} = 1$ *мм*, модуль второй ступени $m_{\text{II}} = 1{,}25$ *мм*. Спроектировать схему редуктора.

Из первого соотношения (22.8) имеем

$$i_{2'3} = 0{,}83\sqrt{16} = 3{,}32.$$

Для определения ρ_2 пользуемся формулой (22.9): $\rho_2 = 1{,}2\sqrt{16} = 4{,}8$.

Из равенства (22.10) имеем $\rho_3 \geqslant 1{,}1 \cdot 4{,}8 = 5{,}28$.

Наконец, из формулы (22.11) получаем

$$\rho_{2'} = \frac{1{,}2 \cdot 5{,}28}{\sqrt{16}} \approx 1{,}58.$$

Теперь зададимся числом зубьев z_1 колеса *1* из условия, в соответствии с которым подрезание должно отсутствовать, т. е. должно быть $z_1 \geqslant 17$. Примем $z_1 = 20$. Тогда

$$R_1 = 0{,}5 m_1 z_1 = 0{,}5 \cdot 1 \cdot 20 = 10 \text{ мм}.$$

Пользуясь равенствами (22.6), получаем

$$R_2 = \rho_2 R_1 = 4{,}8 \cdot 10 = 48 \text{ мм},$$
$$R_{2'} = \rho_{2'} R_1 = 1{,}58 \cdot 10 = 15{,}8 \text{ мм},$$
$$R_3 = \rho_3 R_1 = 5{,}28 \cdot 10 = 52{,}8 \text{ мм}.$$

Зная величины модулей $m_{\text{I}} = 1$ *мм* и $m_{\text{II}} = 1{,}25$ *мм*, определим числа зубьев колес:

$$z_2 = \frac{2 \cdot 48}{1} = 96, \qquad z_{2'} = \frac{2 \cdot 15{,}3}{1{,}25} = 25{,}25, \qquad z_3 = \frac{2 \cdot 52{,}8}{1{,}25} = 84{,}5.$$

На колесах второй ступени числа зубьев получились дробные, вследствие чего в расчет надо внести поправки. Примем $z_{2'} = 25$ и $z_3 = 84$. Из-за этого передаточное отношение $i_{2'3}$ изменится:

$$i_{2'3} = \frac{z_3}{z_{2'}} = \frac{84}{25} = 3{,}36.$$

Выше мы имели $i_{2'3} = 3{,}32$ и $i_{13} = 16$. В данном случае $i_{2'3} = 3{,}36$ и $i_{13} = 4{,}8 \cdot 3{,}36 = 16{,}14$. Ошибка в процентах

$$\Delta i_{12} = \left(\frac{16{,}14 - 16}{16}\right) 100\% \approx 1\%,$$

что не имеет практического значения.

3°. Переходим к рассмотрению редуктора типа показанного на рис. 22.1, *б*. Для этого типа редуктора должно удовлетворяться

условие соосности (22.3). Подставляя в равенство (22.3) значения $R_2 = R_1 i_{12}$ и $R_3 = R_{2'} i_{2'3}$, получаем

$$R_1 + R_1 i_{12} = R_{2'} + R_{2'} i_{2'3},$$

откуда имеем

$$R_{2'} = R_1 \frac{1 + i_{12}}{1 + i_{2'3}}. \tag{22.12}$$

Из формулы (22.12) следует, что если передаточные отношения i_{12} и $i_{2'3}$ равны, т. е. $i_{12} = i_{2'3} = \sqrt{i_{13}}$, то удовлетворяется условие $R_{2'} = R_1$, а следовательно, и условие $R_2 = R_3$. Условие соосности (22.3) может быть также выражено через числа зубьев колес и модули m_{I} и m_{II} первой и второй ступеней редуктора. Имеем

$$m_{\text{I}} z_1 + m_{\text{I}} z_2 = m_{\text{II}} z_{2'} + m_{\text{II}} z_3. \tag{22.13}$$

Из равенства (22.13) получаем

$$\frac{m_{\text{II}}}{m_{\text{I}}} = \frac{z_1 + z_2}{z_{2'} + z_3} > 1, \tag{22.14}$$

так как модуль m_{II} рекомендуется выбирать бо́льшим модуля m_{I}. Если передаточные отношения удовлетворяют равенству

$$i_{12} = i_{2'3} = \sqrt{i_{13}},$$

то числа зубьев z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3 определяются по известным формулам:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{2R_1}{m_{\text{I}}}, \qquad z_2 = z_1 i_{12} = z_1 \sqrt{i_{13}}, \\ z_{2'} &= \frac{2R_{2'}}{m_{\text{II}}}, \qquad z_3 = z_{2'} \sqrt{i_{13}}. \end{aligned}\right\} \tag{22.15}$$

Межосевые расстояния A_{I} и A_{II} равны:

$$A_{\text{I}} = A_{\text{II}} = R_1 + R_2 = R_{2'} + R_3. \tag{22.16}$$

4°. Для редуктора типа показанного на рис. 22.1, *в* (с внутренним зацеплением) соответственно имеем условие соосности в форме равенства (22.4). Кроме того, имеем равенства

$$R_2 = R_1 i_{12}, \qquad R_3 = R_{2'} i_{2'3},$$

откуда

$$R_1 + R_1 i_{12} = R_{2'} i_{2'3} - R_{2'},$$

или

$$R_{2'} = R_1 \frac{1 + i_{12}}{i_{2'3} - 1}. \tag{22.17}$$

Условие соосности (22.4), выраженное через числа зубьев колес и модули m_{I} и m_{II} первой и второй ступеней редуктора, имеет вид

$$m_{\text{I}}z_1 + m_{\text{I}}z_2 = m_{\text{II}}z_3 - m_{\text{II}}z_{2'}, \qquad (22.18)$$

откуда получаем

$$\frac{m_{\text{II}}}{m_{\text{I}}} = \frac{z_1+z_2}{z_3-z_{2'}} > 1, \qquad (22.19)$$

так как модуль m_{II} рекомендуется выбирать больше модуля m_{I}. Если передаточные отношения i_{12} и $i_{2'3}$ удовлетворяют условию

$$i_{12} = i_{2'3} = \sqrt{i_{13}},$$

то числа зубьев z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3 определяются по формулам (22.15). Межосевые расстояния A_{I} и A_{II} равны:

$$A_{\text{I}} = A_{\text{II}} = R_1 + R_2 = R_3 - R_{2'}. \qquad (22.20)$$

Пример 2. Определить радиус колес и число зубьев соосного редуктора с двумя ступенями, если заданы передаточное отношение $i_{13} = 20$ и модули первой ступени $m_{\text{I}} = 1$ и второй $m_{\text{II}} = 1{,}25$ *мм*. Схема редуктора показана на рис. 22.1, *б*.

Для этого редуктора имеем следующие условия:

$$R_{2'} = R_1\frac{1+i_{12}}{1+i_{2'3}}, \qquad \frac{m_{\text{II}}}{m_{\text{I}}} = \frac{z_1+z_2}{z_{2'}+z_3},$$

или, в соответствии с заданными условиями, имеем

$$z_{2'} = \frac{m_{\text{I}}}{m_{\text{II}}}z_1\frac{1+i_{12}}{1+i_{2'3}} = \frac{1}{1{,}25}z_1\frac{1+i_{12}}{1+i_{2'3}} = 0{,}8z_1\frac{1+i_{12}}{1+i_{2'3}},$$

$$\frac{z_1+z_2}{z_{2'}+z_3} = \frac{1{,}25}{1} = 1{,}25, \qquad i_{12}i_{2'3} = i_{13} = 20.$$

Если вести расчет в относительных единицах — в числах зубьев колеса *1*, то неизвестными будут z_2, $z_{2'}$, z_3 и i_{12}, $i_{2'3}$. Если дополнительно принять

$$i_{12} = i_{2'3} = \sqrt{i_{13}} = \sqrt{20} = 4{,}47,$$

то

$$z_{2'} = 0{,}8z_1\frac{1+4{,}47}{1+4{,}47} = 0{,}8z_1,$$

$$z_2 = i_{12}z_1 = 4{,}47z_1,$$

$$z_3 = i_{2'3}z_{2'} = 0{,}8\cdot 4{,}47\cdot z_1 = 3{,}58z_1.$$

Задаемся теперь числом зубьев колеса *1*, причем выберем такое число z_1, при котором получатся числа $z_{2'}$, z_2 и z_3, по крайней мере близкие к числам целым, потому что равенство межосевых расстояний первой и второй ступеней должно быть выдержано точно.

Так как $z_{2'} = 0{,}8z_1$, то для z_1 надо взять число 25 или 30, ибо при меньших числах для z_1 получаются числа для $z_{2'}$, меньшие 17. Таким образом, мы намечаем решение задачи в двух вариантах:

1.
$$z_{2'} = 0{,}8 \cdot 25 = 20,$$
$$z_2 = 4{,}47 \cdot 25 = 111{,}75 \approx 112,$$
$$z_3 = 3{,}58 \cdot 25 = 89{,}6 \approx 89.$$

Подставляя теперь округленные до целых чисел результаты в формулу для передаточного отношения i_{13}, получаем

$$i_{13} = \frac{112 \cdot 89}{25 \cdot 20} = 19{,}95,$$

что для целей практики вполне допустимо.

2. Проверим, далее, второй вариант:

$$z_1 = 30, \quad z_{2'} = 24, \quad z_2 = 4{,}47 \cdot 30 = 134{,}1, \quad z_3 = 3{,}58 \cdot 30 = 107{,}4.$$

После округления до целых чисел имеем

$$z_1 = 30, \quad z_{2'} = 24, \quad z_2 = 134, \quad z_3 = 107.$$

Передаточное отношение выразится так:

$$i_{13} = \frac{134 \cdot 107}{30 \cdot 24} = 19{,}92,$$

что также вполне допустимо.

Теперь проверяем условие соосности.

Первый вариант:

$$m_{\text{I}}(z_1 + z_2) = 1 \cdot (25 + 112) = 137,$$
$$m_{\text{II}}(z_{2'} + z_3) = 1{,}25\,(20 + 89) = 136{,}25.$$

Второй вариант:

$$m_{\text{I}}(z_1 + z_2) = 1\,(30 + 134) = 164,$$
$$m_{\text{II}}(z_{2'} + z_3) = 1{,}25\,(24 + 107) = 163{,}75.$$

Как и следовало ожидать, полного совпадения размеров межосевых расстояний не получилось, причем во втором варианте неточность оказалась меньшей, чем в первом. Остановимся на втором варианте.

Чтобы привести межосевое расстояние A_{II} второй ступени к числу 164, надо предусмотреть нарезание колеса $2'$ с положительным сдвигом. Для определения необходимого коэффициента сдвига воспользуемся формулой (20.83) в таком виде:

$$\cos \alpha_3 = \frac{A_0}{A_{\text{II}}} \cos \alpha_0,$$

где A_0 — межосевое расстояние, полученное нами из расчета, α_0 — угол зацепления режущего инструмента, равный 10°, а α_3 — угол зацепления, получаемый при монтаже.

После подстановки известных нам величин имеем

$$\cos\alpha_з = \frac{163{,}75}{164}\,0{,}94 = 0{,}938, \qquad \alpha_з = 20°\,20'.$$

Далее воспользуемся формулой (20.82) для определения сдвига $\xi_{2'}$, который необходим при нарезании зубьев колеса $2'$. Эту формулу представим так:

$$\xi_{2'} = \frac{(\mathrm{inv}\,\alpha_з - \mathrm{inv}\,\alpha_0)\,(z_{2'} + z_3)}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha_0}.$$

Подставим в эту формулу числовые величины и произведем все необходимые вычисления:

$$\xi_{2'} = \frac{(0{,}01569 - 0{,}01490)\,(24 + 107)}{2 \cdot 0{,}364} = 0{,}141.$$

Абсолютный сдвиг $\chi_{2'}$, выраженный в миллиметрах, будет равен

$$\chi_{2'} = m_{11}\xi_{2'} = 1{,}25 \cdot 0{,}141 = 0{,}176\ мм.$$

§ 102. Проектирование зубчатых передач с подвижными осями

1°. К многозвенным зубчатым механизмам с подвижными осями относятся так называемые *планетарные механизмы*, кинематика которых была нами рассмотрена в § 33, а силовой расчет и определение коэффициента полезного действия — в § 65. Рассмотрим

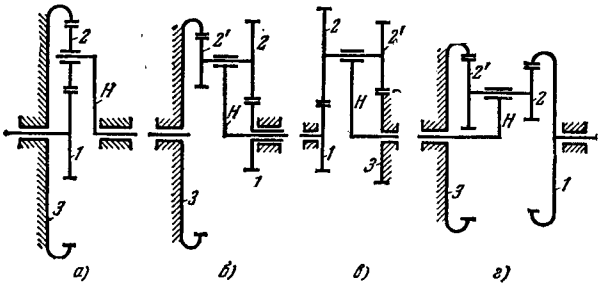


Рис. 22.2. Типовые схемы планетарных редукторов: *а*) с внутренним зацеплением и паразитным колесом; *б*) с одним внутренним и одним внешним зацеплениями; *в*) с двумя внешними зацеплениями; *г*) с двумя внутренними зацеплениями.

вопрос о проектировании схем планетарных передач, состоящих из четырех звеньев. На рис. 22.2 показаны четыре типовые схемы таких передач.

Рассмотрим вопрос о том, какие передаточные отношения могут быть воспроизводимы указанными передачами. Для этого воспользуемся формулами для передаточных отношений планетарных механизмов, выведенными в § 33.

Имеем для передаточного отношения $i_{1H}^{(3)}$ от колеса *1* к водилу H при неподвижном колесе *3* формулу

$$i_{1H}^{(3)} = \frac{1}{i_{1H}^{(3)}} = \frac{1}{1 - i_{13}^{H}}, \tag{22.21}$$

где i_{13}^{H} — передаточное отношение от колеса *1* к колесу *3* при неподвижном водиле H. Соответственно имеем

$$i_{H1}^{(3)} = \frac{1}{i_{H1}^{(3)}} = \frac{1}{1 - i_{31}^{H}}. \tag{22.22}$$

Если неподвижным колесом является колесо *1*, то формулы (22.21) и (22.22) принимают вид

$$i_{3H}^{(1)} = 1 - i_{31}^{H}, \tag{22.23}$$

$$i_{H3}^{(1)} = \frac{1}{i_{31}^{(1)}} = \frac{1}{1 - i_{31}^{H}}. \tag{22.24}$$

Для сопоставления формул (22.21) — (22.24) составим таблицу для передаточных отношений, выраженных через числа зубьев, для четырех типов передач, показанных на рис. 22.2.

Таблица 7

Формулы для определения передаточных отношений типовых планетарных механизмов

Передаточные отношения	Тип *а*	Тип *б*	Тип *в*	Тип *г*
i_{13}^{H}	$-\frac{z_3}{z_1}$	$-\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$	$\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$	$\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$
i_{31}^{H}	$-\frac{z_1}{z_3}$	$-\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$	$\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$	$\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$
$i_{1H}^{(3)}$	$1+\frac{z_3}{z_1}$	$1+\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$	$1-\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$	$1-\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}$
$i_{H1}^{(3)}$	$\frac{1}{1+\frac{z_3}{z_1}}$	$\frac{1}{1+\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}}$	$\frac{1}{1-\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}}$	$\frac{1}{1-\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}}$
$i_{3H}^{(1)}$	$1+\frac{z_1}{z_3}$	$1+\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$	$1-\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$	$1-\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}$
$i_{H3}^{(1)}$	$\frac{1}{1+\frac{z_1}{z_3}}$	$\frac{1}{1+\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}}$	$\frac{1}{1-\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}}$	$\frac{1}{1-\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}}$

Из анализа таблицы 7 видно, что тип *в* и тип *г* могут осуществлять одинаковые передаточные отношения и отличаются друг от

друга только конструктивно наличием в типе *в* только внешних зацеплений, а в типе *г* — только внутренних зацеплений. При этом диапазон передаточных отношений, осуществляемых этими типами передач, теоретически безграничен. В самом деле, если подобрать отношение чисел зубьев так, чтобы общее передаточное отношение i_{13}^{H} было близким к единице, то передаточные отношения $i_{1H}^{(3)}$ или $i_{3H}^{(1)}$ будут стремиться к нулю, а передаточные отношения $i_{H1}^{(3)}$ или $i_{H3}^{(1)}$ — к бесконечности.

Диапазон передаточных отношений передач типа *а* и *б* достаточно близок между собой и определяется габаритами передачи и конструктивными соображениями.

В таблице 8 даны принятые в практике диапазоны передаточных отношений, принимаемые при практических расчетах.

Таблица 8

Ориентировочные интервалы передаточных отношений при различных неподвижных звеньях

Передаточные отношения		Тип *а*	Тип *б*	Тип *в*	Тип *г*
Обыкновенные передачи	$i_{13}^{H_1}$	$-1{,}3 \div -8$	$-1 \div -14$	—	—
	i_{31}^{H}	$-0{,}77 \div -0{,}125$	$-1 \div -0{,}071$	—	—
	$i_{1H}^{(3)}$	$2{,}3 \div 9{,}0$	$2{,}0 \div 15$	От 32 до 1500 и более	От 32 до 1500 и более
	$i_{H1}^{(3)}$	$0{,}445 \div 0{,}111$	$0{,}5 \div 0{,}067$		
Планетарные передачи	$i_{3H}^{(1)}$	$1{,}77 \div 1{,}125$	$20 \div 1{,}071$		
	$i_{H3}^{(1)}$	$0{,}565 \div 0{,}888$	$0{,}5 \div 0{,}933$		

Следует отметить, что при малых значениях передаточного отношения передач типа *в* и *г* коэффициент их полезного действия будет очень малым, а для случая, когда передача осуществляется от колеса к водилу, может иметь место самоторможение. Таким образом, применение передач типа *в* и *г* в силовых мощных редукторах нерационально.

Наоборот, передачи типа *а* и *б* обладают, как правило, высоким коэффициентом полезного действия: от 0,96 до 0,98.

Пользуясь таблицей 8, можно установить, какая схема передачи должна быть принята. Пусть, например, требуется спроектировать планетарную передачу, осуществляющую передаточное отношение i, равное $i = 0{,}5$. Таблица показывает, что $i = 0{,}5$ не лежит в интервалах планетарных передач типа *а*. Но данное передаточное отношение может быть воспроизведено передачей типа *б*,

у которого это число входит в интервалы передаточных отношений.

В том случае, когда заданное передаточное отношение не входит в интервалы передач типа *а* и *б*, необходимо применять более сложные планетарные передачи или устанавливать несколько последовательно соединенных передач.

2°. Переходим к рассмотрению вопроса о подборе чисел зубьев планетарных передач. Рассмотрение этого вопроса проведем на примере передачи типа *а* (рис. 22.2). Обычно в редукторах для уменьшения нагрузок на зубья колес и из условий требований к динамической уравновешенности механизма устанавливают не один, а несколько сателлитов (рис. 22.3), устанавливаемых под равными углами. На рис. 22.3, *б* показано три сателлита *2*, *2'* и *2''*, расположенных под углами 120°, но, вообще говоря, их число может быть и больше. Сателлиты располагаются в одной плоскости, и окружности головок сателлитов не должны пересекаться. На рис. 22.3, *б* показаны сателлиты *2* и *2'''* в предельном соседстве, когда окружности их головок радиуса R_{r2} соприкасаются. Из треугольника *ABC* следует, что для того, чтобы окружности головок не соприкасались, надо удовлетворить неравенству

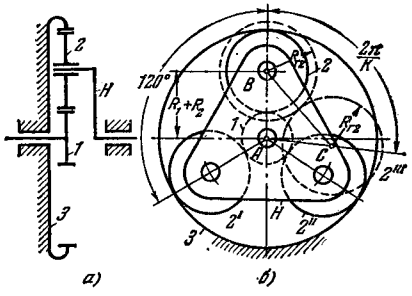


Рис. 22.3. К определению условия соседства сателлитов: *а*) схема планетарного механизма с одним сателлитом; *б*) схема с тремя сателлитами.

$$2(R_1+R_2)\sin\frac{\pi}{k}>2R_{r2}, \tag{22.25}$$

где k — число сателлитов и R_1 и R_2 — радиусы начальных окружностей колес *1* и *2*. Если передача имеет стандартные колеса, то радиусы R_1, R_2 и R_{r2} могут быть выражены через числа зубьев z_1 и z_2:

$$(z_1+z_2)\sin\frac{\pi}{k}>(z_2+2), \tag{22.26}$$

откуда

$$\sin\frac{\pi}{k}>\frac{z_2+2}{z_1+z_2}. \tag{22.27}$$

Условие (22.27) называется *условием соседства*.

3°. При сборке планетарного редуктора первый поставленный сателлит полностью определяет взаимное расположение центральных колес. Пусть, например, сателлит *2* имеет четное число зубьев (рис. 22.4). Тогда зубья *a* и *b* будут расположены симметрично и

центральные колеса *1* и *3* займут вполне определенное расположение друг относительно друга.

Повернем колесо *1* на угол φ_1, равный одному угловому шагу; тогда, если число зубьев колеса *1* равно z_1, то угол φ_1 будет равен

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{z_1}. \qquad (22.28)$$

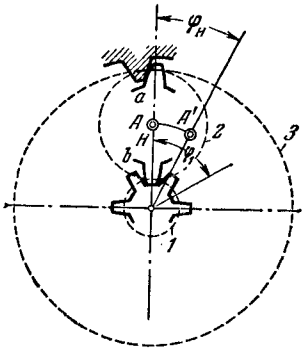


Рис. 22.4. К определению условия сборки планетарного механизма.

После поворота центрального колеса *1* на угол φ_1 ось A сателлита займет положение A', а водило H повернется на угол φ_H, равный

$$\varphi_H = \varphi_1 i_{H1}^{3)}. \qquad (22.29)$$

При этом место первого зуба колеса *1* займет второй зуб этого колеса. Таким образом, после этого поворота оси симметрии зубьев центральных колес *1* и *3* будут на одной общей прямой. Тогда между центральными колесами *1* и *3* можно вставить еще один сателлит, конечно, расположенный в плоскости, не совпадающей с плоскостью первого сателлита. Очевидно, что теоретически число сателлитов n, которое можно поставить, равно

$$n = \frac{2\pi}{\varphi_H}. \qquad (22.30)$$

Формула (22.30) с учетом выражения (22.29) может быть представлена так:

$$n = \frac{2\pi z_1}{2\pi i_{H1}^{3)}} = \frac{z_1}{i_{H1}^{3)}}. \qquad (22.31)$$

Из приведенной выше таблицы 7 имеем

$$i_{H1}^{3)} = \frac{1}{1+\frac{z_3}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1+z_3}. \qquad (22.32)$$

Подставляя выражение (22.32) в равенство (22.31), получаем

$$n = \frac{z_1(z_1+z_3)}{z_1} = z_1 + z_3. \qquad (22.33)$$

Число n является числом теоретически возможных сателлитов. Практически число сателлитов k будет, конечно, меньше. Так, если повернуть колесо *1* не на один зуб, а на m зубьев, то число сателлитов будет меньше в m раз:

$$k = \frac{2\pi}{m\varphi_H} = \frac{z_1+z_3}{m}. \qquad (22.34)$$

Условие (22.34) носит название *условия сборки*. Оно действительно и для случая, когда число зубьев сателлита нечетное. Таким образом, при проектировании схемы планетарной передачи необходимо, чтобы удовлетворялось заданное передаточное отношение, заданный модуль, условие сборки, условие соседства и соосность передачи, которая для механизма, показанного на рис. 22.3, имеет следующий вид:

$$z_3 = 2z_2 + z_1, \tag{22.35}$$

так как колеса *1*, *2* и *3* имеют равные модули. Кроме того, для стандартных колес необходимо, чтобы отсутствовало подрезание зубьев, а для внутреннего зацепления отсутствовала бы интерференция зубьев.

Пример. Пусть требуется спроектировать планетарную передачу, воспроизводящую передаточное отношение $i = 4{,}5$. Из таблицы 7 видим, что это передаточное отношение может быть осуществлено передачами типа *а* и *б*. Выбираем тип *а* с передаточным отношением $i^{(3)}_{1H}$ — схему с ведущим колесом *1* и ведомым водилом H. Имеем $i^{(3)}_{1H} = 4{,}5$, следовательно, $i^{H}_{13} = 1 - i^{(3)}_{1H} = 1 - 4{,}5 = -3{,}5$. Так как i^{H}_{13} из таблицы 7 равно

$$i^{H}_{13} = -\frac{z_3}{z_1} = -3{,}5, \tag{а}$$

то

$$z_3 = 3{,}5z_1. \tag{б}$$

Из условия соосности (22.35) имеем

$$z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2}, \tag{в}$$

или, учитывая условие (б),

$$z_2 = \frac{3{,}5z_1 - z_1}{2} = \frac{2{,}5z_1}{2} = 1{,}25z_1. \tag{г}$$

Из равенств (б) и (г) получаем

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{3{,}5z_1}{1{,}25z_1} = 2{,}8. \tag{д}$$

Число зубьев z_3 должно быть выбрано так, чтобы отсутствовали подрезание и интерференция зубьев. Из таблицы 6, помещенной в § 95, *2°*, видим, что если число z_2 выбрать равным $z_2 = 20$, то число зубьев z_3 будет равно $z_3 = 2{,}8z_2 = 2{,}8 \cdot 20 = 56$, т. е. будет меньше 60, а для отсутствия подрезания необходимо иметь $z_3 > 60$. Минимальное число зубьев $z_{2\min} = 22$, ибо в этом случае $z_3 = 2{,}8z_2 = 2{,}8 \cdot 22 = 61{,}6$, т. е. $z_3 > 60$. Таким образом, может быть выбрано $z_2 = 22$.

Условие (д) в целых наименьших числах удовлетворяется, если выбрать $z_2 = 25$ и $z_3 = 70$. Имеем

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{70}{25} = 2{,}8.$$

Из формулы (б) получаем

$$z_1 = \frac{z_3}{3{,}5} = \frac{70}{3{,}5} = 20.$$

Из таблицы 6 (§ 95, 2°) следует, что при числе $z_1 = 20$ подрезание зубьев отсутствует. Таким образом, число зубьев редуктора равно: $z_1 = 20$, $z_2 = 25$, $z_3 = 70$.

Переходим к определению возможного числа k сателлитов. Из условия соседства (22.27) имеем

$$k < \frac{\pi}{\arcsin\frac{z_2+2}{z_1+z_2}} = \frac{\pi}{\arcsin\frac{25+2}{20+25}} = \frac{\pi}{\arcsin\frac{27}{45}} = \frac{\pi}{\arcsin 0{,}6} = 4{,}87, \qquad \text{(е)}$$

т. е. должно быть $k \leqslant 4$. Далее, из условия сборки (22.34)

$$k = \frac{z_1+z_3}{m} = \frac{20+70}{m} = \frac{90}{m}. \qquad \text{(ж)}$$

Так как числа k и m должны быть целыми, то условие (ж) при выборе числа сателлитов $k = 4$ не может быть удовлетворено. Условию (ж) удовлетворяет число сателлитов $k = 3$, так как в этом случае число $m = 30$. Можно, далее, определить радиусы начальных окружностей колес, если задан модуль m. Выберем модуль m равным $m = 10$ *мм*. Тогда имеем

$$R_1 = \frac{mz_1}{2} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ мм},$$

$$R_2 = \frac{mz_2}{2} = \frac{10 \cdot 25}{2} = 125 \text{ мм},$$

$$R_3 = \frac{mz_3}{2} = \frac{10 \cdot 70}{2} = 350 \text{ мм}.$$

Проверим условие соосности. Имеем

$$r_3 = 2R_2 + R_1 = 2 \cdot 125 + 100 = 350 \text{ мм}.$$

Определяем, далее, коэффициент полезного действия механизма по формуле (14.46) (см. § 65,6°). Коэффициент потерь φ_H принимаем равным $\varphi_H = 0{,}05$. Тогда имеем коэффициент полезного действия η_{1H} равным

$$\eta_{1H} = 1 - |(1 - i_{H1}^{(3)})|\varphi_H = 1 - \left|\left(1 - \frac{1}{i_{1H}^{(3)}}\right)\right|\varphi_H = 1 - \left|\left(1 - \frac{1}{4{,}5}\right)\right|0{,}05 \approx 0{,}96.$$

ГЛАВА XXIII

СИНТЕЗ МАЛЬТИЙСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 103. Проектирование механизмов с внешним зацеплением

1°. В § 36 нами были рассмотрены схемы механизмов мальтийских крестов и некоторые вопросы их кинематики. Мальтийские механизмы широко применяются в машинах-автоматах и приборах, когда необходимо воспроизведение движения, постоянного по направлению, но с периодической остановкой ведомого звена. Обычно при этом задается отношение k времени $t_д$ движения ведомого звена к времени $t_п$ его покоя, называемое *коэффициентом времени работы механизма.*

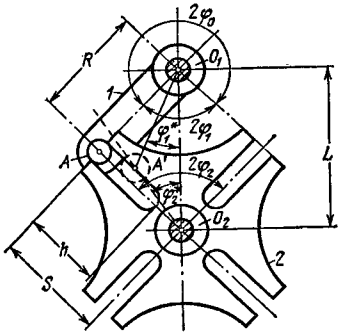


Рис. 23.1. Схема механизма мальтийского креста с внешним зацеплением.

В простейшем механизме мальтийского креста с внешним зацеплением (рис. 23.1) профиль симметрично расположенных пазов является прямолинейным и радиальным, и ведущим является кривошип *1*, снабженный одной цевкой A. Время $t_д$ движения креста *2* и время $t_п$ его покоя определяются с учетом формул (8.11) и (8.12) так:

$$t_д = \frac{30}{\pi n_1} 2\varphi_1 = \frac{30}{n_1}\left(1 - \frac{2}{z}\right), \tag{23.1}$$

$$t_п = \frac{30}{\pi n_1}(2\pi - 2\varphi_1) = \frac{30}{n_1}\left(1 + \frac{2}{z}\right). \tag{23.2}$$

Из рис. 23.1 следует, что

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi_2 &= \frac{2\pi}{z}, \\ 2\varphi_1 &= \pi - 2\varphi_2 = \pi\left(1 - \frac{2}{z}\right), \end{aligned}\right\} \tag{23.3}$$

где z — число пазов и n_1 — число оборотов в минуту звена *1*. Следовательно, время T полного оборота звена *1* будет равно

$$T = t_д + t_п = \frac{60}{n_1}. \tag{23.4}$$

Наименьшее число z пазов для возможности осуществления поворота креста *2* (рис. 23.1) на полный поворот должно быть не меньше $z \geqslant 3$.

При проектировании механизмов мальтийских крестов обычно промежутки времени движения и времени покоя креста выражают в относительных единицах p и q, соответственно равных

$$p = \frac{t_д}{T} = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}, \quad q = \frac{t_п}{T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z}.$$

Коэффициент k времени работы механизма будет равен

$$k = \frac{p}{q} = \frac{z-2}{z+2}. \tag{23.5}$$

Выше мы рассмотрели формулы для определения времени движения и времени покоя для того случая, когда ведущее звено *1* имеет одну цевку. В случае, если число цевок m больше единицы, то наибольшее их число при симметричном их расположении определяется из следующего условия:

$$m \leqslant \frac{2\pi}{2\varphi_1} = \frac{2}{1-\frac{2}{z}}. \tag{23.6}$$

При проектировании мальтийских механизмов по заданному углу $2\varphi_1$ поворота креста и относительным величинам p, q и k можно пользоваться таблицей 9, составленной для числа пазов $z = 3 \div 12$, так как кресты обычно не имеют большего числа пазов.

Таблица 9

Расчетные параметры мальтийских механизмов с внешним зацеплением и с одной цевкой

Число пазов креста z	Угол поворота звена *1*, соответствующий		Угол поворота креста $2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z}$	$p = \frac{t_д}{T}$	$q = \frac{t_п}{T}$	Коэффициент времени работы креста $k = \frac{p}{q}$
	покою креста	движению креста				
	$2\varphi_0 = \pi\left(1+\frac{2}{z}\right)$	$2\varphi_1 = \pi - 2\varphi_2$				
3	300°	60°	120°	0,1667	0,8333	0,20
4	270°	90°	90°	0,2500	0,7500	0,33
5	252°	108°	72°	0,3000	0,7000	0,43
6	240°	120°	60°	0,3333	0,6667	0,50
7	231° 26′	128° 34′	51° 26′	0,3571	0,6429	0,56
8	225°	135°	45°	0,3750	0,6250	0,60
9	220°	140°	40°	0,3889	0,6111	0,64
10	216°	144°	36°	0,4000	0,6000	0,67
11	212° 44′	147° 16′	32° 16′	0,4090	0,5910	0,69
12	210°	150°	30°	0,4167	0,5833	0,71

Из рассмотрения таблицы 9 видно, что для мальтийского механизма с одной цевкой при числе пазов $z = 3$ коэффициент времени работы k равен $k = 0{,}20$. С увеличением числа z пазов коэффициент k возрастает, достигая при $z = 12$ величины $k = 0{,}71$.

2°. При выборе параметров мальтийских механизмов необходимо учитывать и кинематические характеристики механизмов. Если текущие углы поворота звена *1* и креста *2* обозначить через φ_1^* и φ_2^*, то для произвольного положения A' цевки в пазу (рис. 23.1) будем иметь

$$\frac{R}{L} = \frac{\sin \varphi_2^*}{\sin (\varphi_1^* + \varphi_2^*)}. \tag{23.7}$$

Так как согласно рис. 23.1

$$\frac{R}{L} = \sin \varphi_2 = \sin \frac{\pi}{z} = \lambda, \tag{23.8}$$

то уравнение (23.7) примет вид

$$\lambda = \frac{\sin \varphi_2^*}{\sin (\varphi_1^* + \varphi_2^*)},$$

откуда получаем

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_2^* &= \frac{\lambda \sin \varphi_1^*}{1 - \lambda \cos \varphi_1^*}, \\ \varphi_2^* &= \operatorname{arctg} \frac{\lambda \sin \varphi_1^*}{1 - \lambda \cos \varphi_1^*}. \end{aligned}\right\} \tag{23.9}$$

Аналог $\omega_{2\varphi_1^*}$ угловой скорости креста *2* равен

$$\omega_{2\varphi_1^*} = \frac{d\varphi_2^*}{d\varphi_1^*} = \frac{\lambda (\cos \varphi_1^* - \lambda)}{1 - 2\lambda \cos \varphi_1^* + \lambda^2}. \tag{23.10}$$

Аналог $\varepsilon_{2\varphi_1^*}$ углового ускорения креста *2* будет равен

$$\varepsilon_{2\varphi_1^*} = \frac{d\left(\omega_{2\varphi_1^*}\right)}{d\varphi_1^*} = -\frac{\lambda (1 - \lambda^2) \sin \varphi_1^*}{(1 - 2\lambda \cos \varphi_1^* + \lambda^2)^2}. \tag{23.11}$$

Угловая скорость ω_2 креста равна

$$\omega_2 = \omega_{2\varphi_1^*} \omega_1, \tag{23.12}$$

а угловое ускорение ε_2 креста выразится так:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2\varphi_1^*} \omega_1^2, \tag{23.13}$$

где ω_1 — угловая скорость звена *1*.

Из формул (23.10) и (23.12) следует, что угловая скорость ω_2 креста равна нулю, если равен нулю числитель выражения (23.10). Имеем

$$\lambda (\cos \varphi_1^* - \lambda) = 0,$$

или

$$\cos \varphi_1^* = \lambda,$$

и, далее, учитывая равенство (23.8), получаем

$$\cos\varphi_1^* = \sin\frac{\pi}{z},$$

откуда находим

$$\varphi_1^* = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{z} = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z}\right) = \varphi_1, \qquad (23.14)$$

т. е. угловая скорость ω_2 креста равна нулю при входе и выходе цевки из паза, и, следовательно, жесткие удары в механизме отсутствуют.

Угловая скорость ω_2 креста будет максимальной и равной $\omega_{2\,(\max)}$, когда угол φ_1^* будет равен $\varphi_1^* = 0$, т. е. в положении, когда ось паза совпадает с прямой O_1O_2 (рис. 23.2). Из формулы (23.10) следует, что в этом положении аналог угловой скорости $\omega_{2\varphi_1^*(\max)}$ равен

$$\omega_{2\varphi_1^*(\max)} = \frac{\lambda}{1-\lambda}. \qquad (23.15)$$

В этом положении угловое ускорение ε_2 креста равно нулю. Угловые ускорения ε_2' креста в моменты входа и выхода цевки из зацепления равны

$$\varepsilon_2' = \varepsilon_{2\varphi_1}'\omega_1^2, \qquad (23.16)$$

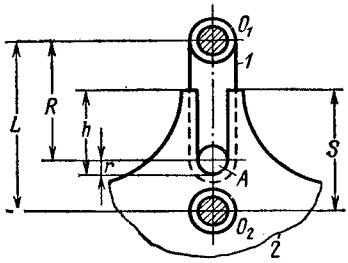


Рис. 23.2. Деталь схемы механизма мальтийского креста с внешним зацеплением.

где абсолютная величина аналога $\varepsilon_{2\varphi_1}'$ углового ускорения ε_2', согласно формуле (23.11), имеет вид

$$\varepsilon_{2\varphi_1}' = \frac{\sin\frac{\pi}{z}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{z}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{z}\right)}{\left[1-2\sin\frac{\pi}{z}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{z}\right)+\sin^2\frac{\pi}{z}\right]^2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{z}. \qquad (23.17)$$

Из формулы (23.17) следует, что так как $\pi/z > 0$, то в моменты начала и конца поворота креста он имеет некоторые ускорения $\varepsilon_{2\varphi_1}'$, которые определяют мягкий удар.

Некоторые кинематические характеристики механизмов с внешним зацеплением даны в таблице 10.

Из рассмотрения данной таблицы следует, что при уменьшении числа пазов возрастают максимальные угловые скорости креста и угловые ускорения в моменты входа и выхода цевки из зацепления. Резкое возрастание ускорений, а с ним и динамических нагрузок является существенным недостатком мальтийских механизмов с малым числом пазов.

3°. Основные размеры звеньев мальтийского механизма (рис. 23.1) определяются следующим образом. Если задано межосевое

Таблица 10

Расчетные параметры мальтийских механизмов с внешним зацеплением и числом цевок от 2 до 5

Число пазов креста z	Угол поворота звена 1, соответствующий покою креста				Угол поворота звена 1, соответствующий движению креста, $2\varphi_1$	Угол поворота креста $2\varphi_2$	$p=\frac{t_д}{T}$
	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$			
3	120°	60°	30°	12°	60°	120°	0,1667
4	90°	30°	—	—	90°	90°	0,2500
5	72°	12°	—	—	108°	72°	0,3000
6	60°	—	—	—	120°	60°	0,3333
7	51° 26′	—	—	—	128° 34′	51° 26′	0,3571
8	45°	—	—	—	135°	45°	0,3750
9	40°	—	—	—	140°	40°	0,3889
10	36°	—	—	—	144°	36°	0,4000
11	32° 44′	—	—	—	147° 16′	32° 44′	0,4090
12	30°	—	—	—	150°	30°	0,4167

Число пазов креста z	$q=\frac{t_п}{T}$				Коэффициент времени работы механизма $k=\frac{p}{q}$			
	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
3	0,333	0,1667	0,0833	0,0333	0,50	1,0	2,0	5,0
4	0,2500	0,0833	—	—	1,00	3,00	—	—
5	0,2000	0,0333	—	—	1,50	9,00	—	—
6	0,1667	—	—	—	2,00	—	—	—
7	0,1420	—	—	—	2,50	—	—	—
8	0,1250	—	—	—	3,00	—	—	—
9	0,1111	—	—	—	3,50	—	—	—
10	0,1000	—	—	—	4,00	—	—	—
11	0,0909	—	—	—	4,50	—	—	—
12	0,0833	—	—	—	5,0	—	—	—

При несимметричном расположении центров цевок на окружности звена 1 периоды покоя креста не равны между собой.

расстояние $O_1O_2=L$ и выбрано число z пазов креста, то радиус R ведущего кривошипа равен

$$R=L\sin\varphi_2=L\sin\frac{\pi}{z}.$$

Расстояние S от оси вращения креста до торцов его пазов равно

$$S=L\cos\varphi_2=L\cos\frac{\pi}{z}.$$

Длина h паза креста определится из рис. 23.2, на котором показано положение механизма мальтийского креста, когда ось паза совпадает с линией O_1O_2:

$$h=S+R-L+r,$$

где r — радиус цевки, и, далее, $h = L\left(\cos\frac{\pi}{z}+\sin\frac{\pi}{z}-1\right)+r$.

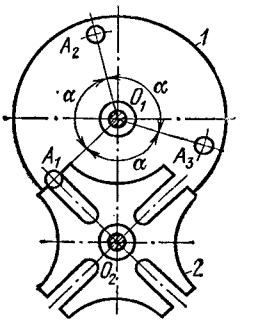


Рис. 23.3. Схема механизма мальтийского креста с внешним зацеплением и тремя цевками.

4°. Если ведущее звено *1* (рис. 23.3) имеет несколько симметрично расположенных цевок, то число m этих цевок может быть определено из неравенства (23.6). Из этого неравенства следует, что число m цевок может быть в пределах $m = 1 \div 5$.

На рис. 23.3 показан мальтийский механизм с числом цевок $m = 3$ и числом пазов $z = 4$, что удовлетворяет неравенству (23.6). Угол $2\varphi_1$ поворота звена *1*, при котором происходит поворот креста *2*, равен, по формуле (23.3),

$$2\varphi_1=\pi\left(1-\frac{2}{z}\right). \tag{23.18}$$

Угол поворота $2\varphi_0$ звена *1*, при котором крест *2* находится в покое, равен

$$2\varphi_0=\frac{2\pi}{m}-2\varphi_1=\frac{2\pi}{m}-\pi+\frac{2\pi}{z}=\pi\left(\frac{2}{m}+\frac{2}{z}-1\right). \tag{23.19}$$

Коэффициент k времени работы равен

$$k=\frac{t_д}{t_п}=\frac{\varphi_1}{\varphi_0}=\frac{1-\frac{2}{z}}{\frac{2}{m}+\frac{2}{z}-1}. \tag{23.20}$$

При проектировании мальтийского механизма с числом цевок $m = 2 \div 5$ можно пользоваться таблицей 10.

ГЛАВА XXIV
СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 104. Основные типы плоских кулачковых механизмов

1°. В настоящем параграфе мы рассмотрим основные типы кулачковых механизмов, причем для удобства рассмотрения разобьем эти механизмы в зависимости от движения ведомого звена на следующие три вида:

1) ведомое звено движется *поступательно*;

2) ведомое звено *вращается;*

3) ведомое звено совершает *сложное движение.*

Примером первого вида кулачковых механизмов может служить механизм, кинематическая схема которого показана на рис. 24.1, *а*.

Цилиндр, ограниченный в сечении плоской кривой *1*, вращается вокруг оси A с заданной угловой скоростью ω. Действуя на ролик *3*, свободно вращающийся вокруг оси, цилиндр *1* заставляет звено *2* двигаться поступательно в направляющих $C - C$. Условимся в кулачковых механизмах называть *кулачком* то звено высшей пары, элемент которого имеет переменную кривизну. *Профилем плоского кулачка* условимся называть кривую, получаемую в сечении элемента кулачка плоского механизма плоскостью, параллельной плоскости движения кулачка. Тогда в механизме, показанном на рис. 24.1, *а*, звено *1* является кулачком, а кривая α — профилем кулачка.

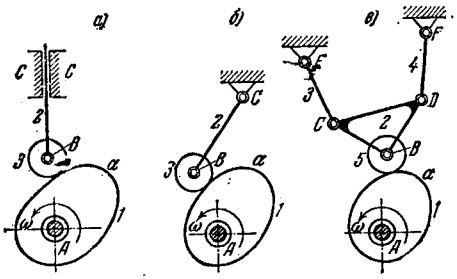


Рис. 24.1. Схемы кулачковых механизмов: *а*) с поступательно движущимся ведомым звеном; *б*) с возвратно-вращающимся ведомым звеном; *в*) со сложно движущимся ведомым звеном.

На рис. 24.1, *б* показан второй вид кулачкового механизма. Кулачок *1* вращается с заданной угловой скоростью ω. Действуя на ролик *3*, кулачок *1* заставляет звено *2* вращаться вокруг точки C.

На рис. 24.1, *в* показан третий вид кулачкового механизма. Кулачок *1* вращается вокруг оси с угловой скоростью ω. Действуя на ролик *5*, кулачок *1* заставляет звено *2* совершать сложное движение, в то время как звенья *3* и *4* вращаются соответственно вокруг точек E и F.

2°. Внутри каждого вида кулачковых механизмов мы можем получить различные разновидности этих механизмов в зависимости от характера движения кулачка, взаимного расположения кулачка и ведомого звена, геометрических форм элемента, принадлежащего ведомому звену. Например, кулачковые механизмы с поступательно движущимся звеном вида, показанного на рис. 24.1, *а*, могут иметь различные кинематические схемы, показанные на рис. 24.2, так как кулачок может вращаться вокруг неподвижной оси A (рис. 24,2, *а*, *б* и *в*) или двигаться поступательно (рис. 24.2, *г* и *д*) вдоль оси $x - x$ и т. д. Ось $y - y$ ведомого звена может пересекать ось A вращения кулачка (рис. 24.2, *а*) и не пересекать ее (рис. 24.2, *в*), образуя некоторое кратчайшее расстояние, равное l. Ось $y - y$ движения звена *2* может быть перпендикулярна к оси $x - x$ движения кулачка (рис. 24.2, *г*) или образовать некоторый угол α с осью $x - x$ (рис. 24.2, *д*). Наконец, ведомое звено может окан-

чиваться точкой C (острием) (рис. 24.2, *а* и *г*), круглым роликом *3* (рис. 24.2, *в* и *д*) или прямой $a - a$ (плоской тарелкой) (рис. 24.2, *б*).

Ведомое звено *2*, движущееся поступательно, носит название *толкателя* или *штанги*.

Ведомое звено *2*, вращающееся вокруг неподвижной оси (рис. 24.1, *б*), носит название *коромысла*, и ведомое звено *2*, имеющее сложное движение (24.1, *в*), называется *шатуном*. Если ось $y - y$

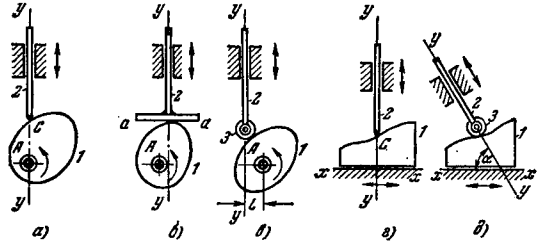


Рис. 24.2. Схемы кулачковых механизмов: *а*) с поступательно движущимся толкателем с острием на конце; *б*) с плоским толкателем; *в*) с поступательно движущимся толкателем и роликом; *г*) с поступательно движущимся кулачком и толкателем с острием; *д*) с поступательно движущимися кулачком, толкателем и роликом.

толкателя проходит через ось A вращения кулачка (рис. 24.2, *а*), то такой механизм обычно называется *кулачковым механизмом с центральным толкателем*. Если ось $y - y$ отстоит на кратчайшее расстояние l от оси A вращения кулачка (рис. 24.2, *в*), то такой механизм называется *кулачковым механизмом со смещенным толкателем*. Механизм, показанный на рис. 24.1, *б*, носит название *кулачкового механизма с коромыслом* и т. д. В зависимости от характера движения ведомых и ведущих звеньев, геометрических форм элементов звеньев, расположения низших кинематических пар, в которые входят звенья кулачковых механизмов, мы можем получить самые различные типы кулачковых механизмов. Наибольшее распространение в машинах получили типы кулачковых механизмов, показанные на рис. 24.1 *а* и *б*, и кулачковые механизмы, схемы которых показаны на рис. 24.2 и 24.3.

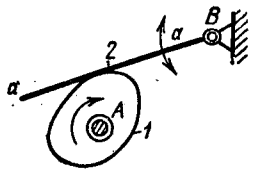


Рис. 24.3. Схема кулачкового механизма с коромыслом, касающимся кулачка

3°. При работе кулачковых механизмов необходимо, чтобы было постоянное соприкасание ведущего и ведомого звеньев. Это соприкасание может быть обеспечено, например, чисто геометрически, если выполнить профиль кулачка в форме паза $a - a$ (рис. 24.4, *а*), боковые поверхности которого огибают ролик *3*. Пазовый кулачок обеспечивает геометрическое замыкание высшей пары кулачкового механизма.

На рис. 24.4, *б* показан другой способ кинематического замыкания — с помощью двух роликов *3* и *4*. При таком замыкании на профиль кулачка накладывается дополнительное условие равенства

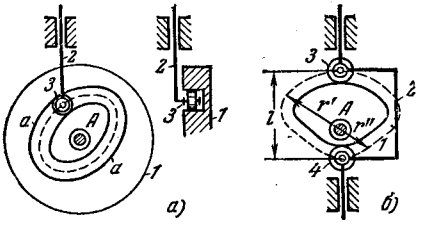


Рис. 24.4. Схемы кулачковых механизмов с геометрическим замыканием: *а*) с пазовым кулачком; *б*) с двумя толкателями в рамке.

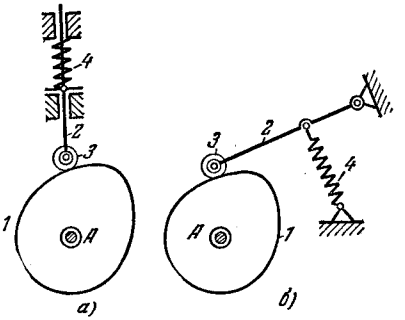


Рис. 24.5. Схемы кулачковых механизмов с силовым замыканием: *а*) с поступательно движущимся толкателем; *б*) с возвратно-вращающимся коромыслом.

суммы противоположных радиусов-векторов r' и r'' центрового профиля кулачка расстоянию l между осями вращения роликов *3* и *4*. Чаще всего применяется силовое замыкание с помощью пружины *4* (рис. 24.5, *а* и *б*).

§ 105. Исходные данные для проектирования кулачковых механизмов

1°. Чтобы спроектировать профиль кулачка кулачкового механизма, необходимо выбрать

а) кинематическую схему механизма,

б) закон движения ведомого звена в функции обобщенной координаты,

в) некоторые основные размеры звеньев.

Выбор той или иной кинематической схемы механизма определяется в первую очередь из конструктивных соображений необходимостью воспроизведения требуемого по условиям технологического процесса движения ведомого звена. Выбор закона движения ведомого звена в функции обобщенной координаты является основным этапом в проектировании кулачкового механизма. При выборе закона движения необходимо, чтобы этот закон удовлетворял требованиям того технологического процесса, для выполнения которого проектируется кулачковый механизм.

Например, на рис. 24.6 показан кулачковый механизм ножниц конфетообертночного автомата. При вращении пазового кулачка *1* угловой рычаг *2*, ролик которого перекатывается в пазу кулачка, поворачивается вокруг оси A, производя открытие и закрытие

ножниц, лезвия которых представляют собой звенья *3* и *4*. Таким образом, время T полного цикла движения механизма состоит из времени $t_з$ закрытия ножниц, времени $t_о$ открытия и времени $t_в$ выстоя (покоя) ножниц. Таким образом, полное время T движения механизма равно

$$T = t_з + t_о + t_в. \quad (24.1)$$

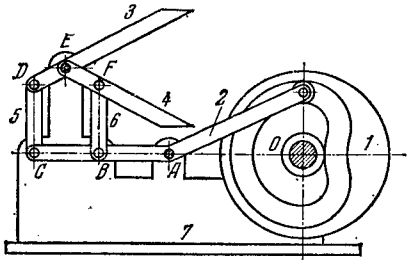


Рис. 24.6. Схема кулачково-рычажного механизма ножниц.

Промежутки времени $t_з$, $t_о$ и $t_в$ выбираются в соответствии с требованиями технологического процесса и максимальной производительности механизма. Зная размеры звеньев механизма, можно определить рабочий угол $\varphi_р$ поворота рычага *2*, соответствующий периодам времени $t_з$ и $t_о$ или соответственно углам $\varphi_{1з}$ и $\varphi_{1о}$ поворота кулачка. Таким образом, рычаг *2* поворачивается на угол $\varphi_р$ в одном направлении за время $t_з$, или при повороте кулачка на угол $\varphi_{1з}$, производя закрытие ножниц. Далее, рычаг *2* поворачивается на тот же угол $\varphi_р$ в противоположном направлении, за время $t_о$, или при повороте кулачка на угол $\varphi_{1о}$, производя открытие ножниц. Наконец, за время $t_в$ при повороте на угол $\varphi_{1в}$ выстоя рычаг *2* должен быть неподвижен.

Имея эти данные, можно построить условную диаграмму движения рычага *2* и так называемую *циклограмму механизма* (рис. 24.7).

На рис. 24.7, *а* построена условная функция положений, т. е. зависимость $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$. Условность диаграммы рис. 24.7, *а* заключается в том, что изменение угла φ_2 в функции угла φ_1 принято линейным.

Рис. 24.7, *б* представляет собой циклограмму механизма. На ней показаны углы $\varphi_з$, $\varphi_о$ и $\varphi_в$, соответствующие повороту кулачка *1* за время $t_з$, $t_о$ и $t_в$.

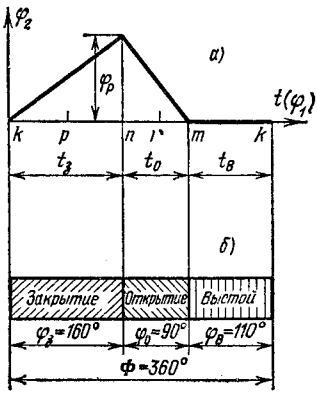


Рис. 24.7. Циклограмма механизма, подобного изображенному на рис. 24.6.

2°. Рассмотрим некоторую типовую функцию положения, заданную в виде графика зависимости $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 24.8, *б*), где s_2 — линейное перемещение толкателя *2*, а φ_1 — угол поворота кулачка (рис. 24.8, *а*). Пусть угол поворота кулачка $\Phi = 2\pi$ соответствует полному циклу движения механизма. На угле поворота φ_1^I происходит подъем толкателя на величину h^I. Далее, на угле пово-

рота φ_1^{II} толкатель имеет выстой. На угле поворота φ_1^{III} происходит опускание толкателя на величину $h^{III} = h^I - h^{IV}$. На угле поворота φ_1^{IV} толкатель имеет второй выстой. На угле поворота φ_1^V толкатель опустится на величину h^V, и на угле поворота φ_1^{VI} толкатель вновь имеет выстой. Углы φ_1^I, φ_1^{II}, φ_1^{III}, ... носят название *фазовых углов*. Участок кривой $s_2 = s_2(\varphi_1)$, соответствующий фазовому углу φ_1^I, называется *фазой подъема*, потому что при повороте кулачка на этот угол график движения толкателя *2* поднимается

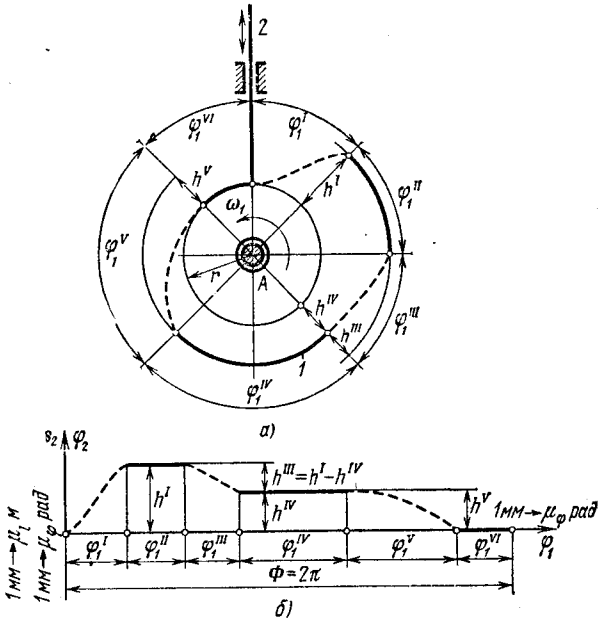


Рис. 24.8. Кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем: *а*) схема механизма; *б*) закон движения ведомого звена.

(рис. 24.8, *б*). Участки кривой $s_2 = s_2(\varphi_1)$, соответствующие углам φ_1^{II}, φ_1^{IV} и φ_1^{VI}, называются *фазами выстоя*, и, наконец, участки φ_1^{III} и φ_1^V — *фазой опускания*, ибо на этих участках график движения толкателя опускается. Нетрудно видеть (рис. 24.8, *а*), что на углах φ_1^{II}, φ_1^{IV} и φ_1^{VI}, соответствующих фазам выстоя, профиль кулачка *1* должен быть очерчен по дугам окружностей с радиусами $r + h^I$, $r + h^{IV}$ и r, где r — наименьший радиус-вектор кулачка. На углах φ_1^I, φ_1^{III} и φ_1^V, соответствующих фазам подъема или опускания, профиль кулачка должен соответствовать выбранным на этих фазах законам движения $s_2 = s_2(\varphi_1)$. На рис. 24.8, *а* участки кулачка, соответствующие этим фазам, показаны условно штриховой линией. На рис. 24.8, *а* и *б* был рассмотрен кулачковый

механизм с поступательно движущимся звеном, но все определения и положения применимы и для кулачковых механизмов с коромыслом (например, вида, показанного на рис. 24.1, *б* или рис. 24.3). В этих случаях по оси ординат (рис. 24.8, *б*) следует отложить углы φ_2, поворота коромысла *2*, и тогда получается зависимость $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$. Выбор наиболее рациональных законов движения ведомых звеньев зависит от многих требований кинематического, динамического, конструктивного и технологического характера, на некоторых из которых мы остановимся в следующем параграфе.

3°. К исходным данным для проектирования кулачковых механизмов относится также выбор основных размеров их звеньев. Здесь сначала надо отметить желательность получения наименьших габаритов механизма, достаточно высокого его коэффициента полезного действия, установление размеров и направляющих для толкателей, определение диаметра ролика или размеров плоской тарелки толкателя и коромысла и т. д. Основные конструктивные размеры звеньев кулачковых механизмов также связаны и с расчетом на прочность этих звеньев, износом профилей элементов высшей кинематической пары, надежности работы механизма и т. д.

Как всегда, при конкретном проектировании трудно спроектировать кулачковый механизм, который удовлетворял бы всем требуемым показателям в одинаковой степени. Поэтому в процессе проектирования конструктор обычно просчитывает несколько вариантов схем механизма и выбирает из них оптимальный вариант или стремится, учитывая технологическое задание, удовлетворить в той или иной степени основным кинематическим, динамическим, конструктивным и технологическим требованиям к рациональной конструкции механизма.

Ниже, в особом параграфе, будут более подробно рассмотрены некоторые вопросы выбора основных размеров звеньев кулачковых механизмов.

§ 106. Законы движения ведомых звеньев

1°. Теоретически кулачковыми механизмами можно осуществлять самые различные законы движения, но на практике пользуются только теми, которые обеспечивают более простую технологию обработки профиля кулачка и удовлетворяют кинематическим и динамическим требованиям к кулачковому механизму. Рассмотрение этих законов будем вести для четырех характерных фаз движения ведомого звена: фазы подъема $\varphi_п$, фазы верхнего выстоя $\varphi_{вв}$, фазы опускания $\varphi_о$ и фазы нижнего выстоя $\varphi_{нв}$. Наиболее простым законом $s_2 = s_2(\varphi_1)$ является линейный закон движения на фазах подъема и опускания (рис. 24.9). Углы φ_1, соответствующие фазам подъема, выстоя и опускания, обозначены через $\varphi_п$, $\varphi_{вв}$, $\varphi_о$ и $\varphi_{нв}$.

Сумма этих углов обозначена через Φ:

$$\Phi = \varphi_{\text{п}} + \varphi_{\text{вв}} + \varphi_{\text{о}} + \varphi_{\text{нв}} = 2\pi.$$

Полный подъем ведомого звена обозначен через h.

Закон движения ведомого звена на фазе подъема представляет собой зависимость

$$s_2 = \frac{h}{\varphi_{\text{п}}}\varphi_1, \tag{24.2}$$

а на фазе опускания

$$s_2 = [(\Phi - \varphi_{\text{нв}}) - \varphi_1]\frac{h}{\varphi_{\text{о}}} = \frac{h}{\varphi_{\text{о}}}(\Phi - \varphi_{\text{нв}}) - \frac{h}{\varphi_{\text{о}}}\varphi_1. \tag{24.3}$$

Аналог $v_{2\varphi_1}$ скорости ведомого звена соответственно равен для фазы подъема

$$v_{2\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{h}{\varphi_{\text{п}}} = \text{const}, \tag{24.4}$$

а для фазы опускания

$$v_{2\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{d}{d\varphi_1}\left[\frac{h}{\varphi_{\text{о}}}(\Phi - \varphi_{\text{нв}}) - \frac{h}{\varphi_{\text{о}}}\varphi_1\right] = -\frac{h}{\varphi_{\text{о}}} = \text{const}. \tag{24.5}$$

Диаграмма $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ показана на рис. 24.9, *б*.

Скорость движения толкателя на обеих фазах постоянна. Аналоги ускорений $a_{2\varphi_1}$ на обеих фазах равны нулю, кроме положений a, b, c и d, где функция $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ имеет разрывы. В этих положениях теоретически ускорения $a_{2\varphi_1}$ ведомого звена являются равными бесконечности. Это вызывает появление в механизме так называемых *жестких ударов*, при которых силы, действующие на звенья механизма, теоретически достигают бесконечности. Практически ускорения $a_{2\varphi_1}$ в указанных положениях не равны бесконечности, потому что обычно действительным профилем кулачка является профиль, построенный как эквидистантная кривая к теоретическому профилю, что вызывает изменение в этих положениях не только теоретического ускорения, но и скорости. Кроме того, если даже

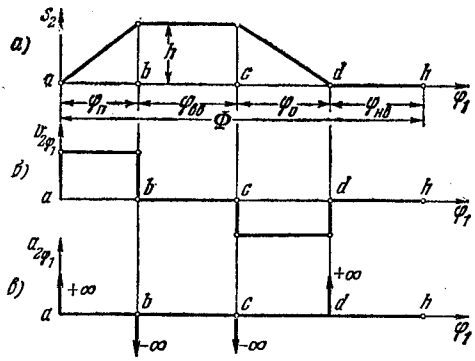


Рис. 24.9. Закон движения ведомого звена кулачкового механизма: *а*) диаграмма пути; *б*) диаграмма аналога скорости; *в*) диаграмма аналога ускорения.

толкатель не имеет ролика, а оканчивается острием, то вследствие упругости звеньев кулачкового механизма ускорения $a_{2\varphi_1}$ не могут получаться равными бесконечности благодаря амортизирующему эффекту упругости звеньев. Несмотря на это, все же в указанных положениях мы можем получить размыкание элементов высшей пары и соударение ведомого звена с ведущим. Поэтому обычно линейным законом пользуются только на части фаз подъема или опускания и в закон движения вводятся переходные кривые, позволяющие осуществлять плавный переход на участках сопряжения двух линейных законов движения. Такими переходными кривыми могут быть дуги окружностей, участки парабол, участки синусоид и т. д. На рис. 24.10 показан линейный закон движения с пере-

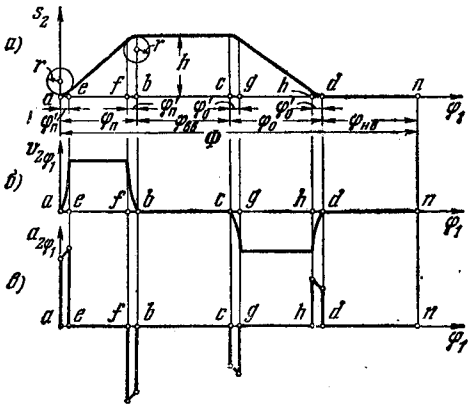


Рис. 24.10. Закон движения ведомого звена кулачкового механизма с плавными переходами на сопряжениях линейных участков: *а*) диаграмма пути; *б*) диаграмма аналога скорости; *в*) диаграмма аналога ускорения.

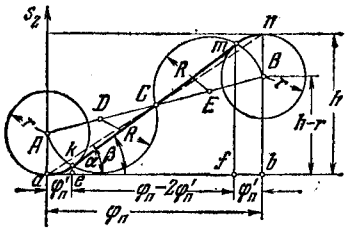


Рис. 24.11. Способ построения плавных переходов на диаграмме с двумя линейными участками.

ходными участками, очерченными по дугам окружностей радиусов r, на участках $\varphi_п'$ и φ_0' фаз подъема и опускания. Чтобы не имел места скачок в кривой аналога скоростей $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ (рис. 24.10, *б*), необходимо линейный участок диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$ выполнить по касательным к окружности радиуса r. Это может быть всегда сделано, если воспользоваться построением, показанным на рис. 24.11, где рассмотрен в большом масштабе участок $\varphi_п$ фазы подъема. Из точек A и B, лежащих на расстояниях r и $h - r$ на ординатах, проведенных в точках a и b, проводим окружности выбранного радиуса r. Далее, соединяем точки A и B прямой. Из точек D и E, лежащих на прямой AB, радиусами R, равными $R = AB/4$, проводим окружности до пересечения в точках m и k с окружностями радиусов, равных r. Прямая km получается касательной к окружностям радиуса r. Таким образом, кривая $s_2 = s_2(\varphi_1)$ будет состоять на участках $\varphi_п'$ из дуг ak и mn окружностей, а на участке $\varphi_п - 2\varphi_п'$ — из прямой km. Диаграмма аналога скоростей $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ показана на рис. 24.10, *б*, а диаграмма аналога

ускорения $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ — на рис. 24.10, *в*. Из этих диаграмм видно, что на участках $\varphi'_п$ фазы подъема и $\varphi'_о$ фазы опускания аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ не претерпевает разрывов. Аналог ускорений $a_{2\varphi_1}$ в начале и конце каждого интервала $\varphi'_п$ и $\varphi'_о$ претерпевает мгновенное изменение своей величины на конечную величину. Следовательно, в токах *a*, *e*, *f*, *b*, *c*, *g*, *h* и *d* будут иметь место удары, но меньшие, чем в случае, рассмотренном на рис. 24.9. Эти удары при мгновенном изменении ускорений на конечную величину носят название *мягких ударов*. Мягкие удары менее опасны для работы кулачковых механизмов, поэтому многие тихоходные кулачковые механизмы работают в условиях мягких ударов. Из рис. 24.11 также следует, что угол наклона β прямой *km* больше угла α наклона прямой *an*, т. е. при задании одних и тех же значений *h* (подъем толкателя) и $\varphi_п$ (фазы подъема) аналог скоростей $v_{2\varphi_1}$ на участках подъема и опускания для закона, показанного на рис. 24.10, будет всегда больше, чем для закона, показанного на рис. 24.9. Из рассмотренных примеров законов движения следует, что при выборе того или иного закона необходимо знание аналогов скоростей и ускорений движения ведомого звена. Обычно при проектировании кулачковых механизмов задаются аналогами ускорений ведомого звена. По заданным аналогам ускорений и начальным условиям определяют аналоги скоростей и закон движения ведомого звена. Рассмотрим следующие законы изменения аналогов ускорений на фазе подъема:

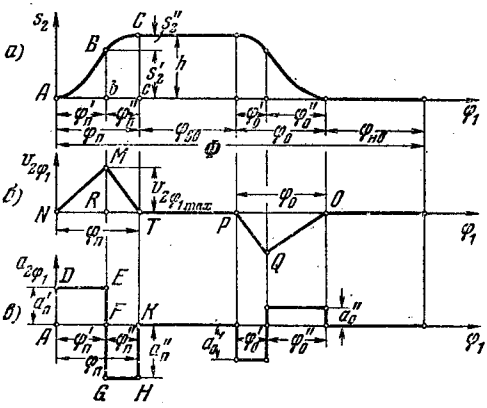


Рис. 24.12. Равноускоренный закон движения ведомого звена кулачкового механизма: *а*) диаграмма пути; *б*) диаграмма аналога скорости; *в*) диаграмма аналога ускорения.

а) равноускоренный, б) синусоидальный, в) косинусоидальный, г) линейно-убывающий, д) трапецеидальный.

2°. Равноускоренный закон аналога ускорений $a_{2\varphi_1}$ ведомого звена *2* показан в виде диаграммы $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ на рис. 24.12, *в* для четырех фаз движения, соответствующих углам $\varphi_п$, $\varphi_{вв}$, $\varphi_о$ и $\varphi_{нв}$. Построение диаграмм $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ и $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 24.12, *а* и *б*) может быть сделано методами графического интегрирования, изложенными в § 22, *2°*. Чтобы исследовать все характеристики рассматриваемого закона движения, удобно рассмотреть его в аналитической форме. Рассмотрим фазу подъема, соответствующую

углу $\varphi_п$ (рис. 24.12, *в*). Угол φ_1 на этой фазе изменяется в следующих пределах:

$$0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi'_п, \tag{24.6}$$

$$\varphi'_п \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_п. \tag{24.7}$$

Зависимость для аналога ускорения $a_{2\varphi_1}$ (рис. 24.12, *в*) для первого предела будет такая:

$$a_{2\varphi_1} = a'_п = \text{const}, \tag{24.8}$$

для второго предела зависимость для аналога ускорения имеет вид

$$a_{2\varphi_1} = -a''_п = \text{const}. \tag{24.9}$$

Интегрируя дважды выражение (24.8) аналога ускорения $a_{2\varphi_1}$, изменяющегося в пределах $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi'_п$, получаем выражение для аналога скоростей $v_{2\varphi_1}$ и перемещений s_2:

$$v_{2\varphi_1} = \int a_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_1 = \int a'_п \, d\varphi_1 = a'_п \varphi_1 + C_1, \tag{24.10}$$

$$s_2 = \int v_{2\varphi_1} d\varphi_1 + C_2 = \int (a'_п \varphi_1 + C_1) \, d\varphi_1 + C_2 = \frac{a'_п \varphi_1^2}{2} + C_1 \varphi_1 + C_2. \tag{24.11}$$

Начальными условиями для определения постоянных C_1 и C_2 интегрирования являются условия, в соответствии с которыми при $\varphi_1 = 0$ $v_{2\varphi_1} = 0$ и $s_2 = 0$. Отсюда следует, что $C_1 = C_2 = 0$, и равенства (24.10) и (24.11) имеют вид

$$v_{2\varphi_1} = a'_п \varphi_1, \tag{24.12}$$

$$s_2 = \frac{a'_п \varphi_1^2}{2}. \tag{24.13}$$

Из равенств (24.12) и (24.13) следует, что на интервале $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi'_п$ аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ изменяется по линейному закону (рис. 24.12, *б*), а перемещения s_2 — по закону параболы, имеющей вершину в точке A (рис. 24.12, *а*).

Аналогично можно показать, что в интервале $\varphi'_п \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_п$ аналог скоростей $v_{2\varphi_1}$ изменяется по линейному закону, а перемещение s_2 — по закону параболы, имеющей вершину в точке C (24.12, *а*). Обе параболы сопрягаются в точке B.

Отметим некоторые условия, которым должны удовлетворять зависимости $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ и $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$. Так как аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ в начале и конце фазы $\varphi_п$ равен нулю (рис. 24.12, *б*), то площади прямоугольников $ADEF$ и $FGHK$ (рис. 24.12, *в*) должны быть равны, т. е.

$$a'_п \varphi'_п = a''_п \varphi''_п, \tag{24.14}$$

или

$$\frac{\varphi'_п}{\varphi''_п} = \frac{a''_п}{a'_п} = k_п. \tag{24.15}$$

Так как $\varphi'_п + \varphi''_п = \varphi_п$, то, учитывая равенство (24.15), получаем

$$\varphi'_п = \varphi_п \frac{k_п}{1+k_п}, \tag{24.16}$$

$$\varphi''_п = \varphi_п \frac{1}{1+k_п}. \tag{24.17}$$

Перемещения s'_2 и s''_2 (рис. 24.12, *а*) звена *2* пропорциональны площадям треугольников NMR и RMT (рис. 24.12, *б*). Тогда, обозначая значение аналога скорости в точке R через $v_{2\varphi_1 \max}$, получаем

$$s'_2 = \frac{v_{2\varphi_1 \max}\varphi'_п}{2}, \tag{24.18}$$

$$s''_2 = \frac{v_{2\varphi_1 \max}\varphi''_п}{2}. \tag{24.19}$$

Делим равенство (24.18) на равенство (24.19):

$$\frac{s'_2}{s''_2} = \frac{\varphi'_п}{\varphi''_п} = k_п. \tag{24.20}$$

Так как $s'_2 + s''_2 = h$, то из равенства (24.20) получаем

$$s'_2 = \frac{k_п h}{1+k_п}, \tag{24.21}$$

$$s''_2 = \frac{h}{1+k_п}. \tag{24.22}$$

Из равенства (24.13) следует:

$$a'_п = \frac{2s'_2}{(\varphi'_п)^2}, \tag{24.23}$$

$$a''_п = \frac{2s''_2}{(\varphi''_п)^2}. \tag{24.24}$$

Подставляя в уравнения (24.23) и (24.24) значения для s'_2, s''_2 и $\varphi'_п$, $\varphi''_п$ из равенств (24.21), (24.22) и (24.16), (24.17), получаем

$$a'_п = \frac{2h(1+k_п)}{k_п \varphi_п^2}, \tag{24.25}$$

$$a''_п = \frac{2h(1+k_п)}{\varphi_п^2}. \tag{24.26}$$

Далее, пользуясь равенствами (24.12), (24.25) и (24.16), имеем

$$v_{2\varphi_1 \max} = a'_п \varphi'_п = \frac{2h(1+k_п)}{k_п \varphi_п^2} \varphi_п \frac{k_п}{1+k_п} = \frac{2h}{\varphi_п}. \tag{24.27}$$

Из полученных равенств следует, что если задан полный подъем h ведомого звена, фазовый угол $\varphi_п$ и коэффициент $k_п$, то можно по

формулам (24.16) и (24.17) определить углы $\varphi'_п$ и $\varphi''_п$, по формуле (24.27) — максимальное значение аналога скорости $v_{2\varphi_1 max}$ и по (24.25) и (24.26) — значения аналогов ускорения $a'_п$ и $a''_п$.

Из равенства (24.27) следует, что максимальное значение аналога скорости $v_{2\varphi_1 max}$ не зависит от коэффициента $k_п$, т. е. от распределения фазового угла $\varphi_п$ по участкам положительного $a'_п$ и отрицательного $a''_п$ ускорений. Если коэффициент $k_п$ принят равным $k_п = 1$, то мы получаем симметричный закон движения, для которого имеем на интервале $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_п/2$

$$a'_п = \frac{4h}{\varphi_п^2}. \qquad (24.28)$$

Принимая во внимание равенство (24.12), аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ для этого движения определяем так:

$$v_{2\varphi_1} = \frac{4h}{\varphi_п^2}\varphi_1, \qquad (24.29)$$

а перемещение s_2 из равенства (24.13) равно

$$s_2 = \frac{2h}{\varphi_п^2}\varphi_1^2. \qquad (24.30)$$

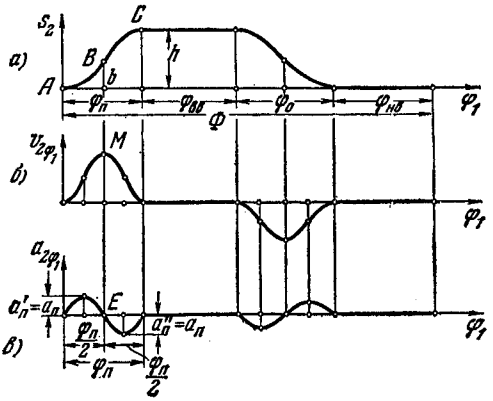


Рис. 24.13. Синусоидальный закон изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма: *а*) диаграмма пути; *б*) диаграмма аналога скорости; *в*) диаграмма аналога ускорения.

Из рис. 24.12, *в* следует, что при рассмотренном законе движения механизм испытывает мягкие удары. Для фазы опускания, соответствующей углу φ_o (рис. 24.12, *а*), расчет всех параметров движения может быть сделан по уже выведенным формулам с заменой коэффициента $k_п$ для фазы подъема коэффициентом k_o для фазы опускания.

3°. Движение ведомого звена *2* происходит без жестких и мягких ударов, если кривая аналогов ускорений $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ синусоидальная (рис. 24.13, *в*). Если коэффициент $k_п$ выбран равным единице, то мы получаем симметричную синусоиду, для которой $a'_п = a''_п = a_п$ (рис. 24.13, *в*).

Зависимость для аналога ускорения $a_{2\varphi_1}$ следующая:

$$a_{2\varphi_1} = a_п \sin\frac{2\pi}{\varphi_п}\varphi_1. \qquad (24.31)$$

Интегрируя в пределах $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_п$ дважды выражение (24.31) для аналога ускорений $a_{2\varphi_1}$, получаем выражения для аналога

скорости $v_{2\varphi_1}$ и перемещения s_2:

$$v_{2\varphi_1} = \int a_{2\varphi_1}\, d\varphi_1 + C_1 = \int a_{\text{п}} \sin \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}} \varphi_1\, d\varphi_1 + C_1 =$$

$$= -a_{\text{п}} \frac{\varphi_{\text{п}}}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}} \varphi_1 + C_1, \quad (24.32)$$

$$s_2 = \int v_{2\varphi_1}\, d\varphi_1 + C_2 = \int \left(-a_{\text{п}} \frac{\varphi_{\text{п}}}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}} + C_1 \right) d\varphi_1 + C_2 =$$

$$= -a_{\text{п}} \frac{\varphi_{\text{п}}^2}{4\pi^2} \sin \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}} \varphi_1 + C_1 \varphi_1 + C_2. \quad (24.33)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий, в соответствии с которыми при $\varphi_1 = 0$, $v_{2\varphi_1} = 0$ и $s_2 = 0$.

Из зависимости (24.32) получаем

$$C_1 = a_{\text{п}} \frac{\varphi_{\text{п}}}{2\pi}.$$

Одновременно из (24.33) имеем

$$C_2 = 0.$$

Подставляем полученные выражения для C_1 и C_2 в равенства (24.32) и (24.33):

$$v_{2\varphi_1} = a_{\text{п}} \frac{\varphi_{\text{п}}}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}} \varphi_1 \right), \quad (24.34)$$

$$s_2 = a_{\text{п}} \frac{\varphi_{\text{п}}^2}{2\pi} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_{\text{п}}} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}} \varphi_1 \right). \quad (24.35)$$

Амплитуда $a_{\text{п}}$ аналога ускорения (рис. 24.13, *в*) определяется из равенства (24.35) на основании условия, по которому при $\varphi_1 = \varphi_{\text{п}}$ перемещение $s_2 = h$:

$$h = a_{\text{п}} \frac{\varphi_{\text{п}}^2}{2\pi}. \quad (24.36)$$

Отсюда следует:

$$a_{\text{п}} = \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}^2} h. \quad (24.37)$$

Теперь зависимости (24.35), (24.34) и (24.31) окончательно получают следующий вид:

$$s_2 = h \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_{\text{п}}} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}} \varphi_1 \right), \quad (24.38)$$

$$v_{2\varphi_1} = h \frac{1}{\varphi_{\text{п}}} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}} \varphi_1 \right), \quad (24.39)$$

$$a_{2\varphi_1} = h \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}^2} \sin \frac{2\pi}{\varphi_{\text{п}}} \varphi_1. \quad (24.40)$$

Из равенств (24.39) и (24.40) следует, что аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ и аналог ускорения $a_{2\varphi_1}$ зависят не только от выбранного подъема h ведомого звена, но и от фазового угла $\varphi_п$. Аналог скорости $v_{2\varphi_1}$ обратно пропорционален углу $\varphi_п$, а аналог ускорения обратно пропорционален $\varphi_п^2$.

Вывод расчетных зависимостей для фазы опускания, соответствующей углу φ_0, получается аналогичным.

4°. Если зависимость аналога ускорения $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ косинусоидальная (рис. 24.14, *в*), то движение ведомого звена происходит с мягким ударом в начале и конце хода ведомого звена. Коэффициент $k_п$ принимаем $k_п = 1$. Тогда $a'_п = a''_п = a_п$.

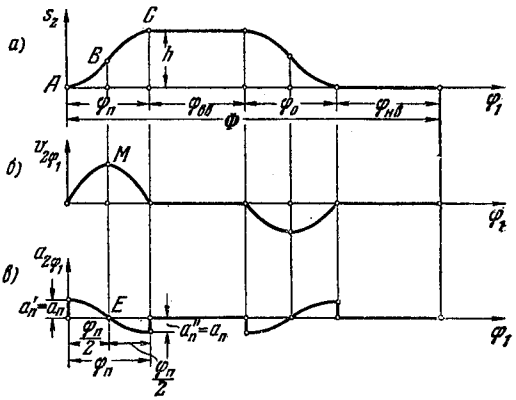


Рис. 24.14. Косинусоидальный закон изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма: *а*) диаграмма пути; *б*) диаграмма аналога скорости; *в*) диаграмма аналога ускорения.

Зависимости для перемещения s_2 и аналога скорости $v_{2\varphi_1}$ получаются, если дважды проинтегрировать в пределах $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_п$ выражение для аналога ускорения, равное

$$a_{2\varphi_1} = a_п \cos \frac{\pi}{\varphi_п} \varphi_1. \tag{24.41}$$

Имеем

$$v_{2\varphi_1} = \int a_{2\varphi_1}\, d\varphi_1 + C_1 = \int a_п \cos \frac{\pi}{\varphi_п} \varphi_1\, d\varphi_1 = a_п \frac{\varphi_п}{\pi} \sin \frac{\pi}{\varphi_п} \varphi_1 + C_1, \tag{24.42}$$

$$s_2 = \int v_{2\varphi_1}\, d\varphi_1 + C_2 = \int \left(a_п \frac{\varphi_п}{\pi} \sin \frac{\pi}{\varphi_п} \varphi_1 + C_1 \right) d\varphi_1 + C_1 =$$

$$= - a_п \frac{\varphi_п^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{\varphi_п} \varphi_1 + C_1 \varphi_1 + C_2. \tag{24.43}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий

при $\varphi_1 = 0$, $v_{2\varphi_1} = 0$ и $s_2 = 0$.

Получаем: $C_1 = 0$ и $C_2 = a_п \frac{\varphi_п^2}{\pi^2}$.

Зависимости (24.42) и (24.43) принимают тогда следующий вид:

$$v_{2\varphi_1} = a_п \frac{\varphi_п}{\pi} \sin \frac{\pi}{\varphi_п} \varphi_1, \tag{24.44}$$

$$s_2 = a_п \frac{\varphi_п^2}{\pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\varphi_п} \varphi_1 \right). \tag{24.45}$$

Амплитуда $a_п$ аналога ускорения (рис. 24.14, *в*) определяется из равенства (24.45) — из условия, по которому при $\varphi_1 = \varphi_п$ перемещение $s_2 = h$. Имеем

$$h = a_п \frac{2\varphi_п^2}{\pi^2};$$

следовательно, $a_п$ равно

$$a_п = \frac{\pi^2}{2\varphi_п^2} h. \tag{24.46}$$

Тогда зависимости (24.45), (24.44) и (24.41) принимают следующий окончательный вид:

$$s_2 = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{\varphi_п}\varphi_1\right), \tag{24.47}$$

$$v_{2\varphi_1} = \frac{h}{2}\frac{\pi}{\varphi_п}\sin\frac{\pi}{\varphi_п}\varphi_1, \tag{24.48}$$

$$a_{2\varphi_1} = \frac{h}{2}\frac{\pi^2}{\varphi_п^2}\cos\frac{\pi}{\varphi_п}\varphi_1. \tag{24.49}$$

Вывод расчетных зависимостей для фаз опускания, соответствующих углу $\varphi_о$, получится аналогичным.

5°. На рис. 24.15, *в* показан линейно-убывающий закон аналога ускорений $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$. При этом законе движение ведомого звена происходит с мягким ударом в начале и конце хода ведомого звена.

Если принять коэффициент $k_п = 1$, то $a'_п = a''_п = a_п$.

Зависимости для перемещения s_2 и аналога скорости $v_{2\varphi_1}$ получаются, если дважды проинтегрировать в пределах $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_п$ выражение для аналога ускорения $a_{2\varphi_1}$, равное

$$a_{2\varphi_1} = a_п\left(1 - 2\frac{\varphi_1}{\varphi_п}\right). \tag{24.50}$$

Имеем

$$v_{2\varphi_1} = \int a_{2\varphi_1}\, d\varphi_1 + C_1 = \int a_п\left(1 - 2\frac{\varphi_1}{\varphi_п}\right) d\varphi_1 + C_1 =$$

$$= a_п\varphi_1 - \frac{a_п\varphi_1^2}{\varphi_п} + C_1, \tag{24.51}$$

$$s_2 = \int v_{2\varphi_1}\, d\varphi_1 + C_2 = \int \left(a_п\varphi_1 - \frac{a_п\varphi_1^2}{\varphi_п} + C_1\right) d\varphi_1 + C_2 =$$

$$= \frac{a_п\varphi_1^2}{2} - \frac{a_п\varphi_1^3}{3\varphi_п} + C_1\varphi_1 + C_2. \tag{24.52}$$

Из начальных условий $\varphi_1 = 0$, $v_{2\varphi_1} = 0$ и $s_2 = 0$, поэтому

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Зависимости (24.51) и (24.52) принимают тогда следующий вид:

$$v_{2\varphi_1} = a_{\text{п}}\varphi_1\left(1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_{\text{п}}}\right), \tag{24.53}$$

$$s_2 = a_{\text{п}}\varphi_1^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{\varphi_1}{\varphi_{\text{п}}}\right). \tag{24.54}$$

Полученные зависимости показывают, что кривая аналога скорости $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ (рис. 24.15, *б*) представляет собой параболу с вершиной в точке M. Кривая перемещения $s_2 = s_2(\varphi_1)$ представляет собой две параболы третьей степени, сопрягающиеся в точке B.

Величина $a_{\text{п}}$ аналога ускорения (рис. 24.15, *в*) определится из условия, что при $\varphi_1 = \varphi_{\text{п}}$ перемещение $s_2 = h$. Тогда из равенства (24.54) имеем

$$h = a_{\text{п}}\varphi_{\text{п}}^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{\varphi_{\text{п}}}{\varphi_{\text{п}}}\right) = \frac{a_{\text{п}}\varphi_{\text{п}}^2}{6},$$

откуда

$$a_{\text{п}} = \frac{6h}{\varphi_{\text{п}}^2}.$$

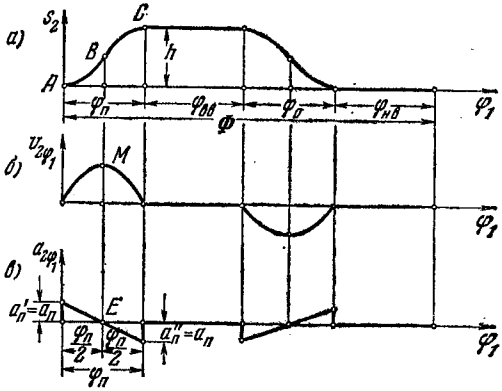


Рис. 24.15. Линейно-убывающий закон изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма: *а*) диаграмма пути; *б*) диаграмма аналога скорости; *в*) диаграмма аналога ускорения.

Подставляя полученное значение для величины $a_{\text{п}}$ в равенства (24.54), (24.53) и (24.50), получаем

$$s_2 = h\frac{\varphi_1^2}{\varphi_{\text{п}}^2}\left(3 - 2\frac{\varphi_1}{\varphi_{\text{п}}}\right), \tag{24.55}$$

$$v_{2\varphi_1} = 6h\frac{\varphi_1}{\varphi_{\text{п}}^2}\left(1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_{\text{п}}}\right), \tag{24.56}$$

$$a_{2\varphi_1} = 6h\frac{1}{\varphi_{\text{п}}^2}\left(1 - 2\frac{\varphi_1}{\varphi_{\text{п}}}\right). \tag{24.57}$$

Вывод расчетных зависимостей для фазы опускания, соответствующей углу $\varphi_{\text{о}}$ (рис. 24.15, *а*), является аналогичным.

б°. Как мы уже указали выше, возможны и другие законы движения ведомого звена кулачкового механизма. Определение их кинематических характеристик может быть сделано теми же методами, какими мы пользовались для разобранных примеров. Отметим только, что в некоторых случаях применяются законы движения,

являющиеся комбинацией простых законов. В качестве примера приведем трапецеидальный закон изменения аналога ускорения $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(\varphi_1)$, показанный на рис. 24.16, *в*. На участке *ab* угла $\varphi_п$ ускорение $a_{2\varphi_1}$ изменяется, линейно возрастая; на участке *bc* оно постоянно; на участке *cde* оно линейно убывает; на участке *ef* вновь постоянно и на участке *fg* изменяется, линейно возрастая. Соответственно кривая $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ (рис. 24.16, *б*) на участках $a'b'$, $c'd'e'$ и $f'g'$ состоит из парабол, а на участках $b'c'$ и $e'f'$ прямолинейна. Кривая $s_2 = s_2(\varphi_1)$ на участках $a''b''$, $c''d''e''$ и $f''g''$ состоит из парабол третьей степени, а на участках $b''c''$ и $e''f''$ — из парабол второй степени. При трапецеидальном законе изменения аналога ускорения жесткие и мягкие удары отсутствуют.

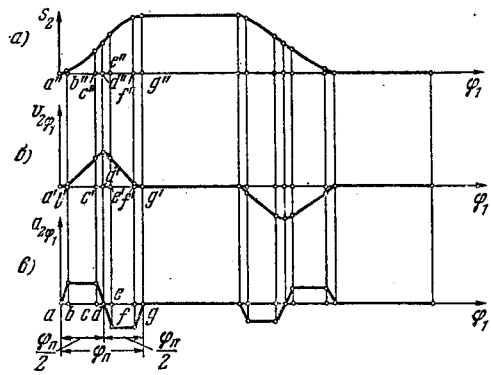


Рис. 24.16. Трапецеидальный закон изменения ускорения ведомого звена кулачкового механизма: *а*) диаграмма пути; *б*) диаграмма аналога скорости; *в*) диаграмма аналога ускорения.

Сопоставление различных законов движения можно вести, сравнивая максимальные значения аналогов скорости и аналогов ускорения. В таблице 11 приводятся значения максимальных скоростей $v_{2\varphi_1 max}$ и ускорений $a_{2\varphi_1 max}$ для основных законов движения различного вида в функции основных параметров: высоты подъема h и фазы подъема $\varphi_п$ — и в относительных единицах к значениям $h/\varphi_п$ и $h/\varphi_п^2$.

Таблица 11

Значения максимальных скоростей и ускорений

Закон движения	Максимальная скорость ведомого звена $v_{2\varphi_1 max}$		Максимальное ускорение ведомого звена $a_{2\varphi_1 max}$	
	в функции основных параметров	в относительных единицах	в функции основных параметров	в относительных единицах
Равноускоренный	$2h/\varphi_п$	2,00	$4h/\varphi_п^2$	4,00
Синусоидальный	$2h/\varphi_п$	2,00	$2\pi h/\varphi_п^2$	6,28
Косинусоидальный	$\pi h/2\varphi_п$	1,57	$\pi^2 h/2\varphi_п^2$	4,93
Линейно-убывающий	$1{,}5h/\varphi_п$	1,50	$6h/\varphi_п^2$	6,00

§ 107. Определение основных размеров кулачковых механизмов

1°. Основные размеры кулачковых механизмов определяются из кинематических, динамических и конструктивных условий. Кинематические условия определяются тем, что механизм должен воспроизводить заданный закон движения. Динамические условия весьма многообразны, но основные условия заключаются в том, чтобы механизм имел достаточно высокий коэффициент полезного действия и чтобы не происходило заклинивания механизма. Конструктивные требования определяются из условий достаточной

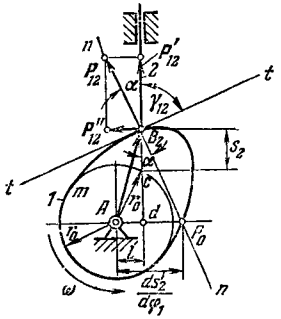


Рис. 24.17. К силовому анализу кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

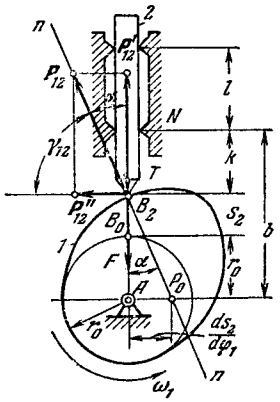


Рис. 24.18. К исследованию вопроса об угле давления в кулачковом механизме.

прочности отдельных деталей механизма — сопротивляемости износу соприкасающихся элементов кинематических пар и др. Наконец, проектировать механизм желательно так, чтобы он обладал наименьшими габаритами.

2°. Чтобы выявить влияние отдельных требований на выбор размеров кулачковых механизмов, рассмотрим отдельные их виды. На рис. 24.17 показан кулачковый механизм с толкателем *2*, оканчивающимся острием B_2. Если пренебречь трением в высшей паре, то сила $\boldsymbol{P}_{12}$, действующая на толкатель *2* со стороны кулачка *1*, будет направлена по нормали $n - n$ к профилю кулачка *1*. Как это было показано в § 87, *1°*, угол α, образованный нормалью $n - n$ с направлением движения толкателя *2*, является углом давления, а угол γ_{12}, равный $\gamma_{12} = 90° - \alpha$, является углом передачи. Если рассмотреть равновесие толкателя *2* (рис. 24.18) и привести все силы к точке B_2, то толкатель будет находиться под действием движущей силы $\boldsymbol{P}'_{12}$, приведенной силы сопротивления $\boldsymbol{T}$,

учитывающей полезные сопротивления, силу пружины, силы инерции, и приведенной силы трения F. Из уравнения равновесия сил, действующих на толкатель 2, имеем

$$P_{12}\cos\alpha - T - F = 0.$$

Приведенная сила T равна (см. § 45, 4°)

$$T = P_{12}\cos\alpha - fP_{12}\sin\alpha\left(1+\frac{2k}{l}\right),$$

где f — коэффициент трения в направляющих, l — длина направляющих и k — вылет толкателя. Тогда из уравнения равновесия сил получаем, что сила трения равна

$$F = P_{12}\cos\alpha - T = fP_{12}\sin\alpha\left(1+\frac{2k}{l}\right). \qquad (24.58)$$

Как это было показано в § 45, 4°, выражение (24.58) для силы трения F является приближенным. Мгновенный коэффициент полезного действия η механизма без учета трения в высшей паре и подшипнике вала кулачка можно определить по формуле

$$\eta = 1 - \frac{N_т}{N_д} = 1 - \frac{Fv_2}{P_{12}v_2\cos\alpha} = 1 - \frac{F}{P_{12}\cos\alpha},$$

где $N_т$ — мощность, затрачиваемая на преодоление сил трения, и $N_д$ — мощность движущих сил. Тогда, учитывая формулу (24.58), получаем

$$\eta = 1 - \frac{fP_{12}\sin\alpha\left(1+2\frac{k}{l}\right)}{P_{12}\cos\alpha} = 1 - f\operatorname{tg}\alpha\left(1+2\frac{k}{l}\right). \qquad (24.59)$$

Величина вылета k толкателя равна (рис. 24.18)

$$k = b - (r_0 + s_2),$$

где b — постоянное расстояние от точки N опоры толкателя 2 до оси A вращения кулачка, r_0 — наименьший радиус-вектор кулачка 1 и s_2 — перемещение толкателя 2. Имеем

$$\eta = 1 - f\operatorname{tg}\alpha\left[1+2\frac{b-(r_0+s_2)}{l}\right].$$

Из рис. 24.18 получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AP_0}{r_0+s_2} = \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1}}{r_0+s_2}, \qquad (24.60)$$

так как

$$AP_0 = \frac{v_2}{\omega_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1}. \qquad (24.61)$$

Из уравнения (24.60) получаем

$$r_0 + s_2 = \frac{ds_2}{d\varphi_1}\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Тогда коэффициент полезного действия η будет равен

$$\eta = 1 - f\left(\frac{l+2b}{l}\operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{l}\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right). \qquad (24.62)$$

Из равенства (24.62) следует, что коэффициент полезного действия уменьшается с увеличением угла давления α. Кулачковый механизм может заклиниться, если сила $P'_{12} = P_{12}\cos\alpha$ (рис. 24.18) будет $\boldsymbol{P'_{12}} \leqslant \boldsymbol{F}$. Заклинивание произойдет, если коэффициент полезного действия η будет равен нулю. В таком случае из равенства (24.62) получим

$$1 - f\left[\frac{l+2b}{l}\operatorname{tg}\alpha_к - \frac{2}{l}\left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)_к\right] = 0.$$

В этом равенстве $\alpha_к$ — критический угол, при котором возникает заклинивание механизма, и $(ds_2/d\varphi_1)_к$ — соответствующий этому углу аналог скорости. Тогда для критического угла давления $\alpha_к$ будем иметь

$$\operatorname{tg}\alpha_к = \frac{l}{f(l+2b)} + \frac{2\left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)_к}{l+2b} = \frac{l+2f\left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)_к}{f(l+2b)}. \qquad (24.63)$$

Из равенства (24.63) следует, что критический угол давления $\alpha_к$ уменьшается с увеличением расстояния b, т. е. с увеличением габаритов механизма. Приближенно можно считать, что значение $(ds_2/d\varphi_1)_к$ аналога скоростей, соответствующее критическому углу $\alpha_к$, равно максимальному значению этого аналога, т. е.

$$\left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)_к \approx \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)_{max}.$$

Тогда, если заданы размеры механизма и закон движения толкателя, можно определить значение критического угла давления $\alpha_к$. Необходимо иметь в виду, что заклинивание механизма обычно имеет место только на фазе подъема, соответствующей преодолению полезных сопротивлений, силы инерции толкателя и силы пружины, т. е. когда преодолевается некоторая приведенная сила сопротивления $\boldsymbol{T}$ (рис. 24.18). На фазе опускания обычно явление заклинивания не возникает.

Для устранения возможности заклинивания механизма при проектировании ставят условие, чтобы угол давления α во всех положениях механизма был меньше критического угла $\alpha_к$. Если максимально допустимый угол давления обозначить через α_{max}, то этот угол должен всегда удовлетворять условию

$$\alpha_{max} < \alpha_к. \qquad (24.64)$$

В практике угол давления α_{max} для кулачковых механизмов с поступательно движущимся толкателем принимается равным

$$\alpha_{max} = 30^\circ \div 40^\circ.$$

Для кулачковых механизмов с вращающимся коромыслом, в которых заклинивание является менее возможным, максимальный угол давления α_{max} принимается равным

$$\alpha_{max} = 45^\circ \div 50^\circ.$$

Как это было показано в § 87, при проектировании кулачковых механизмов можно применять в расчетах не угол давления α, а угол передачи γ_{12} (рис. 24.18). Очевидно, что этот угол должен удовлетворять условиям

$$(\gamma_{12})_{min} > \gamma_к, \quad \text{где} \quad \gamma_к = 90^\circ - \alpha_к.$$

3°. Угол давления α может быть выражен через основные параметры кулачкового механизма. Для этого рассмотрим кулачковый механизм (рис. 24.17) с поступательно движущимся толкателем *2*. Проводим в точке B_2 нормаль $n - n$ и находим мгновенный центр вращения P_0 в относительном движении звеньев *1* и *2*.

Из треугольника dB_2P_0 имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(dP_0)}{(dB_2)} = \frac{(AP_0) - (Ad)}{(dc) + (cB_2)}. \tag{24.65}$$

Согласно равенству (24.61) $AP_0 = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = v_{2\varphi_1}$, $Ad = l$, где l — кратчайшее расстояние от оси A кулачка до оси толкателя, $dc = \sqrt{r_0^2 - l^2}$, где r_0 — минимальный радиус-вектор кулачка, и $cB_2 = s_2$, где s_2 — перемещение толкателя, заданное его законом движения $s_2 = s_2(\varphi_1)$.

Подставляя указанные параметры в равенство (24.65), получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1} \mp l}{\sqrt{r_0^2 - l^2} + s_2}. \tag{24.66}$$

Знак плюс у кратчайшего расстояния l соответствует левому от оси A его расположению, знак минус — правому (рис. 24.17) при условии, что толкатель движется вверх, а кулачок вращается против часовой стрелки.

Из равенства (24.66) следует, что при выбранном законе движения $s_2 = s_2(\varphi_1)$ и размере l габариты кулачка определяются радиусом r_0 окружности минимального радиуса-вектора кулачка. Увеличивая r_0, мы получаем меньшие углы давления α, но бóльшие габариты кулачкового механизма. Обратно, если уменьшить r_0, то

возрастают углы давления α и уменьшается коэффициент полезного действия механизма. Если в механизме (рис. 24.18) ось движения толкателя проходит через ось вращения кулачка и $l = 0$, то равенство (24.66) имеет вид

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1}}{r_0 + s_2}. \qquad (24.67)$$

4°. Величины углов давления α для всего цикла движения кулачкового механизма могут быть определены графически с помощью следующего построения (рис. 24.19). Построим кривую $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(\varphi_1)$ зависимости аналога скорости $v_{2\varphi_1}$ от перемещения s_2. Перемещения s_2 будем откладывать от точки B_0, соответствующей нижнему начальному положению толкателя в направлении его движения, а аналоги скоростей $v_{2\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1}$ — в перпендикулярном направлении. Тогда,

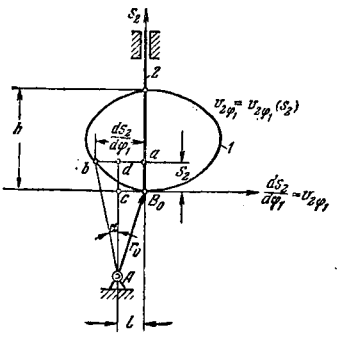


Рис. 24.19. Определение угла давления по диаграмме аналога скорости в функции пути толкателя.

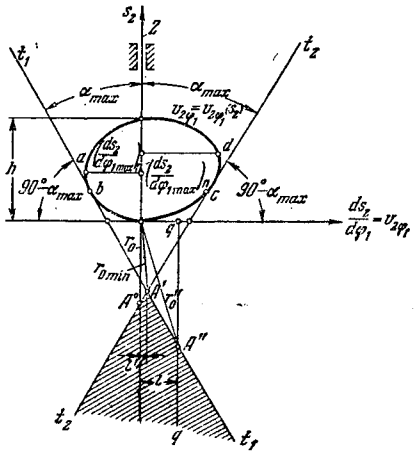


Рис. 24.20. Графическое определение минимального радиуса профиля кулачка.

если соединить какую-либо точку b построенной кривой с осью вращения A кулачка, то из построения следует, что направление Ab образует с осью $B_0 s_2$ угол давления α. В самом деле, из рис. 24.19 имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{bd}{Ad} = \frac{ab - ad}{Ac + cd} = \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1} - l}{\sqrt{r_0^2 - l^2} + s_2}, \qquad (24.68)$$

т. е. условие (24.66) удовлетворяется. Решим обратную задачу об определении величины наименьшего радиуса-вектора r_0 кулачка, если задан закон движения $s_2 = s_2(\varphi_1)$ толкателя 2, смещение l и максимально допустимый угол давления α_{max}. Для этого (рис. 24.20) строим кривую $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(s_2)$ как для фазы подъема,

так и для фазы опускания. Далее проводим к кривой $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(s_2)$ касательные $t_1 - t_1$ и $t_2 - t_2$ под углами α_{max} к оси s_2. Точка A' пересечения этих касательных определит положение оси вращения кулачка, имеющего наименьший радиус-вектор $r_{0\,min}$. При выборе оси вращения в точке A' получается вполне определенная величина смещения l'. Если величина смещения l задана, то, проводя прямую $q - q$ на расстоянии l от оси $B_0 s_2$, найдем точку A'' пересечения этой прямой с касательной $t_1 - t_1$. Если точку A'' выбрать за ось вращения кулачка, то наименьший радиус-вектор кулачка будет равен r_0''. Если смещение $l = 0$, то мы получаем кулачковый механизм с центром вращения в точке A_0 и наименьший радиус-вектор кулачка равен r_0. При выборе оси вращения кулачка в заштрихованной области в пределах угла $t_2 A' t_1$, образуемого касательными $t_1 - t_1$ и $t_2 - t_2$, всегда удовлетворяется условие, в соответствии с которым угол давления в любом положении механизма меньше заданного предельного угла давления α_{max}. Отметим, что точки касания b и c прямых $t_1 - t_1$ и $t_2 - t_2$ с кривой $v_{2\varphi_1} = v_{2\varphi_1}(s_2)$ не совпадают с точками a и d (рис. 24.20), где значения $\frac{ds_2}{d\varphi_1}$ достигают максимальных значений: $\left(\frac{ds_{2\,max}}{d\varphi_1}\right)_п$ для фазы подъема и $\left(\frac{d\varphi_{1\,max}}{ds_2}\right)_о$ для фазы опускания.

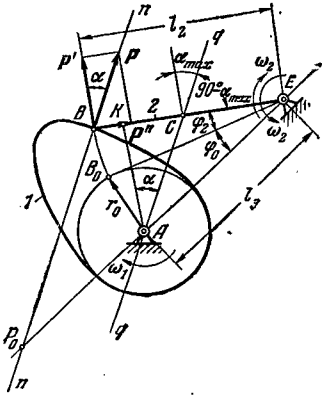


Рис. 24.21. Кулачковый механизм с коромыслом.

5°. Переходим к рассмотрению кулачкового механизма (рис. 24.21) с коромыслом *2*, вращающимся вокруг оси E. Угол давления α в этом механизме образован нормалью $n - n$ и составляющей $\boldsymbol{P}'$ силы $\boldsymbol{P}$, направленной перпендикулярно к направлению EB коромысла *2*.

Находим мгновенный центр вращения P_0 в относительном движении звеньев *1* и *2* на пересечении нормали $n - n$ с продолжением прямой AE. Функция передаточного отношения i_{21} в данном случае имеет следующий вид:

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{AP_0}{EP_0}. \qquad (24.69)$$

Соединим точку P_0 с точкой B и через точку A проведем прямую $q - q$, параллельную нормали $n - n$. Тогда из подобных треугольников EP_0B и EAC получим

$$i_{21} = \frac{AP_0}{EP_0} = \frac{BC}{BE},$$

откуда будем иметь

$$BC = l_{21} l_2 = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} l_2, \tag{24.70}$$

где l_2 — длина коромысла 2. Опустим из точки A перпендикуляр AK на направление EB. Тогда угол CAK будет равен углу давления α. Величина угла α определится из равенства

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(KC)}{(KA)} = \frac{(BC)-(BK)}{(KA)}. \tag{24.71}$$

Отрезок (BK) равен

$$(BK) = l_2 - l_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_0), \tag{24.72}$$

где l_3 — расстояние между точками A и E, φ_0 — угол, образованный коромыслом 2 с линией AE в начальном положении, и φ_2 — текущий угол поворота, заданный законом движения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ коромысла 2.

Отрезок KA равен

$$KA = l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_0). \tag{24.73}$$

Подставляя значения величин отрезков (BC), (BK) и (KA) из равенств (24.70), (24.72) и (24.73) в равенство (24.71), получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pm i_{21} l_2 - [l_2 - l_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_0)]}{l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_0)}. \tag{24.74}$$

Знаки плюс и минус передаточного отношения i_{21} подставлены потому, что угловая скорость ω_2 коромысла 2 имеет различные направления на фазе подъема и на фазе опускания. В равенство (24.74) не входит минимальный радиус-вектор r_0 кулачка (рис. 24.21). Для его определения можно воспользоваться очевидным условием

$$r_0 = \sqrt{l_2^2 + l_3^2 - 2 l_2 l_3 \cos\varphi_0}. \tag{24.75}$$

Равенство (24.74) можно представить еще и в следующей форме:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(\pm i_{21} - 1) l_2}{\sin(\varphi_2 + \varphi_0) l_3} + \operatorname{ctg}(\varphi_2 + \varphi_0). \tag{24.76}$$

Из равенства (24.76) следует, что если задан закон движения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ коромысла 2, начальный угол φ_0 и длина коромысла l_2, то при увеличении расстояния l_3 угол давления α уменьшается, а габариты механизма увеличиваются.

6°. Рассмотрим теперь вопрос о том, как определить положение оси A кулачка 1, если задан закон движения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ коромысла 2, его длина l_2 и максимально допустимый угол давления α_{max}. Для этого по заданному закону движения $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ производим разметку положений точки B коромысла 2 (рис. 24.22). Пусть это будут точки B_1, B_2, B_3,... Разметку производим как для

фазы подъема, так и для фазы опускания. Далее, на лучах EB_2, EB_3, EB_4,... от точек B_2, B_3, B_4,... откладываем отрезки (B_2C_2), (B_3C_3),..., равные, согласно равенству (24.70),

$$(B_2C_2)=\left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)_2 l_2, \quad (B_3C_3)=\left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)_3 l_2, \ \ldots,$$

где $\left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)_2$, $\left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)_3$, ... — соответствующие передаточные отношения i_{21} в положениях *2*, *3*, ... Отрезки (B_2C_2), (B_3C_3),... для фазы подъема откладываем от точек B_2, B_3, B_4,... вправо, а отрезки (B_6C_6), (B_7C_7),..., соответствующие фазе опускания, откладываем влево от точек B_6, B_7,...

Если, далее, например, через точку C_4 провести прямую $q_4 - q_4$ под углом $90° - \alpha_{max}$ к направлению EB_4, где α_{max} — выбранный максимальный угол давления, то прямая $q_4 - q_4$ является геометрическим местом возможных положений оси A кулачка, что видно из рис. 24.22. В самом деле, если, например, выбрать ось кулачка в положении A_4, то в положении *4* угол давления α будет равен α_{max}. Если ось кулачка выбрать левее прямой $q_4 - q_4$, то угол α будет больше α_{max}. Если ось кулачка выбрать правее прямой $q_4 - q_4$, то угол давления α будет меньше α_{max}. Следовательно, областью возможных положений оси кулачка является область, лежащая правее прямой $q_4 - q_4$. Наоборот, если через точку C_6 провести прямую $q_6 - q_6$, то областью возможных положений оси A кулачка окажется область, лежащая влево от прямой $q_6 - q_6$. Если для всех точек C_2, C_3, C_4,... построить прямые $q_2 - q_2$, $q_3 - q_3$, $q_4 - q_4$,..., образующие с лучами EC_2, EC_3, EC_4,... углы $90° - \alpha_{max}$, то можно найти некоторую область, заштрихованную на рис. 24.22, в пределах которой можно располагать ось A кулачка.

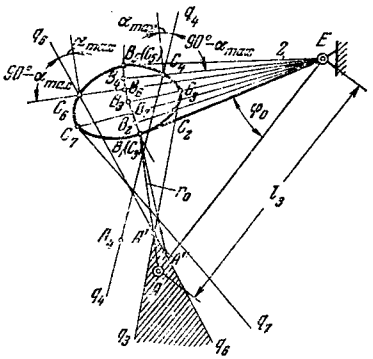


Рис. 24.22. К определению минимального радиуса профиля кулачка с коромыслом.

Из рис. 24.22 видно, что механизм будет обладать наименьшими габаритами, если выбрать ось вращения кулачка в точке A'. Если поставить условие, чтобы ось кулачка лежала на прямой B_5B_1, соединяющей крайние положения точки B коромысла *2*, то ось кулачка может быть выбрана в точке A''. Если выбрана точка A (рис. 24.22), то, соединив точку A с точками B_1 и E, определим начальный угол φ_0 и минимальный радиус-вектор $r_0 = AB_1$ кулачка из формулы (24.75).

7°. Рассмотрим некоторые дополнительные условия, необходимые для проектирования кулачковых механизмов, у которых элементом ведомого звена является прямая (рис. 24.23). Пусть прямая $\alpha - \alpha$ образует с направлением движения звена *2* постоянный угол передачи $\gamma_{12} = 90°$.

Для кулачковых механизмов данного вида должно еще удовлетворяться дополнительное условие, чтобы профиль кулачка был всегда выпуклым, так как его профиль есть огибающая кривая к положениям прямой $\alpha - \alpha$. Для этого, как будет показано ниже, необходимо, чтобы значения d_1, d_2, d_3, ... величины d_i, представляющей собой сумму наименьшего радиуса r_0 кулачка и перемещения s_2 звена *2*, т. е. $d_1 = r_0 + s_2'$, $d_2 = r_0 + s_2''$, $d_3 = r_0 + s_2'''$, ..., были в каждом положении больше второй производной величины s_2 по углу поворота φ_1, взятой со знаком минус, а это значит, больше аналога ускорения

$$a_{2\varphi_1} = d^2 s_2 / d\varphi_1^2,$$

т. е.

$$r_0 + s_2' > -a_{2\varphi_1}',$$

$$r_0 + s_2'' > -a_{2\varphi_1}'',$$

где s_2' и s_2'' — текущие значения функции перемещения $s_2 = s_2(\varphi_1)$.

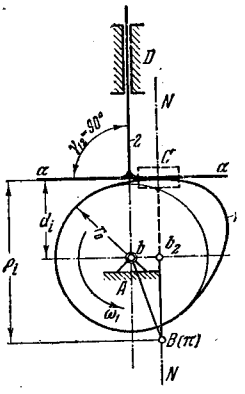


Рис. 24.23. Кулачковый механизм с поступательно движущимся плоским толкателем.

Это можно установить из следующих соображений. Пусть центр кривизны соприкасающегося участка профиля в рассматриваемом положении находится в точке B (рис. 24.23). Строим заменяющий механизм $ABCD$ и при точке $B(\pi)$ строим план ускорений. Отрезок (πb_2) представляет собой аналог $(a_{2\varphi_1})_i$ ускорения a_2 звена *2* в рассматриваемом положении i механизма, т. е.

$$(a_{2\varphi_1})_i = (\pi b_2)_i = \left(\frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}\right)_i. \qquad (24.77)$$

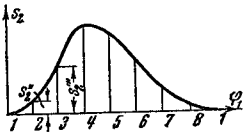


Рис. 24.24. Диаграмма пути плоского толкателя в функции угла поворота кулачка.

Таким образом, радиус кривизны ρ_i профиля кулачка *1* в точке соприкасания C равен

$$\rho_i = d_i + (\pi b_2)_i = r_0 + s_{2i} + (a_{2\varphi_1})_i, \qquad (24.78)$$

где s_{2i} принимает последовательно значения s_2', s_2'', s_2''', ... Кулачок *1* будет выпуклым, если центр кривизны его профиля в каждом положении будет удовлетворять условию

$$\rho > 0, \qquad (24.79)$$

или

$$r_0 + s_{2i} + (a_{2\varphi_1})_i > 0, \tag{24.80}$$

откуда получаем

$$r_0 + s_{2i} > -(a_{2\varphi_1})_i. \tag{24.81}$$

Разделив правую и левую части неравенства (24.81) на величину $r_0 + s_{2i}$, получим

$$-\frac{(a_{2\varphi_1})_i}{r_0 + s_{2i}} < 1, \tag{24.82}$$

или

$$-\frac{(a_{2\varphi_1})_i}{r_0 + s_{2i}} < \operatorname{tg} 45°. \tag{24.83}$$

Условие (24.83) позволяет провести следующее графическое построение (рис. 24.24) для удовлетворения условия выпуклости профиля кулачка.

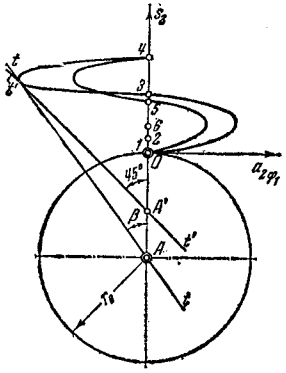


Рис. 24.25. К определению минимального радиуса профиля кулачка с поступательно движущимся плоским толкателем.

По заданной диаграмме $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 24.24) определяем значения $a_{2\varphi_1}$ и строим диаграмму $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(s_2)$ (рис. 24.25). Для этого производим разметку перемещений звена 2 по оси Os_2 и откладываем на проведенных горизонтальных прямых значения $a_{2\varphi_1}$. Соединив полученные точки плавной кривой, получим диаграмму $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(s_2)$. Далее, в той части диаграммы, которая соответствует отрицательным и максимальным по абсолютной величине значениям $a_{2\varphi_1}$, проводим под углом 45° к оси Os_2 касательную $t' - t'$ к кривой $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(s_2)$. Согласно неравенству (24.83) центр вращения кулачка должен быть расположен ниже точки A'. Если центр кулачка расположен в точке A, то неравенство (24.83) соблюдается. В самом деле, касательная $t - t$ к кривой в отрицательной части диаграммы $a_{2\varphi_1} = a_{2\varphi_1}(s_2)$, проведенная из точки A, составляет с осью Os_2 угол, меньший 45°. Выбрав центр вращения A кулачка, мы определим и величину минимального радиуса кулачка, равного $r_0 = AO$, после чего построение профиля кулачка с выпуклым контуром не представит затруднений.

Изложенный метод проектирования разработан Я. Л. Геронимусом. Требование к выпуклости профиля должно соблюдаться и для кулачковых механизмов вида, показанного на рис. 24.3.

§ 108. Проектирование профилей кулачков

1°. Как было показано выше, при профилировании кулачков должен быть задан закон движения ведомого звена и основные конструктивные параметры, обеспечивающие работу механизма без заклинивания и с достаточно высоким коэффициентом полезного действия. Законы движения ведомого звена могут быть заданы графически в виде диаграмм перемещений ведомого звена в функции перемещения ведущего звена или в аналитической форме в виде соответствующих зависимостей. Поэтому мы в дальнейшем рассмотрим как графические, так и аналитические методы проектирования кулачков.

2°. Рассмотрим вопрос о проектировании профилей типовых кулачковых механизмов. Пусть требуется спроектировать кулачковый механизм, показанный на рис. 24.2, *г*, с поступательно движущимся кулачком. Закон движения толкателя *2* задан в виде диаграммы $s_2 = s_2(s_1)$, показанной на рис. 24.26, на которой приведены все фазы работы механизма. При графическом построении

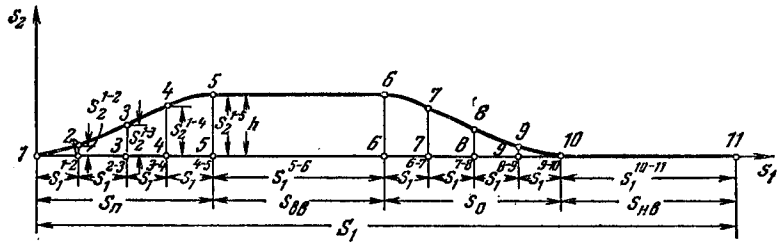


Рис. 24.26. Диаграмма пути толкателя механизма с поступательно движущимся кулачком.

профиля обычно диаграмма закона движения строится в тех же масштабах, что и кулачковый механизм. Для построения профиля кулачка *2* (рис. 24.27) воспользуемся методом обращения движения. Для этого сообщим толкателю *2* и кулачку *1* скорость, равную $-v_1$. Тогда кулачок *1* будет как бы неподвижным, а толкатель *2* будет двигаться поступательно с постоянной скоростью $-v_1$ вдоль направляющих $q-q$ и поступательно со скоростью $\pm v_2$ вдоль направляющих $p-p$. Выбираем на толкателе *2* точку A_1, лежащую на некотором конструктивно выбранном расстоянии h_0 от направляющих $q-q$. В движении со скоростью $-v_1$ толкатель *2* последовательно занимает положения *1*, *2*, *3*, *4* и *5*, а точка A_1 толкателя — положения A_1^{I}, A_1^{II}, A_1^{III}, A_1^{IV}, A_1^{V}, лежащие на равных расстояниях $s_1^{1-2} = s_1^{2-3} = s_1^{3-4} = s_1^{4-5}$. Так как масштабы диаграммы и кулачкового механизма одинаковы, то отрезки s_1^{1-2}, s_1^{2-3}, ... могут быть взяты прямо с диаграммы $s_2 = s_2(s_1)$ (рис. 24.26),

для чего участок $s_п$ фазы подъема разбивается на ряд равных отрезков. Обычно при проектировании профилей кулачков рекомендуется для точности построения выбирать малые интервалы между соседними положениями. На рис. 24.26 отрезок $s_п$ разбит только на четыре участка, чтобы можно было яснее изложить метод построения. Чтобы определить положения A_2, A_3, A_4, A_5 точки A_1 в движении толкателя *2* со скоростью $\pm v_2$, откладываем от точки A_1^{II} в направлении движения толкателя *2* отрезок s_2^{1-2}, взятый с диаграммы $s_2 = s_2(s_1)$, от точки A_1^{III} — отрезок s_2^{1-3}, от точки A_1^{IV} — отрезок s_2^{1-4} и т. д. Соединив полученные точки A_1, A_2, A_3,..., получим профиль a — a кулачка *1*, показанный на рис. 24.27 штриховой линией. Этот профиль будет действительным профилем кулачка, если толкатель оканчивается острием, и центровым профилем, если толкатель снабжен круглым роликом *3* радиуса r.

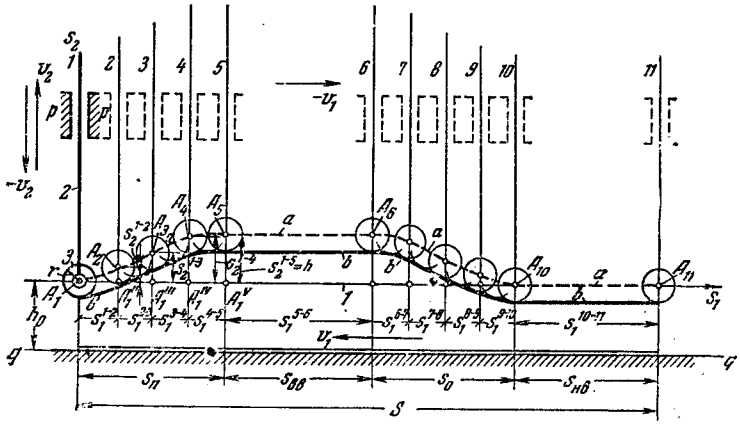


Рис. 24.27. Построение профиля кулачка для механизма с поступательно движущимися кулачком и толкателем.

Для построения действительного профиля при наличии ролика *3* необходимо из точек, лежащих на центровом профиле, провести ряд окружностей радиуса r и затем построить огибающую b — b положений ролика *3*.

Из построения следует, что при выбранных масштабах центровой профиль a — a кулачка представляет собой диаграмму $s_2 = s_2(s_1)$, а действительный профиль b — b является эквидистантной кривой к кривой a — a, точки которой лежат на расстояниях, равных r, по нормалям к кривой a — a.

3°. В практических расчетах часто требуется аналитическое вычисление координат действительного профиля кулачка для получения более точного очертания этого профиля. Для составления

уравнения огибающей $b-b$ (рис. 24.28) положений ролика радиуса r напишем уравнение семейства окружностей радиуса r, центры A которых образуют центровой профиль $a-a$:

$$(x_b-x)^2+(y_b-y)^2-r^2=0, \qquad (24.84)$$

где x_b и y_b — координаты действительного профиля $b-b$, а координаты x и y центрового профиля являются функциями выбранного параметра θ:

$$x=x(\theta), \qquad y=y(\theta).$$

Для получения уравнений огибающей в параметрической форме продифференцируем уравнение (24.84) по общему параметру θ:

$$(x_b-x)\frac{dx}{d\theta}+(y_b-y)\frac{dy}{d\theta}=0. \qquad (24.85)$$

Решая совместно уравнения (24.84) и (24.85), получаем координаты действительного профиля:

$$\left.\begin{aligned} x_b &= x \mp \frac{r\dfrac{dy}{d\theta}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}}, \\ y_b &= y \mp \frac{r\dfrac{dx}{d\theta}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (24.86)$$

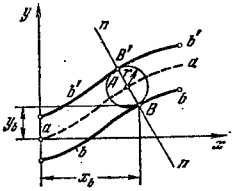


Рис. 24.28. К определению координат огибающей ролика кулачкового механизма, изображенного на рис. 24.27.

Из равенств (24.86) следует, что координаты x_b и y_b действительного профиля имеют два значения, соответствующие двум возможным профилям $b-b$ и $b'-b'$.

Для кулачкового механизма, показанного на рис. 24.2, *г*, имеем уравнения центрового профиля в параметрической форме $x=s_1$ и $y=s_2$. Общим параметром θ удобно выбрать s_1, ибо

$$s_2=s_2(s_1).$$

В таком случае получаем:

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{ds_1}{ds_1}=1, \qquad \frac{dy}{d\theta}=\frac{ds_2}{ds_1}.$$

Следовательно, координаты x_b и y_b действительного профиля $b-b$ равны

$$x_b=s_1+\frac{r\dfrac{ds_2}{ds_1}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{ds_2}{ds_1}\right)^2}}$$

и

$$y_b = s_2 - \frac{r}{\sqrt{1+\left(\frac{ds_2}{ds_1}\right)^2}}.$$

4°. Переходим к рассмотрению вопроса о проектировании профиля кулачка механизма, показанного на рис. 24.2, *а*. Закон движения толкателя *2* задан в виде диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 24.29), на которой показаны все фазы движения толкателя при полном угле поворота Φ_1 кулачка *1*, равном

$$\Phi_1 = 2\pi. \tag{24.87}$$

Определяем по методу, указанному в § 107, *4°*, минимальный радиус r_0 кулачка *1* и проводим окружность этим радиусом из точки A. Тогда определится начальное положение B_1 точки касания острия толкателя *2* с кулачком *1*.

Для построения центрового профиля $a - a$ кулачка воспользуемся методом обращения движения (рис. 24.30), для чего сообщим кулачку и толкателю общую угловую скорость $-\omega_1$, равную и обратно направленную угловой скорости ω_1 кулачка *1*. Тогда толкатель *2* займет на фазе подъема положения *1*, *2*, *3*, *4* и *5*, а точка B_1 займет последовательно положения B_1^{II}, B_1^{III}, B_1^{IV} и B_1^{V}, лежащие на лучах, образующих равные углы $\varphi_1^{1-2} = \varphi_1^{2-3} = \varphi_1^{3-4} = \varphi_1^{4-5}$. Если масштаб перемещений s_2 (рис. 24.29) выбран равным масштабу чертежа, то, откладывая от точек B_1^{II}, B_1^{III}, B_1^{IV}, B_1^{V} отрезки, соответственно равные

$$\begin{aligned} B_1^{II}B_2 &= s_2^{1-2}, \\ B_1^{III}B_3 &= s_2^{1-3}, \\ B_1^{IV}B_4 &= s_2^{1-4}, \\ B_1^{V}B_5 &= s_2^{1-5}, \end{aligned} \tag{24.88}$$

получим центровой профиль $a - a$ кулачка на фазе подъема $\varphi_п$, если соединим плавной кривой точки B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5. На угле $\varphi_{вв}$ верхнего выстоя профиль кулачка будет дугой окружности радиуса $r_0 + h$.

Пользуясь диаграммой $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 24.29), с помощью аналогичных построений можем построить точки $B_6 - B_{10}$, соответствующие фазе опускания $\varphi_о$.

На фазе нижнего выстоя $\varphi_{нв}$ профиль кулачка будет дугой окружности радиуса r_0. Если толкатель *2* оканчивается роликом *3* радиуса r, то построение действительного профиля $b - b$ сводится к построению эквидистантной кривой как огибающей положений ролика *3*.

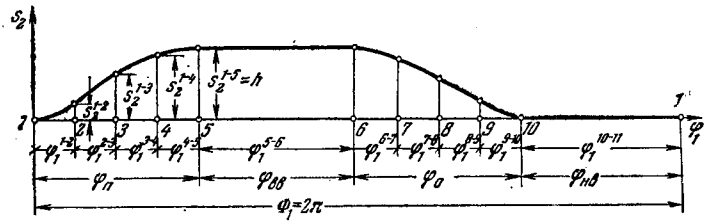


Рис. 24.29. Диаграмма пути толкателя для кулачкового механизма, изображенного на рис. 24.2, *а*.

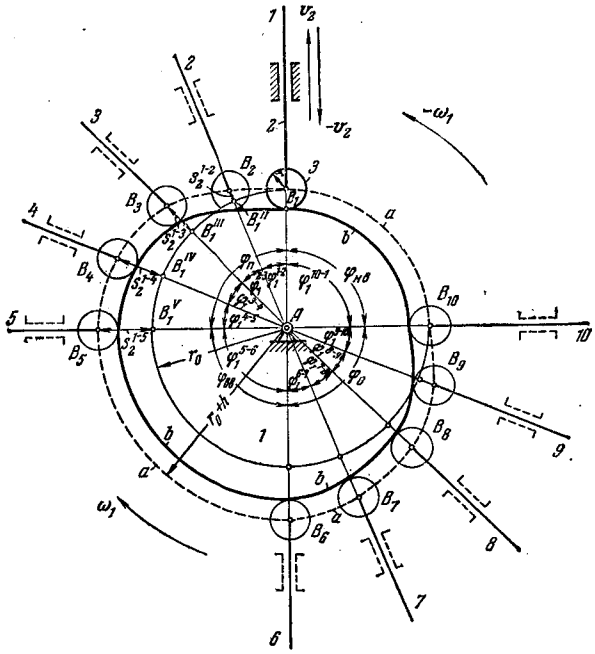


Рис. 24.30. Построение профиля кулачка для кулачкового механизма, изображенного на рис. 24.2, *а*,

5°. Уравнения центрового профиля $a-a$ (рис. 24.31) в полярной форме будут иметь вид

$$\vartheta=\varphi_1, \qquad R=r_0+s_2, \quad (24.89)$$

где R — радиус-вектор кулачка 2 в положении, в котором точка B занимает произвольно выбранное положение B'. Если оси x и y выбрать так, как это показано на рис. 24.31, выражения для координат центрового профиля в параметрической форме будут иметь следующий вид:

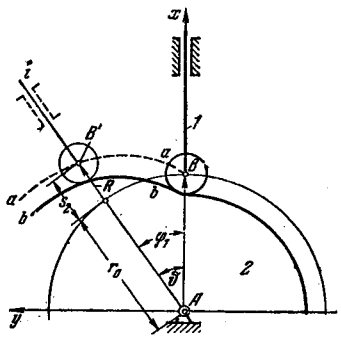


Рис. 24.31. К определению координат профиля кулачка кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем.

$$x=R\cos\varphi_1=(r_0+s_2)\cos\varphi_1, \quad (24.90)$$

$$y=R\sin\varphi_1=(r_0+s_2)\sin\varphi_1. \quad (24.91)$$

Выражения для координат действительного профиля $b-b$ могут быть получены из равенств (24.86), если за параметр θ принять угол φ_1 поворота кулачка:

$$\frac{dx}{d\varphi_1}=-(r_0+s_2)\sin\varphi_1+\cos\varphi_1\frac{ds_2}{d\varphi_1}, \quad (24.92)$$

$$\frac{dy}{d\varphi_1}=(r_0+s_2)\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\frac{ds_2}{d\varphi_1}. \quad (24.93)$$

Подставляя в равенства (24.86) значения x и y из равенств (24.90) и (24.91) и $dx/d\varphi_1$ и $dy/d\varphi_1$ из равенств (24.92) и (24.93), после некоторых преобразований получаем

$$x_b=(r_0+s_2)\cos\varphi_1\mp r\frac{(r_0+s_2)\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\dfrac{ds_2}{d\varphi_1}}{\sqrt{(r_0+s_2)^2+\left(\dfrac{ds_2}{d\varphi_1}\right)^2}}, \quad (24.94)$$

$$y_b=(r_0+s_2)\sin\varphi_1\mp r\frac{\cos\varphi_1\dfrac{ds_2}{d\varphi_1}-(r_0+s_2)\sin\varphi_1}{\sqrt{(r_0+s_2)^2+\left(\dfrac{ds_2}{d\varphi_1}\right)^2}}. \quad (24.95)$$

Уравнения действительного профиля $b-b$ в полярной форме могут быть получены из известных соотношений

$$R_b=\sqrt{x_b^2+y_b^2}, \quad (24.96)$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_b=\frac{y_b}{x_b}. \quad (24.97)$$

Из рис. 24.31 следует, что для кулачковых механизмов рассматриваемого вида фазовый угол φ_1 совпадает с полярным углом ϑ.

6°. Переходим к рассмотрению вопроса о проектировании профиля кулачка механизма, показанного на рис. 24.2, *в*. Пусть закон движения толкателя *2* задан в виде диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$, показанной на рис. 24.29. При построении профиля кулачка *1* данного вида из центра вращения кулачка (рис. 24.32) проводим окружность радиуса, равного выбранному смещению l оси движения толкателя *2*. Далее, по методу, изложенному в § 104, *3°*, определяем

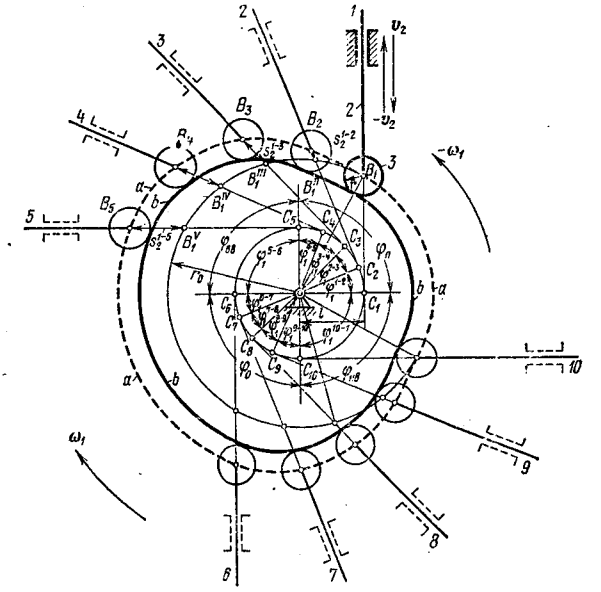


Рис. 24.32. К построению профиля кулачка кулачкового механизма с эксцентрично поставленным толкателем.

минимальный радиус r_0 кулачка и проводим окружность этого радиуса. В точке пересечения окружности радиуса r_0 и оси движения толкателя *2* находим точку B_1. Точка B_1 соответствует начальному положению толкателя. В обращенном движении ось толкателя всегда касательна к окружности радиуса l. Последовательные положения толкателя определятся, если окружность разбить на части, соответствующие углам φ_1^{1-2}, φ_1^{2-3}, φ_1^{3-4}, ... на диаграмме $s_2 = s_2(\varphi_1)$. В соответствии с этим получаем ряд точек C_1, C_2 C_3,..., в которых ось движения толкателя касательна к окружности радиуса l. Находим, далее, на пересечении оси движения толкателя с окружностью радиуса r_0 точки B_1^{II}, B_1^{III}, B_1^{IV},..., являющиеся геометрическим местом точки B_1 в движении толкателя *2* с угловой

скоростью $-\omega_1$. Из точек B_1^{II}, B_1^{III}, B_1^{IV}, ... откладываем вдоль оси движения толкателя отрезки s_2^{1-2}, s_2^{1-3}, s_2^{1-4}, ..., взятые с диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 24.29), и получаем точки B_1, B_2, B_3,..., являющиеся точками центрового профиля.

Построение действительного профиля аналогично построению профиля кулачкового механизма, показанного на рис. 24.30.

7°. Координаты центрового профиля $a - a$ кулачка *1* (рис. 24.33) получаются из условий

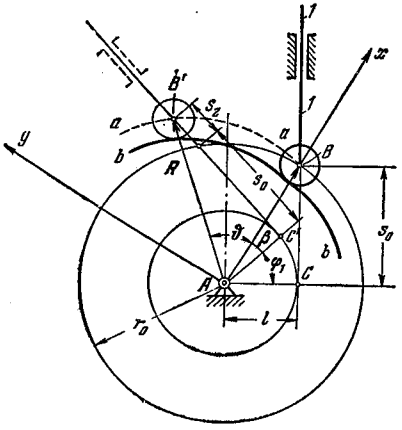


Рис. 24.33. К определению координат профиля кулачка кулачкового механизма с эксцентрично поставленным толкателем.

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\beta)=\frac{s_0}{l}, \qquad (24.98)$$

$$\operatorname{tg}(\vartheta+\beta)=\frac{s_0+s_2}{l}, \qquad (24.99)$$

где φ_1 — фазовый угол поворота кулачка *1*, ϑ — полярный угол или профильный угол кулачка, $s_0 = BC$ — расстояние, определяющее начальное положение точки B толкателя, s_2 — перемещение толкателя при повороте кулачка на угол φ_1 и β — вспомогательный угол, равный $\beta = \angle BAC'$.

Исключая из равенств (24.98) и (24.99) угол β, получаем

$$\vartheta=\varphi_1+\operatorname{arctg}\frac{s_0+s_2}{l}-\operatorname{arctg}\frac{s_0}{l}. \qquad (24.100)$$

Имеем, далее, для радиуса-вектора $\boldsymbol{R}$, определяющего некоторое произвольно выбранное положение B' точки B толкателя, следующее выражение:

$$R=\sqrt{(s_0+s_2)^2+l^2}. \qquad (24.101)$$

Выражения (24.100) и (24.101) определяют координаты центрового профиля $a - a$ кулачка *2* в полярной форме. Из выражения (24.100) следует, что для кулачкового механизма рассматриваемого вида полярный ϑ и фазовый φ_1 углы не равны между собой. Координаты центрового профиля в выбранной системе координат xAy (рис. 24.33) имеют такой вид:

$$x=R\cos\vartheta=\sqrt{(s_0+s_2)^2+l^2}\cdot\cos\left(\varphi_1+\operatorname{arctg}\frac{s_0+s_2}{l}-\operatorname{arctg}\frac{s_0}{l}\right), \qquad (24.102)$$

$$y=R\sin\vartheta=\sqrt{(s_0+s_2)^2+l^2}\cdot\sin\left(\varphi_1+\operatorname{arctg}\frac{s_0+s_2}{l}-\operatorname{arctg}\frac{s_0}{l}\right). \qquad (24.103)$$

Координаты действительного профиля $b - b$ (рис. 24.33) можно определить, если воспользоваться выражениями (24.86).

8°. Рассмотрим, далее, вопрос о проектировании кулачкового механизма, показанного на рис. 24.1, *б*. Закон движения коромысла *2* задан в виде диаграммы $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (рис. 24.34), где φ_2 — угол поворота коромысла *2*. Полный угол поворота коромысла *2* принят

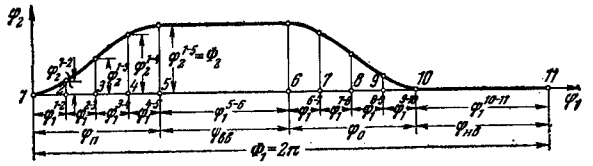


Рис. 24.34. Диаграмма угла поворота коромысла кулачкового механизма.

равным Φ_2. Минимальный радиус r_0 кулачка *1* определяем по методу, изложенному в § 107, *6°*. Тогда по заданным размерам l_2 и l_3 определится угол φ_0 (рис. 24.35). Обращая движение механизма, находим положение точек C_2, C_3, C_4 и C_5 (рис. 24.35) оси

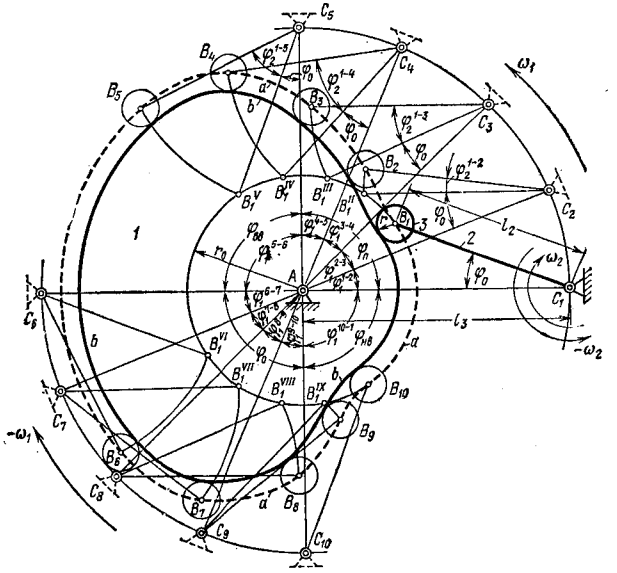


Рис. 24.35. Построение профиля кулачка для кулачкового механизма с коромыслом.

вращения коромысла *2*. Соответственно на окружности радиуса r_0 определяются точки B_1^{I}, B_1^{II}, B_1^{III}, B_1^{IV} и B_1^{V}. От полученных направлений $C_2B_1^{\mathrm{II}}$, $C_3B_1^{\mathrm{III}}$, $C_4B_1^{\mathrm{IV}}$ и $C_5B_1^{\mathrm{V}}$ откладываем углы φ_2^{1-2}, φ_2^{1-3}, φ_2^{1-4} и φ_2^{1-5}, взятые с диаграммы $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (рис. 24.34). Тогда

определятся точки B_2, B_3, B_4 и B_5 центрового профиля кулачка *2*, соответствующие фазе подъема коромысла. Построение профиля кулачка *1* на фазе опускания является аналогичным. На фазах верхнего и нижнего выстоев профиль кулачка *1* очерчивается дугами окружностей, имеющих центром точку A. Построение действительного профиля сводится к проведению огибающей к положениям ролика *3* выбранного радиуса.

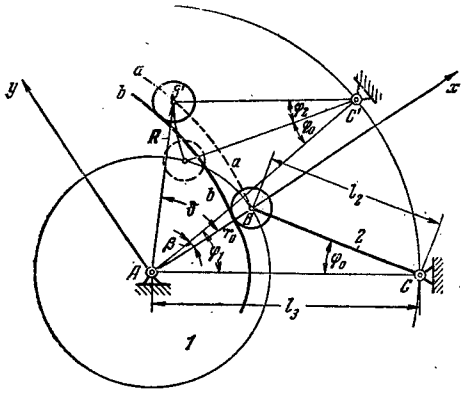


Рис. 24.36. К определению координат центрового профиля кулачка для кулачкового механизма с коромыслом.

9°. Координаты центрового профиля $a-a$ кулачка *1* (рис. 24.36) определяются из следующих соображений. Полярный угол ϑ, образованный радиусом-вектором $\boldsymbol{R}$ кулачка в положении, в котором точка B коромысла *2* занимает произвольно выбранное положение B', определяется из рассмотрения треугольника $AB'C$. Имеем

$$R\cos(\vartheta-\beta)=l_3-l_2\cos(\varphi_0+\varphi_2), \tag{24.104}$$

$$R\sin(\vartheta-\beta)=l_2\sin(\varphi_0+\varphi_2), \tag{24.105}$$

где β — вспомогательный угол. Из уравнений (24.104) и (24.105) получаем

$$\vartheta-\beta=\operatorname{arctg}\frac{l_2\sin(\varphi_0+\varphi_2)}{l_3-l_2\cos(\varphi_0+\varphi_2)}. \tag{24.106}$$

Далее, из треугольника ABC имеем

$$\varphi_1-\beta=\arcsin\left(\frac{l_2}{r_0}\sin\varphi_0\right). \tag{24.107}$$

Исключая из уравнений (24.106) и (24.107) угол β, получаем

$$\vartheta=\varphi_1+\operatorname{arctg}\frac{l_2\sin(\varphi_0+\varphi_2)}{l_3-l_2\cos(\varphi_0+\varphi_2)}-\arcsin\left(\frac{l_2}{r_0}\sin\varphi_0\right). \tag{24.108}$$

Длину радиуса-вектора $\boldsymbol{R}$ получим из треугольника $AB'C'$:

$$R=\sqrt{l_2^2+l_3^2-2l_2l_3\cos(\varphi_0+\varphi_2)}. \tag{24.109}$$

Из формулы (24.108) следует, что и для этого вида кулачковых механизмов полярный угол ϑ и фазовый угол φ_1 не равны между собой.

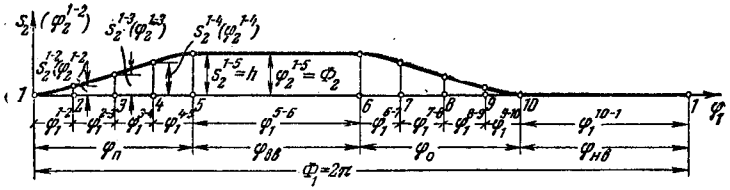


Рис. 24.37. Диаграмма пути плоского толкателя в функции угла поворота кулачка.

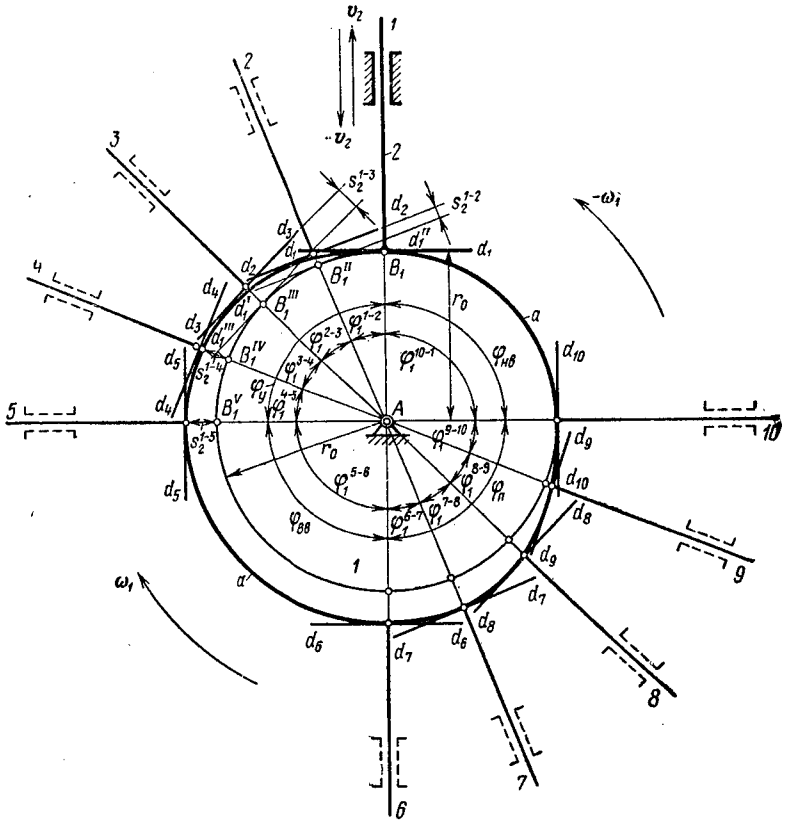


Рис 24.38. Построение профиля кулачка кулачкового механизма с плоским толкателем.

Координаты центрового профиля $a-a$ в выбранной системе координат xAy (рис. 24.36) имеют вид

$$x = R\cos\vartheta, \tag{24.110}$$

$$y = R\sin\vartheta, \tag{24.111}$$

где R и ϑ определяются из равенств (24.109) и (24.108). Координаты действительного профиля $b-b$ (рис. 24.36) можно получить, если воспользоваться равенствами (24.86).

10°. Переходим к рассмотрению вопроса о проектировании профиля кулачка механизма, показанного на рис. 24.2, *б*, у которого толкатель *2* оканчивается плоской тарелкой. Закон движения толкателя *2* задан в виде диаграммы $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 24.37). Построение профиля кулачка *1* при условии, что масштабы перемещения s_2 на диаграмме $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (рис. 24.37) и схемы механизма совпадают, показано на рис. 24.38. При построении профиля кулачка *1* применим метод обращения движения. Минимальный радиус-вектор r_0 кулачка определяем по способу, указанному в § 107, *7°*.

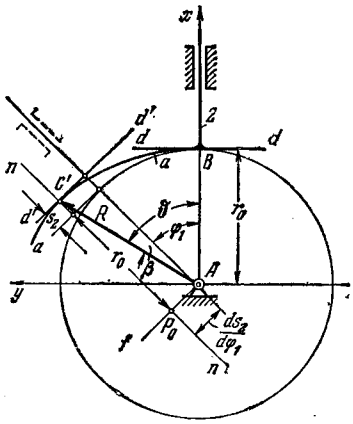


Рис. 24.39. К определению полярных координат профиля кулачка кулачкового механизма с плоским толкателем.

Пусть в начале движения тарелка толкателя *2* находится в положении $d_1 - d_1$. При вращении с угловой скоростью $-\omega_1$ тарелка занимает последовательно положения $d_1^{II} - d_1^{II}$, $d_1^{III} - d_1^{III}$, $d_1^{IV} - d_1^{IV}$, ... и точка B_1 соприкасания тарелки с окружностью радиуса r_0 последовательно проходит через положения B_1^{II}, B_1^{III}, B_1^{IV}, ... При перемещении толкателя со скоростью $\pm v_2$ его тарелка перемещается на расстояния, равные s_2^{1-2}, s_2^{1-3}, s_2^{1-4}, ..., т. е. она занимает положения $d_2 - d_2$, $d_3 - d_3$, $d_4 - d_4$,... Профиль кулачка *1* можно построить, если провести огибающую $a-a$ всех положений $d_2 - d_2$, $d_3 - d_3$, $d_4 - d_4$,... тарелки. На углах $\varphi_{вв}$ и $\varphi_{нв}$, соответствующих фазам верхнего и нижнего выстоев, кулачок очерчивается по дугам окружностей, проведенных из центра A радиусами $r_0 + h$ и r_0.

11°. Полярные координаты профиля $a-a$ кулачка *1* (рис. 24.39) имеют следующий вид. Проведем через точку C' соприкасания профиля $a-a$ с некоторым произвольно выбранным положением $d'-d'$ тарелки нормаль $n-n$. Тогда мгновенный центр вращения P_0 в относительном движении найдется на пересечении нормали $n-n$ с прямой Af, перпендикулярной к оси движения

толкателя 2. Величина AP_0 будет равна $AP_0=\frac{ds_2}{d\varphi_1}$. Полярный угол ϑ равен

$$\vartheta=\varphi_1+\beta=\varphi_1+\operatorname{arctg}\frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1}}{r_0+s_2}, \tag{24.112}$$

и радиус-вектор R кулачка в точке C' равен

$$R=\sqrt{(r_0+s_2)^2+\left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)^2}. \tag{24.113}$$

Координаты профиля $a-a$ в выбранной системе координат (рис. 24.39) выразятся формулами

$$x=R\cos\vartheta, \tag{24.114}$$

$$y=R\sin\vartheta, \tag{24.115}$$

где R и ϑ определяются по формулам (24.113) и (24.112).

12°. Для тех кулачковых механизмов, у которых толкатель оканчивается роликом, необходимо иметь в виду, что радиус r ролика не может быть выбран произвольно. Необходимо руководствоваться условием, чтобы эквидистантная кривая, представляющая собой

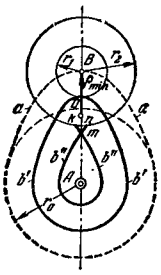


Рис. 24.40. К исследованию вопроса о самопересечении действительного профиля кулачка.

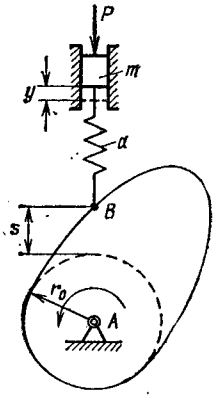


Рис. 24.41. Динамическая модель кулачкового механизма.

действительный профиль кулачка, не имела самопересечения. На рис. 24.40 видно, что если радиус ролика выбран равным r_1, то самопересечения действительного профиля $b'-b'$ мы не имеем.

Если увеличить радиус ролика и выбрать его равным r_2, то в точке m практический профиль $b''-b''$ самопересекается.

13°. При больших нагрузках и высоких скоростях движения деформации звеньев оказывают заметное влияние на кинематические и динамические характеристики механизма. Например, при синтезе

быстроходных кулачковых механизмов профиль кулачка должен определяться с учетом упругости звеньев.

На рис. 24.41 показана динамическая модель кулачкового механизма с упругим толкателем. Упругость кулачкового вала не принимается во внимание, т. е. рассматривается механизм, в котором жесткость вала значительно больше жесткости толкателя. Масса толкателя m считается сосредоточенной в одной точке (верхнем конце толкателя). Действие сил упругости толкателя представлено пружиной a, не имеющей массы и помещенной между массой m и кулачком. На массу m действует внешняя сила $\boldsymbol{P}$. Нижний конец толкателя (пружина) движется в контакте с кулачком, т. е. перемещение нижнего конца толкателя s, отсчитываемое от наинизшего положения, определяется профилем кулачка. Перемещение верхнего конца толкателя y вследствие упругости толкателя отличается от перемещения s.

Связь между перемещениями y и s может быть найдена из дифференциального уравнения движения массы m:

$$-P+c_2(s-y)=m\ddot{y}, \tag{24.116}$$

где c_2 — коэффициент жесткости толкателя, т. е. отношение силы, приложенной к какому-либо концу толкателя, к величине его деформации, считая другой конец закрепленным.

При силовом замыкании сила $\boldsymbol{P}$ может быть представлена в виде суммы силы внешней нагрузки $\boldsymbol{P}_{\text{с}}$, силы замыкающей пружины $\boldsymbol{P}_{\text{пр}}$ и силы трения $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_{\text{с}}+\boldsymbol{P}_{\text{п}}+\boldsymbol{F}. \tag{24.117}$$

Модуль силы замыкающей пружины может быть представлен в следующем виде:

$$P_{\text{п}}=P_{\text{по}}+c_1y, \tag{24.118}$$

где $P_{\text{по}}$ — сила предварительной затяжки, c_1 — коэффициент жесткости пружины.

С учетом соотношений (24.116) — (24.118) уравнение движения упругого толкателя (24.116) получает вид:

$$\ddot{y}+\frac{c_1+c_2}{m}y=\frac{-P_{\text{с}}-P_{\text{по}}-F+c_2s}{m}. \tag{24.119}$$

Отсюда получаем искомую зависимость перемещения нижнего конца толкателя s от перемещения верхнего конца толкателя:

$$s=\frac{P_{\text{с}}+P_{\text{по}}+F}{c_2}+\frac{c_1+c_2}{c_2}y+\frac{m}{c_2}\ddot{y}. \tag{24.120}$$

Таким образом, для определения зависимости $s(t)$ с учетом упругости толкателя должна быть задана функция $y(t)$ и вторая производная $\ddot{y}(t)$.

ГЛАВА XXV

СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ

§ 109. Основные задачи синтеза

1°. Плоские механизмы с низшими парами применяются во многих машинах, приборах и устройствах.

Достоинства этих механизмов определяются в основном особыми свойствами низших пар, в которые входят звенья. В низших парах соприкасающимися элементами звеньев являются поверхности (плоскости — для поступательных пар, цилиндрические поверхности — для вращательных пар), поэтому удельные давления и износ в них меньше, чем в высших кинематических парах. Элементы звеньев, образующих эти пары, изготовляются достаточно просто и точно, так как технология обработки плоскостей и цилиндрических поверхностей в настоящее время разработана весьма тщательно и полно. Кроме того, для механизмов, образованных при помощи звеньев, входящих в низшие пары, в отличие от кулачковых механизмов, не требуется пружин и других устройств, обеспечивающих постоянное замыкание кинематических пар.

При помощи плоских механизмов с низшими парами можно теоретически точно воспроизвести любую плоскую алгебраическую кривую.

Однако практическое применение этих механизмов ограничивается тем, что эти механизмы получаются, как правило, многозвенными. С увеличением же числа звеньев в механизме возрастает вероятность получения недопустимых углов передачи и искажения заданной зависимости вследствие накопления ошибок, происходящих от неточности изготовления механизма. Поэтому некоторые законы движения ведомого звена практически не удается воспроизвести при помощи плоских механизмов с низшими парами. В этом состоит их основной недостаток. Другими словами, кулачковые и зубчатые механизмы вследствие разнообразия элементов высших пар практически являются более универсальными, чем механизмы, составленные только из звеньев, входящих в низшие пары. Следует заметить, однако, что с развитием методов проектирования механизмов с низшими парами область их применения существенно расширяется. Например, в последние годы в Советском Союзе в машинах, служащих для выполнения некоторых математических операций, и в машинах-автоматах были применены шарнирные механизмы, которые являются более совершенными по сравнению с ранее применявшимися кулачковыми и фрикционными механизмами.

2°. Прежде чем излагать сущность современных методов проектирования механизмов с низшими парами, рассмотрим кратко основные задачи синтеза этих механизмов.

В зависимости от назначения механизма точки ведомых звеньев должны иметь определенные траектории, перемещения, скорости и ускорения. Эти величины зависят от закона движения ведущего звена и от параметров кинематической схемы, т. е. от размеров звеньев механизма, которые определяют его кинематическую схему. В плоских механизмах с низшими парами параметрами кинематической схемы являются расстояния между центрами шарниров, размеры, определяющие положения поступательных пар, расстояния до точек, описывающих траектории, и т. п. Определение параметров кинематической схемы механизма по заданным геометрическим и кинематическим условиям движения ведомого звена составляет основную задачу проектирования механизмов, так как все остальные этапы проектирования содержат лишь проверочные и вспомогательные расчеты, позволяющие установить возможность и целесообразность реального выполнения полученной кинематической схемы механизмов.

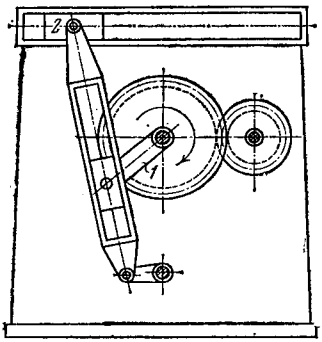


Рис. 25.1. Схема механизма поперечно-строгального станка.

В дальнейшем под синтезом механизмов с низшими парами будет подразумеваться совокупность задач об определении параметров кинематической схемы по заданным условиям движения звеньев. Эти условия весьма разнообразны, и соответственно весьма разнообразны задачи, связанные с синтезом механизмов с низшими парами. Однако из обширного круга этих задач можно выделить *задачу воспроизведения заданного закона движения* или, что то же, *заданной целевой функции.*

3°. Задача о воспроизведении заданного закона движения состоит в определении таких параметров кинематической схемы, которые обеспечивают точное или приближенное движение ведомого звена по заданному закону при определенном законе движения ведущего звена. Приведем примеры тех механизмов, в которых требуется получить достаточно точное воспроизведение заданного закона движения.

На рис. 25.1 показана схема механизма поперечно-строгального станка, в котором при равномерном движении ведущего звена *1* суппорт *2* совершает возвратно-поступательное движение с ускоренным обратным ходом, причем во время рабочего хода движение суппорта *2* должно быть приближенно равномерным. При синтезе этого механизма параметры кинематической схемы подбираются таким образом, чтобы на рабочем участке движения суппорта скорость его мало отличалась от постоянной величины, что важно для сохранения постоянной скорости обработки заготовки.

Кроме равномерного движения для ведомого звена могут быть заданы и более сложные законы движения. Таковы, например, задачи о синтезе механизмов грохотов, конвейеров, самонакладов и многих других. К задачам о воспроизведении заданного закона движения сводятся также задачи синтеза передаточных механизмов, применяемых в приборах для преобразования неравномерного движения чувствительного элемента в равномерное движение указательной стрелки. Например, в механизме дифференциального вакуумметра, схема которого показана на рис. 25.2, перемещения чувствительных элементов *1* и *2* передаются на стрелку *3* посредством шарнирного четырехзвенного механизма *ABCD* и зубчатого сектора *4*. Для получения равномерной шкалы следует по

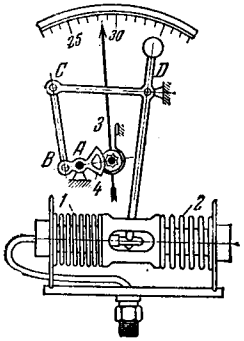


Рис. 25.2. Схема механизма вакуумметра.

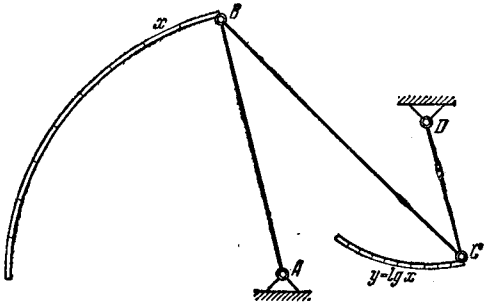


Рис. 25.3. Схема механизма, воспроизводящего логарифмическую зависимость.

заданным перемещениям чувствительных элементов *1* и *2* найти углы поворота звена *CD* и затем определить параметры кинематической схемы шарнирного четырехзвенника *ABCD* так, чтобы найденным углам поворота звена *CD* соответствовали равные углы поворота звена *AB*.

К группе передаточных механизмов, служащих для получения равномерной шкалы, близко примыкают шарнирные механизмы, применяемые в механических счетно-решающих устройствах. На рис. 25.3 показана кинематическая схема механизма, применяемого для механического воспроизведения логарифмической зависимости $y = \lg x$ в пределах от $x = 1$ до $x = 10$. Если в этом механизме перемещать звено *AB* на величину, пропорциональную x, то углы поворота звена *CD* при определенных соотношениях между длинами звеньев будут с практически достаточной точностью пропорциональны величине функции $y = \lg x$. Этот приближенно выполняющий заданную зависимость механизм в эксплуатации оказывается более удобным, чем теоретически точно выполняющие эту зависимость механизмы с высшими парами или фрикционными устройствами.

Во всех рассмотренных выше механизмах ведомые звенья входят во вращательные или поступательные пары со стойкой и, следовательно, совершают вращательные или прямолинейные поступательные движения. Реже встречаются случаи, когда ведомое звено совершает сложное движение. В качестве примера можно указать на механизм грейфера съемочного киноаппарата (рис. 25.4), в котором ведомое звено *2* при повороте ведущего звена *1* на угол 142° перемещает кинопленку *3* на величину, равную расстоянию между двумя соседними перфорированными отверстиями. В течение остальной части оборота ведущего звена *1* пленка *3* неподвижна. При

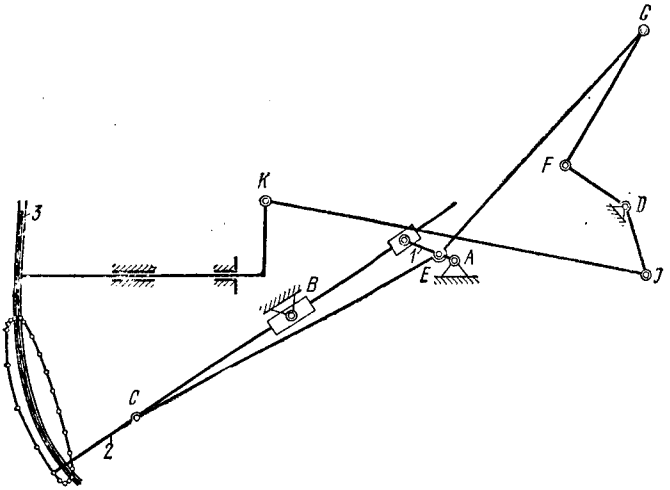


Рис. 25.4. Схема грейферного механизма киносъемочного аппарата.

синтезе этого механизма следует так подобрать параметры звеньев, чтобы конец ведомого звена *2* описывал траекторию, указанную на рис. 25.4, и, кроме того, геометрическая ось звена *2* занимала определенные заданные положения, соответствующие заданным положениям ведущего звена *1*.

В приведенных примерах показаны механизмы, в которых требуется достаточно точное воспроизведение заданного закона движения на всем рассматриваемом интервале перемещения ведущего звена. В некоторых случаях оказывается достаточным при синтезе механизма удовлетворить условиям воспроизведения отдельных положений звеньев и значений скоростей и ускорений в этих положениях и т. д. Все эти случаи, однако, можно рассматривать как частные случаи общей задачи о воспроизведении закона движения.

4°. При синтезе механизмов, в которых ведомые звенья совершают сложное движение, в некоторых случаях можно ограничиться только воспроизведением траектории одной точки этого звена.

Соответствующая задача синтеза механизмов носит название *задачи о воспроизведении заданной траектории.*

Эта задача состоит в определении параметров кинематической схемы механизма, в котором одна из точек звена, совершающего сложное движение, движется по заданной траектории. В простейших случаях заданной траекторией является прямая линия. Механизмы, в которых на шатуне имеется точка, движущаяся точно или приближенно по прямой линии, называются *прямолинейно-направляющими механизмами.* В приборостроении они применяются, например, в механизмах индикаторов.

На рис. 25.5 показана схема индикатора, в котором звено *1* перемещается пропорционально измеряемой величине. Эта величина

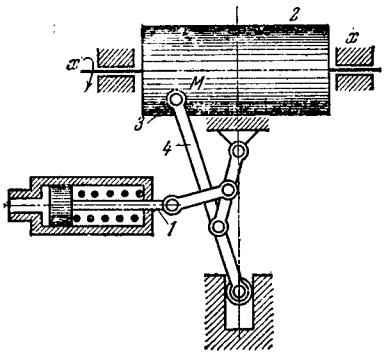


Рис. 25.5. Схема прямолинейно-направляющего механизма индикатора.

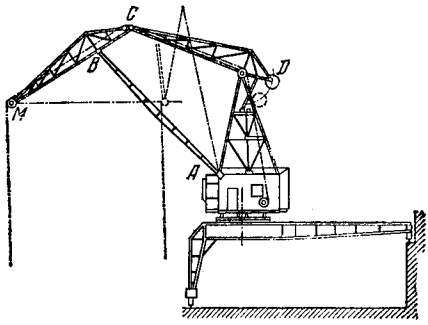


Рис. 25.6. Схема прямолинейно-направляющего механизма грузоподъемного крана.

записывается на вращающемся вокруг оси $x - x$ барабане *2* посредством пера *3*, укрепленного на шатуне *4*. При синтезе этого механизма параметры кинематической схемы механизма подбираются так, что точка M шатуна *4* движется приближенно по прямой линии.

В тяжелом машиностроении прямолинейно-направляющие механизмы применяются также в подъемных кранах (рис. 25.6), в которых приближенно-прямолинейная траектория точки M шатуна BC шарнирного четырехзвенника $ABCD$ обеспечивает горизонтальное перемещение груза.

К группе механизмов для воспроизведения заданной траектории относятся также механизмы для черчения линий, которыми пользуются не только для вычерчивания различных кривых, но и для обработки фасонных деталей. На рис. 25.7 показана схема одного из механизмов для черчения линий, а именно механизма для черчения параболы, в котором точка E движется точно по параболе.

Кроме механизмов для черчения линий, большим разнообразием также обладают механизмы для перемещения различных материа-

лов, в которых применяются характерные формы шатунных кривых (мешалка, тестомесилка и т. п.), петлеобразующие механизмы швейных машин и т. п.

Приведенных примеров из области приборостроения и общего машиностроения достаточно, чтобы показать практическое значение решения задачи об определении кинематической схемы по заданным условиям. Отметим только, что большое количество разнообразных примеров плоских механизмов с низшими парами можно привести почти из всех областей современного машиностроения. Все эти механизмы предназначены или для воспроизведения заданного закона движения (включая и задание отдельных положений звеньев), или для воспроизведения заданной траектории.

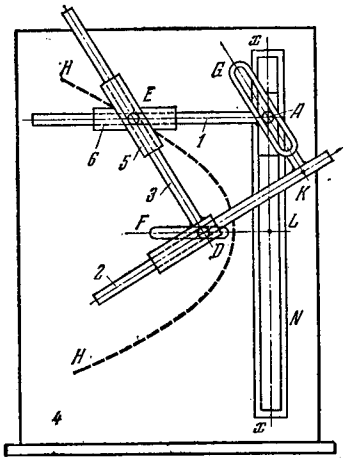


Рис. 25.7. Схема направляющего механизма для вычерчивания параболы.

5°. Решение указанных задач синтеза механизмов с низшими парами может вестись как графическими, так и аналитическими методами. Выбор того или иного метода в значительной мере зависит от тех условий, которые поставлены при проектировании. Например, если поставлено условие, чтобы при приближенном выполнении заданного закона движения была дана оценка отклонения требуемого движения от фактически полученного, то необходимо применить аналитические методы, так как графические методы не могут дать полного ответа на поставленные условия. Графические методы наглядны, просты с точки зрения их усвоения и удобны для конструкторов, поэтому в инженерной практике графические методы решения задач проектирования нашли широкое применение. В последние годы советскими и зарубежными учеными были широко развиты аналитические и графоаналитические методы синтеза механизмов с низшими парами, вполне доступные для широкого круга конструкторов и инженеров. Ниже будет дано изложение вопроса в основном в том виде, как это было предложено Н. И. Левитским.

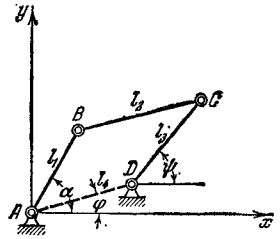


Рис. 25.8. К определению параметров четырехзвенного шарнирного механизма.

6°. Решение задачи о воспроизведении заданного закона движения покажем на примере механизма четырехзвенника (рис. 25.8).

Пусть закон движения ведущего звена AB задан в виде зависимости его угла поворота α от времени t, т. е.

$$\alpha = \alpha(t), \tag{25.1}$$

а закон движения ведомого звена CD задан в виде зависимости его угла поворота ψ также от времени t, т. е.

$$\psi = \psi(t). \tag{25.2}$$

Исключая из уравнений (25.1) и (25.2) время t, получаем *функцию положений*:

$$\psi = \psi(\alpha). \tag{25.3}$$

Связь между углами α и ψ устанавливается через размеры звеньев механизма, которые мы называем *параметрами кинематической схемы механизма* или сокращенно *параметрами механизма*. Следовательно, чтобы удовлетворить условию (25.3), необходимо соответствующим образом подобрать параметры механизма. Для шарнирного четырехзвенника, показанного на рис. 25.8, число независимых параметров можно считать равным шести. Это длины l_1, l_2, l_3 и l_4 звеньев, начальное значение α_0 угла α и угол φ, образованный стойкой AD с осью Ax. Если определить только относительные размеры звеньев, то можно принять

$$\frac{l_1}{l_1} = 1, \quad \frac{l_2}{l_1} = d, \quad \frac{l_3}{l_1} = l, \quad \frac{l_4}{l_1} = r.$$

Таким образом, имеем пять параметров механизма: d, l, r, φ и α_0, подлежащих определению. Если заданы отдельные положения звеньев AB и CD углами α_1, α_2, α_3,..., α_m и ψ_1, ψ_2, ψ_3,..., ψ_m, образуемыми звеньями AB и CD с осью Ax (рис. 25.8), то мы получим, согласно зависимости (25.3), следующую систему уравнений:

$$\psi_1 = \psi(\alpha_1), \quad \psi_2 = \psi(\alpha_2), \quad \psi_3 = \psi(\alpha_3), \quad \ldots, \quad \psi_m = \psi(\alpha_m). \tag{25.4}$$

Если число уравнений (25.4) равно числу параметров, подлежащих определению, то задача теоретически может быть полностью решена. В практических задачах вследствие трудности совместного решения уравнений (25.4) обычно некоторыми параметрами задаются. В связи с этим число m пар заданных соответственных значений углов α и ψ выбирается равным числу параметров, подлежащих определению. В указанной постановке задача о воспроизведении заданного закона движения носит название *задачи о положениях*.

7°. При проектировании передаточных механизмов контрольно-измерительных приборов и механизмов для выполнения математических операций (см., например, показанный на рис. 25.3) встречается необходимость воспроизвести заданный закон движения в форме некоторой зависимости

$$\psi = \psi(\alpha). \tag{25.5}$$

При этом ставится требование, чтобы эта зависимость удовлетворялась на больших интервалах углов поворота звеньев AB и CD (рис. 25.8) и давала бы непрерывное изменение функции (25.5) так, как это показано, например, на рис. 25.9. В этом случае задача может быть также сведена к задаче о положениях, но так как число положений $1, 2, 3, \ldots, m$ (рис. 25.9) должно быть достаточно большим, то число уравнений вида (25.4) будет значительно больше числа вычисляемых параметров механизма. В этом случае эти параметры подбираются так, чтобы зависимость (25.5) выполнялась приближенно. При этом отклонение от требуемого закона движения не должно выходить за пределы допускаемого.

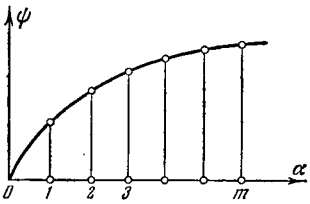


Рис. 25.9. Диаграмма заданной зависимости угла поворота коромысла от угла поворота кривошипа механизма шарнирного четырехзвенника.

В такой постановке эта задача проектирования может быть названа *задачей о приближенном воспроизведении заданного закона движения*. Отметим, что закон движения может быть также задан и в виде *передаточной функции* i_{31}:

$$i_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{d\psi}{d\alpha}, \qquad (25.6)$$

где ω_1 — угловая скорость звена 1 (рис. 25.8) и ω_3 — угловая скорость звена 3.

Если известны начальные значения α_0 и ψ_0 углов α и ψ, то зависимость (25.6) может быть приведена к зависимости (25.5), если произвести интегрирование зависимости (25.6) с учетом заданных начальных условий.

§ 110. Проектирование механизмов по заданным положениям звеньев

1°. Рассмотрим задачу о проектировании механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 25.10) по заданным положениям его звеньев.

Если для упрощения задачи предположить, что неподвижные шарниры A и D расположены по оси Ax, от которой ведется отсчет углов α и ψ (рис. 25.10), и принять угол φ (рис. 25.8) равным нулю, то при заданных длинах звеньев всякому заданному значению α_i угла α соответствует вполне определенное значение ψ_i угла ψ, а поэтому число параметров механизма, подлежащих определению, равно трем (см. § 109, *6°*). Это — параметры l, r и d, соответственно равные

$$l = \frac{l_3}{l_2}, \quad r = \frac{l_4}{l_2} \quad \text{и} \quad d = \frac{l_1}{l_2}.$$

Следовательно, если будут заданы три положения звена AB (рис. 25.11) углами α_1, α_2, α_3 и три соответствующих им положения звена CD углами ψ_1, ψ_2 и ψ_3, то всегда могут быть определены параметры l, r и d, так как число уравнений вида (25.4) будет равно числу этих параметров.

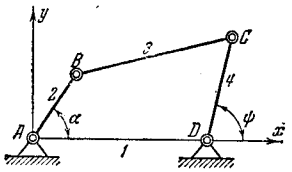


Рис. 25.10. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по заданным положениям кривошипа и коромысла.

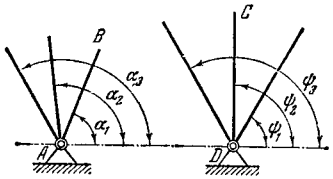


Рис. 25.11. Заданные положения кривошипа и коромысла механизма шарнирного четырехзвенника.

2°. Поставленная задача может быть решена следующим образом. Представим стороны шарнирного четырехзвенника (рис. 25.12) в виде векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{d}$, причем $i = 1$. Тогда имеем

$$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{l}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{r}. \tag{25.7}$$

Проектируем обе части уравнения (25.7) на оси Ax и Ay. Обозначая угол, образованный шатуном BC с осью Ax, через δ, получаем для произвольного i-го положения механизма уравнения проекций на оси Ax и Ay в виде

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_i+l\cos\delta_i&=d+r\cos\psi_i,\\ \sin\alpha_i+l\sin\delta_i&=r\sin\psi_i\end{aligned}\right\} \tag{25.8}$$

или

$$\left.\begin{aligned}l\cos\delta_i&=d+r\cos\psi_i-\cos\alpha_i,\\ l\sin\delta_i&=r\sin\psi_i-\sin\alpha_i.\end{aligned}\right\} \tag{25.9}$$

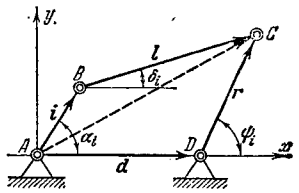


Рис. 25.12. Проектирование схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям кривошипа и коромысла.

Возводим почленно уравнения (25.9) в квадрат и складываем их. Тогда получаем

$$l^2=d^2+r^2+1+2dr\cos\psi_i-2d\cos\alpha_i-2r\cos(\psi_i-\alpha_i). \tag{25.10}$$

Переносим l^2 в правую часть уравнения (25.10) и делим все члены уравнения на $2d$. Решая уравнение относительно $\cos\alpha_i$, получаем

$$\cos\alpha_i=r\cos\psi_i-\frac{r}{d}\cos(\psi_i-\alpha_i)+\frac{d^2+r^2+1-l^2}{2d}. \tag{25.11}$$

Введем обозначения:

$$p_0=r,\quad p_1=-\frac{r}{d},\quad p_2=\frac{d^2+r^2+1-l^2}{2d}. \tag{25.12}$$

Тогда уравнение (25.11) предетавится так:

$$\cos\alpha_i = p_0\cos\psi_i + p_1\cos(\psi_i - \alpha_i) + p_2. \qquad (25.13)$$

Подставляя в равенство (25.13) заданные углы α_1, α_2, α_3 и ψ_1, ψ_2 и ψ_3 (рис. 25.12), получаем систему, состоящую из трех линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_1 &= p_0\cos\psi_1 + p_1\cos(\psi_1 - \alpha_1) + p_2,\\ \cos\alpha_2 &= p_0\cos\psi_2 + p_1\cos(\psi_2 - \alpha_2) + p_2,\\ \cos\alpha_3 &= p_0\cos\psi_3 + p_1\cos(\psi_3 - \alpha_3) + p_2.\end{aligned}\right\} \qquad (25.14)$$

Решая совместно эту систему уравнений, определяем из нее величины p_0, p_1 и p_2. Определив эти величины, можно с помощью соотношений (25.12) найти искомые параметры l, r и d.

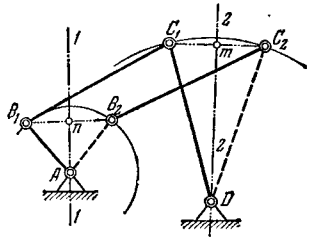


Рис. 25.13. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по двум заданным положениям шатуна.

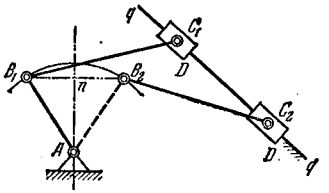


Рис. 25.14. К проектированию схемы кривошипно-ползунного механизма по двум заданным положениям шатуна.

Если требуется спроектировать механизм по двум положениям звеньев AB и CD, то одним из параметров механизма можно задаться произвольно, и задача будет иметь бесчисленное количество возможных решений.

3°. Перейдем теперь к рассмотрению графических методов решения задач о синтезе механизмов шарнирного четырехзвенника по двум и трем заданным положениям его звеньев. Эти задачи могут быть решены с помощью элементарных геометрических построений.

Пусть заданы два положения B_1C_1 и B_2C_2 шатуна шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 25.13). Требуется найти положение точек A и D — центров вращения звеньев четырехзвенника, входящих в кинематические пары со стойкой. Точки B_1 и B_2 должны лежать на окружности с центром в A, а точки C_1 и C_2 — на окружности с центром в D. Через две точки можно провести бесчисленное множество окружностей. Геометрическим местом центров этих окружностей является прямая $1-1$, перпендикулярная к отрезку B_1B_2 и проходящая через середину n этого отрезка. Точку A можно поместить в любой точке прямой $1-1$. Анало-

гично точка D может быть выбрана в любом месте прямой $2-2$, перпендикулярной к отрезку C_1C_2 и проходящей через его середину m. Таким образом, для указанного задания можно построить бесчисленное множество механизмов, удовлетворяющих заданным условиям. Дополнительные ограничения могут быть наложены, если, например, поставить условие, чтобы механизм был двухкривошипный или кривошипно-коромысловый и т. д.

Если требуется, чтобы одна из точек звена BC, например точка C, перемещалась по неподвижной прямой $q-q$, то центр D окружности должен находиться в бесконечности, вращательная пара D переходит в поступательную пару (рис. 25.14), и мы получаем кривошипно-ползунный механизм.

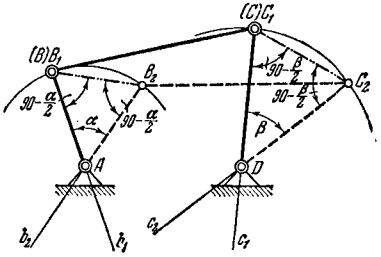


Рис. 24.15. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по двум заданным положениям шатуна и дополнительно заданным углам между положениями кривошипа и коромысла.

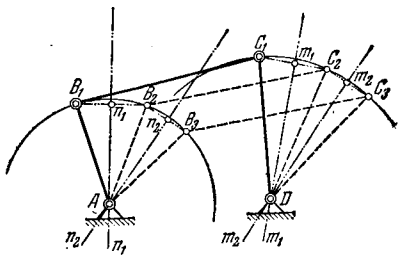


Рис. 25.16. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям шатуна.

Можно потребовать дополнительно, чтобы при заданном перемещении шатуна BC углы поворота звеньев AB и DC были также заданными, например, чтобы угол поворота звена AB равнялся α, а угол поворота звена DC равнялся β (рис. 25.15). Тогда соединяем точки B_1 и B_2 прямой и откладываем при точках B_1 и B_2 углы, равные $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Точка пересечения A прямых B_1b_1 и B_2b_2 и определит положение оси A вращения звена AB. Точно так же, если соединить точки C_1 и C_2, при этих точках отложить углы $90^\circ - \frac{\beta}{2}$, то точка D пересечения прямых C_1c_1 и C_2c_2 определит положение оси вращения D звена DC.

4°. Пусть, далее, требуется построить шарнирный четырехзвенник, если заданы три положения шатуна BC, например положения B_1C_1, B_2C_2 и B_3C_3 (рис. 25.16). Задача сводится к нахождению центра окружности, проходящей через три заданные точки. Как известно, эта задача имеет только одно решение. Имеем точки B_1, B_2 и B_3. Соединим прямыми точки B_1 и B_2, в середине отрезка B_1B_2 восставим перпендикуляр $n_1 - n_1$. Далее, соединим точки B_2

и B_3 и в середине отрезка B_2B_3 восставим перпендикуляр $n_2 - n_2$. Положение центра A получится на пересечении перпендикуляров $n_1 - n_1$ и $n_2 - n_2$. Аналогично на пересечении перпендикуляров $m_1 - m_1$ и $m_2 - m_2$ определяется положение центра D. Если точки

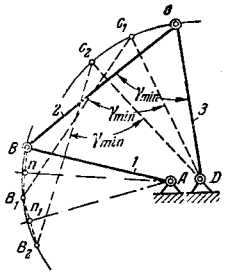


Рис. 25.17. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям коромысла и заданным углам передачи в заданных положениях.

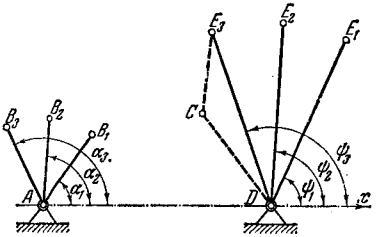


Рис. 25.18. К проектированию схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям кривошипа и коромысла.

C_1, C_2 и C_3 заданы на прямой, то звено CD выполняется в виде ползуна, как это было выяснено для случая, показанного на рис. 25.14.

Тем же методом может быть решена и задача о синтезе схемы шарнирного четырехзвенника по трем положениям ведомого коромысла или ползуна. В самом деле, если заданы три положения DC, DC_1 и DC_2 коромысла 3 (рис. 25.17), то можно еще задаться тремя произвольными положениями CB, C_1B_1, C_2B_2 шатуна BC относительно коромысла DC. Зададимся углами передачи γ, γ_1 и γ_2, образуемыми шатуном и коромыслом, удовлетворяющими условию $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{min}$ (см. § 87,3°). Тогда определится положение точек B, B_1 и B_2 звена AB. Нахождение точки A и длины звена AB сведется к построению окружности, проходящей через точки B, B_1 и B_2.

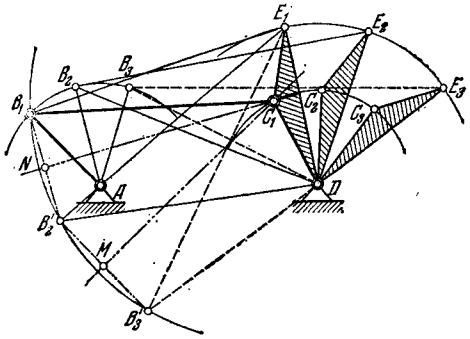


Рис. 25.19. Построение схемы механизма шарнирного четырехзвенника по трем заданным положениям кривошипа и коромысла.

5°. Рассмотрим теперь тот случай синтеза схемы шарнирного четырехзвенного механизма, когда заданы три положения двух его звеньев. Пусть, например (рис. 25.18), заданы положения звена 1,

занимающего последовательно положения AB_1, AB_2 и AB_3, определяемые углами α_1, α_2 и α_3, и заданы положения плоскости, принадлежащей звену *3*. Положение этой плоскости задано в виде трех последовательных положений прямой DE, принадлежащей плоскости. Пусть прямая DE занимает последовательно положения DE_1, DE_2 и DE_3, определяемые углами ψ_1, ψ_2 и ψ_3. Требуется определить длину шатуна BC, входящего в кинематические пары B и C со звеньями *1* и *3*. Предположим, что шатун *2* входит со звеном AB в кинематическую пару с осью B. Тогда необходимо найти положение оси C вращательной кинематической пары, в которую входят шатун *2* и звено *3*. Рассмотрим положение точки B звена AB относительно прямой DE_1 (рис. 25.19). В первом положении точка B образует с прямой BE_1 треугольник DE_1B_1, во втором положении — треугольник DB_2E_2 и в третьем положении — треугольник DB_3E_3. Теперь, чтобы найти положение точки B относительно прямой DE_1, остановим эту прямую. Тогда первое относительное положение точки B совпадет с ее абсолютным положением B_1. Вторым относительным положением точки B будет положение B_2', которое найдем, если сторону DE_2 треугольника DB_2E_2 совместим с DE_1. Тогда вершина B_2 треугольника займет положение B_2'. Третье относительное положение точки B — положение B_3' — построим, если сторону DE_3 треугольника DB_3E_3 совместим с DE_1. В этом случае вершина B_3 треугольника займет положение B_3'.

В движении относительно прямой DE точка B последовательно занимает положения B_1, B_2' и B_3'. Так как в рассматриваемом относительном движении точка C_1 шатуна *2* остается неподвижной, а точка B занимает положения B_1, B_2' и B_3', то точка C_1 должна быть центром окружности, проходящей через точки B_1, B_2' и B_3'. Положение точки C определим обычным путем. Соединим точки B_1, B_2' и B_3' прямыми и из середин N и M отрезков B_1B_2' и $B_2'B_3'$ проведем перпендикуляры NC_1 и MC_1. Точка C_1 пересечения этих перпендикуляров и определит положение оси вращательной кинематической пары C_1 в первом положении механизма.

Таким образом, требуемая схема шарнирного четырехзвенного механизма является фигурой AB_1C_1D. При трех заданных положениях звена *1* и плоскости, принадлежащей звену *3*, решение получается единственным. При двух заданных положениях точка C может быть выбрана в любой точке перпендикуляра, восставленного в середине отрезка, соединяющего соответствующие положения точки B.

6°. Аналогично решается задача, если потребуется спроектировать схему кривошипно-ползунного механизма. Пусть заданы три положения плоскости кривошипа в виде трех последовательных положений AE_1, AE_2 и AE_3 прямой AE, принадлежащей этой плоскости, и три положения ползуна C_1, C_2 и C_3 (рис. 25.20).

Соединяем точки E_1, E_2 и E_3 прямыми с точками C_1, C_2 и C_3. Получаем тогда треугольники AE_1C_1, AE_2C_2 и AE_3C_3. За начальное положение берем положение кривошипа, определяемое прямой AE_1. Пусть кривошип входит в кинематическую пару с шатуном в точке

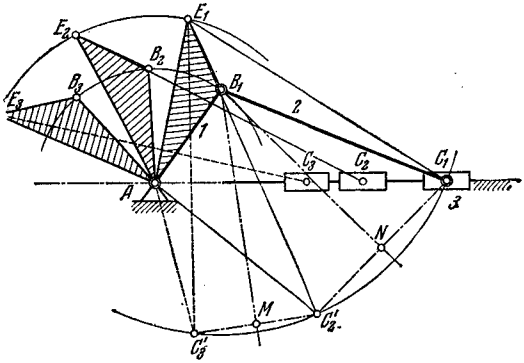


Рис. 25.20. Построение схемы кривошипно-ползунного механизма по трем заданным положениям кривошипа и ползуна.

B. Для определения положения точки B строим на отрезке AE_1 треугольники $AE_1C'_2$ и $AE_1C'_3$, соответственно равные треугольникам AE_2C_2 и AE_3C_3. Искомая точка B должна быть центром окружности, проходящей через точки C_1, C'_2 и C'_3. Для ее определения соединяем прямыми точку C_1 с точкой C'_2 и точку C'_2 с точкой C'_3 и из середины отрезков $C_1C'_2$ и $C'_2C'_3$ восставляем перпендикуляры NB_1 и MB_1. Точка B_1 пересечения этих перпендикуляров и определит положение оси вращательной пары B, в которую входят кривошип *1* и шатун *2*. Таким образом, требуемая схема механизма является фигурой AB_1C_1.

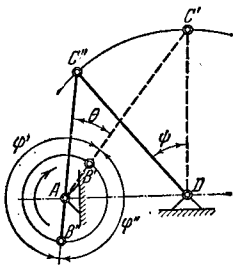


Рис. 25.21. К решению задачи о проектировании схемы механизма шарнирного четырехзвенника по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена.

В настоящее время вопросы проектирования механизмов с низшими парами значительно развиты. В частности, решены задачи о проектировании механизмов с низшими парами, звенья которых занимают четыре и пять заданных положений, и многие другие задачи точного и приближенного синтеза механизмов [1]).

7°. Рассмотрим еще задачу о синтезе схемы шарнирного четырехзвенника по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена. Пусть четырехугольник $ABCD$ имеет ведущим звеном кривошип AB (рис. 25.21). Крайними положениями

[1]) См. Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А., Синтез плоских механизмов, Физматгиз, 1959.

коромысла пусть будут положения DC' и DC''. В этих положениях центры кривошипа AB и шатуна BC располагаются по одной прямой. Тогда при переходе коромысла из положения DC' в положение DC'' кривошип поворачивается на угол φ'', а при переходе из положения DC'' в положение DC' — на угол φ'. Если кривошип AB вращается с постоянной угловой скоростью, то отношение углов поворота φ' и φ'' равно

$$\frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{t'}{t''}, \tag{25.15}$$

где t' и t'' суть промежутки времени, за которые кривошип AB поворачивается соответственно на углы φ' и φ''. За время t' и t'' точка C пройдет пути, равные дугам

$$\cup C''C' = \cup C'C''. \tag{25.16}$$

Очевидно, что средние скорости точки C при прохождении дуг $C''C'$ и $C'C''$ не будут равны. Величина средней скорости v'' при переходе точки C из положения C' в положение C'' равна

$$v'' = \frac{\cup C'C''}{t''}, \tag{25.17}$$

а величина средней скорости v' при переходе точки C из положения C'' в положение C' равна

$$v' = \frac{\cup C''C'}{t'}. \tag{25.18}$$

Разделив равенство (25.17) на (25.18) и приняв во внимание равенства (25.15) и (25.16), получим

$$\frac{v''}{v'} = \frac{t'}{t''} = \frac{\varphi'}{\varphi''} = K.$$

Величина K носит название *коэффициента изменения средней скорости ведомого звена*. Из рис. 25.21 видно, что величина коэффициента K равна

$$K = \frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}. \tag{25.19}$$

Из формулы (25.19) можно определить значение угла θ, образованного направлениями AC' и AC'':

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1}. \tag{25.20}$$

С задачей синтеза механизма по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена мы встречаемся в тех случаях, когда требуется, чтобы движение ведомого звена происходило с различными скоростями во время прямого и обратного

ходов. Например, с таким заданием можно встретиться при проектировании механизма строгального станка, механизма грохота и других механизмов, где требуется, чтобы средняя скорость в период прямого (рабочего) хода ведомого звена была меньше, чем в период его обратного (холостого) хода.

8°. Синтез схемы механизма шарнирного четырехзвенника по заданному коэффициенту K может быть выполнен следующим образом. По заданному K вычисляем, пользуясь формулой (25.20), угол θ. Далее строим заданные крайние положения DC' и DC'' коромысла DC (рис. 25.22). Пусть они образуют некоторый угол ψ. Точки C' и C'' соединяем прямой и на отрезке $C'C''$, как на хорде, строим дугу, вмещающую угол θ. Для этого в точке C'' восставляем перпендикуляр $C''n$ к отрезку $C''C'$ и при точке C' строим угол $90° - \theta$. Тогда угол $C''AC'$ будет равен θ. Через точки C', C'' и A проводим окружность L. Центр вращения кривошипа AB может быть выбран в любой точке на окружности L. В самом деле, соединив прямыми любую точку этой дуги с точками C' и C'', мы получим угол между этими прямыми, равный θ. Пусть, например, центром вращения кривошипа выбрана точка A_1. Тогда отрезки A_1C'' и A_1C' будут равны

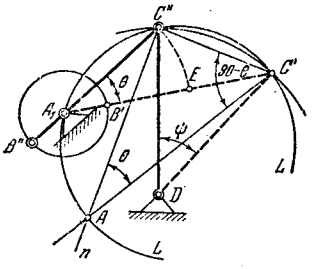


Рис. 25.22. Построение схемы механизма шарнирного четырехзвенника по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена.

$$A_1C'' = l - r \quad \text{и} \quad A_1C' = l + r,$$

где r и l суть длины кривошипа AB и шатуна BC. Из этих уравнений следует:

$$A_1C' - A_1C'' = 2r,$$

или

$$r = A_1B = \frac{A_1C' - A_1C''}{2}.$$

Из точки A_1 проводим дугу радиусом A_1C'' до пересечения с линией A_1C' в точке E. Тогда отрезок EC' получается равным $2r$, откуда

$$r = \frac{EC'}{2}.$$

Откладываем от точки A_1 на прямой A_1C' отрезок A_1B', равный $EC'/2$, а на продолжении прямой A_1C'' — отрезок A_1B'', также равный $EC'/2$. Тогда получаем четырехзвенный шарнирный механизм, обладающий заданным коэффициентом K.

Так как в качестве центра вращения звена AB могут быть выбраны различные точки окружности L, то можно налагать на размеры звеньев механизма дополнительные условия, например, можно задаться длиной одного из звеньев механизма и т. д.

9°. Аналогично может быть решена задача о синтезе схемы кривошипно-ползунного механизма по заданному коэффициенту K. Для этого по заданному коэффициенту K определяем угол θ. Далее на оси x — x движения ползуна C (рис. 25.23) намечаем положения C' и C'' ползуна. В точке C' восставляем перпендикуляр $C'n$. При точке C'' откладываем угол $90° - \theta$. Тогда определится положение точки N — одной из точек дуги, вмещающей угол θ. Проводим через точки C', N и C'' окружность L. Центром вращения звена AB

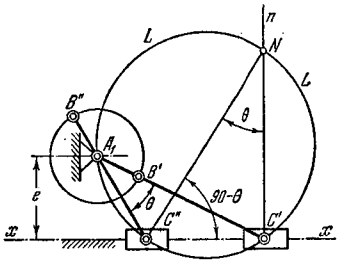


Рис. 25.23. Построение схемы кривошипно-ползунного механизма по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена.

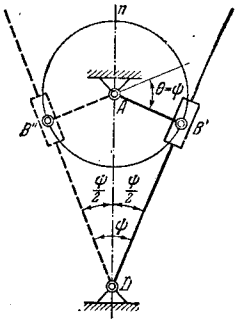


Рис. 25.24. К проектированию схемы кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена.

может быть выбрана любая точка окружности L. На рис. 25.23 в качестве центра вращения звена AB выбрана точка A_1. Тогда аналогично ранее рассмотренному построению определится длина кривошипа AB и длина шатуна BC. В качестве дополнительного условия можно задать, например, размер e дезаксиала.

В заключение рассмотрим механизм с качающейся кулисой. Из рис. 25.24 непосредственно следует, что угол θ равен углу ψ поворота кулисы. Следовательно, при синтезе кулисного механизма коэффициент K определяется заданным углом ψ качания кулисы, т. е.

$$K = \frac{180° + \psi}{180° - \psi}. \qquad (25.21)$$

Этому значению K удовлетворяют различные точки прямой Dn, делящей угол ψ пополам. В качестве дополнительного условия может быть, например, задано расстояние AD между точками A и D. При выборе расстояния AD необходимо соблюдать условие, чтобы оно было больше радиуса кривошипа AB.

§ 111. Условия существования кривошипа в четырехзвенных механизмах

1°. Вопрос о соотношениях между длинами звеньев четырехзвенных механизмов имеет весьма большое значение при синтезе этих механизмов. Поэтому необходимо выяснить, каковы эти соотношения у четырехзвенных механизмов, выполняющих различные заданные движения.

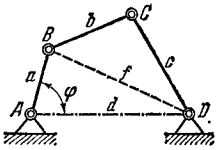


Рис. 25.25. К определению условий возможности существования кривошипа у механизма шарнирного четырехзвенника.

Связь между размерами звеньев четырехзвенных механизмов и их движением может быть представлена математически в виде некоторых неравенств.

Пусть дан механизм шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 25.25), у которого длины звеньев обозначены через a, b, c и d. Требуется выяснить, при каких условиях звено AB будет кривошипом, т. е. будет проворачиваться на угол 360°, если принято, что $a < b < c < d$. Соединим точки B и D прямой и обозначим расстояние BD через f. Тогда из треугольника ABD следует:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi, \tag{25.22}$$

а из треугольника BCD имеем:

$$b + c \geqslant f \geqslant c - b. \tag{25.23}$$

Из выражения (25.22) получаем

$$\frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad} = \cos\varphi.$$

Принимая во внимание неравенства (25.23), имеем

$$\frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2ad} \leqslant \cos\varphi, \tag{25.24}$$

$$\frac{a^2 + d^2 - (c-b)^2}{2ad} \geqslant \cos\varphi. \tag{25.25}$$

Если звено a поворачивается на угол 360°, то угол φ принимает значения от 0 до 360° и $\cos\varphi$ меняется в пределах от $+1$ до -1. Так как левая часть неравенства (25.24) должна быть меньше наименьшего значения $\cos\varphi$, а левая часть неравенства (25.25) должна быть больше наибольшего значения $\cos\varphi$, то

$$\frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2ad} \leqslant -1, \quad \frac{a^2 + d^2 - (c-b)^2}{2ad} \geqslant +1.$$

Из этих неравенств имеем

$$a^2 + d^2 - b^2 - 2bc - c^2 \leqslant -2ad,$$
$$a^2 + d^2 - b^2 + 2bc - c^2 \geqslant +2ad.$$

Отсюда перенесением членов получаем

$$a^2+2ad+d^2\leqslant b^2+2bc+c^2,$$
$$a^2-2ad+d^2\geqslant b^2-2bc+c^2,$$

или

$$(a+d)^2\leqslant(b+c)^2,\qquad (d-a)^2\geqslant(b-c)^2,$$

или окончательно

$$d+a\leqslant b+c, \tag{25.26}$$
$$d-a\geqslant b-c. \tag{25.27}$$

Неравенство (25.27) может быть представлено так:

$$d+c\geqslant a+b,$$

но последнее неравенство вытекает из принятого ранее условия $a<b<c<d$, т. е. неравенство (25.27) не дает никаких новых условий.

Из неравенства (25.26) следует: *чтобы в шарнирном четырехзвеннике, у которого стороны удовлетворяют условию* $a<b<c<d$, *звено* a *было кривошипом, необходимо, чтобы сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев была меньше или равна сумме длин двух других звеньев.*

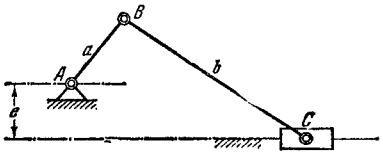


Рис. 25.26. К определению условий возможности существования кривошипа у кривошипно-ползунного механизма.

2°. Аналогичными рассуждениями могут быть найдены необходимые соотношения между звеньями шарнирного четырехзвенника и для всех других случаев, как, например, когда требуется, чтобы звено c было кривошипом или чтобы одновременно звенья a и c были кривошипами и т. д. Решение для всех случаев сводится к решению соответствующих треугольников.

С помощью условий (25.26) и (25.27) можно показать, что если в механизме, у которого $a<b<c<d$ (рис. 25.25), сделать неподвижным звено b и d, то получим кривошипно-коромысловый механизм. Если неподвижным сделать наименьшее звено a, то механизм будет двухкривошипным, и, наконец, если неподвижным сделать звено c, то механизм превращается в двухкоромысловый.

Анализ всех возможных случаев расположения звеньев шарнирного четырехзвенника приводит к общему условию, которое может быть сформулировано так.

Все шарнирные четырехзвенники распределяются по двум группам. К первой относятся те, у которых сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев меньше или равна сумме длин двух других

звеньев; ко второй — в которых эта сумма больше суммы остальных. Механизмы первой группы при постановке на наименьшее звено представляют собой двухкривошипные механизмы, при постановке на звено, смежное с наименьшим, — кривошипно-коромысловые, причем кривошипом служит наименьшее звено, а при постановке на звено, противоположное наименьшему, — двухкоромысловые. Механизмы второй группы все двухкоромысловые.

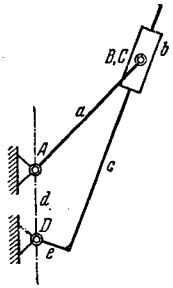


Рис. 25.27. К определению условий возможности существования кривошипа у кулисного механизма с вращающейся кулисой.

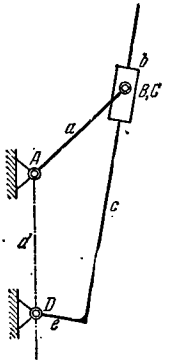


Рис. 25.28. К определению условий возможности существования кривошипа у кулисного механизма с качающейся кулисой.

3°. Если, подобно шарнирному четырехзвеннику, написать соотношение между размерами звеньев кривошипно-ползунного механизма (рис. 25.26), то получим, что звено *a* будет кривошипом, если

$$a < b - e,$$

где *e* есть дезаксиал. Звено *a* будет коромыслом, если

$$a > b - e.$$

Наконец, для кулисного механизма (рис. 25.27 и 25.28) из очевидных геометрических соображений следует, что звено *c* (кулиса) будет кривошипом, если

$$a > d + e.$$

Кулиса *c* будет коромыслом, когда

$$a < d + e.$$

В первом случае мы получаем так называемый *механизм вращающейся кулисы* (рис. 25.27); во втором случае мы получаем *механизм качающейся кулисы* (рис. 25.28).

§ 112. Определение ошибок механизмов

1°. В рассмотренных задачах синтеза механизмов мы определили параметры механизмов, удовлетворяющие заданным законам движения, отдельным динамическим характеристикам и выбранной структуре. Спроектированные кинематические схемы механизмов можно назвать теоретическими схемами или теоретическими механизмами, так как при подборе параметров в теоретических схемах механизмов принималось, что все элементы кинематических пар являются геометрически точно выполненными, отсутствуют зазоры в кинематических парах, размеры всех звеньев не отклоняются от

спроектированных, оси кинематических пар расположены так, как это предусмотрено структурой механизмов.

В реально построенных механизмах действительные их параметры могут отличаться от теоретических вследствие неточности изготовления звеньев и элементов кинематических пар, неточности монтажа механизмов, износа элементов кинематических пар при работе механизмов и т. д.

Отклонение действительных параметров от теоретических носит название *ошибки механизма*. Учет всех возможных ошибок реальных механизмов представляет весьма сложную задачу, так как эти ошибки зависят от технологии изготовления деталей механизмов, условий сборки звеньев механизмов, условий его эксплуатации и т. д. Раздел теории механизмов, занимающийся исследованием ошибок механизмов, происходящих от различных факторов, исследованием влияния этих ошибок на кинематику и динамику механизмов и синтезом механизмов с учетом возможных ошибок, носит название *теории точности механизмов*.

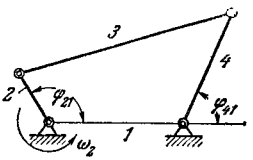


Рис. 25.29. К определению зависимости угла наклона коромысла от длин звеньев механизма шарнирного четырехзвенника.

В настоящем параграфе мы рассмотрим только вопрос о том, как можно для простейших механизмов определять основные возможные ошибки.

2°. Назовем ошибкой положения механизма разницу положений ведомых звеньев действительного и соответствующего теоретического механизмов *при одинаковых положениях* ведущих звеньев обоих механизмов. *Ошибкой перемещения* тогда можно назвать разницу перемещений ведомых звеньев действительного и теоретического механизмов *при одинаковых перемещениях* ведущих звеньев обоих механизмов. Рассмотрим вопрос о том, как могут быть определены ошибки положений механизма. Если известны параметры $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ теоретического механизма, то параметр p, определяющий положение ведомого звена, будет всегда некоторой функцией от параметров $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$, т. е.

$$p = p(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m). \qquad (25.28)$$

Например, для механизма шарнирного четырехзвенника (рис. 25.29), у которого ведущим является кривошип *2*, за параметр p может быть принят угол φ_{41}, образованный звеном *4* со стойкой *1*. Параметрами $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ могут быть длины l_1, l_2, l_3, l_4 звеньев, и функция (25.28) будет иметь вид

$$\varphi_{41} = \varphi_{41}(l_1, l_2, l_3, l_4). \qquad (25.29)$$

В действительном механизме параметры $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ могут отличаться от теоретических их значений на малые вели-

чины Δq_1, Δq_2, Δq_3, ..., Δq_m. Следовательно, и параметр p будет также отличаться на некоторую величину Δp, и для действительного механизма будем иметь

$$p+\Delta p=f[(q_1+\Delta q_1),\ (q_2+\Delta q_2),\ \ldots,\ (q_m+\Delta q_m)]. \quad (25.30)$$

Разлагая правую часть равенства (25.30) в ряд Тейлора и ограничиваясь ввиду малости величин Δq_1, Δq_2, Δq_3, ..., Δq_m членами первого порядка, получаем

$$p+\Delta p=p+\frac{\partial f}{\partial q_1}\Delta q_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}\Delta q_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial q_m}\Delta q_m, \quad (25.31)$$

или

$$\Delta p=\frac{\partial f}{\partial q_1}\Delta q_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}\Delta q_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial q_m}\Delta q_m. \quad (25.32)$$

Это выражение дает величину суммарной ошибки положения Δp ведомого звена как сумму ошибок, возникающих вследствие отклонений параметров действительного механизма от теоретического. Если для каких-нибудь двух положений ведущего звена определены ошибки положения $(\Delta p)_1$ и $(\Delta p)_2$, то ошибка перемещения на этом интервале будет равна разности ошибок положений, т. е.

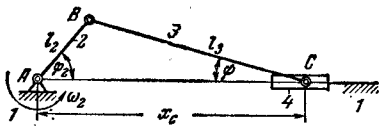


Рис. 25.30. К определению ошибки положения ползуна кривошипно-ползунного механизма.

$$(\Delta p)_{1-2}=(\Delta p)_2-(\Delta p)_1. \quad (25.33)$$

3°. Рассмотрим вопрос о том, как могут быть определены ошибки положения механизмов, происходящие от ошибок в длине их звеньев. Пусть, например, требуется определить ошибку положения $(\Delta x_C)_{l_3}$ точки C ползуна (рис. 25.30) кривошипно-ползунного механизма ABC, происходящую от ошибки Δl_3 в длине l_3 шатуна *3*. Как это было показано в § 24, координата x_C, определяющая положение точки C, равна

$$x_C=l_2\cos\varphi_2+\sqrt{l_3^2-l_2^2\sin^2\varphi_2}. \quad (25.34)$$

Согласно равенству (25.32) имеем

$$(\Delta x_C)_{l_3}=\frac{\partial x_C}{\partial l_3}\Delta l_3. \quad (25.35)$$

Величина частной производной $\frac{\partial x_C}{\partial l_3}$ равна

$$\frac{\partial x_C}{\partial l_3}=\frac{l_3}{\sqrt{l_3^2-l_2^2\sin^2\varphi_2}}. \quad (25.36)$$

Подставляя в равенство (25.35) выражение (25.36), получаем

значение ошибки положения $(\Delta x_C)_{l_3}$:

$$(\Delta x_C)_{l_3} = \Delta l_3 \frac{l_3}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \varphi_2}}. \tag{25.37}$$

Аналогично может быть найдена ошибка положения $(\Delta x_C)_{l_2}$, происходящая от ошибки Δl_2 в длине l_2 кривошипа 2. Имеем

$$(\Delta x_C)_{l_2} = \frac{\partial x_C}{\partial l_2} \Delta l_2. \tag{25.38}$$

Величина частной производной $\frac{\partial x_C}{\partial l_2}$ равна

$$\frac{\partial x_C}{\partial l_2} = \cos \varphi_2 - \frac{l_2 \sin^2 \varphi_2}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \varphi_2}}. \tag{25.39}$$

Следовательно,

$$(\Delta x_C)_{l_2} = \Delta l_2 \left(\cos \varphi_2 - \frac{l_2 \sin^2 \varphi_2}{\sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \varphi_2}} \right). \tag{25.40}$$

Суммарная ошибка положения Δx_C точки C, согласно равенству (25.32), равна

$$\Delta x_C = (\Delta x_C)_{l_2} + (\Delta x_C)_{l_3}. \tag{25.41}$$

4°. Как это было показано выше, во многих случаях аналитические выражения для перемещений теоретических механизмов

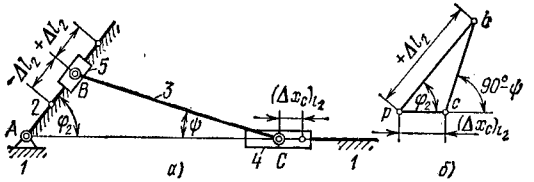


Рис. 25.31. Преобразованный кривошипно-ползунный механизм с изменяющейся длиной кривошипа; *а*) схема механизма; *б*) план малых перемещений.

являются сложными. Поэтому для определения ошибок положения можно использовать метод планов малых перемещений для преобразованных механизмов.

Пусть, например, требуется определить ошибку положения $(\Delta x_C)_{l_2}$ точки C от ошибки в длине l_2 кривошипа 2 (рис. 25.31). Ошибку можно определить, если считать, что точка B может переместиться (рис. 25.31, *а*) вдоль оси AB звена 2 на величину $\pm \Delta l_2$. В зависимости от того, увеличивает ли ошибка Δl_2 длину l_2 звена 2 или ее уменьшает, мы как бы останавливаем кривошип 2 и вводим дополнительный ползун 5, который может скользить вдоль оси AB кривошипа 2. Такой механизм называется *преобразованным механиз-*

мом. Если теперь сообщить ползуну *5* перемещение, например $+\Delta l_2$, то перемещение (Δx_C) можно найти, если построить план малых перемещений (рис. 25.31, *б*), как обыкновенный план аналогов скоростей. На этом плане отрезок (pb) пропорционален Δl_2, а отрезок (pc) пропорционален $(\Delta x_C)_{l_2}$. Естественно, что из-за малости величин ошибок планы малых перемещений надо строить, применяя соответствующие масштабы и откладывая отрезок (pb), пропорциональный Δl_2, в соответствующем направлении в зависимости от его знака.

Из треугольника *pbc* (рис. 25.31, *б*) можно получить аналитическое выражение (25.30) для ошибки $(\Delta x_C)_{l_3}$.

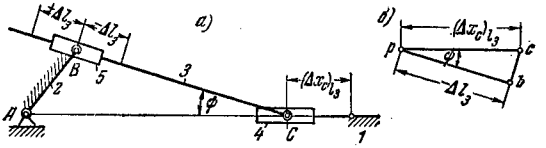


Рис. 25.32. Преобразованный кривошипно-ползунный механизм с изменяющейся длиной шатуна: *а*) схема механизма; *б*) план малых перемещений.

На рис. 25.32, *а* показан преобразованный механизм для определения ошибки $(\Delta x_C)_{l_3}$, происходящей от ошибки Δl_3 в длине звена *3*. Если принять, что ошибка Δl_3 имеет знак минус, то план малых перемещений будет иметь вид, показанный на рис. 25.32, *б*. Ошибки $(\Delta x_C)_{l_2}$ и $(\Delta x_C)_{l_3}$ в случаях, показанных на рис. 25.31, *а* и на рис. 25.32, *а*, имеют один и тот же знак. Следовательно, суммарная ошибка Δx_C равна

$$\Delta x_C = (\Delta x_C)_{l_2} + (\Delta x_C)_{l_3}. \quad (25.42)$$

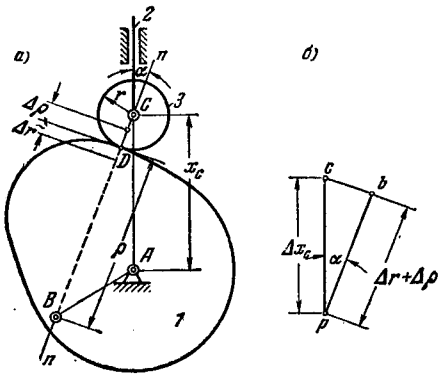


Рис. 25.33. К определению ошибок положений кулачкового механизма: *а*) схема механизма; *б*) план малых перемещений.

Если ошибка Δl_3 звена *3* имела бы знак плюс, то ошибки $(\Delta x_C)_{l_2}$ и $(\Delta x_C)_{l_3}$ имели бы разные знаки и суммарная ошибка Δx_C была бы равна разности ошибок:

$$\Delta x = (\Delta x_C)_{l_2} - (\Delta x_C)_{l_3}. \quad (25.43)$$

5°. Методом планов перемещений можно определить ошибки положений и в механизмах с высшими парами. На рис. 25.33, *а* показан кулачковый механизм. Пусть требуется определить ошибку положения Δx_C точки *C* толкателя, происходящую от ошибки Δr в радиусе *r* ролика *3* и

от ошибки $\Delta\rho$ в радиусе кривизны ρ кулачка *1*, в точке соприкасания *D*. Так как заменяющим механизмом является кривошипно-ползунный механизм *ABC* с переменным по длине шатуном *BC*, то для определения ошибки преобразованный механизм аналогичен механизму, показанному на рис. 25.32, *а*, а поэтому из точки *p* плана малых перемещений (рис. 25.33, *б*) откладываем в направлении, параллельном нормали, сумму ошибок $\Delta r + \Delta\rho$, а из точки *b* проводим перпендикуляр к направлению нормали $n - n$ до пересечения в точке *c* с направлением, параллельным оси движения толкателя *2*, проведенным через точку *p*.

Отрезок (*pc*) пропорционален ошибке Δx_C перемещения точки *C* толкателя *2*.

Из плана малых перемещений (рис. 25.33, *б*) следует:

$$\Delta x_C = \frac{\Delta r + \Delta\rho}{\cos\alpha}. \qquad (25.44)$$

6°. Учет ошибок положения, возникающих в результате зазоров в кинематических парах, является более сложным, ибо для решения задачи необходимо установить точку соприкасания элементов пары и определить, в каком направлении выбирается зазор.

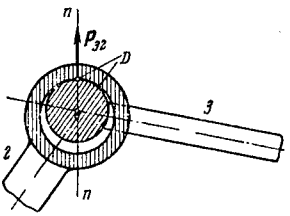


Рис. 25.34. Вращательная пара с зазором.

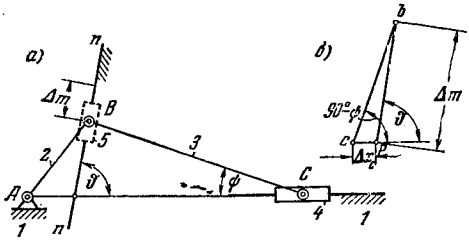


Рис. 25.35. Преобразованный кривошипно-ползунный механизм: *а*) схема механизма; *б*) план малых перемещений.

На рис. 25.34 показаны схематично взаимные положения элементов пары *B* кривошипно-ползунного механизма (рис. 25.35). Обычно точка *D* соприкасания элементов пары звеньев *2* и *3* принимается в направлении действия реакции $\boldsymbol{P}_{32}$ или $\boldsymbol{P}_{23}$. Это направление может быть определено только после кинетостатического расчета механизма. Пусть это есть направление $n - n$. Тогда проводим на схеме механизма (рис. 25.35, *а*) через точку *B* направление $n - n$. Ползун *5* преобразованного механизма, показанный на рис. 25.35, *а* штриховой линией, имеет возможность двигаться вдоль направления $n - n$. Строим план малых перемещений (рис. 25.35, *б*), откладывая ошибку Δm от зазора в паре *B* в направлении $n - n$. Ошибка положения Δx_C точки *C* оказывается пропорциональной отрезку (*pc*). Величина Δx_C определяется из плана малых

перемещений:

$$\Delta x_C = -\Delta m \frac{\cos(\vartheta+\psi)}{\cos\psi}. \qquad (25.45)$$

Более сложные случаи ошибок положений, возникающих вследствие перекоса осей и направляющих, неточностей радиусов кривизны и т. д., мы не рассматриваем. Все эти вопросы подробно исследованы в работах Н. Г. Бруевича и его учеников [1]).

В заключение отметим, что решение задач синтеза механизмов в настоящее время в основном может вестись с помощью современных счетно-решающих машин, позволяющих производить расчет многочисленных вариантов механизмов, из которых конструктором могут быть выбраны оптимальные.

---

[1]) Бруевич Н. Г., Точность механизмов, Гостехиздат, Москва 1946.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАШИН-АВТОМАТОВ

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ
СИНТЕЗ И УПРАВЛЕНИЕ МАШИНАМИ-АВТОМАТАМИ

ГЛАВА XXVI
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАШИН-АВТОМАТОВ

§ 113. Краткое введение в теорию машин-автоматов

1°. В § 2 нами были изложены основные определения машины, машины-автомата и систем машин автоматического действия.

В настоящей главе будут рассмотрены основные параметры, которые необходимо учитывать при синтезе машин автоматического действия.

Подавляющее большинство предметов искусственного происхождения, которые окружают человека, изготовлено с помощью самых различных технических устройств, получивших обобщенное наименование *технологического оборудования*. Современной фазой развития технологического оборудования являются *технологические комплексы,* представляющие собой человеко-машинные системы, в составе которых имеются технологические (производственные), транспортные, энергетические и информационные машины, устройства и аппараты.

Технологический комплекс или *система машин* — средство реализации технологического процесса в производственных условиях.

В ходе технологического процесса, имеющего целью получение заданного количества продукции, характеризующейся заданными значениями показателей качества (точности, надежности, эстетических или потребительских свойств и т. д.) и заданными значениями стоимостных показателей, осуществляется изменение формы, свойств и состояния объекта обработки, которое сопровождается изменением положения объекта обработки в пространстве.

Как и во всяком процессе, в технологическом процессе перерабатываются взаимосвязанные материальные, энергетические и информационные потоки.

Технологические машины перерабатывают исходные материальные потоки (в виде сырья, полуфабрикатов, заготовок), потребляя потоки соответствующей энергии и соответствующую информацию.

Технологический процесс — совокупность операций непосредственной обработки и вспомогательных операций. Операции обработки, которым может быть свойственна любая природа: механическая, химическая, физическая, биологическая и т. д., имеют целью получение заданных форм, т. е. формообразование; изменение значений геометрических параметров полуфабрикатов или заготовок, т. е. точную отделочную обработку; изменение физико-механических свойств материала изделия, например упрочнение и т. п.; сборку, т. е. сопряжение собираемых компонентов в определенных сочетаниях, их фиксацию и скрепление, приводящее к образованию неразъемных и разъемных соединений; заполнение, например смазкой и т. п.; укупорку, упаковку, консервацию, герметизацию, опрессовку; отделку, т. е. удаление заусенцев, нанесение покрытий, окраску, маркировку, прикрепление этикеток и т. д.

Затраты времени и материальных ресурсов на операции собственно обработки определяют производительные затраты, а на все прочие операции — *непроизводительные затраты*, или, как их часто называют, *потери*.

Посредством транспортных машин объекты обработки подвергаются межмашинному транспортированию посредством конвейеров или межпозиционному транспортированию посредством линейных и круговых столов, переориентации, штабелированию и другим тому подобным операциям посредством манипуляторов, автооператоров, промышленных роботов и других устройств.

Информационные машины осуществляют получение, накопление, преобразование и использование информации с целью обеспечения оптимальных условий работы всего комплекса. При этом, помимо обеспечения программы действия каждой из прочих машин комплекса и обеспечения их взаимодействия, информационным машинам поручаются такие функции, как счет готовой продукции, учет брака и сортности продукции, учет простоев, диагностирование отказов элементов машин, контроль за запасами, и другие логические и вычислительные (арифметические) функции.

2°. «Родословная» современных технологических машин уходит в глубь веков. К технике наших дней человечество пришло от имитировавших «чудеса» автоматов, устанавливавшихся в античных храмах еще за двадцать веков до нашей эры; от часов и овеянных легендами механических кукол средневековья; от гениальных изобретений Леонардо да Винчи; от «самодвижущихся» игрушек замечательного механика-самоучки Ивана Кулибина; от токарно-копировального станка Андрея Нартова, работавшего в мастерских Петра I; от ткацкого станка Жаккарда, удостоенного Наполеоном золотой медали.

На рис. 26.1 показан пример прообраза машины-автомата. Это музыкальный инструмент, имевший распространение в прошлом

столетии и называвшийся «пианолой». Пианола была предназначена для механического воспроизводства музыки на обычном пианино или фортепиано и была предшественницей современных машин-автоматов с программным управлением. Мелодия записывалась в форме отверстий на плотной бумажной ленте *1* (рис. 26.1). Ширина ленты позволяла разместить на ней 88 отверстий в ряду, по числу клавиш *6* пианолы. В каждом ряду пробивались только те отверстия, которые соответствовали необходимому перемещению одной или нескольких клавиш одновременно (аккорд). Таким образом, на ленту наносилась «мелодия» в виде отверстий, а не нотных знаков. Лента сматывалась в валик, который устанавливался в приемное устройство пианолы и с помощью кожаного привода приводился в движение. Лента *1* перематывалась с одного валика на другой, огибала специальный распределитель *2*, в котором было просверлено 88 отверстий; как только одно из отверстий ленты *1* совпадало с отверстием на распределителе *2*, соответствующая клавиша *6* опускалась, нажатая невидимым «пианистом», которым был воздух. С помощью воздуха «считывалась» с ленты мелодия, т. е. клавиши приводились в движение воздухом. Система приводов основных механизмов пианолы и управления ими действовала следующим образом. Каждое из отверстий в распределителе *2* соединялось каналом с пространством под мембраной *5*, выполненной из легкой кожи. В полости над мембраной *5* в течение всего времени действия инструмента поддерживалось некоторое разрежение. Полости, разделенные мембраной, сообщались чрезвычайно узким каналом, однако достаточным для того, чтобы разрежение по обе стороны было одинаковым, когда выходное отверстие закрыто лентой, перематывающейся с одного ролика на другой. Привод клавиши *6* осуществлялся так называемым пневматиком *4*, который небольшим клапаном *3* отделялся от полости над мембраной. При этом давление в пневматике *4* равнялось атмосферному. Однако, как только во входной канал через отверстие в бумаге поступал наружный воздух, давление под мембраной становилось равным атмосферному, клапан *3* поднимался, перекрывая доступ наружного воздуха в пневматик *4*. При этом полость пневматика сообщалась с полостью,

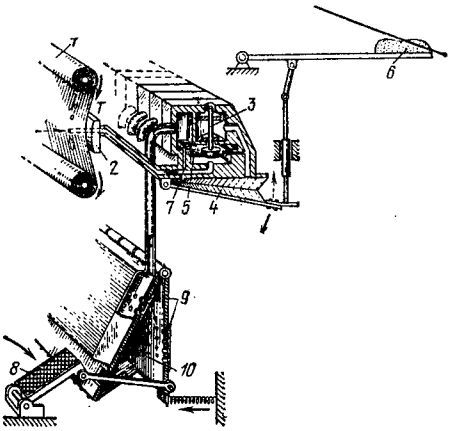


Рис. 26.1. Схема пианолы.

в которой поддерживалось разрежение. Давление в пневматике становилось ниже атмосферного, и он сжимался, приводя в движение кривошипно-ползунный механизм клавиши *6*. Затем входное отверстие вновь перекрывалось бумагой, давление на обе стороны мембраны из-за наличия соединительного канала выравнивалось, клапан *3* опускался. Клавиша *6* занимала исходное положение. «Играющему» на пианоле оставалось только откачивать воздух с помощью специальных педалей *8*, используя при этом обратные клапаны *9* и пневматик откачки воздуха *10*. Пианола имела дополнительные устройства для регулирования громкости звука и темпа исполнения [1]).

§ 114. Направления развития машин-автоматов и систем машин автоматического действия

1°. Прогресс в развитии современных машин состоит в том, что все большее число физических и умственных, т. е. логических и вычислительных, функций человека передается техническим средствам, в результате чего человек освобождается от непосредственного участия в технологическом процессе.

С некоторой условностью можно указать следующие этапы развития технологических машин.

Первый этап: автоматизация переработки только энергетических потоков; на этом этапе используется механизированный инструмент, т. е. машина-двигатель с собственно машиной-орудием. Человек как бы «привязан» к машине.

Второй этап: автоматизация переработки энергетических, частично материальных и частично информационных потоков, циркулирующих в машине. На этом этапе используются машины-полуавтоматы и поточные (полуавтоматические) линии; функции человека часто состоят только в загрузке — выгрузке и в подаче сигнала о пуске машины в ход; в некоторых случаях возможно многомашинное обслуживание.

Третий этап: автоматизация переработки всех энергетических, материальных и информационных потоков. На этом этапе используются машины-автоматы и автоматические линии. Функции человека сводятся к наблюдению и периодическому контролю за правильностью работы оборудования, ремонту, переналадке и тому подобному.

2°. Парк и номенклатура технологических машин всех перерабатывающих отраслей все время расширяются, а сами машины постоянно совершенствуются в соответствии с прогрессом технологии, техники и организации той или иной отрасли.

---

[1]) При изложении раздела курса «Основы теории машин-автоматов» были использованы материалы, любезно представленные мне Д. Я. Ильинским, О. Н. Левитской и А. Г. Овакимовым.

Несмотря на многообразие принципов действия, схемных и конструктивных решений технологических машин, можно указать те основные, притом часто взаимосвязанные, тенденции, которым следует их развитие.

3°. Концентрация технологических процессов в пространстве, сопровождающаяся упрощением и уменьшением числа движений, совершаемых рабочими органами машин, достигается следующими путями.

Во-первых, заменой технологических способов, для которых характерно локальное, обычно механическое, воздействие инструмента на объект обработки, технологическими способами обработки, для которых характерно одновременное (часто немеханическое или не только механическое) воздействие на весь объем материала обрабатываемого объекта (например, прессование из порошков, объемная пластическая деформация металлов и пластмасс и пр.), воздействие на всю обрабатываемую поверхность (например, электрофизические и электрохимические способы формообразования металлов, напыление, осаждение и пр.) или на весь обрабатываемый контур (например, склеивание, сварка и пр.). Такая замена часто ведет к тому, что многостадийные технологические процессы превращаются в одностадийные процессы практически мгновенного превращения исходного сырья в готовое изделие или полуфабрикат.

В качестве примера рассмотрим принцип действия литьевой машины, показанной на рис. 26.2. Гранулы пластмасс или резины, постоянно подаваемые в бункер *7*, посредством вращения поршня-червяка *3* нагнетаются в переднюю часть цилиндра, запертую клапаном *2*. Вследствие внешнего нагрева и механического трения гранулы размягчаются и материал переходит в вязко-пластическое состояние (рис. 26.2, *а*). После выгрузки готового изделия прессформы *5* смыкаются (рис. 26.2, *б*). Затем, когда накопится порция подготовленного к литью материала, осуществляется следующее: подвод, посредством механизма *1*, литьевой головки к прессформам, впрыск, т. е. литье под давлением за счет осевого движения поршня-червяка *3*, в сторону прессформ (рис. 26.2, *в*), выдержка под давлением, после чего литьевая головка отводится от прессформы, клапан *2* запирает канал, поршень-червяк *3* отводится вправо и приводится во вращение механизмом *4* для подготовки следующей партии материала. По истечении времени технологической выдержки, необходимой для отвердения (вулканизации) отлитого изделия, прессформы *5* размыкаются и выталкиватель *6* осуществляет выгрузку изделия (рис. 26.2, *г*).

Во-вторых, применение, при сохранении технологического способа неизменным, одновременной многоинструментальной обработки одного и того же объекта (например, обработка всех отверстий или обработка с нескольких сторон корпусных деталей и т. п.); одновременной обработки одним инструментом нескольких объектов

(например, обработка пакета плоских деталей, применение многоместных прессформ и т. п.); обработки комбинированным инструментом, повторяющим контур проекции или форму объекта; обработки фасонным и составным режущим инструментом, комбинированными штампами и т. п.

4°. Переход к непрерывным процессам путем уменьшения интервалов времени между последовательными выпусками объектов обработки, что позволяет снизить непроизводительные затраты времени, может быть осуществлен следующими путями.

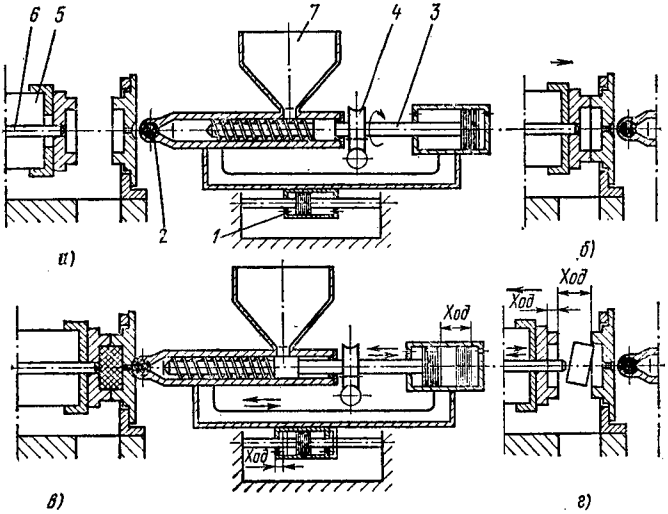


Рис. 26.2. Принципиальная технологическая схема машины-автомата для литья под давлением изделий из пластмасс и резины: *а*) подготовка порции материала; *б*) смыкание прессформ; *в*) впрыск под давлением; *г*) размыкание прессформ и выгрузка изделия.

Во-первых, применением технологических способов, которым свойственна непрерывность. Например, непрерывное рафинирование и разливка стали; получение металлических труб из ленты или колец и втулок из ленты или трубы; получение штучных металлических деталей; заготовок шестерен, металлорежущего инструмента, шаров и пр. — методом поперечно-винтовой прокатки; применение метода экструзии, т. е. непрерывного выдавливания через фасонные отверстия (фильеры) металлов, резины, пластмасс, пищевых продуктов. Получение и обработка в виде «бесконечной» ленты металла, древесно-слоистых пластиков, пластмасс, линолеума, искусственной кожи, нетканых материалов, прессование с помощью валков и т. д.

Во-вторых, применение роторных и роторно-конвейерных машин и линий, в которых вспомогательные операции совмещены

во времени с операциями обработки, ибо все транспортно-технологические органы находятся в непрерывном совместном движении.

Схема роторной машины-автомата показана на рис. 26.3. По окружности расположено m одинаковых блоков, т. е. комплектов рабочих органов, таких, как на рис. 26.2, непрерывно вращающихся, в данном случае против часовой стрелки, с угловой скоростью ω. Выдаче порции, в частном случае одного объекта обработки, соответствует угол поворота $\varphi_р$. Всем операциям обработки и сопутствующим им вспомогательным операциям соответствует угол поворота $\varphi_т = (k-1)\,\varphi_р$. Сектор $(m+1-k)\,\varphi_р$ соответствует холостому пробегу. Обработка во всех m позициях (каналах) осуществляется параллельно, но со сдвигом фаз.

Роторные машины и линии [1]) применяются для самых различных видов обработки: штамповки, прессования, резания, дозирования, расфасовки сыпучих и розлива жидких веществ, укупорки, сборки, упаковки и пр. В роторных линиях загрузка, передача объекта из одного рабочего ротора в другой, а иногда и выгрузка производятся посредством транспортных роторов (рис. 26.4, где показаны типовая конструкция (*а*) и компоновка (*б*) роторной линии, состоящей из шести рабочих роторов P_1, P_2, ..., P_6 и шести транспортных роторов T_1, T_2, ..., T_6). Роторные линии, принципиальные конструктивные решения которых разрабатываются под руководством Л. Н. Кошкина, получили распространение в самых различных отраслях промышленности, где выпускается массовая продукция. Роторные линии обусловливают возможность и целесообразность создания автоматизированных цехов (рис. 26.5).

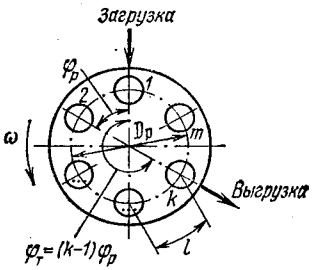


Рис. 26.3. Схема роторной машины.

5°. *Интенсификация операций*, т. е. ускорение операций, обусловлена либо применением более высоких скоростных режимов, при сохранении неизменным способа обработки, либо реализацией технологических способов, основанных на применении новых, ранее не использовавшихся для этих целей видов энергии и, соответственно, новых способов передачи энергии: обработка с помощью лазера, ультразвуковая, электроэрозионная, электрохимическая, электроалмазная, электроабразивная обработка, позволяющая получать в металлических деталях полости и отверстия любых конфи-

[1]) Кошкин Л. Н., Комплексная автоматизация производства на базе роторных линий, «Машиностроение», Москва, 1972.
Клусов И. А., Сафарянц А. Р., Роторные линии, «Машиностроение», Москва, 1969.

гураций и сечения с высоким классом чистоты; высокочастотная сварка; прядение и нанесение покрытий в сильных электростатических полях; разрезание по контуру многослойных настилов металлов, бумаги, ткани и пленок с помощью лазера, жидкости или пара высокого давления; гидравлическая или пневматическая прокидка утка в ткацких станках; вибрационная обработка (вибропрессование, виброгалтовка и пр.); диффузионные процессы

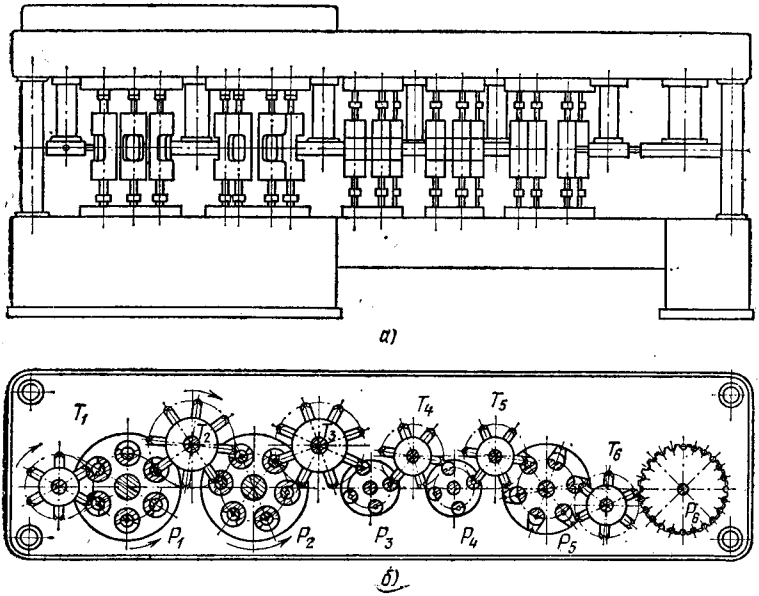


Рис. 26.4. Роторная линия: *а*) типовая конструкция; *б*) схема компоновки ротора в линии.

(беление и крашение ткани, дубление кож, отмывка металлических деталей и пр.), производимые с помощью ультразвука, и т. д.

6°. Создание многооперационных машин и связывание машин в виде автоматической линии обеспечивает повышение эффективности производства за счет, главным образом, сокращения непроизводительных затрат времени на транспортно-перегрузочные операции и уменьшения затрат ручного труда.

Если первые автоматические линии, появившиеся после второй мировой войны, предназначались, главным образом, для операций формообразования штамповкой (роторные линии) или резанием (линии для обработки корпусных деталей, валов, шестерен, поршней, колец подшипников), то сейчас все большее распространение получают линии, в которых операции формообразования сочетаются со сборкой, контролем, маркировкой, упаковкой и другими операциями, выполняемыми по принципу «от сырья или полу-

фабрикатов — к готовому изделию или к готовому элементу изделия». Такие линии уже сейчас широко используются в автомобильной, электротехнической, пищевой, легкой и других отраслях промышленности. При этом снижают жесткость межпозиционных (межмашинных) связей с тем, чтобы остановка по случай-

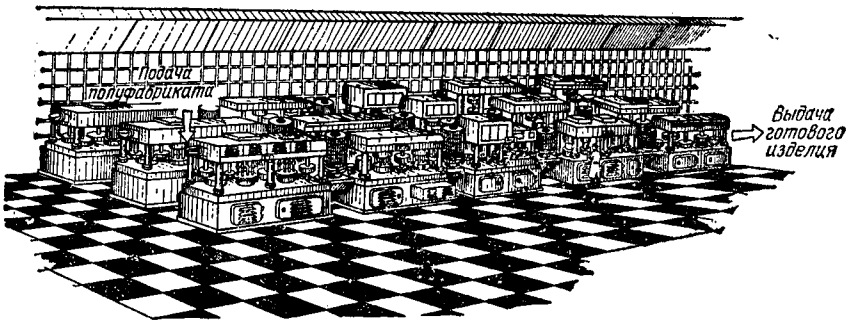


Рис. 26.5. Общий вид цеха-автомата, оснащенного роторными линиями.

ным причинам одной позиции или машины не вызывала простоя всего комплекса.

Большое значение при создании автоматических линий имеет автоматизация транспортно-перегрузочных операций, которая освобождает человека от выполнения вручную трудоемких, монотонных, а нередко опасных для его жизни функций, связанных с подачей в рабочую зону и удалением из нее объектов обработки, изменением их ориентации в пространстве или на плоскости. Решение этих задач стало возможным путем использования манипуляторов, автооператоров и промышленных роботов с ручным и программным управлением (см. § 120).

§ 115. Принципы автоматизации управления машинами-автоматами

1°. Автоматизация управления технологическими машинами-автоматами состоит в придании машинам способности воспринимать и перерабатывать все большее число потоков информации, что ведет к возрастанию уровня «самостоятельности» их функционирования.

Управление органами технологических машин осуществляется обычно в функции положения или в функции времени.

Принцип управления в функции положения, когда сигнал об окончании такта движения данного органа подается конечным (концевым) выключателем, датчиком положения или другим подобным элементом, на который воздействует сам перемещаемый орган,

широко используется в технологических машинах (чаще всего для линейных перемещений), в транспортных машинах (конвейеры с автоматическим адресованием, лифты). Эта форма управления является децентрализованной.

Управление в функции времени обычно называют *программным управлением*, имея в виду, что машина должна обеспечивать выполнение заранее установленной программы. Эта форма управления обычно является централизованной.

2°. Программа может быть зафиксирована с помощью одного из двух возможных способов: аналогового или цифрового (числового).

Аналоговый способ программного управления предполагает задание предназначенной для реализации в технологической машине исходной информации в виде той или иной физической модели: кулачков, копиров (шаблонов, трафаретов), кинематических цепей с определенным соотношением геометрических параметров звеньев и параметров их относительного движения.

Кулачки обычно монтируются на одном общем валу, обеспечивающем распределение потоков энергии, поступающих к рабочим органам машины, и поэтому называемом *распределительным валом*. Угловое положение кулачка относительно распределительного вала определяет временну́ю картину функционирования рабочего органа, т. е. моменты начала и конца хода и т. п. В связи с этим точность реализации заданной программы движений рабочих органов зависит от точности углов установки кулачков относительно распределительного вала, и нарушение правильности углового положения кулачков ведет к рассинхронизации работы машины.

От кулачков к рабочим органам движение передается через рычажные, гидравлические, пневматические и иные механизмы.

Для повышения переналаживаемости, в связи с изменением объекта или технологии обработки или и того и другого, используют быстросменные кулачки, кулачки с возможностью регулировки их углового положения относительно вала или регулировки положения оси качания толкателей для изменения длины хода, наборы (блоки) унифицированных типовых быстросменных кулачков в виде командоаппаратов и т. д.

3°. Идея копирования заданного образца при изготовлении серии одинаковых деталей положена в основу всех копировальных систем управления. На рис. 26.6 показано гидрокопировальное устройство, где движение от ролика, обкатывающего копир *1*, передается к фрезе *4* с помощью гидравлической следящей системы, состоящей из подающего жидкость из масляного бака *7* насоса *6*, трубопроводов *8* и двух цилиндров: управляемого, с неподвижно укрепленным поршнем *5* и управляющего (сервоцилиндра), с золотником *3*, связанным со щупом *2*.

Плита, несущая оба цилиндра и фрезу, укреплена на суппорте, который, перемещаясь по направляющим, может двигаться, при-

ближаясь к столу, несущему копир и заготовку, или отходя от него.

Если ролик и фреза занимают одинаковые положения по отношению соответственно к копиру и заготовке, то золотник *3* занимает среднее положение, перекрывая оба трубопровода, ведущие к управляемому цилиндру.

Если щуп (а следовательно, и золотник) передвинется влево, то оба трубопровода, ведущие к управляемому цилиндру, откроются. По левому трубопроводу масло под давлением будет поступать в левую полость управляемого цилиндра, и стол вместе с фрезой начнет двигаться влево. По правому трубопроводу масло из правой полости будет сливаться в бак. Стол будет двигаться до тех пор,

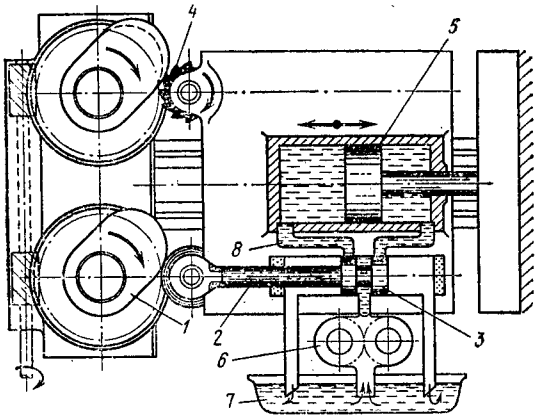


Рис. 26.6. Схема гидрокопировального устройства фрезерного станка.

пока золотник снова не перекроет оба канала. Точно так же при движении щупа, а вместе с ним и золотника вправо стол вместе с фрезой будет двигаться вправо и вновь остановится, когда золотник займет среднее положение.

Принцип слежения, сущность которого состоит в том, что исполнительный орган (в данном случае инструмент) повторяет движение управляющего органа (щупа), не будучи с ним непосредственно связанным, нашел широкое применение в металло- и деревообрабатывающих станках, в самых различных машинах для обработки плоских контуров при изготовлении деталей одежды и обуви, в машинах для выполнения фотогравировальных операций и т. д.

4°. Аналоговые способы в большинстве случаев требуют больших затрат времени и материальных средств на подготовку программы (например, на изготовление копиров и кулачков), обусловливают сложность, а иногда и невозможность изменения программы, что приводит к узкой специализации машины. Они характеризуются тем, что точность работы машины целиком зависит от точ-

ности физической модели, т. е. от точности кулачка, копира и т. п., и от точности передаточных механизмов. С другой стороны, им свойственна высокая надежность.

Цифровой способ программного управления предполагает задание исходной программы в цифровой форме. Информация в цифровой форме фиксируется на легкосменных программоносителях, которые обеспечивают долговременное (перфорированные ленты и карты; магнитные ленты, карты, барабаны и диски; кинопленка) или кратковременное (коммутаторы и т. п.) хранение информации.

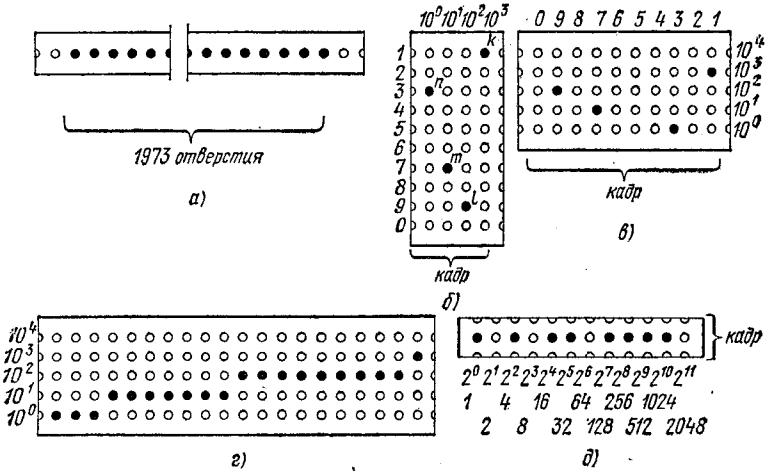


Рис. 26.7. Участки перфолент, применяемых в системах цифрового программного управления (на всех перфолентах записано число «1973»): *а*) унитарный код; *б*) десятичный код (запись на десятидорожечной ленте); *в*) десятичный код (запись на пятидорожечной ленте); *г*) унитарно-десятичный код; *д*) двоичный код.

Для записи информации в цифровой форме используются различные способы ее представления, т. е. различные коды. На рис. 26.7 показаны участки перфолент (зачерненные кружки соответствуют пробитым отверстиям) с записанным на них в различных кодах одним и тем же для всех случаев числом «1973».

На рис. 26.7, *а* показан унитарный код, т. е. для того, чтобы записать число «1973», надо было бы пробить 1973 отверстия. Этот код является чрезвычайно громоздким и требует много времени для подготовки перфоленты. На рис. 26.7, *б* и *в* показан десятичный код. В этом случае число «1973» разлагается на сумму чисел:

$$1973 = 1000 + 900 + 70 + 3.$$

Нетрудно видеть, что точке k соответствует число 1000, точке l — число 900, точке m — число 70 и, наконец, точке n — число 3.

На рис. 26.7, *г* показан унитарно-десятичный код с записью числа «1973». Удобным кодом является двоичный код, состоящий

в том, что требуемое для закодирования число (в нашем случае число «1973») разлагается на сумму по убывающим степеням числа 2 с коэффициентом 0 или 1. Имеем

$$1973 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 32 + 16 + 4 + 1 =$$
$$= 0 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 +$$
$$+ 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Соответствующий набор чисел на перфорированной ленте показан на рис. 26.7, *д*. Существуют другие системы кодов, обладающие своими удобствами для кодирования тех или иных технологических процессов.

При использовании магнитных программоносителей роль перфорации (отверстия) играет магнитный штрих, а при использовании кинопленки — штрих или круглое пятно. В качестве считывающих элементов используют механические, электромеханические, пневмоэлектрические и фотоэлектрические устройства — для перфолент и перфокарт, магнитные устройства — для считывания магнитных отметок, фотоэлектрические — для считывания с кинолент.

5°. Исполнительный механизм системы цифрового управления, в качестве которого чаще всего используется электрический шаговый двигатель (см. § 115, *8°*), по команде, поступающей из блока управления, отрабатывает по одной из координат заданное число шагов, называемое информационным числом и составляющее

$$n = \Omega/\Delta, \qquad (26.1)$$

где Ω — требуемое значение величины перемещения по данной координате; Δ — разрешающая способность (элементарный шаг, или «цена» одного импульса).

Для указания полярности импульса, т. е. для указания направления движения по каждой координате, используется отдельный канал.

Цифровой способ управления характеризуется тем, что программа машины оказывается конструктивно сравнительно мало связанной с исполнительными механизмами машины, благодаря чему обеспечивается простота переналадки. Цифровым системам свойственна высокая универсальность, точность выполнения программы, экономичность.

Системы управления технологическими машинами могут строиться на принципе жесткой связи (рис. 26.8), когда управление блоком исполнительных механизмов *3* осуществляется блоком управления *2*, в который поступаст только один прямой поток информации — исходная программа, зафиксированная в блоке *1*, либо на принципе обратной связи, когда управление блоком исполнительных механизмов *3* осуществляется на основе сопоставления

в блоке управления *2* исходной программы и фактически получаемых результатов, информация о которых поступает по каналу обратной связи от блока *4*, представляющего собой блок активного контроля работы автомата. Как показывает схема рис. 26.8, блок управления *2*, блок исполнительных механизмов *3* и блок активного контроля *4* образуют замкнутый контур. Блок активного контроля *4* выполняет роль обратной связи, которая позволяет обнаружить отклонения фактической программы от расчетной и вносит соответствующие коррективы в работу автомата, которые поступают в блок управления *2*.

6°. Принципы программного управления рассмотрим на примере систем, применяющихся для металлорежущих станков [1]). В этих машинах-автоматах применяется программное управление относительным движением инструмента и заготовки. Одна из таких систем, разработанная Г. А. Спыну, состоит в том, что запись программы производится в процессе обработки первого изделия при ручном или полуавтоматическом управлении. После этого полученная программа закладывается в программный блок для получения требуемых изделий с автоматически управляемого станка.

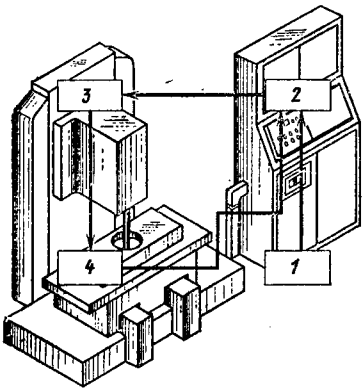


Рис. 26.8. Схема системы автоматического управления технологической машиной.

В процессе записи и воспроизведения программы магнитная лента *3* протягивается с постоянной скоростью мимо специальных магнитных головок (рис. 26.9). Сердечник *1* магнитной головки состоит из двух полуколец и набирается из специального сплава (пермаллоя). В части головки, обращенной к ленте, между половинками сердечника *1* имеется зазор 0,01 ÷ 0,02 *мм*. На сердечнике имеются две катушки *2*. При пропускании через эти катушки переменного тока в зазоре сердечника образуется переменное магнитное поле, и на равномерно движущейся ленте *3* появляются поперечные участки в виде штрихов. Таким образом записывается программа процесса. При воспроизведении лента снова протягивается с той же скоростью мимо магнитной головки, которая ее «считывает» и передает информацию в виде командных сигналов в блок управления автомата.

---

[1]) Описание системы программного управления машинами-автоматами сделано по книге: Зиновьев В. А., Курс теории механизмов и машин, «Наука», Москва, 1972.

Рассмотрим схему автоматической системы программного управления станков типа токарных или револьверных (рис. 26.10). На этой схеме каждый из электродвигателей *10* является приводом соответствующего исполнительного механизма станка. Блок программы представляет собой устройство, протягивающее магнитную ленту *5* последовательно мимо двух магнитных головок *3* и *4*. Для управления каждым из электродвигателей *10* установлен магнитный пускатель *9* и кнопка *1*. При нажиме кнопки *1* одновременно включаются двигатель *10* и соответствующий генератор *2* звуковой частоты, модулирующий частоту определенного постоянного тока. Число таких генераторов *2* должно быть равно числу электродвигателей *10*, причем каждый из них настраивается на определенную частоту, отличающуюся от частот, на которые настроены другие генераторы. Ток от генераторов поступает в записывающую головку *3*, и на магнитную ленту наносится воспроизводимый сигнал в виде магнитных штрихов определенной частоты. Если включить одновременно или в произвольном порядке двигатели, то на магнитной ленте воспроизведутся программные сигналы нескольких частот.

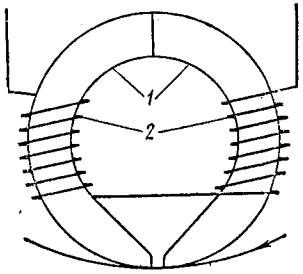


Рис. 26.9. Магнитная головка.

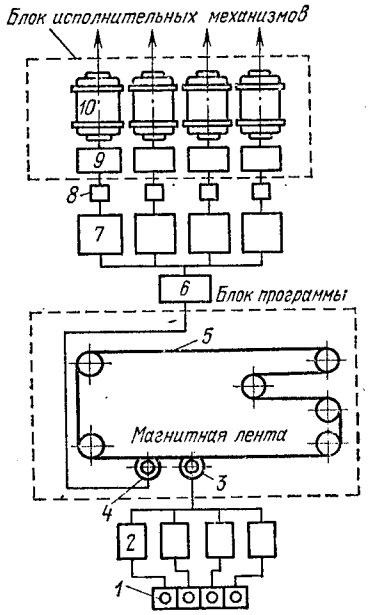


Рис. 26.10. Автоматическая система программного управления токарного или револьверного станка.

Для записи программы при обработке первой детали, включая и выключая двигатели *10* вручную, одновременно включают соответствующие генераторы *2*, и на ленте получается запись требуемой программы работы станка. После этого можно перевести всю систему управления станком на автоматический режим. Включается головка *4*, считывающая сигналы с движущейся ленты. Ток от воспроизводящей головки *4* через усилитель *6* подается на поло-

совые фильтры *7*, каждый из которых настроен на частоту своего генератора и пропускает ток в реле *8* только той частоты, которая соответствует частоте данного фильтра. Чувствительное реле *8*, сработав под действием тока, выделенного полосовым фильтром, включает магнитный пускатель и электродвигатель. Таким образом достигается автоматическое воспроизведение команд на включение и выключение исполнительных механизмов, обеспечивающих обработку всех последующих изделий по программе, заданной в процессе обработки первого из них.

7°. Главной особенностью программного управления является задание программы в форме совокупности дискретных сигналов.

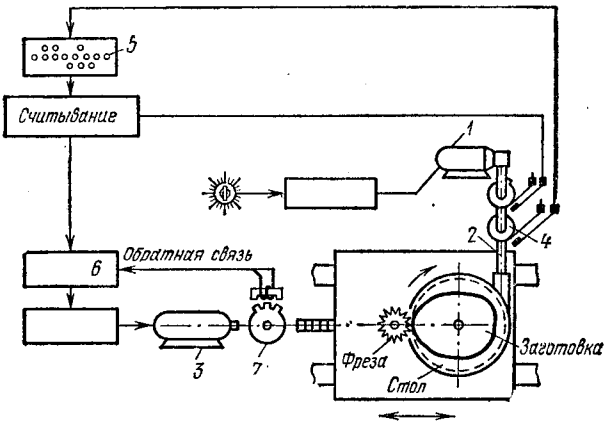


Рис. 26.11. Автоматическая система программного управления вертикально-фрезерного станка.

В зависимости от действия каждой конкретной системы исполнительные органы, реализуя дискретные программные сигналы, движутся непрерывно либо их движение составляется из совокупности малых шаговых перемещений.

Оба метода находят себе применение в конструкциях машин-автоматов.

На рис. 26.11 представлена система программного управления вертикально-фрезерного станка. Обрабатываемую заготовку укрепляют на вращающемся столе, который приводится в движение от двигателя *1* через зубчатую передачу. Суппорту стола вместе с вращающимся столом и заготовкой сообщают возвратно-поступательное движение от второго двигателя *3*, снабженного специальной системой регулирования числа оборотов ротора. Изменяя по выбранной программе направление и величину скорости поступательного движения суппорта относительно фрезы, ось вращения которой неподвижна, можно вращающуюся заготовку обрабатывать по заданному криволинейному профилю. Программа обработки за-

дается перфорированной лентой *5*, движение которой осуществляется с помощью однооборотной муфты, при каждом очередном включении поворачивающейся всего на один оборот, благодаря чему программная лента *5* перемещается отдельными «шагами». Один шаг соответствует повороту заготовки на один, выбранный заранее интервал.

Программными сигналами задаются так называемые опорные величины, характеризующие относительное расположение фрезы и заготовки через определенные интервалы поворота заготовки, например через 0,125°; 0,25°; 0,5° или через 1° и т. д. Чем выше требуемая точность обработки, тем меньше должны быть интервалы задания опорных точек и тем больше должно быть их число. В системе привода вращения заготовки имеется кулачковый вал *4*. На нем имеется несколько кулачков, управляющих включением однооборотной муфты и считыванием программных сигналов. Считанные сигналы поступают в блок управления *6*.

8°. Таким образом, основная особенность системы автоматического цифрового управления состоит в наличии двигателя, обеспечивающего перемещение ведомого звена исполнительного механизма. Обычно применяется два таких двигателя: *шаговый двигатель* (см. выше, § 115, *8°*) или *двигатель с регулируемым числом оборотов*. В настоящее время разработаны конструкции шаговых электродвигателей, в которых периодически включается цепь питания. При каждом включении ротор электродвигателя поворачивается точно на заданный угол. Эти включения, или импульсы, посылаются через блок управления в соответствии с заданной программой. Через тот же блок подаются команды начала и конца движения, прямого и обратного хода и другие, предусмотренные программой движения. Двигатель с регулируемым числом оборотов обычно имеет девять различных скоростей: от 1/9 до 9/9 номинальной скорости. Требуемое перемещение ведомого звена устанавливается выбором соответствующей скорости вращения двигателя. От блока управления в этом случае должен поступить один из десяти сигналов, при этом десятый сигнал соответствует остановке.

Как указывалось выше, для считывания применяют различные способы. Например, контактные, при которых в отверстия западают щупы или щетки, замыкающие соответствующие контакты, и бесконтактные с использованием фотоэлектрических элементов, пневматических датчиков и других устройств.

9°. На современном этапе развития технологических систем начинают широко применяться самонастраивающиеся, т. е. автоматически устанавливающие оптимальные режимы обработки, машины и самоорганизующиеся, т. е. линии, автоматически устанавливающие оптимальный маршрут обработки. Самонастройка или самоорганизация, осуществляется в функции параметров объекта обработки и позволяет при обработке конкретных объектов, свой-

ства каждого из которых можно неслучайным или случайным образом варьировать в каком-то диапазоне, вырабатывать такую программу действия, которая обеспечивает, например, качество обработки, ее точность, минимальную себестоимость и т. д. В этих случаях схема, показанная на рис. 26.8, дополняется блоками, осуществляющими процесс самонастройки (рис. 26.12). К блокам программы *1*, управления *4*, исполнительных механизмов *5* и контроля *6* прибавляется блок самонастройки *2* и блок памяти *3*.

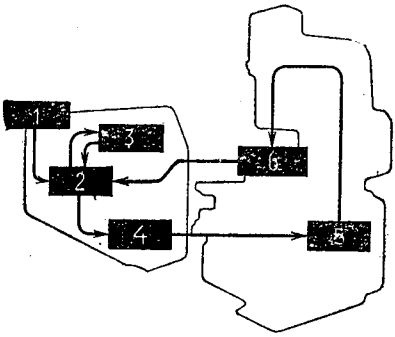


Рис. 26.12. Схема самонастраивающейся системы управления.

Применение систем прямого управления технологической машиной, осуществляемое посредством цифровой ЭВМ, в перспективе обеспечит возможность аннулировать этапы подготовки рабочих чертежей, технологических карт и специальных программоносителей и позволит получать изделие с помощью технологических систем машин, управляемых ЭВМ, где ЭВМ используются не только для управления технологическими машинами, но и для получения конструкторско-технологических решений.

§ 116. Циклограммы машин-автоматов

1°. Процесс анализа и синтеза машин-автоматов и автоматических линий представляет собой по существу процесс построения моделей уже существующих систем при анализе или создаваемых (проектируемых) при синтезе.

В качестве этих моделей, о способах построения которых условливаются заранее, используются различные диаграммы, схемы, чертежи, математические модели, т. е. уравнения или выражения на формальных языках, и т. д.

Наиболее часто применяют линейные или круговые цикловые диаграммы, называемые обычно *циклограммами*, представляющие собой графическое изображение временно́й картины функционирования машины или линии. Циклограммы позволяют как бы видеть порядок следования типичных состояний исполнительных механизмов: фаза рабочего хода, фаза холостого хода, выстой в том или ином положении, нахождение в покое, нахождение в движении — и длительность функционирования рабочих органов исполнительных механизмов в течение рассматриваемого интервала времени, т. е. цикла, а также характер их взаимодействия во времени (одновременность, перекрытие, сдвиг по фазе, очередность срабатывания и т. д.).

Циклограммы позволяют наглядно представлять, во-первых, *технологический цикл* $T_т$ — интервал времени, в течение которого в пределах данной машины или линии выполняются все *собственно рабочие операции* и те вспомогательные операции, которые сопутствуют обработке каждой единицы продукции, т. е. каждому циклу обработки, и вследствие этого называются *цикловыми вспомогательными*. Во-вторых, *рабочий цикл* $T_р$ — интервал времени, соответствующий выпуску из машины единицы продукции (или партии одновременно в одной позиции обрабатываемых объектов).

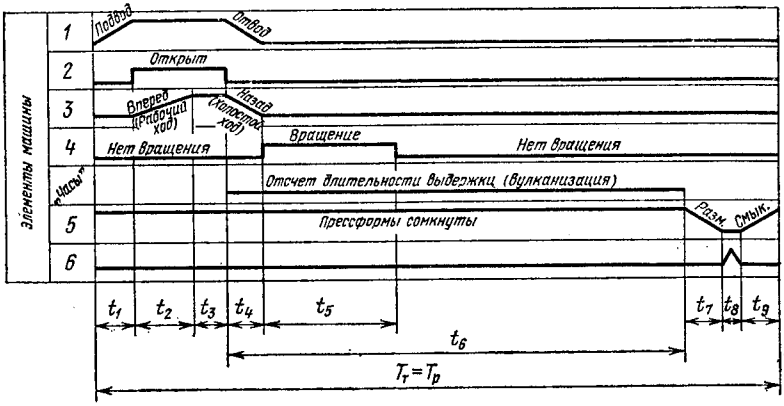


Рис. 26.13. Линейная циклограмма однопозиционной машины-автомата, показанной на рис. 26.2.

2°. На рис. 26.13 показана циклограмма однопозиционной машины, принцип действия которой описывался выше (см. рис. 26.2). Элементы *1*, *2*, ..., *6* показаны на рис. 26.2, *а*, одна из строчек циклограммы отведена для устройства типа реле времени, условно называемого «часы».

Для однопозиционной машины (т. е. при $z = 1$) всегда $T_т = T_р$. Для машины данного типа $T_т = t_1 + t_2 + t_3 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9$ (см. рис. 26.13).

Для двухпозиционной (т. е. при $z = 2$) машины данного типа при показанных на рис. 26.13 соотношениях длительностей операций имеет место $T_р \approx T_т/2$.

Для многопозиционной (т. е. при $z > 2$) машины данного типа при периодическом перемещении от позиции к позиции число позиций z находится из условия $t_6 \geqslant T_р (z - 1)$, т. е. $z = t_6/T_р + 1$, где правая часть округляется до ближайшего большего целого. Число позиций должно быть таково, чтобы длительность прохождения прессформами $z - 1$ позиций была не меньше длительности вулканизации.

В этом случае $T_р = \sum_{i=1}^{5} t_i$, и интенсификация операции подготовки следующей порции материала ведет к сокращению длительности рабочего цикла. При $z \leqslant 2$ интенсификация данной операции не влияет на длительность цикла, так как в этих случаях она совмещена с гораздо более длительной операцией вулканизации.

Для роторной машины, выполняющей те же операции (при непрерывном совместном движении m одинаковых блоков), имеет

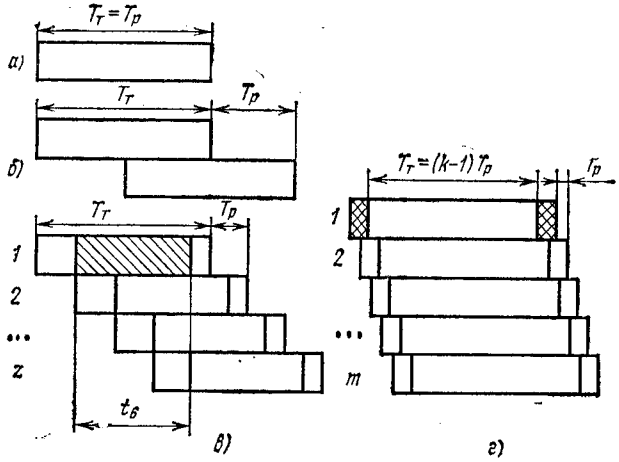


Рис. 26.14. Циклограммы различных конструктивных вариантов машины, отличающихся один от другого числом позиций и принципом относительного перемещения: *а*) однопозиционная машина; *б*) двухпозиционная машина; *в*) многопозиционная машина с периодическим межпозиционным перемещением; *г*) многопозиционная машина с непрерывным движением позиций (роторная машина).

место $T_р = l/v$, где $l = \pi D_р/m$, $v = \omega D_р/2$ (см. рис. 26.3), т. е. $T_р = \varphi_р/\omega$. В данном случае значение величины $T_р$ может быть выбрано любым, а число позиций k должно обеспечивать $T_т \geqslant T_р (k-1)$.

На рис. 26.14 показаны циклограммы различных вариантов машин данного типа, выполняющих одни и те же операции:

а) Для $z = 1$.

б) Для $z = 2$.

в) Для $z > 2$ с периодическим движением от позиции (заштрихованная часть соответствует операции вулканизации).

г) Для роторного варианта (заштрихованные части соответствуют участкам холостого пробега).

3°. Анализ циклограмм на рис. 26.13 и 26.14 показывает, что интенсификация режимов, т. е. сокращение длительности опера-

ций; концентрация, т. е. совмещение во времени выполнения операций по обработке одного объекта; дифференциация, т. е. совмещение во времени выполнения операций по обработке объектов, находящихся в нескольких позициях; переход к непрерывным транспортно-технологическим операциям, т. е. совмещение непроизводительных затрат времени на цикловые вспомогательные операции с собственно рабочими операциями, — все это уменьшает длительность рабочего цикла.

§ 117. Некоторые сведения по теории производительности машин-автоматов

1°. Одной из основных характеристик технологических комплексов, составленных из машин-автоматов, является их фактическая производительность $Q_ф$. Величина $Q_ф$ может быть определена из формулы

$$Q_ф = mI\eta_{ис}/T_р, \ ед.\ прод/мин, \qquad (26.2)$$

где $T_р$ — длительность рабочего цикла, *мин*; I — число параллельных потоков, в которых одновременно (без сдвига фаз) осуществляется обработка; m — коэффициент размерности; $\eta_{ис}$ — общий коэффициент использования.

Аналитическому выявлению зависимости производительности от состава рабочего цикла, режимов выполнения операций, структуры машин и линий и других факторов, а также вопросам прогнозирования значений производительности на стадии синтеза посвящено большое число исследований, принадлежащих советским ученым [1]).

Для однопозиционных машин дискретного действия величина $T_р$ подсчитывается как сумма последовательности неперекрываемых операций (или их частей), соответствующих выпуску одного объекта или партии одновременно, в одной позиции, обрабатываемых объектов.

Для многопозиционных машин и линий периодического действия, когда в ходе одного и того же рабочего цикла $T_р$ параллельно, одновременно, выполняется несколько совокупностей операций длительностью $t_1, t_2, \ldots, t_k$ (каждая совокупность состоит из последовательно выполняемых операций), величина $T_р$ должна быть не меньше длительности самой продолжительной из указанных параллельно выполняемых совокупностей операций, т. е.

$$T_р \geqslant \max(t_1, t_2, \ldots, t_k) \qquad (26.3)$$

(символ $\max(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ означает, что из значений $t_1, t_2, \ldots, t_k$, указанных в скобках, выбирается наибольшее).

---

[1]) Большой вклад в теорию производительности машин-автоматов внесли С. И. Артоболевский, А. П. Владзиевский, И. И. Капустин, Г. А. Шаумян.

При этом при $z > 2$ обычно $T_р \ll T_т$.

2°. Для машин непрерывного действия, т. е. когда выполнение собственно рабочих операций и цикловых вспомогательных операций совмещено во времени, величина рабочего цикла составляет

$$T_р = l/v. \tag{26.4}$$

Для роторных и роторно-конвейерных машин и линий, как уже говорилось, l — шаг между позициями, *мм*; v — линейная скорость непрерывного совместного перемещения всех позиций, *мм/мин*.

Для машин, обрабатывающих объекты, идущие «гуськом» (с интервалами или без них, т. е. впритык) друг за другом, l — средний шаг между двумя соседними объектами обработки, *мм*; v — скорость непрерывного транспортирования, *мм/мин*.

3°. Для машин, обрабатывающих «непрерывный» материал в виде полотнищ, лент, цепей, нитей, труб, сыпучих, жидких или газообразных материалов, l — количество материала, которое принято за единицу продукции, *м*, или *м*^{3}, или *кг*; v — скорость непрерывного поступления (расход) этого материала, *м/мин*, или *м*^{3}*/мин*, или *кг/мин*.

Для машин, выпускающих штучную (дискретную) продукцию, коэффициент размерности — *шт*. Его численное значение — это число единиц продукции в одной одновременно обрабатываемой партии или число единиц продукции, ставшей штучной в результате обработки l *м*, или l *м*^{3}, или l *кг* «непрерывного» материала. В частном случае $l = 1$ *ед. прод.*

4°. Для машин, выпускающих «непрерывную» продукцию, принимается коэффициент размерности:

$$m = \begin{cases} 1\ м \text{ для подсчета в погонных метрах;} \\ b\ м^2, \text{ где } b \text{ — ширина материала, для подсчета площади;} \\ bh\ м^3, \text{ где } h \text{ — толщина (высота) материала, для подсчета объема;} \\ bh\gamma\ кг, \text{ где } \gamma \text{ — удельная плотность материала, для подсчета массы.} \end{cases}$$

Общий коэффициент использования $\eta_{ис}$ технологического комплекса в течение, например, года составляет

$$\eta_{ис} = \eta_т \eta_о \eta_п \eta_р, \tag{26.5}$$

где $\eta_т$ — коэффициент технического использования; $\eta_о$ — коэффициент организационно-технического использования; $\eta_п$ — коэффициент потерь времени на переналадку; $\eta_р$ — коэффициент потерь времени на ремонты, осуществляемые со снятием машин и линий с эксплуатации.

5°. Коэффициент технического использования $\eta_т$ характеризует потери времени на внецикловые вспомогательные операции, кото-

рые обусловлены следующими факторами: необходимостью проведения профилактических ремонтов, принудительной смены инструмента, возобновления запаса питания, смазки или чистки. Потери времени по этим причинам — это регламентированные простои, ибо частота возникновения и длительность каждого из них — неслучайные величины, тем более что элементы машин не обладают абсолютной надежностью, а материалы, поступающие на обработку, не обладают абсолютной кондиционностью. Потери времени по этим причинам, ведущим к отказам машины, представляют собой случайные потери времени, ибо частота возникновения отказов и длительность восстановления работоспособности технологического комплекса после каждого отказа — случайные величины.

6°. Коэффициент технического использования составляет

$$\eta_{\text{т}}=\left[\sum_{i=1}^{K}\eta_i^{-1}-(K-1)\right]^{-1}, \tag{26.6}$$

где η_i — i-ый частный коэффициент технического использования (частные коэффициенты использования отличаются один от другого причинами или следствиями простоев либо местоположением элемента, вызвавшего простой); K — общее число частных коэффициентов технического использования.

Каждый частный коэффициент технического использования характеризует не совмещенные ни с какими прочими затратами времени внецикловые потери времени $t_{\text{пв}i}$, приходящиеся на один рабочий цикл, т. е.

$$\eta_i=(1+t_{\text{пв}i}/T_{\text{р}})^{-1}. \tag{26.7}$$

Частный коэффициент технического использования, характеризующий надежность машины, называется (в соответствии с ГОСТом 13377-67) *коэффициентом готовности* и составляет

$$\eta_{\text{г}}=\left(1+\sum_{j=1}^{m}n_j\omega_jT_{\text{в}j}\right)^{-1}, \tag{26.8}$$

где n_j — число идентичных элементов j-го вида, функционирующих в машине; ω_j — параметр потока отказов j-го элемента, $1/час$; $T_{\text{в}j}$ — среднее время восстановления (т. е. случайного ремонта) j-го элемента, *час*.

Коэффициент технического использования $\eta_{\text{т}}$ характеризует качество технологических машин безотносительно к организационно-техническим формам их эксплуатации. В связи с тем, что значение величины $\eta_{\text{ис}}$ может опускаться до $0{,}5\div0{,}6$, одной из основных задач создания новых машин и линий является задача повышения их надежности и переналаживаемости.

ГЛАВА XXVII
СИНТЕЗ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

§ 118. Элементы алгебры логики. Синтез релейных схем

1°. Двоичной переменной x называем такую переменную, которая может принимать лишь одно из двух значений: 0 или 1.

Переменной x соответствует простое утвердительное высказывание (либо определенно истинное, либо определенно ложное) или устройство, характеризуемое двумя конечными (дискретными) значениями его состояний и называемое обычно реле.

В качестве таких реле могут использоваться электромагнитные (электромеханические), электроламповые, полупроводниковые, ферритно-полупроводниковые, гидравлические и пневматические мембранные, плунжерные (золотниковые), крановые и струйные элементы, механические элементы. Эти элементы пропускают поток энергии (замкнуты электрические контакты или сообщаются последовательно расположенные парные каналы, т. е. проточные элементы гидравлических или пневматических клапанов, распределителей, золотников) или не пропускают (соответственно разомкнуты, не сообщаются).

Принимаются соответствия:

$$x=\begin{cases}0, \text{ если данное простое высказывание ложно или если реле не пропускает поток энергии (нулевая проводимость);}\\ 1, \text{ если данное простое высказывание истинно или если реле пропускает поток энергии (полная проводимость).}\end{cases}$$

2°. Двоичные переменные можно подвергать логическим операциям отрицания, сложения и умножения. Все прочие логические операции могут быть сведены к комбинации перечисленных.

Логическое отрицание выражается надстрочной чертой или символом —, т. е. каждой двоичной переменной x ставится в соответствие обратная (или дополнительная к ней) переменная $\bar{x}$ (читается: «не x») такая, что

$$\bar{x}=\begin{cases}0, & \text{если } x=1,\\ 1, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Например, если x соответствует высказывание «машина исправна», то $\bar{x}$ соответствует высказывание «машина неисправна». Если на самом деле машина неисправна, то $x=0$, т. е. высказывание «машина исправна» ложно, и $\bar{x}=1$, т. е. высказывание «машина неисправна» истинно.

Заметим, что $\bar{\bar{x}}=x$ (высказывание «машина не неисправна» — то же самое, что высказывание «машина исправна»).

Логическая сумма (дизъюнкция, двоичное сложение) выражается символом $+$ (или $\vee$).

Если x_1 и x_2 — две двоичные переменные, то их сумма $z = x_1 + x_2$ определится следующим образом (см. таблицу 12).

Из таблицы 12 видно, что

если $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, то $z = x_1 + x_2 = 0 + 0 = 0$;
если $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, то $z = x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1$;
если $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, то $z = x_1 + x_2 = 1 + 0 = 1$;
если $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, то $z = x_1 + x_2 = 1 + 1 = 1$,

где все (кроме последнего) выражения согласуются с правилами той алгебры, которую принято называть элементарной.

Из выписанных соотношений следует, что $x + 0 = x$, $x + 1 = 1$, $x + \bar{x} = 1$, $x + x = x$.

Таблица 12

x_1	x_2	
	1	0
1	1	1
0	1	0
	Логическая сумма $z = x_1 + x_2$	

Полученные соотношения могут быть распространены на любое число двоичных переменных и, соответственно, на любое число простых высказываний.

Логическая сумма любого числа переменных равна *1*, если хотя бы одна из переменных имеет значение *1*.

Логическая сумма любого числа переменных равна 0, если все переменные одновременно имеют значение 0.

Логической сумме соответствуют сложное высказывание, состоящее из простых высказываний, соединенных неисключающим [1]) союзом «или» (т. е. соединительно-разделительным союзом «или», обозначаемым «и/или» и имеющим смысл «или то, или другое, или оба вместе») и схема, составленная из параллельно функционирующих реле.

Например, имеется схема, где электродвигатель может быть пущен в ход посредством замыкания любого (или обоих) из двух параллельно установленных контактов X_1 и X_2.

Простое высказывание x_1: электродвигатель пускается в ход, если замкнут контакт X_1.

Простое высказывание x_2: электродвигатель пускается в ход, если замкнут контакт X_2.

Сложное высказывание $z = x_1 + x_2$: электродвигатель пускается в ход, если замкнут контакт X_1, и/или электродвигатель пускается в ход, если замкнут контакт X_2.

---

[1]) В русском и многих других языках союз «или» обладает, как известно, двусмысленностью, а, например, в латинском языке различаются союзы «и/или» и «или иначе».

Сложное высказывание $z = x_1 + x_2 + \ldots$ ложно тогда и только тогда, когда все простые высказывания $x_1, x_2, \ldots$ ложны, и истинно тогда, когда хотя бы одно из простых высказываний $x_1, x_2, \ldots$ истинно.

3°. Логическое произведение (*конъюнкция, двоичное* или *булево умножение*) выражается символом $\times$ (или $\wedge$, или точкой $\cdot$, или знак умножения вообще не пишется).

Если x_1 и x_2 — две двоичные переменные, то их произведение $z = x_1 \cdot x_2$ определится следующим образом (см. таблицу 13):

Из таблицы 13 видно, что

если $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, то $z = x_1 \cdot x_2 = 0 \cdot 0 = 0$;
если $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, то $z = x_1 \cdot x_2 = 0 \cdot 1 = 0$;
если $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, то $z = x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 0 = 0$;
если $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, то $z = x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 1 = 1$,

где все выражения согласуются с элементарной алгеброй.

Из выписанных соотношений следует, что

$$x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot 1 = x, \quad x \cdot \bar{x} = 0, \quad x \cdot x = x.$$

Полученные соотношения могут быть распространены на любое число двоичных переменных и, соответственно, на любое число простых высказываний.

Логическое произведение любого числа переменных равно 1, если все переменные одновременно имеют значение 1.

Таблица 13

x_1	x_2	
	1	0
1	1	0
0	0	0
	Логическое произведение $z = x_1 \cdot x_2$	

Логическое произведение любого числа переменных равно 0, если хотя бы одна из переменных имеет значение 0.

Логическому произведению соответствуют сложное высказывание, состоящее из простых высказываний, соединенных соединительным союзом «и», и схема, составленная из последовательно функционирующих реле.

Например, имеется схема, где электродвигатель может быть пущен в ход посредством замыкания двух последовательно установленных контактов X_1 и X_2.

Простое высказывание x_1: электродвигатель пускается в ход, если замкнут контакт X_1.

Простое высказывание x_2: электродвигатель пускается в ход, если замкнут контакт X_2.

Сложное высказывание $z = x_1 \cdot x_2$: электродвигатель пускается в ход, если замкнут контакт X_1 и замкнут контакт X_2.

Сложное высказывание $z = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots$ ложно тогда, когда хотя бы одно из простых высказываний $x_1, x_2, \ldots$ ложно, и истинно тогда и только тогда, когда все простые высказывания $x_1, x_2, \ldots$ истинны.

4°. С помощью элементарных логических функций отрицания, сложения и умножения можно записать любые, сколь угодно сложные логические условия и, соответственно, сформировать любые сколь угодно сложные логические функции.

Логическое сложение и логическое умножение удовлетворяют следующим законам:

а) закону коммутативности (переместительному закону):

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1,$$
$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1;$$

б) закону ассоциативности (сочетательному закону):

$$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_3) + x_2,$$
$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = x_2 \cdot (x_1 \cdot x_3);$$

в) закону дистрибутивности (распределительному закону):

$$(x_1 + x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3, \quad x_1 \cdot x_2 + x_3 = (x_1 + x_3) \cdot (x_2 + x_3)$$

(для последнего имеем: $(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_3 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3(x_1 + 1) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3 = x_1x_2 + x_3(x_2 + 1) = x_1x_2 + x_3$;

г) закону идемпотентности (закону повторения):

$$x + x + x + \ldots + x = x,$$
$$x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = x;$$

д) закону Де Моргана (закону преобразования отрицаний или инверсии):

$$\overline{(x_1 + x_2)} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2,$$
$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2.$$

Представление логических функций в виде формул не однозначно; поэтому, применяя указанные выше правила и законы, можно преобразовать одни логические формулы в другие, равносильные им формулы, т. е. заменять исходные формулы равносильными. *Равносильными* называются две формулы, представляющие одну и ту же логическую функцию. Они соединяются знаком тождества. При этом стремятся к наиболее простым формулам, иначе говоря, стремятся к «минимизации» формул.

5°. Логические системы управления относятся к классу релейных устройств (или конечных автоматов, или последовательностных машин), которые в общем случае характеризуются следующими свойствами:

а) Устройство имеет входные каналы, в которые извне в дискретные моменты времени подаются двоичные сигналы $x_1, x_2, \ldots, x_m$,

называемые *входными сигналами*. Комбинация значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называется *значением входа*.

б) Устройство имеет выходные каналы, двоичные сигналы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в которых, называемые *выходными сигналами*, служат для воздействия на объект управления. Комбинация значений $z_1, z_2, \ldots, z_n$ называется *значением выхода*.

в) Устройство в каждый момент времени может находиться в одном из внутренних состояний $y_1, y_2, \ldots, y_k$, определяемом входными сигналами в этот момент и состоянием в предыдущий момент.

г) Входные сигналы преобразовываются в выходные в зависимости от внутреннего состояния системы в предыдущий момент времени.

Каждый из сигналов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n$, принимающий значения 0 или 1, описывается двоичной переменной. Преобразование входа в выход, осуществляемое релейным устройством, описывается логическими функциями. Для анализа и синтеза этих устройств применяется алгебра логики, а точнее — булева алгебра, разработанная английским ученым Джорджем Булем в середине XIX века, необходимые основы которой мы здесь и изложим.

6°. Зависимость выхода от входа выражают словесно, или в виде таблицы, или иным способом и называют *условием работы релейного устройства*.

Релейное устройство называют *однотактным* (или *без памяти*), если в каждый данный момент времени значение выхода однозначно определяется значением входа. В этом случае устройство состоит только из логических элементов.

Релейное устройство называют *многотактным* (или *с памятью*), если какому-либо одному значению входа в различные моменты времени соответствуют разные значения выхода (ибо эти последние зависят не только от входа, но и от состояния устройства в предыдущий момент времени). В этом случае устройство состоит из логических элементов и элементов памяти.

Сочетание значений входа и внутреннего состояния в один и тот же момент времени определяет полное состояние устройства.

Тактом релейного устройства называют интервал времени между двумя соседними изменениями его полного состояния. Графическое изображение последовательности изменений полного состояния релейного устройства называют *таблицей включений* или *тактограммой* и часто совмещают с циклограммой.

Входные каналы перенумеровывают, используя в качестве номеров числа, полученные как степени числа 2, т. е. числа $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{m-1}$. Эти числа принято называть «весами», приписанными соответствующему входу. Число r различных сочетаний значений входных сигналов составляет $r = 2^m$.

Десятичный эквивалент значения входа для каждого такта получают суммированием произведений «значение входного сигнала

(0 или 1) на его «вес» для всех m входных сигналов (табл. 14). В таблице 14 наличие жирной горизонтальной линии соответствует наличию сигнала (единичному значению двоичной переменной), отсутствие линии — отсутствию сигнала (нулевому значению).

Таблица 14

№ такта		1	2	3
Входные сигналы				
обозначение	вес			
x_1	1	1	1	0
x_2	2	0	1	1
x_3	4	0	0	0
Значение основного входа		$1\cdot 1+0\cdot 2+$ $+0\cdot 4=1$	$1\cdot 1+1\cdot 2+$ $+0\cdot 4=3$	$0\cdot 1+1\cdot 2+$ $+0\cdot 4=2$
Выходной сигнал z_1		0	0	1
№ такта		4	5	6
Входные сигналы				
обозначение	вес			
x_1	1	0	0	1
x_2	2	1	0	0
x_3	4	1	1	1
Значение основного входа		$0\cdot 1+1\cdot 2+$ $+1\cdot 4=6$	$0\cdot 1+0\cdot 2+$ $+1\cdot 4=4$	$1\cdot 1+0\cdot 2+$ $+1\cdot 4=5$
Выходной сигнал z_1		1	0	0

Если одному и тому же значению входа соответствуют разные значения выхода, т. е. рассматривается релейное устройство с памятью, то вводятся соответствующие элементам памяти дополнительные входные каналы $y_1, y_2, \ldots, y_s$, которым присваивают веса 2^m, 2^{m+1}, 2^{m+2} и т. д.

Введение элементов памяти продолжают до тех пор, пока любой комбинации основных входных сигналов ($x_1, x_2, \ldots, x_m$) и дополнительных входных сигналов ($y_1, y_2, \ldots, y_s$) не будет соответствовать одно значение выхода, ибо только в последнем случае таблица включений, или тактограмма, реализуема. В частности, тактограмма, приведенная выше (см. таблицу 14), реализуема.

7°. Для однотактных релейных устройств можно указать следующий порядок синтеза.

1. Записать условия работы релейного устройства на обычном языке.

2. Изобразить «черный ящик», указав входы и выходы (под «черным ящиком» понимается система любой физической природы, для которой известны, т. е. заданы или доступны наблюдению, только входы и выходы, а структура и значения параметров ее элементов неизвестны.

3. Выписать условия работы системы в виде таблицы соответствий значений входа и выхода (таблицы логических условий), таблицы включений, или тактограммы.

4. Пользуясь таблицей или тактограммой, получить логические формулы для каждого из выходов и по возможности их минимизировать и унифицировать.

5. Построить структурную схему релейного устройства.

6. Перейти от структурной схемы к конкретной конструктивной реализации (к электрической, гидравлической, пневматической или механической схеме).

8°. Рассмотрим пример составления фрагмента структурной схемы релейного устройства, управляющего участком автоматической линии.

Участок состоит из технологических машин № 1, № 2 и № 3, независимо друг от друга, работающих параллельно в линии и осуществляющих одну и ту же обработку одних и тех же объектов; общего для всех трех машин накопителя, в который объекты поступают после обработки на любой из трех указанных машин; конвейеров № 1 и № 2, независимо друг от друга, работающих параллельно в линии и обеспечивающих отвод объектов из накопителя на последующую обработку.

Условия автоматической работы участка состоят в следующем:

конвейер № 1 должен быть включен, если в работе находится одна из трех параллельно работающих технологических машин № 1, № 2 и № 3;

конвейер № 2 должен быть включен, если в работе находятся любые две из трех указанных машин;

конвейеры № 1 и № 2 должны быть включены, если в работе находятся все три машины.

Обозначим сигналы от машин № 1, № 2 и № 3 (т. е. входные сигналы) соответственно x_1, x_2 и x_3. Наличие сигнала соответствует,

во-первых, нахождению машины в работе и, во-вторых, значению $x_i = 1$ (для $i = 1; 2; 3$). Отсутствие сигнала соответствует, во-первых, нахождению машины в остановленном состоянии и, во-вторых, значению $x_i = 0$.

Обозначим сигналы к конвейерам № 1 и № 2 (т. е. выходные сигналы) соответственно z_1 и z_2. Наличие сигнала соответствует, во-первых, нахождению конвейера во включенном состоянии и, во-вторых, значению $z_i = 1$ (для $i = 1; 2$). Отсутствие сигнала соответствует, во-первых, нахождению конвейера в выключенном состоянии и, во-вторых, значению $z_i = 0$.



Рис. 27.1. «Черный ящик» (схема к рассматриваемому примеру).

«Черный ящик», имеющий входы, через которые поступают сигналы от машин №№ 1—3, и выходы, через которые поступают сигналы к конвейерам № 1 и № 2, показан на рис. 27.1.

Таблица логических условий (таблица 15) представляет собой формализованную запись исходных условий.

Таблица 15

№ возможной ситуации	Значения сигналов				
	входные			выходные	
	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0
4	1	1	0	0	1
5	1	0	1	0	1
6	0	1	1	0	1
7	1	1	1	1	1

Логические формулы составляются следующим образом, например, для $z_1 = 1$ (ситуации №№ 1—3 и № 7).

Если $x_1 = 1$, и $x_2 = 0$ (т. е. $\bar{x}_2 = 1$), и $x_3 = 0$ (т. е. $\bar{x}_3 = 1$), или $x_1 = 0$ (т. е. $\bar{x}_1 = 1$), и $x_2 = 1$, и $x_3 = 0$ (т. е. $\bar{x}_3 = 1$), или $x_1 = 0$, (т. е. $\bar{x}_1 = 1$), и $x_2 = 0$ (т. е. $\bar{x}_2 = 1$), и $x_3 = 1$, или $x_1 = 1$, и $x_2 = 1$, и $x_3 = 1$, то $z_1 = 1$.

Следовательно,

$$z_1 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2x_3. \qquad (27.1)$$

Аналогично для $z_2 = 1$ (ситуации №№ 4—7):

$$z_2 = x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3. \qquad (27.2)$$

9°. Начнем упрощение с формулы (27.2), для чего припишем дважды к ее правой части выражение «$+ x_1x_2x_3$». Поскольку $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 \equiv x_1x_2x_3$, то это не изменит записанного логического условия.

Получаем (с учетом того, что $x + \bar{x} = 1$, а $1 \cdot x = x$).

$$z_2 = x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 \equiv$$
$$\equiv x_1x_2(\bar{x}_3 + x_3) + x_2x_3(\bar{x}_1 + x_1) + x_1x_3(\bar{x}_2 + x_2) \equiv$$
$$\equiv x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3. \qquad (27.3)$$

Упростим формулу (27.1) и постараемся унифицировать ее с окончательной формой выражения (27.3).

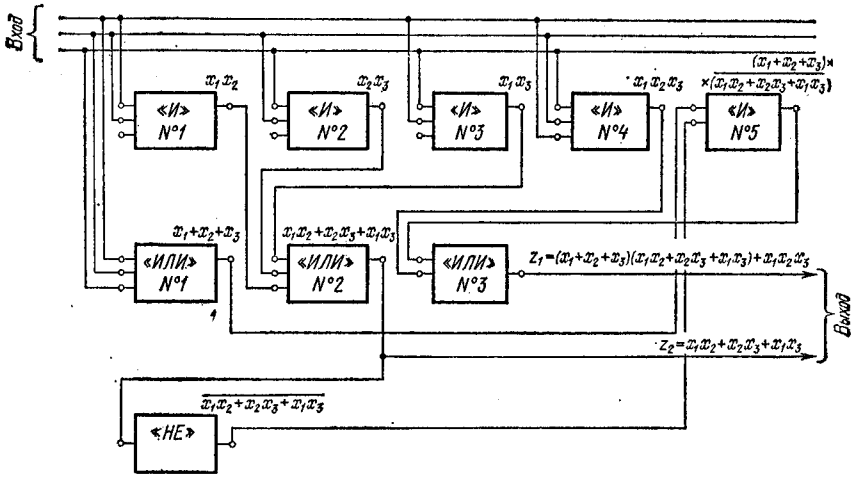


Рис. 27.2. Структурная схема (блок-схема) релейного устройства.

Припишем к правой части формулы (27.1) выражение в виде слагаемых «$+ \bar{x}_1x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_3x_3\bar{x}_1 + \bar{x}_3x_3\bar{x}_2$», каждое из которых, имеющее форму $\bar{a}a\bar{b}$, равно 0, так как $a \cdot \bar{a} = 0$, а $0 \cdot \bar{b} = 0$.

Перепишем формулу (27.1) с учетом добавленных членов и подвергнем ее преобразованию:

$$z_1 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2x_3 +$$
$$+ \bar{x}_1x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_3x_3\bar{x}_1 + \bar{x}_3x_3\bar{x}_2 \equiv$$
$$\equiv x_1(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3) + x_2(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3) +$$
$$+ x_3(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3) + x_1x_2x_3 \equiv$$
$$\equiv (x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3) + x_1x_2x_3.$$

Выражение $\bar{x}_1x_2 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3$ преобразуем, применив, во-первых, трижды закон преобразования отрицаний, а, во-вторых, распределительный закон:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3 \equiv \overline{(x_1 + x_2)} + \overline{(x_2 + x_3)} + \overline{(x_1 + x_3)} \equiv$$
$$\equiv \overline{(x_1 + x_2)\,(x_2 + x_3)} + \overline{(x_1 + x_3)} \equiv \overline{(x_1 + x_2)\,(x_2 + x_3)\,(x_1 + x_3)} \equiv$$
$$\equiv \overline{(x_1 + x_2)\,(x_3 + x_1x_2)} = \overline{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}.$$

Окончательно получаем формулу

$$z_1 = (x_1 + x_2 + x_3)\,\overline{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)} + x_1x_2x_3, \qquad (27.4)$$

у которой содержимое второй скобки совпадает с правой частью окончательной формы выражения (27.3), что делает формулы (27.3) и (27.4) унифицированными по форме. Следовательно, одни и те же элементы релейного устройства могут быть использованы для реализации логических функций по обеим формулам, т. е. формулам (27.3) и (27.4).

Структурная схема (блок-схема) релейного устройства, реализующего формулы (27.3) и (27.4), показана на рис. 27.2, где использованы следующие элементы: один элемент «не» и имеющие по 3 входа 3 элемента «или» и 5 элементов «и» (всего 9 элементов). Если бы формулы (27.3) и (27.4) не были унифицированы, потребовалось бы 13 элементов.

§ 119. Логические элементы

1°. Как указывалось в § 118, *1°* для конструктивной реализации блок-схемы релейного устройства могут быть использованы любые элементы: механические и электромеханические реле; полупроводниковые реле на основе диодов и триодов; мембранные пневмореле, входящие в состав универсальной унифицированной системы промышленной пневмоавтоматики (УСЭППА); элементы системы модулей струйной техники (СМСТ); плунжерные (золотниковые) пневмо- и гидрораспределители и т. д.

Рассмотрим некоторые из этих элементов.

2°. Назовем *логическим элементом устройство, которое может иметь два устойчивых состояния.*

Первое состояние будем обозначать цифрой 0, а второе состояние — цифрой 1. Нетрудно видеть, что любой механизм с одной степенью подвижности может удовлетворять этим условиям, если соблюдены условия устойчивости положений входных и выходных его звеньев. В электрических (электромагнитных) элементах цифра 0 означает «нет тока», а цифра 1 — «есть ток». В пневматических элементах цифра 0 означает «нет давления», а цифра 1 — «есть давление» и т. д. Тогда очевидно, что с помощью логических эле-

ментов могут осуществляться операции, основанные на вышеизложенной теории булевых функций, т. е. действия, описываемые словами «да», «не», «и», «или». Совокупность логических элементов для выполнения заданных логических операций называется *логической функцией*.

Рассмотрим некоторые виды логических элементов.

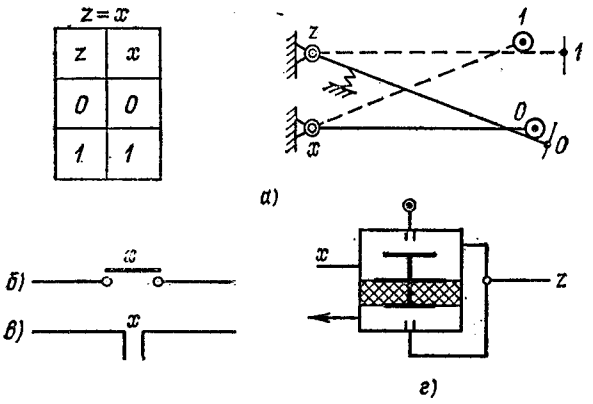


Рис. 27.3. Логические операторы повторения: *а*) логический механизм; *б*) путевой выключатель; *в*) магнитное реле; *г*) мембранное реле УСЭППА.

3°. На рис. 27.3 показаны логические элементы для выполнения операции «да», т. е. операции повторения. Эта операция может быть записана в алгебраической форме в виде

$$z = x, \tag{27.5}$$

т. е. если $x = 0$, то и $z = 0$, и если $x = 1$, то $z = 1$. Иначе говоря, функция z повторяет аргумент x.

Логический элемент, состоящий только из твердых тел, называется иногда *логическим механизмом*. На рис. 27.3, *а* показан логический механизм повторения, представляющий собою обычный рычажной механизм соприкасающихся рычагов. В этом механизме входное звено x может занимать два устойчивых положения: 0 или 1. Выходное звено z при $x = 0$ заперто в положении $z = 0$, а при $x = 1$ передвигается в положение $z = 1$. Фиксация звеньев в указанных положениях и возврат их в исходные положения выполняются с помощью различных комбинаций упоров и пружин.

Электрические логические элементы разделяются на две группы. В первой группе состояние входа характеризуется, как и в логических механизмах, положением какого-либо твердого тела, а состояние выхода — наличием или отсутствием тока в линии. Во второй группе состояния входа и выхода характеризуются наличием или отсутствием тока.

К первой группе относится так называемый *путевой* или *конечный выключатель* или *кнопка* (рис. 27.3, *б*). Подвижная часть путевого выключателя перемещается нажатием кулачка или упора. В ненажатом состоянии подвижной части выключателя электрическая цепь разомкнута, т. е. $x = 0$ и, следовательно, и $z = 0$. В нажатом состоянии цепь замкнута, т. е. $x = 1$ и, следовательно, $z = 1$.

Ко второй группе относится электромагнитное реле, в котором контакты электрической цепи (рис. 27.3, *в*) замыкаются при перемещении якоря электромагнита. При отсутствии тока в обмотке электромагнита цепь будет разомкнута и, следовательно, $x = 0$ и соответственно $z = 0$. При наличии тока $x = 1$ и, следовательно, $z = 1$. Таким образом, электромагнитное реле, так же как и нормально разомкнутый путевой выключатель, выполняет операцию повторения.

На рис. 27.3, *г* показан пример логического пневматического элемента. Это мембранное реле универсальной системы промышленной пневмоавтоматики (УСЭППА), имеющие четыре разобщенных камеры, одна из которых всегда находится под давлением местного источника сжатого воздуха. Эта область на рис. 27.3, *г* отмечена двойной штриховкой.

Подвижная часть реле выполнена в виде штока с тремя мембранами, причем средняя мембрана имеет диаметр, больший диаметров двух других мембран. В зависимости от распределения давления в камерах реле, мембраны прогибаются в ту или иную сторону и подвижный шток, перемещаясь, закрывает верхний или нижний каналы. Для выполнения операции повторения первая линия связи, обозначенная кружком с точкой, присоединяется к напорной линии, вторая линия связи, обозначенная стрелкой, соединяется с атмосферой, а третья линия является выходом. Для выполнения операции повторения вход и выход, напорная линия и атмосфера соединяются с реле так, как это указано на рис. 27.3, *г*. Если нет давления в полости, соединенной со входом, т. е. $x = 0$, то шток под действием давления местного источника идет вверх и закрывает канал, соединенный с напорной линией, т. е. $z = 0$. Если в полости, соединенной со входом, есть давление, т. е. $x = 1$, то шток идет вниз под действием этого давления и открывает канал, соединенный с напорной линией, т. е. $z = 1$. При этом он одновременно закрывает нижний канал, сообщающийся с атмосферой.

4°. С помощью тех же типовых логических элементов могут быть выполнены и другие логические операции. Как было показано выше, логическая операция «не», т. е. операция отрицания в логической форме, может быть записана так:

$$z = \bar{x}, \tag{27.6}$$

что означает, что z есть не x. При этой операции, если $x = 0$, то $z = 1$, и, наоборот, если $x = 1$, то $z = 0$.

На рис. 27.4, *а* показан логический механизм отрицания. На рис. 27.4, *б* показан путевой выключатель. Для выполнения операции отрицания он должен быть нормально замкнутым. Если он не нажат, т. е. $x = 0$, то в цепи есть ток, т. е. $z = 1$. При нажатии на него, т. е. когда $x = 1$, цепь размыкается и тока нет, т. е. $z = 0$. На рис. 27, *в* показана цепь электромагнитного реле, которое должно иметь размыкающие контакты. При отсутствии тока в обмотке электромагнита, т. е. когда $x = 0$, цепь замкнута и, следовательно,

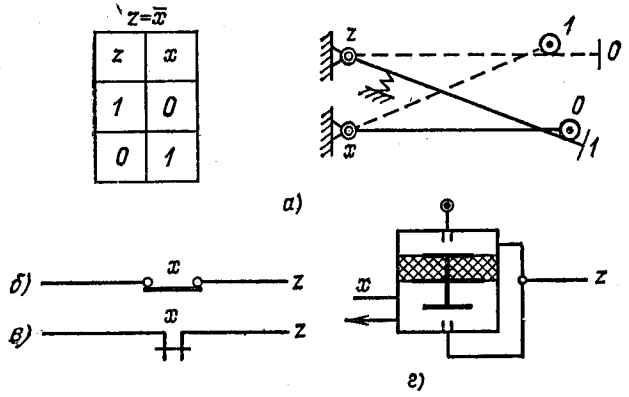


Рис. 27.4. Логические операторы повторения: *а*) логический механизм; *б*) путевой выключатель.

$z = 1$. При наличии тока, т. е. когда $x = 1$, цепь контакта размыкается, т. е. $z = 0$. На рис. 27.4, *г* показано пневматическое мембранное реле УСЭППА. При $x = 0$ шток идет вниз, открывая канал, соединенный с напорной линией, и, следовательно, $z = 1$. Наоборот, при $x = 1$ шток идет вверх, открывая доступ воздуха к выходу, т. е. $z = 0$.

Логическая операция «и», т. е. операция умножения в алгебраической форме, может быть записана так:

$$z = x_1 x_2. \tag{27.7}$$

В зависимости от состояний входов x_1 и x_2 могут быть четыре комбинации x_1, x_2 и z, показанные в верхней таблице на рис. 27.5. Эти операции выполняются логическим механизмом, показанным на рис. 27.5, *а*, или логическими элементами с двумя входами с последовательным включением электрических контактов путевых выключателей (рис. 27.5, *б*) и контактов электромагнитных реле или с помощью мембранного реле УСЭППА так, как это показано на рис. 27.5, *в*.

Логическая операция «или», т. е. операция сложения в логической форме, может быть записана так:

$$z = x_1 + x_2. \tag{27.8}$$

В зависимости от состояний входов x_1 и x_2 могут быть четыре комбинации. В нижней таблице на рис. 27.5, *г* и *д* показано, как эти

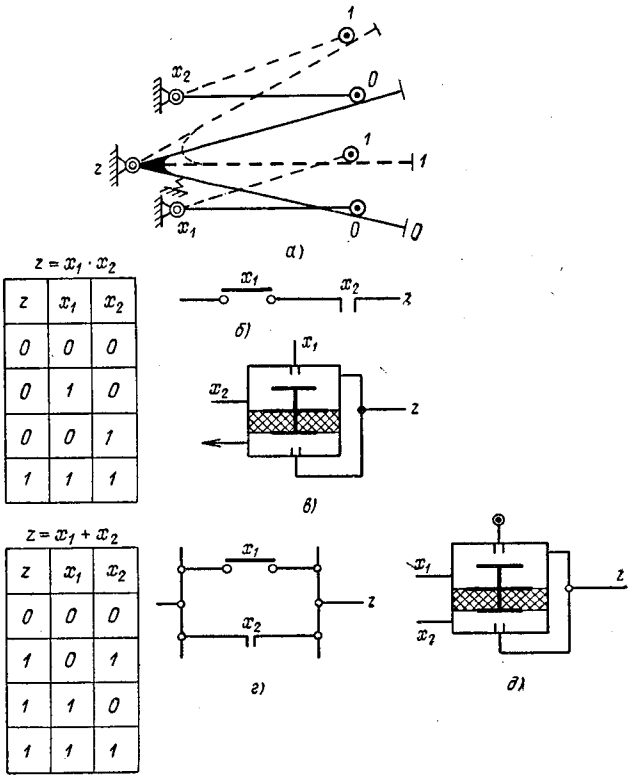


Рис. 27.5. Логические операторы сложения и умножения.

комбинации могут быть выполнены с помощью путевых выключателей и контактов электромагнитных реле или мембранных реле УСЭППА.

В заключение отметим, что в настоящее время разработаны и другие типы логических элементов (механические, электрические, пневматические, гидравлические и т. д.), каждый из которых используется в зависимости от тех конкретных задач, которые должен решить конструктор машины-автомата. Таким образом, используя логические элементы, нетрудно осуществить блок-схему, показанную на рис. 27.2.

Пример [1]). На рис. 27.6, *а* показана схема устройства, состоящего из трех конвейеров, при помощи которых на платформу подаются ящики *Я*. Платформа *П* перемещается, если на ней оказываются одновременно не менее двух ящиков. Перемещение платформы осуществляется специальным механизмом, на рисунке не показанным. Движение подъемного механизма осуществляется пневматическим механизмом, управляемым электромагнитом, включенным в электрическую сеть при помощи контактов x_1, x_2 и x_3, которые включаются поступающими на платформу ящиками.

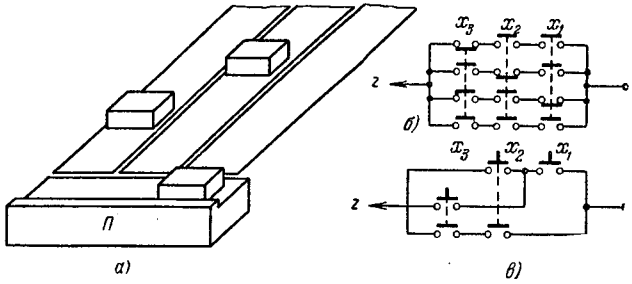


Рис. 27.6. Схема управления конвейеров для подачи ящиков: *а*) общая схема устройства; *б*) схема управления с 12 контактами; *в*) схема управления с 5 контактами.

В подъемном механизме возбуждается сигнал, если

1) включены контакты x_1 и x_2, а контакт x_3 не включен,

2) включены контакты x_1 и x_3, а контакт x_2 не включен

и 3) включены контакты x_2 и x_3, а контакт x_1 не включен.

В соответствии с этими условиями составляем логическую формулу включения путевых выключателей. Согласно § 118 имеем

$$z = x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3. \qquad (A)$$

Как указывалось в § 118, чертой над буквой обозначаем операцию «не», т. е. контакт разомкнут. На основании приведенной формулы составляем структурную схему (рис. 27.6, *б*). Пользуясь правилами алгебры логики, можно выражение (А) значительно упростить. Действительно, представим выражение (А) в следующем виде:

$$z = x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3. \qquad (B)$$

Как было показано выше (см. формулу (27.3)),

$$z = x_1x_2(\bar{x}_3 + x_3) + x_1x_3(\bar{x}_2 + x_2) + x_2x_3(\bar{x}_1 + x_1). \qquad (C)$$

[1]) Пример заимствован из книги: З и н о в ь е в В. А. «Курс теории механизмов и машин», «Наука», Москва, 1972, стр. 363—364.

Так как каждое из выражений в скобках равно единице, то получим (как и выше, в формуле (27.3)):

$$z = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3. \qquad (D)$$

тогда структурная схема (рис. 27.6, *б*) значительно упростится и мы получим структурную схему, показанную на рис. 27.6, *в*, в которой та же задача решается не с помощью двенадцати, а всего с помощью пяти контактов.

ГЛАВА XXVIII
КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ РОБОТОВ И МАНИПУЛЯТОРОВ

§ 120. Промышленные роботы и манипуляторы

1°. Принципиально новым элементом современных технологических систем являются промышленные роботы — класс автономных машин-автоматов, имеющих универсальные исполнительные органы в виде механических «рук», движениями которых автоматически управляют универсальные устройства. В этих машинах гармонически сочетаются механические совершенства технологических и транспортных машин, достижимые на современном уровне развития машиностроения, т. е. высокие показатели точности, быстродействия, мощности, надежности, компактности, с интеллектуальными совершенствами, которые обусловлены современным уровнем техники автоматического управления. Сюда относятся большой объем памяти, обеспечивающий большое число возможных программ действия; удобство изменения программы; способность контролировать правильность своих действий; адаптивность; способность реагировать на изменение внешней среды; способность к самообучению и к оптимальным действиям.

Ширящееся использование промышленных роботов свидетельствует о принципиально более высоком уровне развития тех элементов технологических комплексов, которые издавна применяют для автоматического оперирования штучными объектами обработки и которые обычно носят название *автооператоров* (иногда их называют *автоманипуляторами, самонакладами* и т. д.).

2°. Автооператоры нашли применение буквально во всех отраслях промышленности для операций загрузки — выгрузки, штабелирования и других тому подобных операций.

Схват автооператора, в виде клещевого захвата пневматического присоса, валика с липкой лентой, электромагнита и пр., чаще всего совершает движение по траектории «подъем вертикально вверх, поворот в горизонтальной плоскости, опускание вертикально вниз». Затем движется обратно по тому же пути, при этом длина вертикальных участков траектории может от цикла к циклу изменяться в соот-

ветствии, например, с высотой штабеля. На рис. 28.1 показана кинематическая схема работы такого автооператора, имеющего две степени подвижности. На рис. 28.2 показана схема типового унифицированного гидромеханического блока автооператора, обеспечивающего движение по двум координатам, т. е. обладающего двумя степенями подвижности (свободы), как это показано на рис. 28.1. Выходной орган блока выполнен в виде стакана *1*, жестко соединенного с поршнем *2*, имеющим возможность скользить по шлицевому валу *3*. Продольное возвратно-поступательное движение осуществляется посредством поршня *2* гидроцилиндра двухстороннего действия. Поворот стакана *1* осуществляется посредством поршней *4* и *7*

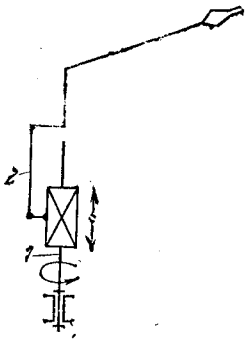


Рис. 28.1. Схема движений автооператора.

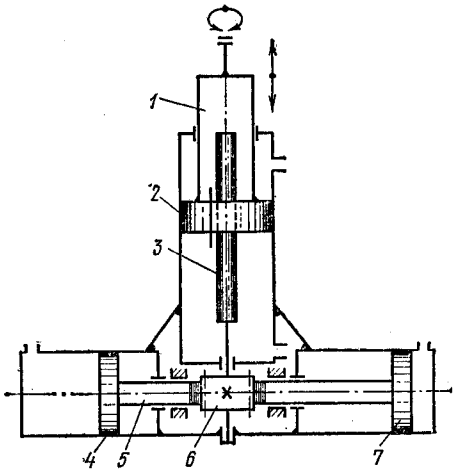


Рис. 28.2. Схема типового унифицированного гидромеханического блока автооператора, обладающего двумя степенями подвижности.

двух гидроцилиндров одностороннего действия. Поршни *4* и *7* связаны общим штоком-рейкой *5*, находящимся в зацеплении с шестерней *6*, жестко сидящей на валу *3*.

К выходному органу одного блока, показанного на рис. 28.2, может быть прикреплен другой, точно такой же блок, в результате чего получается механизм автооператора, обладающий четырьмя степенями подвижности (рис. 28.3).

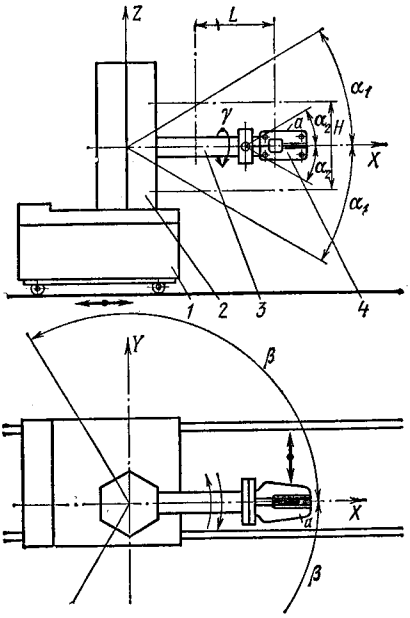
Анологично при скреплении трех типовых блоков, показанных на рис. 28.2, получается механизм автооператора, обладающий шестью степенями подвижности.

3°. Общая схема промышленного робота, оснащенного автономной системой цифрового программного управления или управляемого универсальной ЭВМ, показана на рис. 28.4. Промышленный робот обычно обладает 4—6 степенями подвижности, т. е. обеспечивает перемещение рабочего органа по 4—6 координатам. На схеме

показан промышленный робот, корпус *1* которого перемещается по рельсовому пути. Вертикальная колонна *2*, несущая «руку» *3*, может поворачиваться в горизонтальной плоскости на угол 2β. «Рука» *3* может поворачиваться в вертикальной плоскости на угол $2\alpha_1$ и вокруг оси X на угол γ, перемещаться вниз — вверх на расстояние H и выдвигаться вперед—назад на расстояние L. Схват *4* может поворачиваться на угол $2\alpha_2$ и осуществлять смыкание — размыкание губок.

Промышленные роботы обычно имеют автономную систему управления или управления по схеме прямого управления ЭВМ—ЦПУ.

На рис. 28.5 показан наиболее распространенный вид промышленного робота. На рис. 28.6 дана его кинематическая схема. Если учитывать



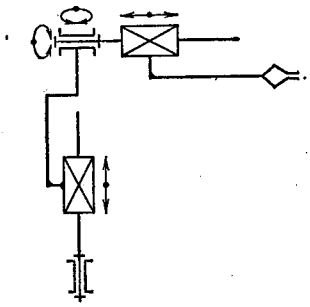


Рис. 28.3. Кинематическая схема автооператора, обладающего четырьмя степенями подвижности.

Рис. 28.4. Общая схема промышленного робота.

движение губок, то механизм на рис. 28.6 будет обладать шестью или семью степенями подвижности. На рис. 28.7 показано, в каких границах могут осуществляться движения механизма робота.

Промышленные роботы как циклически действующие элементы используются в составе технологических комплексов для выполнения самых различных операций: как собственно рабочих (сварка, окраска, сборка), так и цикловых вспомогательных (разгрузка — загрузка прессов, штампов, литьевых машин, металлорежущих станков, контрольных автоматов).

4°. Манипулятором называют техническое устройство, предназначенное для воспроизведения рабочих функций рук человека. Роботами-манипуляторами называют манипуляторы, снабженные органами перемещения и системами автоматического управления.

Понятие «манипулятор» охватывает широкий класс управляемых человеком, непосредственно или по каналам связи, технических устройств, предназначенных для воспроизведения некоторых двигательных функций рук человека, в ходе выполнения которых осуществляется целенаправленное манипулирование объектом обработки или инструментом.

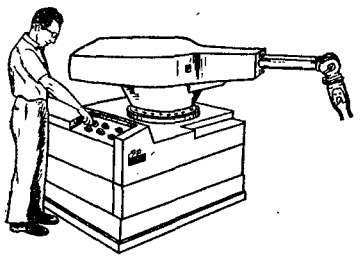


Рис. 28.5. Общий вид промышленного робота.

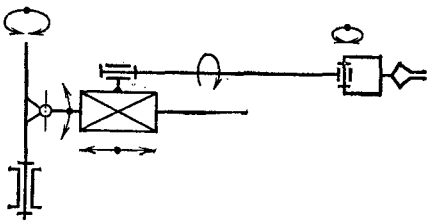
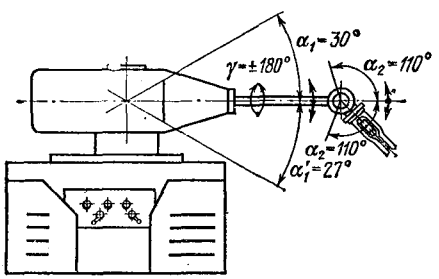


Рис. 28.6. Кинематическая схема робота.



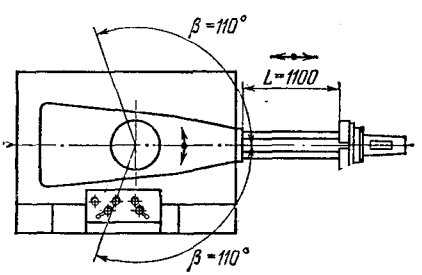


Рис. 28.7. Схема осуществляемых роботом движений.

Следует выделить такой специфический подкласс манипуляторов, как управляемые биотоками манипуляторы, идея которых положена в основу конструкции активного протеза руки, разработанного группой ученых и инженеров под руководством А. Е. Кобринского.

На рис. 28.8 показан электрогидравлический биоточный манипулятор. От токосъемника *1* (накладных электродов, размещенных в браслете в области расположения мышц, управляющих кистью) биоэлектрический сигнал через усилитель *2* (имеющий автономные блоки питания *10*) поступает в электрогидравлические золотники *3*, снабженные иглами *8*, обеспечивающими поступление масла в гидроцилиндр *6* от гидромотора *5*, приводимого в движение электродвигателем *4*, или слив масла в резервуар *9*. В зависимости от того, в какую полость гидроцилиндра *6* поступает жидкость, пальцы кисти *7* замыкаются в положении щепоти или распрямляются.

В протезах с биоэлектрическим управлением в качестве привода движения большого пальца и блока остальных четырех пальцев используется миниатюрный электродвигатель, управляемый двумя независимыми биоэлектрическими сигналами: один для управления схватыванием, другой — для управления раскрытием.

Технически возможно очувствление манипуляторов (в том числе и протезов) по силе схвата, когда создается обратная связь с тем,

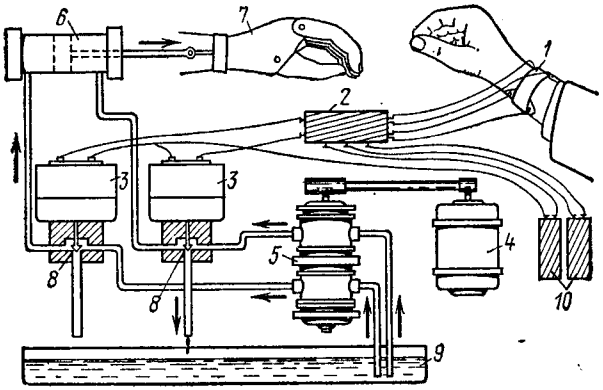


Рис. 28.8. Электрогидравлический биоточный манипулятор.

чтобы оператор получал ощущения значения давления в различных участках рабочего органа (схвата или искусственной кисти).

5°. Манипулятор, предназначенный для работы в основном в закрытом помещении, показан на рис. 28.9. Тележка *2*, несущая шар-

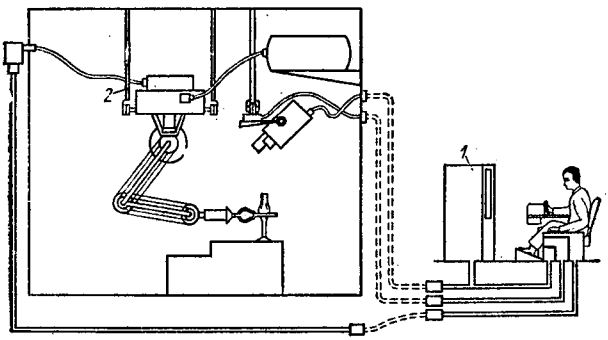


Рис. 28.9. Стационарный манипулятор с дистанционным управлением.

нирно-стержневую «руку», состоящую из «плеча» и «предплечья» со схватом, перемещается по подвесным рельсовым путям в горизонтальной плоскости в двух взаимно перпендикулярных направле-

ниях. Связь с пультом управления *1* осуществляется по кабельному каналу. Наблюдение осуществляется с помощью телевизионной системы, управление — ручное, с пульта, или с помощью ЭВМ, или во взаимодействии человека и ЭВМ.

6°. Широкое распространение, особенно при манипулировании различными опасными для человека веществами, получили копирующие манипуляторы (рис. 28.10). Перемещение тележки манипулятора осуществляется посредством управляющих импульсов с кнопочного пульта станции управления *1*. Все движения «рукой» *2* манипулятора осуществляются с помощью управляющей «руки» *3*, установленной на станции управления. Движения управляющей

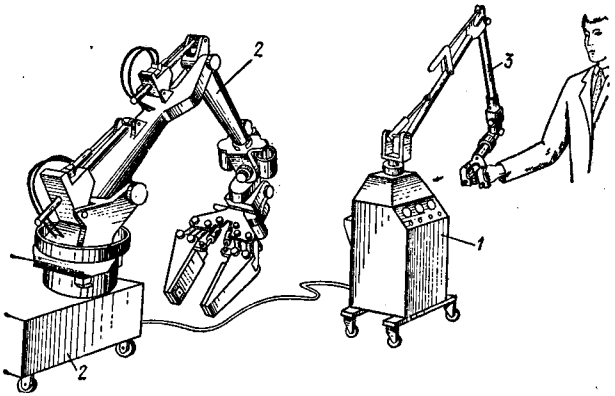


Рис. 28.10. Копирующий манипулятор.

«руки» *3*, производимые человеком, с помощью следящей системы воспроизводятся «рукой» *2* манипулятора. Разумеется, при этом усилия, развиваемые манипулятором, могут значительно превосходить усилие человека.

Манипуляторы с автономным или централизованным программным управлением, а также манипуляторы с ручным управлением, в том числе и копирующие, с телеуправлением, в виде стационарных или перемещающихся по суше (колесных, гусеничных, стопоходящих экипажей), в воде, в воздухе или в безвоздушном пространстве устройств имеют широкие перспективы использования при освоении морских глубин, космоса, при манипулировании громоздкими объектами (срубленными деревьями, крупногабаритными элементами машиностроительных и строительных конструкций и т. п.).

7°. Крупнейшим достижением техники наших дней являются телеуправляемые советские «луноходы», снабженные своеобразными манипуляторами, в частности, для взятия проб лунного грунта.

Развитие медицины и медико-биологических исследований и микроминиатюризация аппаратуры вызвали к жизни микроманипуля-

торы, позволяющие с высокой точностью оперировать миниатюрными объектами.

Как было показано выше (см. § 11), механизмы «рук» манипулятора образованы из незамкнутых кинематических цепей с несколькими степенями подвижности, чаще всего с шестью или семью. В основном применяются механизмы с парами V класса. «Рука» по каждой степени свободы оснащена отдельным приводом. Управление приводами может осуществляться от автономного программного устройства, от ЭВМ или непосредственно человеком-оператором.

«Руки» промышленных роботов и автоматически действующих манипуляторов, обладающие большим числом степеней подвижности, могут совершать одну и ту же операцию, например перенос груза из одной точки в другую, множеством возможных способов [1]).

Перспективы развития промышленных роботов и манипуляторов связаны с приданием им способности осязать, обонять, видеть, ощущать дистанцию, уметь распознавать образы, реагировать на тепловые и электромагнитные излучения широкого диапазона.

Проблема оптимального проектирования, создания и внедрения в широких масштабах промышленных роботов и манипуляторов имеет первостепенное социальное и экономическое значение, ибо все эти устройства предназначены для того, чтобы облегчить человеку выполнение наиболее тяжелых и опасных операций как на земле, так и при освоении океанских глубин и космоса.

8°. Многообразие существующих манипуляторов делает необходимым их классификацию. В ее основе положены метод управления, вид связи между управляющими и исполнительными механизмами, а также некоторые конструктивные признаки [2]). Обычно манипулятор с автоматической системой управления называют роботом-манипулятором или просто роботом.

Манипуляторы являются сложными техническими устройствами, их созданием и исследованием занимаются специалисты в области механики, автоматики и кибернетики. Мы будем рассматривать манипуляторы в основном с точки зрения общей теории механизмов, т. е. как пространственные системы с несколькими степенями свободы. При изучении манипуляторов с этих позиций необходимо:

1) исследование структуры кинематической цепи механической руки;

---

[1]) Кобринский А. Е., Степаненко Ю. А., Некоторые проблемы теории манипуляторов, сб. «Механика машин», вып. 7—8, «Наука», Москва, 1967.
Кулешов В. С., Лакота Н. А., Динамика систем управления манипуляторами, «Энергия», Москва, 1971.

[2]) При изложении последующего материала была использована статья А. Г. Овакимова и С. С. Аншина «Элементы структуры кинематики и геометрии некоторых типов манипуляторов», опубликованная в сборнике научно-методических статей по теории механизмов и машин, вып. 3, «Высшая школа», Москва, 1973.

2) исследование вопроса о передаче относительных перемещений звеньев манипулятора с управляющего механизма на исполнительный;

3) выявление способов связи между управляющим и исполнительным механизмами манипулятора.

Вопрос о структуре пространственных незамкнутых кинематических цепей был нами рассмотрен выше (см. § 11). В настоящей главе мы остановимся на тех вопросах структуры манипуляторов, которые имеют непосредственное к ним отношение.

§ 121. Относительные движения звеньев манипулятора

1°. Задача о копировании захватом исполнительного механизма манипулятора перемещений, задаваемых управляющим механизмом, сводится к тому, что звенья первого механизма должны осуществлять те же относительные движения, какие имеют место во втором. Система передач для воспроизведения этих движений может быть различной. Например, в некоторых манипуляторах управляющий механизм оснащается датчиком относительных перемещений его звеньев. Сервоприводы, расположенные непосредственно на подвижных звеньях исполнительного механизма, управляются сигналами этих датчиков и приводят исполнительный механизм в положение, соответствующее положению задающего механизма.

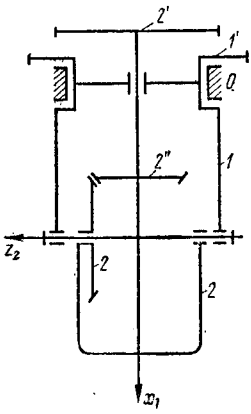


Рис. 28.11. Схема зубчатого механизма манипулятора.

2°. В копирующих манипуляторах других видов относительные движения звеньев сначала передаются на основание посредством механических передач (зубчатых дифференциальных, тросовых рычажных и др.), проходящих вдоль осей звеньев. Затем эти движения, преобразованные во вращение различных элементов (зубчатых колес, блоков и др.) с неподвижно закрепленными на основании осями, передаются на исполнительный механизм. В качестве примера остановимся на передаче относительных движений с помощью зубчатых дифференциальных механизмов.

На рис. 28.11 изображена простейшая система с двумя степенями свободы. Она дает возможность осуществлять два независимых движения — вращение вокруг осей x_1 и z_2 (эти оси определяют положительное направление поворота), а также передавать на основание относительные перемещения звена *2* по отношению к звену *1*. Сходные по строению схемы применяются для передачи и большого числа относительных движений. В качестве обобщенных координат

q_1 и q_2 системы примем углы φ_{10} и φ_{21} относительного поворота соседних звеньев *1* и *0* и *2* и *1*.

При работе данной схемы имеет место так называемое кинематическое наложение движений. Физическая суть его состоит в том, что изменение угла φ_{10} (поворот вокруг оси x_1) вызывает поворот обоих соосных колес *1'* и *2'*. Аналитически это явление выражается в том, что углы поворота ψ_1 и ψ_2 колес *1'* и *2'* суть функции обеих обобщенных координат:

$$\psi_1 = \psi_1(q_1, q_2),$$
$$\psi_2 = \psi_2(q_1, q_2).$$

Связь между указанными величинами может быть установлена с помощью частных передаточных отношений. Нахождение последних связано с рассмотрением двух различных механизмов с одной степенью свободы, которые получаются из заданной кинематической цепи, если в ней изменяемой считать только одну (каждый раз иную) обобщенную координату. В полученных таким образом механизмах с одной степенью свободы необходимо определить передаточные отношения колес *1'* и *2'* по соответствующим обобщенным координатам.

Для рассматриваемой схемы будем иметь

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1} = 1, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial q_2} = \frac{\omega_{2'}}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_{2''}}. \tag{28.1}$$

§ 122. Связи между управляющим и исполнительным механизмами

1°. В зависимости от типа связи между управляющим и исполнительным механизмами копирующие манипуляторы могут быть подразделены на три группы.

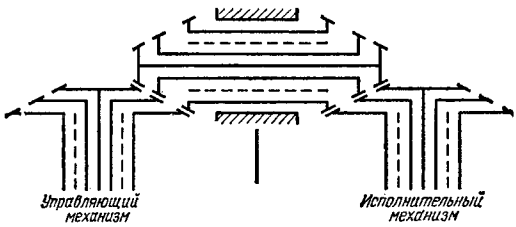


Рис. 28.12. Схема механического привода манипулятора.

Манипуляторы с механической (кинематической) связью. Механические копирующие манипуляторы были первыми устройствами, которые начали применяться в опасных для жизнедеятельности человека зонах. В этих манипуляторах обе руки связаны механическими передачами: зубчатыми (рис. 28.12), тросово-ленточными

и другими. Механические передачи являются реверсивными и имеют высокий к. п. д., вследствие чего на задающей руке достаточно точно отражаются усилия, прикладываемые к исполнительной.

Грузоподъемность современных механических копирующих манипуляторов колеблется от 3 до 16 *кГ*. Эти манипуляторы просты, надежны, удобны в работе. Их существенными недостатками являются ограничения по грузоподъемности, которые лимитируются силой руки оператора, а также невозможность использования их для целей дистанционного манипулирования.

В нашей стране широкое распространение при работе в горячих камерах получили манипуляторы марок М-22 и М-28 и их модификации. За рубежом наиболее известными манипуляторами являются «Модель-7» и «Модель-8» семейства механических копирующих манипуляторов, разработанных Аргонской национальной лабораторией (США) и получивших название «Master-Slave». Грузоподъемность этих моделей соответственно 4 *кГ* и 8 *кГ*.

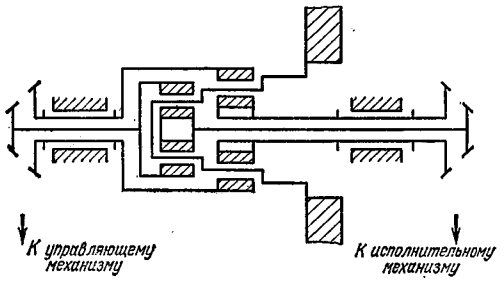


Рис. 28.13. Схема магнитного привода манипулятора.

2°. Манипуляторы с магнитным приводом. Манипуляторы этого типа находят применение в основном в тех случаях, когда необходимо обеспечить абсолютную герметизацию объема камер (работы в зонах больших давлений, глубокого вакуума и т. п.). В качестве приводов в них используются муфты на постоянных магнитах, позволяющие передавать движения через «глухую» стенку, без проемов под передаточные механизмы. Манипуляторы с магнитными муфтами бывают двух видов: с торцовыми магнитными муфтами и с цилиндрическими магнитными муфтами (рис. 28.13).

3°. Сервоманипуляторы. Это название укрепилось за копирующими манипуляторами, в которых управляющий и исполнительный механизмы, расположенные дистанционно, связаны системами управления особого вида — обратимыми следящими системами (ОСС). ОСС обеспечивают однозначное соответствие по положению между задающими и исполнительными органами, а также отражают на первом усилия, приложенные ко второму. Число ОСС равно числу степеней свободы манипулятора.

Применяется также привод на сельсинах. Он состоит из сельсина-датчика и сельсина-приемника, имеющих конструкцию обычного мотора. Обмотки роторов и статоров обоих сельсинов соединены между собой по индикаторной схеме. Роторы сель-

синов-датчиков связаны со звеньями управляющего механизма, а роторы сельсинов-приемников — со звеньями исполнительного механизма (рис. 28.14). Если вращать ротор сельсина-датчика, то при отсутствии на исполнительном механизме нагрузки ротор сельсина-приемника будет иметь синхронное с ним вращение.

Нагрузка на ротор исполнительного механизма приводит к рассогласованию — появляется ошибка $\delta = \psi - \tilde{\psi}$ в положениях обоих роторов, где ψ — угол поворота сельсина-приемника, $\tilde{\psi}$ — угол поворота сельсина-датчика. Рассогласование вызывает появление в сельсинной паре синхронизирующего момента, который стремится ликвидировать имеющееся рассогласование. При этом синхронизирующий момент на приемнике направлен против нагрузочного момента, а на датчике совпадает с ним. Величина момента есть функция от рассогласования.

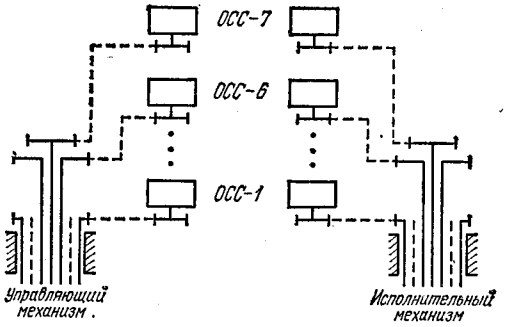


Рис. 28.14. Схема сельсинного привода манипулятора.

Сервоманипуляторы получили значительное распространение. Их типичным представителем является итальянский манипулятор «Maskot-1». Он имеет семь степеней свободы и состоит из пары задающих механических рук, смонтированных на соответствующей опорной конструкции, и пары исполнительных механических рук, смонтированных на телеуправляемой тележке, а также сервомеханической связи. Грузоподъемность этого манипулятора 23 *кГ*.

4°. *Манипуляторы с кнопочным управлением.* Манипуляторы данного вида состоят, по существу, из исполнительного органа, который оснащен силовыми приводами (электрическими, гидравлическими или пневматическими) и связан с пультом управления электрокабелем. Число степеней свободы этих манипуляторов доходит до 9—10. Они могут быть рассчитаны почти на любую грузоподъемность.

Для увеличения зоны обслуживания исполнительный орган обычно устанавливается на крановых системах различного типа или на подвижных автономных основаниях. За последними системами закрепилось название «моботы».

На рис. 28.15 представлен мобот «Жук», созданный фирмой «General Electric» для обслуживания ядерных ракетных двигателей. Каждая рука имеет девять степеней свободы. Вес мобота 85 *Т*, суммарная мощность всех двигателей 660 *л.с.* Грузоподъемность рук в вытянутом положении 45 *кГ*.

Манипуляторы с кнопочным управлением при необходимости могут снабжаться программирующим устройством для работы в автоматическом режиме по записанным командам.

5°. Манипуляторы с автоматическим управлением. Эти манипуляторы могут быть подразделены на два типа. Первый тип — манипуляторы с жесткой программой действия, они воспроизводят определенную совокупность движений, включенных в программу. Подобная программа обычно записывается на магнитную ленту в ходе первого цикла работ, выполняемого оператором, а затем периодически повторяется.

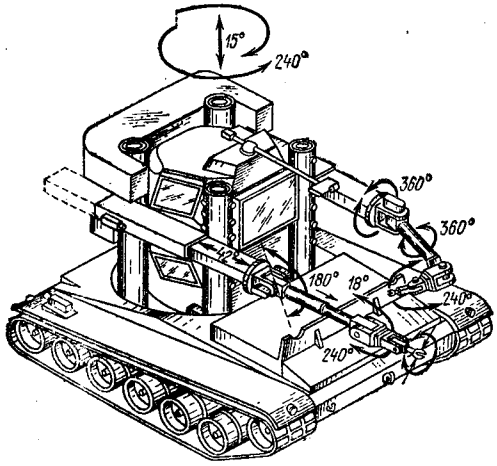


Рис. 28.15. Мобот «Жук».

В манипуляторах второго типа операции движений определяются ЭВМ на основе информации о внешней среде. Макеты этих манипуляторов реализуют пока относительно несложные программы. Однако такое направление развития манипуляторов является весьма перспективным.

В настоящее время разрабатываются роботы-манипуляторы с так называемым «искусственным интеллектом». Эти роботы обладают чувством осязания — с помощью специальных датчиков, «зрением» — с помощью телевизионной аппаратуры и т. д. Они способны выполнять элементарные операции сборки, перемещения объектов по заданной программе и т. д. Эти машины обладают свойством адаптации и самообучения.

§ 123. Некоторые вопросы геометрии манипуляторов

1°. Копирующие манипуляторы состоят из двух механизмов — управляющего и исполнительного. Анализ работы таких манипуляторов связан с исследованием обоих этих механизмов. В тех случаях, когда последние соединены друг с другом посредством кинематической связи, их движения полностью совпадают. В манипуляторах с магнитными муфтами или со следящими приводами исполнительный механизм воспроизводит движения управляющего механизма лишь приближенно. В подобных системах постановка задач кинематического анализа управляющего и исполнительного

механизмов оказывается различной. В первом по заданному пространственному движению захвата определяются движения звеньев ведомой кинематической цепи. Во втором по относительным движениям звеньев находится движение захвата в системе с несколькими степенями свободы.

2°. Рассмотрим задачу о положениях ведомых звеньев манипулятора. Захват управляющего механизма, перемещаемого оператором, является ведущим звеном с пространственным движением. Это движение можно задать с помощью шести функций:

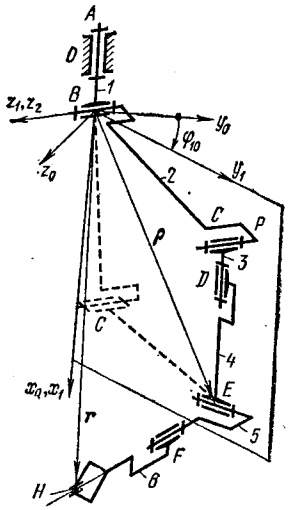


Рис. 28.16. Кинематическая схема «руки» манипулятора.

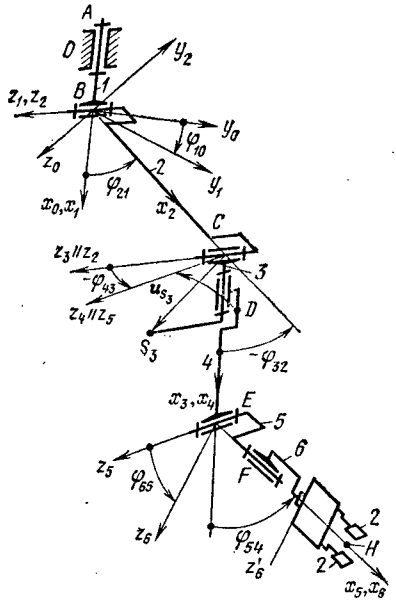


Рис. 28.17. Схема расположения координатных осей звеньев «руки» манипулятора.

$$\left.\begin{aligned} x_H = x_H(t), \quad y_H = y_H(t), \quad z_H = z_H(t), \\ \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t), \end{aligned}\right\} \tag{28.2}$$

где x_H, y_H, z_H — координаты центра захвата, ψ, θ, φ — эйлеровы углы. Первые три функции определяют перемещение центра захвата, а остальные три — вращательное движение относительно этого центра.

В задачу о положениях включаем определение положений ведомых звеньев в системе координат $Bx_0y_0z_0$ (рис. 28.16), углов относительного поворота звеньев и абсолютных координат точки на звене механизма (рис. 28.17). Для решения этой задачи исполь-

зуется метод замкнутого векторного контура с некоторыми дополнениями к нему, изложенными в работе А. Г. Овакимова [1]).

Вначале определим положение ведомых звеньев BC и CE. Пронумеруем подвижные звенья $\nu = 1, 2, \ldots, 6$ манипулятора, начиная с ближайшего к стойке звена. Обозначим через $l_2 = l_{BC}$, $l_4 = l_{CE}$, $l_6 = l_{EH}$ длины звеньев, а через $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_4$, $\boldsymbol{i}_6$ — единичные векторы осей звеньев *2*, *4* и *6*.

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки H и орт $\boldsymbol{i}_6$ известны из функций (28.2), поэтому известными являются и проекции ρ_x, ρ_y, ρ_z радиуса-вектора точки E:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6 = \boldsymbol{i}_2 l_2 + \boldsymbol{i}_4 l_4. \tag{28.3}$$

Этот вектор расположен в плоскости P, называемой базовой. Отсюда следует, что

$$\sin\varphi_{10} = \rho_z / \sqrt{\rho_y^2 + \rho_z^2}, \quad \cos\varphi_{10} = \rho_y / \sqrt{\rho_y^2 + \rho_z^2}.$$

Для определения положения осей звеньев *2* и *4* имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{i}_2 l_2 + \boldsymbol{i}_4 l_4 = \boldsymbol{\rho}, \\ &\boldsymbol{i}_2^2 = 1, \ \boldsymbol{i}_4^2 = 1, \ (\boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{i}_0 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{28.4}$$

последнее из них выражает компланарность векторов $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{i}_0$ и перпендикулярность вектора $\boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{\rho}$ плоскости P.

Исключим вектор $\boldsymbol{i}_4$, перенося в первом из уравнений системы (28.4) вектор $\boldsymbol{i}_4 l_4$ в правую часть и возводя обе части уравнения в квадрат:

$$(\boldsymbol{i}_2 l_2 - \boldsymbol{\rho}_2)^2 = (-\boldsymbol{i}_4 l_4)^2. \tag{28.5}$$

После преобразований получим

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{i}_2 = b,$$

где величина $b = (l_2^2 - l_4^2 + \rho^2)/2l_2$, а $\boldsymbol{\rho}^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2$. Выражая векторы, входящие в уравнения (28.4) и (28.5), через их проекции, придем к такой системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &i_{2x}^2 + i_{2y}^2 + i_{2z}^2 = 1, \\ &i_{2y}\rho_z - i_{2x}\rho_y = 0, \\ &\rho_x i_{2x} + \rho_y i_{2y} + \rho_z i_{2z} = b. \end{aligned}\right\} \tag{28.6}$$

Из последних двух уравнений системы (28.6) найдем

$$i_{2y} = \frac{1}{\rho_y^2 + \rho_z^2}(b\rho_y - \rho_x \rho_y i_{2x}),$$

$$i_{2z} = \frac{1}{\rho_y^2 + \rho_z^2}(b\rho_z - \rho_x \rho_z i_{2x}).$$

---

[1]) Овакимов А. Г., Кинематическое исследование пространственной цепи управления манипулятора, Изв. вузов, серия «Машиностроение», 1971, № 14.

Подставляя эти выражения в первое из уравнений системы (28.6) и разрешая его относительно i_{2x}, получим

$$i_{2x}=\frac{1}{\rho^2}\left(b\rho_x \pm \sqrt{(\rho_y^2+\rho_z^2)(\rho^2-b^2)}\right). \qquad (28.7)$$

Мы получаем два решения, отличающиеся знаком перед радикалом, обусловленные тем, что одному и тому же положению захвата отвечают две симметричные по отношению к вектору $\boldsymbol{\rho}$ схемы расположения осей звеньев *2* и *4* (рис. 28.16).

После определения орта $\boldsymbol{i}_2$ можно найти единичный вектор $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{i}_4$:

$$\boldsymbol{i}_3=(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{i}_2 l_2)/l_4.$$

3°. Для решения остальных вопросов задачи о положениях со звеньями $\nu = 1, 2, \ldots, 6$ связываем декартовы системы координат (рис. 28.17). В каждой из точек *B*, *C*, *E* помещены начала координатных систем двух соседних звеньев, соответственно *1* и *2*, *3* и *4*, *5* и *6*. Оси x_ν направляем вдоль осей *AB*, *BC*, *CE* и *EH* звеньев ($x_1 \equiv x_0$, $x_3 \equiv x_4$, $x_5 \equiv x_6$). Оси $z_1 \equiv z_2$, z_3 и z_5 совмещены с осями шарниров *B*, *C* и *E* ($z_3 \parallel z_2$), а ось z_4 направлена параллельно и в ту же сторону, что и ось z_5. Таким образом, $\boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}_0$, $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{i}_4$, $\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3$, $\boldsymbol{k}_4 = \boldsymbol{k}_5$, а искомые углы относительного поворота звеньев равны

$$\varphi_{10}=\widehat{y_1, y_0}\,(x_0); \quad \varphi_{21}=\widehat{x_2, x_1}\,(z_1); \quad \varphi_{32}=\widehat{x_3, x_2}\,(z_2);$$
$$\varphi_{43}=\widehat{z_4, z_3}\,(x_3); \quad \varphi_{54}=\widehat{x_5, x_4}\,(z_4); \quad \varphi_{65}=\widehat{z_6, z_5}\,(x_5).$$

В скобках указаны оси, перпендикулярные плоскости соответствующих углов и определяющие положительное направление их измерения.

Определим орт $\boldsymbol{k}_5$, для чего вычислим предварительно функции

$$\cos\varphi_{54}=\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_6, \quad \sin\varphi_{54}=\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi_{54}}.$$

Два значения угла φ_{54}, отличающиеся знаком перед радикалом, обусловлены тем, что при одном и том же положении захвата ось z_5 может быть направлена в ту или другую сторону.

Так как ось z_5 шарнира *E* ортогональна осям $x_3 \equiv x_4$ и $x_5 \equiv x_6$, то орт $\boldsymbol{k}_5$ этой оси может быть определен из выражения

$$\boldsymbol{k}_5=\frac{\boldsymbol{i}_3\times\boldsymbol{i}_6}{\sin\varphi_{54}}.$$

Для звеньев $\nu = 2, 3, 4, 5$ орты $\boldsymbol{j}_\nu$ их осей y_ν определяются по найденным ортам осей x_ν и z_ν из выражения $\boldsymbol{j}_\nu = \boldsymbol{k}_\nu \times \boldsymbol{i}_\nu$. После этого могут быть вычислены функции

$$\cos\varphi_{\nu,\nu-1}=\boldsymbol{i}_\nu\cdot\boldsymbol{i}_{\nu-1}, \quad \sin\varphi_{\nu,\nu-1}=\boldsymbol{i}_\nu\cdot\boldsymbol{j}_{\nu-1} \quad (\nu=2,\ 3,\ 5),$$
$$\cos\varphi_{\nu,\nu-1}=\boldsymbol{k}_\nu\cdot\boldsymbol{k}_{\nu-1}, \quad \sin\varphi_{\nu,\nu-1}=-\boldsymbol{k}_\nu\cdot\boldsymbol{j}_{\nu-1} \quad (\nu=4),$$

которые однозначно определяют величины соответствующих углов.

Теперь у нас имеются все необходимые данные для того, чтобы составить выражение радиуса-вектора любой точки механизма и определить его абсолютные координаты. В частности, для некоторой точки S_3 на звене 3 (рис. 28.17) с относительными координатами u_1, u_2, u_3 будем иметь

$$r_{S_3} = i_2 l_2 + i_3 u_1 + j_3 u_2 + k_3 u_3.$$

4°. В теории манипуляторов для интегральной оценки геометрических качеств манипулятора предлагается коэффициент сервиса.

Шесть степеней свободы, которыми обладает захват, позволяют ему занимать произвольное положение в некоторой области пространства. Эту область ограничивают конкретные связи кинематической цепи, в том числе и длины звеньев.

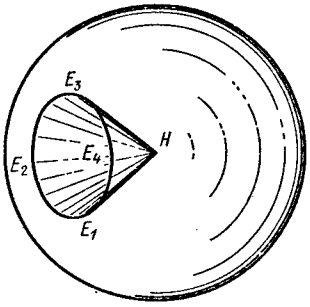


Рис. 28.18. К определению коэффициента сервиса манипулятора.

Пусть, как и ранее, точка H — центр захвата, а l_6 — его длина. Рабочим пространством V называется область возможных положений центра захвата, допускаемая связями манипулятора. Совокупность возможных положений оси захвата, при которых центр его H находится в данной точке рабочего пространства, определяет телесный угол

$$\gamma = \frac{S_{E_1E_2E_3E_4}}{l_6^2}, \qquad (28.8)$$

называемый *пространственным углом обслуживания* или *углом сервиса* (рис. 28.18). Здесь $S_{E_1E_2E_3E_4}$ — площадь сферической поверхности шарового сектора. Наибольшее значение угла сервиса равно 4π.

Отношение

$$\Theta = \frac{\gamma}{4\pi} \qquad (28.9)$$

называют коэффициентом сервиса в данной точке. Он может изменяться от 0 до 1: $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$.

Средняя величина коэффициента сервиса в рабочем пространстве есть

$$\Theta_{ср} = \frac{1}{V} \int_V \Theta \, dV. \qquad (28.10)$$

Дальнейшее изложение будем вести на примере конкретного манипулятора (см. рис. 28.16). Исследуем для него расположение зон сервиса.

5°. В выражении (28.3) ρ есть одна из сторон треугольника BCE, лежащего в плоскости P. Поэтому имеем очевидные неравенства:

$$|r - i_6 l_6| \leqslant |l_2 + l_4|, \qquad (28.11)$$

$$|r - i_6 l_6| \geqslant |l_2 - l_4|. \qquad (28.12)$$

Выявим зоны рабочего пространства, в которых коэффициент сервиса $\Theta = 1$. Эти зоны мы будем искать в виде пространства, ограниченного полусферами. Определим наружный предел зоны. Задача сводится к нахождению таких точек с радиусами-векторами $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_1$, в которых при некотором направлении вектора $\boldsymbol{i}_6 l_6$ величина $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6|$ достигнет наибольшего значения $l_2 + l_4$:

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6|_{\max} = |\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{i}_6 l_6| = l_2 + l_4. \qquad (28.13)$$

Отметим, что для любой точки, т. е. для любого $\boldsymbol{r}$, абсолютная величина разности $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6$ будет наибольшей, когда векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{i}_6 l_6$ противоположны по направлению (рис. 28.19,*а,б*). В этом случае оба вектора располагаются в плоскости P, а модуль их разности равен

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6|_{\max} = r + l_6.$$

Подставляя последнее выражение в (28.13), получим

$$R_1 = l_2 + l_4 - l_6.$$

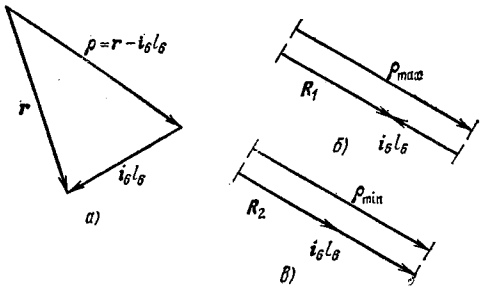


Рис. 28.19. Векторные картины для определения $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$.

Аналогично задача определения радиуса R_2 внутренней полусферы, ограничивающей зону 100%-ного (или полного) сервиса, сводится к нахождению таких точек, радиусы-векторы $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_2$ которых удовлетворяют условию

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6| = |l_2 - l_4|.$$

Для любого $\boldsymbol{r}$ разность $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6$ будет по модулю наименьшей, когда векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{i}_6 l_6$ направлены в одну сторону (рис. 28.19,*а,в*). В этом случае они располагаются в плоскости P, а модуль разности векторов равен модулю разности длин векторов:

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6|_{\min} = |\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{i}_6 l_6| = |R_2 - l_6|.$$

Подставляем это выражение в (28.13), получим

$$|R_2 - l_6| = |l_2 - l_4|,$$

или

$$R_2' = |l_2 - l_4| + l_6, \qquad R_2'' = l_6 - |l_2 - l_4|.$$

Таким образом, зоны полного сервиса имеют место при

$$|l_2 - l_4| + l_6 \leqslant r \leqslant l_2 + l_4 - l_6,$$

ибо следует взять бо́льшую из двух величин R_2' и R_2''.

На рис. 28.20 схематично изображены конфигурации манипулятора при расположении центра захвата на границах указанных зон.

Для точек вне этих зон необходимо проверять по неравенствам (28.11) и (28.12), какие положения оси захвата возможны, а какие не

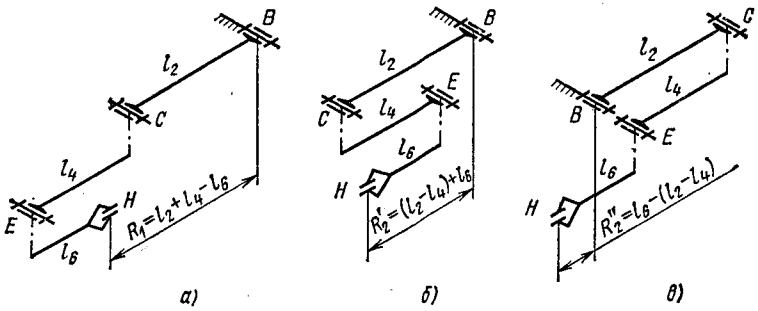


Рис. 28.20. Схемы предельных положений механизма «руки».

допускаются связями. Для точек вне сферы радиуса $R_1 = l_2 + l_4 - l_6$ проверка производится по уравнению $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6)^2 \leqslant (l_2 + l_4)^2$, а для точек внутри сферы радиуса $R_2' = |\, l_2 - l_4 \,| + l_6$ по уравнению

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}_6 l_6)^2 \geqslant (l_2 - l_4)^2.$$

§ 124. Блок-схемы автоматического управления

1°. Роботы и манипуляторы могут иметь как ручное, так и автоматическое управление. В случае ручного управления манипулятором необходимо, чтобы между силами, приложенными к звеньям манипулятора, и силами, которые действуют на руки оператора, было бы какое-то соответствие, т. е. необходимо, чтобы оператор как бы «чувствовал» те усилия, которые действуют на схват манипулятора. Для дистанционного управления копирующим манипулятором могут быть применены различные виды следящих систем, но непременным должно быть условие, чтобы эти системы в какой-то мере «чувствовали» усилия, действующие на схват манипулятора.

2°. На рис. 28.21 показана одна из возможных систем управления. Эта система называется обратимой следящей системой. В этой системе обратная связь не только информирует оператора о величине сил, действующих на исполнительный орган, но и соответствующим образом изменяет положение задающих механизмов. Эта система называется двухсторонней или обратимой, так как ее следящий привод выполнен так, что в нем можно по желанию менять вход и выход. Оператор прикладывает момент сил M_1 (рис. 28.21). Устройство «очувствления» измеряет момент M_2 на выходе привода

и воздействует на входное устройство задающего механизма моментом M_1'. Исполнительный механизм воздействует на объект моментом M_2'. В этой системе передаваемый момент M_1' влияет на положение задающих звеньев и величин рассогласования, равняя

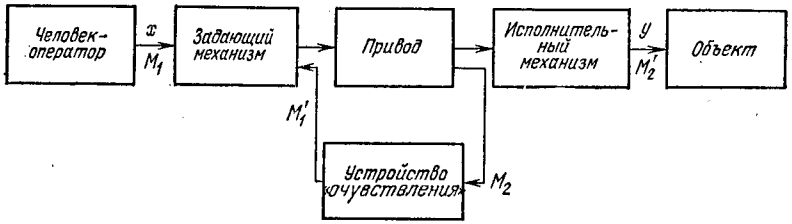


Рис. 28.21. Блок-схема обратимой следящей системы управления.

разности между перемещением x на входе и перемещением y на выходе, и зависит не только от воздействия оператора, но и от нагрузок, действующих на вспомогательный механизм.

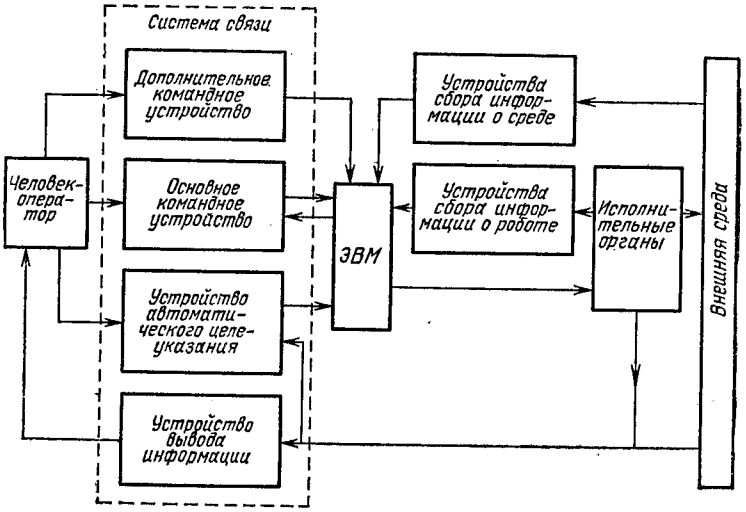


Рис. 28.22. Обобщенная блок-схема управления.

3°. Система связи человека с роботом может решаться на разных уровнях автоматического управления: с применением ЭВМ, систем программного управления и т. д. На рис. 28.22 показана обобщенная блок-схема управления роботом [1]).

[1]) Игнатьев М. Б., Кулаков Ф. М., Покровский А. М., Алгоритмы управления роботами-манипуляторами, «Машиностроение», Ленинград, 1972.

Эта система управления состоит из четырех основных блоков. Первый блок — это блок основного командного устройства. Он предназначен для ввода программ в ЭВМ. Второй блок — это устройство вывода информации. Он используется для наблюдения за состоянием окружающей среды и исполнительных органов робота. Кроме того, в случае самодвижущегося робота в этот блок могут быть включены датчики, изменяющие параметры движения робота. С помощью третьего блока, представляющего собой устройство автоматического целеуказания, человек-оператор распознает особенности среды, в которой функционирует робот, а также выявляет цели и препятствия и вводит их координаты в ЭВМ. Четвертый блок представляет собою дополнительное командное устройство, предназначенное для ввода элементарных команд управления роботом. Это устройство обычно используется при возникновении аварийных или непредвиденных ситуаций. В блок-схеме (рис. 28.22) имеются также два устройства для сбора информации о среде, в которой работает робот, и о работе самого робота.

Приведенная блок-схема управления роботом является достаточно сложной и дана в условном, обобщенном виде [1]). В зависимости от типа робота, от условий, в которых он работает, поставленных задач и т. д. создаются конкретные блок-схемы, реализующие требуемые режимы работы и управления.

---

[1]) Игнатьев М. Б., Кулаков Ф. М., Покровский А. М., О перспективах создания и использования манипуляторов, управляемых от вычислительных машин, сб. «Механика машин», вып. 28—27, «Наука», Москва, 1971.

Приложение 1

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

1°. Матрицей называют прямоугольную таблицу чисел, расположенных строками и столбцами. Приводимая ниже таблица

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов, образует матрицу порядка $m \times n$.

Матрицы обычно обозначаются прописными буквами латинского алфавита (A, B и т. д.), *элементы матриц* — строчными латинскими буквами (a_{ik}, b_{ik} и т. д.). Для обозначения каждого из элементов матрицы используются двойные индексы. Первый индекс i обозначает номер строки, а второй индекс k — номер столбца.

Матрица, имеющая одинаковое число строк и столбцов ($m = n$), называется *квадратной* матрицей. Примером квадратных матриц являются (3 × 3)-матрицы поворота.

В частном случае матрица может состоять из одной строки или одного столбца, например:

$$a=\|\, a_1\ a_2\ \dots\ a_n \,\|, \qquad b=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}.$$

Матрицу-строку и *матрицу-столбец* принято обозначать строчной буквой латинского алфавита (a, b и т. д.). Элементы таких одноразмерных матриц обозначаются той же буквой с добавлением индекса, указывающего номер элемента.

2°. Ниже излагаются основные действия над матрицами.

Транспонирование. Матрица A', транспонированная к матрице A, образуется из матрицы A путем замены каждой ее строки на столбец того же номера.

Если, например, A есть (3 × 3)-квадратная матрица

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix},$$

то, транспонируя ее, получим матрицу

$$A'=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Умножение на скаляр. Произведением матрицы A на скаляр λ называется матрица

$$\lambda A = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{Vmatrix};$$

она получена умножением каждого элемента матрицы A на число λ.

Произведения λA и $A\lambda$ определяют одну и ту же матрицу, т. е.

$$\lambda A = A\lambda.$$

Сложение. Матрицы A и B могут быть сложены, если они имеют одинаковое число строк и столбцов.

Складывая матрицы A и B, мы получим матрицу C,

$$C = A + B,$$

элементы которой

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \qquad \text{(для всех } i,\ k)$$

равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Матричное сложение удовлетворяет коммутативному и ассоциативному (переместительному и сочетательному) законам, т. е.

$$A + B = B + A,$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C.$$

Вычитание матриц подчинено аналогичным правилам, ибо

$$A - B = A + (-1)\,B.$$

В кинематике механизмов операции сложения матриц и умножения их на скаляр находят в действиях над матрицами-столбцами.

Матричное умножение. Операция умножения двух матриц A и B возможна, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Если A есть матрица порядка $(m \times n)$, а B — матрица порядка $(n \times r)$, то их произведение определяет матрицу $C = AB$ порядка $(m \times r)$.

Правило умножения названных матриц иллюстрируется следующей схемой:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & \boxed{c_{ik}} \ \dots \ c_{ir} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mr} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \boxed{a_{i1} \ \dots \ a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & \boxed{b_{1k}} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \boxed{b_{nk}} & \dots & b_{nr} \end{Vmatrix}.$$

Строки матрицы A и столбцы матрицы B мы рассматриваем как n-мерные векторы, проекциями которых являются элементы соответствующих строк и столбцов. Так, в матрице A элементы i-й строки $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ рассматриваем как проекции вектора $\boldsymbol{a}_i$. Аналогично этому k-й столбец матрицы B рассматриваем как вектор $\boldsymbol{b}_k$ с проекциями $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}$ (в них k — второй индекс).

По правилам умножения матриц элемент c_{ik} матрицы C, находящийся на пересечении i-й строки и k-го столбца, определяется как скалярное произведение $\boldsymbol{c}_{ik} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_k$ i-й строки матрицы A на k-й столбец матрицы B, т. е.

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \dots,\ m;\quad k = 1,\ 2,\ \dots,\ r). \qquad (a)$$

Применительно к случаю, когда $m = n = r = 3$, т. е. когда A, B и C являются квадратными (3×3)-матрицами (таковыми являются матрицы поворота), формула (a) принимает вид

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^{3} a_{is} b_{sk} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Ниже приводится пример умножения двух матриц:

$$C = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3\cdot 4+0\cdot 6 & 3\cdot 7+0\cdot 8 \\ 1\cdot 4+1\cdot 6 & 1\cdot 7+1\cdot 8 \\ 5\cdot 4+2\cdot 6 & 5\cdot 7+2\cdot 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{Vmatrix}.$$

Остановимся еще на частном случае

$$c = Ab.$$

Здесь $(m \times n)$-матрица A умножается на $(n \times 1)$-матрицу-столбец b; результатом этого произведения является $(m \times 1)$-матрица-столбец c.

На основании правила умножения матриц

$$\begin{Vmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \underline{c_i} \\ \cdot \\ c_m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \underline{a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{Vmatrix}$$

элемент c_i матрицы-столбца c мы получаем как результат умножения i-й строки матрицы A на столбец b, т. е.

$$c_i = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \dots + a_{in}b_n = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_s \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ m).$$

Эта формула при $m = n = 3$ отвечает умножению (3×3)-матрицы A на столбец b из трех элементов. Такой случай имеет место при матричном преобразовании проекций вектора по формулам (8.17) из § 37.

Матричное умножение в общем случае некоммутативно,

$$AB \neq BA,$$

но, несмотря на это, ассоциативный и дистрибутивный законы выполняются:

$(AB)C = A(BC) = ABC$ (ассоциативный закон),

$A(B+C) = AB + AC$ (дистрибутивный закон).

Приложение 2

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

Решение вспомогательных задач. В настоящем приложении мы излагаем решение задач кинематики для наиболее часто встречающихся пространственных механизмов.

Задача 1. Для определения проекций единичного вектора $\boldsymbol{p}$ дана система трех уравнений:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=c_1,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}=c_2,\quad \boldsymbol{p}^2=1; \tag{1}$$

в ней через $\boldsymbol{p}^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=p^2$ обозначен скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{p}$.

Из развернутой записи этих уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_xp_x+a_yp_y+a_zp_z&=c_1,\\ b_xp_x+b_yp_y+b_zp_z&=c_2,\\ p_x^2+\quad p_y^2+\quad p_z^2&=1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

видно, что это система двух линейных и одного квадратного уравнения относительно искомых проекций p_x, p_y, p_z вектора $\boldsymbol{p}$ на оси неподвижной системы координат $Oxyz$.

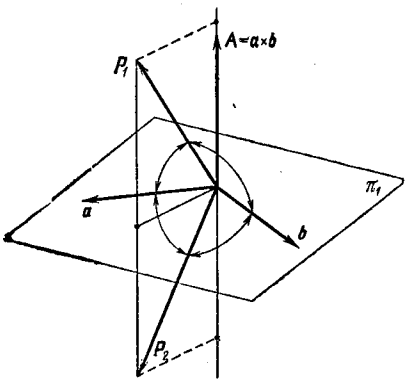


Рис. 1.

Такая система уравнений имеет два решения. Нужно найти решения системы (1), а также решить вопрос о выборе нужного решения.

Решение этой задачи мы начнем с геометрической интерпретации вопроса о двух решениях системы уравнений (1). Вектор $\boldsymbol{p}$ мы определяем по его модулю (он равен единице) и известным проекциям его на направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ($c_1:\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$ и $c_2:\sqrt{\boldsymbol{b}^2}$ — величины этих проекций). Но этим условиям отвечают (рис. 1) два решения — векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$, которые симметричны относительно плоскости π_1, содержащей векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Чтобы различить между собой эти два решения, введем в рассмотрение вектор $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, перпендикулярный к плоскости π_1. Замечаем, что проекции векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ на направление вектора $\boldsymbol{A}$ имеют различные знаки. Следовательно, знак величины

$$\varkappa=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \tag{3}$$

т. е.

$$\delta=\operatorname{sign}\varkappa, \tag{4}$$

является тем критерием (принимает значения $+1$ или -1), с помощью которого мы можем различать между собой оба решения системы уравнений (1).

В механизмах с помощью критерия δ будут различаться между собой различные конфигурации его сборки. Этот критерий органически войдет в расчетные формулы для вычисления решений системы уравнений (1).

Система (1) решается так. Предварительно определяются проекции вектора $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ на оси x, y и z:

$$\begin{aligned} A_x&=a_yb_z-a_zb_y,\\ A_y&=a_zb_x-a_xb_z,\\ A_z&=a_xb_y-a_yb_x. \end{aligned}$$

При $A_x=A_y=A_z=0$ система (1) решения не имеет.

Приводим одну из трех групп формул для вычисления проекций вектора $\boldsymbol{p}$. Если $A_x \neq 0$, то

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \left(-B_x + \delta \operatorname{sign} A_x \sqrt{B_x^2 - A^2 C_x}\right) : A^2, \\ p_y &= (A_y p_x + D_z) : A_x, \\ p_z &= (A_z p_x - D_y) : A_x. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2,$$

$$B_x = A_y D_z - A_z D_y, \quad C_x = D_y^2 + D_z^2 - A_x^2,$$

а в последних выражениях

$$D_y = c_1 b_y - c_2 a_y, \quad D_z = c_1 b_z - c_2 a_z.$$

Две другие группы формул (для случаев $A_y \neq 0$ и $A_z \neq 0$) можно получить путем циклической перестановки индексов x, y, z в обеих частях формул (5) и содержащихся в них величин.

При частных значениях отдельных величин уравнений (1) расчетные формулы принимают более простой вид.

Если вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}$ является ортом оси z ($a_x = a_y = 0$, $a_z = 1$), то

$$\left.\begin{aligned} p_x &= (d b_x - \delta b_y \sqrt{Q}) : A^2, \\ p_y &= -(b_x p_x + c_1 b_z - c_2) : b_y = \\ &= (d b_y + \delta b_x \sqrt{Q}) : A^2, \\ p_z &= c_1, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$A^2 = b_x^2 + b_y^2, \quad d = (c_2 - c_1 b_z),$$

$$Q = (1 - c_1^2)(b_x^2 + b_y^2) - (c_2 - c_1 b_z)^2.$$

Ниже мы приводим вывод формул (5). Первые два уравнения системы (2) переписываем так:

$$a_y p_y + a_z p_z = c_1 - a_x p_x,$$
$$b_y p_y + b_z p_z = c_2 - b_x p_x.$$

Решая эти два уравнения относительно неизвестных величин p_y и p_z, мы приходим к выражениям, которые представлены вторым и третьим равенствами в формулах (5). Подстановка этих двух выражений в третье уравнение системы (2) приводит нас к квадратному уравнению

$$A^2 p_x^2 + 2 B_x p_x + C_x = 0, \tag{7}$$

коэффициенты которого описаны при формулах (5).

Решение уравнения (1) можно записать так:

$$p_x = \frac{1}{A^2}(-B_x + \varepsilon R_x), \tag{8}$$

где $R_x = +\sqrt{B_x^2 - A^2 C_x}$, а ε — величина, значениями которой могут быть $+1$ и -1.

Величину $\varkappa$ из (3) можно представить выражением

$$\varkappa = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p} = A_x p_x + A_y p_y + A_z p_z.$$

В это равенство вместо p_y и p_z подставим соответствующие выражения из формул (5), а затем вместо p_x подставим (8). В результате получим

$$\varkappa = \frac{1}{A_x} \varepsilon R_x. \tag{9}$$

Так как любую алгебраическую величину s можно представить в записи $s = |s| \operatorname{sign} s$, то (9) можно переписывать так:

$$|\varkappa| \operatorname{sign} \varkappa = \frac{1}{|A_x|} R_x \varepsilon \operatorname{sign} A_{xi},$$

откуда следует, что

$$\varepsilon = \operatorname{sign} \varkappa \cdot \operatorname{sign} A_x = \delta \cdot \operatorname{sign} A_x. \tag{10}$$

Этот результат после подстановки в (8) и отражен в формулах (5).

Задача 2. Известны проекции двух принадлежащих звену ν единичных векторов e_ν и w и угол α_ν между ними; наиболее часто это орты оси звена и оси одной из его кинематических пар. Требуется определить единичные векторы осей декартовой системы координат на звене при известном взаиморасположении ее осей и ортов e_ν и w.

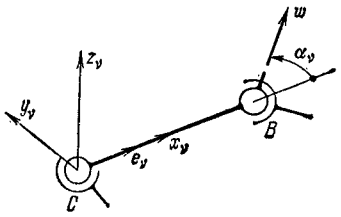


Рис. 2.

Пример решения этого вопроса приводится ниже.

Кинематическими парами звена ν (рис. 2) являются шаровая с пальцем пара B и шаровая пара C. Известны орт e_ν оси CB звена и орт w оси пальца, который является принадлежащим звену ν элементом пары B.

У системы координат $Cx_\nu y_\nu z_\nu$ ось x_ν совмещена с осью CB, а ось y_ν лежит в плоскости оси CB и оси пальца. Ось z_ν перпендикулярна плоскости угла α_ν и определяет направление его измерения (от оси x_ν в сторону оси y_ν).

В данном случае $i_\nu = e_\nu$. Определим два других орта: j_ν и k_ν. Для этого вектор w представим разложением по осям x_ν и y_ν. Имеем

$$w = i_\nu \cos \alpha_\nu + j_\nu \sin \alpha_\nu.$$

Разрешая это выражение относительно вектора j_ν, получим

$$j_\nu = (w - i_\nu \cos \alpha_\nu) : \sin \alpha_\nu. \tag{11}$$

Это выражение и еще следующее:

$$k_\nu = i_\nu \times j_\nu \qquad (i_\nu = e_\nu), \tag{12}$$

позволяют по известным проекциям векторов e_ν и w определить проекции координатных ортов j_ν и k_ν.

Иван Иванович Артоболевский

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

М., 1975 г., 640 стр. с илл.

Редакторы
В. А. Зиновьев и *Н. В. Сперанский*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 3/VII 1974 г. Подписано к печати 26/XII 1974 г.
Бумага 60×90¹/₁₆. Тип. № 3. Физ. печ. л. 40. Услов. печ. л. 40.
Уч.-изд. л. 38,16. Тираж 120 000 экз. Т-21328. Цена книги 1 р. 21 к.
Заказ № 1540

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

СПИСОК ОСНОВНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Артоболевский И. И., Теория механизмов и машин, «Высшая школа», 1963.

Артоболевский И. И., Теория механизмов, «Наука», 1967.

Артоболевский И. И., Эдельштейн Б. В., Сборник задач по теории механизмов и машин. «Наука», 1972.

Баранов Г. Г., Курс теории механизмов и машин, «Машиностроение», 1967.

Гавриленко В. А. и др., Теория механизмов, «Высшая школа», 1973.

Зиновьев Вяч. А., Курс теории механизмов и машин, «Наука», 1972.

Кожевников С. Н., Теория механизмов и машин, «Машиностроение», 1974.

Колчин Н. И., Мовнин М. С., Теория механизмов и машин, «Судпромгиз», 1962.

Юдин В. А., Петрокас Л. В., Теория механизмов и машин, «Высшая школа», 1967.