

А. А. ИВАНОВ

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И РЕГУЛИРОВАНИЯ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
вузов, обучающихся по специальности
«Электрификация и автоматизация
горных работ»*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»
МОСКВА, 1970

И в а н о в А. А. Теория автоматического управления и регулирования. М., изд-во «Недра», 1970. Стр. 352.

В книге рассмотрены основные принципы построения систем автоматического управления и регулирования. Даны основные сведения по теории автоматического регулирования применительно к линейным и нелинейным системам, основные положения из теории вероятностей, статистической динамики и краткие сведения о самонастраивающихся и игровых системах.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов специальности «Электрификация и автоматизация горных работ и обогатительных фабрик», а также может быть использована в качестве учебного пособия студентами других специальностей.

Таблиц 17, иллюстраций 171, библиография — 49 названий.

Р е ц е н з е н т ы: кафедра автоматизации производственных процессов Ленинградского горного института и доц., канд. техн. наук **Л. П. СТРЕЛЬНИКОВ**.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 1-1. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ВЫПОЛНЯЕМЫЕ НИМИ ФУНКЦИИ

Управлением называется совокупность воздействий, направленных на осуществление какого-либо процесса или группы процессов для достижения определенной цели.

Управление необходимо для технических систем, живых организмов и социальных систем (экономических, административных, военных). В настоящей книге рассматривается управление в технических системах.

Автоматическим называется управление, осуществляемое без непосредственного участия человека.

Системой автоматического управления называется совокупность устройств, предназначенных для осуществления какого-либо процесса или группы процессов без непосредственного участия человека.

В таких системах человек может подавать лишь первоначальный пусковой импульс. В ряде случаев и этот первоначальный импульс подается автоматическим устройством.

Системы автоматического управления весьма многообразны и могут выполнять различные функции:

- автоматический пуск, остановку и реверсирование машин и механизмов;

- автоматическое поддержание какого-либо параметра (скорости, направления, давления, температуры, плотности, напряжения и др.) на заданном уровне;

- автоматическое изменение какого-либо параметра по заданной программе;

- автоматическое воспроизведение (слежение) какого-либо параметра, произвольно меняющегося во времени;

- автоматическое поддержание одного или нескольких параметров на максимальном или минимальном уровне;

- автоматическое ведение процесса в оптимальном режиме;

- автоматическое управление комплексом процессов, машин и механизмов по заранее заданной программе или с автоматическим выбором оптимальной программы и последовательной ее корректировкой.

§ 1-2. ВОЗДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. ТИПОВЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Воздействием называется какой-либо фактор, влияющий на работу системы автоматического управления.

Различают следующие виды воздействий: задающее, управляющее, возмущающее.

Задающим называется вводимое в систему воздействие, определяющее необходимый закон изменения управляемой величины. В качестве задающего воздействия используется какая-либо физическая величина (электрическое напряжение, давление воздуха, механическое перемещение и т. п.).

Управляющим называется воздействие, которое обеспечивает изменение управляемой величины по заданному закону. Управляющее воздействие формируется в системе с помощью задающего воздействия.

Возмущающим называется воздействие, которое нарушает заданный закон изменения управляемой величины. К возмущающим воздействиям относятся нагрузка объекта управления, изменения внешних условий (температуры, давления, влажности и др.), изменение во времени свойств отдельных элементов системы.

Возмущающее воздействие, резко влияющее на ход процесса, называется основным возмущающим воздействием или основным возмущением.

Возмущающие воздействия, слабо влияющие на ход процесса, которые трудно учесть, называются *второстепенными возмущениями*. Например, в системе поддержания неизменной скорости вращения электродвигателя постоянного тока управляющим воздействием является напряжение, приложенное к якорию двигателя, основным возмущением является изменение нагрузки на валу, а второстепенными возмущениями — изменение сопротивлений электрической и магнитной цепей.

Воздействия, прикладываемые к системам автоматического регулирования, представляют произвольно меняющиеся функции времени, точный закон изменения которых невозможно предвидеть.

Конкретные воздействия могут быть самыми разнообразными по своему характеру. Каждое воздействие на входе вызывает определенный переходный процесс. Для сравнения различных систем необходимо поставить их в одинаковые условия, т. е. подавать на вход одинаковые воздействия. В подавляющем большинстве случаев оказывается возможным выбрать такое воздействие, которое являлось бы наиболее типичным или наиболее неблагоприятным для данного рода воздействий.

При исследованиях систем автоматического регулирования применяются несколько так называемых типовых или стандартных воздействий. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типовые воздействия.

Единичный скачок и ступенчатое воздействие. Воздействиям такого рода соответствуют внезапные сбросы или набросы нагрузки, включение или снятие напряжения и т. п.

Математически единичный скачок выражается следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Ступенчатое воздействие

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ A & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

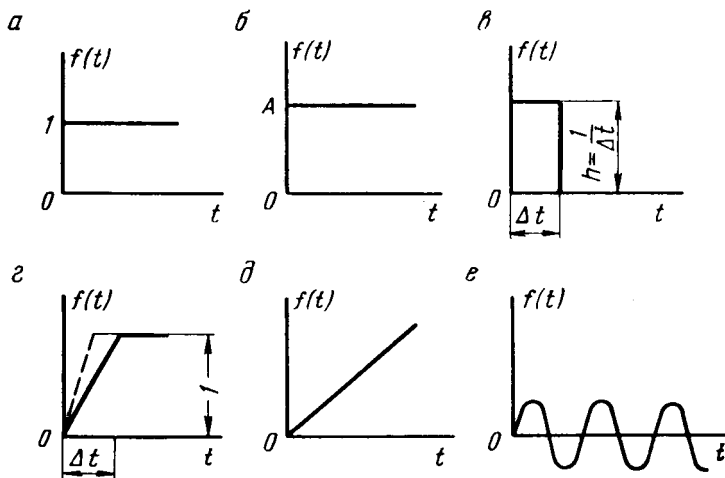


Рис. 1-1. Типовые воздействия:

a — единичный скачок; *б* — ступенчатое воздействие; *в* — единичный импульс; *г* — вспомогательная функция; *д* — линейное воздействие; *е* — синусоидальное воздействие

Воздействие, изменяющееся по такому закону, отсутствует при $t < 0$ и сохраняет постоянное значение при $t \geq 0$ (рис. 1-1, *a* и *б*).

Единичный импульс — воздействие бесконечно большой величины h и бесконечно малой длительности Δt при условии, что $h \Delta t = 1$ (рис. 1-1, *в*).

Импульсное воздействие — воздействие бесконечно большой величины H и бесконечно малой длительности Δt при условии, что $H \Delta t = A = \text{const}$.

Реализовать единичный импульс и импульсное воздействие невозможно, их можно осуществить только приближенно. Для импульсов прямоугольной формы с длительностью Δt амплитуда единичного импульса будет равна $h = \frac{1}{\Delta t}$, а амплитуда импульсного воздействия $H = \frac{A}{\Delta t}$.

Единичный импульс (импульсное воздействие) можно рассматривать как предел прямоугольного импульса длительности $\Delta t \rightarrow 0$ и высоты $h \rightarrow \infty$ ($H \rightarrow \infty$) при сохранении условия $h\Delta t = 1$ ($H\Delta t = A$). Предельный единичный импульс называют δ -функцией. Импульсное воздействие можно рассматривать как производную от ступенчатого воздействия. Ступенчатая функция не дифференцируема, но путем предельного перехода на нее можно распространить понятие производной. Из рассмотрения вспомогательной разрывной функции (рис. 1-1, з) следует

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t) = 1. \quad (1-1)$$

Это выражение нужно понимать так, что по мере уменьшения Δt наклонная прямая становится круче, как это показано пунктиром, но конечное значение, при котором наклонная переходит в вертикальную прямую, остается неизменным и равным 1. Производная от наклонной прямой представляет прямоугольник, площадь которого в данном случае равна 1. В пределе этот прямоугольник превращается в единичный импульс

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f'(t) = 1'. \quad (1-2)$$

Рассматривая соответственно правую и левую части выражений (1-1) и (1-2), получаем

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t); \quad 1' = \frac{d}{dt} 1. \quad (1-3)$$

Линейное воздействие (рис. 1-1, б) — воздействие, которое изменяется по линейному закону

$$f(t) = gt,$$

где g — угловой коэффициент прямой.

Синусоидальное воздействие (рис. 1-1, е) — воздействие, которое изменяется по синусоидальному закону

$$f(t) = A \sin \omega t,$$

где A — амплитуда; ω —

круговая частота.

Иногда применяются воздействия, изменяющиеся по другим законам, но они здесь не рассматриваются.

В последующих главах рассматриваются переходные процессы при подаче на вход случайных воздействий.

§ 1-3. СВОЙСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ И ЭЛЕМЕНТОВ АВТОМАТИЧЕСКИХ УПРАВЛЯЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Систему автоматического управления можно расчленить на управляемый объект и автоматические управляющие устройства.

Управляемым объектом называется машина, аппарат, установка, комплекс машин или аппаратов, цех, предприятие, в которых автоматические управляющие устройства поддерживают один или более параметров на заданном уровне или изменяют их по какому-либо закону.

Управляемые объекты весьма разнообразны по своему назначению, принципу действия, конструкции (например, электрические двигатели и генераторы, котельные установки, горные машины, металлорежущие станки, машины для обогащения полезных ископаемых, технологический комплекс машин горного участка или шахты, обогатительной фабрики).

Автоматические управляющие устройства и их элементы также чрезвычайно многообразны. Они отличаются друг от друга выполняемыми функциями, принципом действия, конструкцией. Это могут быть различные измерительные устройства; датчики; усилители электронные, магнитные, электромагнитные, гидравлические, пневматические; различные включающие или регулирующие устройства — контакторы, электрические, гидравлические или пневматические приводы, золотники, задвижки.

Теория автоматического управления рассматривает не конкретные особенности управляемых объектов и элементов автоматических управляющих устройств, а их самые общие статические и динамические свойства, которые оказывают существенное влияние на процесс автоматического управления. С этой точки зрения управляемые объекты и элементы автоматических управляющих устройств, как физические системы, имеют много общего, поскольку их одинаковые статические и динамические свойства одинаково влияют на переходные процессы всей системы.

Поэтому, рассматривая свойства управляемых объектов и элементов управляющих устройств, можно не делать различия между ними и рассматривать их в качестве равноправных элементов систем автоматического управления или просто элементов систем.

Некоторые свойства особенно важное значение имеют для управляемых объектов (хотя ими обладают и элементы управляющих устройств). Тогда эти свойства рассматриваются применительно к управляемым объектам.

Различают управляемые объекты с сосредоточенными и распределенными параметрами.

В объектах с *сосредоточенными параметрами* параметры можно считать сосредоточенными в одной точке и это практически не вносит погрешностей в результаты исследований. Переменные, описывающие поведение объекта, зависят только от времени.

Например, в шахтной подъемной установке, приводимой в движение электрическим двигателем, момент инерции всех вращающихся и линейно движущихся масс может быть приведен к валу ротора двигателя; влиянием не абсолютно жестких связей между отдельными элементами установки можно пренебречь.

Давление воздуха в воздухохоборнике шахтной пневматической сети может считаться одинаковым во всех точках и равным тому, которое измеряется манометром в одной точке; влиянием упругих волн, которые имеют место при работе на воздухохоборник поршневых компрессоров, можно пренебречь.

Активное, индуктивное и емкостное сопротивления колебательного контура можно считать сосредоточенными в одной точке этого контура. Геометрические размеры контура при определении его динамических свойств, как правило, не учитываются. Размеры учитываются только при расчете величины указанных сопротивлений.

В объектах с *распределенными параметрами* вследствие больших геометрических размеров объектов или их элементов необходимо учитывать распределение параметров по объекту. Рассмотрение параметров как сосредоточенных в одной точке приводит к большим погрешностям. Переменные, описывающие поведение объекта, меняются во времени и в пространстве.

Например, в длинных линиях электропередач необходимо учитывать распределение активного сопротивления и емкости вдоль линии. В длинных трубопроводах шахтной пневматической сети необходимо учитывать волновые процессы и распределение аэродинамического сопротивления вдоль трубопровода.

Способность управляемого объекта (элемента системы) накапливать, т. е. аккумулировать вещество или энергию, называется *емкостью* объекта (элемента системы) или его *аккумулирующей способностью*. Чем меньше емкость объекта, тем больше скорость изменения управляемой величины при нарушении равновесия между притоком и расходом вещества или энергии.

В резервуаре пламового отстойника с меняющимся уровнем жидкости емкость зависит от площади горизонтального сечения резервуара. Чем больше эта площадь, тем медленнее будет изменяться уровень при наличии одной и той же разности между притоком и расходом.

У электропривода шахтной подъемной машины с меняющейся скоростью вращения емкость зависит от момента инерции вращающихся частей. Чем больше момент инерции, тем медленнее будет изменяться скорость при одном и том же управляющем воздействии или изменении нагрузки.

В электрической цепи, содержащей индуктивность и активное сопротивление, емкость пропорциональна величине индуктивности. В цепи с конденсатором емкость пропорциональна емкости конденсатора.

В паровом котле емкость зависит от его водяного объема. Чем больше этот объем, тем меньше скорость изменения давления в котле при изменениях расхода пара.

Если бы элементы систем не имели емкости, то управляемая величина изменялась бы строго пропорционально величине разности между притоком и расходом рабочей среды. При наличии у элементов систем емкости зависимость выходной величины от разности между

притоком и расходом вещества или энергии становится функцией времени. Мера емкости элемента системы выражается его постоянной времени (рассматривается в главе 3).

Все рассмотренные выше устройства имеют одну емкость и называются *одноемкостными*. Однако имеются устройства, которые имеют две емкости и более. Например, электрическая цепь, содержащая индуктивность и емкость; двигатель постоянного тока с независимым возбуждением — одну емкость представляет индуктивность цепи якоря, другую — масса вращающихся частей, приведенная к валу якоря. Такие устройства называются *двухъемкостными*. Могут быть устройства трехъемкостные и многоемкостные.

Емкостью обладают все элементы систем автоматического управления, однако элементы управляющих устройств обладают ею в значительно меньшей степени, чем некоторые управляемые объекты,

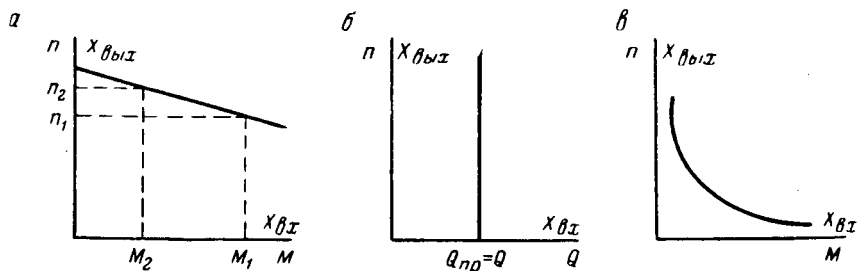


Рис. 1-2. Статические характеристики объектов:

а — линейная с самовывравниванием; б — линейная без самовывравнивания; в — нелинейная со слабым самовывравниванием

и потому в некоторых случаях емкостью элементов управляющих устройств можно пренебрегать по сравнению с емкостью управляемых объектов (практически это сводится к приравниванию нулю малых постоянных времени).

Воздействия, которые влияют на элемент системы, называются *входными величинами*. Входных величин может быть одна, две или несколько.

Выходной называется величина на выходе элемента, которая меняется под действием входных величин. Выходной величиной управляемых объектов является управляемая величина.

Зависимость выходной величины от входной в установившихся режимах называется *статической характеристикой* элемента системы или просто *характеристикой* элемента системы.

В зависимости от вида характеристик элементы систем делятся на линейные и нелинейные.

Линейными называются элементы систем, у которых статические характеристики графически представляют не имеющие изломов прямые (рис. 1-2, а), описываемые линейными алгебраическими функциями, не имеющими разрывов, а переходные процессы описываются линейными дифференциальными уравнениями.

Нелинейными называются элементы систем, у которых статические характеристики графически представляют кривые, описываемые нелинейными алгебраическими или трансцендентными функциями, или состоят из отрезков прямых, сопрягаемых под различными углами (рис. 1-2, б, в; 10-1), а переходные процессы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Процессы, протекающие в управляемых объектах, характеризуются наличием или отсутствием самовыравнивания.

Самовыравниванием, или *саморегулированием* называется свойство управляемого объекта самостоятельно без участия регулятора приводить к нулю несоответствие между притоком и расходом материи или энергии, а управляемую величину — к новому установившемуся значению.

Примером объекта с самовыравниванием может служить резервуар, в который сверху поступает жидкость, а внизу через отверстие свободно вытекает. При равенстве притока и расхода жидкости уровень ее остается постоянным. Если приток жидкости увеличится, то уровень ее будет увеличиваться до тех пор, пока вследствие повышения давления расход не сравняется с притоком, после чего он будет оставаться неизменным.

Объектом с самовыравниванием является также подъемный электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением, имеющий механическую характеристику, приведенную на рис. 1-2, а. При нагрузочном моменте M_1 на валу он устойчиво работает со скоростью вращения якоря n_1 . Если момент нагрузки на валу уменьшится до M_2 , то, скорость вращения якоря будет увеличиваться, пока момент, развиваемый двигателем, не сравняется с моментом нагрузки, после чего двигатель будет устойчиво работать со скоростью вращения якоря n_2 .

Если объект лишен самовыравнивания, то при наличии разности между притоком и расходом рабочей среды управляемая величина неограниченно возрастает или уменьшается до нуля.

Примером объекта без самовыравнивания может служить резервуар со строго постоянным расходом жидкости. Тогда, если приток жидкости $Q_{пр}$ больше расхода $Q_{расх}$, уровень ее h неограниченно возрастает, если меньше — уменьшается до нуля (рис. 1-2, б). Если приток равен расходу, будет сохраняться неизменным любое значение уровня h , при котором это равенство установилось.

Объектом без самовыравнивания является также подъемная машина при спуске груза с выключенным двигателем, скорость которой регулируется механическим тормозом. При неравенстве момента, развиваемого опускающимся грузом, и тормозного момента скорость может неограниченно возрасть или уменьшаться до нуля.

Объектами с малым самовыравниванием являются двигатель постоянного тока с последовательным возбуждением (рис. 1-2, в) и асинхронный двигатель с большим активным сопротивлением в цепи ротора. Самовыравнивание облегчает задачу автоматической стабилизации управляемой величины, а в некоторых случаях оно

бывает настолько велико, что объект в специальных средствах стабилизации не нуждается. Это имеет место при весьма жестких нагрузочных характеристиках объектов.

Судить о динамических свойствах элементов систем можно по изменению выходной величины во времени при подаче на вход различных воздействий. Наиболее часто в качестве входного принимают единичное ступенчатое воздействие. Изменение выходной величины во времени при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия называется *переходной функцией*. Переходная функция получается в результате решения дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс.

Графическое изображение переходной функции называется *переходной характеристикой*. Применительно для управляемых объектов переходную характеристику часто называют *кривой разгона*.

Импульсной переходной функцией, или *функцией веса* называется изменение выходной величины во времени при подаче на вход единичного импульсного воздействия.

При этом длительность импульса должна быть на несколько порядков меньше, чем время переходного процесса в элементе системы. За время существования импульса реакция элемента системы остается практически постоянной, т. е. выходная величина не претерпевает изменений.

Между переходной функцией и функцией веса имеется связь, а именно, функция веса является производной от переходной функции. Доказательства здесь не приводим, с ними можно ознакомиться в работах [5, 14].

В зависимости от вида переходных характеристик (переходных функций) управляемые объекты делятся на устойчивые или статические, нейтральные или астатические и неустойчивые.

Устойчивыми, или *статическими* называются управляемые объекты, обладающие самовыравниванием, в которых выходная величина после исчезновения возмущающих воздействий на входе без помощи регулятора приходит к установившемуся значению. На рис. 1-3 показаны переходные характеристики устойчивых управляемых объектов при подаче на вход ступенчатого воздействия. Прямая 1 характеризует идеальный устойчивый процесс, когда выходная величина точно воспроизводит входное ступенчатое воздействие. Переходный процесс отсутствует, сразу наступает установившийся режим. В реальных объектах такой процесс неосуществим. Кривые 2 и 3 представляют разновидности аperiodического устойчивого процесса, кривая 4 — колебательный устойчивый процесс. Пример устойчивого объекта — двигатель постоянного тока с параллельным возбуждением.

Нейтральными, или *астатическими* называются управляемые объекты, не обладающие самовыравниванием, в которых после исчезновения возмущающих воздействий на входе выходная величина с течением времени без вмешательства регулятора может неограниченно отклоняться от начального значения (если приток энергии

или вещества в объект не равны расходу) или оставаться неизменной, установившейся (если приток и расход энергии или вещества равны).

На рис. 1-4 показаны переходные характеристики нейтральных управляемых объектов при подаче на вход ступенчатого воздействия. Прямая 1 характеризует идеальный процесс, кривая 2 — реальный процесс. Пример нейтрального объекта — резервуар со строго постоянным расходом жидкости и произвольно меняющимся притоком.

Неустойчивыми называются управляемые объекты, не обладающие самовыравниванием, в которых после исчезновения возмущающих воздействий на входе выходная величина с течением времени без вмешательства регулятора беспределельно отклоняется от начального значения. Неустойчивые объекты практически в промышленных условиях не встречаются и поэтому здесь не рассматриваются.

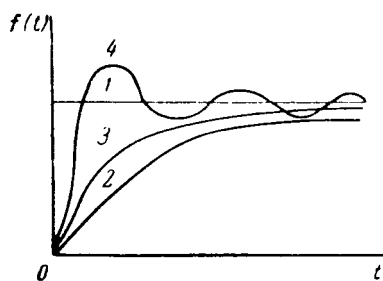


Рис. 1-3. Переходные характеристики устойчивых управляемых объектов

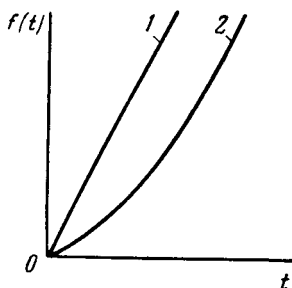


Рис. 1-4. Переходные характеристики нейтральных управляемых объектов

Управляемые объекты и многие элементы управляющих устройств обладают детектирующим свойством или свойством направленности действия, т. е. способностью передавать воздействие только в одном направлении — с входа на выход.

Так, например, изменение уровня воды в шахтном водосборнике приводит к перемещению поплавка, но перемещение поплавка посторонней силой не приводит к изменению уровня воды. У генератора с независимым возбуждением изменение величины тока возбуждения приводит к изменению напряжения на его щетках, однако изменение напряжения на щетках при изменении нагрузки практически не оказывает влияния на величину тока возбуждения.

Некоторые элементы управляющих устройств не обладают детектирующей способностью; они передают воздействия и с входа на выход и с выхода на вход. Например, у трансформатора величина тока в цепи вторичной обмотки при неизменном его сопротивлении зависит от величины тока в первичной обмотке. Но изменение тока во вторичной обмотке приводит к изменению тока в первичной обмотке.

Система автоматического управления для нормального функционирования должна иметь хотя бы один элемент, обладающий детек-

тирующим действием, чтобы воспрепятствовать обратной передаче реакции на управляющее воздействие.

Во многих элементах систем (чаще в управляемых объектах) воздействия от входа на выход передаются с некоторой задержкой во времени, с запаздыванием.

Запаздыванием называется свойство элемента системы передавать воздействия от входа к выходу без искажений, но с отставанием во времени. Если одновременно происходит искажение воздействий, то элемент можно условно расчленить на два элемента, соединенных последовательно: в одном происходит запаздывание без искажений, а второй вносит искажения воздействий без запаздывания.

В ряде случаев статические и динамические характеристики управляемых объектов расчетным путем определить невозможно из-за сложности происходящих в них физических процессов. В этих случаях характеристики определяются экспериментально в производственных условиях.

§ 1-4. ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ

В системах автоматического управления широко применяются *обратные связи*. Обратные связи имеют место также во всех системах управления в живых организмах, без них само существование живых организмов было бы невозможным. Обратная связь обеспечивает связь между выходом системы автоматического управления и ее входом и позволяет учитывать отклонения управляемой величины

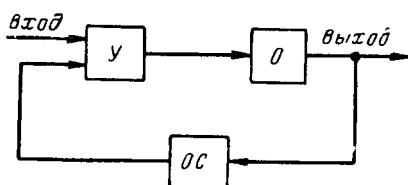


Рис. 1-5. Система автоматического управления с обратной связью:

О — управляемый объект; У — управляющее устройство; ОС — устройство обратной связи

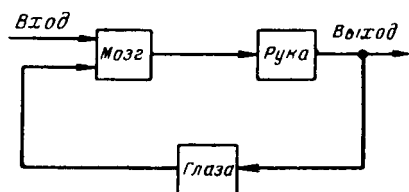


Рис. 1-6. Функциональная схема системы управления рукой человека

от заданного значения и вносить необходимые коррективы в управляющее воздействие на входе системы (рис. 1-5, а).

Рассмотрим пример обратной связи у человека (рис. 1-6). Предположим, что человеку необходимо взять в руки книгу, лежащую на столе. Головной мозг дает соответствующий сигнал мышцам руки и она движется по направлению к книге. Глаза следят за движением руки и передают в головной мозг сигналы о ее положении относительно книги, мозг вносит нужные коррективы и рука точно попадает к книге. Глаза выполняют здесь функцию обратной связи. Если закрыть глаза, то обратная связь нарушится и рука на книгу

не попадет. Книгу можно найти ощупью, но в этом случае обратная связь будет осуществляться через органы осязания. Системы с обратной связью поддерживают постоянную температуру тела, давление крови, ее состав, управляют работой всех органов человеческого тела. Живые организмы живут в изменяющейся обстановке и системы с обратной связью позволяют им приспосабливаться к изменениям условий окружающей среды. Точно так же в технических системах автоматического управления обратные связи позволяют им приспосабливаться к изменяющимся условиям работы.

В системах автоматического управления различают *внешнюю* обратную связь, которая соединяет выход системы с ее входом, и *внутренние* или *местные* обратные связи, соединяющие выход отдельных элементов или группы последовательно соединенных элементов с их входом.

Обратные связи по характеру передачи воздействий делятся на жесткие и гибкие.

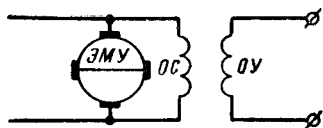


Рис. 1-7. Жесткая обратная связь

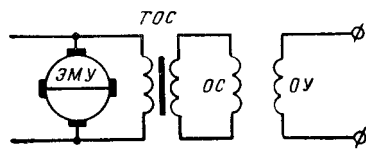


Рис. 1-8. Гибкая обратная связь

Жесткая обратная связь действует как в установившемся режиме, так и в переходном процессе, например жесткая обратная связь по напряжению в электромашинном усилителе (рис. 1-7).

Гибкая обратная связь действует только во время переходного процесса, а в установившемся режиме ее действие прекращается. На рис. 1-8 приведена гибкая обратная связь в электромашинном усилителе, которая осуществляется с помощью трансформатора *ТОС*. В переходном режиме, когда на первичную обмотку трансформатора подается меняющееся по величине напряжение, во вторичной его обмотке наводится э. д. с., пропорциональная скорости изменения напряжения в первичной обмотке. Такую обратную связь называют иногда скоростной. В установившемся режиме э. д. с. во вторичной обмотке отсутствует.

В зависимости от знака воздействия обратные связи делятся на положительные и отрицательные.

Положительной называется обратная связь, которая с увеличением сигнала на выходе элемента передает на его вход сигнал, вызывающий последующее увеличение выходного сигнала.

Отрицательной называется обратная связь, которая при увеличении сигнала на выходе элемента передает на его вход воздействие, вызывающее уменьшение выходного сигнала.

В схеме на рис. 1-7 и 1-8 обратная связь будет положительной, если обмотка обратной связи *ОС* включена на зажимы якоря так,

что создаваемый ею магнитный поток совпадает по направлению с основным магнитным потоком, создаваемым обмоткой управления *ОУ*, и увеличивает суммарный магнитный поток и напряжение на зажимах якоря. Эта же обратная связь станет отрицательной, если переключить концы обмотки *ОС*. При этом потоки обмоток *ОС* и *ОУ* будут направлены встречно, в результате чего суммарный магнитный поток и напряжение на зажимах якоря уменьшается.

§ 1-5. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящее время нет единой установившейся классификации систем автоматического управления. На рис. 1-9 приведена классификация, с нашей точки зрения, наиболее удобная.

Все системы автоматического управления (САУ) можно разбить на две группы: обыкновенные и кибернетические.

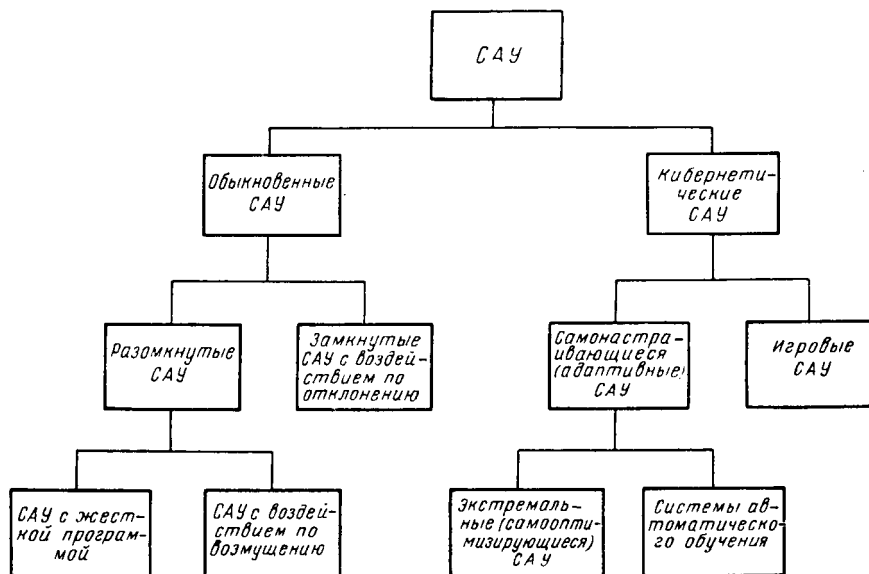


Рис. 1-9. Классификация систем автоматического управления

Обыкновенными называются системы автоматического управления, структура которых и закон функционирования в процессе работы не меняются. Эти системы настраиваются (настраиваются) в соответствии с условиями работы и задачами, которые они должны выполнять, и затем включаются в работу. Если условия работы выходят за пределы, предусмотренные настройкой, обыкновенные системы теряют работоспособность и нуждаются в дополнительной настройке, а иногда и в переделке.

Кибернетическими называются системы автоматического управления, которые могут выбирать наиболее выгодный режим работы,

приспосабливаясь к меняющимся условиям работы, или управлять сложным процессом, зависящим от большого количества случайных возмущающих воздействий.

Обыкновенные системы автоматического управления делятся на разомкнутые системы автоматического управления и замкнутые системы автоматического управления с воздействием по отклонению.

Разомкнутыми называются такие системы автоматического управления, в которых отсутствует внешняя обратная связь, соединяющая выход системы с ее входом. Разомкнутые системы автоматического управления, в свою очередь, можно разделить на *системы с жесткой программой* и на *системы с воздействием по возмущению* (принцип Понсе-Чиколева).

Разомкнутая САУ с жесткой программой (рис. 1-10, а) состоит из объекта управления O , на который действует нагрузка H ; исполнительного элемента I ; усилителя $У$ и управляющего элемента $УЭ$.

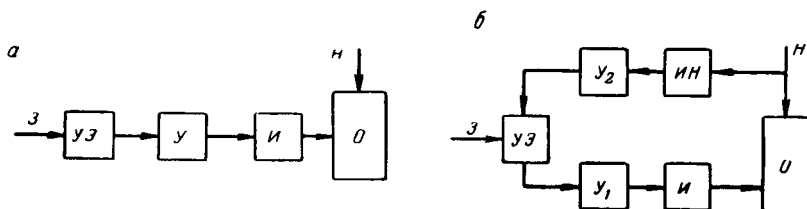


Рис. 1-10. Разомкнутая система автоматического управления:

а — с жесткой программой; б — с воздействием по возмущению

На управляющий элемент подается жесткое задание $З$, которое после усиления передается исполнительному элементу, осуществляющему воздействие на объект управления в соответствии с заданием. Воздействия передаются от управляющего элемента к объекту. В разомкнутой системе автоматического управления поступающая в управляющий элемент входная величина не сопоставляется с выполненной объектом выходной величиной, не контролируется. Под действием внешних возмущений (например, изменения нагрузки) возможны отклонения действительного режима работы объекта от заданного, однако эти отклонения не оказывают никакого влияния на управляющий элемент и на управляющее воздействие. К таким системам относятся, например, системы автоматического пуска и торможения машин и механизмов, не требующих точного выполнения заданной диаграммы скорости при пуске и остановке (насосы, вентиляторы, компрессоры, конвейеры и т. п.).

Разомкнутая САУ с воздействием по возмущению (рис. 1-10, б) отличается тем, что управляющее воздействие формируется в зависимости от величины основного возмущающего воздействия, например нагрузки. Поэтому, помимо описанных выше элементов, она содержит измеритель нагрузки $ИН$, который измеряет основное возмущение — нагрузку H и результаты измерения через усилитель $У_2$ передает в управляющий элемент $УЭ$. Последний формирует

управляющее воздействие с учетом изменившейся нагрузки и по цепи усилитель $У_1$, исполнительный элемент $И$ передает его объекту управления, приводя управляемую величину в соответствие с заданием.

Система с воздействием по возмущению реагирует только на основные — измеряемые возмущения и совершенно не реагирует на второстепенные возмущения — помехи. Поэтому при наличии второстепенных возмущений в управлении возникают погрешности, которые система исправить не в состоянии, так как на отклонение управляемой величины от заданного значения она не реагирует. Если управляемый объект имеет достаточно жесткую естественную характеристику, обладает самовыравниванием, то погрешности, обусловленные второстепенными возмущениями, оказываются практически незначительными. Если объект имеет мягкую характеристику, самовыравниванием не обладает, то при наличии второстепенных возмущений отклонение управляемой величины возрастает настолько, что система оказывается неработоспособной. Это явление называют иногда «сползанием нуля». Паровая машина, которая не обладает самовыравниванием, в автоматической системе управления с воздействием по возмущению (нагрузке) работать не может.

Замкнутыми системами автоматического управления с воздействием по отклонению или системами автоматического регулирования (САР) называются такие системы, у которых имеется внешняя обратная связь, обеспечивающая контроль управляемой величины и уменьшение отклонения действительного значения управляемой величины от заданного.

Система с воздействием по отклонению (рис. 1-11) состоит из объекта управления O , в котором датчик $Д$ автоматически измеряет величину, подлежащую управлению (выходную), и результаты измерения через усилитель $У_2$ передает в управляющий элемент $УЭ$. Управляющий элемент сравнивает результаты измерения с заданием $З$ и в зависимости от величины и знака отклонения измеренной величины от задания формирует такое управляющее воздействие, которое, будучи передано объекту через усилитель $У_2$ и исполнительный элемент $И$, стремится привести управляемую (выходную) величину к заданному значению. Здесь датчик $Д$ и усилитель $У_2$ представляют собой цепь внешней обратной связи.

Замкнутые и разомкнутые системы автоматического управления в зависимости от характера воздействия на исполнительный элемент делятся на системы непрерывного, импульсного и релейного регулирования.

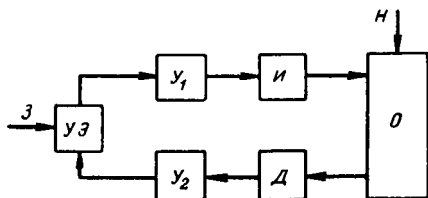


Рис. 1-11. Замкнутая система автоматического регулирования с воздействием по отклонению

В *системах непрерывного управления* сигналы на выходе всех элементов системы являются непрерывными функциями сигналов на входе элементов.

Системы импульсного управления отличаются тем, что в них через определенные промежутки времени происходит размыкание и замыкание контура управления специальным устройством. Время управления делится на интервалы действия импульсов, в течение которых процессы протекают так же, как и в системах непрерывного управления, и паузы, в течение которых действие регулятора на систему прекращается. Такие системы применяются для управления медленно протекающими процессами (регулирование температуры в промышленных печах, температуры и давления в котлах).

В *системах релейного управления* размыкание контура управления производится одним из элементов системы (релейным элементом) в зависимости от величины внешнего воздействия.

Имеются двух- и трехпозиционные релейные элементы. В двухпозиционных элементах возможны два устойчивых положения: «Включено в одну сторону», «Включено в другую сторону». В трехпозиционном реле возможны три устойчивых положения: «Включено в одну сторону», «Выключено», «Включено в другую сторону».

Кибернетические системы автоматического управления можно разделить на две группы: самонастраивающиеся или адаптивные системы автоматического управления и игровые системы автоматического управления.

Самонастраивающимися или *адаптивными* называются системы автоматического управления, у которых в зависимости от изменения внешних условий или характеристик объекта автоматически изменяется способ их функционирования с целью получения наилучшего управления. Понятие адаптации здесь имеет то же значение, что и в биологии — приспособление к изменяющимся внешним условиям.

Самонастраивающиеся системы делятся на экстремальные или самооптимизирующиеся и системы автоматического обучения.

Экстремальными называются системы автоматического управления, обеспечивающие отыскание и поддержание таких наиболее выгодных управляющих воздействий на входе управляемого объекта, при которых выходная величина управляемого объекта достигает наибольшего или наименьшего (экстремального) значения (например, максимальная производительность, наименьший расход топлива и т. п.).

Системами автоматического обучения называются системы автоматического управления, в которых способ их функционирования автоматически совершенствуется по мере накопления в системе опыта управления.

Игровыми называются системы автоматического управления, предназначенные для управления сложными системами, подвергающимися случайным, заранее непредвиденным воздействиям. К таким сложным системам относятся горный участок, цех, горное предприятие, фабрика, завод и т. п.

В последующих главах книги рассматриваются перечисленные выше системы автоматического управления. Наибольшее внимание уделено теории автоматического регулирования, которая изучает замкнутые системы с воздействием по отклонению, линейные, нелинейные, импульсные. Разомкнутые системы с жесткой программой не рассматриваются, так как они изучаются в дисциплине «Автоматизированный электропривод». Кратко рассматриваются разомкнутые системы с воздействием по возмущению и кибернетические системы.

Контрольные вопросы

1. Что называется управлением, автоматическим управлением?
2. Что называется системой автоматического управления?
3. Какие функции возлагаются на системы автоматического управления?
4. Что такое воздействие, виды воздействий в системах автоматического управления?
5. Для чего применяются типовые воздействия, их виды?
6. Что называется управляемым объектом?
7. Чем отличаются объекты с сосредоточенными и с распределенными параметрами?
8. Что называется емкостью объекта?
9. Что называется входными, выходными величинами?
10. Что называется характеристикой элемента системы?
11. Какие элементы называются линейными, нелинейными?
12. Что называется самовыравниванием?
13. Что называется переходной характеристикой, кривой разгона, импульсной переходной характеристикой, функцией веса, переходной функцией?
14. Какие объекты называются устойчивыми (статическими), нейтральными (астатическими), неустойчивыми?
15. Что называется детектирующим свойством или направленностью действия?
16. Что такое запаздывание?
17. Виды обратных связей.
18. Изложите классификацию систем автоматического управления и дайте определение систем, входящих в эту классификацию.

РАЗНОВИДНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 2-1. РАЗНОВИДНОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В настоящей и последующих главах рассматриваются замкнутые системы автоматического управления с воздействием по отклонению или, как их называют чаще, системы автоматического регулирования (САР).

В зависимости от цели регулирования системы автоматического регулирования делятся на три группы: 1) системы автоматической стабилизации; 2) системы программного автоматического регулирования; 3) следящие системы.

Эти системы отличаются друг от друга только законом изменения задающего воздействия и конструктивным оформлением. Принципиальных различий между ними нет, они имеют одинаковый принцип действия и общую теорию.

Системой автоматической стабилизации называется устройство, предназначенное для автоматического поддержания с заданной точностью наперед заданного постоянного значения какой-либо величины, состояния или положения.

Системой программного автоматического регулирования называется устройство, предназначенное для автоматического изменения с заданной точностью какой-либо величины, состояния или положения по предварительно заданному закону.

Следящей системой называется устройство, предназначенное для автоматического воспроизведения с заданной точностью какой-либо величины, состояния или положения, меняющихся по произвольному, заранее неизвестному закону. Следящие системы, применяемые для обработки изделий на металлорежущих станках по моделям или шаблонам, называются автоматическими копировальными устройствами.

При работе систем автоматического регулирования всех трех групп управляемая величина сравнивается с заданием и непрерывно в пределах точности устройства воспроизводит задание.

В зависимости от результатов, получаемых при автоматическом регулировании, различают два вида автоматического регулирования: статическое и астатическое.

Статическим называется такое автоматическое регулирование, при котором регулируемая величина при различных постоянных внешних воздействиях на объект регулирования принимает по окон-

чании переходного процесса различные значения, зависящие от величины внешнего воздействия (например, нагрузки).

В статическом регуляторе уровня воды (рис. 2-1) при увеличении расхода воды Q по трубе T_1 уровень снижается, поплавок опускается и переставляет задвижку, увеличивая отверстие. Количество воды, поступающей по трубе T_2 , увеличивается, и при некотором новом уровне в резервуаре наступит равновесие, при котором приток воды будет равен расходу. Чем больше расход воды, тем больше открыта задвижка в состоянии равновесия и, следовательно, тем ниже будут находиться поплавок и новый уровень воды.

Система статического регулирования имеет следующие характерные свойства: 1) равновесие системы возможно при различных значениях регулируемой величины; 2) каждому значению регулируемой величины соответствует единственное определенное положение регулирующего органа.

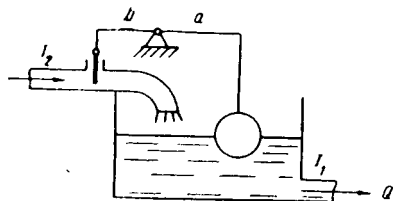


Рис. 2-1. Статический регулятор прямого действия

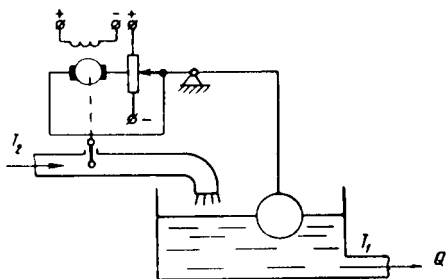


Рис. 2-2. Астатический регулятор непрямого действия

Для осуществления такой связи между датчиком и исполнительным элементом контур регулирования должен состоять из так называемых статических звеньев, у которых в состоянии равновесия выходная величина однозначно зависит от входной. В тех случаях, когда используются линейные статические звенья, имеет место зависимость

$$x_{\text{вых}} = \alpha x_{\text{вх}}; \quad \alpha = \text{const.}$$

Астатическим называется автоматическое регулирование, при котором при различных постоянных значениях внешнего воздействия на объект (например, нагрузки) отклонение регулируемой величины от заданного значения по окончании переходного процесса становится равным нулю.

В астатическом регуляторе уровня воды (рис. 2-2) поплавком перемещает ползунок, который пускает в ту или иную сторону двигатель, управляющий положением заслонки. Выключен двигатель будет тогда, когда уровень воды достигнет заданного значения.

Система астатического регулирования имеет следующие характерные особенности: 1) равновесие системы имеет место только при одном значении регулируемой величины, равном заданному;

2) регулирующий орган имеет возможность занимать различные положения при одном и том же значении регулируемой величины.

В реальных регуляторах первое условие выполняется с некоторой погрешностью вследствие нечувствительности датчика.

Для выполнения второго условия в контур регулирования вводится так называемое астатическое звено. В нашем примере астатическим звеном является двигатель, обладающий тем свойством, что при отсутствии напряжения его вал неподвижен в любом положении, а при наличии напряжения непрерывно вращается.

Астатическое звено находится в состоянии безразличного равновесия при отсутствии внешнего воздействия на входе и выходит из равновесия при появлении такого воздействия.

На рис. 2-3 показан астатический трехпозиционный регулятор релейного действия, у которого поплавок при перемещении включает двигатель с помощью релейного элемента в одну или другую сторону, открывая или прикрывая задвижку. Когда уровень воды находится в заданных пределах, релейный элемент отключает двигатель от сети.

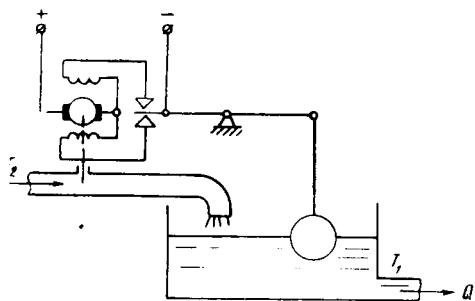


Рис. 2-3. Астатический трехпозиционный регулятор релейного действия

В зависимости от источника энергии, получаемой регулятором, различают прямое и не прямое регулирование.

В системах *прямого* регулирования энергия для перестановки управляющего элемента получается от датчика (см. рис. 2-1).

В системах *непрямого* регулирования энергия для перестановки управляющего элемента получается от постороннего источника (см. рис. 2-2).

В зависимости от количества обратных связей в системе автоматического регулирования различают:

одноконтурные системы, имеющие только одну — внешнюю обратную связь;

многоконтурные системы, имеющие помимо внешней обратной связи еще одну или несколько местных обратных связей.

В зависимости от вида характеристик элементов, из которых состоят системы автоматического регулирования, все системы делятся на линейные и нелинейные.

Линейными называются системы, которые состоят только из линейных элементов. Переходные процессы в таких системах описываются линейными дифференциальными уравнениями.

Нелинейными называются системы, которые наряду с линейными включают один или более нелинейных элементов; переходные процессы в таких системах описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Свойства систем автоматического регулирования зависят от их параметров (массы, индуктивности, емкости, активного сопротивления и т. п.). Параметры могут быть сосредоточенными и распределенными.

В системах с *сосредоточенными параметрами* параметры считаются расположенными в одной точке, и переменные, описывающие поведение системы, зависят только от времени.

В системах с *распределенными параметрами* параметры распределены вдоль конструкций, переменные, описывающие поведение системы, меняются не только во времени, но и в пространстве.

§ 2-2. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Системы автоматического регулирования представляют собой замкнутые динамические системы, в которых часть энергии с выхода может возвращаться на вход, и поэтому данные системы склонны к возникновению колебаний. Кроме того, в зависимости от соотношения параметров они могут обеспечивать большую или меньшую точность в установившемся и в динамическом режимах.

Проектированию системы автоматического регулирования должен предшествовать анализ производственного процесса, условий эксплуатации и формулирование предъявляемых к системе требований, которые могут быть весьма различными.

Однако, несмотря на разнообразия, все требования можно разбить на следующие четыре группы: 1) требования к величине запаса устойчивости системы; 2) требования к величине отклонения регулируемой величины в установившемся режиме (статическая точность); 3) требования к поведению системы в переходном процессе (качество переходного процесса); 4) требования к динамической точности системы, т. е. к величине отклонения при наличии непрерывно изменяющихся воздействий.

Разберем смысл каждой группы требований. Предположим, что в регуляторе, изображенном на рис. 2-2, вследствие уменьшения расхода Q уровень воды в резервуаре повысился, поплавок переместился вверх и двигатель включился на направление вращения, при котором задвижка в подающем трубопроводе T_2 прикрывается. По мере прикрытия задвижки приток воды в резервуар уменьшается и соответственно уменьшается скорость повышения уровня воды в нем. Когда приток станет равным расходу, уровень перестанет изменяться, но поскольку он выше заданного значения, двигатель остается включенным и задвижка продолжает прикрываться, уровень снижается, но двигатель вращается и прикрывает задвижку до тех пор, пока уровень не достигнет заданного значения. Двигатель останавливается, но так как приток на данном положении задвижки оказывается меньше расхода, уровень продолжает снижаться и поплавок включает двигатель на открытие задвижки. Процесс повторяется в другую сторону. Происходят колебания уровня.

Дальнейший характер процесса зависит от соотношения скорости перемещения задвижки и изменения уровня. Если скорость изменения проходного сечения подводящего трубопровода достаточно велика по отношению к скорости изменения уровня, зависящей от разности притока и расхода и площади зеркала воды, то процесс не установится и в системе будут происходить незатухающие колебания. Если скорость изменения проходного сечения мала по сравнению со скоростью изменения уровня, то колебания будут затухающими и в конце концов прекратятся, система придет в равновесие. Ответить на вопрос, каким должно быть соотношение этих скоростей, чтобы система работала устойчиво без колебаний, не очень просто, но совершенно необходимо, иначе невозможно создать работоспособную систему. Следовательно, требование устойчивости имеет первостепенную важность, причем оно должно удовлетворяться с некоторым запасом, предусматривающим возможные изменения параметров системы во время ее работы.

Рассмотрим требование к статической точности, т. е. к точности в установившемся режиме. В астатической системе автоматического регулирования (см. рис. 2-2) установившийся режим возможен только при одном значении уровня, равном заданному. Незначительные отклонения уровня возможны вследствие наличия зазоров в сочленениях рычагов, нечувствительности двигателя. В статической системе (см. рис. 2-1) установившийся режим при различных значениях расхода принципиально возможен только при различных значениях уровня. Чем больше расход отличается от среднего значения, тем больше отклонение уровня от заданного значения.

Из рассмотрения рис. 2-1 видно, что точность поддержания уровня зависит от соотношения плеч a и b . Чем больше плечо b по сравнению с плечом a , тем большей статической точностью обладает система. Однако если для получения большей точности неограниченно увеличивать плечо b , то вследствие энергичного перемещения задвижки при малых изменениях уровня система начнет работать с колебаниями, не приходя к установившемуся режиму. Таким образом, требования высокой статической точности и устойчивости системы находятся в противоречии.

Поведение устойчивой системы автоматического регулирования в переходных процессах или, как принято говорить, качество переходных процессов имеет в ряде случаев не меньшее значение, чем точность в установившемся режиме. По технологическим требованиям иногда необходимо, чтобы переходный процесс быстро заканчивался: иногда недопустимы колебания. Получить необходимое качество переходных процессов можно изменением параметров системы или введением специальных корректирующих устройств.

Обеспечение заданной динамической точности имеет большое значение для следящих систем. Необходимо, чтобы в переходном процессе отклонение регулируемой величины от непрерывно изменяющегося заданного ее значения оставалось в допустимых пре-

делах. Это также достигается подбором параметров элементов системы или введением корректирующих устройств.

В теории автоматического регулирования приходится решать две задачи: 1) исследование имеющейся системы автоматического регулирования и определение, в какой степени она удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям (анализ системы); 2) проектирование системы по заданным требованиям (синтез системы).

В настоящее время методы анализа и синтеза систем разработаны не с одинаковой полнотой. Наиболее полно разработаны методы анализа линейных систем автоматического регулирования, переходные процессы которых описываются линейными дифференциальными уравнениями различных порядков. Эти методы дают возможность выяснить не только характер, но и количественную сторону переходных процессов. Однако не всегда еще можно получить ответ в том виде, который необходим в инженерной практике.

Применение электронных вычислительных машин расширило возможности исследования нелинейных систем путем моделирования или численного решения нелинейных уравнений, описывающих эти системы, однако значение общей теории при этом не снижается.

Основной задачей теории автоматического регулирования является не анализ, а синтез систем автоматического регулирования по заданным требованиям. Однако методы синтеза по-настоящему стали развиваться лишь в последние десятилетия.

При создании систем автоматического регулирования поступали следующим образом. Составляли схему системы, и, произведя статический расчет ее, подбирали оборудование и аппаратуру. Затем производили анализ переходного процесса в этой системе и устанавливали, насколько она удовлетворяет техническим условиям. Если эти условия не удовлетворялись, в систему вносились коррективы и она снова анализировалась. После нескольких попыток удавалось создать систему, отвечающую требованиям технических условий. Такой метод проб и ошибок является очень трудоемким и не может гарантировать создание системы, оптимальной с точки зрения заданных требований.

Задача синтеза системы автоматического регулирования в общем виде очень сложна и до настоящего времени не решена. Решается более узкая и поэтому более простая задача, которая, однако, в подавляющем большинстве случаев удовлетворяет требованиям практики.

При синтезе систему автоматического регулирования разбивают на две части: 1) неизменяемая часть системы, в которую входят управляемый объект и часть элементов регулятора, обычно более мощных; 2) изменяемая часть, в которую входят элементы регулятора, схемы соединений и параметры которых могут меняться.

Задача теории состоит в разработке методов определения структуры и параметров изменяемой части системы автоматического регулирования с целью обеспечения заданных требований к системе в целом. Вопросы синтеза линейных систем автоматического регулирования рассматриваются в главе 7. Общие методы синтеза

нелинейных систем разработаны с меньшей полнотой, и здесь особенно большое значение имеет применение электронных моделирующих устройств.

В промышленности и в военной технике имеются системы, которые подвергаются случайным воздействиям, не поддающиеся типизации. Воздействия в этих случаях обрабатываются статистическими методами, которые применяются также при анализе и синтезе систем. Эти методы рассматриваются в главе 13. Исследование и синтез линейных систем проще, чем нелинейных, и поэтому естественным является стремление привести нелинейную систему к линейной, если имеется такая возможность.

Следует отметить, что абсолютно линейных реальных элементов автоматики не существует, однако имеется большое количество элементов, которые практически без ущерба для точности расчетов принимаются в рабочем диапазоне линейными.

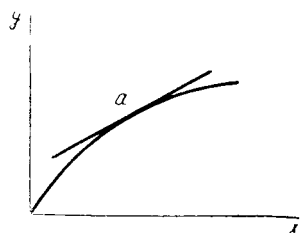


Рис. 2-4. Линейзация участка нелинейной характеристики

Если характеристики нелинейных элементов непрерывны, то возможна их линейризация, в основе которой лежит выдвинутое И. А. Вышнеградским положение о том, что в течение процесса регулирования имеют место лишь достаточно малые отклонения всех изменяющихся величин от установившихся значений. Поэтому криволинейный участок характеристики в окрестностях точки a

(рис. 2-4), соответствующей установившемуся значению переменной, заменяется отрезком касательной, проведенной в этой точке (или иногда секущей, параллельной касательной).

Линейризация методом касательной аналитически соответствует разложению в ряд Тейлора в точке равновесия функции, описывающей характеристику элемента, и отбрасыванию всех членов, содержащих производные порядка выше первого. При этом внутри рассматриваемого отрезка характеристики, заключающего и точку, соответствующую положению равновесия, функция и все ее производные должны быть непрерывны и однозначны. Наличие зазоров, сухого трения, гистерезиса нарушает непрерывность и однозначность функции. Линейризовать характеристику в этом случае можно, лишь отбросив эти факторы. Если влияние этих факторов велико и пренебречь ими нельзя, то линейризация невозможна и систему необходимо исследовать как нелинейную.

§ 2-3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПЕРЕХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ, ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

При исследовании переходных процессов в системах автоматического регулирования используются линейные и нелинейные дифференциальные уравнения соответственно для линейных и нелиней-

ных систем. Линейные уравнения рассматриваются в формах классической и операторной (преобразование Лапласа). Кроме того, при исследовании линейных систем широко используются передаточные функции и частотные характеристики. Дифференциальные уравнения в классической и операторной формах изучаются в курсе высшей математики. Передаточные функции и частотные характеристики являются новыми понятиями и поэтому рассматриваются в настоящем параграфе. Математический аппарат, используемый при исследовании нелинейных систем, рассматривается в соответствующих главах книги.

Методику составления дифференциальных уравнений, понятия о передаточной функции и частотных характеристиках легче усвоить на конкретном примере.

Рассмотрим содержащую активное сопротивление r и емкость C цепь (рис. 2-5), которая может быть одним из элементов системы автоматического регулирования. Составим дифференциальное уравнение этой цепи, связывающее выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ с входным $U_{\text{вх}}$ в процессе зарядки конденсатора емкостью C при подаче на вход напряжения $U_{\text{вх}}$. Величина тока, протекающего через сопротивления r_1 и r_2 при зарядке конденсатора C , определяется одним из следующих трех соотношений:

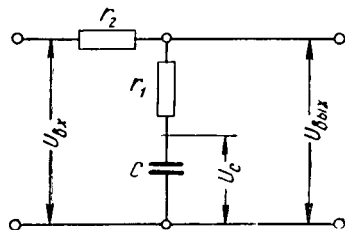


Рис. 2-5. Схема к примеру

$$i = \frac{U_{\text{вх}} - U_{\text{вых}}}{r_2}; \quad (2-1)$$

$$i = \frac{U_{\text{вых}} - U_c}{r_1}; \quad (2-2)$$

$$i = C \frac{dU_c}{dt}. \quad (2-3)$$

Найдем из выражения (2-2) значение U_c и его производной

$$U_c = U_{\text{вых}} - ir_1; \\ \frac{dU_c}{dt} = \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} - r_1 \frac{di}{dt} \quad (2-4)$$

и подставим значение $\frac{dU_c}{dt}$ из (2-4) в (2-3)

$$i = C \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} - Cr_1 \frac{di}{dt}. \quad (2-5)$$

Найдем из (2-1) значение производной тока

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{r_2} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} - \frac{1}{r_2} \frac{dU_{\text{вых}}}{dt}. \quad (2-6)$$

Подставляя в (2-5) значение тока из (2-1) и его производной из (2-6), получим

$$T_2 \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} + U_{\text{вых}} = T_1 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} + U_{\text{вх}}, \quad (2-7)$$

где

$$T_1 = Cr_1, \text{ сек};$$

$$T_2 = C(r_1 + r_2), \text{ сек}.$$

Переходя к изображению по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим

$$(T_2 p + 1) \bar{U}_{\text{вых}} = (T_1 p + 1) \bar{U}_{\text{вх}}. \quad (2-8)$$

Здесь символом с чертой сверху обозначается изображение переменной по Лапласу. В литературе применяются и другие обозначения изображений. Так, например, если переменная в функции времени обозначается через x , то ее изображение обозначают через $x(p)$ или $\bar{x}(p)$, или $X(p)$. Мы считаем, что такая форма обозначений делает выражения излишне громоздкими при написании, несколько не увеличивая их ясности. Поэтому для обозначения изображений в книге применяется более краткий, но не менее ясный символ $\bar{x}$. Такие обозначения применяются в [14, 15, 18].

Уравнение (2-8) связывает переменные на входе и выходе рассматриваемой цепи rc . Однако при исследовании систем автоматического регулирования в большинстве случаев интерес представляют не сами переменные, а отклонения их от установившихся значений.

Составим для рассмотренного примера уравнение в отклонениях. Обозначим установившиеся значения входного и выходного напряжений соответственно через $U_{\text{вх}0}$ и $U_{\text{вых}0}$. Уравнение статики, связывающее эти величины по окончании переходного процесса,

$$U_{\text{вх}0} = U_{\text{вых}0}. \quad (2-9)$$

Входная и выходная величины в переходном процессе

$$\begin{aligned} U_{\text{вх}} &= U_{\text{вх}0} + \Delta U_{\text{вх}}; \\ U_{\text{вых}} &= U_{\text{вых}0} + \Delta U_{\text{вых}}. \end{aligned} \quad (2-10)$$

Подставляя (2-10) в (2-7) и вычитая из полученного уравнения уравнение статики (2-9), получим

$$T_2 \frac{d \Delta U_{\text{вых}}}{dt} + \Delta U_{\text{вых}} = T_1 \frac{d \Delta U_{\text{вх}}}{dt} + \Delta U_{\text{вх}}, \quad (2-11)$$

или, переходя к изображению по Лапласу при нулевых начальных условиях,

$$(T_2 p + 1) \Delta \bar{U}_{\text{вых}} = (T_1 p + 1) \Delta \bar{U}_{\text{вх}}. \quad (2-12)$$

Переменные величины, действующие в системе, обозначали прописными буквами латинского алфавита. Для упрощения написания

формул отклонения переменных от установившихся значений в дальнейшем будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, например $\Delta U_{\text{вых}} = u_{\text{вых}}$; $\Delta X_{\text{вх}} = x_{\text{вх}}$.

Тогда уравнение (2-12) примет вид

$$(T_2 p + 1) \bar{u}_{\text{вых}} = (T_1 p + 1) \bar{u}_{\text{вх}}. \quad (2-13)$$

Уравнения (2-13) и (2-8) аналогичны. Однако при ненулевых начальных условиях уравнение (2-8) усложнится, а в уравнении в отклонениях начальные условия исчезают при вычитании уравнений статика.

Переменные, входящие в уравнения, и отклонения переменных представляют собой размерные величины, что усложняет уравнения.

Гораздо удобнее пользоваться безразмерными относительными величинами, рассматривая не сами переменные или отклонения переменных, а их отношение к некоторым постоянным для данной задачи, так называемым базовым величинам, выбор которых может осуществляться произвольно.

В качестве базовых часто выбирают номинальные значения величин. Например, для электрических машин номинальные значения мощности, тока, напряжения, скорости вращения вала. Иногда в качестве базовых принимаются установившиеся значения тока, напряжения и других величин, или максимальные их значения, средние значения. В каждом конкретном случае выбор базовых значений обычно не представляет затруднений.

Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, их можно делить на одну и ту же базовую величину.

Отношение отклонений к базовым величинам, выраженное в безразмерных величинах, будем обозначать строчными буквами греческого алфавита, например

$$\frac{x}{X_{\text{баз}}} = \varphi; \quad \frac{y}{Y_{\text{баз}}} = \mu.$$

Чтобы перейти к безразмерным величинам в уравнении (2-13), разделим обе его части на установившееся значение входной величины $U_{\text{вх}0}$. Обозначив $\sigma_{\text{вых}} = u_{\text{вых}}/U_{\text{вх}0}$ и $\sigma_{\text{вх}} = u_{\text{вх}}/U_{\text{вх}0}$, получим

$$(T_2 p + 1) \bar{\sigma}_{\text{вых}} = (T_1 p + 1) \bar{\sigma}_{\text{вх}}, \quad (2-14)$$

или в обычной форме

$$T_2 \frac{d\sigma_{\text{вых}}}{dt} + \sigma_{\text{вых}} = T_1 \frac{d\sigma_{\text{вх}}}{dt} + \sigma_{\text{вх}}. \quad (2-15)$$

Дифференциальное уравнение системы автоматического регулирования или ее части представляет собой уравнение динамического равновесия между входной и выходной величинами. Решение дифференциального уравнения описывает изменение выходной величины во времени при подаче на вход входной величины, изменяющейся по какому-либо закону. При разных законах изменения входной

величины различным образом изменяется во времени и выходная величина.

Найдем переходную функцию из дифференциального уравнения (2-14). Если в этом уравнении в качестве входной величины принять ступенчатое воздействие

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \sigma_{\text{вх}} & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad (2-16)$$

то уравнение (2-14) примет вид

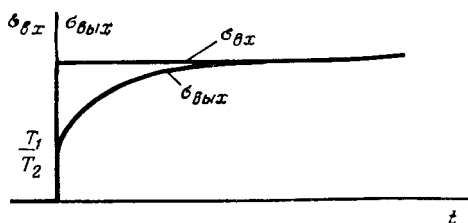
$$(T_2 p + 1) \bar{\sigma}_{\text{вых}} = (T_1 p + 1) \frac{\sigma_{\text{вх}}}{p}.$$

Решение этого уравнения

$$\sigma_{\text{вых}} = \sigma_{\text{вх}} \left[1 - \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \right].$$

Если в качестве входной величины принять воздействие типа единичного скачка, т. е. $\sigma_{\text{вх}} = 1$, то получим уравнение переходной функции

$$h(t) = 1 - \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) e^{-\frac{t}{T_2}}, \quad (2-17)$$



которое описывает переходный процесс системы (или звена) при ступенчатом изменении входной величины от нуля до единицы. На рис. 2-6 приведен график переходной функции, построенный по выражению (2-17).

Рис. 2-6. График переходной функции

Функцию веса найдем как производную от переходной функции (2-17)

$$\omega(t) = \frac{1}{T_2} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) e^{-\frac{t}{T_2}}. \quad (2-18)$$

Это выражение описывает переходный процесс системы при подаче на вход единичного импульса (δ -функции).

Уравнения (2-8) и (2-14) описывают зависимость изображения выходной величины от входной. Преобразуем уравнение (2-14) и запишем в следующем виде:

$$W(p) = \frac{\bar{\sigma}_{\text{вых}}}{\bar{\sigma}_{\text{вх}}} = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}. \quad (2-19)$$

Выражение (2-19) называется передаточной функцией. Таким образом, *передаточной функцией* $W(p)$ динамической системы назы-

вается отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях. Из выражения (2-19) получаем

$$\bar{\sigma}_{\text{вых}} = W(p) \bar{\sigma}_{\text{вх}}. \quad (2-20)$$

Рассматриваемую в нашем примере схему можно представить блок-схемой, приведенной на рис. 2-7. Здесь входная и выходная величины представлены стрелками с соответствующими обозначениями, а схема изображена прямоугольником, в который вписана передаточная функция. При нулевых начальных условиях схема в области изображений по Лапласу может рассматриваться как оператор умножения входной величины на передаточную функцию для получения выходной величины.

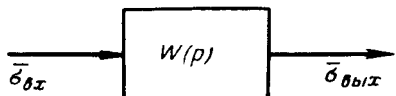


Рис. 2-7. Блок-схема к примеру

Преобразуем по Лапласу выражение переходной функции (2-17) и получим

$$\bar{h}(t) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} \cdot \frac{1}{p}, \quad (2-21)$$

или, учитывая выражение (2-20),

$$\bar{h}(t) = \frac{W(p)}{p}; \quad W(p) = p \bar{h}(t). \quad (2-22)$$

Таким образом, передаточная функция представляет собой производную от преобразованной по Лапласу переходной функции (умножение на p в области изображений равносильно взятию производной во временной области). Переходная функция и передаточная функция описывают динамические свойства системы соответственно во временной области и в области изображений по Лапласу.

Все приведенные выше рассуждения справедливы для любой линейной системы автоматического регулирования или отдельных ее элементов.

Если на вход схемы (см. рис. 2-5) подать сигнал синусоидальной формы с частотой ω и амплитудой, равной единице, то на выходе в установившемся режиме получится тоже синусоидальный сигнал с той же частотой ω , но с другими амплитудой и фазой.

Синусоидальные функции, как известно, могут выражаться в векторной форме показательными функциями с мнимым аргументом. Тогда входная синусоидальная величина может быть записана следующим образом:

$$\dot{\sigma}_{\text{вх}} = e^{j\omega t}, \quad (2-23)$$

а выходная

$$\dot{\sigma}_{\text{вых}} = A(\omega) e^{j[\omega t + \theta(\omega)]}, \quad (2-24)$$

где $A(\omega)$ — отношение амплитуд выходного и входного сигналов;
 $\theta(\omega)$ — разность фаз выходного и входного сигналов.

Здесь точка над входной и выходной величинами означает, что это векторы.

Подставим значения входной и выходной величин в (2-15)

$$T_2 j\omega A(\omega) e^{j[\omega t + \theta(\omega)]} + A(\omega) e^{j[\omega t + \theta(\omega)]} = T_1 j\omega e^{j\omega t} + e^{j\omega t}.$$

Сокращая это выражение на $e^{j\omega t}$ и вынося в левой части за скобки общий множитель, получим

$$A(\omega) e^{j\theta(\omega)} (T_2 j\omega + 1) = T_1 j\omega + 1,$$

откуда

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\theta(\omega)} = \frac{T_1 j\omega + 1}{T_2 j\omega + 1}. \quad (2-25)$$

Величина $W(j\omega)$ называется *комплексным коэффициентом усиления* или *комплексным коэффициентом передачи*, представляющим комплексное число, модуль которого равен отношению амплитуд выходного и входного сигналов при неизменной частоте ω входного сигнала. Если положить $\omega = 0$, то получим коэффициент усиления или коэффициент передачи системы или элемента. В нашем случае этот коэффициент равен единице.

Зная величину $W(j\omega)$, можно найти реакцию системы не только на синусоидальное колебание, но и на сигнал любой произвольной формы $x_{вх}(t)$. Действительно, $x_{вх}(t)$ для широкого класса функций можно представить с помощью интеграла Фурье в виде суммы бесконечного числа синусов в диапазоне частот от 0 до ∞ . Находя реакцию системы на колебание каждой частоты и складывая все выходные колебания, можно получить выходную величину $x_{вых}(t)$.

При некотором фиксированном значении частоты ω входного сигнала $W(j\omega)$ представляет собой вектор с амплитудой $A(\omega)$ и аргументом $\theta(\omega)$. Для разных значений ω различными оказываются $A(\omega)$ и $\theta(\omega)$. Изменяя ω от 0 до ∞ , получим множество различных векторов. Огибающая, проведенная через концы этих векторов, называется амплитудно-фазовой характеристикой (а. ф. х.), а выражение (2-25) является уравнением этой характеристики. Иногда выражение (2-25) называют частотной передаточной функцией.

Таким образом, *амплитудно-фазовой характеристикой* называется линия, соединяющая концы радиусов-векторов, длины которых равны отношению амплитуд выходного и входного сигналов, а угол, образуемый с положительным направлением вещественной оси, равен разности фаз выходного и входного сигналов для частот, изменяющихся от 0 до ∞ .

Сравнивая выражения (2-19) и (2-25), видим, что уравнение амплитудно-фазовой характеристики может быть получено из передаточной функции заменой p на $j\omega$. Это является общим правилом, и им всегда пользуются.

Между переходной функцией и амплитудно-фазовой характеристикой динамической системы также существует тесная связь, поскольку они получаются из одного и того же дифференциального

уравнения. В первом случае на вход системы подается воздействие типа единичного скачка, во втором случае — синусоидальное возмущение. Эта связь дает возможность по амплитудно-фазовой характеристике системы построить ее переходную функцию, не решая уравнение. Для этого обычно используется вещественная часть амплитудно-фазовой характеристики.

По графику переходной функции можно получить график переходного процесса при ступенчатом воздействии, умножив все ординаты переходной функции на входную величину.

По имеющейся переходной функции можно построить амплитудно-фазовую характеристику. Это обычно делается при автоматизации сложных технологических объектов, у которых расчетным

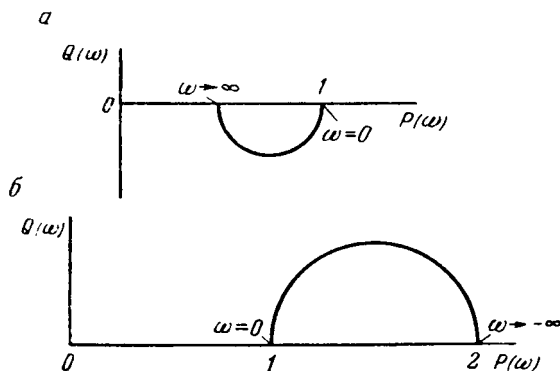


Рис. 2-8. Амплитудно-фазовые характеристики:
а — обыкновенная; б — обратная

путем нельзя получить ни переходную функцию, ни частотные характеристики. В этом случае экспериментально снимается переходная функция объекта, а затем по ней, если это необходимо, строится амплитудно-фазовая характеристика.

Избавимся в выражении (2-25) от комплексности в знаменателе и отделим вещественную и мнимую части

$$W(j\omega) = \frac{(T_1 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)}{(T_2 j\omega + 1)(-T_2 j\omega + 1)} = \frac{T_1 T_2 \omega^2 + 1}{T_2^2 \omega^2 + 1} - j \frac{\omega(T_2 - T_1)}{T_2^2 \omega^2 + 1}. \quad (2-26)$$

Подставляя в (2-26) различные значения ω в пределах от 0 до ∞ , получаем различные значения вещественной и мнимой составляющих, по которым на комплексной плоскости строится амплитудно-фазовая характеристика.

На рис. 2-8, а приведена амплитудно-фазовая характеристика, построенная для значений $T_1 = 1$ сек, $T_2 = 2$ сек. В данном случае это полуокружность. При более сложных уравнениях она представляет кривую более сложной формы.

Как правило, уравнение $W(j\omega)$ амплитудно-фазовой характеристики системы представляет дробь, числитель и знаменатель

которой являются полиномами степеней ω . Если степень полинома знаменателя выше степени полинома числителя, то при $\omega \rightarrow \infty$ $W(j\omega) \rightarrow 0$. Если степень полинома знаменателя равна степени полинома числителя, то при $\omega \rightarrow \infty$

$$W(j\omega) = \frac{a_0}{b_0},$$

где a_0 и b_0 — коэффициенты при высших степенях ω соответственно в числителе и знаменателе.

В рассмотренном случае при $\omega \rightarrow \infty$

$$W(j\omega) = \frac{T_1 T_2}{T_2^2} = 0,5.$$

Амплитудно-фазовая характеристика симметрична относительно вещественной оси. Если вместо значений $+\omega$ подставлять значения $-\omega$, то получим зеркальное отражение первой кривой в вещественной оси.

В некоторых случаях находит применение обратная амплитудно-фазовая характеристика

$$I(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega)}.$$

Для рассматриваемого примера

$$I(j\omega) = \frac{T_2 j\omega + 1}{T_1 j\omega + 1} = \frac{T_1 T_2 \omega^2 + 1}{T_1^2 \omega^2 + 1} - j \frac{\omega(T_1 - T_2)}{T_1^2 \omega^2 + 1}.$$

На рис. 2-8, б приведена обратная амплитудно-фазовая характеристика для значений $T_1 = 1$ сек, $T_2 = 2$ сек. Это тоже полуокружность, но большего радиуса, чем у обыкновенной а. ф. х. и с положительной мнимой частью.

Выпишем из выражения (2-26) вещественную часть

$$P(\omega) = \frac{T_1 T_2 \omega^2 + 1}{T_2^2 \omega^2 + 1} \quad (2-27)$$

и мнимую часть

$$Q(\omega) = - \frac{\omega(T_2 - T_1)}{T_2^2 \omega^2 + 1}. \quad (2-28)$$

Оба эти выражения зависят от частоты ω и являются соответственно уравнениями вещественной и мнимой частотных характеристик.

На рис. 2-9 построены вещественная и мнимая частотные характеристики для значений $T_1 = 1$ сек, $T_2 = 2$ сек при изменении частоты ω от 0 до ∞ .

Построение на комплексной плоскости амплитудно-фазовых характеристик сложных систем, состоящих из большого числа элементов, требует большой затраты времени. Задача значительно упрощается, если перейти к логарифмическим частотным характеристикам. Кроме того, как это показано в дальнейшем, логарифмические

частотные характеристики дают возможность синтезировать корректирующие устройства систем автоматического регулирования, т. е. выбирать их схемы и значения параметров. Уравнения логарифмических частотных характеристик могут быть получены следующим образом.

По выражению (2-25) уравнение амплитудно-фазовой характеристики может быть записано в показательной форме

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\theta(\omega)}. \quad (2-29)$$

Модуль характеристики, выраженный через вещественную и мнимую части, или амплитудная частотная характеристика имеют вид

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}. \quad (2-30)$$

Аргумент характеристики или фазовая частотная характеристика

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (2-31)$$

Для рассмотренного выше примера

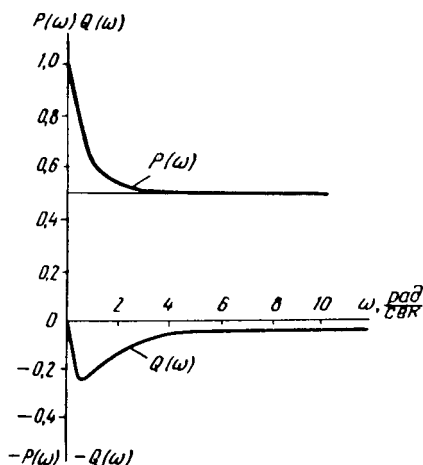


Рис. 2-9. Вещественная и мнимая частотные характеристики

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{\left(\omega^2 + \frac{1}{T_1 T_2}\right)^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)^2}}{\frac{T_2}{T_1} \omega^2 + \frac{1}{T_1 T_2}}; \quad (2-32)$$

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}{\omega^2 + \frac{1}{T_1 T_2}}. \quad (2-33)$$

$\frac{1}{T}$ имеет размерность частоты $\omega \frac{1}{\text{сек}}$.

Прологарифмируем выражение (2-29)

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\theta(\omega). \quad (2-34)$$

Кривые, построенные в логарифмическом масштабе частоты по выражениям $\ln A(\omega)$ и $\theta(\omega)$, называются соответственно логарифмической амплитудной и логарифмической фазовой частотными характеристиками (рис. 2-10). Иногда частоту ω делят на какое-либо постоянное значение частоты и тогда по оси абсцисс откладываются в логарифмическом масштабе относительные безразмерные значения частоты. Основными единицами логарифмической шкалы являются октава и декада.

Октавой называется интервал частот, заключающийся между произвольным значением частоты ω и ее удвоенного значения 2ω . Отрезок, изображающий октаву, имеет одну и ту же длину на любом участке шкалы и равен $\lg 2$.

Декадой называется интервал частот, заключающийся между произвольным значением частоты ω и ее значением, увеличенным в десять раз и равным 10ω . Длина отрезка, изображающего декаду, равна $\lg 10$.

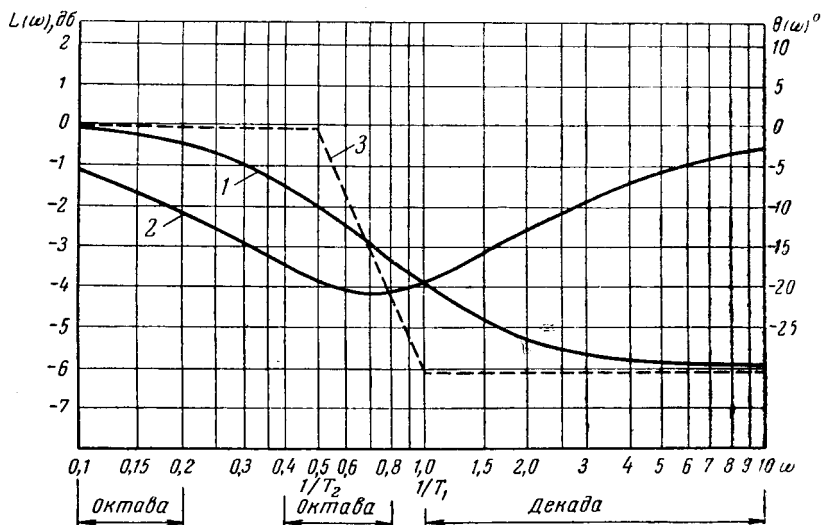


Рис. 2-10. Логарифмические частотные характеристики

По оси ординат при построении логарифмической амплитудной частотной характеристики откладывается не $\ln A(\omega)$, а пропорциональная ему величина $20 \lg A(\omega)$, измеряемая в децибелах. Если L есть значение некоторого числа B , выраженное в децибелах, то $L = 20 \lg B$.

При построении логарифмической фазовой частотной характеристики по оси ординат откладывается угол сдвига фаз в градусах между выходным и входным сигналами.

Построим логарифмические частотные характеристики для рассмотренного примера. Уравнение амплитудной логарифмической частотной характеристики получаем, логарифмируя выражение (2-32)

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{\left(\omega^2 + \frac{1}{T_1 T_2}\right)^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)^2} - 20 \lg \left(\frac{T_2}{T_1} \omega^2 + \frac{1}{T_1 T_2}\right). \quad (2-35)$$

Подставляя в (2-35) различные значения частоты ω при $T_1 = 1 \text{ сек}$ и $T_2 = 2 \text{ сек}$, определяем соответствующие значения ампли-

туды $L(\omega)$ в децибелах (табл. 2-1) и по результатам вычислений строим по точкам логарифмическую амплитудную частотную характеристику (кривая 1 на рис. 2-10). Кривизна большого числа кривых при построении их в логарифмическом масштабе уменьшается. Это обстоятельство часто используют для аппроксимации амплитудных логарифмических характеристик ломаными прямыми, что может значительно сократить вычислительные работы. В некоторых случаях такое спрямление оказывается невозможным, так как вносит большие ошибки.

Координаты точек логарифмической фазовой частотной характеристики (кривая 2 на рис. 2-10) вычисляем с помощью выражения (2-33) при $T_1 = 1 \text{ сек}$ и $T_2 = 2 \text{ сек}$. Результаты вычислений помещены в табл. 2-2.

Вычисление логарифмических кривых по точкам требует довольно кропотливой работы, хотя и меньшей, чем построение характеристик на комплексной плоскости. Вычислительная работа резко сокращается, если построить приближенную ломаную кривую.

Рассмотрим выражение (2-35). При малой частоте $\omega < \frac{1}{T_2} = \frac{1}{2}$ степенями ω по сравнению с $\frac{1}{T_1 T_2}$ можно пренебречь. При этом выражение (2-35) примет вид

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{T_1 T_2} - 20 \lg \frac{1}{T_1 T_2} = 0,$$

т. е. характеристика совпадает с осью абсцисс.

При больших значениях частоты $\omega > \frac{1}{T_1} = 1$ можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме ω в высшей степени. При этом

$$L(\omega) = 20 \lg \omega^2 - 20 \lg \frac{T_2}{T_1} \omega^2 = -20 \lg \frac{T_2}{T_1} = -20 \lg 2 = -6 \text{ дб}.$$

Таким образом, при значениях $\omega = 0 \div \frac{1}{T_2}$ логарифмическая амплитудная частотная характеристика изображается отрезком прямой, совпадающим с осью абсцисс, при значениях $\omega = \frac{1}{T_1} \div \infty$ — прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на 6 дб. Соединив концы отрезков наклонной прямой, получим приближенную характеристику (ломаная 3 на рис. 2-10), которая близка к точной (отличается от точной менее чем на 3 дб). Частоты $\omega = \frac{1}{T_1}$ и $\omega = \frac{1}{T_2}$ называются сопрягающими частотами.

Логарифмическую фазовую частотную характеристику в большинстве случаев полностью строить не требуется, возникает лишь необходимость определить сдвиг фаз между входным и выходным сигналами в какой-либо одной точке, что серьезных затруднений

Таблица 2-1

w	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	4,0	8,0	10,0	20,0
$20 \lg \sqrt{4w^4 + 5w^2 + 1}$	0,21	0,83	2,79	5,21	7,63	10,00	19,29	30,43	42,23	46,08	58,08
$-20 \lg (4w^2 + 1)$	-0,34	-1,29	-4,30	-7,75	-11,03	-13,98	-24,61	-36,26	-48,20	-52,06	-64,08
$L(w), \text{ дБ}$	-0,13	-0,46	-1,51	-2,54	-3,39	-3,98	-5,31	-5,83	-5,97	-5,98	-6,00

Таблица 2-2

w	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	4,0	8,0	10,0	20,0	00
$\frac{w}{2w^2 + 1}$	0	0,1	0,185	0,300	0,347	0,351	0,33	0,222	0,121	0,062	0,050	0,025	0
0	0	5° 40'	10° 40'	17° 30'	20° 20'	20° 30'	19° 20'	12° 50'	7° 00'	3° 30'	2° 50'	1° 30'	0

не представляет. Разработаны также приближенные методы определения сдвига фаз в точке при известной амплитудной логарифмической характеристике. Однако они имеют значение лишь при массовых однотипных расчетах. При эпизодических расчетах изучение приближенного метода и области его применения займет больше времени, чем точное вычисление нескольких точек.

§ 2-4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Энергетический расчет системы автоматического регулирования производится для определения мощности элементов, входящих в систему. Выполнить этот расчет можно только после составления принципиальной схемы системы и выбора конструкции отдельных элементов.

Энергетические расчеты собственно в теорию автоматического регулирования не входят, они производятся методами, которые разработаны в механике, теплотехнике, теории гидро- и пневмопривода, в теории электропривода, электрических аппаратов и др. Однако результаты этих расчетов могут существенно повлиять на работу системы автоматического регулирования и при неправильном подходе могут сделать ее неработоспособной.

В теории автоматического регулирования, если не делается специальных оговорок, предполагается, что все элементы имеют практически неограниченную мощность, при которой переходные процессы не искажаются, т. е. амплитуды отклонений не срезаются, обеспечиваются расчетные ускорения и т. п. Если элементы системы имеют ограниченную мощность, то в динамические расчеты нужно вводить специальные ограничения, иначе они будут несправедливы и качество работы системы может резко ухудшиться. Чтобы обеспечить работу системы в соответствии с динамическим расчетом, при энергетических расчетах нужно придерживаться некоторых общих правил, приведенных ниже. В конкретных расчетах эти правила могут дополняться и даже несколько изменяться, однако они являются основой для дополнений и изменений.

Наиболее мощными являются исполнительные элементы, воздействующие на регулирующие органы управляемого объекта. Сюда относятся двигатели, приводящие в движение задвижки в трубопроводах; генераторы, питающие обмотки возбуждения при регулировании напряжения; статоры асинхронных двигателей при динамическом торможении и т. п.

Энергетический расчет начинается с определения мощности исполнительных элементов. Точное определение потребляемой регулирующим органом мощности практически невозможно, так как неизвестны точные значения скоростей, ускорений, величин токов и напряжений в переходных процессах. Поэтому эти параметры определяются ориентировочно из технических требований к качеству переходных процессов, которое должна обеспечивать система автома-

тического регулирования при реальных или при типовых, наиболее близких к самым тяжелым реальным воздействиям на управляемый объект.

После определения мощности, потребляемой регулирующим органом, необходимо выбрать с определенным запасом по мощности исполнительный элемент. Коэффициент запаса может колебаться в широких пределах — от 1,5 до 10. Величина его зависит от динамических составляющих усилий в переходных процессах в регулирующих органах и внутри управляющего элемента. Исполнительный элемент любой физической природы обладает внутренним сопротивлением — электрическим, механическим, гидравлическим. Эти сопротивления могут быть активные, реактивные, инерционные, упругие. С энергетической точки зрения наиболее выгодно, чтобы сопротивление, которое необходимо преодолевать в регулирующем органе при переходных процессах, равнялось по величине внутреннему сопротивлению исполнительного элемента. При неравенстве этих сопротивлений мощность, развиваемая исполнительным элементом в переходном процессе, оказывается значительно ниже номинальной мощности, развиваемой при установившемся процессе, в связи с чем приходится принимать большие коэффициенты запаса.

После выбора исполнительного элемента устанавливается мощность, которую нужно подавать на его вход. Эта величина является исходной для выбора мощности предшествующего по замкнутой цепи элемента системы. Выбор мощности ведется аналогично выбору мощности исполнительного элемента. Обязательным является также согласование входного и выходного сопротивлений сопрягаемых элементов.

При определении номинальной мощности элементов системы необходимо в большинстве случаев добиваться того, чтобы изменение их выходной величины при переходных процессах происходило на линейной части характеристики. Это также требует завышения мощности.

Нужно добиваться также согласования линейных участков характеристик сопрягаемых элементов. При отсутствии такого согласования может случиться, что, несмотря на достаточную длину линейного участка, рабочая точка смещена в одну сторону этого участка и при переходных процессах выходит с одной стороны на нелинейный участок. Для устранения этого дефекта следует произвести согласование выходной и входной величин сопрягаемых элементов (напряжения, токи, механические перемещения и т. п.).

Может оказаться, что при правильном расположении рабочих точек на линейных участках характеристик при увеличении отклонения рабочие точки разных элементов выходят на нелинейные участки неодновременно. Добиться согласованного перемещения рабочих точек по линейным участкам можно перераспределением коэффициентов усиления между элементами. Если такого согласования добиться нельзя, то выгоднее, чтобы рабочая точка выходила за пределы линейного участка сначала в последующих более мощных

элементах и только после этого в предыдущих маломощных. При этом полностью будет использовано более мощное и дорогостоящее оборудование.

Более подробно вопросы энергетического расчета систем автоматического регулирования освещены в [21].

Контрольные вопросы

1. Что называется системой автоматической стабилизации?
2. Что называется системой программного автоматического регулирования?
3. Что называется следящей системой?
4. Что называется статическим и астатическим регулированием?
5. Что называется прямым и косвенным регулированием?
6. В чем разница между одноконтурными и многоконтурными системами?
7. Какие системы называются линейными, нелинейными?
8. Чем отличаются системы с сосредоточенными и распределенными параметрами?
9. Какие требования предъявляются к системам автоматического регулирования?
10. Чем отличается анализ систем автоматического регулирования от их синтеза?
11. Как можно линеаризовать нелинейную систему?
12. В какой форме составляются дифференциальные уравнения систем автоматического регулирования?
13. Что называется переходной функцией и как ее получить?
14. Что называется передаточной функцией и как ее получить?
15. Какая связь существует между передаточной и переходной функциями?
16. Что называется комплексным коэффициентом передачи?
17. Что называется амплитудно-фазовой характеристикой и как ее получить?
18. Как построить вещественную и линейную частотные характеристики?
19. Как построить логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики?
20. В чем состоят основные особенности энергетического расчета систем автоматического регулирования?

ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 3-1. РАСЧЛЕНЕНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Системы автоматического регулирования могут быть расчленены на отдельные составляющие их элементы различными способами.

Один из способов заключается в том, что система расчленяется на отдельные элементы по их назначению, по функциональным признакам, например, выделяются объект регулирования, управляющий элемент, исполнительный элемент и т. п.

Можно расчленить систему на элементы по их конструктивному оформлению (например, генератор, электромашинный усилитель, потенциометр).

Однако при исследовании устойчивости и качества систем автоматического регулирования расчленение их на элементы по функциональному или конструктивному признакам оказывается бесполезным. При этих исследованиях важно различать элементы по их динамическим свойствам. Рассмотрение элементов систем с этой точки зрения показывает, что разные элементы, имеющие различные принципы действия и различное конструктивное оформление, описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и, следовательно, обладают одинаковыми динамическими свойствами, одинаково ведут себя в переходных процессах.

Элемент, рассматриваемый с точки зрения его динамических свойств, называется *звеном*.

Любая линейная система с сосредоточенными параметрами может быть расчленена на такие элементарные звенья. Переходные процессы звеньев описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, каждое из которых имеет порядок не выше второго.

Количество типов звеньев, на которые могут быть разбиты все реальные элементы систем автоматического регулирования, оказываются небольшими. Различают следующие типовые звенья: усилительное, аperiodическое, колебательное, интегрирующее, дифференцирующее, запаздывающее.

Расчленение системы на типовые звенья может не совпадать с расчленением ее на функциональные или конструктивные элементы.

Теоретически количество звеньев можно представить гораздо больше, однако они либо не могут быть реализованы физически, либо практически не применяются вследствие явно неудовлетворительных динамических свойств. В некоторых случаях для упрощения

расчетов рассматриваются идеализированные звенья, не поддающиеся физической реализации. Это вносит некоторую погрешность в результаты расчетов, которая на практике, однако, может быть вполне допустимой. При рассмотрении перечисленных выше звеньев попутно будут показаны и другие звенья, идеализированные и неприменимые.

§ 3-2. УСИЛИТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО

Усилительным называется звено, в котором выходная величина воспроизводит без искажений и запаздываний входную величину

$$X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}}, \quad (3-1)$$

где k — коэффициент усиления (передаточный коэффициент) звена

Усилительное звено называют иногда жесткой связью. Переходный процесс в усилительном звене отсутствует.

Примеры усилительных звеньев: жесткий рычаг, безынерционный электронный усилитель, механическое сочленение валов электрических машин. Передаточная функция усилительного звена из выражения (3-1)

$$W(p) = \frac{\bar{X}_{\text{вых}}}{\bar{X}_{\text{вх}}} = k. \quad (3-2)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) = k. \quad (3-3)$$

Это — вектор, совпадающий с положительным направлением вещественной оси (рис. 3-1, а).

Уравнения вещественной и мнимой частотных характеристик:

$P(\omega) = k$ — линия, параллельная оси частот;

$Q(\omega) = 0$ — линия, совпадающая с осью частот (рис. 3-1, б).

Амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{k^2} = k.$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg k.$$

Логарифмическая фазовая частотная характеристика (рис. 3-1, в)

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \frac{0}{k} = 0.$$

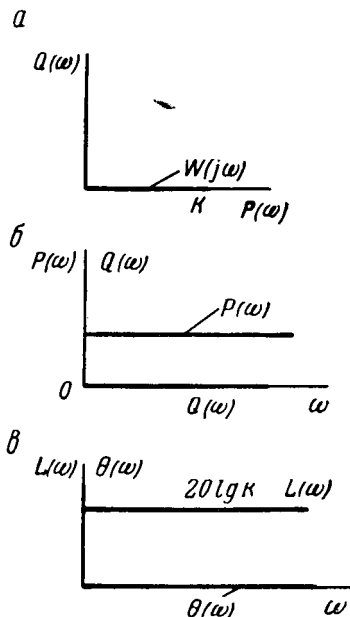


Рис. 3-1. Частотные характеристики усилительного звена

§ 3-3. АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЗВЕНО

Апериодическим называется звено первого порядка, в котором при подаче на вход ступенчатого воздействия выходная величина апериодически (по экспоненциальному закону) стремится к новому установившемуся значению. Такое звено называют также инерционным, статическим, релаксационным, одноемкостным.

К апериодическим звеньям относятся электрические цепи, содержащие емкость и активное сопротивление (без индуктивности), индуктивность и активное сопротивление (без емкости), механические устройства, имеющие массу и силы трения (без пружин) или пружину и силы трения (без массы) и другие подобные устройства, в которых возможно накопление какого-либо вида энергии и ее рассеивание.

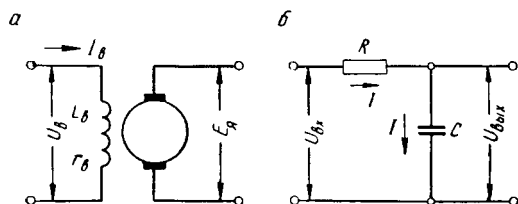


Рис. 3-2. Примеры апериодических звеньев

В качестве примера апериодического звена рассмотрим генератор постоянного тока с независимым возбуждением (рис. 3-2, а). Выведем уравнение изменения э. д. с. якоря генератора при включении обмотки возбуждения на постоянное напряжение $U_{\text{в}}$.

Уравнение цепи обмотки возбуждения в переходном режиме имеет вид

$$L_{\text{в}} \frac{dI_{\text{в}}}{dt} + r_{\text{в}} I_{\text{в}} = U_{\text{в}}, \quad (3-4)$$

где $L_{\text{в}}$ — индуктивность обмотки возбуждения, *гн*;

$r_{\text{в}}$ — активное сопротивление обмотки возбуждения, *ом*;

$I_{\text{в}}$ — ток в обмотке возбуждения, *а*.

Э. д. с. якоря генератора определяется выражением

$$E_{\text{я}} = C_{\text{е}} I_{\text{в}}, \quad (3-5)$$

где $C_{\text{е}}$ — постоянная генератора, *ом*.

Так как рассматривается э. д. с. якоря, то индуктивность и активное сопротивление цепи якоря не учитываются. Их можно не учитывать и при малой нагрузке, когда генератор работает в режиме, близком к холостому ходу, и напряжение на зажимах якоря практически равно его э. д. с.

Из (3-5) находим

$$I_{\text{в}} = \frac{E_{\text{я}}}{C_{\text{е}}}; \quad \frac{dI_{\text{в}}}{dt} = \frac{1}{C_{\text{е}}} \frac{dE_{\text{я}}}{dt}.$$

Подставим значения $I_{\text{в}}$ и его производной в уравнение (3-4)

$$\frac{L_{\text{в}}}{C_{\text{е}}} \frac{dE_{\text{я}}}{dt} + \frac{r_{\text{в}}}{C_{\text{е}}} E_{\text{я}} = U_{\text{в}}. \quad (3-6)$$

Умножая обе части уравнения на $\frac{C_e}{r_b}$, получим

$$\frac{L_b}{r_b} \frac{dE_{\text{я}}}{dt} + E_{\text{я}} = \frac{C_e}{r_b} U_b. \quad (3-7)$$

Обозначим $\frac{L_b}{r_b} = T$ — постоянная времени обмотки возбуждения, *сек*;

$\frac{C_e}{r_b} = k$ — коэффициент усиления (передаточный коэффициент) безразмерный.

Подставляя эти значения в (3-7), получим

$$T \frac{dE_{\text{я}}}{dt} + E_{\text{я}} = k U_b$$

или, заменяя для общности U_b через $X_{\text{вх}}$, а $E_{\text{я}}$ через $X_{\text{вых}}$, получим уравнение аperiodического звена

$$T \frac{dX_{\text{вых}}}{dt} + X_{\text{вых}} = k X_{\text{вх}}. \quad (3-8)$$

В операторной форме при нулевых начальных условиях уравнение (3-8) приобретает вид

$$(Tp + 1) \bar{X}_{\text{вых}} = k \bar{X}_{\text{вх}}. \quad (3-9)$$

Решение уравнения (3-9) при условии, что $X_{\text{вх}} = \text{const}$, будет

$$X_{\text{вых}} = k X_{\text{вх}} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (3-10)$$

Это — уравнение экспоненциальной кривой. Когда время стремится к бесконечности, выходная величина $X_{\text{вых}}$ стремится к постоянной величине $k X_{\text{вх}}$.

Постоянная времени T представляет собой время, в течение которого выходная величина достигла бы установившегося значения, если бы она возрастала с той же скоростью, что и в начале переходного процесса. За время T выходная величина достигает 0,632 от установившегося значения. Установившееся значение выходной величины практически достигается за время, равное $4T$.

Если в уравнении (3-10) принять $X_{\text{вх}} = 1$, получим уравнение переходной функции

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (3-11)$$

График переходной функции приведен на рис. 3-3, а.

Функцию веса получим как производную от переходной функции (рис. 3-11)

$$\omega(t) = [h(t)]' = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3-12)$$

График функции веса приведен на рис. 3-3, б.

Передаточная функция аperiodического звена получается из уравнения (3-9), если взять отношение изображений выходной и входной величин,

$$W(p) = \frac{\bar{X}_{\text{вых}}}{\bar{X}_{\text{вх}}} = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (3-13)$$

Приравняв к нулю знаменатель передаточной функции, получим характеристическое уравнение аperiodического звена

$$Tp + 1 = 0.$$

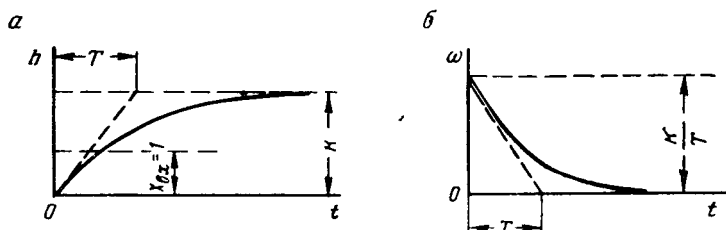


Рис. 3-3. График аperiodического звена:

а — переходная функция; б — функция веса

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики аperiodического звена получим, заменив в передаточной функции p на $j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}. \quad (3-14)$$

Это — уравнение окружности с диаметром k , проходящей через начало координат, с центром на вещественной оси.

Умножая числитель и знаменатель выражения (3-14) на сопряженное комплексное число, определим вещественную и мнимую части

$$W(j\omega) = \frac{k(-Tj\omega + 1)}{(Tj\omega + 1)(-Tj\omega + 1)} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1} \quad (3-15)$$

и получим уравнения вещественной и мнимой частотных характеристик

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}; \quad (3-16)$$

$$Q(\omega) = - \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (3-17)$$

Изменяя частоту ω от 0 до ∞ при заданных значениях T и k , строим по выражению (3-15) амплитудно-фазовую характеристику в виде полуокружности, расположенной в четвертом квадранте (рис. 3-4, а), а по выражениям (3-16) и (3-17) вещественную и мнимую частотные характеристики (рис. 3-4, б).

Уравнения амплитудной и фазовой частотных характеристик

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = \frac{k}{T \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{T^2}}}; \quad (3-18)$$

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg T\omega. \quad (3-19)$$

Логарифмическую амплитудную частотную характеристику получим, логарифмируя выражение (3-18)

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{T^2}}. \quad (3-20)$$

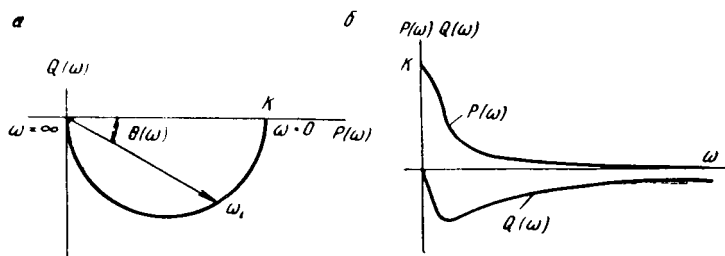


Рис. 3-4. Частотные характеристики аperiodического звена

В выражении (3-20) слагаемое $20 \lg k$ представляет постоянную величину, не зависящую от частоты. Второе слагаемое может быть разбито на два участка: $\omega < \frac{1}{T}$ и $\omega > \frac{1}{T}$. На первом участке величиной ω^2 можно пренебречь по сравнению с $\frac{1}{T^2}$, и второе слагаемое

$$-20 \lg T \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{T^2}} \approx 0.$$

На втором участке можно пренебречь величиной $\frac{1}{T^2}$. Тогда

$$-20 \lg T \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{T^2}} \approx -20 \lg T\omega.$$

Таким образом, логарифмическую амплитудную частотную характеристику можно построить в логарифмической координатной сетке в виде двух прямых (рис. 3-5). При частотах $\omega \leq \frac{1}{T}$ это будет прямая, параллельная оси абсцисс и отстоящая от нее на $20 \lg k$. При частотах $\omega \geq \frac{1}{T}$ это будет наклонная прямая, наклон которой можно определить на основании следующих рассуждений. Если удвоить частоту (т. е. увеличить ее на одну октаву) или увеличить ее в 10 раз

(на одну декаду), то величина $-20 \lg T\omega$, преобразующаяся соответственно в $-20 \lg 2T\omega$ и в $-20 \lg 10T\omega$, возрастает на $-20 \lg 2 = -20 \cdot 0,3 = -6 \text{ дБ}$ или на $-20 \lg 10 = -20 \cdot 1 = -20 \text{ дБ}$. Следовательно, наклон прямой $-20 \lg T\omega$ составляет -6 дБ/окт или -20 дБ/дек .

Сопряжение горизонтальной и наклонной прямой производится в точке, соответствующей сопрягающей частоте $\omega = \frac{1}{T}$ (характеристика построена для значения $T = 2 \text{ сек}$).

Точная логарифмическая амплитудная частотная характеристика, вычисленная по точкам, показана на рис. 3-5 пунктиром. Приближенные прямые являются асимптотами истинной кривой, причем наибольшая погрешность при частоте

$\omega = \frac{1}{T}$ составляет 3 дБ. Если сопряжение асимптот осуществить плавной кривой, вычерченной хотя бы от руки, то погрешность может быть практически сведена до нуля.

Подставляя в выражение (3-19) различные значения ω при $T = 2 \text{ сек}$, находим с помощью таблиц круговых функций соответствующие значения θ в градусах. По точкам на рис. 3-5 построена логарифмическая фазовая частотная характеристика.

Чтобы убедиться в том, что вид дифференциального уравнения и, следовательно, динамические свойства аperiodического звена не зависят от его принципа

действия и конструкции, выведем дифференциальное уравнение аperiodического звена, представленного четырехполосником, содержащим R и C (см. рис. 3-2, б). Если на вход четырехполосника подано меняющееся напряжение $U_{\text{вх}}$, то через сопротивление R протекает ток I заряда или разряда конденсатора C . Напряжение $U_{\text{вых}}$ зависит от степени заряженности конденсатора.

Ток I можно определить из выражения

$$I = \frac{U_{\text{вх}} - U_{\text{вых}}}{R}. \quad (3-21)$$

Тот же ток является током заряда (или разряда) конденсатора и может быть выражен через выходящее напряжение

$$I = C \frac{dU_{\text{вых}}}{dt}, \quad (3-22)$$

где C — емкость конденсатора, ф.

Приравняем выражения (3-21) и (3-22)

$$\frac{U_{\text{вх}} - U_{\text{вых}}}{R} = C \frac{dU_{\text{вых}}}{dt},$$

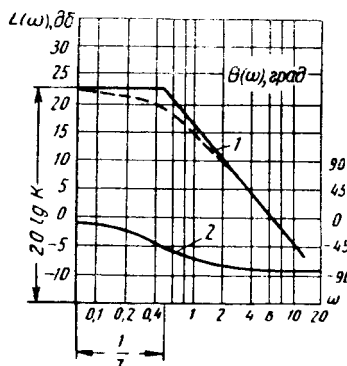


Рис. 3-5. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена:

1 — амплитудная; 2 — фазовая

откуда

$$CR \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} + U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}}. \quad (3-23)$$

Обозначив $CR = T$, сек, а коэффициент перед $U_{\text{вх}}$, равный единице, через k , получим

$$T \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} + U_{\text{вых}} = kU_{\text{вх}}.$$

Заменим для общности $U_{\text{вх}}$ через $X_{\text{вх}}$, а $U_{\text{вых}}$ через $X_{\text{вых}}$. Тогда

$$T \frac{dX_{\text{вых}}}{dt} + X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}}. \quad (3-24)$$

Уравнение (3-24) аналогично уравнению (3-8), поэтому все остальные выводы справедливы для обоих уравнений. Если в уравнении (3-24) в левой части появится минус, то это будет неустойчивое апериодическое звено

$$T \frac{dX_{\text{вых}}}{dt} - X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}} \left(e^{\frac{t}{T}} - 1 \right).$$

С течением времени выходная величина стремится к бесконечности. Такие звенья в реальных системах автоматического регулирования практически не применяются и поэтому рассматривать их не будем.

§ 3-4. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО

Колебательным (двухъёмкостным) называется звено второго порядка, в котором при получении на входе ступенчатого воздействия выходная величина стремится к новому установившемуся значению, совершая затухающие колебания.

К колебательным звеньям относятся устройства, в которых переходные режимы протекают с обменом энергией между двумя энергетическими ёмкостями, например, электрическая цепь, содержащая индуктивность, ёмкость и активное сопротивление; механическое устройство, имеющее массу, пружину и силы трения; электрический двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, способный накапливать кинетическую энергию в якоре и электромагнитную энергию в магнитной цепи, для которого входной величиной является напряжение, приложенное к якору, а выходной — скорость вращения якоря (рис. 3-6, б).

Рассмотрим поведение двигателя в переходном процессе, описываемого уравнением моментов

$$\frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} = M_d - M_e. \quad (3-25)$$

и уравнением равновесия э. д. с. в цепи якоря

$$U = E_{\text{я}} + I_{\text{я}} r_{\text{я}} + L_{\text{я}} \frac{dI_{\text{я}}}{dt}, \quad (3-26)$$

где GD^2 — маховой момент якоря, $\text{н} \cdot \text{м}^2$;

$M_{\text{д}}$ — вращающий момент двигателя, $\text{н} \cdot \text{м}$;

$M_{\text{с}}$ — статический момент (момент сопротивления) на валу двигателя, $\text{н} \cdot \text{м}$;

n — скорость вращения якоря, $\text{об}/\text{мин}$;

U — напряжение, приложенное к якорю, в ;

$E_{\text{я}}$ — противо э. д. с. якоря, в ;

$r_{\text{я}}$ — активное сопротивление цепи якоря (включая и сопротивление источника напряжения), ом ;

$L_{\text{я}}$ — индуктивность цепи якоря (включая и индуктивность источника напряжения), гн .

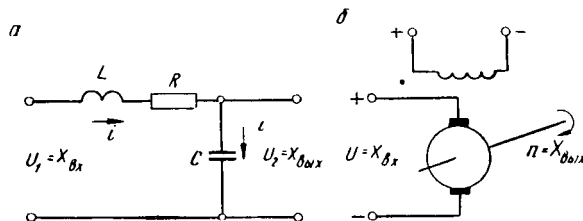


Рис. 3-6. Примеры колебательных звеньев:

a — цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью; *б* — двигатель постоянного тока с независимым возбуждением

Так как двигатель имеет независимое постоянное возбуждение и, следовательно, постоянный поток, то противо э. д. с. $E_{\text{я}}$ пропорциональна скорости вращения n

$$E_{\text{я}} = C_e n,$$

где C_e — конструктивная постоянная, $\text{в} \cdot \text{мин}/\text{об}$.

Подставим значение $E_{\text{я}}$ в уравнение (3-26)

$$U = C_e n + r_{\text{я}} I_{\text{я}} + L_{\text{я}} \frac{dI_{\text{я}}}{dt}. \quad (3-27)$$

Вращающий момент двигателя определяется из выражения

$$M_{\text{д}} = C_m I_{\text{я}}, \quad (3-28)$$

где C_m — конструктивная постоянная, $\frac{\text{н} \cdot \text{м}}{\text{а}}$.

Момент сопротивления условно можно выразить через ток $I_{\text{с}}$, соответствующий моменту сопротивления

$$M_{\text{с}} = C_m I_{\text{с}}. \quad (3-29)$$

Подставляя (3-28) и (3-29) в (3-25), получим

$$\frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt} = C_{\text{м}} I_{\text{я}} - C_{\text{м}} I_{\text{с}}. \quad (3-30)$$

Найдем из этого уравнения значение тока якоря и его производной

$$I_{\text{я}} = \frac{GD^2}{375 C_{\text{м}}} \frac{dn}{dt} + I_{\text{с}}; \quad \frac{dI_{\text{я}}}{dt} = \frac{GD^2}{375 C_{\text{м}}} \frac{d^2 n}{dt^2}$$

и подставим их в уравнение (3-27)

$$\frac{L_{\text{я}} GD^2}{375 C_{\text{м}}} \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{r_{\text{я}} GD^2}{375 C_{\text{м}}} \frac{dn}{dt} + r_{\text{я}} I_{\text{с}} + C_{\text{е}} n = U. \quad (3-31)$$

Разделим уравнение (3-31) на $C_{\text{е}}$, а первый член левой части умножим и разделим на $r_{\text{я}}$, перенося член $r_{\text{я}} I_{\text{с}}$ в правую часть уравнения и обозначая

$$\frac{r_{\text{я}} GD^2}{375 C_{\text{м}} C_{\text{е}}} = T_{\text{м}} - \text{электромеханическая постоянная времени двигателя, сек};$$

$$\frac{L_{\text{я}}}{r_{\text{я}}} = T_{\text{я}} - \text{постоянная времени цепи якоря двигателя, сек};$$

$$\frac{1}{C_{\text{е}}} = k - \text{коэффициент усиления (передаточный коэффициент) двигателя, об/в \cdot \text{мин},}$$

получим

$$T_{\text{м}} T_{\text{я}} \frac{d^2 n}{dt^2} + T_{\text{м}} \frac{dn}{dt} + n = k (U - r_{\text{я}} I_{\text{с}}). \quad (3-32)$$

Если двигатель работает холостую, то

$$r_{\text{я}} I_{\text{с}} = 0.$$

В операторной форме уравнение двигателя приобретает вид

$$(T_{\text{м}} T_{\text{я}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1) \bar{n} = k (U - r_{\text{я}} I_{\text{с}}). \quad (3-33)$$

Заменяя для общности

$$T_{\text{я}} = T_1; \quad T_{\text{м}} = T_2; \quad U - r_{\text{я}} I_{\text{с}} = X_{\text{вх}}; \quad n = X_{\text{вых}},$$

получим уравнение колебательного звена в общем виде

$$(T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1) \bar{X}_{\text{вых}} = k \bar{X}_{\text{вх}}. \quad (3-34)$$

Таким же уравнением описывается переходный процесс в электрической цепи, приведенной на рис. 3-6, а.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{X}_{\text{вых}} = \frac{k \bar{X}_{\text{вх}}}{p (T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1)}$$

или после деления числителя и знаменателя на T_1, T_2

$$\bar{X}_{\text{вых}} = \frac{\frac{k\bar{X}_{\text{вх}}}{T_1 T_2}}{p \left(p^2 + \frac{1}{T_1} p + \frac{1}{T_1 T_2} \right)}. \quad (3-35)$$

Определим корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T_1} \pm \sqrt{\frac{1}{4T_1^2} - \frac{1}{T_1 T_2}}. \quad (3-36)$$

Если $\frac{1}{4T_1^2} < \frac{1}{T_1 T_2}$, т. е. если $T_1 > \frac{T_2}{4}$, что соответствует большой электромагнитной инерции цепи якоря, то корни оказываются комплексными

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T_1} \pm j \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \frac{1}{4T_1^2}},$$

а переходный процесс колебательным, приходящим к установившемуся значению с затухающими колебаниями. Чтобы получить уравнение переходного процесса во времени, найдем оригинал изображения (3-35)

$$X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}} \left[1 - e^{-\frac{t}{2T_1}} \left(\cos \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \frac{1}{4T_1^2}} t + \frac{\sin \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \frac{1}{4T_1^2}} t}{2T_1 \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \frac{1}{4T_1^2}}} \right) \right].$$

Заменив $\sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \frac{1}{4T_1^2}} = \omega$, получим

$$X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}} \left[1 - e^{-\frac{t}{2T_1}} \left(\cos \omega t + \frac{1}{2T_1 \omega} \sin \omega t \right) \right],$$

где ω — частота затухающих колебаний.

Уравнение переходной функции получим, приняв $X_{\text{вх}} = 1$.

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\frac{t}{2T_1}} \left(\cos \omega t + \frac{1}{2T_1 \omega} \sin \omega t \right) \right]. \quad (3-37)$$

Для того чтобы пользоваться этой формулой, не надо делать всех промежуточных преобразований. Следует найти корни характеристического уравнения и, убедившись, что они комплексные, подставить в формулу оригинала значения постоянных времени из дифференциального уравнения.

График переходной функции колебательного звена, построенный по уравнению (3-37), показан на рис. 3-7, а.

Для получения функции веса $\omega(t)$ этого звена возьмем производную от выражения (3-37). График функции веса изображен на рис. 3-7, в.

Найдем теперь оригинал выражения (3-35) при условии, что корни характеристического уравнения вещественные и различные

$$X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}} (1 - A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t}).$$

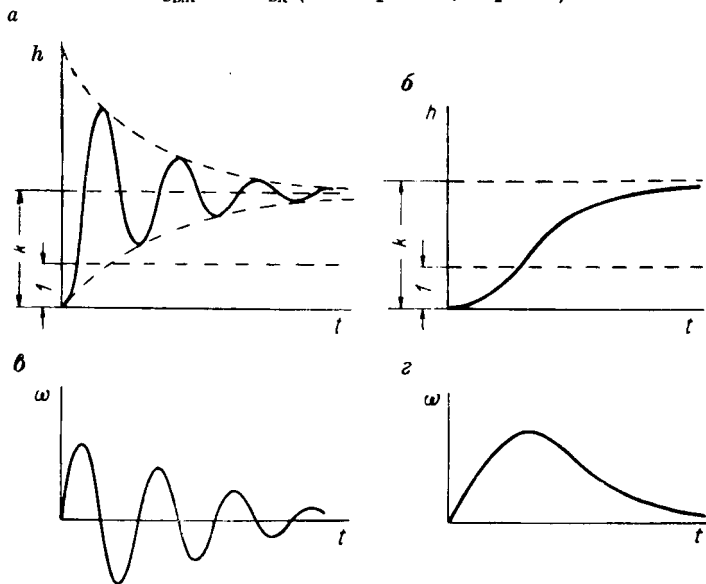


Рис. 3-7. Графики звена второго порядка

Уравнение переходной функции получим, приняв $X_{\text{вх}} = 1$.

$$h(t) = k(1 - A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t}). \quad (3-38)$$

Это — уравнение аperiodического процесса, изображаемого суммой двух экспонент. Такое звено называют *аperiodическим звеном второго порядка* и оно в отличие от колебательного звена может быть разложено на два аperiodических звена первого порядка, соединенных последовательно. График переходной функции, построенный по уравнению вида (3-38), изображен на рис. 3-7, б.

Функцию веса этого звена получим как производную от выражения (3-38)

$$\omega(t) = k(A_1 p_1 e^{-p_1 t} - A_2 p_2 e^{-p_2 t}).$$

График функции веса приведен на рис. 3-7, г.

Передаточную функцию колебательного звена (звена второго порядка) получаем из выражения (3-34)

$$W(p) = \frac{\bar{X}_{\text{ВЫХ}}}{\bar{X}_{\text{ВХ}}} = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1}. \quad (3-39)$$

Уравнение амплитудно-фазовой частотной характеристики получим, заменив в передаточной функции p на $j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{T_1 T_2 (j\omega)^2 + T_2 j\omega + 1}. \quad (3-40)$$

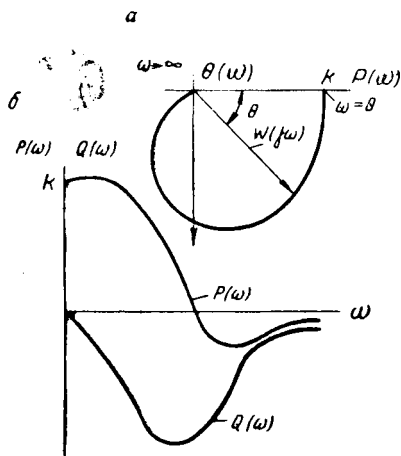


Рис. 3-8. Частотные характеристики колебательного звена

На рис. 3-8, а приведена амплитудно-фазовая частотная характеристика. Частота, при которой вектор амплитудно-фазовой характеристики совпадает с мнимой осью, является резонансной частотой. Амплитуда резонансных колебаний будет тем больше, чем меньше активное сопротивление колебательного звена.

Умножив числитель и знаменатель выражения (3-40) на комплексное число, сопряженное знаменателю, и отделяя вещественную и мнимую части, получим уравнения вещественной и мнимой частотных характеристик

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1 T_2 \omega^2)}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}; \quad (3-41)$$

$$Q(\omega) = \frac{k T_2 \omega}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}. \quad (3-42)$$

На рис. 3-8, б приведены вещественная и мнимая частотные характеристики, построенные по этим уравнениям.

Уравнение амплитудной частотной характеристики

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{k \sqrt{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}. \quad (3-43)$$

Выражение (3-43) иногда записывают в другой форме. Умножим числитель и знаменатель на $\left(\frac{1}{T_1 T_2}\right)^2$ и введем обозначения: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$ — относительная частота сопряжения; $\xi = \sqrt{\frac{T_2}{4 T_1}}$ — относительный коэффициент затухания.

При этом $\frac{1}{T} = 2 \xi \omega_0$. После подстановки этих обозначений и преобразований получаем уравнение амплитудной частотной характеристики

$$A(\omega) = \frac{k\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}}. \quad (3-44)$$

Уравнение фазовой частотной характеристики

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg \frac{T_2\omega}{1 - T_1T_2\omega^2} \quad (3-45)$$

или, произведя указанные выше преобразования и подстановки,

$$\theta(\omega) = -\arctg \frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\arctg \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (3-46)$$

Логарифмическую амплитудную частотную характеристику получим, логарифмируя выражение (3-44),

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega_0^2 - 20 \lg \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}. \quad (3-47)$$

Первое и второе слагаемые представляют собой постоянные величины.

Под корнем третьего слагаемого при $\omega < \omega_0$ можно пренебречь всеми величинами по сравнению с ω_0^4 , тогда

$$L(\omega) = 20 \lg k$$

изображается прямой, параллельной оси частот и отстоящей от нее на расстоянии $20 \lg k$, дБ.

При $\omega > \omega_0$ всеми величинами под корнем можно пренебречь по сравнению с ω^4 , тогда

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega_0^2 - 20 \lg \omega^2.$$

Это — наклонная прямая, которая при $\omega = \omega_0$ сопрягается с прямой $20 \lg k$. Угол наклона прямой, который определяется так же, как и в случае апериодического звена (§ 3-3), составляет 12 дБ/окт или 40 дБ/дек. На рис. 3-9, а приближенная логарифмическая амплитудная частотная характеристика изображена ломаной линией 1.

Принято также, что $20 \lg k = 0$. Однако заменять точную амплитудную характеристику приближенной ломаной линией можно не всегда. На рис. 3-9, а по выражению (3-47) построены точные логарифмические частотные характеристики для различных значений ξ . Из рассмотрения этих характеристик следует, что заменять точные характеристики приближенными, чтобы погрешность при этом не превышала 3 дБ, можно при значениях $\xi = 0,35 \div 0,7$. В остальных случаях характеристики следует вычислять по точкам.

На рис. 3-9, б изображены вычисленные по точкам с помощью выражения (3-46) логарифмические фазовые частотные характеристики для различных значений ξ .

Для получения характеристик, не зависящих от конкретных значений T_1 и T_2 , на рис. 3-9, а и б по оси абсцисс вместо ω отложено отношение $\frac{\omega}{\omega_0}$.

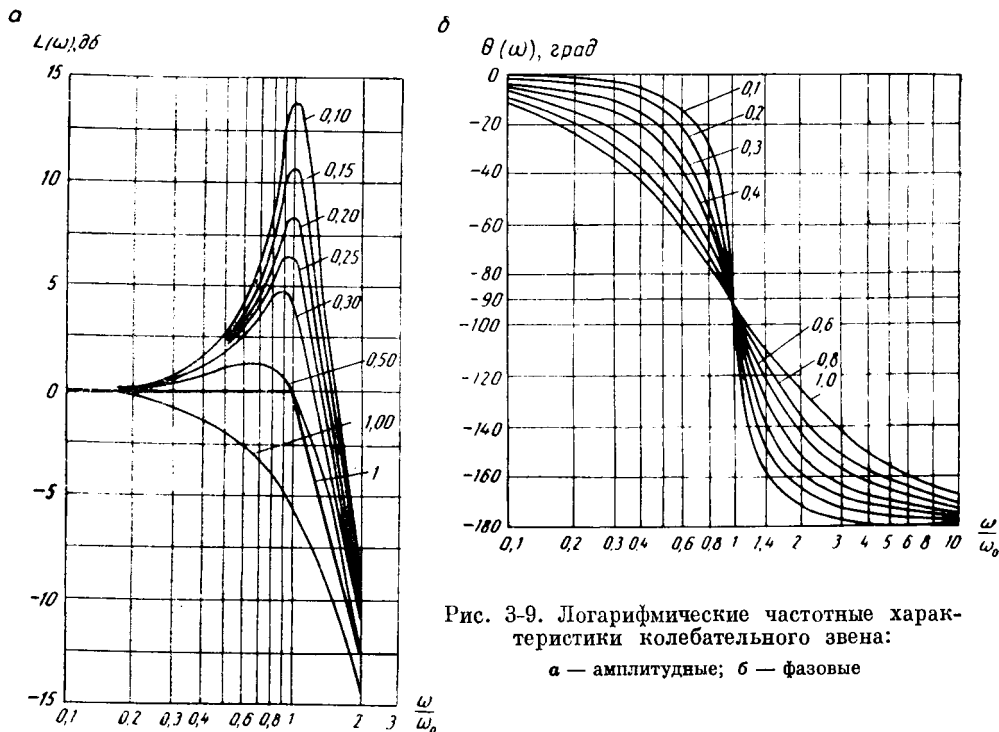


Рис. 3-9. Логарифмические частотные характеристики колебательного звена:

а — амплитудные; б — фазовые

Чтобы построить конкретную характеристику в масштабе ω , необходимо определить ω_0 и умножить на него значения абсцисс на рис. 3-9, б.

Выше было рассмотрено устойчивое колебательное звено, описываемое уравнением (3-34). Если в этом уравнении коэффициент при первой производной окажется равным нулю, то получим уравнение следующего вида:

$$(T^2 p^2 + 1) \bar{X}_{\text{вых}} = k \bar{X}_{\text{вх}} \quad (3-48)$$

Это — уравнение так называемого консервативного звена. Примером консервативного звена может служить двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, если принять, что активное сопротивление цепи якоря равно нулю, или цепь, состоящая только из индуктивности и емкости. Переходный процесс консервативного

звена представляет незатухающие колебания, амплитуда которых зависит от величины начального возмущения.

Если в уравнении (3-34) коэффициент при первой производной будет отрицательным, то получим неустойчивое колебательное звено

$$(T_1 T_2 p^2 - T_2 p + 1) \bar{X}_{\text{вых}} = k \bar{X}_{\text{вх}}. \quad (3-49)$$

Такое звено можно получить, если звено второго порядка имеет внутренний источник энергии, что эквивалентно отрицательному активному сопротивлению. Переходный процесс в неустойчивом колебательном звене представляет колебания с беспредельно возрастающей амплитудой.

Консервативное и неустойчивое колебательные звенья обычными устройствами, применяемыми в автоматике, реализовать нельзя. Так как их динамические свойства весьма неблагоприятны для систем автоматического регулирования, то специально их реализацией не занимаются. Поэтому подробное исследование этих звеньев не приводим.

§ 3-5. ИНТЕГРИРУЮЩЕЕ ЗВЕНО

Интегрирующим называется звено, в котором скорость изменения выходной величины пропорциональна входной величине или, иначе, выходная величина пропорциональна интегралу по времени от выходной величины. Такое звено называют также астатическим или нейтральным.

Различают *идеальное* и *реальное* интегрирующие звенья. Примером идеального интегрирующего звена может служить электрический двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, если входной величиной считать напряжение якоря $U_{\text{я}}$, а выходной — угол поворота якоря α при условии,

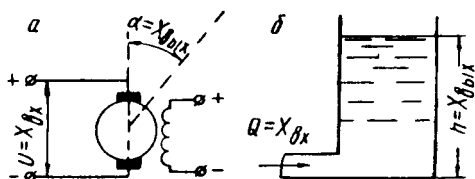


Рис. 3-10. Примеры интегрирующих звеньев

что электромагнитическая и электромагнитная постоянные времени относительно малы и ими можно пренебречь (рис. 3-10, а).

Другим примером является резервуар, в который поступает жидкость, если входной величиной считать приток жидкости Q , а выходной — уровень жидкости h в резервуаре при условии, что скорость жидкости в питающем трубопроводе мгновенно достигает установившегося значения (рис. 3-10, б).

Весьма часто с достаточной для практических расчетов точностью можно вместо реальных интегрирующих звеньев принимать идеальные, поэтому рассмотрим подробно оба типа.

Рассмотрим в качестве идеального интегрирующего звена двигатель постоянного тока (рис. 3-10, а). Скорость вращения двигателя

может быть определена из выражения

$$n = kU_{\text{я}}, \quad (3-50)$$

где k — передаточный коэффициент.

Подставляя $n = \frac{d\alpha}{dt}$ в выражение (3-50), получим

$$\frac{d\alpha}{dt} = kU_{\text{я}}, \quad (3-51)$$

где α — угол поворота вала двигателя.

Проинтегрируем это выражение

$$\alpha = k \int U_{\text{я}} dt. \quad (3-52)$$

Заменяя $U_{\text{я}} = X_{\text{вх}}$ и $\alpha = X_{\text{вых}}$ (т. е. $d\alpha = dX_{\text{вых}}$) в выражениях (3-51) и (3-52), найдем, что

$$\frac{dX_{\text{вых}}}{dt} = kX_{\text{вх}} \text{ и } X_{\text{вых}} = k \int X_{\text{вх}} dt. \quad (3-53)$$

В операторной форме при нулевых начальных условиях уравнения (3-53) примут вид

$$p\bar{X}_{\text{вых}} = k\bar{X}_{\text{вх}} \text{ и } \bar{X}_{\text{вых}} = \frac{k\bar{X}_{\text{вх}}}{p}. \quad (3-54)$$

Перейдем от изображения к оригиналу и определим закон изменения выходной величины во времени при $X_{\text{вх}} = \text{const}$

$$X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}}t. \quad (3-55)$$

Положив $X_{\text{вх}} = 1$, получим уравнение переходной функции $h(t) = kt$. Это уравнение прямой с угловым коэффициентом $\text{tg } \varphi = k$ (рис. 3-11)

Передаточную функцию интегрирующего звена получим из выражения (3-54)

$$W(p) = \frac{\bar{X}_{\text{вых}}}{\bar{X}_{\text{вх}}} = \frac{k}{p}. \quad (3-56)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}. \quad (3-57)$$

Это уравнение прямой, совпадающей с отрицательным направлением мнимой оси (рис. 3-12, а).

Избавляясь от мнимого числа в знаменателе, находим уравнения вещественной и мнимой частотной характеристик

$$P(\omega) = 0; \quad (3-58)$$

$$Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}, \quad (3-59)$$

по которым построены эти характеристики (рис. 3-12, б).

Уравнения амплитудной и фазовой частотных характеристик

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{k}{\omega}; \quad (3-60)$$

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\operatorname{arctg} \infty = -\frac{\pi}{2}. \quad (3-61)$$

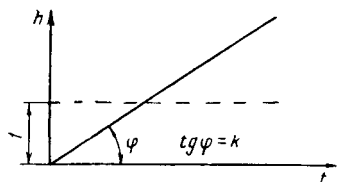


Рис. 3-11. График переходной функции идеального интегрирующего звена

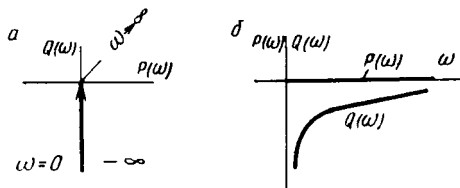


Рис. 3-12. Частотные характеристики идеального интегрирующего звена

Логарифмическую амплитудную частотную характеристику получаем, логарифмируя выражение (3-60),

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \quad (3-62)$$

Во всем диапазоне частот эта характеристика представляет прямую, проходящую через точку с абсциссой $\omega = 1$ и ординатой $20 \lg k$, дБ и имеющую наклон -20 дБ/дек (рис. 3-13).

Логарифмическая фазовая частотная характеристика изображается прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на расстоянии $-\frac{\pi}{2}$.

В качестве реального интегрирующего звена рассмотрим двигатель постоянного тока с независимым возбуждением с большим маховым моментом на валу, влиянием которого пренебречь нельзя. Индуктивностью цепи якоря пренебрегаем.

Воспользуемся уравнениями моментов двигателя (3-30) и электрического равновесия цепи якоря (3-27), которое при $L = 0$ примет вид

$$U = C_e n + r_{\text{я}} I_{\text{я}}. \quad (3-27')$$

Из уравнения (3-30) найдем значение тока $I_{\text{я}}$ и подставим его в уравнение (3-27')

$$\frac{r_{\text{я}} G D^2}{375 C_m C_e} \frac{dn}{dt} + n = \frac{1}{C_e} (U - r_{\text{я}} I_c). \quad (3-63)$$

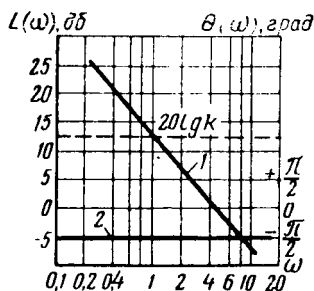


Рис. 3-13. Логарифмические частотные характеристики идеального интегрирующего звена:

1 — амплитудная; 2 — фазовая

Заменяя в (3-63) $U - r_{\text{я}} I_{\text{с}} = X_{\text{вх}}$ и учитывая принятые выше обозначения

$$n = \frac{d\alpha}{dt} \left(\text{откуда } \frac{dn}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right); \quad \frac{r_{\text{я}} G D^2}{375 C_{\text{м}} C_{\text{е}}} = T;$$

$$\frac{1}{C_{\text{е}}} = k \text{ и } \alpha = X_{\text{вых}},$$

получим уравнение реального интегрирующего звена

$$T \frac{d^2 X_{\text{вых}}}{dt^2} + \frac{dX_{\text{вых}}}{dt} = k X_{\text{вх}} \quad (3-64)$$

или в операторной форме

$$(Tp^2 + p) \bar{X}_{\text{вых}} = k \bar{X}_{\text{вх}},$$

откуда

$$p(Tp + 1) \bar{X}_{\text{вых}} = k \bar{X}_{\text{вх}}. \quad (3-65)$$

Находим изображение выходной величины

$$X_{\text{вых}} = \frac{k X_{\text{вх}}}{Tp^2 + p}. \quad (3-66)$$

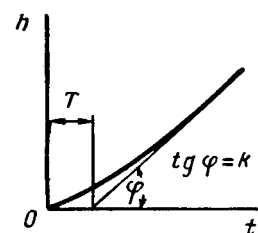


Рис. 3-14. График переходной функции реального интегрирующего звена

Переходя от изображения к оригиналу при подаче на вход ступенчатого воздействия $X_{\text{вх}} = \text{const}$ и при нулевых начальных условиях, получаем выражение переходной функции

$$X_{\text{вых}} = X_{\text{вх}} \left[kt - kT \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right]. \quad (3-67)$$

Приняв в (3-67) $X_{\text{вх}} = 1$, получим уравнение переходной функции, график которой приведен на рис. 3-14.

Передаточную функцию получаем из выражения (3-65)

$$W(p) = \frac{\bar{X}_{\text{вых}}}{\bar{X}_{\text{вх}}} = \frac{k}{Tp^2 + p} = \frac{k}{p(Tp + 1)}. \quad (3-68)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(Tj\omega + 1)}. \quad (3-69)$$

Умножим числитель и знаменатель на комплексное число, сопряженное знаменателю, и отделим вещественную и мнимую части

$$W(j\omega) = -\frac{kT}{\omega(T^2\omega^2 + 1)} - j \frac{k}{\omega(T^2\omega^2 + 1)}. \quad (3-70)$$

На рис. 3-15 приведена амплитудно-фазовая характеристика реального интегрирующего звена. Из рассмотрения выражений (3-65) и (3-68) следует, что формально реальное интегрирующее звено можно

расчленим на идеальное интегрирующее и аperiodическое звенья с передаточными функциями

$$W_1(p) = \frac{k}{(Tp+1)} \text{ и } W_2(p) = \frac{1}{p}.$$

Обычно при расчетах к такому расчленению и прибегают. Поэтому другие характеристики реального интегрирующего звена не рассматриваем, так как они могут быть получены из уже известных характеристик указанных двух звеньев.

В системах автоматического управления в качестве интегрирующего звена с достаточной для практики точностью применяют электрическую цепь, содержащую активное сопротивление и емкость (см. рис. 3-2, б), которая, строго говоря, является аperiodическим звеном.

Применять в качестве интегрирующего звена эту цепь можно потому, что переходный процесс вначале близок к прямой (см. рис. 3-3, а), и экспоненту можно заменить касательной, проведенной в начале координат. Если переходный процесс в системе заканчивается в промежуток времени, в течение которого касательная незначительно отклоняется от прямой, то устройство работает как идеальное интегрирующее звено. Уравнение этого звена можно получить следующим образом.

Величину тока I , протекающего через сопротивление R (см. рис. 3-2, б), находим, полагая, что $U_{\text{вых}}$ на его величину не влияет

$$I = \frac{U_{\text{вх}}}{R}.$$

Этот же ток является током заряда конденсатора

$$I = C \frac{dU_{\text{вых}}}{dt}.$$

Решая совместно эти выражения, находим

$$\frac{dU_{\text{вых}}}{dt} = \frac{U_{\text{вх}}}{CR},$$

откуда при $U_{\text{вх}} = U_{\text{вх},0} = \text{const}$ и при нулевых начальных условиях

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{CR} \int U_{\text{вх},0} dt = \frac{t}{CR} U_{\text{вх},0}.$$

Обозначив $CR = T$, получим

$$U_{\text{вых}} = \frac{t}{T} U_{\text{вх},0}.$$

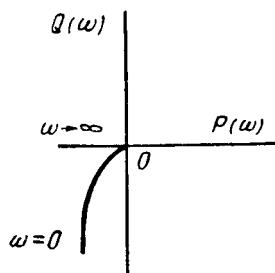


Рис. 3-15. Амплитудно-фазовая характеристика реального интегрирующего звена

Это уравнение касательной, изображенной на рис. 3-3, а.

Чтобы уменьшить ошибку интегрирования, следует при прочих равных условиях увеличивать постоянную времени T , т. е. C или R . При увеличении R для получения достаточной выходной мощности нужно применять усилитель.

§ 3-6. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕЕ ЗВЕНО

Дифференцирующим называется звено, в котором выходная величина пропорциональна скорости изменения входной величины, т. е. пропорциональна ее производной. Дифференцирующее звено иногда называют изодромным.

Примерами дифференцирующих звеньев могут служить: гидравлический успокоитель с пружиной (рис. 3-16, а); трансформатор (рис. 3-16, б); цепь с активным сопротивлением и емкостью (рис. 3-16, в); цепь с активным сопротивлением и индуктивностью (рис. 3-16, г).

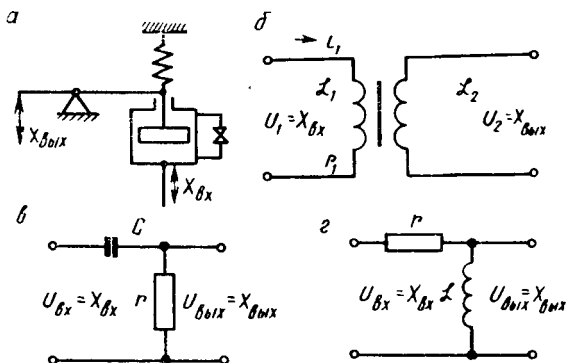


Рис. 3-16. Примеры дифференцирующих звеньев

Различают идеальное и реальное дифференцирующие звенья.

Идеальными дифференцирующими звеньями можно считать все рассмотренные выше устройства, если в них пренебречь активными электрическими сопротивлениями и силами трения (в механических устройствах).

Дифференциальное уравнение идеального дифференцирующего звена согласно определению

$$X_{\text{вых}} = k \frac{dX_{\text{вх}}}{dt}$$

или в операторной форме

$$\bar{X}_{\text{вых}} = kp\bar{X}_{\text{вх}} \quad (3-71)$$

Переходная функция или изменение выходной величины при подаче на вход ступенчатого воздействия может быть определена,

исходя из следующих соображений. Ступенчатая входная функция, как разрывная, не дифференцируется, но скорость изменения входной величины на ступени равна бесконечности, так как происходит конечное изменение входной величины в отрезок времени, стремящийся к нулю. А так как у дифференцирующего звена выходная величина пропорциональна скорости изменения входной, то у идеального звена при подаче на вход ступенчатого воздействия выходная величина в момент времени, равный нулю, даст всплеск до бесконечности, а затем обратится в нуль, так как скорость изменения входной величины во все последующие моменты равна нулю (рис. 3-17).

Передаточная функция идеального дифференцирующего звена из выражения (3-71)

$$W(p) = \frac{\bar{X}_{\text{вых}}}{\bar{X}_{\text{вх}}} = kp. \quad (3-72)$$

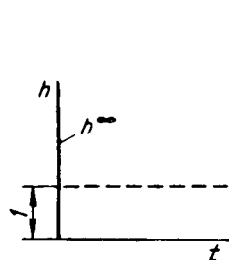


Рис. 3-17. График переходной функции идеального дифференцирующего звена

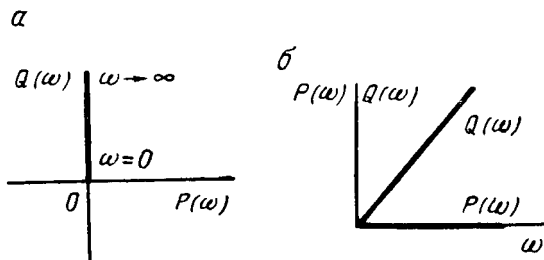


Рис. 3-18. Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) = kj\omega, \quad (3-73)$$

а сама характеристика изобразится прямой, совпадающей с положительным направлением мнимой оси (рис. 3-18, а).

Из (3-73) непосредственно находим уравнения вещественной и мнимой частотных характеристик

$$P(\omega) = 0; \quad Q(\omega) = k\omega. \quad (3-74)$$

Графики этих характеристик приведены на рис. 3-18, б.

Уравнения амплитудной и фазовой частотных характеристик

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{(k\omega)^2} = k\omega; \quad (3-75)$$

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{k\omega}{P(\omega) \rightarrow 0} = \frac{\pi}{2}. \quad (3-76)$$

Уравнение логарифмической амплитудной частотной характеристики получаем, логарифмируя выражение (3-75),

$$L(\omega) = 20 \lg k\omega. \quad (3-77)$$

В логарифмическом масштабе это прямая с наклоном 20 дб/дек , проходящая через точку с абсциссой $\omega = 1$ и ординатой $20 \lg k$ (рис. 3-19). Логарифмическая фазовая частотная характеристика согласно выражению (3-76) представляет собой прямую, параллельную оси частот и отстоящую от нее на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 3-19).

Реальное дифференцирующее звено рассмотрим на примере трансформатора (см. рис. 3-16, б).

Рассмотрим переходный процесс в трансформаторе, пренебрегая рассеянием, размагничивающим действием вторичной обмотки и активным падением напряжения в ней. Это возможно при работе трансформатора в режиме, близком к режиму холостого хода.

Уравнения цепи первичной и вторичной обмоток трансформатора

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + r_1 I_1 = U_1; \quad (3-78)$$

$$M \frac{dI_1}{dt} = U_2, \quad (3-79)$$

Рис. 3-19. Логарифмические частотные характеристики идеального дифференцирующего звена:

1 — амплитудная; 2 — фазовая

где L_1 — коэффициент самоиндукции первичной обмотки, гн ;

M — коэффициент взаимоиנדукции обмоток, гн ;

r_1 — активное сопротивление первичной обмотки, ом ;

I_1 — ток в первичной обмотке, а ;

U_1 и U_2 — напряжения первичной и вторичной обмоток, в .

При отсутствии рассеивания в трансформаторе

$$L_1 L_2 = M^2, \quad (3-80)$$

где L_2 — коэффициент самоиндукции вторичной обмотки.

С другой стороны,

$$L_2 = k^2 L_1, \quad (3-81)$$

где k — коэффициент трансформации трансформатора.

Решая совместно уравнения (3-80) и (3-81), находим

$$M = k L_1.$$

Подставим это значение M в уравнение (3-79), разделим уравнения (3-78) и (3-79) на r_1 и, обозначив $\frac{L_1}{r_1} = T$, получим

$$T \frac{dI_1}{dt} + I_1 = \frac{U_1}{r_1}; \quad (3-82)$$

$$kT \frac{dI_1}{dt} = \frac{U_2}{r_1}. \quad (3-83)$$

Напишем уравнения (3-83) и (3-84) в операторной форме при нулевых начальных условиях

$$(Tp + 1) \bar{I}_1 = \frac{1}{r_1} \bar{U}_1; \quad (3-84)$$

$$kTp \bar{I}_1 = \frac{1}{r_1} \bar{U}_2. \quad (3-85)$$

Решим совместно уравнения (3-84) и (3-85)

$$(Tp + 1) \bar{U}_2 = kTp \bar{U}_1. \quad (3-86)$$

Заменяя для общности $U_1 = X_{\text{вх}}$; $U_2 = X_{\text{вых}}$, получим дифференциальное уравнение реального дифференцирующего звена

$$(Tp + 1) \bar{X}_{\text{вых}} = kTp \bar{X}_{\text{вх}}. \quad (3-87)$$

Решение уравнения (3-87) при условии, что $X_{\text{вх}} = \text{const}$, имеет вид

$$X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3-88)$$

Это уравнение экспоненциальной кривой. Когда $t = 0$, выходная величина $X_{\text{вых}} = kX_{\text{вх}}$. Когда $t \rightarrow \infty$, выходная величина $X_{\text{вых}} \rightarrow 0$.

Приравняв $X_{\text{вх}} = 1$, получим уравнение переходной функции, график которой приведен на рис. 3-20.

Передаточная функция реального дифференцирующего звена получается из уравнения (3-87)

$$W(p) = \frac{\bar{X}_{\text{вых}}}{\bar{X}_{\text{вх}}} = \frac{kTp}{Tp + 1}. \quad (3-89)$$

Заменив в передаточной функции p на $j\omega$, получим уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) = \frac{kTj\omega}{Tj\omega + 1}. \quad (3-90)$$

Отделяя вещественную и мнимую части в выражении (3-90)

$$W(j\omega) = \frac{kT^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} + j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}, \quad (3-91)$$

получим уравнения вещественной и мнимой частотных характеристик

$$P(\omega) = \frac{kT^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1}; \quad (3-92)$$

$$Q(\omega) = \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (3-93)$$

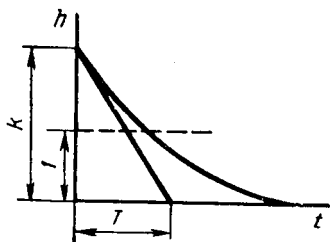


Рис. 3-20. График переходной функции реального дифференцирующего звена

По выражению (3-91) на рис. 3-21, а построена амплитудно-фазовая характеристика, которая представляет собой полуокружность с центром на вещественной оси, расположенную в первом квадранте и проходящую через начало координат.

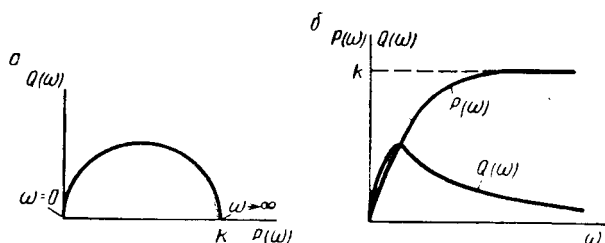


Рис. 3-21. Частотные характеристики реального дифференцирующего звена

По выражениям (3-92) и (3-93) построены вещественная и мнимая частотные характеристики (рис. 3-21, б).

Уравнения амплитудной и фазовой частотных характеристик

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{kT\omega}{T\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{T^2}}}; \quad (3-94)$$

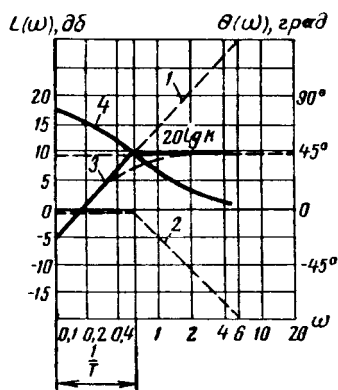


Рис. 3-22. Логарифмические частотные характеристики реального дифференцирующего звена

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{1}{T\omega}. \quad (3-95)$$

Логарифмическую амплитудную частотную характеристику получаем, логарифмируя выражение (3-94),

$$L(\omega) = 20 \lg kT\omega - 20 \lg T \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{T^2}}. \quad (3-96)$$

Первое слагаемое во всем диапазоне частот представляет собой прямую с положительным наклоном 20 дБ/дек , проходящую через значение $20 \lg kT$ дБ при частоте $\omega = \frac{1}{T}$ (рис. 3-22, прямая 1). Второе слагаемое состоит из двух участков. При частотах $\omega < \frac{1}{T}$ можно

пренебречь ω^2 по сравнению с $\frac{1}{T^2}$ и выражение $-20 \lg T \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{T^2}} \approx -20 \lg 1 = 0$ представляет прямую, совпадающую с осью абсцисс.

При частотах $\omega > \frac{1}{T}$, когда под корнем можно пренебречь $\frac{1}{T^2}$, второе слагаемое имеет вид

$$-20 \lg T \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{T^2}} \approx -20 \lg T\omega$$

и представляет прямую с отрицательным наклоном -20 дб/дек , сопрягающуюся с осью абсцисс при частоте $\omega = \frac{1}{T}$. Таким образом, второе слагаемое изобразится ломаной 2.

Складывая графически прямую 1 с ломаной 2, получим логарифмическую амплитудную частотную характеристику реального дифференцирующего звена (ломаная 3).

Наибольшая погрешность по сравнению с точной характеристикой, вычисленной по точкам, имеет место при сопряжении прямых и не превышает 3 дб. Осуществляя сопряжение плавной кривой, погрешность можно уменьшить.

Логарифмическая фазовая частотная характеристика (рис. 3-22, кривая 4) построена по точкам с помощью выражения (3-95).

§ 3-7. ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ ЗВЕНО

Запаздывающим называется звено, в котором выходная величина воспроизводит изменения входной величины без искажений, но с некоторым постоянным запаздыванием τ (рис. 3-23).

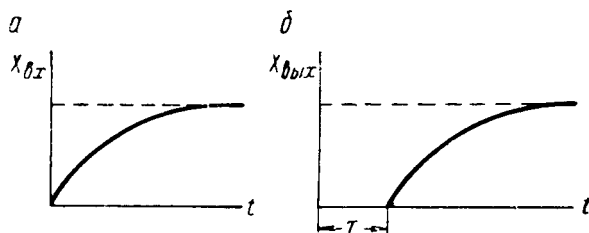


Рис. 3-23. Переходный процесс в запаздывающем звене:

а — изменение входной величины; б — изменение выходной величины

Примером запаздывающего звена может служить конвейер, который загружается с одного конца, а измерение нагрузки производится конвейерными весами, находящимися на некотором расстоянии от пункта нагрузки. Изменение количества, поступающего на конвейер материала, будет зафиксировано весами не в тот момент, когда оно произойдет, а спустя некоторое время, необходимое для перемещения материала от пункта загрузки к конвейерным весам. Входная величина передается на выход без искажений, только с отставанием во времени. Такое запаздывание называют чистым или транспортным запаздыванием.

Явление чистого запаздывания может иметь место в системах автоматического регулирования при наличии в них элементов с распределенными постоянными и конечной скоростью прохождения сигнала (например, длинные трубопроводы).

Во многих устройствах воздействие при передаче от входа к выходу задерживается на некоторый промежуток времени и искажается по форме. Это может происходить в шаровых мельницах, паровых котлах и других технологических объектах автоматического регулирования. Такие устройства в ряде случаев можно рассматривать состоящими из двух звеньев — звена без запаздывания и запаздывающего звена.

Из определения запаздывающего звена следует, что между входной величиной $X_{вх}$ и выходной $X_{вых}$ существует зависимость

$$X_{вых}(t) = X_{вх}^-(t - \tau), \quad (3-97)$$

где τ — время чистого запаздывания.

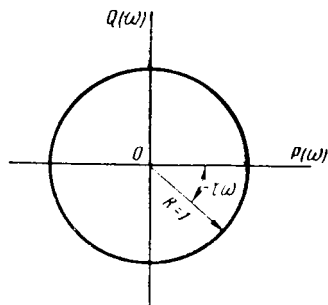
Уравнение в операторной форме при нулевых начальных условиях получим, применяя теорему запаздывания

$$\bar{X}_{вых} = \bar{X}_{вх} e^{-\tau p}. \quad (3-98)$$

Передаточная функция запаздывающего звена

$$W(p) = \frac{\bar{X}_{вых}}{\bar{X}_{вх}} = e^{-\tau p}. \quad (3-99)$$

Рис. 3-24. Амплитудно-фазовая характеристика запаздывающего звена



Уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W(j\omega) = e^{-j\tau\omega}. \quad (3-100)$$

При изменении ω от 0 до ∞ вектор $W(j\omega)$ вращается по часовой стрелке, не меняя своей длины. Таким образом, амплитудно-фазовая характеристика запаздывающего звена представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рис. 3-24).

Выражение (3-100) в тригонометрической форме

$$W(j\omega) = e^{-j\tau\omega} = \cos \tau\omega - j \sin \tau\omega. \quad (3-101)$$

Уравнения вещественной и мнимой частотных характеристик

$$P(\omega) = \cos \tau\omega; \quad (3-102)$$

$$Q(\omega) = -\sin \tau\omega. \quad (3-103)$$

При изменении ω от 0 до ∞ вещественная и мнимая частотные характеристики представляют соответственно косинусоиду и синусоиду с амплитудой, равной единице.

Уравнение амплитудной частотной характеристики

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\cos^2 \tau\omega + \sin^2 \tau\omega} = 1. \quad (3-104)$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg 1 = 0 \quad (3-105)$$

представляет прямую, совпадающую с линией 0 дБ (с осью абсцисс).

Уравнение фазовой частотной характеристики

$$\theta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\operatorname{arctg} \frac{\sin \tau \omega}{\cos \tau \omega} = -\tau \omega. \quad (3-106)$$

При изменении ω от 0 до ∞ $\theta(\omega)$ изменяется от 0 до $-\infty$

Контрольные вопросы

1. Какими способами можно расчлнить систему автоматического регулирования на отдельные части?
2. Что называется звеном, какие существуют типовые звенья?
3. Что называется аperiodическим звеном? Дифференциальное уравнение, передаточная функция, частотные характеристики, переходный процесс.
4. Что называется колебательным звеном? Дифференциальное уравнение, передаточная функция и частотные характеристики.
5. Какой вид может иметь переходный процесс колебательного звена при различном соотношении параметров?
6. Что называется интегрирующим звеном? Дифференциальное уравнение, передаточная функция, частотные характеристики, переходный процесс.
7. Что называется дифференцирующим звеном, идеальным, реальным? Дифференциальное уравнение, передаточная функция, частотные характеристики, переходный процесс идеального и реального звеньев.
8. Что называется запаздывающим звеном? Уравнение звена, передаточная функция, частотные характеристики.

УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 4-1. ВОЗМОЖНЫЕ РЕЖИМЫ РАБОТЫ
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Системы автоматического регулирования могут работать в одном из двух режимов: неустановившемся, или переходном, и установившемся. В литературе по теории автоматического регулирования вместо термина «режим» чаще применяют термин «процесс» и в дальнейшем также будем пользоваться этим термином и рассматривать переходные (неустановившиеся) и установившиеся процессы.

Переходным процессом называется изменение во времени регулируемой величины с момента приложения воздействия до начала установившегося процесса. Переходный процесс имеет место при следующих условиях: 1) отклонение регулируемой величины от заданного значения непрерывно меняется по величине (может также меняться и его знак); 2) приток энергии или вещества в систему больше или меньше их расхода; 3) элементы, меняющие приток или расход энергии или вещества, находятся в движении.

Изменение регулируемой величины состоит из вынужденной и собственной составляющих. *Вынужденная составляющая* определяется характером внешних воздействий. *Собственная составляющая* зависит только от параметров системы автоматического регулирования.

Переходные процессы систем автоматического регулирования описываются дифференциальными уравнениями, порядок которых зависит от количества звеньев, входящих в систему, и способа их соединения.

Установившимся называется процесс, когда собственная составляющая переходного процесса (изменение регулируемой величины во времени) полностью затухает и остается только вынужденная составляющая, зависящая от характера внешних воздействий.

Если внешнее воздействие неизменно по величине, то установившийся процесс имеет место при соблюдении следующих условий: 1) отклонение регулируемой величины от заданного значения равно нулю или некоторой постоянной величине; 2) между притоком и расходом энергии или вещества в системе устанавливается равновесие; 3) все элементы, меняющие приток или расход энергии или вещества, неподвижны.

При этих условиях установившийся процесс описывается алгебраическими уравнениями, которые называются уравнениями ста-

тики. Если внешнее воздействие меняется по какому-либо закону (например, гармоническому, линейному и др.), то в установившемся режиме регулируемая величина воспроизводит эти изменения по форме, однако с некоторым сдвигом по фазе и изменением по величине (амплитуде).

§ 4-2. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ

Составление дифференциальных уравнений систем автоматического регулирования упрощается, если предварительно составить так называемую структурную схему этой системы. В предыдущей главе установлено, что каждая система автоматического регулирования может быть расчленена на типовые звенья. Если эти звенья соединить между собой так, чтобы воздействия через них проходили аналогично тому, как они проходят в реальной схеме, то будет получена структурная схема.

Таким образом, *структурной* называется схема системы автоматического регулирования, составленная из типовых звеньев. В качестве примера рассмотрим составление структурной схемы системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (рис. 4-1).

Якорь двигателя D питается от электромашинного усилителя $\mathcal{E}MU$. На вход усилителя, т. е. на его обмотку управления $OB \mathcal{E}MU$, подается разность управляющего напряжения U_y и э. д. с. $E_{\Gamma\Gamma}$ тахогенератора $T\Gamma$, приводимого во вращение от вала двигателя D . Двигатель и тахогенератор имеют независимое возбуждение от постороннего источника постоянного тока.

Э. д. с. тахогенератора пропорциональна скорости вращения n двигателя. Поэтому двигатель и тахогенератор можно рассматривать как одно целое, а задачу регулирования скорости вращения двигателя рассматривать как регулирование э. д. с. $E_{\Gamma\Gamma}$ тахогенератора.

В установившемся режиме разность

$$\Delta U = U_y - E_{\Gamma\Gamma} \quad (4-1)$$

представляет входное напряжение $\mathcal{E}MU$, при котором создаются заданные значения n и $E_{\Gamma\Gamma}$.

При изменении нагрузки M_e на валу двигателя значения n и $E_{\Gamma\Gamma}$ меняются, что приводит к изменению разности ΔU в направлении, уменьшающем отклонение $E_{\Gamma\Gamma}$ от U_y . При изменении управляющего

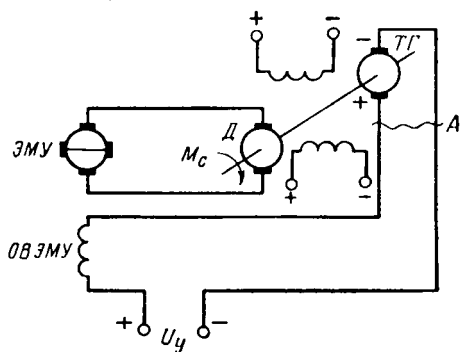


Рис. 4-1. Статическая система автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока

напряжения U_y разность также изменяется в направлении, уменьшающем отклонение $E_{TГ}$ от U_y .

В замкнутой системе автоматического регулирования принципиально безразлично, какой из ее элементов считать входным. Однако принято входом системы считать вход собственно регулятора, т. е. элемент, в который подается разность между заданным значением регулируемой величины и действительным ее значением, измеренным на выходе объекта регулирования.

При расчленении системы автоматического регулирования на линейные типовые звенья необходимо прежде всего установить возможность линеаризации отдельных элементов.

Рассмотрим с этой точки зрения систему автоматического регулирования, приведенную на рис. 4-1. Система состоит из электрических машин и может быть разбита на элементы, включающие в себя обмотки, имеющие индуктивность и активное сопротивление; массы, движущиеся с ускорениями. Строго говоря, электрические цепи с железом являются нелинейными элементами. Однако при ненасыщенных машинах кривая намагничивания с достаточной для практики точностью может быть заменена прямой.

Если машина работает на криволинейном участке кривой намагничивания, то при малых отклонениях от установившегося значения участок кривой можно заменить отрезком прямой и рассматривать элемент как линейный.

Расчленим рассматриваемую систему на типовые звенья.

Первое звено. Вход — цепь, состоящая из последовательно соединенных обмотки управления $ОВ ЭМУ$ электромашинного усилителя якоря тахогенератора $ТГ$ и источника управляющего напряжения U_y . Выход — щетки короткозамкнутой цепи $ЭМУ$. Это апериодическое звено, так как оно содержит только индуктивность и активное сопротивление. На вход этого звена подается величина ΔU , а на выходе получается э. д. с. $E_{кз}$ короткозамкнутой цепи $ЭМУ$.

Так как тип звена установлен, то можно сразу написать его уравнение в операторной форме по аналогии с выражением (3-9), заменяя в последнем лишь значения переменных

$$(T_1 p + 1) \bar{E}_{кз} = k_1 \Delta \bar{U}. \quad (4-2)$$

Здесь

$$T_1 = \frac{L_{ОВ}}{r_{ОВ}}; \quad k_1 = \frac{C_{ЭМУ}}{r_{ОВ}}, \quad (4-3)$$

где $L_{ОВ}$ — индуктивность входной цепи (цепи $ОВ ЭМУ$), *гн*;

$r_{ОВ}$ — активное сопротивление входной цепи, *ом*;

$C_{ЭМУ}$ — постоянная $ЭМУ$ до щеток короткозамкнутой цепи, *ом*.

Передаточная функция первого звена

$$W_1(p) = \frac{\bar{E}_{кз}}{\Delta \bar{U}} = \frac{k_1}{T_1 p + 1}. \quad (4-4)$$

Второе звено. Вход—щетки короткозамкнутой цепи ЭМУ, выход — выходные щетки ЭМУ. Это также аperiodическое звено, на вход которого подается э. д. с. $E_{кз}$ короткозамкнутой цепи ЭМУ, а на выходе получается э. д. с. $E_{эму}$ электромашинного усилителя. Уравнение этого звена в операторной форме

$$(T_2 p + 1) \bar{E}_{эму} = k_2 \bar{E}_{кз}. \quad (4-5)$$

Здесь

$$T_2 = \frac{L_{кз}}{r_{кз}}; \quad k_2 = \frac{C_{кз}}{r_{кз}}, \quad (4-6)$$

где $L_{кз}$ — индуктивность короткозамкнутой цепи ЭМУ, *гн*;
 $r_{кз}$ — активное сопротивление короткозамкнутой цепи ЭМУ, *ом*;
 $C_{кз}$ — постоянная короткозамкнутой цепи ЭМУ, *ом*.
 Передаточная функция второго звена

$$W_2(p) = \frac{\bar{E}_{эму}}{\bar{E}_{кз}} = \frac{k_2}{T_2 p + 1}. \quad (4-7)$$

Третье звено. Двигатель постоянного тока в комплексе с тахогенератором. Вход — цепь, состоящая из последовательно соединенных якоря двигателя и якоря ЭМУ, выход — щетки якоря тахогенератора. Это звено второго порядка (может быть и колебательным). На вход звена подается э. д. с. ЭМУ $E_{эму}$ и нагрузка на валу двигателя $M_c = C_m I_c$, а на выходе получается э. д. с. $E_{тг}$ тахогенератора. При составлении уравнения звена на вход его вместо нагрузки M_c подается пропорциональная ей величина $r_{я} I_c$.

Уравнение этого звена в операторной форме по аналогии с выражением (3-33)

$$\text{Здесь} \quad (T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) \bar{E}_{тг} = k_3 (\bar{E}_{эму} - r_{я} \bar{I}_c). \quad (4-8)$$

$$T_3 = \frac{L_{я}}{r_{я}}; \quad T_4 = \frac{r_{я} G D^2}{375 C_m C_e}; \quad k_3 = \frac{C_{егг}}{C_e}, \quad (4-9)$$

где $L_{я}$ — индуктивность цепи якорей двигателя и ЭМУ, *гн*;

$r_{я}$ — активное сопротивление цепи якорей двигателя и ЭМУ, *ом*;

$G D^2$ — маховой момент на валу двигателя (маховой момент якоря двигателя плюс приведенный к валу двигателя маховой момент всех приводимых в движение двигателем масс), *н · м²*;

I_c — ток в якоре, соответствующий статическому моменту на валу двигателя, *а*;

$C_{егг}$, C_e — конструктивные постоянные тахогенератора и двигателя, $\frac{\text{в} \cdot \text{мин}}{\text{об}}$;

C_m — конструктивная постоянная двигателя, $\frac{\text{н} \cdot \text{м}}{\text{а}}$.

Передаточная функция третьего звена

$$W_3(p) = \frac{\bar{E}_{тг}}{\bar{E}_{эму} - r_{я} \bar{I}_c} = \frac{k_3}{T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1}. \quad (4-10)$$

Таким образом, схема, приведенная на рис. 4-1, состоит из двух аperiодических звеньев и одного колебательного. Кроме того, в схему входит элемент, в котором производится сравнение э. д. с. $E_{\text{тг}}$ тахогенератора с управляющим напряжением U_y . В рассматриваемой схеме сравнение осуществляется встречным включением $E_{\text{тг}}$ и U_y .

После расчленения системы автоматического регулирования на типовые звенья можно составить структурную схему системы. На структурной схеме каждое звено изображается прямоугольником. Прямоугольники соединяются между собой стрелками, которые показывают направление воздействий, оказываемых звеньями друг на друга. Для того, чтобы различить звенья, в прямоугольник вписывается передаточная функция данного звена, которая полностью его характеризует.

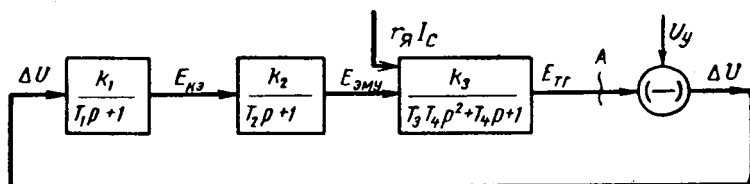


Рис. 4-2. Структурная схема статической системы автоматического регулирования, приведенной на рис. 4-1

На рис. 4-2 изображена структурная схема статической системы автоматического регулирования, приведенной на рис. 4-1. Элемент, в котором происходит сравнение э. д. с. тахогенератора с управляющим напряжением U_y , изображен кружком со знаком минус, который показывает, что подводимые к нему величины вычитаются. При расчленении системы все звенья принимали линейными. В данном случае это можно было сделать, так как в подобных схемах электрические машины обычно ненасыщены.

Однако часто системы содержат элементы с нелинейными характеристиками. В этих случаях при расчленении системы на типовые звенья следует внести необходимые допущения, идеализирующие данный элемент. При этом отбрасываются факторы, не имеющие существенного значения, и остаются главные факторы. Зависимости выходных величин от входных в ближайших окрестностях рабочего режима линеаризуются.

При линеаризации звеньев и определении коэффициентов передаточных функций могут возникнуть затруднения. Следует иметь в виду, что в технической литературе описано большое количество элементов автоматических устройств и для них составлены передаточные функции, так что для многих случаев можно найти готовые решения, для других — получить полезные указания.

Если типы звеньев системы определены и их передаточные функции написаны, то структурная схема составляется так, как это описано в настоящем параграфе.

§ 4-3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Имея дифференциальные уравнения и передаточные функции отдельных звеньев, на которые расчленена система автоматического регулирования, и структурную схему, которая показывает, как эти звенья соединены между собой, можно составить дифференциальное уравнение системы автоматического регулирования в целом.

При составлении уравнений следует учитывать, что выходная величина каждого предыдущего звена является входной величиной последующего. Выходная величина последнего звена (это обычно выход объекта регулирования) в системах с воздействием по отклонению сравнивается с заданной величиной и отклонение действительной выходной величины от заданного значения подается на вход первого звена, так что система замкнута. При исследованиях иногда возникает необходимость рассматривать поведение разомкнутой системы. Чтобы получить разомкнутую систему, нужно разорвать связь между любыми двумя выходами соседними звеньями. Обычно размыкание производят между выходом объекта регулирования и входом собственно регулятора (сечение A на рис. 4-1 и 4-2).

При подаче в разомкнутой системе на вход регулятора величины, соответствующей отклонению действительной величины от заданного значения, на выходе объекта регулирования получаются значения регулируемой величины, зависящие от параметров системы и от характера изменения величины на входе.

Соответственно разомкнутому и замкнутому состояниям системы автоматического регулирования можно составить дифференциальные уравнения разомкнутой и замкнутой систем.

Рассматривая принципиальную схему рис. 4-1, приходим к выводу, что эта система статическая. При наличии нагрузки на валу двигателя и неизменном значении управляющего напряжения U_y установившийся процесс может быть достигнут только при наличии некоторой разности $\Delta U = U_y - E_{тг}$. При этом действительное значение регулируемой величины $E_{тг}$ не равно заданному значению U_y , что является отличительной особенностью статической системы. Если случайно окажется, что $E_{тг} = U_y$, тогда $\Delta U = 0$, электромагнитный усилитель $ЭМУ$ не получит возбуждения, напряжение на щетках двигателя снизится практически до нуля, скорость вращения двигателя упадет, пропорционально уменьшится э. д. с. тахогенератора $E_{тг}$, разность ΔU станет отличной от нуля и скорость вращения двигателя и $E_{тг}$ снова увеличатся, пока при некоторой величине ΔU не наступит установившийся режим.

Как видно из рис. 4-2, в данной системе нет ни одного интегрирующего звена. Таким образом, статические системы автоматического регулирования не содержат интегрирующих (астатических) звеньев. Если система содержит одно или более интегрирующих звеньев, то она становится астатической.

Составим дифференциальное уравнение статической системы по структурной схеме на рис. 4-2. Так как в схеме выходная величина каждого предыдущего звена является входной для последующего, то это можно сделать, исключив из уравнения отдельных звеньев все переменные, кроме той, изменение которой интересует исследователя.

Выпишем уравнения звеньев системы регулирования (4-2), (4-5) и (4-8), полученные в предыдущем параграфе:

$$\begin{aligned}(T_1 p + 1) \bar{E}_{кз} &= k_1 \Delta U; \\ (T_2 p + 1) \bar{E}_{эму} &= k_2 \bar{E}_{кз}; \\ (T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) \bar{E}_{тг} &= k_3 (\bar{E}_{эму} - r_{я} \bar{I}_c).\end{aligned}$$

Составим уравнение системы, разомкнутой в точке А, для чего исключим из приведенной системы уравнений промежуточные переменные

$$\begin{aligned}(T_1 p + 1) (T_2 p + 1) (T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) \bar{E}_{тг} &= \\ &= k_1 k_2 k_3 \Delta \bar{U} - (T_1 p + 1) (T_2 p + 1) k_3 r_{я} \bar{I}_c.\end{aligned}\quad (4-11)$$

Произведение многочленов в левой части уравнения называется *оператором разомкнутой системы* и обозначается $D(p)$.

Произведение коэффициентов усиления звеньев в правой части уравнения дает коэффициент усиления (или передаточный коэффициент) разомкнутой системы

$$K = k_1 k_2 k_3.$$

Уравнение (4-11) может быть записано в сокращенной форме

$$D(p) \bar{E}_{тг} = K \Delta \bar{U} - M(p) k_3 r_{я} \bar{I}_c, \quad (4-12)$$

где, кроме упомянутых выше обозначений,

$$M(p) = (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$

В правой части уравнения член $K \Delta U$ выражает управляющее воздействие, подаваемое на вход разомкнутой системы. Член $M(p) k_3 r_{я} \bar{I}_c$ выражает воздействие нагрузки на валу двигателя.

Чтобы получить уравнение замкнутой системы, введем в уравнение (4-12) условие (4-1), которое в операторной форме будет иметь вид

$$\Delta \bar{U} = \bar{U}_y - \bar{E}_{тг}. \quad (4-13)$$

Подставляя значение $\Delta \bar{U}$ из выражения (4-13) в уравнение (4-12), после преобразований получим уравнение замкнутой системы в операторной форме

$$[D(p) + K] \bar{E}_{тг} = K \bar{U}_y - M(p) k_3 r_{я} \bar{I}_c. \quad (4-14)$$

Если известны передаточные функции отдельных звеньев, из которых состоит система автоматического регулирования и схема соединений звеньев, то относительно просто могут быть получены передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем и их дифференциальные уравнения.

Различают следующие способы соединения звеньев:

последовательное, при котором выходная величина предыдущего звена является входной последующего (рис. 4-3);

параллельное, при котором на вход нескольких звеньев

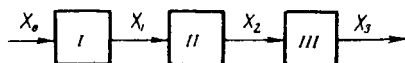


Рис. 4-3. Последовательное соединение элементов системы

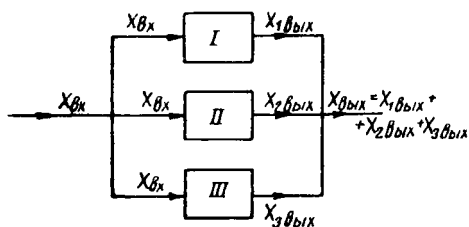


Рис. 4-4. Параллельное соединение элементов системы

подается одна и та же величина, а выходная величина представляет собой сумму выходных величин этих звеньев (рис. 4-4).

Замыкание системы или нескольких звеньев обратной связью, когда на вход замыкаемых звеньев, соединенных любым способом, с их выхода подается сигнал через замыкающие звенья, находящиеся в цепи обратной связи (рис. 4-5).

При этом пользуются следующими теоремами для получения передаточных функций сложных систем по передаточным функциям элементов их составляющих.

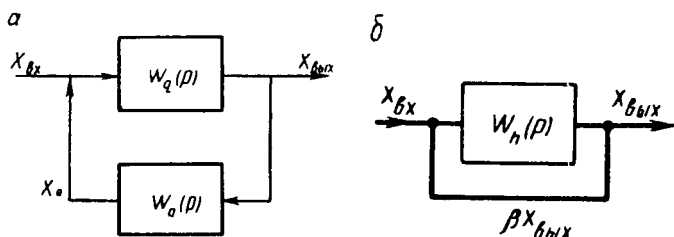


Рис. 4-5. Замкнутая система с обратной связью

Теорема первая. Передаточная функция n последовательно соединенных звеньев (см. рис. 4-3) равна произведению функций отдельных звеньев

$$W_N(p) = \prod_{k=1}^n W_k(p). \quad (4-15)$$

Выведем это выражение. Предположим, что имеется n передаточных функций

$$W_1(p) = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_0}; \quad W_2(p) = \frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_1}; \quad \dots; \quad W_n(p) = \frac{\bar{X}_n}{\bar{X}_{n-1}}.$$

При последовательном соединении звеньев выходная величина X_1 первого звена является входной величиной второго звена, выходная величина X_2 второго звена является входной величиной третьего и т. д. Найдем передаточную функцию двух первых последовательно соединенных звеньев, т. е. отношение $\frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_0}$. Для этого выразим в первой передаточной функции $\bar{X}_1$ через $\bar{X}_0$

$$\bar{X}_1 = W_1(p) \bar{X}_0.$$

Подставим значение $\bar{X}_1$ во вторую передаточную функцию

$$W_2(p) = \frac{\bar{X}_2}{W_1(p) \bar{X}_0},$$

откуда

$$\frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_0} = W_1(p) W_2(p).$$

Присоединяя таким образом к уже соединенным звеньям очередное звено, получим выражение (4-15).

Теорема вторая. Передаточная функция n параллельно соединенных звеньев (см. рис. 4-4) равна сумме передаточных функций отдельных звеньев

$$W_N(p) = \sum_{k=1}^n W_k(p). \quad (4-16)$$

При выводе этой теоремы исходим из того, что входной величиной всех параллельно соединенных звеньев является одна и та же величина $X_{\text{вх}}$. Выходные величины для каждого звена различны, они зависят от динамических свойств звеньев и, следовательно, от вида передаточных функций

$$W_1(p) = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_{\text{вх}}}; \quad W_2(p) = \frac{\bar{X}_2}{\bar{X}_{\text{вх}}}; \dots; \quad W_n(p) = \frac{\bar{X}_n}{\bar{X}_{\text{вх}}}.$$

Общая выходная величина параллельно соединенных звеньев представляет алгебраическую сумму выходных величин отдельных звеньев.

Найдем значения выходных величин отдельных звеньев

$$\bar{X}_1 = W_1(p) \bar{X}_{\text{вх}}; \quad \bar{X}_2 = W_2(p) \bar{X}_{\text{вх}}; \dots; \quad \bar{X}_n = W_n(p) \bar{X}_{\text{вх}}$$

и сложим правые и левые части этих выражений

$$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n = [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)] \bar{X}_{\text{вх}},$$

откуда

$$\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n}{\bar{X}_{\text{вх}}} = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p).$$

Отсюда непосредственно получается выражение (4-16).

Теорема третья. Передаточная функция замкнутой системы с отрицательной (положительной) обратной связью (рис. 4-5, а) равна передаточной функции $W_q(p)$ замыкаемых звеньев (соединенных любым способом), деленной на единицу плюс (минус) произведение передаточной функции замыкаемых звеньев на передаточную функцию $W_0(p)$ замыкающих звеньев

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_q(p)}{1 \pm W_q(p) W_0(p)}. \quad (4-17)$$

Выпишем отдельно передаточные функции замыкаемых и замыкающих звеньев, учитывая, что входной величиной замыкающих звеньев является $X_{\text{вых}}$, а выходной — X_0 , как это видно из рис. 4-5.

$$\frac{\bar{X}_{\text{вых}}}{\bar{X}_{\text{вх}}} = W_q(p); \quad \frac{\bar{X}_0}{\bar{X}_{\text{вых}}} = W_0(p),$$

откуда

$$W_q(p) \bar{X}_{\text{вх}} = \bar{X}_{\text{вых}}; \quad W_0(p) \bar{X}_{\text{вых}} = \bar{X}_0.$$

При наличии обратной связи на вход замыкаемых звеньев подается при отрицательной обратной связи разность $(\bar{X}_{\text{вх}} - \bar{X}_0)$, при положительной — сумма $(\bar{X}_{\text{вх}} + \bar{X}_0)$. В соответствии с этим можем записать

$$W_q(p) (\bar{X}_{\text{вх}} \mp \bar{X}_0) = \bar{X}_{\text{вых}}.$$

Подставляя значение $\bar{X}_0$, получим

$$W_q(p) [\bar{X}_{\text{вх}} \mp W_0(p) \bar{X}_{\text{вых}}] = \bar{X}_{\text{вых}}$$

или после преобразований

$$W_q(p) \bar{X}_{\text{вх}} = [1 \pm W_q(p) W_0(p)] \bar{X}_{\text{вых}},$$

откуда получим выражение (4-17)

$$\frac{\bar{X}_{\text{вых}}}{\bar{X}_{\text{вх}}} = \frac{W_q(p)}{1 \pm W_q(p) W_0(p)} = W_{\text{зам}}(p).$$

В случае жесткой обратной связи (рис. 4-5, б) как в переходном процессе, так и в установившемся режиме с выхода замыкаемых элементов на их вход подается определенная часть выходной величины.

Коэффициент β , абсолютная величина которого может меняться в пределах от 0 до 1 и который указывает, какая доля выходной величины используется для воздействия на вход элемента, называется коэффициентом обратной связи. При этом положительной обратной связи соответствует положительная величина β , отрицательной обратной связи — отрицательная величина β .

Таким образом, передаточная функция жесткой обратной связи $W_0(p) = \beta$, а результирующая передаточная функция звена с жесткой обратной связью

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_q(p)}{1 \pm \beta W_q(p)}. \quad (4-18)$$

С помощью этих теорем можно составлять уравнения весьма сложных систем, как это будет показано ниже. Однако следует иметь в виду, что эти теоремы справедливы только для детектирующих звеньев. Если звенья передают воздействия в обе стороны, то результирующие передаточные функции составляются с учетом взаимного влияния звеньев [21].

Составим уравнение разомкнутой в точке A системы, представленной структурной схемой (см. рис. 4-2). Здесь звенья соединены последовательно и поэтому в соответствии с первой теоремой передаточная функция разомкнутой системы равна произведению передаточных функций отдельных звеньев

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1)} \quad (4-19)$$

или в краткой записи, учитывая примененные выше обозначения,

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{K}{D(p)}. \quad (4-20)$$

Чтобы получить выходную величину, нужно входную величину умножить на передаточную функцию. В рассматриваемой системе имеется одна выходная величина $E_{\text{тг}}$ и две входные ΔU и $r_{\text{я}} I_{\text{с}}$, которые вводятся в различных точках. Так как система линейна, то к ней применим метод суперпозиции (наложение воздействий). Таким образом, выходная величина $E_{\text{тг}}$ представляет алгебраическую сумму результатов воздействий входных величин: ΔU , которая проходит через все звенья, и $r_{\text{я}} I_{\text{с}}$, которая проходит только через последнее звено

$$\bar{E}_{\text{тг}} = \frac{K}{D(p)} \Delta U - \frac{k_3}{N(p)} r_{\text{я}} \bar{I}_{\text{с}}, \quad (4-21)$$

где $N(p) = T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1 = \frac{D(p)}{M(p)}$.

Умножив уравнение (4-21) на $D(p)$, получим уравнение разомкнутой системы при нулевых начальных условиях (4-12), которое при введении в него условия замкнутости (4-1) преобразуется, как уже было сделано выше, в уравнение замкнутой системы (4-14).

Левая часть уравнения (4-14) представляет собой уравнение свободных колебаний системы, правая — задающее воздействие и возмущения. В это уравнение входят абсолютные значения переменных.

Перейдем к уравнению в отклонениях. Для этого выразим переменные, входящие в уравнение (4-14), через их установившиеся значения и отклонения

$$\bar{E}_{\text{тг}} = \bar{E}_{\text{тг0}} + \Delta \bar{E}_{\text{тг}};$$

$$\bar{U}_y = \bar{U}_{y0} + \Delta \bar{U}_y;$$

$$\bar{I}_c = \bar{I}_{c0} + \Delta \bar{I}_c.$$

Уравнение установившегося режима (уравнение статики) замкнутой системы получим из выражения (4-14), приняв оператор $p = 0$, что соответствует $D(p) = 1$ и $M(p) = 1$,

$$(1 + K) E_{\text{тг0}} = K U_{y0} - k_3 r_{\text{я}} I_{c0}. \quad (4-22)$$

Подставив в уравнение (4-14) переменные, выраженные через отклонения, и вычтя соответственно из правой и левой частей уравнение статики (4-22), получим уравнение в отклонениях

$$[D(p) + K] \Delta \bar{E}_{\text{тг}} = K \Delta \bar{U}_y - M(p) k_3 r_{\text{я}} \Delta \bar{I}_c.$$

Обозначая отклонения строчными буквами

$$\Delta E_{\text{тг}} = e_{\text{тг}}; \Delta U_y = U_y; \Delta I_c = i_c,$$

получим

$$[D(p) + K] \bar{e}_{\text{тг}} = K \bar{U}_y - M(p) k_3 r_{\text{я}} \bar{i}_c. \quad (4-23)$$

Перейдем к относительным безразмерным величинам, для чего размерные переменные нужно разделить на базовые постоянные величины. К безразмерным относительным величинам можно переходить и от абсолютных значений переменных и от отклонений. Это определяется конкретными условиями решаемой задачи.

В нашем случае перейдем к относительным величинам от абсолютных значений [уравнение (4-14)]. В качестве базовых примем установившиеся значения соответствующих величин.

Обозначим

$$\frac{E_{\text{тг}}}{E_{\text{тг0}}} = \varphi; \frac{U_y}{U_{y0}} = \psi; \frac{r_{\text{я}} I_c}{r_{\text{я}} I_{c0}} = \sigma. \quad (4-24)$$

Подставляя найденные безразмерные переменные в уравнение (4-14), получим

$$[D(p) + K] \bar{\varphi} = K \bar{\psi} - M(p) k_3 \bar{\sigma}. \quad (4-25)$$

К безразмерным величинам можно перейти и на более ранней стадии составления уравнения, а именно, в уравнениях отдельных звеньев.

Из уравнения (4-25) найдем передаточную функцию по управляющему воздействию, полагая нагрузку $\sigma = 0$,

$$W_y(p) = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\psi}} = \frac{K}{D(p) + K}. \quad (4-26)$$

Передаточную функцию по нагрузке найдем, полагая управляющее воздействие $\psi = 0$,

$$W_n(p) = \frac{\bar{\varphi}}{\sigma} = \frac{-M(p) k_3}{D(p) + K}. \quad (4-27)$$

Запишем уравнение (4-25) в развернутой форме

$$\begin{aligned} [(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) + K] \bar{\varphi} = \\ = K \bar{\psi} - (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) k_3 \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим уравнение замкнутой статической системы

$$\begin{aligned} (a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + 1 + K) \bar{\varphi} = \\ = K \bar{\psi} - (c_0 p^2 + c_1 p + 1) k_3 \bar{\sigma}, \end{aligned} \quad (4-28)$$

где $a_0 = T_1 T_2 T_3 T_4$, сек⁴;

$$\begin{aligned} a_1 &= T_1 T_2 T_3 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4, \text{ сек}^3; \\ a_2 &= T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4 + T_3 T_4, \text{ сек}^2; \\ a_3 &= T_1 + T_2 + T_4, \text{ сек}; \\ K &= k_1 k_2 k_3; \\ c_0 &= T_1 T_2, \text{ сек}^2; \\ c_1 &= T_1 + T_2, \text{ сек}. \end{aligned} \quad (4-29)$$

Постоянные коэффициенты имеют размерность времени в степени, равной степени оператора p , на который коэффициент умножается. Размерность оператора $p = \frac{1}{dt}$, $\frac{1}{\text{сек}}$, и поэтому в уравнении (4-28) многочлены в скобках безразмерны. Проверка размерности является одним из способов проверки правильности составления уравнения.

Уравнение (4-28) составлено для конкретного случая статической системы четвертого порядка. Однако, пользуясь формой этого уравнения, можно написать уравнение статической линейной системы n -го порядка в общем виде при самых различных точках приложения управляющего и возмущающего воздействий. Уравнение замкнутой системы в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-2} p^2 + a_{n-1} p + 1 + K) \bar{\varphi} = \\ = K \bar{\psi} - (c_0 p^k + c_1 p^{k-1} + \dots + c_{k-1} p + 1) k_q \bar{\sigma}, \end{aligned} \quad (4-30)$$

где K — коэффициент усиления разомкнутой системы;

k_q — коэффициент усиления управляемого объекта.

Напишем это же уравнение в краткой записи

$$[D(p) + K] \bar{\varphi} = K \bar{\psi} - M(p) k_q \bar{\sigma}. \quad (4-31)$$

Обозначения ясны из непосредственного сравнения уравнений (4-30) и (4-31).

Левая часть уравнения (4-31), если правая часть будет равна нулю, описывает поведение системы в режиме свободных колебаний, т. е. при отсутствии каких-либо воздействий на нее. Постоянные коэффициенты характеристического уравнения (многочлен в скобках левой части), зависящие только от параметров системы, определяют основные свойства этой системы.

Величины ψ и σ отражают соответственно управляющее и возмущающее воздействия и оказывают влияние на работу системы. В переходном режиме возмущающее воздействие трансформируется операторами, коэффициенты при которых зависят от параметров системы.

Отличительной особенностью дифференциального уравнения статической системы является наличие свободной единицы в операторе $D(p)$ характеристического уравнения, что оказывается очень существенным в установившемся режиме.

§ 4-4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим астатическую систему (рис. 4-6), отличающуюся от статической системы, приведенной на рис. 4-1, тем, что между тахогенератором $ТГ$ и обмоткой возбуждения $ОВ ЭМУ$ вставлено дополнительное звено — исполнительный двигатель $ИД$. Это двигатель небольшой мощности с независимым возбуждением, якорь которого включен последовательно в цепь якоря тахогенератора и источника управляющего напряжения U_y . Если напряжение тахогенератора равно управляющему, якорь исполнительного двигателя неподвижен. При неравенстве этих напряжений через якорь $ИД$ проходит ток, пропорциональный их разности ΔU .

Якорь $ИД$ вращается и перемещает движок потенциометра Π , изменяя напряжение U_n , подаваемое в обмотку возбуждения $ЭМУ$, таким образом, что скорость двигателя $Д$ и напряжение $ТГ$ приходят к значению, заданному управляющим напряжением.

Расчленим эту систему на типовые звенья и составим их дифференциальные уравнения.

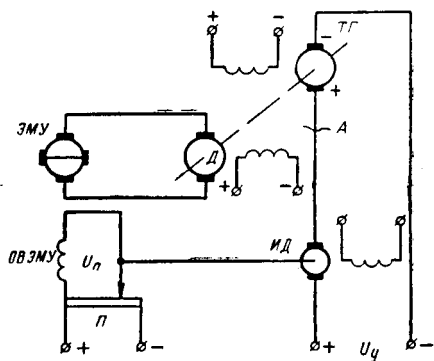


Рис. 4-6. Астатическая система автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока

Первое звено — исполнительный двигатель с потенциометром. Вход — цепь, состоящая из последовательно соединенных якоря тахогенератора, якоря исполнительного двигателя *ИД* и источника управляющего напряжения. Выход — выходные зажимы потенциометра. На вход звена подается величина ΔU , на выходе получается выходное напряжение потенциометра. Это интегрирующее звено, уравнение которого по аналогии с выражением (3-52) имеет вид

$$U_n = k_1 \int \Delta U dt.$$

В операторной форме

$$\bar{U}_n = k_1 \frac{\Delta \bar{U}}{p},$$

откуда

$$p \bar{U}_n = k_1 \Delta \bar{U}, \quad (4-32)$$

k_1 — коэффициент, в который входят постоянная двигателя по напряжению, передаточное отношение от двигателя к движку потенциометра и коэффициент пропорциональности между положением движка потенциометра и его выходным напряжением U_n , имеет размерность $\frac{1}{сек}$.

Второе звено — электромашинный усилитель. В системе, приведенной на рис. 4-1, рассматривался электромашинный усилитель, как два последовательно соединенных аperiodических звена. Это имело основание, так как последовательно с индуктивностью *ОВ ЭМУ* включались индуктивности якоря *ТГ* и источника управляющего напряжения, каждая из которых мала, но в сумме они могли иметь заметную величину. На рис. 4-6 последовательно с индуктивностью обмотки *ОВ ЭМУ* включается активное сопротивление потенциометра *П*, в результате чего постоянная времени уменьшается и ею можно пренебречь. В этом случае электромашинный усилитель можно рассматривать как одно аperiodическое звено, входом которого является напряжение U_n , снимаемое с потенциометра, а выходом — выходное напряжение $E_{эму}$. Уравнение этого звена в операторной форме

$$(T_2 p + 1) \bar{E}_{эму} = k_2 \bar{U}_n. \quad (4-33)$$

где $T_2 = \frac{L_{кз}}{r_{кз}}$; $k_2 = \frac{C_{эму} C_{кз}}{r_{ов} r_{кз}}$.

Третье звено — двигатель постоянного тока в комплексе с тахогенератором. Уравнение звена аналогично уравнению (4-8)

$$(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) \bar{E}_{тг} = k_3 (\bar{E}_{эму} - r_{я} \bar{I}_c). \quad (4-34)$$

По найденным уравнениям напишем передаточные функции звеньев системы

$$W_1(p) = \frac{\bar{U}_n}{\Delta U} = \frac{k_1}{p}; \quad (4-35)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{E}_{\text{эму}}}{\bar{U}_n} = \frac{k_2}{T_2 p + 1}; \quad (4-36)$$

$$W_3(p) = \frac{\bar{E}_{\text{тг}}}{\bar{E}_{\text{эму}} - r_{\text{я}} I_{\text{с}}} = \frac{k_3}{T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1}. \quad (4-37)$$

На рис. 4-7 приведена структурная схема астатической системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 4-6. Все звенья соединены последовательно, выходная величина предыдущего

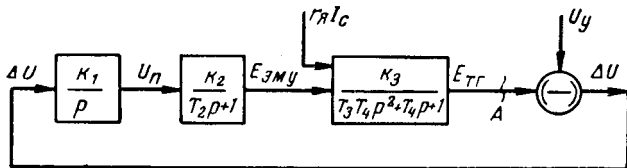


Рис. 4-7. Структурная схема астатической системы автоматического регулирования, приведенной на рис. 4-6.

звена является входной последующего. Чтобы составить уравнение разомкнутой в точке А системы, достаточно исключить из уравнений (4-32), (4-33) и (4-34) все промежуточные переменные.

После указанных преобразований получим

$$\begin{aligned} p(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) \bar{E}_{\text{тг}} = \\ = k_1 k_2 k_3 \Delta \bar{U} - p(T_2 p + 1) k_3 r_{\text{я}} I_{\text{с}}. \end{aligned} \quad (4-38)$$

Подставляя значение $\Delta \bar{U} = U_y - E_{\text{тг}}$ и учитывая, что $k_1 k_2 k_3 = K$, получим уравнение замкнутой системы

$$\begin{aligned} [p(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) + K] \bar{E}_{\text{тг}} = \\ = K \bar{U}_y - p(T_2 p + 1) k_3 r_{\text{я}} I_{\text{с}}. \end{aligned} \quad (4-39)$$

Перейдем к относительным безразмерным единицам, для чего воспользуемся обозначениями (4-24)

$$\begin{aligned} [p(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) + K] \bar{\varphi} = \\ = K \bar{\psi} - p(T_2 p + 1) k_3 \bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (4-40)$$

Раскроем в уравнении (4-40) скобки и после приведения подобных членов получим

$$(b_0 p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p + K) \bar{\varphi} = K \bar{\psi} - (T_2 p^2 + p) k_3 \bar{\sigma}, \quad (4-41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= T_2 T_3 T_4, \text{сек}^3; \\ b_1 &= T_2 T_4 + T_3 T_4, \text{сек}^2; \\ b_2 &= T_2 + T_3, \text{сек}; \\ b_3 &= 1; \\ K &= k_1 k_2 k_3, \frac{1}{\text{сек}}. \end{aligned} \right\} \quad (4-42)$$

Обращаем внимание на то, что в операторных многочленах правой и левой частей уравнения (4-41) отсутствует свободная единица. Это отличительная особенность уравнения астатической системы, которая имеет принципиальное значение в установившемся процессе.

В общем виде уравнение астатической системы автоматического регулирования n -го порядка имеет вид

$$\begin{aligned} (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-2} p^2 + b_{n-1} p + K) \bar{\varphi} = \\ = K \bar{\psi} - (f_0 p^k + f_1 p^{k-1} + \dots + f_{k-1} p + p) k_q \bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (4-43)$$

§ 4-5. УСТАНОВИВШИЙСЯ ПРОЦЕСС СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Установившийся процесс, как указывалось в § 4-1, наступает тогда, когда собственная составляющая переходного процесса полностью затухает. На основании этого определения уравнение установившегося процесса может быть получено, если в дифференциальном уравнении системы автоматического регулирования, описывающем переходный процесс, приравнять нулю все производные от регулируемой величины. Если дифференциальное уравнение записано в операторной форме, то приравниваются нулю все степени оператора p . Напоминаем, что левая часть дифференциальных уравнений как отдельных звеньев, так и системы в целом представляет уравнение свободных колебаний, т. е. уравнение собственной составляющей переходного процесса. Когда собственные колебания регулируемой величины затухают, то собственная составляющая регулируемой величины обращается в нуль, что возможно, когда в нуль обращаются все производные. Следует приравнивать нулю производные не только в левой, но и в правой части уравнения, так как в правую часть производные попадают из характеристических уравнений отдельных звеньев при составлении уравнения системы в целом.

Приравняв нулю все степени оператора p в уравнении (4-30), получим уравнение установившегося процесса для статической системы

$$(K + 1) \varphi = K \psi - k_q \sigma. \quad (4-44)$$

Здесь ψ — неизменное по величине управляющее воздействие. Из полученного уравнения следует, что регулируемая величина φ изменяется только при изменении управляющего ψ и возмущающего σ воздействий, т. е. имеется только вынужденная составляющая изменения регулируемой величины.

Из уравнения (4-44) находим

$$\varphi = \frac{K}{1+K} \psi - \frac{k_q}{1+K} \sigma. \quad (4-45)$$

Величина $\frac{K}{1+K}$ называется коэффициентом усиления замкнутой системы. Из уравнения (4-45) очевидно, что в статической системе регулируемая величина φ будет тем ближе следовать за управляющим воздействием и нагрузка будет вызывать тем меньшее отклонение от заданного значения, чем больше коэффициент усиления разомкнутой системы K .

При холостом ходе (нагрузка $\sigma = 0$) уравнение (4-45) примет вид

$$\varphi_{xx} = \frac{K}{1+K} \psi. \quad (4-46)$$

Отклонение регулируемой величины в установившемся процессе при холостом ходе

$$\Delta\varphi = \psi - \varphi_{xx}.$$

Подставим сюда значение φ_{xx} из выражения (4-46)

$$\Delta\varphi = \frac{1}{1+K} \psi. \quad (4-47)$$

Отсюда следует, что, увеличивая коэффициент усиления статической системы регулирования, можно получить любую статическую точность.

Найдем из выражения (4-47) коэффициент усиления K , обеспечивающий заданное отклонение $\Delta\varphi$

$$K = \frac{\psi - \Delta\varphi}{\Delta\varphi}. \quad (4-48)$$

При номинальной нагрузке ($\sigma = \sigma_n$) в установившемся процессе регулируемая величина будет иметь также номинальное значение

$$\varphi_n = \frac{K}{1+K} \psi - \frac{k_q}{1+K} \sigma_n. \quad (4-49)$$

Отношение

$$S = \frac{\varphi_{xx} - \varphi_n}{\varphi_n} \quad (4-50)$$

называется статизмом системы, который представляет относительное снижение регулируемой величины при изменении нагрузки

от нуля до номинального значения при наличии регулятора. Статизм тем меньше, чем больше коэффициент усиления системы регулирования в разомкнутом состоянии.

Подставляя в выражение (4-50) значения φ_{xx} и φ_n из выражений (4-46) и (4-49), получим

$$S = \frac{k_q \sigma_n}{K\psi - k_q \sigma_n}, \quad (4-51)$$

откуда

$$K = \frac{S+1}{S} \frac{k_q \sigma_n}{\psi}. \quad (4-52)$$

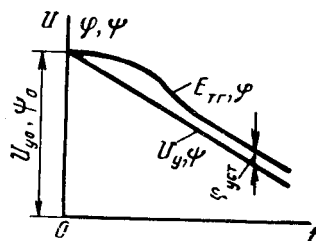
Таким образом, по заданным статизму S , номинальной нагрузке σ_n и управляющему воздействию ψ можно определить необходимый коэффициент усиления разомкнутой системы.

Рассмотрим установившийся процесс в астатической системе.

Приравнявая нулю все производные в уравнении (4-43) и полагая управляющее воздействие ψ неизменным, получим

$$K\varphi = K\psi; \quad \varphi = \psi; \quad \Delta\varphi = \psi - \varphi = 0. \quad (4-53)$$

Рис. 4-8. Линейное управляющее воздействие



В астатической системе автоматического регулирования при установившемся процессе отклонение регулируемой величины $\Delta\varphi$ от неизменного по величине заданного значения ψ равно нулю при любом значении нагрузки σ . Статизм астатической системы равен нулю.

Рассмотрим теперь случай, когда на вход астатической системы подается линейное управляющее воздействие. Например, в системе, приведенной на рис. 4-6, управляющее напряжение, имевшее к началу отсчета времени некоторое значение U_{y0} , с момента $t = 0$ начинает равномерно снижаться по прямой (рис. 4-8)

$$U_y = U_{y0} - U'_{y. \text{зад}} t, \quad (4-54)$$

где $U'_{y. \text{зад}} = \left(\frac{dU_y}{dt} \right)_{\text{зад}} = \text{const}$ — постоянная заданная скорость снижения управляющего напряжения (угловой коэффициент прямой U_y).

Напишем выражение (4-54) в операторной форме

$$\overline{U}_y = \frac{U_{y0}}{p} - \frac{U'_{y. \text{зад}}}{p^2}. \quad (4-55)$$

Нас интересует изменение с течением времени отклонения $\Delta E_{тг}$ регулируемой величины $E_{тг}$ от ее заданного значения U_y .

Текущее значение отклонения в каждый данный момент может быть найдено как разность

$$\Delta E_{тг} = U_y - E_{тг}. \quad (4-56)$$

Сравнивая выражения (4-4) и (4-56), убеждаемся, что $\Delta U = \Delta \bar{E}_{\text{тг}}$ и поэтому в уравнении (4-32) вместо ΔU можно подставить $\Delta \bar{E}_{\text{тг}}$

$$p\bar{U}_{\text{п}} = k_1 \Delta \bar{E}_{\text{тг}}. \quad (4-57)$$

Возьмем выражение (4-56) в операторной форме, подставим в него значение U_y из (4-55) и решим относительно $\bar{E}_{\text{тг}}$

$$\bar{E}_{\text{тг}} = \frac{U_{y0}}{p} - \frac{U'_{y, \text{зад}}}{p^2} - \Delta \bar{E}_{\text{тг}}. \quad (4-58)$$

Найденное значение $\bar{E}_{\text{тг}}$ подставим в уравнение (4-34) и после преобразований, учитывая, что U_{y0} и $U'_{y, \text{зад}}$ постоянные величины, получим

$$(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) \Delta \bar{E}_{\text{тг}} = \frac{U_{y0}}{p} - \frac{U'_{y, \text{зад}}}{p^2} - k_3 (\bar{E}_{\text{эму}} - r_{\text{я}} \bar{I}_{\text{с}}). \quad (4-59)$$

Подставляя в уравнение (4-33) значения $E_{\text{эму}}$ из уравнения (4-59) и $U_{\text{п}}$ из уравнения (4-57), получим

$$\begin{aligned} [p(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) + K] \Delta \bar{E}_{\text{тг}} = \\ = p(T_2 p + 1) \frac{U_{y0}}{p} - p(T_2 p + 1) \frac{U'_{y, \text{зад}}}{p^2} + \\ + p(T_2 p + 1) k_3 r_{\text{я}} \bar{I}_{\text{с}}, \end{aligned} \quad (4-60)$$

где $K = k_1 k_2 k_3, \frac{1}{\text{сек}}$.

Так как U_{y0} и $U'_{y, \text{зад}}$ — постоянные величины, то

$$\left. \begin{aligned} p(T_2 p + 1) \frac{U_{y0}}{p} &= 0; \\ p(T_2 p + 1) \frac{U'_{y, \text{зад}}}{p^2} &= \frac{U'_{y, \text{зад}}}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (4-61)$$

В правой части уравнения (4-60) заменим $\bar{I}_{\text{с}} = I_{\text{с0}} + \Delta \bar{I}_{\text{с}}$

$$p(T_2 p + 1) k_3 r_{\text{я}} (I_{\text{с0}} + \Delta \bar{I}_{\text{с}}) = p(T_2 p + 1) k_3 r_{\text{я}} \Delta \bar{I}_{\text{с}}. \quad (4-62)$$

Обозначим

$$\frac{\Delta \bar{E}_{\text{тг}}}{E_{\text{тг0}}} = \varphi; \quad \frac{U'_{y, \text{зад}}}{U_{y0}} = \psi'_{\text{зад}}; \quad \frac{r_{\text{я}} \Delta I_{\text{с}}}{r_{\text{я}} I_{\text{с0}}} = \sigma. \quad (4-63)$$

Подставив в уравнение (4-60) величины, найденные из выражений (4-61), (4-62) и (4-63), получим уравнение в безразмерных отклонениях замкнутой астатической системы

$$\begin{aligned} [p(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1) + K] \bar{\varphi} = \\ = -\frac{\psi'_{\text{зад}}}{p} + p(T_2 p + 1) k_3 \sigma. \end{aligned} \quad (4-64)$$

В установившемся процессе, когда все производные равны нулю,

$$K \varphi_{\text{уст}} = -\psi'_{\text{зад}},$$

откуда установившееся отклонение регулируемой величины от заданного значения

$$\Phi_{уст} = -\frac{\psi'_{зад}}{K} = \text{const.} \quad (4-65)$$

Таким образом, при подаче на вход астатической системы управляющего воздействия, меняющегося во времени по линейному закону, при установившемся процессе в системе устанавливается постоянное отклонение регулируемой величины $\Phi_{уст}$, прямо пропорциональное скорости изменения управляющего воздействия $\psi'_{зад}$ и обратно пропорциональное коэффициенту усиления разомкнутой системы K (рис. 4-8). Такой характер имеет процесс, например, в системе автоматического регулирования скорости шахтной подъемной машины с асинхронным двигателем в период замедления с применением динамического торможения.

Рассмотренная система автоматического регулирования, содержащая одно интегрирующее звено, называется также системой с астатизмом первого порядка. В системах с астатизмом второго порядка отклонение регулируемой величины от заданного значения в установившемся процессе равно нулю при неизменном значении управляющего воздействия и при изменении его по линейному закону. Установившееся отклонение регулируемой величины от заданного значения имеет место в том случае, когда управляющее воздействие изменяется по параболическому закону, т. е. с постоянным ускорением $\psi = \psi''t^2$.

Рассмотренная система является астатической по отношению к управляющему и возмущающему воздействиям. Однако имеются системы, являющиеся статическими по отношению к управляющему воздействию и астатическими по отношению к возмущающему воздействию или наоборот.

В системах автоматической стабилизации, где управляющее воздействие неизменно по величине, существенным является астатизм по отношению к возмущающему воздействию. В следящих системах важно, чтобы система была астатической по отношению к управляющему воздействию.

На практике широкое применение получили следящие системы с астатизмом первого и второго порядков.

Системы с астатизмом второго порядка и с астатизмом по отношению только к управляющему или только к возмущающему воздействию детально не рассматриваем, отсылая читателя к специальной литературе [33].

§ 4-6. СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Существенное влияние на работу систем автоматического регулирования и на выбор методов их исследования оказывает форма статических характеристик, входящих в систему элементов.

В линейных элементах статические характеристики описываются функцией вида

$$X_{\text{вых}}^{\text{ст}} = kX_{\text{вх}} + a,$$

где a — постоянная, имеющая размерность $X_{\text{вых}}$;

k — постоянная, имеющая размерность $X_{\text{вых}}/X_{\text{вх}}$.

В нелинейных элементах статические характеристики описываются различными нелинейными функциями или представляются графически.

Когда известны статические характеристики всех элементов системы автоматического регулирования, то по нагрузкам можно определить рабочие точки на этих характеристиках при установившемся процессе. Если характеристики некоторых элементов нелинейны, то, как это указано в § 2-2, их иногда можно линеаризовать в окрестностях точки, соответствующей установившемуся режиму. Линеаризация может осуществляться аналитически или графически. При этом, если рассматриваются абсолютные значения переменных, получаются уравнения со свободным членом, который усложняет уравнение системы.

Чтобы исключить постоянные свободные члены, переходят к уравнениям в отклонениях переменных.

В некоторых случаях возникает необходимость по известным статическим характеристикам отдельных элементов построить статическую характеристику сложной цепи, состоящей из нескольких элементов. Рассмотрим правила построения результирующих статических характеристик при различных способах соединения элементов.

Параллельное соединение. В качестве примера параллельного соединения элементов на рис. 4-9 приведена схема введения в закон регулирования суммы величин, пропорциональных отклонению и производной от отклонения. Напряжение $U_{\text{вх}}$ подводится к зажимам a, b , непосредственно, а к зажимам b, c через дифференцирующий трансформатор Tr . На зажимах d, e получаем сумму напряжений $U_{\text{вх}}$ и $k \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}$.

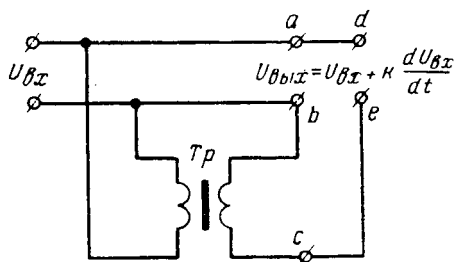


Рис. 4-9. Схема параллельного введения напряжения и производной от напряжения

Чтобы получить статическую характеристику параллельного соединения элементов, следует построить характеристики элементов в одинаковом масштабе (рис. 4-10, $a, б$) и просуммировать их ординаты (рис. 4-10, $в$).

Последовательное соединение. На рис. 4-11, $a, б$ приведены статические характеристики двух элементов, соединенных последова-

тельно. Построение результирующей характеристики приведено на рис. 4-11, в.

В первом квадранте построена характеристика *I* первого элемента, во втором — характеристика *II* второго элемента, причем ось абсцисс характеристики *II* ($X_{2\text{вх}}$) совмещена с осью ординат характеристики *I* ($X_{1\text{вых}}$).

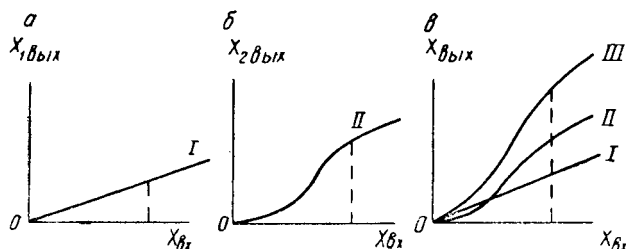


Рис. 4-10. Построение статической характеристики при параллельном соединении элементов

Зададимся некоторой точкой *1* на оси $X_{1\text{вх}}$. Восстановив в ней перпендикуляр до пересечения с характеристикой *I*, получим точку *2*. Спроектировав точку *2* на вертикальную ось, получим в точке *3*

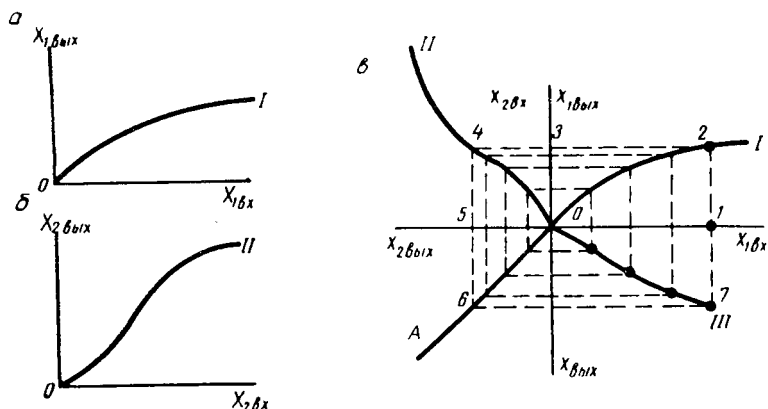


Рис. 4-11. Построение статических характеристик двух последовательно соединенных звеньев

значение $X_{1\text{вых}}$, которое по определению последовательного соединения является входной величиной $X_{2\text{вх}}$ второго элемента. Продолжив линию 2—3 до пересечения с характеристикой *II* в точке *4* и спроектировав точку *4* на горизонтальную ось, получим точку *5*, которая определяет выходную величину двух последовательно соединенных элементов. Чтобы построить результирующую характеристику, в третьем квадранте проводится биссектриса *OA*. Линия 4—5 продолжается до пересечения с биссектрисой в точке *6*. Из

точки 6 проводится линия параллельно оси абсцисс до пересечения с продолжением линии 2—1 в точке 7, которая является точкой результирующей характеристики.

Найдя таким же образом ряд других точек и соединив их плавной кривой, получим в четвертом квадранте результирующую характеристику для последовательно соединенных двух элементов, входная величина $X_{1вх}$ которой откладывается по оси абсцисс, выходная $X_{вых}$ — по оси ординат. Статическая результирующая характеристика последовательно соединенных линейных звеньев выражается линейной функцией, которая может быть найдена аналитически по статическим уравнениям звеньев.

Пусть дано n звеньев с характеристиками, выраженными в отклонениях

$$\begin{aligned}\Delta X_{1\text{ в}вх} &= k_1 \Delta X_{1вх}; \\ \Delta X_{2\text{ в}вх} &= k_2 \Delta X_{2вх}; \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta X_{n\text{ в}вх} &= k_n \Delta X_{nвх}.\end{aligned}$$

При последовательном соединении

$$\begin{aligned}\Delta X_{1\text{ в}вх} &= \Delta X_{2вх} = x_2; \\ \Delta X_{2\text{ в}вх} &= \Delta X_{3вх} = x_3; \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta X_{n-1\text{ в}вх} &= \Delta X_{nвх} = x_n,\end{aligned}$$

где строчными буквами x_i обозначены соответствующие отклонения. Тогда систему уравнений можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}x_2 &= k_1 x_1; \\ x_3 &= k_2 x_2; \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= k_{n-1} x_{n-1}.\end{aligned}$$

Исключая последовательно переменные $x_{n-1}, \dots, x_3, x_2$, получим

$$x_n = k_1 k_2 \dots k_{n-1} x_1,$$

т. е. результирующая статическая характеристика представляет собой прямую, проходящую через начало координат, а результирующий коэффициент усиления (передаточный коэффициент) последовательно соединенных звеньев равен произведению коэффициентов усиления отдельных звеньев.

Замыкание элемента жесткой обратной связью. В установившемся режиме, как указывалось выше, может действовать только жесткая обратная связь. В качестве примера элемента с жесткой обратной связью приведем усилительный каскад на триоде, в котором сигнал обратной связи снимается с делителя, образованного резисторами R_1 и R_2 (рис. 4-12).

Статическая характеристика элемента с жесткой обратной связью строится следующим образом.

Кривая *I* на рис. 4-13 представляет нелинейную статическую характеристику элемента без обратной связи. Кривая *II* на том же рисунке представляет характеристику жесткой обратной связи $X_{ос} = \beta X_{вых}$, полученную умножением ординат статической характеристики *I* на β .

Зададим некоторое значение $X_{вых}$, например в точке 1, и восстановим из нее перпендикуляр до пересечения с характеристикой *I* в точке 2. Из точки 2 опустим перпендикуляр на ось абсцисс до пересечения с кривой *II* в точке 3. Из точки 3 проведем прямую 3—4

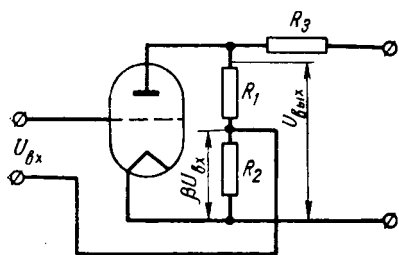


Рис. 4-12. Элемент с жесткой обратной связью

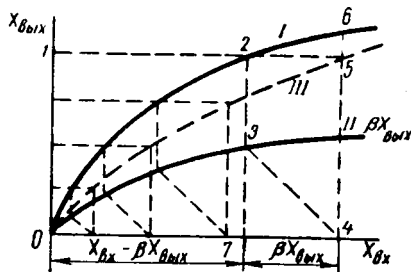


Рис. 4-13. Построение статической характеристики элемента с жесткой обратной связью

под углом 45° к оси абсцисс вправо, если обратная связь отрицательна, и влево, если она положительна (на рис. 4-13 показано построение для случая отрицательной обратной связи). Восстановим перпендикуляр в точке 4 до пересечения с продолжением линии 1—2 в точке 5, которая лежит на статической характеристике звена с жесткой обратной связью. Найдя подобным образом еще ряд точек и соединив их плавной кривой, получим искомую статическую характеристику (кривая *III*).

Смысл построения, приведенного на рис. 4-13, заключается в следующем. Ордината точки 6 на кривой *I* представляет собой выходную величину при подаче на вход величины $X_{вх}$, соответствующей точке 4, и отсутствии обратной связи. При наличии отрицательной обратной связи выходная величина будет иметь меньшее значение, а именно такое, какое она бы имела при отсутствии обратной связи, но при подаче на вход величины $X_{вх} - \beta X_{вых}$. Это значение представлено ординатой точки 2 на кривой *I*. Пересечение прямых 1—2 и 4—6 дает точку 5 результирующей характеристики *III* при наличии отрицательной обратной связи. Чтобы вычесть величину $\beta X_{вых}$ из величины $X_{вх}$, ее нужно отложить на оси абсцисс влево от точки 4. Проводя из точки 3 линию под углом 45° вправо, получаем равнобедренный треугольник 3—4—7. Так как ордината точки 3 является ординатой характеристики обратной

связи II , то и равный этой ординате отрезок $4-7$ представляет величину $\beta X_{\text{вых}}$. Отрезок $0-7$ представляет разность $X_{\text{вх}} - \beta X_{\text{вых}}$. Здесь $X_{\text{вых}}$ — фактически существующая выходная величина при наличии отрицательной обратной связи и входной величины $X_{\text{вх}}$, равной абсциссе точки 4 .

В случае положительной обратной связи приведенные рассуждения остаются в силе, только наклонная из точки 3 проводится влево под углом 45° и графически находится величина $X_{\text{вх}} + \beta X_{\text{вых}}$.

Если жесткой обратной связью охвачено линейное звено, то уравнение результирующей характеристики может быть получено аналитически.

Предположим, что звено без обратной связи имеет статическую характеристику

$$x_{\text{вых}} = k x_{\text{вх}}.$$

При наличии жесткой отрицательной обратной связи с коэффициентом β получим

$$x_{\text{вых}} = k (x_{\text{вх}} - \beta x_{\text{вых}})$$

или

$$(k\beta + 1) x_{\text{вых}} = k x_{\text{вх}}.$$

Это выражение можно привести к виду

$$x_{\text{вых}} = \frac{k}{1 + k\beta} x_{\text{вх}} = k_1 x_{\text{вх}}.$$

Таким образом, коэффициент усиления (передаточный коэффициент) звена с жесткой отрицательной обратной связью

$$k_1 = \frac{k}{1 + k\beta}.$$

Из последнего выражения следует, что отрицательная обратная связь уменьшает коэффициент усиления звена, а положительная увеличивает. Влияние гибкой обратной связи рассматривается в динамике систем автоматического регулирования.

Контрольные вопросы

1. В каких режимах могут работать системы автоматического регулирования?
2. Что называется переходным процессом?
3. Что называется установившимся процессом?
4. Что называется структурной схемой, ее отличие от принципиальной схемы?
5. Чем отличается статическая система от астатической и чем отличаются дифференциальные уравнения, описывающие эти системы?
6. Как найти результирующую передаточную функцию при последовательном соединении звеньев? Параллельном? Замкнутой системы при наличии обратной связи?

7. Как получить дифференциальное уравнение в отклонениях?
В безразмерных относительных единицах?
8. Как составить дифференциальное уравнение системы с помощью структурной схемы и передаточных функций? Показать на примере.
9. Как получить уравнение установившегося процесса?
10. Что называется статизмом системы и как его найти?
11. Как найти установившееся отклонение регулируемой величины от заданного значения в статической системе?
12. Чему равно установившееся отклонение регулируемой величины от заданного значения в астатической системе при ступенчатом воздействии? При линейном воздействии?
13. Как найти результирующую статическую характеристику элементов, соединенных последовательно? Параллельно? Элемента, охваченного жесткой обратной связью?

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 5-1. ПОНЯТИЯ И УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

В процессе работы системы автоматического регулирования подвергаются различным возмущающим воздействиям, которые выводят систему из установившегося режима, из состояния равновесия и отклоняют регулируемую величину от заданного значения. Регулятор стремится привести регулируемую величину к заданному значению. Переход системы из одного состояния в другое вследствие наличия масс, емкостей и т. п. не может произойти мгновенно. В результате возмущающих воздействий и следующих за ними восстанавливающих воздействий регулятора в системе возникают переходные процессы.

При этом могут иметь место три вида переходных процессов:

1. Регулируемая величина, которая в результате возмущающих воздействий отклонилась от заданного значения, с течением времени под воздействием регулятора возвращается к заданному значению с точностью, отвечающей статической погрешности регулятора. Такой переходный процесс называется *сходящимся*, а система регулирования — *устойчивой*.

2. Регулируемая величина, которая в результате возмущающих воздействий отклонилась от заданного значения, с течением времени под воздействием регулятора не приближается, а теоретически беспредельно удаляется от заданного значения аperiodически или с колебаниями, амплитуда которых непрерывно возрастает. Такой переходный процесс называется *расходящимся*, а система регулирования — *неустойчивой*.

Следует отметить, что в реальных условиях не может произойти беспредельное отклонение какого-либо физического параметра от заданного значения так же, как невозможны и колебания с беспредельно возрастающей амплитудой.

Отклонения ограничиваются свойствами элементов: насыщением электрических машин, максимальным ходом поршней, ограниченной мощностью двигателей и т. п. Однако возникающие колебания или неконтролируемые отклонения регулируемой величины могут быть недопустимы по соображениям сохранности оборудования, безопасности и др.

3. Регулируемая величина, которая в результате возмущающих воздействий отклонилась от заданного значения, с течением времени

под воздействием регулятора к установившемуся значению не возвращается, а совершает незатухающие колебания с амплитудой, зависящей от начальных условий. Такой переходный процесс называется *колебательным*, а линейная система регулирования — *находящаяся на границе устойчивости*.

В нелинейных системах могут возникать устойчивые колебания постоянной амплитуды, величина которой не зависит от начальных условий, к которым система возвращается после снятия любого возмущающего воздействия. Такие системы рассматривают, как имеющие устойчивые колебания (см. главу 10).

Неустойчивые системы автоматического регулирования являются практически непригодными и поэтому обязательно должно производиться исследование устойчивости систем.

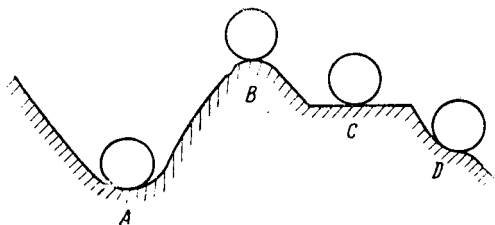


Рис. 5-1. Различные виды равновесия

Чтобы определить, устойчиво ли равновесие какой-либо статической системы, изучают поведение этой системы при малых отклонениях от положения равновесия.

Например, для того, чтобы определить устойчивость шара в положении A

(рис. 5-1), можно задать ему малое отклонение и рассмотреть действие возникающих при этом сил. При любом малом отклонении шара от положения A возникают силы, возвращающие его в первоначальное положение, и, следовательно, это положение равновесия устойчиво.

При малом отклонении шара от положения равновесия в точке B возникают силы, продолжающие отклонять шар от положения равновесия, которое в данном случае является неустойчивым.

Шар, расположенный на горизонтальной плоскости в точке C, находится в безразличном равновесии, так как при отклонениях его от точки C никакие дополнительные силы не возникают. Шар, расположенный в точке D, находится в полуустойчивом равновесии.

Устойчивость системы при бесконечно малых отклонениях называется устойчивостью в малом. Часто системы, устойчивые в малом, оказываются устойчивыми и при конечных достаточно больших отклонениях, т. е. система оказывается устойчивой в большом. Встречаются системы, устойчивые в малом, но неустойчивые в большом.

На рис. 5-1 шар, расположенный в точке A, не теряет устойчивости до тех пор, пока отклонения не переходят за точку B. Система устойчива в малом, но в большом она устойчива лишь в ограниченной области.

При исследовании систем автоматического регулирования рассматривают устойчивость в малом, т. е. поведение системы при

малых отклонениях регулируемой величины от установившегося значения.

В линейных системах устойчивость в малом обеспечивает устойчивость и в большом.

Нелинейная система, устойчивая в малом, может оказаться неустойчивой в большом и поэтому методы исследования устойчивости нелинейных систем существенно отличаются от методов исследования линейных систем.

Будем рассматривать линейные и линеаризованные системы. Русский ученый А. М. Ляпунов показал, что исследование устойчивости в малом с помощью линеаризованных уравнений дает точное решение задачи.

Свободное движение линейной системы автоматического регулирования, выведенной малым отклонением из состояния равновесия, описывается дифференциальным уравнением замкнутой системы (4-28)

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \bar{\varphi} = 0. \quad (5-1)$$

Система регулирования, описываемая таким уравнением, будет устойчива лишь в том случае, если все корни характеристического уравнения будут иметь отрицательные вещественные части.

Убедиться в правильности этого утверждения можно на основании следующих рассуждений. Предположим, что все корни характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (5-1), вещественны и различны и имеют значения $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Тогда решение уравнения (5-1) имеет вид

$$\varphi = A_0 + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}. \quad (5-2)$$

Если все корни отрицательны, то с течением времени все члены выражения (5-2), содержащие множитель $e^{p_i t}$, стремятся к нулю, а отклонение регулируемой величины φ стремится к постоянному значению A_0 или к нулю. Система устойчива.

Если хоть один из корней, например p_1 , положителен, то соответствующий член $C_1 e^{p_1 t}$ с течением времени неограниченно возрастает, неограниченно возрастает и отклонение регулируемой величины φ . Система неустойчива.

При комплексных сопряженных корнях в случае отрицательных вещественных частей отклонение регулируемой величины приходит к установившемуся значению с затухающими гармоническими колебаниями. Система устойчива.

При положительном значении вещественной части хотя бы одной пары корней отклонение регулируемой величины совершает колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Система неустойчива.

Если характеристическое уравнение линеаризованной системы, не имея положительных корней, имеет хотя бы один нулевой корень

или пару чисто мнимых сопряженных корней, то поведение реальной системы не может определяться ее линеаризованным уравнением. В этом случае отброшенные при линеаризации уравнения члены со второй и высшими производными существенно влияют на устойчивость системы.

Таким образом, анализ устойчивости систем автоматического регулирования сводится к чисто алгебраической задаче — определению знака вещественных частей корней характеристического уравнения.

Знаки вещественной части корней можно найти путем непосредственного решения характеристического уравнения. Однако просто решаются лишь уравнения второй степени. Уравнения третьей степени решаются аналитически чрезвычайно сложно. Уравнения более высоких степеней вообще не имеют аналитического решения и могут быть решены лишь приближенно.

Для облегчения исследования устойчивости были предложены так называемые критерии устойчивости.

Критерием устойчивости называется косвенный метод определения знаков вещественной части корней характеристического уравнения, не требующий решения этого уравнения.

Наиболее простым является условие устойчивости Стодолы, которое является необходимым, но недостаточным, однако оно позволяет по виду уравнения легко определить явно неустойчивую систему. Условие это формулируется следующим образом. Для того чтобы система была устойчивой, необходимо (но недостаточно), чтобы все коэффициенты характеристического уравнения имели одинаковые знаки.

Если знаки при коэффициентах разные, это свидетельствует о том, что уравнение содержит положительные корни, хотя оно может содержать их и при одинаковых знаках перед коэффициентами.

Все известные критерии делятся на две группы: алгебраические и частотные.

К алгебраическим относятся критерии Вышнеградского, Раута, Гурвица (в дальнейшем рассматривается только критерий Гурвица).

К частотным относятся критерии Михайлова, Найквиста, метод логарифмических частотных характеристик.

Особое место занимает выделение областей устойчивости. Следует помнить, что все критерии устойчивости устанавливают один факт: отрицательны вещественные части всех корней характеристического уравнения или нет. Применение того или иного критерия зависит от конкретных условий.

§ 5-2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА

Критерий устойчивости, предложенный в 1895 г. швейцарским математиком Гурвицем, получил широкое распространение благодаря своей относительной простоте. Приведем его без доказательства, отсылая желающих ознакомиться с доказательством к литера-

туре [26]. Критерий Гурвица формулируется следующим образом: чтобы корни характеристического уравнения системы автоматического регулирования

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

при $a_0 > 0$ имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы главный определитель и все его диагональные миноры были положительны.

Для составления главного определителя по главной диагонали выписывают все коэффициенты уравнения от a_1 до a_{n-1} в порядке возрастания индексов. Столбцы вверх от элементов диагонали дополняют коэффициентами того же уравнения с последовательно возрастающими индексами, вниз — с последовательно убывающими индексами. На место коэффициентов, индекс которых больше n и меньше нуля, проставляют нули.

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & \dots & a_n & 0 \\ 0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ . & . & \dots & a_{n-2} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (5-3)$$

Диагональные миноры имеют следующий вид:

$$\Delta_1 = a_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

и т. д.

Если все коэффициенты характеристического уравнения отрицательны, то их можно сделать положительными, умножив обе части уравнения на -1 .

Рассмотрим условия устойчивости для частных случаев.

Уравнение первого порядка

$$a_0 p + a_1 = 0.$$

Условия Гурвица

$$a_0 > 0; a_1 > 0.$$

Для того чтобы система, описываемая дифференциальным уравнением первого порядка, была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными.

Уравнение второго порядка

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

Условия Гурвица

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0.$$

Для того чтобы система, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными.

Уравнение третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Условия Гурвица

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Для того чтобы система, описываемая дифференциальным уравнением третьего порядка, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и определитель Δ_2 были положительны.

Уравнение четвертого порядка

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0.$$

Условия Гурвица

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_4 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Так как диагональный минор Δ_2 входит множителем в положительную часть определителя Δ_3 , то последний может быть положительным лишь при условии, что Δ_2 положителен. Для того чтобы система, описываемая дифференциальным уравнением четвертого

порядка, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и определитель Δ_3 были положительны.

Уравнение пятого порядка

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0.$$

Условия Гурвица

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0; \quad a_5 > 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 = \\ = \Delta_2(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1(a_1 a_4 - a_0 a_5) = \\ = a_3 \Delta_2 - a_1(a_1 a_4 - a_0 a_5) > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Из рассмотрения определителей следует, что если $\Delta_2 > 0$ и $\Delta_4 > 0$, то Δ_3 также положителен и его нет надобности вычислять.

Для того чтобы система, описываемая дифференциальным уравнением пятого порядка, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и определители Δ_2 и Δ_4 были положительны.

Пример. Проверим на устойчивость систему автоматического регулирования, описываемую уравнением (4-28), при следующих значениях параметров:

$$T_1 = 0,05 \text{ сек}; \quad T_2 = 0,10 \text{ сек}; \quad T_3 = 0,20 \text{ сек}; \quad T_4 = 1 \text{ сек};$$

$$k_1 = 2; \quad k_2 = 2; \quad k_3 = 1; \quad K = 4.$$

Вычисляем коэффициенты характеристического уравнения

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0,05 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 1 = 0,001 \text{ сек}^4; \\ a_1 &= 0,05 \cdot 0,1 \cdot 1 + 0,05 \cdot 0,2 \cdot 1 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 1 = 0,035 \text{ сек}^3; \\ a_2 &= 0,05 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 1 + 0,1 \cdot 1 + 0,2 \cdot 1 = 0,355 \text{ сек}^2; \\ a_3 &= 0,05 + 0,1 + 1 = 1,15 \text{ сек}; \\ a_4 &= 1 + 4 = 5. \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

Подставляем найденные коэффициенты в характеристическое уравнение

$$0,001 p^4 + 0,035 p^3 + 0,355 p^2 + 1,15 p + 5 = 0. \quad (5-5)$$

Все коэффициенты этого уравнения положительны, следовательно, одно условие Гурвица выполнено. Вторым условием для системы четвертого порядка является положительность определителя Δ_3 . Вычислим его.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0,035 & 1,15 & 0 \\ 0,001 & 0,355 & 5 \\ 0 & 0,035 & 1,15 \end{vmatrix} = 1,15 (0,035 \cdot 0,355 - 0,001 \cdot 1,15) - - 0,035^2 \cdot 5 = + 0,007.$$

Определитель Δ_3 положительный, следовательно, выполнено и второе условие Гурвица, т. е. система устойчива.

По выражению (4-47) найдем установившуюся погрешность системы на холостом ходу, учитывая, что $K = 4$.

$$\Delta\varphi = \frac{1}{K+1} \psi = \frac{1}{4+1} \psi = 0,2\psi \text{ или } 20\% \text{ от } \psi.$$

Найдем коэффициент усиления системы, при котором погрешность не будет превышать 2%, или 0,02, для чего воспользуемся выражением (4-48)

$$K = \frac{\psi - \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\psi - 0,02\psi}{0,02\psi} = \frac{1 - 0,02}{0,02} = 49;$$

$$a_4 = 1 + 49 = 50.$$

Вычисляя определитель Δ_3 при $a_4 = 50$, убеждаемся, что он отрицательный, т. е. система потеряла устойчивость.

§ 5-3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

В 1938 г. А. В. Михайлов опубликовал предложенный им частотный критерий устойчивости для исследования замкнутых линейных систем автоматического регулирования. Так же, как и критерий Гурвица, критерий А. В. Михайлова рассматривает характеристическое уравнение замкнутой системы.

Выведем этот критерий. Разделим характеристическое уравнение системы (5-1) на коэффициент при высшей производной

$$p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_{n-1} p + b_n = 0. \quad (5-6)$$

Это уравнение в общем случае имеет n комплексных корней

$$p_i = \alpha_i \pm j\omega_i. \quad (5-7)$$

Обозначая корни через $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, характеристическое уравнение (5-6) можно разложить на множители

$$(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) \dots (p - p_n) = 0, \quad (5-8)$$

где p — произвольное комплексное число.

Комплексное число может быть изображено на комплексной плоскости α, j вектором, выходящим из начала координат (рис. 5-2).

Длина вектора равна модулю комплексного числа, а угол, образуемый вектором с положительным направлением вещественной оси, — его аргументу, если вектор записан в показательной форме $p_1 = A_1 e^{j\theta}$. Координаты точки, лежащей в конце вектора, дают возможность записать его в форме (5-7)

$$p_1 = \alpha_1 \pm j\omega_1.$$

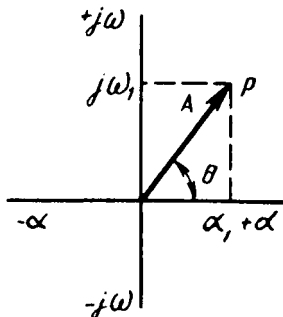


Рис. 5-2. Изображение числа на комплексной плоскости

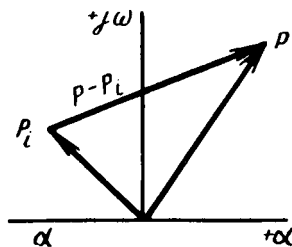


Рис. 5-3. Вычитание векторов

Множители $(p - p_i)$ выражения (5-8) представляют собой разность векторов, которая геометрически изображается вектором, проведенным из конца вычитаемого вектора p_i к началу уменьшаемого p (рис. 5-3). Так как вектор p — произвольное комплексное число, то оно может быть принято и чисто мнимым $p = j\omega$. Вектор, изображающий это число, совпадает с направлением мнимой оси. Множители, входящие в уравнение (5-8), будут иметь вид

$$j\omega - p_i. \quad (5-9)$$

При меняющейся величине ω разность (5-9) представляет семейство векторов, показанное на рис. 5-4.

Проследим за поворотом вектора $j\omega - p_i$ при изменении ω от 0 до ∞ . Начало этого вектора находится в неподвижной точке, соответствующей концу вектора p_i . Конец вектора будет скользить по мнимой оси от 0 до $+\infty$, а сам вектор будет поворачиваться вокруг конца вектора p_i в ту или иную сторону в зависимости от того, по какую сторону от мнимой оси расположен вектор p_i .

Если корень p_i вещественный отрицательный, то вектор разности $j\omega - p_i$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ повернется против часовой стрелки на угол $+\frac{\pi}{2}$. Если корень p_i вещественный положительный,

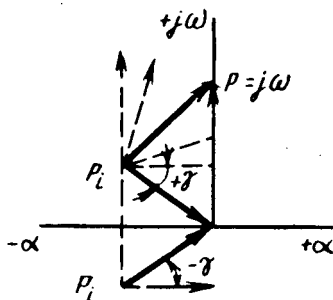


Рис. 5-4. Поворот вектора на комплексной полуплоскости

то вектор разности при тех же условиях повернется по часовой стрелке на угол $-\frac{\pi}{2}$. При комплексных сопряженных корнях с отрицательной вещественной частью углы поворота составят $\frac{\pi}{2} + \gamma$ и $\frac{\pi}{2} - \gamma$, при корнях с положительной вещественной частью $-\frac{\pi}{2} + \gamma$ и $-\frac{\pi}{2} - \gamma$.

Характеристическое уравнение (5-8) можно рассматривать как произведение векторов вида $j\omega - p_i$, представляющее собой новый вектор, модуль которого равен произведению модулей векторов множителей, а аргумент — сумме аргументов векторов множителей. При изменении ω от 0 до $+\infty$ угол поворота вектора произведения будет равен сумме углов поворота векторов множителей.

В устойчивой системе, в характеристическом уравнении которой все вещественные части корней отрицательны, суммарный угол поворота будет равен $n \frac{\pi}{2}$. Здесь n — число корней в уравнении. В случае сопряженных комплексных корней дополнительные углы $+\gamma$ и $-\gamma$ взаимно уничтожаются.

В неустойчивой системе, в характеристическом уравнении которой содержатся отрицательные и положительные вещественные части корней, суммарный угол поворота вектора произведения меньше $n \frac{\pi}{2}$.

При практическом исследовании устойчивости этим методом значения корней знать не требуется. Не нужно и приводить характеристическое уравнение (5-1) к виду (5-6). Произведение всех векторов вида $j\omega - p_i$ может быть получено непосредственно из характеристического уравнения (5-1) подстановкой в него $j\omega$ вместо p , в результате чего получается комплексная функция

$$F(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n. \quad (5-10)$$

Отделив в этом выражении вещественную часть от мнимой, получим

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \\ Q(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (5-11)$$

Задавая ряд значений ω в пределах от 0 до $+\infty$, получим ряд значений $P(\omega)$ и $Q(\omega)$, которые являются координатами конца вектора $F(j\omega)$ на комплексной плоскости для каждого значения ω . Если соединить плавной кривой все полученные точки, то получим характеристическую кривую или годограф Михайлова. При изменении ω от 0 до $+\infty$ вектор $F(j\omega)$ будет перемещаться своим концом по годографу, поворачиваясь на некоторый угол.

В случае устойчивой системы, когда угол поворота вектора равен $n \frac{\pi}{2}$, годограф пройдет через n квадрантов комплексной плоскости, не проходя через начало координат (рис. 5-5, кривая I).

Если система неустойчива, то общий угол поворота вектора будет меньше $n \frac{\pi}{2}$ и годограф не пройдет через n квадрантов (рис. 5-5, кривая 2).

Годограф Михайлова позволяет также судить о запасе устойчивости по соотношению отрезков OA и OB , отсекаемых годографом на вещественной оси. Если OB достаточно велик по сравнению с OA , система обладает значительным запасом устойчивости. С уменьшением отрезка OB запас устойчивости снижается. Точка A является начальной точкой годографа при $\omega = 0$, ее абсцисса численно равна свободному члену характеристического уравнения (5-10).

Чтобы найти абсциссу точки B , определяют значения ω , обращающие в нуль выражение для мнимой части $Q(\omega)$ в уравнениях (5-11), а затем подставляют их в выражение для вещественной части и вычисляют значения $P(\omega)$. Найденные значения $P(\omega)$ являются абсциссами точек пересечения годографа Михайлова с вещественной осью. Наименьшее отрицательное значение представляет абсциссу точки B .

При увеличении общего коэффициента усиления системы годограф Михайлова, не меняя своей формы, смещается вправо и при некотором критическом значении коэффициента усиления $K_{кр}$ пройдет через начало координат. Система в этом случае будет находиться на грани устойчивости. При дальнейшем увеличении коэффициента усиления годограф сместится вправо и будет проходить через число квадрантов, меньшее порядка дифференциального уравнения. Система станет неустойчивой.

Чтобы найти критический коэффициент усиления, необходимо решить уравнения (5-11) при $P(\omega) = 0$ и $Q(\omega) = 0$. Для этого находят значения ω , обращающие $Q(\omega)$ в нуль, и, подставляя их в уравнение вещественной части при $P(\omega) = 0$, находят значение a_n .

Если система регулирования статическая, то

$$a_n = K_{кр} + 1,$$

откуда $K_{кр} = a_n - 1$.

Если система регулирования астатическая, то

$$a_n = K_{кр}.$$

Пример. Проверим на устойчивость с помощью критерия Михайлова систему с характеристическим уравнением четвертого порядка (5-5).

Подставим в уравнение вместо p мнимое число $j\omega$

$$F(j\omega) = 0,001\omega^4 - 0,035j\omega^3 - 0,355\omega^2 + 1,15j\omega + 5.$$

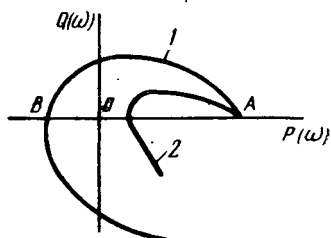


Рис. 5-5. Годограф Михайлова:

1 — устойчивой системы четвертого порядка; 2 — неустойчивой системы четвертого порядка

Отделим вещественную и мнимую части

$$P(\omega) = 5 - 0,355\omega^2 + 0,001\omega^4;$$

$$Q(\omega) = 1,15\omega - 0,035\omega^3.$$

Подставляя различные значения ω , получаем координаты точек годографа (табл. 5-1) и наносим эти точки в примерном масштабе на комплексной плоскости $P(\omega)$, $Q(\omega)$. Соединив их плавной кривой (рис. 5-5, кривая I), убеждаемся, что годограф Михайлова проходит через четыре квадранта, следовательно, данная система устойчива.

Определим запас устойчивости системы. Для этого найдем значения ω , при которых $Q(\omega) = 0$,

$$Q(\omega) = 1,15\omega - 0,035\omega^3 = \omega(1,15 - 0,035\omega^2) = 0,$$

откуда

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1,15}{0,035}} = \pm 5,73.$$

Т а б л и ц а 5-1

ω	0	1	3	5	6	∞
$P(\omega)$	+5	+4,68	+2,17	-2,88	-5	$+\infty$
$Q(\omega)$	0	+1,12	+2,51	+1,37	-0,64	$-\infty$

Подставив $\omega_{2,3}$ в вещественную часть уравнения, определим величину отрезка OB (см. рис. 5-5)

$$P(\omega) = 5 - 0,355(5,73)^2 + 0,001(5,73)^4 = -5,4.$$

Таким образом, отрезок $OB = 5,4$ составляет от отрезка $OA = 5$

$$\frac{5,4 \cdot 100}{5} = 108\%,$$

следовательно, система обладает значительным запасом устойчивости.

Найдем критический коэффициент усиления, при котором система будет находиться на границе устойчивости. Приравняем вещественную и мнимую части уравнения нулю и найдем значение свободного члена a_n

$$a_n - 0,355\omega^2 + 0,001\omega^4 = 0;$$

$$1,15\omega - 0,035\omega^3 = 0.$$

Значения ω из второго уравнения найдены выше. Подставив их в первое уравнение, получим

$$a_n = 0,355 (5,73)^2 - 0,001 (5,73)^4 = 10,4.$$

Очевидно, что a_n равно сумме отрезков OA и OB .

Рассматриваемая система статическая, поэтому

$$K_{кр} = a_n - 1 = 10,4 - 1 = 9,4.$$

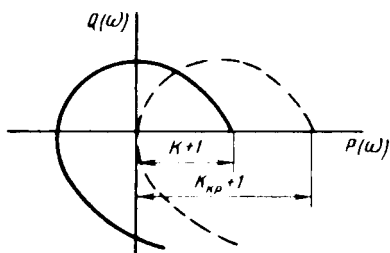


Рис. 5-6. Критический коэффициент усиления

Следовательно, при значениях коэффициента усиления, превосходящих 9,4, система теряет устойчивость. Вид годографа Михайлова для системы, находящейся на границе устойчивости, показан на рис. 5-6.

§ 5-4. АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

В 1932 г. Найквист предложил для исследования радиотехнических усилителей, а затем А. В. Михайлов в 1938 г. распространил на исследование систем автоматического регулирования частотный амплитудно-фазовый критерий, который позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы.

В § 2-3 описан простой способ получения уравнения амплитудно-фазовой характеристики из передаточной функции. В § 4-3 изложен способ получения передаточной функции разомкнутой системы из передаточных функций составляющих ее звеньев.

Таким образом, если имеется структурная схема системы автоматического регулирования и передаточные функции типовых звеньев, из которых состоит эта структурная схема, то, пользуясь теоремами, изложенными в § 4-3, можно получить передаточную функцию разомкнутой системы. Заменяя в этой функции оператор p мнимым оператором $j\omega$, получим уравнение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, по которому может быть построена на комплексной плоскости амплитудно-фазовая характеристика.

Амплитудно-фазовый критерий устойчивости формулируется следующим образом: если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой устойчивой системы не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$ на комплексной плоскости, то замкнутая система устойчива.

Амплитудно-фазовый критерий в приведенной формулировке справедлив лишь тогда, когда разомкнутая система устойчива, а в уравнении амплитудно-фазовой характеристики степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя.

Разомкнутая система устойчива в том случае, если она состоит из устойчивых звеньев — аperiodических, устойчивых колебательных, включает не более одного интегрирующего звена. Это устанавливается непосредственным рассмотрением звеньев, входящих в структурную схему.

Определить, охватывает ли амплитудно-фазовая характеристика точку с координатами $(-1, j0)$, можно следующим образом. Проведем из точки $(-1, j0)$ вспомогательный вектор AB к амплитудно-фазовой характеристике (рис. 5-7). При изменении ω от 0 до $+\infty$ конец B этого вектора скользит по амплитудно-фазовой характеристике, а весь вектор AB поворачивается вокруг точки A на некоторый угол. Если суммарный угол поворота вектора AB

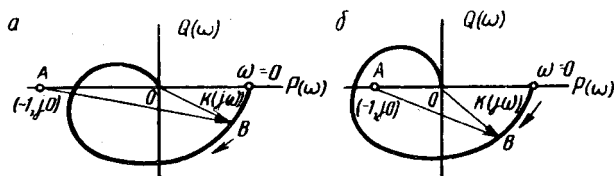


Рис. 5-7. Амплитудно-фазовые характеристики статических систем:

а — устойчивой; б — неустойчивой

при изменении ω от 0 до $+\infty$ равен нулю, то характеристика не охватывает точку $A (-1, j0)$ и система устойчива (рис. 5-7, а). Если этот угол поворота не равен нулю, то характеристика охватывает точку $A (-1, j0)$ и система неустойчива (рис. 5-7, б).

Передаточная функция астатических систем благодаря наличию интегрирующего звена имеет множитель $\frac{1}{p}$, а в уравнении амплитудно-фазовой характеристики появляется соответственно множитель $\frac{1}{j\omega}$. При $\omega \rightarrow 0$ амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы уходит в бесконечность (кривая ON_1M_1 на рис. 5-8). Чтобы судить, охватывает ли эта кривая точку $A(-1, j0)$, строят вспомогательную кривую ON_1N_2 , являющуюся зеркальным отображением амплитудно-фазовой характеристики, и проводят дугу бесконечно большого радиуса с центром в начале координат, соединяя характеристику ON_1N_2 с характеристикой ON_1M_1 . Если теперь пойти концом вектора AB по полученной замкнутой кривой, то суммарный угол поворота его вокруг точки A определяет, устойчива или нет замкнутая система. Если этот угол равен нулю (рис. 5-8, а), система устойчива. На рис. 5-8, б суммарный угол поворота вектора AB равен 4π , следовательно, замкнутая система неустойчива.

При увеличении коэффициента усиления разомкнутой системы амплитудно-фазовая характеристика, не меняя своей формы, «расширяется», т. е. расстояние каждой точки характеристики от начала

координат увеличивается в одинаковое число раз. Это свойство амплитудно-фазовых характеристик дает возможность в некоторых сложных случаях правильно выбрать параметры системы, что трудно сделать с помощью других критериев устойчивости.

Физическое толкование амплитудно-фазового критерия для простой одноконтурной системы вытекает из определения амплитудно-фазовой характеристики. Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой огибающую векторов, длина которых равна отношению амплитуд выходного и входного сигналов разомкнутой системы, а угол, образованный вектором с положительным направлением вещественной оси, представляет сдвиг фаз этих сигналов.

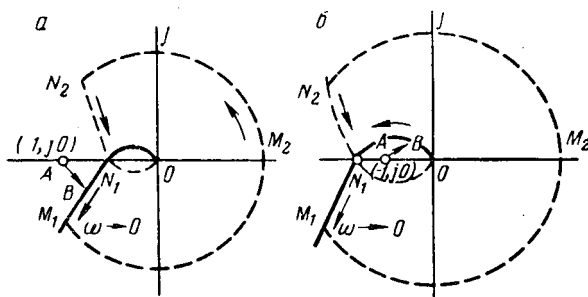


Рис. 5-8. Амплитудно-фазовые характеристики астатических систем:

а — устойчивой; б — неустойчивой

В точке пересечения амплитудно-фазовой характеристикой отрицательной части вещественной оси сдвиг фаз равен 180° и, следовательно, выходной сигнал находится в противофазе с входным. Если точка пересечения характеристики с вещественной осью находится между $-\infty$ и точкой $(-1, j0)$, это значит, что отношение выходной амплитуды к входной больше единицы, т. е., что коэффициент усиления системы при данной частоте больше единицы. При подаче на вход возмущающего сигнала амплитуда выходного сигнала будет больше амплитуды входного сигнала. При замыкании такой системы в ней будут происходить свободные колебания с возрастающей амплитудой и с частотой, соответствующей точке пересечения характеристики с вещественной осью.

Если точка пересечения характеристики с вещественной осью находится между началом координат и точкой $(-1, j0)$, то коэффициент усиления системы при этой частоте меньше единицы и при замыкании системы свободные колебания в ней будут затухать.

В многоконтурных системах формулировка и физическое толкование амплитудно-фазового критерия сложнее.

Рассмотрим случай, когда амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой устойчивой системы имеет вид, приведенный на рис. 5-9.

При изменении коэффициента усиления не обязательно чертить каждый раз новые кривые, достаточно менять масштаб чертежа. Если коэффициент усиления достаточно мал, то точка с координатами $(-1, j0)$ занимает положение A_1 , система устойчива. При увеличении коэффициента усиления точка $(-1, j0)$ перемещается вправо. Когда она займет положение A_2 , то замкнутая система окажется на границе устойчивости. При дальнейшем увеличении коэффициента усиления система последовательно становится неустойчивой (положение A_3), устойчивой (положение A_5) и снова неустойчивой (положение A_7). Когда точка $(-1, j0)$ занимает положения A_4 и A_6 , система находится на границе устойчивости.

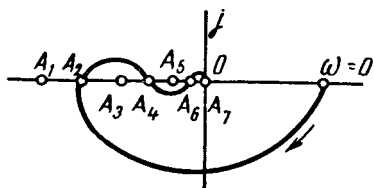


Рис. 5-9. Амплитудно-фазовая характеристика особого вида

Амплитудно-фазовый критерий приведен здесь без доказательства. Желющие могут ознакомиться с доказательством по литературным источникам [24, 28, 42].

Этот критерий следует применять для систем, не имеющих перекрестных обратных связей, когда размыкание системы существенно упрощает исследование.

Возможно также исследование на устойчивость систем и в тех случаях, когда разомкнутая система неустойчива, однако оно оказывается достаточно сложным.

Пример. Произведем с помощью амплитудно-фазового критерия исследование на устойчивость системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 4-1. Выражение (4-19) представляет собой передаточную функцию этой системы в разомкнутом состоянии. Раскрыв скобки в знаменателе, произведя умножение и приведение подобных членов, получим

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{K}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + 1}. \quad (5-12)$$

Обозначения приведены в (4-29).

Подставив в выражение (5-12) значения постоянных коэффициентов из (5-4), получим

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{4}{0,001p^4 + 0,035p^3 + 0,355p^2 + 1,15p + 1}. \quad (5-13)$$

Чтобы получить уравнение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, заменим в выражении (5-13) p на $j\omega$

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = \frac{4}{0,001\omega^4 - 0,035j\omega^3 - 0,355\omega^2 + 1,15j\omega + 1}. \quad (5-14)$$

Умножим числитель и знаменатель выражения (5-14) на комплексное число, сопряженное знаменателю, и отделим вещественную и мнимую части

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = \frac{0,004\omega^4 - 1,26\omega^2 + 4}{10^{-6}\omega^8 + 0,0006\omega^6 + 0,021\omega^4 + 0,69\omega^2 + 1} + j \frac{0,14\omega^3 - 4,6\omega}{10^{-6}\omega^8 + 0,0006\omega^6 + 0,021\omega^4 + 0,69\omega^2 + 1} = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (5-15)$$

Таблица 5-2

ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$	ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
0	4,000	0,000	5	-0,610	-0,135
0,1	3,987	-0,460	7	-0,310	+0,102
0,2	3,850	-0,895	10	-0,093	0,107
0,5	3,130	-1,950	20	+0,003	0,025
0,7	2,520	-2,370	30	0,002	0,008
1	1,580	-2,610	50	0,000	0,002
2	-0,237	-1,970	70	0,000	0,001
3	-0,747	-1,067	100	0,000	0,000

Подставляя в выражение (5-15) различные значения ω в пределах от 0 до $+\infty$, вычисляем значения вещественной части $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$. Результаты вычислений сведены в табл. 5-2, по которой на рис. 5-10 построена амплитудно-фазовая характеристика.

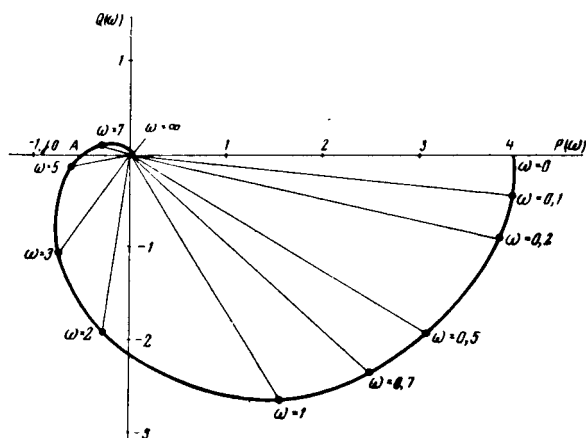


Рис. 5-10. Амплитудно-фазовая характеристика к примеру

Эта характеристика не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$ и, следовательно, система устойчива, что согласуется с результатами, полученными с помощью других критериев устойчивости.

Найдем критический коэффициент усиления, при котором амплитудно-фазовая характеристика проходит через точку $(-1, j0)$. Для этого изменим масштаб чертежа (рис. 5-10) и за единицу примем расстояние от начала координат до точки A пересечения характеристики с вещественной осью.

Разделив отрезок от начала координат до точки, в которой начинается характеристика при $\omega = 0$, на длину новой единицы, найдем $K_{кр} = 8$, что также согласуется с результатом, полученным

с помощью критерия Михайлова. Точного совпадения обычно не получается, так как при графических построениях некоторые ошибки неизбежны. Однако эти ошибки не выходят за пределы ошибок, допускаемых при линеаризации, и поэтому вполне допустимы.

§ 5-5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Построение частотных характеристик в комплексной плоскости требует трудоемких вычислений, особенно в тех случаях, когда знаменатель передаточной функции является многочленом высокой степени. Поэтому в ряде случаев предпочитают пользоваться логарифмическими частотными характеристиками.

Чтобы исследовать систему с помощью логарифмических частотных характеристик, необходимо построить логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики разомкнутой системы.

Построение логарифмических частотных характеристик типовых звеньев, на которые расчленяется система автоматического регулирования, рассмотрено в главе 3. При построении характеристик системы используется тот же метод.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы представляет собой произведение уравнений амплитудно-фазовых характеристик составляющих ее звеньев. Для каждой фиксированной частоты эти уравнения представляют собой уравнения векторов соответственно разомкнутой системы и звеньев, ее составляющих. Таким образом, вектор, соответствующий разомкнутой системе, представляет собой произведение векторов составляющих ее звеньев.

Модуль вектора произведения (амплитуда) равен произведению модулей (амплитуд) векторов сомножителей. Угол вектора произведения с осью абсцисс (фаза) равен сумме соответствующих углов (фаз) векторов сомножителей. Эти положения позволяют сравнительно просто без сложных вычислений построить логарифмические частотные характеристики по известным характеристикам звеньев.

При построении логарифмической амплитудной частотной характеристики по оси ординат откладывается логарифм произведения амплитуд, который равен сумме логарифмов сомножителей. Поэтому логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы может быть получена графическим сложением соответствующих характеристик звеньев.

Пример. Построить логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 4-1.

Выпишем передаточные функции звеньев системы (4-4), (4-7), (4-10)

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1};$$

$$W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1}.$$

Значения постоянных принимаем те же, что и в предыдущих примерах, т. е. $T_1 = 0,05 \text{ сек}$; $T_2 = 0,10 \text{ сек}$; $T_3 = 0,20 \text{ сек}$; $T_4 = 1,0 \text{ сек}$; $k_1 = 2$; $k_2 = 2$; $k_3 = 1$.

Пользуясь выражением (3-20) и подставляя в него численные значения постоянных, получим уравнения логарифмических амплитудно-частотных характеристик первых двух аperiодических звеньев

$$L_1(\omega) = 20 \lg 2 - 20 \lg 0,05 \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{(0,05)^2}}; \quad (5-16)$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg 2 - 20 \lg 0,1 \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{(0,1)^2}}. \quad (5-17)$$

Приближенная логарифмическая амплитудная частотная характеристика первого звена представляет собой при частотах $\omega < \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,05} = 20 \frac{1}{\text{сек}}$ прямую, параллельную оси абсцисс и отстоящую от нее на расстоянии $20 \lg 2$. При частотах $\omega > 20$ это будет наклонная прямая с углом наклона -20 дБ/дек (ломаная 1 на рис. 5-11).

Для второго звена при частотах $\omega < \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,1} = 10 \frac{1}{\text{сек}}$ амплитудная характеристика представляет также прямую, параллельную оси абсцисс и отстоящую от нее на расстоянии $20 \lg 2$, а при частотах $\omega > 10$ — наклонную прямую с уклоном -20 дБ/дек (линия 2 на рис. 5-11).

Пользуясь выражением (3-47) и вычислив предварительно

$$\omega_0^2 = \frac{1}{T_3 T_4} = \frac{1}{0,2 \cdot 1} = 5; \quad \omega_0 = 2,24;$$

$$2\xi = \sqrt{\frac{T_4}{T_3}} = \sqrt{\frac{1}{0,2}} = 2,24; \quad \xi = \frac{2,24}{2} = 1,12,$$

получим уравнение логарифмической амплитудной частотной характеристики третьего звена

$$L_3(\omega) = 20 \lg 1 + 20 \lg 5 - 20 \lg \sqrt{(5 - \omega^2)^2 + (5\omega)^2}. \quad (5-18)$$

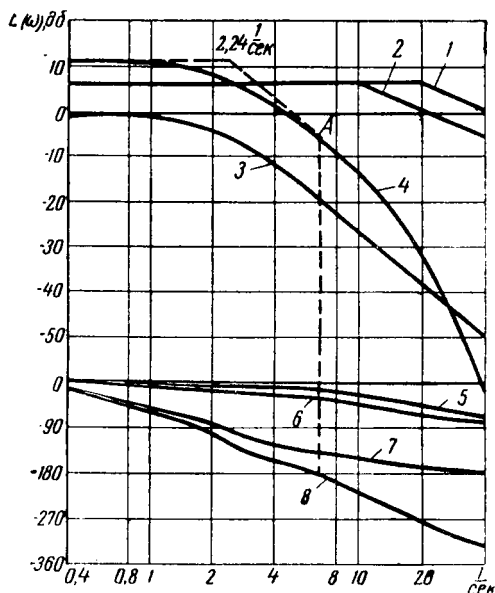


Рис. 5-11. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы

Приближенная логарифмическая амплитудная частотная характеристика, построенная по этому уравнению, представляет ломаную 1 на рис. 3-9. Однако погрешность при значении $\xi = 1,12$ будет чрезмерно велика и поэтому приближенной характеристикой воспользоваться нельзя. Используем кривую при ближайшем значении $\xi = 1,0$. Перенесем ее на рис. 5-11 (кривая 3), умножив предварительно значения абсцисс на ω_0 , поскольку на рис. 5-11 по оси абсцисс откладывается абсолютное значение частоты. Например, точке характеристики с абсциссой 0,2 (на рис. 3-9) будет соответствовать точка с абсциссой $\omega = 0,2 \omega_0 = 0,2 \cdot 2,24 = 0,448$ 1/сек (на рис. 5-11).

Суммарная характеристика разомкнутой системы, полученная алгебраическим сложением ординат характеристик звеньев, изображена линией 4.

Приближенную логарифмическую амплитудную частотную характеристику системы можно построить по ее передаточной функции, если она представлена как произведение передаточных функций звеньев.

В данном примере передаточная функция разомкнутой системы выражается уравнением (4-19)

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1)}.$$

Определим частоты сопряжения

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,05} = 20 \frac{1}{\text{сек}}; \quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,1} = 10 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$\sqrt{\frac{1}{T_3 T_4}} = \sqrt{\frac{1}{0,2 \cdot 1}} = 2,24 \frac{1}{\text{сек}}$$

и откладываем их на оси абсцисс (рис. 5-11). Так как в системе имеются только апериодические и колебательные звенья, то характеристика начинается горизонтальной линией, отстоящей от оси абсцисс на расстоянии $20 \lg k_1 k_2 k_3 = 20 \lg 4 = 12$ дБ и заканчивающейся в точке, соответствующей наименьшей сопрягающей частоте $2,24 \frac{1}{\text{сек}}$, при которой имеет место излом характеристики колебательного звена. Далее характеристика вычерчивается прямой с наклоном -40 дБ/сек до следующей сопрягающей частоты $10 \frac{1}{\text{сек}}$, при которой изламывается характеристика второго апериодического звена. Поэтому наклон характеристики увеличивается на -20 дБ/дек и дальше она идет с наклоном -60 дБ/дек до следующей сопрягающей частоты $20 \frac{1}{\text{сек}}$, после которой получает наклон -80 дБ/дек.

На рис. 5-11 пунктирной линией показано начало приближенной характеристики, которая после частоты 6—8 1/сек практически совпадает с построенной ранее характеристикой 4.

Уравнения логарифмических фазовых частотных характеристик апериодических звеньев получаем, подставляя в выражение (3-19) численные значения соответствующих постоянных времени

$$\theta_1(\omega) = -\operatorname{arctg} 0,05\omega; \quad (5-19)$$

$$\theta_2(\omega) = -\operatorname{arctg} 0,1\omega. \quad (5-20)$$

Подставляя в эти выражения различные значения ω , строим по точкам фазовые характеристики (кривые 5 и 6 на рис. 5-11).

Логарифмическую фазовую частотную характеристику колебательного звена можно построить по выражению (3-46), подставляя в него найденные выше значения ξ и ω_0 .

Однако проще воспользоваться кривыми, изображенными на рис. 3-10, и перенести характеристику для ближайшего значения $\xi = 1$ на рис. 5-11 (кривая 7), выразив предварительно частоту по оси абсцисс в абсолютных величинах, т. е. так же, как при переносе амплитудной характеристики.

Суммарная фазовая характеристика разомкнутой системы, полученная алгебраическим сложением ординат фазовых характеристик звеньев, изображена кривой 8.

Критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам может быть сформулирован следующим образом: замкнутая система автоматического регулирования устойчива, если логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы пересекает ось абсцисс при частоте, меньшей частоты, при которой логарифмическая фазовая частотная характеристика пересекает линию $\theta = -180^\circ$.

Этот критерий полностью совпадает с амплитудно-фазовым критерием. Действительно, логарифмическая амплитудная характеристика пересекает ось абсцисс тогда, когда отношение выходной амплитуды к входной равно единице. Если это произойдет раньше, чем сдвиг фаз между входной и выходной величинами станет равным -180° , то при дальнейшем увеличении частоты отношение выходной амплитуды к входной станет меньше единицы и будет оставаться меньше единицы при сдвиге фаз -180° . Это соответствует прохождению амплитудно-фазовой характеристики через вещественную ось между началом координат и точкой $(-1, j\omega)$.

Логарифмические частотные характеристики, изображенные на рис. 5-11, соответствуют устойчивой системе. При увеличении коэффициента усиления системы, что равносильно перемещению оси абсцисс вниз, запас устойчивости понижается и, когда эта ось пересечет амплитудную характеристику в точке А, система будет находиться на границе устойчивости. При дальнейшем увеличении коэффициента усиления система теряет устойчивость.

Подчеркиваем, что критерий устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам достаточно очевиден и прост при одно-контурных системах. В случае более сложных систем, когда фазовая

характеристика пересекает линию $\theta = -180^\circ$ более одного раза, этот критерий формулируется следующим образом: замкнутая система автоматического регулирования устойчива, если разность чисел переходов логарифмической фазовой частотной характеристики разомкнутой системы линий $\theta = -\pi$, $\theta = -3\pi$ сверху вниз и снизу вверх во всех частях графика, в которых логарифмическая амплитудная частотная характеристика проходит выше оси абсцисс, равна половине числа корней характеристического уравнения разомкнутой системы, расположенных справа от мнимой оси.

§ 5-6. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ

Все рассмотренные критерии устойчивости дают возможность определить факт устойчивости или неустойчивости системы и с этой точки зрения они равноценны. Однако различные критерии устойчивости позволяют получить различные дополнительные сведения о характере устойчивости. Данные, полученные при исследовании устойчивости некоторыми критериями, могут быть использованы при дальнейших исследованиях.

Критерий Гурвица позволяет определить только факт устойчивости; он не дает возможности судить о времени затухания колебаний и о том, насколько далеко система находится от границы устойчивости. Кроме того, для использования критерия Гурвица необходимо иметь аналитические уравнения всех звеньев системы; экспериментальные характеристики использовать нельзя. Сложность вычислительной работы резко возрастает с повышением порядка дифференциального уравнения. Для уравнений до четвертого порядка критерий Гурвица дает возможность выяснить влияние на устойчивость системы отдельных ее параметров. При уравнениях порядка выше четвертого такая возможность практически отсутствует. В литературе [42] описан способ исследования влияния параметров системы и для уравнений более высокого порядка, однако он требует выполнения очень сложных вычислений.

С помощью критерия Гурвица можно исследовать на устойчивость только линейные системы с сосредоточенными параметрами без запаздывания.

Критерий Гурвица обычно применяется для определения устойчивости систем не выше четвертого порядка, что выполняется достаточно просто. Результаты вычислений, полученные при использовании этого критерия, в дальнейших исследованиях системы использовать нельзя.

Частотный критерий устойчивости Михайлова обладает всеми перечисленными выше недостатками критерия Гурвица. Дополнительным его недостатком является то, что определить влияние параметров системы на ее устойчивость практически невозможно.

Достоинством критерия Михайлова является возможность сравнительно просто найти критический коэффициент усиления и запас устойчивости по коэффициенту усиления.

С помощью критерия Михайлова можно исследовать на устойчивость линейные системы с сосредоточенными параметрами без запаздывания. Результаты вычислений при дальнейших исследованиях системы использовать нельзя. Широкого распространения в проектно-исследовательской практике критерий Михайлова не получил.

Наиболее широкое применение получили амплитудно-фазовый критерий устойчивости Найквиста и определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам. Это объясняется тем, что частотные характеристики, по которым производится анализ устойчивости, могут быть использованы при исследовании качества переходных процессов и при синтезе корректирующих устройств.

Критерий Найквиста может быть также использован при исследовании устойчивости систем с запаздыванием и при исследовании нелинейных систем методом гармонической линеаризации.

Критерий устойчивости по приближенным логарифмическим частотным характеристикам является значительно менее трудоемким, чем другие критерии.

Оба критерия могут быть использованы и в том случае, когда частотные характеристики отдельных элементов получены экспериментально и отсутствуют их аналитические выражения. С помощью этих критериев можно найти критический коэффициент усиления и запас устойчивости по амплитуде и по фазе.

Таким образом, критерий Найквиста и определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам обладают наиболее широкими возможностями.

§ 5-7. ВЫДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ

С помощью рассмотренных выше критериев устойчивости можно определить, устойчива ли система автоматического регулирования с заданными параметрами. Однако критерии не дают возможности определить, в каких пределах можно менять тот или иной параметр или два параметра одновременно, чтобы система оставалась устойчивой. Это можно сказать с помощью некоторых критериев устойчивости лишь по отношению к коэффициенту усиления.

Впервые вопросом выделения областей устойчивости занялся И. А. Вышнеградский. Он решил эту задачу применительно к системам, описываемым дифференциальными уравнениями третьего порядка.

В 1947 г. Ю. И. Неймарк разработал метод выделения областей устойчивости линеаризованных систем по одному комплексному или по двум вещественным параметрам для систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка. Этот метод получил название Д-разбиения.

Идея Д-разбиения заключается в следующем. Пусть задано характеристическое уравнение системы автоматического регулирова-

ния, в котором все коэффициенты, кроме двух (например, a_0 и a_n), известны и неизменны.

$$a_0 p^n + 2p^{n-1} + \dots + 8p + a_n = 0. \quad (5-21)$$

Допустим, что при некоторых значениях a_0 и a_n часть корней числом m лежит в правой комплексной полуплоскости, а другая часть числом $n-m$ лежит в левой комплексной полуплоскости. На рис. 5-12 общее число корней $n=7$, $m=2$, $n-m=5$.

Известно, что между коэффициентами алгебраического уравнения и распределением его корней на комплексной плоскости существует непрерывная зависимость. При изменении значений коэффициентов уравнения положение корней на плоскости меняется. Последовательным изменением коэффициентов можно добиться того, что один из вещественных корней или два сопряженных комплексных корня попадут на мнимую ось, а затем перейдут в другую полуплоскость и, таким образом, произойдет изменение распределения корней между полуплоскостями. Изменяя значения коэффициентов a_0 и a_n , можно добиться, чтобы все корни переместились в левую комплексную полуплоскость и система стала устойчивой.

Рис. 5-12. Распределение корней на комплексной плоскости

Однако изменения коэффициентов всегда можно произвести в таких пределах, что корни, перемещаясь, будут оставаться в той же полуплоскости и, таким образом, распределение корней останется прежним. На плоскости коэффициентов a_0 и a_n можно выделить область значений этих коэффициентов, при которых все корни будут находиться в левой комплексной полуплоскости и система будет оставаться устойчивой. Это и будет область устойчивости. При значениях коэффициентов, выходящих за пределы этой области, система теряет устойчивость. Границей области устойчивости являются значения коэффициентов, при которых хотя бы один корень находится на мнимой оси.

Таким образом, границей устойчивости является отображение мнимой оси комплексной плоскости на плоскости коэффициентов. На рис. 5-13 в плоскости коэффициентов выделена область, в которой $m=0$, (т. е. корни в правой полуплоскости отсутствуют), являющаяся областью устойчивости.

Уяснив идею Д-разбиения, перейдем к рассмотрению правил выделения областей устойчивости по одному параметру (комплексному или вещественному, который является частным случаем комплексного) и по двум вещественным параметрам.

Д-разбиение плоскости одного параметра. Пусть какой-либо параметр B (например, постоянная времени) входит линейно (в первой

степени) в несколько коэффициентов характеристического уравнения, которое в этом случае можно записать в виде

$$F_1(p) + BF_2(p) = 0. \quad (5-22)$$

Считаем параметр B переменным. Обычно он выражается рядом вещественных чисел. Можно считать эти числа комплексными, имеющими свою плоскость, на которую отображается мнимая ось плоскости корней. Из выражения (5-22) получим

$$B = -\frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \quad (5-23)$$

Чтобы получить значения параметра B , при которых хотя бы один корень находился на мнимой оси, в выражении (5-23) оператор p

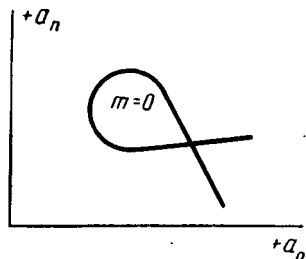


Рис. 5-13. Пример Д-разбиения плоскости параметров

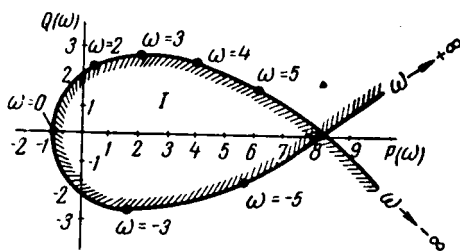


Рис. 5-14. Д-разбиение плоскости одного параметра

заменяем мнимым числом $j\omega$ и отделяем в полученном комплексном числе вещественную и мнимую части

$$B = -\frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (5-24)$$

Чтобы получить все возможные значения параметра B , соответствующие всем возможным мнимым корням, задаем в выражении (5-24) значения ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, вычисляем соответствующие значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ и строим в этих координатах линию, которая является отображением мнимой оси плоскости корней на комплексную плоскость параметра B или, иначе, границей Д-разбиения по параметру B (рис. 5-14).

В устойчивой системе все корни находятся слева от мнимой оси, если двигаться в направлении от $-\infty$ к $+\infty$. Поскольку линия Д-разбиения является отображением мнимой оси, то область устойчивости также будет находиться слева от этой линии, если двигаться по ней в направлении от значения $\omega = -\infty$ к значению $\omega = +\infty$. Чтобы выявить область устойчивости, на линию Д-разбиения наносится штриховка слева при указанном перемещении от $-\infty$ к $+\infty$. Область, внутрь которой направлено больше штриховки, возможно является областью устойчивости. На рис. 5-14 — это область I .

С помощью любого критерия устойчивости проверяется устойчивость системы для любой точки вещественной оси, лежащей в интересующей нас области. Если система устойчива для этой точки, значит данная область является областью устойчивости. Может случиться, что область устойчивости отсутствует. Следовательно, система неустойчива при любом значении рассматриваемого параметра.

Д-разбиение плоскости двух вещественных параметров. Возможны два случая: 1) параметры входят в уравнение линейно; 2) параметры входят в уравнение нелинейно.

Параметры, входящие в характеристическое уравнение линейно, не перемножаются между собой и не имеют степени выше первой. Обычно такими параметрами являются коэффициент усиления и одна из постоянных времени.

Параметры, входящие в характеристическое уравнение нелинейно, перемножаются друг с другом. Обычно такими параметрами являются постоянные времени.

В случае, когда два параметра B и B входят линейно, выделяя эти параметры, характеристическое уравнение системы можно представить в виде

$$BM(p) + BN(p) + L(p) = 0. \quad (5-25)$$

Заменяя p на $j\omega$ и отделяя вещественную часть от мнимой, получаем

$$BM(j\omega) + BN(j\omega) + L(j\omega) = B[M_1(\omega) + jM_2(\omega)] + \\ + B[N_1(\omega) + jN_2(\omega)] + [L_1(\omega) + jL_2(\omega)] = 0, \quad (5-26)$$

откуда

$$P(\omega) = BM_1(\omega) + BN_1(\omega) + L_1(\omega) = 0; \\ Q(\omega) = BM_2(\omega) + BN_2(\omega) + L_2(\omega) = 0. \quad (5-27)$$

Чтобы найти точки границы Д-разбиения, решим уравнения (5-27) относительно B и B :

$$B = \frac{\begin{vmatrix} -L_1(\omega) & N_1(\omega) \\ -L_2(\omega) & N_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_1(\omega) & N_1(\omega) \\ M_2(\omega) & N_2(\omega) \end{vmatrix}}; \quad B = \frac{\begin{vmatrix} M_1(\omega) - L_1(\omega) \\ M_2(\omega) - L_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_1(\omega) & N_1(\omega) \\ M_2(\omega) & N_2(\omega) \end{vmatrix}}. \quad (5-28)$$

Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} M_1(\omega) & N_1(\omega) \\ M_2(\omega) & N_2(\omega) \end{vmatrix} = M_1(\omega)N_2(\omega) - M_2(\omega)N_1(\omega) \quad (5-29)$$

не равен нулю, то каждому значению ω соответствуют определенные значения B и B , которые являются координатами точек линии Д-разбиения на плоскости параметров B и B при непрерывном изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Выражения (5-28) справедливы только для тех значений ω , при которых уравнения (5-27) остаются линейно независимыми.

Последние перестают быть линейно независимыми для $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Поэтому граница Д-разбиения, которая строится по выражениям (5-28), дополняется особыми линиями, уравнения которых получаются подстановкой значений $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ в уравнение (5-26).

Правило штриховки состоит в следующем. Если определитель $\Delta > 0$, то кривая Д-разбиения при перемещении в направлении увеличения ω штрихуется слева, если $\Delta < 0$, кривая штрихуется справа. Так как при изменении ω от $-\infty$ до 0 кривая проходит в одном направлении, а при изменении ω от 0 до $+\infty$ — в противоположном и значениям ω и $-\omega$ соответствует одна и та же точка на кривой Д-разбиения, на разный по знаку определитель Δ , то согласно правилу штриховки кривая штрихуется дважды с одной и той же стороны.

Особые прямые штрихуются так, чтобы вблизи точки пересечения прямой с кривой Д-разбиения штриховка была направлена в сторону заштрихованной стороны кривой. На рис. 5-15 приведен пример Д-разбиения по двум параметрам и штриховки кривых и особых прямых. Особыми прямыми являются линии $B = -1$; $B = 0$. Предполагаемой областью устойчивости является область I . Чтобы установить это окончательно, необходимо при каких-либо значениях параметров B и V , находящихся в области I , проверить систему на устойчивость любым критерием.

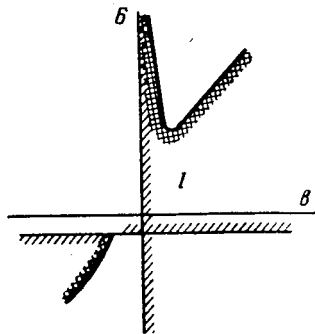


Рис. 5-15. Д-разбиение плоскости двух параметров

Если параметры, по которым производится Д-разбиение, входят в уравнение нелинейно (например, постоянные времени), задача усложняется. Предположим, что требуется произвести Д-разбиение по двум постоянным времени T_n и T_k . Выделив в характеристическом уравнении эти параметры, получим

$$(T_n p + 1)(T_k p + 1)F(p) + K = 0. \quad (5-30)$$

Раскроем скобки

$$[T_n T_k p^2 + (T_n + T_k)p + 1]F(p) + K = 0. \quad (5-31)$$

Обозначив $T_n T_k = a$; $T_n + T_k = b$ и подставив эти значения в уравнение (5-31), получим

$$(ap^2 + bp + 1)F(p) + K = 0.$$

Заменим p на $j\omega$

$$(-a\omega^2 + bj\omega + 1)F(j\omega) + K = 0$$

и представим $F(j\omega)$ в виде $F_1(\omega) + jF_2(\omega)$

$$(-a\omega^2 + bj\omega + 1)[F_1(\omega) + jF_2(\omega)] + K = 0. \quad (5-32)$$

Отделим вещественную и мнимую части в выражении (5-32)

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= (1 - a\omega^2)F_1(\omega) - b\omega F_2(\omega) + K = 0; \\ Q(\omega) &= (1 - a\omega^2)F_2(\omega) + b\omega F_1(\omega) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5-33)$$

Из уравнений (5-33) определяем a и b

$$a = \frac{1}{\omega^2} \left[1 + \frac{KF_1(\omega)}{F_1^2(\omega) + F_2^2(\omega)} \right]; \quad (5-34)$$

$$b = \frac{KF_2(\omega)}{\omega[F_1^2(\omega) + F_2^2(\omega)]}. \quad (5-35)$$

Подставляя в выражения (5-34) и (5-35) различные значения ω , находим границу Д-разбиения на плоскости параметров a и b . Особые прямые получаются при подстановке в уравнение (5-32) значений $\omega = 0$; $\omega = \infty$. Первому случаю соответствует прямая $F(0) + K = 0$, второму — прямая $a = 0$. Правила штриховки описаны выше.

Когда определена область устойчивости в плоскости a и b , на ней выделяется область для тех значений a и b , для которых уравнения

$$a = T_n T_k \quad \text{и} \quad b = T_n + T_k \quad (5-36)$$

будут удовлетворяться вещественными значениями T_n и T_k .

Д-разбиение по одному параметру выполняется сравнительно просто, а по двум параметрам требует трудоемких вычислений и поэтому применяется редко.

Пример. Произведем Д-разбиение системы, изображенной на рис. 4-1, по коэффициенту усиления, для чего воспользуемся характеристическим уравнением (5-5), полагая в нем коэффициент усиления K переменным.

$$0,001p^4 + 0,035p^3 + 0,355p^2 + 1,15p + 1 + K = 0. \quad (5-37)$$

Находим K

$$K = -(0,001p^4 + 0,035p^3 + 0,355p^2 + 1,15p + 1). \quad (5-38)$$

Заменим в этом выражении p на $j\omega$

$$K = -0,001\omega^4 + j0,035\omega^3 + 0,355\omega^2 - j1,15\omega - 1$$

и отделим вещественную и мнимую части

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= -0,001\omega^4 + 0,355\omega^2 - 1; \\ Q(\omega) &= 0,035\omega^3 - 1,15\omega. \end{aligned} \right\} \quad (5-39)$$

Подставив в выражения (5-39) различные значения ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, вычислим соответствующие значения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$. Результаты вычислений сведены в табл. 5-3. По данным таблицы на рис. 5-14 построена линия Д-разбиения и заштрихована слева, если перемещаться вдоль нее при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Т а б л и ц а 5-3

ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$	ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
-6	9,044	-0,650	0	-1,000	0,000
-5,73	8,100	0,000	1	-0,686	-1,115
-5	6,335	1,375	2	+0,244	-2,040
-4	3,784	2,360	3	1,759	-2,506
-3	1,759	2,506	4	3,784	-2,360
-2	+0,244	2,040	5	6,335	-1,375
-1	-0,686	1,115	5,73	8,100	0,000
0	-1,000	0,000	6	9,044	+0,650

Вероятной областью устойчивости может быть область I , так как она полностью окаймлена штриховкой. Это соответствует действительности, так как с помощью других критериев ранее определили, что при значении $K = 4$ система устойчива.

Из рассмотрения кривой Д-разбиения видно, что система остается устойчивой при $-1 < K < 8,1$.

Контрольные вопросы

1. Какие системы называются устойчивыми, неустойчивыми?
2. Какая имеется связь между устойчивостью системы автоматического регулирования и знаками корней характеристического уравнения?
3. Что такое критерий устойчивости?
4. Сформулируйте критерий устойчивости Гурвица.
5. Сформулируйте критерий устойчивости Михайлова.
6. Что называется критическим коэффициентом усиления?
7. Сформулируйте амплитудно-фазовый критерий устойчивости Найквиста.
8. Как производится анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам?
9. В каких случаях удобнее пользоваться тем или иным критерием устойчивости?
10. Как производится выделение областей устойчивости по одному и по двум параметрам?

ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

§ 6-1. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА

Качеством процесса регулирования называется характер переходного процесса устойчивой системы, зависящий от параметров системы регулирования и характера управляющих и возмущающих воздействий.

Показателями качества называются величины, характеризующие поведение системы в переходном процессе, вызванном каким-либо типовым внешним воздействием (наиболее часто единичным ступенчатым воздействием).

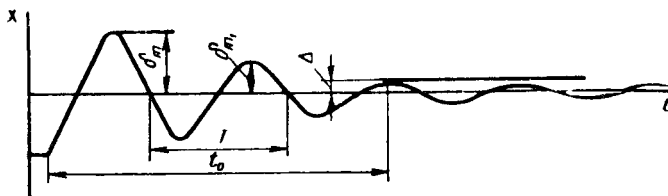


Рис. 6-1. Показатели качества переходного процесса

Рассмотрим основные показатели качества.

1. *Время регулирования* t_0 — время, в течение которого отклонение регулируемой величины от заданного значения становится меньше наперед заданной величины Δ (рис. 6-1).

2. *Величина перерегулирования* — максимальное отклонение δ_m регулируемой величины от нового заданного значения в сторону, противоположную от начального значения. В тех случаях, когда регулируемая величина приближается к новому заданному значению только с одной стороны, не выходя за пределы, ограниченные начальным и новым заданным значениями, перерегулирование отсутствует.

3. *Установившееся отклонение* — величина отклонения регулируемой величины от заданного значения в установившемся процессе.

4. *Характер затухания* переходного процесса может быть монотонным, аperiodическим или колебательным.

Монотонным называется процесс, в котором отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения с течением

времени непрерывно уменьшается без перерегулирований (кривая 1, рис. 6-2). Новое установившееся значение совпадает с осью времени.

Апериодическим называется процесс, в котором регулируемая величина приходит к установившемуся значению после одного, двух или нескольких колебаний с разной величиной периода колебаний и с перерегулированиями (кривые 2 и 3, рис. 6-2).

Колебательным называется процесс, в котором регулируемая величина приходит к установившемуся значению с гармоническими колебаниями (см. рис. 6-1).

Колебательный процесс системы высокого порядка можно разложить на отдельные составляющие, затухание которых происходит по закону

$$x = Ae^{-\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \psi_0), \quad (6-1)$$

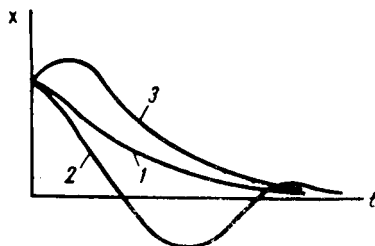


Рис. 6-2. Различные виды переходных процессов

где A — начальная амплитуда колебаний;

α_i — значение вещественной части комплексного корня, $\frac{1}{сек}$;

ω_i — значение мнимой части комплексного корня — угловая частота колебаний, $\frac{1}{сек}$;

ψ_0 — начальный сдвиг фазы, $рад$.

Величина периода колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_i}.$$

Отношение между двумя соседними максимальными отклонениями (см. рис. 6-1).

$$q = \frac{\delta_m}{\delta_{m1}} = e^{\frac{2\pi}{\omega_i} \alpha_i} = e^{T\alpha_i}. \quad (6-2)$$

Натуральный логарифм этого отношения

$$d = \ln \frac{\delta_m}{\delta_{m1}} = \ln e^{T\alpha_i} = T\alpha_i \quad (6-3)$$

называется *логарифмическим декрементом затухания*.

Из выражения (6-3) видно, что скорость затухания колебаний составляющих переходного процесса находится в прямой зависимости от величины логарифмического декремента затухания, прямо пропорционального значению α_i вещественной части соответствующей пары сопряженных комплексных корней.

5. *Колебательность* переходного процесса — число колебаний регулируемой величины около нового установившегося ее значения. Оно обычно не должно превышать заданного числа.

6. *Степень устойчивости*, характеризующая быстроту затухания переходного процесса. Степень устойчивости выражается абсолютным значением вещественной части корня характеристического уравнения устойчивой системы, находящегося на наименьшем расстоянии от мнимой оси комплексной плоскости корней.

К переходным процессам систем автоматического регулирования, кроме перечисленных выше, могут быть предъявлены и другие требования, обусловленные конкретными условиями эксплуатации.

Чтобы установить, в какой степени показатели качества конкретной системы автоматического регулирования удовлетворяют предъявленным требованиям, необходимо решить дифференциальное уравнение системы при заданных возмущениях и построить кривую переходного процесса. Это так называемый прямой метод исследования качества. Однако он не дает возможности для систем высокого порядка (выше третьего) судить о влиянии на переходный процесс параметров системы и о целесообразном направлении изменения параметров для того, чтобы исправить неудовлетворительный переходный процесс.

В связи с этим были разработаны приближенные косвенные методы оценки показателей качества, основными из которых являются: метод распределения корней, метод интегральных оценок, частотный метод. Различные косвенные методы дают возможность определять показатели качества с различной полнотой. Однако в ряде случаев, когда намечены пути достижения заданного значения некоторой части показателей качества, оказывается достаточным определение только этих показателей. После того как с помощью косвенного метода подобраны параметры, обеспечивающие заданные показатели качества, полезно построить кривую переходного процесса прямым методом, чтобы убедиться в том, что переходный процесс отвечает заданным требованиям.

Некоторые показатели качества переходного процесса существенно зависят от вида возмущающего воздействия, следствием которого является переходный процесс. Поэтому при анализе качества переходного процесса в ряде случаев рассматривается полное дифференциальное уравнение, его левая и правая части. При анализе устойчивости рассматривается только левая часть уравнения системы, а правая часть приравнивается нулю.

§ 6-2. ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ МЕТОДОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ

Методом распределения корней характеристического уравнения можно определить степень устойчивости системы, время регулирования (приближенно), колебательность системы и выбрать параметры системы, обеспечивающие перечисленные показатели качества.

Если известно характеристическое уравнение системы, то степень устойчивости можно определить непосредственным решением уравнения и вычислением его корней. Как известно, корни характери-

стического уравнения высокого порядка не могут быть найдены в общем виде, так что приходится пользоваться приближенными методами.

Рассмотрим один из наиболее простых методов приближенного определения корней алгебраических уравнений высоких степеней [42].

Пусть требуется найти корни уравнения

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (6-4)$$

коэффициенты которого известны.

Если коэффициент при члене с высшей степенью не равен единице, делением уравнения на этот коэффициент приводим его к виду (6-4). Из трех последних членов составим квадратное уравнение

$$a_{n-2} p^2 + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (6-5)$$

Решая это уравнение, определяем, какие корни ему соответствуют — вещественные или комплексные.

Если корни вещественные, то задаемся первым приближением вещественного корня в виде

$$p'_1 = -\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Найдя этот корень, производим деление левой части уравнения (6-4) на двучлен $p + \frac{a_n}{a_{n-1}}$ до тех пор, пока не получим в остатке двучлен $b_{n-1} p + a_n$.

В качестве второго приближения для определяемого корня берем значение $p''_1 = -\frac{a_n}{b_{n-1}}$ и делим левую часть уравнения (6-4) на $p + \frac{a_n}{b_{n-1}}$ до получения остатка $c_{n-1} p + a_n$.

Третьим приближением корня будет $p'''_1 = -\frac{a_n}{c_{n-1}}$.

Приближение продолжается до тех пор, пока остаток перестанет практически изменяться.

Если корни трехчлена (6-5) комплексные, то левую часть уравнения (6-4) нужно делить на трехчлен $p^2 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} p + \frac{a_n}{a_{n-2}}$ до получения остатка $b_{n-2} p^2 + b_{n-1} p + a_n$.

Корни этого трехчлена будут вторым приближением пары комплексных корней. Деля левую часть уравнения (6-4) на трехчлен $p^2 + \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} p + \frac{a_n}{b_{n-2}}$ до получения остатка $c_{n-2} p^2 + c_{n-1} p + a_n$, найдем третье приближение искомых корней и т. д. до тех пор, пока остаток перестанет заметно изменяться.

Нахождение следующих корней производится тем же методом по новому многочлену, полученному делением левой части уравнения на дву- или трехчлен.

Пример. Найдём корни характеристического уравнения (5-5) системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 4-1

$$0,001p^4 + 0,035p^3 + 0,355p^2 + 1,15p + 5 = 0.$$

Разделим уравнение на коэффициент при высшей степени

$$p^4 + 35p^3 + 355p^2 + 1150p + 5000 = 0. \quad (6-6)$$

Из трех последних членов этого уравнения составляем квадратное уравнение

$$355p^2 + 1150p + 5000 = 0.$$

Разделив это уравнение на коэффициент при высшей степени, получим

$$p^2 + 3,24p + 14,1 = 0. \quad (6-7)$$

Корни этого квадратного уравнения комплексные. Считая это уравнение первым приближением, делим на него уравнение (6-6)

$$\begin{array}{r|l} p^4 + 35p^3 + 355p^2 + 1150p + 5000 & \frac{p^2 + 3,24p + 14,1}{p^2 + 31,76p + 238,9} \\ - p^4 + 3,24p^3 + 14,1p^2 & \\ \hline & 31,76p^3 + 340,9p^2 + 1150p \\ - & 31,76p^3 + 103,0p^2 + 448,0p \\ \hline & 237,9p^2 + 7020p + 5000. \end{array}$$

Разделив трехчлен, полученный в остатке, на коэффициент при p^2 , получим второе приближение

$$p^2 + 2,95p + 21,0 = 0$$

и делим на него уравнение (6-6)

$$\begin{array}{r|l} p^4 + 35p^3 + 355p^2 + 1150p + 5000 & \frac{p^2 + 2,95p + 21,0}{p^2 + 32,05p + 239,5} \\ - p^4 + 2,95p^3 + 21,0p^2 & \\ \hline & 32,05p^3 + 334,0p^2 + 1150p \\ - & 32,05p^3 + 94,5p^2 + 672p \\ \hline & 239,5p^2 + 478p + 5000. \end{array}$$

Разделив остаток на 239,5, получим третье приближение

$$p^2 + 2p + 20,8 = 0,$$

на которое делим уравнение (6-6). Повторяя вычисления аналогичным образом, получим четвертое, а затем и пятое приближение

$$\text{и } \left. \begin{array}{l} p^2 + 1,73p + 18,6 = 0 \\ p^2 + 1,91p + 17,9 = 0. \end{array} \right\} \quad (6-8)$$

Шестое приближение

$$p^2 + 2p + 18,2 = 0 \quad (6-9)$$

мало отличается от пятого и поэтому останавливаемся на нем.

Корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -1 \pm 4,15j.$$

Следующие корни уравнения (6-6) представляют собой корни уравнения $p^2 + 33,1p + 273,8 = 0$, полученного в частном при последнем делении.

Определим эти корни

$$p_3 = -16,23; \quad p_4 = -16,87.$$

Степень устойчивости, т. е. расстояние от мнимой оси до ближайшего корня, для рассмотренной системы $\alpha = -1 \frac{1}{сек}$. По величине степени устойчивости α можно приближенно определить время регулирования, если допустить, что время затухания системы приближенно равно времени затухания составляющей, определяемой корнем, ближайшим к мнимой оси. Это можно сделать с помощью выражения (6-3), подставляя в него вместо отношения соседних амплитуд q отношение начального и конечного отклонений $m = \frac{\delta_m}{\Delta}$ (см. рис. 6-4), вместо периода колебаний T время регулирования t_0 , вместо α_i степень устойчивости α . В результате преобразований получим

$$\ln m = t_0 \alpha, \quad (6-10)$$

откуда время регулирования

$$t_0 = \frac{\ln m}{\alpha}. \quad (6-11)$$

Найдем время регулирования для рассматриваемого примера при условии, что заданная кратность уменьшения перерегулирования $m = 10$

$$t_0 = \frac{\ln 10}{1} = 2,3 \text{ сек.} \quad (6-12)$$

Проверим, насколько верным является приближенное определение времени регулирования. Для этого решим дифференциальное уравнение второго порядка, которому соответствует характеристическое уравнение (6-9). Это уравнение можно получить с помощью уравнения (4-28), если в скобках левой части поставить характеристическое уравнение (6-9), а правую часть оставить без изменения. Минус в правой части опускаем. При решении полагаем $\sigma = 1$. Тогда преобразование Лапласа $\bar{\sigma} = \frac{1}{p}$. Значения c_1 , c_2 и k_3 вычисляем по данным примера § 5-2. Правую часть уравнения (4-28)

делим на коэффициент при p^4 , на который была разделена левая часть. После подстановки всех найденных значений получим

$$(274p^2 + 555p + 5000)\bar{\varphi} = (5p^2 + 150p + 1000)\frac{1}{p},$$

откуда

$$\bar{\varphi} = \frac{5p^2 + 150p + 1000}{p(274p^2 + 555p + 5000)}. \quad (6-13)$$

Переходя от изображения к оригиналу, получим

$$\varphi = 0,2 - e^{-t}(0,18 \cos 4,3t - 0,092 \sin 4,3t). \quad (6-14)$$

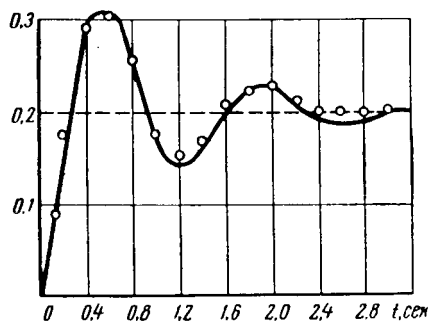


Рис. 6-3. Кривая переходного процесса, построенная по решению упрощенного дифференциального уравнения

Кривая переходного процесса, построенная по выражению (6-14), изображена на рис. 6-3.

Из рассмотрения рис. 6-3 видно, что начальное максимальное отклонение φ от нового установившегося значения составляет 0,12. Через 2,6 сек амплитудное значение отклонения φ от нового установившегося значения составляет 0,015, откуда $m = \frac{0,12}{0,015} = 8$, а через 2,3 сек отклонение составляет 0,01. Эти данные достаточно хорошо согласуются с результатами, полученными по выражению (6-12).

Степень устойчивости α можно

также определить и без нахождения корней характеристического уравнения, однако вычисления при этом оказываются не менее громоздкими, поэтому применение этого способа не рекомендуется.

Рассмотрим способ определения колебательности. Колебания в системе будут наблюдаться в том случае, если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные сопряженные корни вида

$$-\alpha \pm j\omega.$$

Колебательность определяется отношением мнимой части комплексного корня к его вещественной части

$$\mu = \frac{\omega}{\alpha}. \quad (6-15)$$

Если в характеристическом уравнении имеется несколько сопряженных корней, то колебательность определяется по корням с наименьшей вещественной частью, которая дает наиболее медленно затухающую составляющую.

Определим колебательность для рассмотренного выше примера. Характеристическое уравнение (6-5) имеет комплексные сопряженные корни

$$-1 \pm 4,15j.$$

Колебательность составляющей переходного процесса, соответствующей этим корням,

$$\mu = \frac{4,15}{1} = 4,15. \quad (6-16)$$

Это значит, что в переходном процессе регулируемая величина прежде, чем прийти к установившемуся значению, проходит его четыре раза (см. рис. 6-3).

Чтобы колебательность не превышала величины, найденной по выражению (6-15), необходимо ограничить расположение корней на левой полуплоскости двумя лучами, каждый из которых образует с отрицательной ветвью вещественной оси угол

$$\varphi = \arctg \frac{\omega}{\alpha} = \arctg \mu. \quad (6-17)$$

Таким образом, расположение корней характеристического уравнения системы автоматического регулирования, имеющей заданные показатели качества, ограничивается вертикальной линией, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на расстоянии α (степень устойчивости), и наклонными, направленными под углом φ к вещественной оси (колебательность).

Область расположения корней показана на рис. 6-4.

По корням характеристического уравнения можно определить затухание за один период ζ , представляющее собой относительное уменьшение последующей амплитуды по сравнению с предшествующей (см. рис. 6-1), выраженное в процентах

$$\zeta = \frac{\delta_m - \delta_{m1}}{\delta_m} 100. \quad (6-18)$$

Учитывая выражение (6-1), можно написать

$$\delta_m = Ae^{-\alpha t_1}; \quad \delta_{m1} = Ae^{-\alpha(t_1+T)},$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период колебаний.

Подставив эти величины в (6-18), получим

$$\zeta = \left[1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \right] 100. \quad (6-19)$$

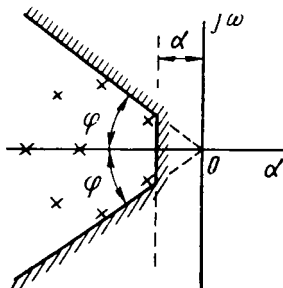


Рис. 6-4. Ограничение области расположения корней

Вычислим затухание для рассмотренного выше примера

$$e^{-\frac{2\pi}{\omega}} = e^{-\frac{2 \cdot 3,14}{4,15}} = 0,22; \quad \zeta = [1 - 0,22] 100 = 78\%.$$

Затухание, найденное по кривой на рис. 6-3, составляет $\zeta = 74\%$.

Показатели, определяемые методом распределения корней, не всегда учитывают влияние возмущений и это является принципиальным недостатком метода.

Метод распределения корней характеристического уравнения дает далеко не полное представление о качестве переходного процесса. Более полную картину можно получить при рассмотрении влияния на показатели качества распределения полюсов и нулей передаточной функции системы. Подробно этот вопрос изложен в [33], а здесь приведем только окончательные результаты без доказательств.

Качество переходного процесса обычно рассматривают при нулевых начальных условиях и при воздействии на входе типа единичного скачка $\bar{\psi} = \frac{1}{p}$. Уравнение системы для этого случая в общем виде будет

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \bar{\psi} = \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + 1) \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Найдем отсюда изображение регулируемой величины в переходном процессе

$$\bar{\psi} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + 1} \cdot \frac{1}{p}. \quad (6-20)$$

Как следует из (6-20), оно равно передаточной функции системы, умноженной на изображение воздействия $\frac{1}{p}$.

Нулями передаточной функции называются корни многочлена, стоящего в ее числителе.

Полюсами передаточной функции называются корни многочлена, стоящего в ее знаменателе (корни характеристического уравнения системы).

Изображение воздействия также может иметь нули и полюсы. В рассматриваемом конкретном примере изображение воздействия не имеет нулей и имеет один полюс, расположенный в начале координат комплексной плоскости. Очевидно, если менять значения нулей и полюсов передаточной функции в выражении (6-20), что достигается изменением параметров системы, то будет меняться изображение регулируемой величины $\bar{\psi}$ и соответственно будут меняться показатели качества переходного процесса.

При детальном исследовании этого вопроса [33] выявили следующие зависимости.

1. Если нули передаточной функции совпадают с полюсами изображения воздействия или находятся вблизи от них, то воздействия вызывают небольшие отклонения регулируемой величины. Если нули передаточной функции удаляются от полюсов изображения воздействия, то влияние воздействий на переходный процесс увеличивается.

2. Если один или несколько полюсов передаточной функции системы и изображения воздействия совпадают, то наступает явление резонанса и кривая переходного процесса очень существенно отличается от кривой воздействия. Чтобы кривая переходного процесса по возможности точнее воспроизводила кривую задающего воздействия, необходимо полюсы передаточной функции удалять от полюсов изображения воздействия.

3. Чем дальше полюсы передаточной функции расположены от мнимой оси, тем меньше собственные колебания системы и быстрее затухает переходный процесс.

4. Если нули передаточной функции располагаются вблизи полюса, ближайшего к мнимой оси, колебательность переходного процесса уменьшается, при удалении нулей от этого полюса колебания возрастают.

Таким образом, изменением параметров системы можно существенно улучшить показатели качества переходного процесса.

§ 6-3. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Метод интегральных оценок качества процесса регулирования дает возможность оценить время затухания процесса и величину отклонения регулируемой величины.

Идея, положенная в основу этого метода, может быть уяснена из следующих рассуждений.

Пусть ось времени на рис. 6-2 представляет собой идеальный переходный процесс, при котором в момент времени $t = 0$ регулируемая величина мгновенно достигает нового установившегося значения, совпадающего с осью времени, и в дальнейшем не претерпевает никаких изменений. Кривая 1 представляет собой реальный монотонный переходный процесс, при котором отклонение регулируемой величины x непрерывно уменьшается, не меняя знака по отношению к новому установившемуся значению. Очевидно, время регулирования и среднее отклонение регулируемой величины будут тем меньше, чем меньше будет площадь, ограниченная осью ординат, новым установившимся значением регулируемой величины и кривой реального переходного процесса. Интегральной оценкой, пригодной только для монотонных процессов, является оценка по величине интеграла

$$I_1 = \int_0^{\infty} x dt. \quad (6-21)$$

Чем меньше этот интеграл, тем меньше упомянутая выше площадь и тем быстрее заканчивается переходный процесс. Если реальный переходный процесс протекает с перерегулированием по отношению к новому установившемуся значению регулируемой величины (кривая 2, рис. 6-2), то отклонение x меняет свой знак по отношению к новому установившемуся значению и интегральная оценка по выражению (6-21) в этом случае непригодна, так как площади разных знаков взаимно компенсируются и интеграл I_1 может иметь малые значения при совершенно неудовлетворительном переходном процессе.

В этих случаях может применяться квадратичная интегральная оценка

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 dt, \quad (6-22)$$

учитывающая сумму абсолютных значений площадей, расположенных выше и ниже нового установившегося значения регулируемой величины. Таким образом, интегральная оценка может быть применена к любым переходным процессам.

Для учета влияния скорости переходного процесса на качество регулирования в интегральную оценку дополнительно вводится значение производной от отклонения x' с коэффициентом τ , имеющим размерность времени

$$I_3 = \int_0^{\infty} (x^2 + \tau^2 x'^2) dt. \quad (6-23)$$

Существуют и более сложные, более общие интегральные оценки, но они применяются редко и здесь не рассматриваются.

Метод интегральных оценок позволяет дать относительную оценку скорости затухания переходного процесса и величине отклонений, выявить влияние отдельных параметров системы на эти показатели качества. Этот метод учитывает влияние правой части дифференциального уравнения процесса регулирования и начальные условия. Однако он не дает возможности определить абсолютную величину качественных показателей, например величину времени регулирования.

Поэтому при использовании метода интегральных оценок выполняют следующие операции:

- 1) выбирают (обычно на основании интуитивных представлений) тип оценки, пригодный для данного случая;
- 2) получают выражение интегральной оценки через те параметры системы, которые можно менять;
- 3) определяют значения этих параметров, дающих минимальную величину интеграла;
- 4) для проверки результатов при найденных значениях параметров одним из известных способов по дифференциальному уравнению строится кривая переходного процесса.

Рассмотрим правила вычисления указанных выше интегральных оценок.

При вычислении оценок возмущающее воздействие в большинстве случаев принимают скачкообразным и постоянным, так чтобы начальное отклонение равнялось единице ($x_0 = \pm 1$). В этом случае дифференциальное уравнение системы может быть сведено к виду

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0. \quad (6-24)$$

Пусть начальные условия заданы при $t = 0$

$$x(0) = x_0; \quad x'(0) = x'_0; \dots; x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (6-25)$$

Вычислим интегральную оценку (6-24). Определим из уравнения (6-25) значение x и подставим его в выражение (6-21)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty x dt = -\frac{1}{a_n} \int_0^\infty [a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x'] dt = \\ &= -\frac{1}{a_n} \left[a_0 x^{(n-1)} + a_1 x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x \right]. \end{aligned} \quad (6-26)$$

Нижний предел интегрирования представляет собой начальные условия, заданные при $t = 0$. Верхний предел интегрирования для устойчивой системы определяется из условия, что при $t = \infty$ переходный процесс закончился, отклонение и все производные от него равны нулю

$$x^{(n-1)} = x^{(n-2)} = \dots = x' = x = 0. \quad (6-27)$$

Подставив эти пределы в выражение (6-26), получим окончательное выражение для линейной интегральной оценки

$$I_1 = \int_0^\infty x dt = \frac{1}{a_n} [a_0 x_0^{(n-1)} + a_1 x_0^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x_0]. \quad (6-28)$$

В этом выражении параметры системы регулирования входят в коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ и по нему можно определить, как изменять параметры для уменьшения I_1 .

Для вычисления квадратичных интегральных оценок предложено несколько способов. Приведем без доказательства формулу для вычисления квадратичной оценки при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия для наиболее распространенного случая, когда степень характеристического уравнения на две или более единицы больше степени полинома, стоящего в правой части уравнения [5, 33]. Предположим, что дифференциальное уравнение системы автоматического регулирования имеет вид

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \bar{x} = \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) \frac{1}{p}. \end{aligned} \quad (6-29)$$

где $\frac{1}{p}$ — изображение по Лапласу от единичной ступенчатой функции.

Формула для вычисления квадратичной интегральной оценки имеет вид

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 dt = \frac{1}{2a_n^2 \Delta} \left(B_m \Delta_m + B_{m-1} \Delta_{m-1} + \dots + \right. \\ \left. + B_2 \Delta_2 + B_1 \Delta_1 + B_0 \Delta_0 - \frac{b_m b_{m-1}}{a_n^2} \right), \quad (6-30)$$

где x — отклонение регулируемой величины от нового заданного значения;

 Δ — определитель n -го порядка;

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-3} & \cdots \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} \quad (6-31)$$

$\Delta_k (k = m, m - 1 \dots 2, 1, 0$ — определители, получающиеся путем замены в определителе (6-31) ($m - k + 1$)-го столбца столбцом

$$\begin{array}{c} a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \quad (6-32)$$

$B_m, B_{m-1}, \dots, B_0$ — коэффициенты, вычисленные по формулам:

$$\begin{aligned} B_m &= b_m^2; \\ B_{m-1} &= b_{m-1}^2 - 2b_m b_{m-2}; \\ B_{m-2} &= b_{m-2}^2 - 2b_{m-1} b_{m-3} + 2b_m b_{m-4}; \\ &\dots \\ B_k &= b_k^2 - 2b_{k+1} b_{k-1} + 2b_{k+2} b_{k-2} - \dots + 2(-1)^k b_m b_{2k-m}; \\ B_0 &= b_0^2. \end{aligned} \quad (6-33)$$

В определителе (6-31) заменяются нулями все коэффициенты с индексами меньше нуля и больше n , а в формулах (6-33) нулями заменяются все коэффициенты с индексами меньше нуля и больше m . Если в дифференциальном уравнении соотношение показателей степени полиномов правой и левой частей иное, чем в рассмотренном выше случае, то формулы видоизменяются [5, 33].

§ 6-4. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Частотный метод исследования основан на том, что между частотными характеристиками и переходным процессом системы автоматического регулирования существует определенная связь. Для исследования качества исходными данными могут служить те же частотные характеристики, которые применяются для исследования устойчивости. Поэтому частотные методы исследования качества выгодно применять тогда, когда исследование устойчивости производилось с помощью критерия устойчивости Найквиста.

С помощью амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы можно определить важный показатель качества — *показатель колебательности* M , который представляет отношение максимального значения амплитуды $A_{\max}(\omega)$ к значению амплитуды $A(0)$ при $\omega = 0$

$$M = \frac{A_{\max}(\omega)}{A(0)}.$$

Чем больше показатель колебательности, тем меньше запас устойчивости и тем больше склонность системы к колебаниям. Опытным путем установлено, что качество переходных процессов удовлетворительное, когда $M \leq (1,3 \div 1,5)$.

Существует способ определения величины показателя колебательности по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы [5].

При исследовании качества широко применяются вещественные частотные характеристики. Рассмотрим аналитическую зависимость между вещественной частотной характеристикой замкнутой системы регулирования и переходным процессом, которая справедлива, когда система устойчива (характеристическое уравнение имеет все корни с отрицательной вещественной частью) и на вход ее подается воздействие типа единичного скачка.

Воспользуемся уравнением замкнутой системы, полагая в нем возмущающее воздействие σ равным нулю

$$[D(p) + K] \bar{\varphi} = K \bar{\psi}, \quad (6-34)$$

откуда

$$\bar{\varphi} = \frac{K}{D(p) + K} \bar{\psi} \quad (6-35)$$

или

$$\bar{\varphi} = W_{\text{зам}}(p) \bar{\psi}, \quad (6-36)$$

где $W_{\text{зам}}(p)$ — передаточная функция замкнутой системы по управляющему воздействию.

Все последующие выводы остаются справедливыми, если воспользоваться передаточной функцией по возмущению.

Если управляющее воздействие ψ имеет вид единичного скачка, то его изображение по Лапласу $\bar{\psi} = \frac{1}{p}$. Подставив значение $\bar{\psi}$ в (6-36) получим

$$\bar{\varphi} = \frac{W_{\text{зам}}(p)}{p}. \quad (6-37)$$

Для получения оригинала регулируемой величины производится обратное преобразование Лапласа по формуле

$$\varphi = L^{-1} \left[\frac{W_{\text{зам}}(p)}{p} \right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{W_{\text{зам}}(p)}{p} e^{pt} dp, \quad (6-38)$$

где $p = c \pm j\omega$ — комплексная переменная.

Чтобы перейти к частотным характеристикам, нужно заменить p чисто мнимой переменной $j\omega$ и производить интегрирование вдоль мнимой оси. Однако интеграл при этом расходуется, так как выражение (6-37) имеет однократный полюс в начале координат. Чтобы устранить его, будем рассматривать разность между мгновенным значением регулируемой величины и ее установившимся значением $\varphi - \varphi_{\text{уст}}$. Значение $\varphi_{\text{уст}}$ можно найти, подставив $p = 0$ в изображение $W_{\text{зам}}(p)$. Установившееся значение регулируемой величины вещественно (мнимая часть его равна нулю), поэтому получим

$$\varphi_{\text{уст}} = W_{\text{зам}}(0) = P_{\text{зам}}(0). \quad (6-39)$$

С учетом всего изложенного вместо (6-38) можно написать

$$\varphi - P_{\text{зам}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_{\text{зам}}(j\omega) - P_{\text{зам}}(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (6-40)$$

Разложим $W_{\text{зам}}(j\omega)$ на вещественную и мнимую части

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = P_{\text{зам}}(\omega) + jQ_{\text{зам}}(\omega). \quad (6-41)$$

Разложим множитель $e^{j\omega t}$ по формуле Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t. \quad (6-42)$$

Подставив обозначения (6-41) и (6-42) в выражение (6-40), получим

$$\begin{aligned} \varphi - P_{\text{зам}}(0) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P_{\text{зам}}(\omega) \frac{\cos \omega t}{j\omega} - Q_{\text{зам}}(\omega) \frac{\sin \omega t}{j\omega} - P_{\text{зам}}(0) \frac{\cos \omega t}{j\omega} \right] d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P_{\text{зам}}(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} + Q_{\text{зам}}(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} - P_{\text{зам}}(0) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] d\omega. \end{aligned} \quad (6-43)$$

Функции $P(\omega)$, содержащие только четные степени ω и $\cos \omega t$, являются четными, т. е. не меняющими значения при изменении знака перед ω , но в целом подынтегральное выражение $P_{\text{зам}}(\omega) \times \frac{\cos \omega t}{\omega}$ является нечетной функцией. Нечетной является и функция $Q_{\text{зам}}(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega}$.

Подынтегральные функции второго интеграла оказываются четными, так как произведения двух нечетных функций $\left(\frac{P_{\text{зам}}(\omega)}{\omega} \text{ и } \sin \omega t\right)$ и двух четных $\left(\frac{Q_{\text{зам}}(\omega)}{\omega} \text{ и } \cos \omega t\right)$ представляют собой четные функции.

Интегрирование выражения (6-43) производится в симметричных пределах, поэтому первый интеграл, как интеграл от нечетной функции, равен нулю, а второй интеграл — от четной функции — равен удвоенному значению того же интеграла, но при интегрировании от 0 до ∞ .

Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P_{\text{зам}}(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{P_{\text{зам}}(0)}{2},$$

получим

$$\varphi = \frac{P_{\text{зам}}(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P_{\text{зам}}(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q_{\text{зам}}(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6-44)$$

При исследовании переходных процессов в системах автоматического регулирования принимают, что до момента времени $t = 0$ имел место установившийся режим, т. е. при $t < 0$; $\varphi = 0$. Подставив в выражение (6-44) $-t$ вместо t , получим

$$\varphi = 0 = \frac{P_{\text{зам}}(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P_{\text{зам}}(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q_{\text{зам}}(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6-45)$$

Вычитая почленно равенство (6-45) из равенства (6-44), получим

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P_{\text{зам}}(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6-46)$$

Это выражение устанавливает зависимость между изменением регулируемой величины ψ во времени и вещественной частотной характеристикой замкнутой системы $P_{\text{зам}}(\omega)$. Анализ этого выражения показал, что по виду вещественной частотной характеристики замкнутой системы можно дать приближенную оценку качества переходного процесса. Имеют место следующие зависимости.

1. Значение переходной функции φ в установившемся состоянии при $t = \infty$ равно начальной ординате вещественной характеристики $P_{\text{зам}}(\omega)$ при $\omega = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi = \lim_{\omega \rightarrow 0} P_{\text{зам}}(\omega). \quad (6-47)$$

Это следует из теоремы о конечном значении оригинала преобразования Лапласа [33].

2. Начальное значение переходной функции φ при $t = 0$ равно конечному значению вещественной характеристики $P_{\text{зам}}(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P_{\text{зам}}(\omega). \quad (6-48)$$

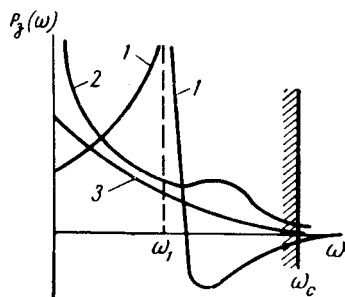


Рис. 6-5. Различные типы вещественных частотных характеристик

Это следует из теоремы о начальном значении оригинала преобразования Лапласа [33].

3. Если при некотором значении $\omega = \omega_1$, отличном от нуля, в вещественной частотной характеристике имеется разрыв непрерывности и она обращается в бесконечность (кривая 1, рис. 6-5), то это означает, что система находится на границе колебательной устойчивости и в ней происходят незатухающие гармонические колебания с частотой ω_1 . Это значит, что при $\omega = \omega_1$ характеристическое уравнение системы имеет чисто мнимый корень

$j\omega_1$. Если вещественная частотная характеристика стремится к бесконечности при $\omega = 0$ (кривая 2, рис. 6-5), то характеристическое уравнение имеет нулевой корень и система находится на границе аperiodической устойчивости.

Из сказанного следует, что наличие больших пиков в вещественной частотной характеристике свидетельствует о близости системы к границе устойчивости. Однако по вещественной характеристике нельзя судить об устойчивости системы, поэтому исследованию качества обязательно должно предшествовать исследование устойчивости.

4. Достаточно близким переходным процессам соответствуют близкие вещественные частотные характеристики. Это свойство позволяет использовать вместо данной вещественной частотной характеристики другую, достаточно близкую к ней типовую характеристику, для которой переходный процесс известен или может быть найден достаточно просто.

5. С увеличением частоты ординаты вещественной частотной характеристики после изменений по любому закону уменьшаются, асимптотически приближаясь к оси абсцисс. При изучении системы достаточно исследовать ее поведение в интервале так называемых существенных частот. Ту часть вещественной частотной характе-

ристики, в которой ее ординаты становятся меньше 0,1—0,2, начального значения $P_{\text{зам}}(\omega)$ можно не принимать во внимание. Отбрасывание высокочастотной ветви вещественной характеристики вносит искажение в течение короткого промежутка времени в начальной стадии переходного процесса.

Диапазон существенных частот на рис. 6-5 заключен между мнимой осью и вертикальной линией ω_c со штриховкой.

6. Двум вещественным частотным характеристикам $P_{\text{зам}}(\omega)$ и $P_{\text{зам}}(a\omega)$, отличающимся только масштабом по оси ω , отвечают переходные процессы, затухание которых характеризуется соответственно временем t и $\frac{t}{a}$. Таким образом, длительность переходного

процесса будет тем меньше, чем более полого идет частотная вещественная характеристика, т. е. чем меньше по величине экстремумы и значения производной во всех точках кривой.

7. Если вещественная частотная характеристика $P_{\text{зам}}(\omega)$ положительна и представляет собой невозрастающую функцию частоты, т. е. $P_{\text{зам}}(\omega) > 0$, $\frac{dP_{\text{зам}}(\omega)}{d\omega} \leq 0$ при всех ω , то перерегулирования не превышают 18% от начального отклонения.

8. Для получения монотонного переходного процесса достаточно, чтобы вещественная частотная характеристика $P_{\text{зам}}(\omega)$ представляла непрерывную, положительную функцию от ω с отрицательной и монотонно возрастающей (убывающей по абсолютной величине) производной $\frac{dP_{\text{зам}}(\omega)}{d\omega}$ (кривая 3, рис. 6-5).

9. Интервал частот от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$, в котором вещественная частотная характеристика не меняет своего значения ($P_{\text{зам}}(\omega) = \text{const}$), называется *интервалом равномерного* пропускания частот. В интервале этих частот система точно воспроизводит медленно изменяющиеся управляющие воздействия.

Вещественную частотную характеристику замкнутой системы можно построить вычислением с помощью передаточной функции замкнутой системы, освободившись от комплексности в знаменателе и отделив вещественную и мнимую части.

Пример. Построить вещественную частотную характеристику замкнутой системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 4-1.

Найдем из уравнения (4-28) передаточную функцию по возмущению замкнутой системы, причем минус в правой части можно опустить, так как он для передаточной функции не имеет значения

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{\bar{\varphi}}{\sigma} = \frac{(c_0 p^2 + c_1 p + 1) k_3}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}. \quad (6-49)$$

Подставив в выражение (6-49) мнимый оператор $j\omega$ вместо p , получим уравнение амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = \frac{(-c_0 \omega^2 + c_1 j\omega + 1) k_3}{a_0 \omega^4 - a_1 j\omega^3 - a_2 \omega^2 + a_3 j\omega + a_4}. \quad (6-50)$$

Значения постоянных коэффициентов вычислим по данным, приведенным в примере § 5-2,

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = \frac{-0,005\omega^2 + 0,15j\omega + 1}{0,001\omega^4 - 0,035j\omega^3 - 0,355\omega^2 + 1,15j\omega + 5}. \quad (6-51)$$

Умножив числитель и знаменатель выражения (6-51) на комплексное число, сопряженное знаменателю, и отделив вещественную и мнимую части, получим

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = \frac{-5 \cdot 10^{-6}\omega^6 - 2,475 \cdot 10^{-3}\omega^4 - 207,5 \cdot 10^{-3}\omega^2 + 5}{10^{-6}\omega^8 + 5,15 \cdot 10^{-4}\omega^6 + 55,53 \cdot 10^{-3}\omega^4 - 2,228\omega^2 + 25} - j \frac{25 \cdot 10^{-6}\omega^5 + 12,5 \cdot 10^{-3}\omega^3 + 0,4\omega}{10^{-6}\omega^8 + 5,15 \cdot 10^{-4}\omega^6 + 55,53 \cdot 10^{-3}\omega^4 - 2,228\omega^2 + 25}. \quad (6-52)$$

Первое слагаемое представляет уравнение вещественной частотной характеристики замкнутой системы

$$P_{\text{зам}}(\omega) = \frac{-5 \cdot 10^{-6}\omega^6 - 2,475 \cdot 10^{-3}\omega^4 - 207,5 \cdot 10^{-3}\omega^2 + 5}{10^{-6}\omega^8 + 5,15 \cdot 10^{-4}\omega^6 + 55,53 \cdot 10^{-3}\omega^4 - 2,228\omega^2 + 25}. \quad (6-53)$$

Подставляя в выражение (6-53) различные значения ω в пределах от 0 до ∞ , можно вычислить соответствующие значения $P_{\text{зам}}(\omega)$ и построить вещественную частотную характеристику замкнутой системы.

Однако, как об этом упоминалось раньше, высокочастотную часть характеристики, при которой значения становятся меньше 0,1—0,2 от начального значения, можно отбросить.

В табл. 6-1 приведены результаты вычисленной по выражению (6-53) для ω , изменяющихся в пределах от 0 до $20 \frac{1}{\text{сек}}$, а на рис. 6-6 по этой таблице построена вещественная частотная характеристика (кривая 1).

Таблица 6-1

ω	Числитель выражения (6-53)	Знаменатель выражения (6-53)	$P_{\text{зам}}(\omega)$	ω	Числитель выражения (6-53)	Знаменатель выражения (6-53)	$P_{\text{зам}}(\omega)$
0,0	+5,000	25,000	+0,200	4,5	-0,258	7,103	-0,036
0,5	+4,948	24,447	+0,202	5,0	-1,813	12,453	-0,145
1,0	+4,790	22,829	+0,209	6,0	-5,911	42,478	-0,139
2,0	+4,130	17,012	+0,242	7,0	-11,698	115,52	-0,101
3,0	+2,928	9,832	+0,297	10,0	-45,500	972,5	-0,046
3,5	+2,079	7,011	+0,296	15,0	-223,94	10 763	-0,020
4,0	+1,026	5,749	+0,178	20,0	-794,000	66 578	-0,011

Пользуясь перечисленными выше свойствами вещественных частотных характеристик, можно вынести предварительное суждение о переходном процессе. Установившееся значение отклонения регу-

лируемой величины после окончания переходного процесса $\Phi_{уст} = 0,2$. Переходный процесс не монотонный. Интервал существенных частот находится в пределах $\omega = 0 \div 15 \frac{1}{сек}$.

Чтобы получить уравнение переходного процесса в общем виде, нужно значение $P_{зам}(\omega)$ из (6-53) подставить в выражение (6-46) и проинтегрировать. Очевидно, что интегрирование практически выполнимо только при очень простых по форме выражениях для вещественной частотной характеристики, соответствующих системам, исследовать которые обычно не требуется.

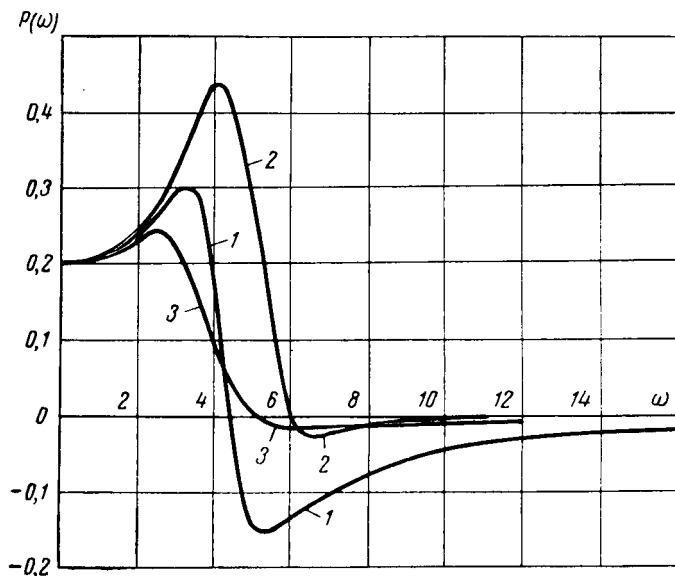


Рис. 6-6. Вещественные частотные характеристики к приборам

Для упрощения задачи криволинейную частотную характеристику можно разбить на ряд прямолинейных отрезков, которые будут совпадать с кривой достаточно хорошо. Тогда переходный процесс может быть вычислен как сумма интегралов, взятых по отрезкам прямых [42]. Этот способ вычисления переходного процесса также требует большой вычислительной работы и практически не применяется.

Для практических расчетов необходим метод, позволяющий быстро получать необходимый результат с достаточной для практики точностью. Такие методы существуют.

Для приближенного построения кривой переходного процесса по вещественной частотной характеристике предложено разбивать вещественную частотную характеристику на трапеции, причем

для ускорения вычислений В. В. Солодовников ввел типовые трапеции, для которых вычислены таблицы интегральных функций

$$h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_k} P_{\text{зам}}(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6-54)$$

Несколько позже А. А. Воронов предложил разбивать вещественную частотную характеристику на треугольники и вычислил таблицы интегральных функций (6-54) для типовых треугольников. Для получения одной и той же точности расчета таблицы для типовых треугольников оказываются значительно меньшими по объему, чем для типовых трапеций [9]. Однако в ряде случаев вещественную характеристику удобнее разбивать на трапеции, чем на треугольники.

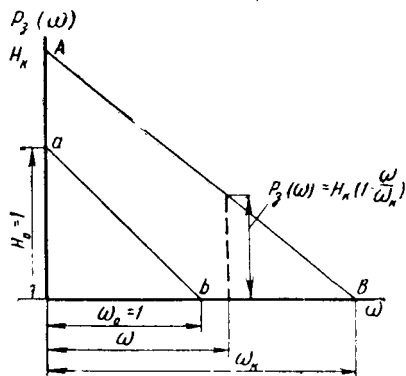


Рис. 6-7. Типовой треугольник

Подробно рассмотрим здесь метод разбивки частотных характеристик на треугольники, отсылая желающих ознакомиться с методом разбивки на трапеции к соответствующей литературе [9, 14, 42].

Типовой треугольник представляет собой прямоугольный треугольник, высота которого $H_0 = 1$, а за основание принят интервал частот $\omega_0 = 1$. Предполагается, что веще-

ственная частотная характеристика представляет собой наклонную прямую ab (рис. 6-7).

Определим сначала интегральную функцию (6-54) для произвольного треугольника с высотой H_k и основанием ω_k . Вещественная частотная характеристика в этом случае имеет вид прямой AB (рис. 6-7). Уравнение этой характеристики имеет вид

$$P_{\text{зам}}(\omega) = H_k \left(1 - \frac{\omega}{\omega_k} \right). \quad (6-55)$$

Подставляя значение $P_{\text{зам}}(\omega)$ из выражения (6-55) в выражение (6-46), получим

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2}{\pi} H_k \int_0^{\omega_k} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{2}{\pi} \frac{H_k}{\omega_k} \int_0^{\omega_k} \sin \omega t d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} H_k \text{Si}(\omega_k t) - \frac{2}{\pi} \frac{H_k}{\omega_k t} (1 - \cos \omega_k t), \end{aligned} \quad (6-56)$$

где $\text{Si}(\omega_k t) = \int_0^{\omega_k} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$ — синус интегральный, значения которого можно найти по таблицам [9, 14].

Введем вспомогательную переменную $\tau_k = \omega_k t$ (безразмерная величина)

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi} H_k \left[\text{Si } \tau_k - \frac{1 - \cos \tau_k}{\tau_k} \right]. \quad (6-57)$$

Для типового треугольника при $H_k = H_0 = 1$ и $\omega_k = \omega_0 = 0$ интегральная функция принимает вид

$$h_\tau = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si } \tau - \frac{1 - \cos \tau}{\tau} \right]. \quad (6-58)$$

Значения h_τ , вычисленные для различных значений τ , приведены в приложении.

Чтобы получить составляющую переходного процесса для произвольного треугольника с высотой H_k и основанием ω_k , необходимо для данного значения t найти $\tau_k = \omega_k t$, затем по таблице (см. приложение) для найденного τ_k найти значение h_τ и умножить его на H_k

$$\varphi_k = h_\tau H_k.$$

Таким образом находим значение φ_k для различных моментов времени для каждой составляющей (для каждого треугольника). Суммируя алгебраически значения φ_k для каждого момента времени, находим ординаты точек переходного процесса, по которым строится кривая переходного процесса, соответствующая полной вещественной частотной характеристике.

При разбивке вещественной частотной характеристики на треугольники отрезки прямых должны возможно более точно совпадать с кривой; все треугольники должны иметь одну сторону, расположенную на оси ординат, а сумма площадей треугольников с учетом знаков частей, расположенных выше и ниже оси абсцисс, должна приблизительно равняться площади, ограниченной вещественной частотной характеристикой.

П р и м е р. Построить переходный процесс по вещественной частотной характеристике замкнутой системы, изображенной кривой 1 на рис. 6-6, считая, что интервал существенных частот лежит в пределах $\omega = 0 \div 15 \frac{1}{\text{сек}}$.

На рис. 6-8, а, б приведена разбивка этой характеристики на три треугольника: *асе*, *еод*, *абг*. Однако первый и третий треугольники не прямоугольные. Преобразуем их в прямоугольные (рис. 6-8, в) с равновеликой площадью, оставляя неизменными величины оснований и высот:

Треугольники	Высоты	Основания
<i>асо</i> ;	$oa = H_1 = 1,84$;	$oc = \omega_1 = 4,8$;
<i>оде</i> ;	$oe = H_2 = -0,19$;	$od = \omega_2 = 15$;
<i>обг</i> ;	$og = H_3 = -1,45$;	$ob = \omega_3 = 3,7$.

Вычисления произведенные с помощью приложения, сведены в табл. 6-2. Соответствующие точки составляющих переходного процесса вычисляются следующим образом. Возьмем, например, момент времени $t = 0,8$ сек. Находим для треугольника aco $\tau = \omega_1 t = 4,8 \cdot 0,8 = 3,84$. По таблице (см. приложение) для $\tau = 3,84$ находим $h_\tau = 0,845$. Находим $\varphi_1 = H_1 h_\tau = 1,84 \cdot 0,845 = 1,555$. Аналогично вычисляются все точки для всех треуголь-

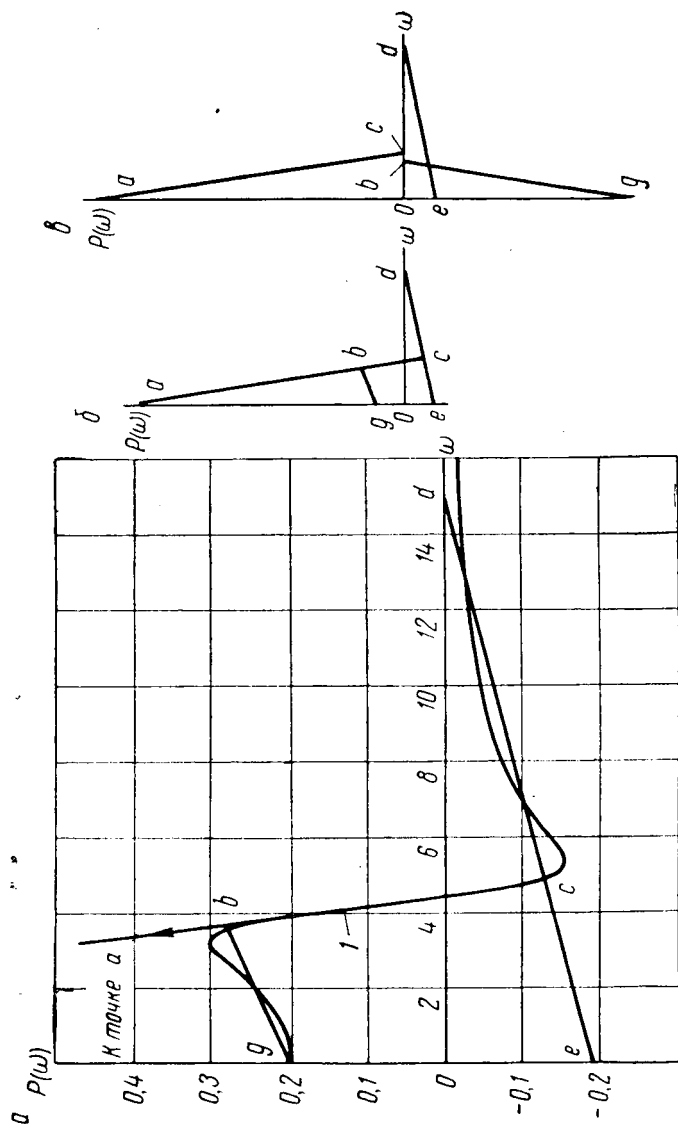


Рис. 6-8. Разбивка вещественной частотной характеристики на треугольники

ников. Затем для каждого момента времени алгебраическим сложением составляющих с учетом знаков находим ординаты $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$.

По данным табл. 6-2 на рис. 6-9 (кривая 1) построена кривая переходного процесса, дающая полное представление о его качестве.

Таблица 6-2

$t, \text{сек}$	Треугольник $асо$		Треугольник $оде$		Треугольник $обг$		φ
	$\tau_1 = \omega_1 t = 4,8t$	$\varphi_1 = H_1 h_\tau = 1,84 h_\tau$	$\tau_2 = \omega_2 t = 15t$	$\varphi_2 = H_2 h_\tau = -0,19 h_\tau$	$\tau_3 = \omega_3 t = 3,7t$	$\varphi_3 = H_3 h_\tau = -1,45 h_\tau$	
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,48	0,280	1,5	-0,085	0,37	-0,170	0,025
0,2	0,96	0,548	3,0	-0,143	0,74	-0,336	0,069
0,4	1,92	1,016	6,0	-0,172	1,48	-0,643	0,201
0,6	2,88	1,356	9,0	-0,176	2,22	-0,898	0,282
0,8	3,84	1,555	12,0	-0,181	2,96	-1,085	0,289
1,0	4,80	1,639	15,0	-0,182	3,70	-1,208	0,249
1,2	5,76	1,662	18,0	-0,184	4,44	-1,276	0,202
1,4	6,72	1,662	21,0	-0,184	5,18	-1,302	0,176
1,6	7,68	1,671	24,0	-0,185	5,92	-1,309	0,177
1,8	8,64	1,691	27,0	-0,186	6,66	-1,309	0,196
2,0	9,60	1,719	30,0	-0,186	7,40	-1,314	0,219
2,2	10,56	1,739	33,0	-0,186	8,14	-1,322	0,231
2,4	11,52	1,746	36,0	-0,187	8,88	-1,338	0,221
2,6	12,48	1,748	39,0	-0,187	9,62	-1,354	0,207
2,8	13,44	1,748	42,0	-0,187	10,36	-1,367	0,194
3,0	14,40	1,754	45,0	-0,187	11,10	-1,373	1,194
3,5	16,80	1,774	48,0	-0,187	12,95	-1,378	0,209
4,0	19,20	1,777	51,0	-0,187	14,80	-1,385	0,205

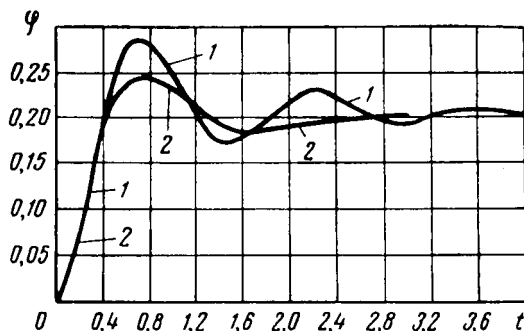


Рис. 6-9. Приближенные кривые переходных процессов

Естественно возникает вопрос о том, насколько точной является кривая переходного процесса, построенная таким образом. Для того чтобы получить представление об этом, следует сравнить приближенную кривую с точной, построенной решением дифференциального уравнения. На рис. 6-3 приведена кривая переходного процесса, построенная по выражению (6-14), полученному в результате решения дифференциального уравнения второго порядка. Построим для этого же случая приближенную кривую по вещественной частотной характеристике.

Передаточную функцию замкнутой системы для этого случая получим из выражения (6-13), учитывая, что выходная величина здесь $\bar{\varphi}$, а входная $\bar{\sigma} = \frac{1}{p}$. Тогда

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{5p^2 + 150p + 1000}{224,7p^2 + 473p + 5000}. \quad (6-59)$$

Подставляя в выражение (6-59) вместо p мнимый оператор $j\omega$, получим уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = \frac{-5\omega^2 + 150j\omega + 1000}{-224,7\omega^2 + 473j\omega + 5000}. \quad (6-60)$$

Умножая числитель и знаменатель выражения (6-60) на комплексное число, сопряженное знаменателю, и отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = \frac{1,12\omega^4 - 178\omega^2 + 5000}{50,8\omega^4 - 2024\omega^2 + 25\,000} - j \frac{31,3\omega^3 - 277\omega}{50,8\omega^4 - 2024\omega^2 + 25\,000},$$

откуда уравнение вещественной частотной характеристики замкнутой системы

$$P_{\text{зам}}(\omega) = \frac{1,12\omega^4 - 178\omega^2 + 5000}{50,8\omega^4 - 2024\omega^2 + 25\,000}. \quad (6-61)$$

Подставляя в это выражение различные значения ω от 0 до 20, получим соответствующие значения $P_{\text{зам}}(\omega)$. Результаты вычисле-

Т а б л и ц а 6-3

ω	Числитель выражения (6-61)	Знаменатель выражения (6-61)	$P_{\text{зам}}(\omega)$	ω	Числитель выражения (6-61)	Знаменатель выражения (6-61)	$P_{\text{зам}}(\omega)$
0	5000	25 000	0,200	6	0,000	17 200	0,000
0,5	4955	24 497	0,203	7	-1070	47 200	-0,024
1,0	4822	23 024	0,209	8	-1760	101 000	-0,018
1,5	4603	21 706	0,212	9	-2350	194 000	-0,012
2	4302	17 705	0,243	10	-1700	327 400	-0,005
3	3581	10 800	0,332	15	+21 500	2 130 000	+0,001
4	2427	5 550	0,438	20	112 900	7 315 000	+0,015
5	1220	6 000	0,203				

ний сведены в табл. 6-3 по которой на рис. 6-6 построена вещественная частотная характеристика (кривая 2).

На рис. 6-10, а и б произведена разбивка этой характеристики на четыре треугольника. На рис. 6-10, в эти треугольники преобра-

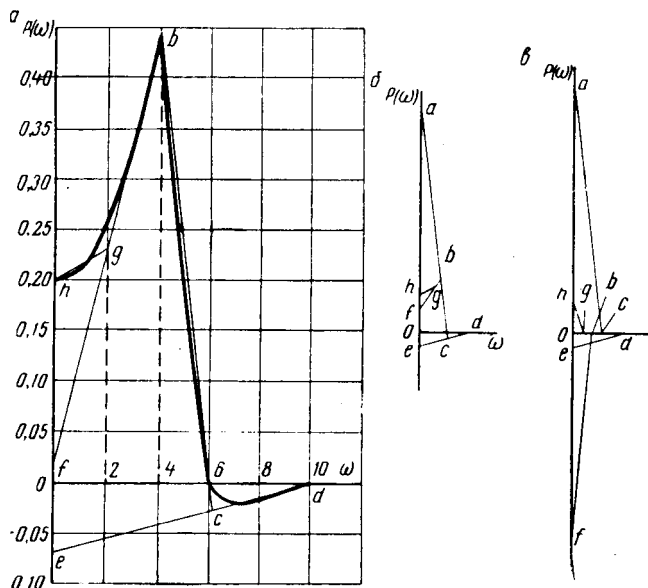


Рис. 6-10. Разбивка вещественной частотной характеристики на треугольники

зованы в прямоугольные и расположены соответственно знакам площадей. Основания и высоты треугольников имеют следующие значения:

Треугольники	Высоты	Основания
$asco$;	$oa = H_1 = 1,45$;	$oc = \omega_1 = 6$;
obf ;	$of = H_2 = -1,36$;	$ob = \omega_2 = 4$;
ode ;	$oe = H_3 = -0,07$;	$od = \omega_3 = 10$;
ogh ;	$oh = H_4 = 0,18$;	$og = \omega_4 = 2$.

Вычисления отдельных составляющих и переходного процесса сведены в табл. 6-4.

На рис. 6-3 нанесены точки переходного процесса из табл. 6-4 (обведены кружочками). Совпадение этих точек с точной кривой вполне удовлетворительное. Это позволяет сделать вывод, что приближенное построение кривой переходного процесса по вещественной частотной характеристике замкнутой системы дает достаточно точные результаты.

Таблица 6-4

t, сек	Треугольник ооо		Треугольник обф		Треугольник ооде		Треугольник оgh		φ
	τ ₁ = ω ₁ t = 6t	φ ₁ = H ₁ h ₁ τ ₁ = 1,45h ₁ τ ₁	τ ₂ = ω ₂ t = 4t	φ ₂ = H ₂ h ₂ τ ₂ = -1,36h ₂ τ ₂	τ ₃ = ω ₃ t = 10t	φ ₃ = H ₃ h ₃ τ ₃ = -0,07h ₃ τ ₃	τ ₄ = ω ₄ t = 2t	φ ₄ = H ₄ h ₄ τ ₄ = 0,18h ₄ τ ₄	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,6	0,274	0,4	0,172	1	0,022	0,2	0,011	0,091
0,2	1,2	0,532	0,8	0,340	2	0,040	0,4	0,023	0,175
0,4	2,4	0,950	1,6	0,645	4	0,060	0,8	0,045	0,290
0,6	3,6	1,193	2,4	0,890	6	0,063	1,2	0,066	0,306
0,8	4,8	1,294	3,2	1,060	8	0,064	1,6	0,086	0,256
1,0	6,0	1,308	4,0	1,170	10	0,066	2,0	0,103	0,175
1,2	7,2	1,31	4,8	1,211	12	0,066	2,4	0,118	0,151
1,4	8,4	1,330	5,6	1,229	14	0,067	2,8	0,131	0,165
1,6	9,6	1,354	6,4	1,230	16	0,067	3,2	0,141	0,208
1,8	10,8	1,370	7,2	1,230	18	0,068	3,6	0,149	0,221
2,0	12,0	1,378	8,0	1,235	20	0,068	4,0	0,154	0,229
2,2	13,2	1,378	8,8	1,256	22	0,068	4,4	0,158	0,212
2,4	14,4	1,380	9,6	1,270	24	0,068	4,8	0,161	0,203
2,6	15,6	1,390	10,4	1,280	26	0,068	5,2	0,162	0,204
2,8	16,8	1,395	11,2	1,290	28	0,068	5,6	0,162	0,199
3,0	18,0	1,400	12,0	1,292	30	0,069	6,0	0,163	0,202

Кривая 1 (рис. 6-9), построенная по полному дифференциальному уравнению системы, по своему характеру близка к кривой, изображенной на рис. 6-3, которая построена по упрощенному дифференциальному уравнению той же системы.

§ 6-5. ПОСТРОЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ПО ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Построение вещественной частотной характеристики замкнутой системы требует довольно трудоемких вычислений. При исследовании устойчивости системы часто вычерчивается амплитудно-фазовая характеристика или логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы. Разработаны методы построения вещественной частотной характеристики замкнутой системы по имеющимся упомянутым выше характеристикам разомкнутой системы.

В. В. Солодовников предложил метод графического построения вещественной частотной характеристики замкнутой системы по вычерченной амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы [9, 33]. Метод можно применять, если система является минимально-фазовой, при возмущающем воздействии в виде единичного скачка, при нулевых начальных условиях и когда передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 - W_{\text{раз}}(p)}, \quad (6-62)$$

где $W_{\text{раз}}(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

Такой вид имеют передаточные функции подавляющего большинства замкнутых систем автоматического регулирования.

Минимально-фазовыми называются системы автоматического регулирования, передаточные функции которых не имеют нулей (корни многочлена в числителе) и полюсов (корни характеристического уравнения, находящегося в знаменателе), расположенных в правой полуплоскости комплексной плоскости корней.

В минимально-фазовых системах сдвиг фазы выходной величины по отношению к входной оказывается при всех частотах наименьшим из всех возможных для данной амплитудной характеристики.

Например, система с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$$

является минимально-фазовой, а система с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K(T_1 p - 1)}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$$

является неминимально-фазовой. Обе эти системы имеют одинаковые амплитудные частотные характеристики. Но у первой системы максимальный фазовый сдвиг между входом и выходом при $\omega \rightarrow \infty$

составляет -90° , а у второй, которая имеет нуль (корень числителя), расположенный в правой полуплоскости, фазовый сдвиг при $\omega \rightarrow \infty$ составляет -270° .

У минимально-фазовых систем между амплитудной и фазовой характеристиками существует однозначная зависимость, если задана одна характеристика, то, в принципе, можно найти и другую. У неминимально-фазовых систем такой однозначной зависимости между характеристиками не существует. Практически приходится иметь дело с устойчивыми минимально-фазовыми системами автоматического регулирования.

Заменяя в выражении (6-62) p на $j\omega$, найдем уравнение амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = \frac{W_{\text{раз}}(j\omega)}{1 + W_{\text{раз}}(j\omega)}. \quad (6-63)$$

Отделим в амплитудно-фазовых характеристиках замкнутой и разомкнутой систем вещественную и мнимую части

$$\begin{aligned} W_{\text{зам}}(j\omega) &= P_{\text{зам}}(\omega) + jQ_{\text{зам}}(\omega); \\ W_{\text{раз}}(j\omega) &= U(\omega) + jV(\omega). \end{aligned} \quad (6-64)$$

Подставив эти значения в выражение (6-63), получим

$$P_{\text{зам}}(\omega) + jQ_{\text{зам}}(\omega) = \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + U(\omega) + jV(\omega)} = \frac{[U(\omega) + jV(\omega)][1 + U(\omega) - jV(\omega)]}{[1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)},$$

откуда вещественная часть замкнутой системы

$$P_{\text{зам}}(\omega) = \frac{U^2(\omega) + U(\omega) + V^2(\omega)}{[1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)}. \quad (6-65)$$

Преобразуем это выражение

$$[1 + U(\omega)]^2 P_{\text{зам}}(\omega) + V^2(\omega) P_{\text{зам}}(\omega) = U^2(\omega) + U(\omega) + V^2(\omega),$$

откуда

$$\begin{aligned} [P_{\text{зам}}(\omega) - 1] U^2(\omega) + [2P_{\text{зам}}(\omega) - 1] U(\omega) + \\ + [P_{\text{зам}}(\omega) - 1] V^2(\omega) + P_{\text{зам}}(\omega) = 0 \end{aligned}$$

или

$$U^2(\omega) + \frac{2P_{\text{зам}}(\omega) - 1}{P_{\text{зам}}(\omega) - 1} U(\omega) + V^2(\omega) = - \frac{P_{\text{зам}}(\omega)}{P_{\text{зам}}(\omega) - 1}.$$

Прибавим к правой и левой частям величину

$$\frac{[1 - 2P_{\text{зам}}(\omega)]^2}{4[1 - P_{\text{зам}}(\omega)]^2}$$

и после преобразования получим

$$[U(\omega) - D]^2 + V^2(\omega) = R^2, \quad (6-66)$$

где

$$D = - \frac{1 - 2P_{\text{зам}}(\omega)}{2[1 - P_{\text{зам}}(\omega)]}; \quad R = \frac{1}{2[1 - P_{\text{зам}}(\omega)]}.$$

Для различных постоянных значений $P_{\text{зам}}(\omega)$ выражение (6-66) представляет уравнение окружностей с радиусами R , центры которых лежат на вещественной оси на расстоянии D от начала координат. Во всех случаях

$$D - R = \frac{-1 + 2P_{\text{зам}}(\omega)}{2[1 - P_{\text{зам}}(\omega)]} - \frac{1}{2[1 - P_{\text{зам}}(\omega)]} = -1, \quad (6-67)$$

что свидетельствует о том, что все окружности для различных значений $P_{\text{зам}}(\omega)$ проходят через точку $(-1, j0)$.

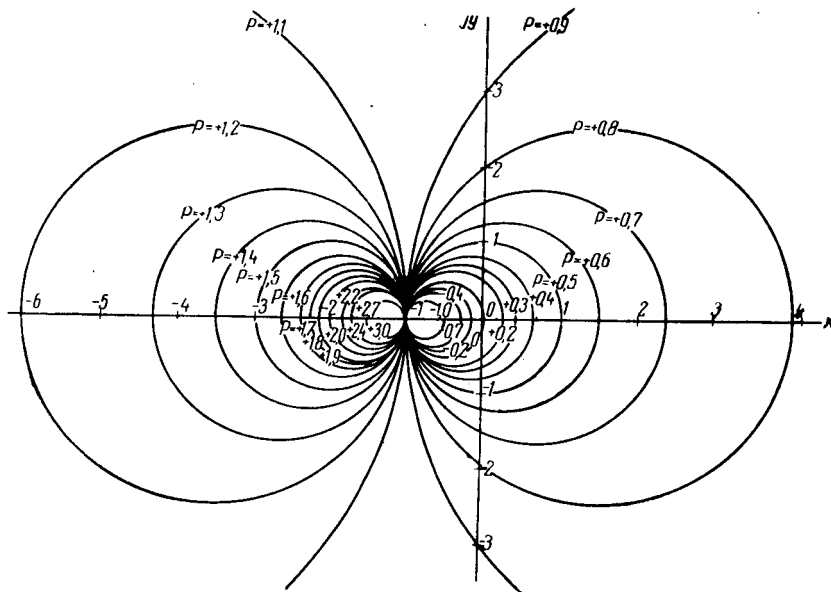


Рис. 6-11. Вещественные круговые диаграммы

Семейство окружностей для различных значений $P_{\text{зам}}(\omega)$, построенных на плоскости U, j, V , приведено на рис. 6-11. Здесь цифры, помещенные в разрыве окружностей и называемые индексами, являются ординатами вещественной частотной характеристики замкнутой системы. Если на этой плоскости построить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы (в координатах U, jV), то точка пересечения этой характеристики с окружностью дает координаты вещественной частотной характеристики: ордината $P_{\text{зам}}(\omega)$ равна индексу окружности, а частота ω — частоте, соответствующей точке пересечения амплитудно-фазовой характеристики с окружностью. Находя координаты по каждому пересечению амплитудно-фазовой характеристики с различными окружностями, строим вещественную частотную характеристику в координатах $P_{\text{зам}}(\omega), \omega$.

Вещественная частотная характеристика замкнутой системы может быть построена также по логарифмическим частотным харак-

теристикам разомкнутой системы с помощью диаграммы, приведенной на рис. 6-12. По оси абсцисс отложены значения фазы в градусах, а по оси ординат — значения отношения амплитуд в децибелах. В этих координатах построены кривые, соответствующие окружностям на рис. 6-11. Цифры, стоящие у каждой кривой, которые тоже называются индексами, представляют ординаты вещественной частотной характеристики замкнутой системы.

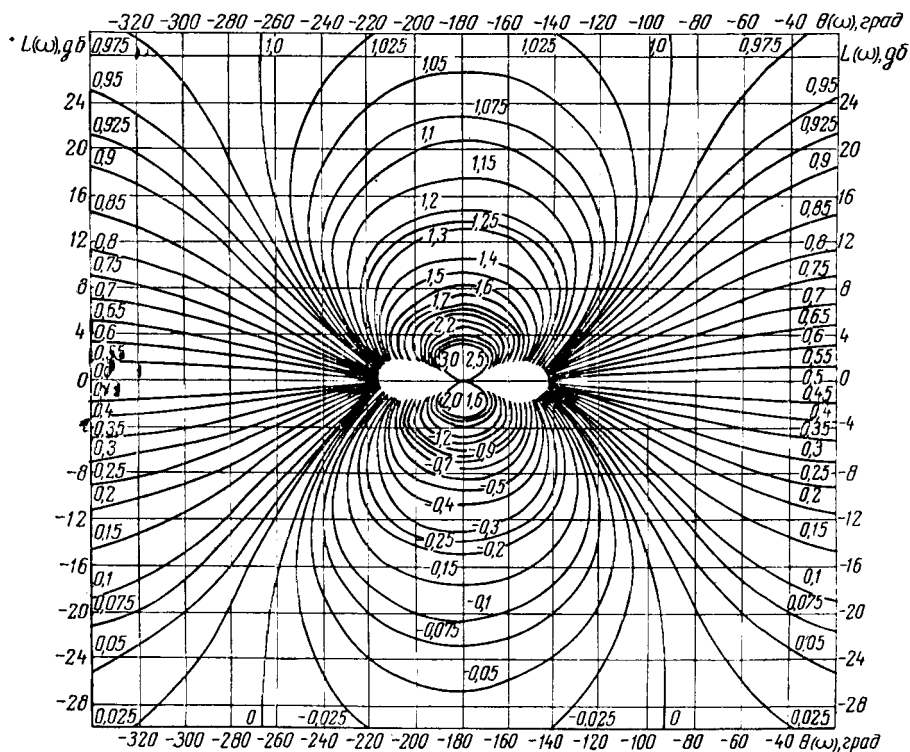


Рис. 6-12. Вещественные круговые диаграммы в логарифмическом масштабе

По имеющимся логарифмическим частотным характеристикам определяем фазы и отношения амплитуд для соответственно одинаковых частот и наносим эти точки на диаграмму (рис. 6-12). Соединив эти точки плавной кривой, получаем амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы в логарифмическом масштабе. В точках пересечения этой характеристики с кривыми по индексу кривой определяем ординату вещественной частотной характеристики замкнутой системы, которой соответствует частота совпадающей с данной кривой точки амплитудно-фазовой характеристики.

Построением вещественных частотных характеристик по логариф-

мическим частотным характеристикам облегчается синтез корректирующих устройств систем автоматического регулирования, который рассматривается в следующей главе.

§ 6-6. ВЛИЯНИЕ НА ПРОЦЕСС РЕГУЛИРОВАНИЯ МАЛЫХ ПАРАМЕТРОВ

Чем сложнее структурная схема системы автоматического регулирования и больше количество различных элементов она содержит, тем выше оказывается порядок дифференциального уравнения и тем сложнее ее исследование.

Параметры различных элементов имеют обычно различные численные значения и по-разному влияют на процесс регулирования.

Установлено, что количественно малые параметры в ряде случаев оказывают незначительное влияние на переходный процесс и ими без ущерба для точности исследования можно пренебречь, что приводит к понижению порядка дифференциального уравнения и упрощению исследования.

В других случаях отбрасывание малых параметров сильно искажает переходный процесс и может явиться причиной ошибочных выводов. Поэтому очень важно уметь оценить влияние малых параметров на поведение системы автоматического регулирования.

Параметрами элементов систем автоматического регулирования являются постоянные времени и коэффициенты усиления. Коэффициенты усиления элементов входят сомножителями в общий коэффициент усиления системы, поэтому пренебречь ими нельзя ни в коем случае. Постоянные времени при их относительной малости можно в ряде случаев отбрасывать.

Относительно малыми постоянными времени считаются в том случае, если они меньше других, ближайших по величине постоянных на один или несколько порядков (т. е. в 10, в 100 раз и т. д.). В рассмотренном выше примере (§ 5-2) постоянные времени имеют значения: $T_1 = 0,05$; $T_2 = 0,10$; $T_3 = 0,20$; $T_4 = 1$. Постоянная времени T_1 меньше следующей по величине постоянной T_2 всего лишь в 2 раза, T_2 меньше T_3 тоже в 2 раза, а T_3 меньше T_4 в 5 раз. Ни одна постоянная времени не может считаться достаточно малой, чтобы ее можно было бы отбросить. Если уменьшить постоянную времени T_1 до значения $T_1 \leq 0,01$, то она может считаться достаточно малой относительно следующей ближайшей по величине $T_2 = 0,10$.

Малые постоянные времени можно отбрасывать в одноконтурных системах автоматического регулирования. В многоконтурных системах их можно отбрасывать в элементах, входящих в основную цепь элементов, и ни в коем случае отбрасывать нельзя, если эти постоянные характеризуют элементы, входящие в местные обратные связи, так как постоянные времени элементов обратной связи перемножаются с постоянными времени охватываемых звеньев и, таким образом, существенно влияют на переходный процесс системы.

Отбрасывание одной постоянной времени снижает порядок дифференциального уравнения на единицу, и все дальнейшие

исследования могут выполняться с помощью упрощенного уравнения.

Однако в тех случаях, когда при исследовании устойчивости по упрощенному уравнению система оказывается близкой к границе устойчивости, следует проверить устойчивость также по полному уравнению, так как отбрасывание малых параметров в таких случаях иногда может сделать неустойчивую систему устойчивой. Более подробно с вопросом учета малых параметров можно ознакомиться по работе М. В. Меерова [28].

Отбрасывание малой постоянной времени обычно приводит к обращению в нуль коэффициента при старшей производной дифференциального уравнения и к некоторому изменению коэффициентов при остальных производных.

Упрощение дифференциального уравнения бывает возможным и в тех случаях, когда нет малых параметров, которые можно было бы отбросить, но относительно малыми оказываются коэффициенты при старших производных в дифференциальном уравнении.

Если коэффициенты при старших производных дифференциального уравнения оказываются на один или несколько порядков меньше, чем коэффициенты при последующих производных, то члены с малыми коэффициентами могут быть отброшены и это не вносит существенных погрешностей в результаты исследования. Если малыми оказываются коэффициенты при промежуточных производных, то отбрасывать их нельзя. Например, в дифференциальном уравнении, полученном из выражения (6-49), при найденных выше коэффициентах

$$(0,001p^4 + 0,035p^3 + 0,355p^2 + 1,15p + 5)\bar{\varphi} = (0,005p^2 + 0,15p + 1)\bar{\sigma} \quad (6-68)$$

в левой части малыми можно считать коэффициенты 0,001 и 0,035, а в правой — 0,005. Отбрасывая члены, содержащие эти коэффициенты, получаем упрощенное уравнение

$$(0,355p^2 + 1,15p + 5)\bar{\varphi} = (0,15p + 1)\bar{\sigma}, \quad (6-69)$$

по которому определяем передаточную функцию замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{0,15p + 1}{0,355p^2 + 1,15p + 5}. \quad (6-70)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = \frac{0,15j\omega + 1}{-0,355\omega^2 + 1,15j\omega + 5}. \quad (6-71)$$

Умножая числитель и знаменатель выражения (6-71) на комплексное число, сопряженное знаменателю, и отделяя вещественную и мнимую части, получаем уравнение вещественной частотной характеристики замкнутой системы

$$P_{\text{зам}}(\omega) = \frac{-0,183\omega^2 + 5}{0,126\omega^4 - 2,228\omega^2 + 25}. \quad (6-72)$$

Подставляя в выражение (6-72) различные значения ω в пределах от 0 до 20, вычисляем значения $P_{\text{зам}}(\omega)$. Результаты вычислений сведены в табл. 6-5. На рис. 6-6 по данным табл. 6-5 построена вещественная частотная характеристика (кривая 3).

Таблица 6-5

ω	Числитель выражения (6-72)	Знаменатель выражения (6-72)	$P_{\text{зам}}(\omega)$
0,0	+5,000	25,000	+0,200
0,5	+4,954	24,451	+0,203
1,0	+4,817	22,898	+0,210
2,0	+4,268	18,104	+0,236
3,0	+3,353	15,154	+0,221
3,5	+2,758	16,615	+0,166
4,0	+2,072	21,608	+0,096
4,5	+1,294	31,556	+0,041
5,0	+0,425	48,050	+0,009
6,0	-1,588	108,340	-0,015
7,0	-3,967	218,354	-0,018
8,0	-6,712	398,504	-0,017
9,0	-9,823	671,218	-0,015
10,0	-13,300	1062,200	-0,013
15,0	-36,175	5902,450	-0,006
20,0	-68,200	19293,800	-0,004

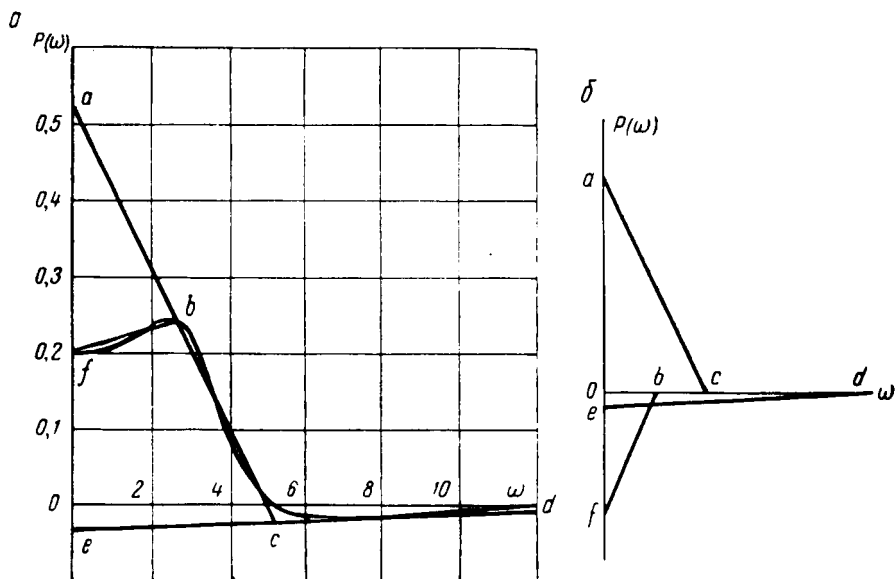


Рис. 6-13. Разбивка вещественной частотной характеристики на треугольники

На рис. 6-13, *a* эта характеристика разбита на треугольники, которые на рис. 6-13, *б* преобразованы в прямоугольные треугольники, расположенные соответственно знакам площадей и имеющие следующие высоты:

Треугольники	Высоты	Основания
<i>aco</i> ;	$ao = H_1 = 0,56$;	$oc = \omega_1 = 5,2$;
<i>obf</i> ;	$of = H_2 = -0,33$;	$ob = \omega_2 = 2,7$;
<i>ode</i> ;	$oe = H_3 = -0,04$;	$od = \omega_3 = 12$.

Вычисления, произведенные с помощью приложения, сведены в табл. 6-6.

Таблица 6-6

<i>t</i> , сек	Треугольник <i>aco</i>		Треугольник <i>obf</i>		Треугольник <i>ode</i>		Φ
	$\tau_1 = \omega_1 t = 5,2t$	$\varphi_1 = H_1 h_\tau = 0,56h_\tau$	$\tau_2 = \omega_2 t = 2,7t$	$\varphi_2 = H_2 h_\tau = -0,33h_\tau$	$\tau_3 = \omega_3 t = 12t$	$\varphi_3 = H_3 h_\tau = -0,04h_\tau$	
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,52	0,092	0,27	-0,028	1,2	-0,015	0,049
0,2	1,04	0,180	0,54	-0,056	2,4	-0,026	0,098
0,4	2,08	0,330	1,08	-0,110	4,8	-0,036	0,184
0,6	3,12	0,431	1,62	-0,158	7,8	-0,036	0,237
0,8	4,16	0,484	2,16	-0,200	9,6	-0,037	0,247
1,0	5,20	0,503	2,70	-0,234	12,0	-0,038	0,231
1,2	6,24	0,506	3,24	-0,259	14,4	-0,038	0,209
1,4	7,28	0,507	3,78	-0,277	16,8	-0,039	0,191
1,6	8,32	0,512	4,32	-0,288	19,2	-0,039	0,185
1,8	9,36	0,521	4,86	-0,295	21,6	-0,039	0,187
2,0	10,40	0,528	5,40	-0,297	24,0	-0,039	0,192
2,2	11,44	0,531	5,94	-0,298	26,4	-0,039	0,194
2,4	12,48	0,532	6,48	-0,298	28,8	-0,039	0,195
2,6	13,52	0,532	7,02	-0,298	31,2	-0,039	0,195
2,8	14,56	0,535	7,56	-0,299	33,6	-0,039	0,197
3,0	15,60	0,537	8,10	-0,301	36,0	-0,039	0,197

На рис. 6-9 по данным таблицы построена кривая переходного процесса (кривая 2).

Сравнивая на рис. 6-9 кривые 1 и 2, построенные соответственно по полному и упрощенному уравнениям, видим, что они отличаются друг от друга незначительно. Обе эти кривые являются приближенными.

На основании изложенного приходим к выводу, который является общим, что при исследовании систем автоматического регулирования можно, не внося заметной погрешности в результаты, отбрасывать члены дифференциального уравнения, содержащие старшие производные, если коэффициенты при них на один или более порядков величин меньше коэффициентов при ближайших последующих производных.

Отбрасывание малых постоянных времени или членов с малыми коэффициентами при старших производных приводит к потере в характеристическом уравнении корней с большими абсолютными значениями вещественной части, которые соответствуют быстро затухающим составляющим переходного процесса, что вносит некоторую погрешность в самом начале общего переходного процесса. Это справедливо в том случае, когда рабочие частоты системы относительно низки. Но при автоматизации производственных процессов обычно именно это и имеет место. Звенья с большими постоянными времени не пропускают высоких частот, переходные процессы протекают относительно медленно, рабочими оказываются только низкие частоты (медленные изменения воздействий), и отбрасывание малых параметров является вполне допустимым.

Если объект регулирования имеет большую постоянную времени (например, шаровая мельница), а постоянные времени звеньев, входящих в регулятор, на много порядков меньше (электронный регулятор), то, не внося заметной погрешности, все малые постоянные времени можно приравнять нулю и привести порядок дифференциального уравнения к порядку уравнения регулируемого объекта, что существенно упрощает исследование.

Контрольные вопросы

1. Основные показатели качества систем автоматического регулирования.
2. Какие существуют методы исследования качества систем автоматического регулирования?
3. Какая существует связь между распределением корней характеристического уравнения на комплексной плоскости и качеством системы?
4. Как влияет на качество переходного процесса распределение нулей и полюсов передаточной функции системы?
5. В чем сущность интегральных оценок качества?
6. Какие методы интегральных оценок качества существуют и в каких случаях они применяются?
7. Какая существует связь между вещественной частотной характеристикой и переходным процессом системы автоматического регулирования?
8. Как построить переходный процесс по вещественной частотной характеристике?
9. Как построить вещественную частотную характеристику по известным логарифмическим амплитудной и фазовой частотным характеристикам?
10. В каких случаях можно пренебречь влиянием малых параметров системы автоматического регулирования на переходный процесс?

КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 7-1. НАЗНАЧЕНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Корректирующими называются устройства с легко изменяемыми параметрами и характеристиками, вводимые в состав систем автоматического регулирования для придания им требуемых динамических свойств — обеспечения устойчивости систем автоматического регулирования и улучшения показателей качества переходного процесса.

Если спроектированная система автоматического регулирования оказалась неустойчивой, то она может быть сделана устойчивой или, как говорят, стабилизирована введением специальных корректирующих устройств, которые в этом случае обычно называют *стабилизирующими устройствами*.

Неустойчивые системы делятся на структурно-устойчивые и структурно-неустойчивые.

Структурно-устойчивыми называются системы автоматического регулирования в том случае, если их можно сделать устойчивыми изменением численных значений их параметров (постоянных времени, коэффициентов усиления), не изменяя структурной схемы.

Структурно-неустойчивыми называются системы автоматического регулирования, которые никаким изменением их параметров нельзя сделать устойчивыми. Добиться устойчивости этих систем можно только изменением их структурной схемы.

Чтобы уяснить разницу между указанными системами, рассмотрим пример. Предположим, что система, состоящая только из двух апериодических звеньев, характеризуется амплитудно-фазовой характеристикой, изображенной кривой 1 на рис. 7-1.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики такой системы

$$W_1(j\omega) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}.$$

Из рассмотрения кривой 1 видно, что система структурно-устойчива, так как кривая не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

Введем в эту систему одно интегрирующее звено, уравнение амплитудно-фазовой характеристики которого

$$W_2(j\omega) = \frac{k_3}{j\omega} = \frac{k_3}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Из этого выражения видно, что интегрирующее звено, включенное в систему последовательно, поворачивает все векторы амплитудно-фазовой характеристики системы на 90° по часовой стрелке и увеличивает модули в $\frac{k_3}{\omega}$ раз.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики системы с интегрирующим звеном

$$W_3(j\omega) = \frac{k_1 k_2 k_3}{j\omega (T_1 j\omega + 1) (T_2 j\omega + 1)}.$$

Характеристика, построенная по этому уравнению, изображена кривой 2 на рис. 7-1. Она свидетельствует, что новая система является также структурно-устойчивой. Если бы кривая 2 охватывала точку с координатами $(-1, j0)$, то изменением параметров системы можно было бы добиться того, чтобы она не охватывала ее.

Если в систему последовательно включить второе интегрирующее звено с амплитудно-фазовой характеристикой

$$W_4(j\omega) = \frac{k_4}{j\omega} = \frac{k_4}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

то уравнение амплитудно-фазовой характеристики системы примет вид

$$W_5(j\omega) = \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{(j\omega)^2 (T_1 j\omega + 1) (T_2 j\omega + 1)}.$$

Все векторы первоначальной амплитудно-фазовой характеристики повернутся по часовой стрелке на 180° , и амплитудно-фазовая характеристика, построенная по последнему уравнению (кривая 3, рис. 7-1), уходит в бесконечность во втором квадрате и при любых значениях параметров охватывает точку с координатами $(-1, j0)$. Следовательно, система при введении в нее двух последовательно соединенных интегрирующих звеньев становится структурно-неустойчивой. Чтобы сделать ее устойчивой, нужно изменить ее структурную схему, введя корректирующие устройства.

Принципиальные схемы, конструкция и способы включения корректирующих устройств различны. Они зависят от принципиальной схемы и конструкции элементов системы автоматического регулирования и от того, какой дефект системы требуется исправить.

Корректирующие устройства по способу включения в систему автоматического регулирования делятся на параллельные и последовательные.

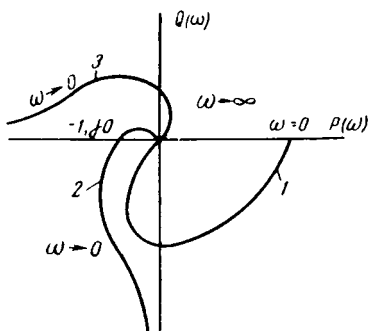


Рис. 7-1. Амплитудно-фазовые характеристики структурно-устойчивых и структурно-неустойчивых систем

§ 7-2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

Параллельными называются корректирующие устройства, включаемые параллельно одному или нескольким звеньям системы автоматического регулирования. Эти устройства представляют собой местные обратные связи. Такое соединение корректирующих устройств иначе называется встречно-параллельным (см. рис. 4-5).

Корректирующие устройства, в которых воздействия передаются в том же направлении, что и в элементе основной цепи (см. рис. 4-4), вместе с элементами основной цепи следует относить к по-

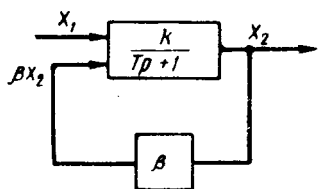


Рис. 7-2. Аперiodическое звено, охваченное жесткой обратной связью

следовательным корректирующим устройствам, которые рассматриваются в следующем параграфе.

Выбор параллельных корректирующих устройств сводится к определению характера и параметров обратной связи.

Обратные связи, как это было установлено в § 1-4, делятся на жесткие и гибкие, положительные и отрицательные. Все эти виды обратных связей могут применяться в качестве корректирующих устройств.

Рассмотрим влияние различных обратных связей на динамические свойства системы при различных способах их включения.

Жесткая обратная связь охватывает аперiodическое звено. Предположим, что аперiodическое звено с передаточной функцией

$\frac{k}{Tp+1}$ и дифференциальным уравнением

$$(Tp+1)\bar{x}_2 = k\bar{x}_1 \quad (7-1)$$

охвачено жесткой обратной связью с коэффициентом связи β (рис. 7-2).

Передаточная функция аперiodического звена, охваченного отрицательной обратной связью ($\beta < 0$), согласно теореме третьей (§ 4-3)

$$W(p) = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} = \frac{\frac{k}{Tp+1}}{1 + \frac{k}{Tp+1}\beta} = \frac{k}{Tp+1+\beta k} \quad (7-2)$$

Из выражения (7-2) находим уравнение аперiodического звена, охваченного отрицательной обратной связью

$$(Tp+1+\beta k)\bar{x}_2 = k\bar{x}_1 \quad (7-3)$$

Вынесем за скобки в левой части $(1+\beta k)$

$$(1+\beta k)\left(\frac{T}{1+\beta k}p+1\right)\bar{x}_2 = k\bar{x}_1,$$

откуда

$$\left(\frac{T}{1+\beta k}p+1\right)\bar{x}_2 = \frac{k}{1+\beta k}\bar{x}_1 \quad (7-4)$$

При положительной обратной связи ($\beta > 0$)

$$\left(\frac{T}{1-\beta k} p + 1\right) \bar{x}_2 = \frac{k}{1-\beta k} \bar{x}_1. \quad (7-5)$$

Обозначив

$$T_1 = \frac{T}{1+\beta k}; \quad T_2 = \frac{T}{1-\beta k}; \quad k_1 = \frac{k}{1+\beta k}; \quad k_2 = \frac{k}{1-\beta k},$$

получим

$$(T_1 p + 1) \bar{x}_2 = k_1 \bar{x}_1; \quad (7-6)$$

$$(T_2 p + 1) \bar{x}_2 = k_2 \bar{x}_1. \quad (7-7)$$

Структура этих уравнений не отличается от структуры уравнения аperiodического звена без обратной связи (7-4). При отрицательной обратной связи [уравнения (7-4) и (7-6)] качественных изменений аperiodического звена не происходит, имеет место уменьшение постоянной времени звена и его коэффициента усиления $T_1 < T$; $k_1 < k$.

При положительной обратной связи и $\beta k < 1$ качественных изменений аperiodического звена не происходит, а увеличиваются постоянная времени звена и его коэффициент усиления $T_2 > T$; $k_2 > k$.

Если при положительной обратной связи $\beta k > 1$, то аperiodическое звено становится неустойчивым и ухудшает динамические свойства системы.

Отрицательная жесткая обратная связь увеличивает быстродействие системы, может повысить ее устойчивость, но снижает точность регулирования в установившемся режиме.

Положительная обратная связь при $\beta k < 1$ уменьшает быстродействие системы и может снизить ее устойчивость и даже сделать неустойчивой.

В рассмотренных примерах предполагалось, что жесткая обратная связь безынерционна. Однако иногда жесткая обратная связь может иметь постоянную времени T_c , например, если для жесткой связи используются обмотки возбуждения электрических машин, обладающие значительной индуктивностью. В этом случае цепь обратной связи представляет аperiodическое звено с передаточной функцией $\frac{\beta}{T_c p + 1}$.

Воспользовавшись теоремой третьей (см. § 4-3) и произведя преобразования, аналогичные приведенным выше, получим уравнения звена, охваченного жесткой отрицательной обратной связью,

$$\left(\frac{T T_c}{1+\beta k} p^2 + \frac{T+T_c}{1+\beta k} p + 1\right) \bar{x}_2 = \frac{k}{1+\beta k} (T_c p + 1) \bar{x}_1 \quad (7-8)$$

или звена, охваченного жесткой положительной обратной связью,

$$\left(\frac{T T_c}{1-\beta k} p^2 + \frac{T+T_c}{1-\beta k} p + 1\right) \bar{x}_2 = \frac{k}{1-\beta k} (T_c p + 1) \bar{x}_1. \quad (7-9)$$

Для уравнений (7-8) и (7-9) оказываются справедливыми все рассуждения, относящиеся к уравнениям (7-6) и (7-7). Дополнительной особенностью является то, что с увеличением T_c влияние отрицательной обратной связи при прочих равных условиях уменьшается, так как T_c входит в числитель и компенсирует влияние слагаемого βk , входящего в знаменатель членов уравнений (7-8) и (7-9).

Влияние жесткой обратной связи на охватываемое ею колебательное звено аналогично влиянию на аperiodическое звено: отрицательная жесткая обратная связь уменьшает постоянные времени и коэффициент усиления, положительная — увеличивает их. Поэтому охват колебательного звена отрицательной жесткой обратной связью для улучшения динамических свойств может применяться только в структурно-устойчивых системах.

Жесткая обратная связь охватывает интегрирующее звено.
Передаточная функция интегрирующего звена

$$W(p) = \frac{k}{p}. \quad (7-10)$$

Передаточная функция этого звена, охваченного отрицательной жесткой обратной связью с коэффициентом связи β , по теореме третьей

$$W_z(p) = \frac{\frac{k}{p}}{1 + \frac{k}{p} \beta} = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{k\beta} p + 1} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}, \quad (7-11)$$

откуда уравнение интегрирующего звена, охваченного жесткой отрицательной обратной связью,

$$\left(\frac{1}{k\beta} p + 1 \right) \bar{x}_2 = \frac{1}{\beta} \bar{x}_1. \quad (7-12)$$

Обозначив $\frac{1}{k\beta} = T$ и $\frac{1}{\beta} = k_1$, получим

$$(Tp + 1) \bar{x}_2 = k_1 \bar{x}_1. \quad (7-13)$$

Таким образом, интегрирующее звено, охваченное жесткой отрицательной обратной связью, превращается в аperiodическое звено, что приводит к изменению структурной схемы.

Такой метод коррекции может применяться для превращения астатических систем в статические.

При охвате интегрирующего звена положительной жесткой обратной связью оно превращается в неустойчивое аperiodическое звено с уравнением

$$(Tp - 1) \bar{x}_2 = k_1 \bar{x}_1, \quad (7-14)$$

которое может только ухудшить динамические свойства системы.

Жесткая обратная связь охватывает два последовательно соединенных интегрирующих звена. Пусть имеются два интегрирующих звена с передаточными функциями

$$W_1(p) = \frac{\bar{x}_2}{x_1} = \frac{k_1}{p}; \quad W_2(p) = \frac{\bar{x}_3}{x_2} = \frac{k_2}{p}. \quad (7-15)$$

При последовательном соединении этих звеньев передаточная функция согласно теореме первой (см. § 4-3)

$$W_{1,2}(p) = \frac{\bar{x}_3}{x_1} = \frac{k_1 k_2}{p^2}. \quad (7-16)$$

Передаточная функция этих звеньев, охваченных отрицательной жесткой обратной связью с коэффициентом связи β , по теореме третьей

$$W_3(p) = \frac{\bar{x}_3}{x_1} = \frac{\frac{k_1 k_2}{p^2}}{1 + \frac{k_1 k_2}{p^2} \beta} = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{k_1 k_2 \beta} p^2 + 1},$$

откуда уравнение двух интегрирующих звеньев, охваченных обратной связью,

$$\left(\frac{1}{k_1 k_2 \beta} p^2 + 1 \right) \bar{x}_3 = \frac{1}{\beta} \bar{x}_1. \quad (7-17)$$

Этим выражением описывается консервативное звено.

Корни характеристического уравнения

$$\frac{1}{k_1 k_2 \beta} p^2 + 1 = 0 \quad (7-18)$$

чисто мнимые и система будет совершать незатухающие гармонические колебания, т. е. будет неустойчивой.

Выше было показано, что введение в систему автоматического регулирования двух последовательно соединенных интегрирующих звеньев делает систему неустойчивой. Охват этих звеньев общей жесткой отрицательной обратной связью оставляет ее неустойчивой.

Система остается неустойчивой и при охвате двух последовательно соединенных интегрирующих звеньев положительной жесткой обратной связью. Уравнение системы в этом случае

$$\left(\frac{1}{k_1 k_2 \beta} p^2 - 1 \right) \bar{x}_3 = \frac{1}{\beta} \bar{x}_1 \quad (7-19)$$

имеет один положительный корень. Система неустойчива.

Таким образом, введением в систему жестких отрицательных обратных связей, охватывающих апериодическое, колебательное или одно интегрирующее звено, можно повысить устойчивость системы и даже превратить неустойчивую систему в устойчивую. Однако вследствие того что жесткая отрицательная обратная связь действует на систему в переходном и установившемся режимах, введение ее

приводит к понижению коэффициента усиления системы и, следовательно, к снижению точности в установившемся режиме.

Гибкие обратные связи и их влияние на динамические свойства системы. Гибкие обратные связи отличаются тем, что они действуют в переходных режимах и не действуют в установившихся. При введении гибкой обратной связи на вход охваченного ею звена подается величина, пропорциональная скорости изменения выходной величины этого звена, т. е. производная от выходной величины этого звена.

Электрические гибкие обратные связи осуществляются с помощью дифференцирующих трансформаторов и цепей, содержащих емкости. Механические гибкие обратные связи выполняются обычно в виде массивного катаракта (демпфера) с пружиной.

Рассмотрим влияние гибкой обратной связи на динамические свойства системы автоматического регулирования. Предположим, что имеется одноконтурная система автоматического регулирования, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p), \dots, W_n(p), \quad (7-20)$$

где $W_1(p), W_2(p), W_3(p), \dots, W_n(p)$ — передаточные функции отдельных последовательно соединенных звеньев.

Введем гибкую отрицательную обратную связь с передаточной функцией $W_c(p)$, охватывающую одно из звеньев, например второе. Передаточная функция этого звена с учетом обратной связи

$$W_{2c}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) W_c(p)}. \quad (7-21)$$

Подставив значение $W_{2c}(p)$ в выражение (7-20) вместо $W_2(p)$, получим передаточную функцию разомкнутой системы с местной обратной связью

$$W_o(p) = W_1(p) \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p) W_c(p)} W_3(p), \dots, W_n(p) \quad (7-22)$$

или

$$W_o(p) = \frac{W(p)}{1 + W_2(p) W_c(p)}. \quad (7-23)$$

Если обратная связь охватывает несколько последовательно соединенных звеньев, то в знаменатель уравнения (7-23) вместо $W_2(p)$ следует подставить произведение передаточных функций звеньев, охваченных обратной связью.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики системы с обратной связью

$$W_o(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W_2(j\omega) W_c(j\omega)}. \quad (7-24)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики системы без обратной связи можно представить в показательной форме

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{-j\theta(\omega)}, \quad (7-25)$$

где $A(\omega)$ и $\theta(\omega)$ — соответственно амплитудная и фазовая частотные характеристики разомкнутой системы без местной обратной связи.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики знаменателя уравнения (7-24) также можно представить в показательной форме

$$1 + W_2(j\omega) W_c(j\omega) = W_k(j\omega) = A_k(\omega) e^{-j\theta_k(\omega)}. \quad (7-26)$$

Подставив в выражение (7-24) значения числителя и знаменателя, из выражений (7-25) и (7-26) получим

$$W_o(j\omega) = \frac{A(\omega) e^{-j\theta(\omega)}}{A_k(\omega) e^{-j\theta_k(\omega)}} = \frac{A(\omega)}{A_k(\omega)} e^{-j[\theta(\omega) - \theta_k(\omega)]}. \quad (7-27)$$

Из выражения (7-27) видно, что при введении гибкой обратной связи модуль вектора амплитудно-фазовой характеристики при любой частоте ω равен частному от деления модуля вектора амплитудно-фазовой характеристики системы без обратной связи на модуль вектора $W_k(j\omega)$, а аргумент равен разности фаз этих векторов. Таким образом, введение гибкой обратной связи уменьшает модуль амплитудно-фазовой характеристики системы без обратной связи, что уменьшает динамическую точность и быстродействие системы и поворачивает его в положительном направлении (против часовой стрелки) на угол $\theta_k(\omega)$, что приводит к повышению устойчивости системы.

С увеличением частоты ω действие гибкой обратной связи уменьшается, так как выражение (7-26), входящее в знаменатель формулы (7-27), стремится в этом случае к единице. В установившемся режиме действие гибкой обратной связи полностью прекращается.

Достоинства параллельных корректирующих устройств:

1. Стабильность характеристик системы повышается за счет звеньев, охваченных обратной связью, и поэтому требования к стабильности параметров этих звеньев могут быть менее жесткими, чем требования к неохваченным обратной связью звеньям. Это становится очевидным на основании следующих рассуждений.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, часть звеньев которой охвачена отрицательной обратной связью, имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{W_o(j\omega)}{1 + W_o(j\omega) W_k(j\omega)} W_{ho}(j\omega), \quad (7-28)$$

где $W_k(j\omega)$, $W_o(j\omega)$, $W_{ho}(j\omega)$ — соответственно уравнения амплитудно-фазовых характеристик корректирующего устройства и звеньев, охваченных и не охваченных обратной связью.

В диапазоне существующих частот при достаточно мощном корректирующем устройстве

$$[W_o(j\omega) W_k(j\omega)] \gg 1,$$

поэтому в выражении (7-28) единиц в знаменателе можно пренебречь. После сокращения получим

$$W(j\omega) \approx \frac{W_{ho}(j\omega)}{W_k(j\omega)}. \quad (7-29)$$

Из выражения (7-29) следует, что амплитудно-фазовая характеристика скорректированной системы не зависит от параметров звеньев, охваченных обратной связью.

2. Системы с параллельными корректирующими устройствами малочувствительны к помехам, накладывающимся на основной сигнал, пропорциональный отклонению регулируемой величины. Это объясняется тем, что вход обратной связи включен на выход охваченных обратной связью звеньев, которые выполняют функцию фильтра низких частот, снижающего уровень помех.

3. Применение параллельных корректирующих устройств не требует применения дополнительных усилителей, так как уровень мощности на выходе звеньев, охватываемых обратной связью, бывает достаточно высоким.

Недостатки параллельных корректирующих устройств:

1. Относительная дороговизна и громоздкость (например, стабилизирующих трансформаторов и др.).

2. Затруднения в некоторых случаях при суммировании основного сигнала и сигнала, поступающего по обратной связи (иногда технически неосуществимо).

§ 7-3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

Последовательными называются корректирующие устройства, включаемые в главный контур системы регулирования последовательно с остальными звеньями системы (см. рис. 4-3).

В последовательном корректирующем устройстве могут быть местные параллельные обратные связи.

Последовательные корректирующие устройства служат для преобразования сигналов, пропорциональных отклонению регулируемой величины таким образом, что на выходе корректирующего устройства получается сигнал, пропорциональный отклонению регулируемой величины, а также сигналы, пропорциональные производным и интегралам от отклонения.

В общем случае выходная величина идеализированного последовательного корректирующего устройства

$$x_{вых} = k \left(x_{вх} + \alpha_1 \frac{dx_{вх}}{dt} + \alpha_2 \int_0^t x_{вх} dt \right) \quad (7-30)$$

равна сумме величин: пропорциональной входному сигналу, производной от входного сигнала и интегралу от входного сигнала.

В частных случаях корректирующее устройство может вводить в систему только производную первого и более высоких порядков или только интеграл с одинарным или двойным интегрированием.

Выясним влияние на динамические свойства системы автоматического регулирования производных и интегралов, вводимых в закон регулирования при помощи последовательных корректирующих устройств.

Введение в закон регулирования производных. Рассмотрим одно-контурную систему автоматического регулирования, в которую включено последовательное корректирующее устройство, вводящее в закон регулирования величину, пропорциональную производной от отклонения регулируемой величины.

Пусть передаточная функция системы представлена без последовательного корректирующего устройства $W(p)$. При включении последовательно с системой корректирующего устройства с дифференцирующим звеном в систему будет подаваться сумма отклонения регулируемой величины x_1 и величины, пропорциональной ее первой производной $\alpha \frac{dx}{dt}$. В операторной форме эта сумма имеет вид

$$\bar{x}_1 + \alpha p \bar{x}_1 = (1 + \alpha p) \bar{x}_1. \quad (7-31)$$

Передаточная функция системы с дифференцирующим устройством

$$W_c(p) = W(p) (1 + \alpha p). \quad (7-32)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики системы с дифференцирующим устройством

$$W_c(j\omega) = W(j\omega) (1 + \alpha j\omega) = W(j\omega) + \alpha j\omega W(j\omega). \quad (7-33)$$

Переходя к показательной форме, получим

$$\begin{aligned} W_c(j\omega) &= A(\omega) e^{-j\theta(\omega)} + \alpha \omega e^{j\frac{\pi}{2}} A(\omega) e^{-j\theta(\omega)} = \\ &= A(\omega) e^{-j\theta(\omega)} + \alpha \omega A(\omega) e^{-j\left[\theta(\omega) - \frac{\pi}{2}\right]}. \end{aligned} \quad (7-34)$$

Из выражения (7-34) следует, что при введении в закон регулирования первой производной к векторам $W(j\omega)$ амплитудно-фазовой характеристики системы без корректирующего устройства добавляются векторы $\alpha \omega W(j\omega)$, повернутые относительно первых в положительном направлении (против часовой стрелки) на 90° (рис. 7-3). Соответствующим подбором коэффициента α неустойчивая система, таким образом, может быть превращена в устойчивую.

Результирующие векторы $W_c(j\omega)$ больше векторов $W(j\omega)$ системы без корректирующего устройства, что свидетельствует о том, что введение первой производной увеличивает коэффициент усиления системы, увеличивает быстродействие системы при увеличении запаса устойчивости.

Если корректирующее устройство вводит в закон регулирования кроме первой и вторую производную от отклонения регулируемой величины, то передаточная функция системы по аналогии с выражением (7-32) будет иметь вид

$$W_c(p) = W(p) (1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2). \quad (7-35)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W_c(j\omega) = W(j\omega) + \alpha_1 j\omega W(j\omega) + \alpha_2 (j\omega)^2 W(j\omega). \quad (7-36)$$

Из выражения (7-36) следует, что вектор $W_c(j\omega)$ представляет сумму трех векторов: вектора $W(j\omega)$, вектора $\alpha_1 j\omega W(j\omega)$, повернутого относительно первого вектора на 90° в положительном направлении, и вектора $\alpha_2 (j\omega)^2 W(j\omega)$, повернутого относительно первого вектора на 180° .

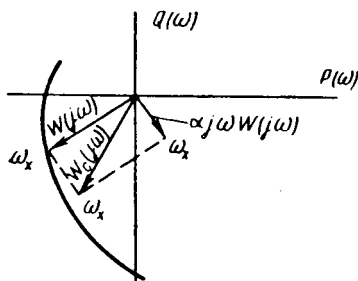


Рис. 7-3. Введение в закон регулирования производной

Введение в закон регулирования одновременного воздействия по первой и второй производным поворачивает суммарный вектор $W_c(j\omega)$ на значительный угол в положительном направлении и уменьшает коэффициент усиления системы, что приводит к значительному повышению устойчивости и уменьшению быстродействия системы.

В рассмотренных примерах предполагалось, что последовательное корректирующее устройство состоит из идеальных дифференцирующих звеньев, что практически неосуществимо. Реальные дифференцирующие звенья вносят при дифференцировании искажения, которые несколько ухудшают полученные выше свойства последовательных корректирующих устройств.

Рассмотрим влияние на процесс регулирования корректирующего устройства, содержащего реальное дифференцирующее звено, рассмотренное в § 3-6 и имеющее передаточную функцию

$$W_d(p) = \frac{kTp}{1+Tp}. \quad (7-37)$$

В этом случае передаточная функция системы по аналогии с выражением (7-32) имеет вид

$$W_c(p) = W(p) + W(p) \frac{kTp}{1+Tp}. \quad (7-38)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$W_c(j\omega) = W(j\omega) + W(j\omega) \frac{kTj\omega}{1+Tj\omega}. \quad (7-39)$$

В § 3-6 было указано, что выражение $\frac{kTj\omega}{1+Tj\omega}$ представляет собой уравнение полуокружности. При любой частоте $\omega_x < \infty$ ар-

гумент вектора $\frac{kTj\omega}{1+Tj\omega}$ равен $\theta_x = \operatorname{arctg} \frac{1}{T\omega x} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, при введении реального дифференцирующего звена дополнительный вектор в выражении (7-39) повернут относительно вектора $W(j\omega)$ на угол $\theta < 90^\circ$. Чем больше частота ω , тем меньше угол θ , т. е. тем слабее будет действовать реальное дифференцирующее звено. Для уменьшения искажения при дифференцировании необходимо снижать постоянную времени T дифференцирующего звена.

Введением дополнительного воздействия по производным можно существенно улучшить переходный процесс в системе, компенсируя влияние больших постоянных времени, снижающих динамическую точность регулирования.

Предположим, что в систему регулирования входят два апериодических звена с большими постоянными времени T_1 и T_2 . На вход системы поданы отклонение регулируемой величины, ее первая и вторая производные.

Передаточная функция системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 \dots k_n (1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) R_i(p)}, \quad (7-40)$$

где $R_i(p)$ — произведение операторов остальных звеньев системы; α_1 и α_2 — коэффициенты, имеющие размерность соответственно сек и сек^2 .

Трехчлен в числителе может быть разложен на два сомножителя первого порядка

$$1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 = (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p).$$

Подобрав постоянные времени дифференцирующего устройства так, чтобы $\tau_1 = T_1$ и $\tau_2 = T_2$, получим

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 \dots k_n (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) R_i(p)} = \frac{k_1 k_2 \dots k_n}{R_i(p)}. \quad (7-41)$$

Влияние больших постоянных времени, которые конструктивно изменить нельзя, компенсировано воздействиями по производным.

Введение в закон регулирования интеграла. Рассмотрим одноконтурную систему автоматического регулирования, в которую включено последовательное корректирующее устройство, вводящее в закон регулирования величину, пропорциональную интегралу от отклонения регулируемой величины.

Пусть передаточная функция системы представлена без последовательного корректирующего устройства $W(p)$. При включении последовательно с системой корректирующего устройства с интегрирующим звеном в систему будет подаваться сумма отклонения регулируемой величины x_1 и величины, пропорциональной ее интегралу $\alpha \int_0^t x_1 dt$.

В операторной форме эта сумма имеет вид

$$\bar{x}_1 + \frac{\alpha}{p} \bar{x}_1 = \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right) \bar{x}_1. \quad (7-42)$$

Передаточная функция системы с интегрирующим устройством

$$W_c(p) = W(p) \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right). \quad (7-43)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики системы с интегрирующим устройством

$$W_c(j\omega) = W(j\omega) \left(1 + \frac{\alpha}{j\omega}\right) = W(j\omega) + \frac{\alpha}{j\omega} W(j\omega). \quad (7-44)$$

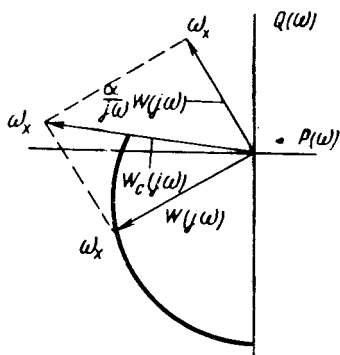


Рис. 7-4. Введение в закон регулирования интеграла

Переходя к показательной форме, получим

$$W_c(j\omega) = A(\omega) e^{-j\theta(\omega)} + \frac{\alpha}{\omega} A(\omega) e^{-j\left[\theta(\omega) + \frac{\pi}{2}\right]}. \quad (7-45)$$

Из выражения (7-44) следует, что при введении в закон регулирования интеграла к векторам $W(j\omega)$ амплитудно-фазовой характеристики системы без корректирующего устройства добавляются векторы $\frac{\alpha}{j\omega} W(j\omega)$, повернутые относительно первых в отрицательном направлении (по часовой стрелке) на 90° (рис. 7-4).

Введение дополнительного воздействия по интегралу приводит к увеличению коэффициента усиления системы, что видно из рис. 7-4, и ее быстродействия, а также к снижению степени устойчивости системы.

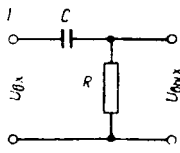
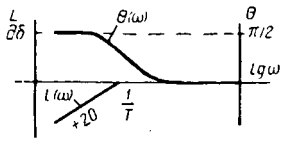
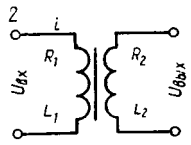
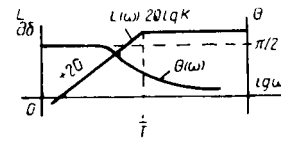
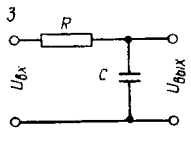
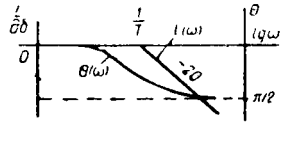
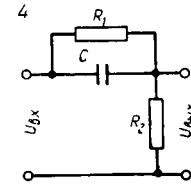
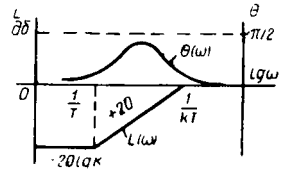
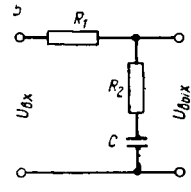
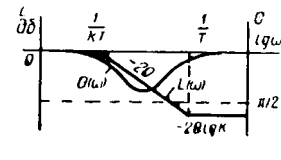
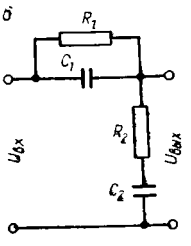
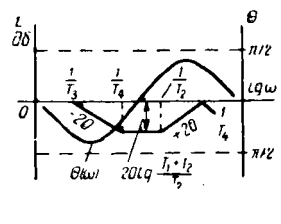
В то же время введение воздействия по интегралу приводит к увеличению статической точности в установившемся режиме. Это становится очевидным на основании следующих рассуждений.

Передаточная функция замкнутой системы без корректирующего устройства

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \quad (7-46)$$

Предположим, что это статическая система, для которой погрешность регулирования в установившемся режиме равна постоянной величине и действительное значение регулируемой величины отличается от заданного на эту постоянную величину (см. § 4-5). Введем в систему дополнительное воздействие по интегралу. Тогда

Таблица 7-1

Схема	Передаточная функция	Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики
	$W(p) = \frac{Tp}{Tp + 1}$ $T = RC$	
	$W(p) = \frac{kTp}{Tp + 1}$ $T = \frac{L_1}{R} ; k = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}}$	
	$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}$ $T = RC$	
	$W(p) = \frac{k(Tp + 1)}{kTp + 1}$ $T = CR_1$ $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$	
	$W(p) = \frac{Tp + 1}{kTp + 1}$ $T = CR_2$ $k = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$	
	$W(p) = \frac{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}{(T_3p + 1)(T_4p + 1)}$ $T_1 = C_1R_1 ; T_2 = C_2R_2$ $T_3T_4 = T_1T_2$ $T_3T_4 = T_1 + T_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$	

передаточная функция скорректированной системы

$$\Phi_c(p) = \frac{W(p) \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)}{1 + W(p) \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)}. \quad (7-47)$$

В установившемся режиме при $p \rightarrow 0$ $\Phi_c(p) \rightarrow 1$, т. е. в этом случае действительное значение регулируемой величины равно заданному. Погрешность регулирования равна нулю. Поэтому последовательное корректирующее устройство с воздействием по интегралу вводится в тех случаях, когда необходимо увеличить статическую точность системы.

Достоинством последовательных корректирующих устройств являются простота и дешевизна, так как в большинстве случаев они могут быть выполнены из пассивных четырехполюсников, содержащих емкости и активные сопротивления.

Недостатками последовательных корректирующих устройств являются:

1) высокая чувствительность к изменению параметров остальных звеньев системы, что выдвигает повышенные требования к стабильности параметров звеньев; 2) высокая чувствительность к помехам, накладываемым на основной сигнал.

Последовательные корректирующие устройства применяются главным образом в маломощных устойчивых системах для улучшения качества переходных процессов, а также в системах автоматического регулирования сложных технологических объектов, в которых конструктивно нельзя применить параллельные корректирующие устройства.

В табл. 7-1 приведены схемы, передаточные функции и логарифмические частотные характеристики некоторых корректирующих устройств.

§ 7-4. СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Стабилизировать структурно-устойчивую систему можно изменением соотношения постоянных времени. Чтобы система была устойчивой, одна из постоянных времени должна быть велика по отношению к остальным. Однако практически изменять постоянные времени в широких пределах невозможно, так как они определяются конструкцией звеньев. Систему можно сделать устойчивой уменьшением общего коэффициента усиления, однако это ведет к уменьшению точности в установившемся режиме и недопустимо в большинстве случаев по требованиям, которые предъявляет технологический процесс.

Введение стабилизирующих устройств всегда возможно, и при правильном выборе их это всегда приводит к желаемому результату. Как следует из § 7-2 и 7-3, стабилизирующие устройства могут

быть параллельными и последовательными. Для стабилизации применяются гибкие обратные связи (параллельные устройства) и воздействия по производным (последовательные устройства).

Наиболее широко применяются для стабилизации гибкие обратные связи, которые в системах автоматизированного электропривода часто осуществляются с помощью стабилизирующих трансформаторов. Особенностью этих трансформаторов является наличие воздушного зазора в магнитопроводе, изменяя величину которого можно менять постоянную времени трансформатора.

Рассмотрим стабилизацию системы автоматического регулирования введением стабилизирующего трансформатора на конкретном примере. В § 5-3 показано, что система автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока, изображенная на рис. 4-1, имеет критический коэффициент усиления $K_{кр} = 8,1$. Если по требованиям технологии точность регулирования должна быть повышена, то необходимо увеличить коэффициент усиления (передаточный коэффициент). Это приведет к потере устойчивости системы.

Для стабилизации системы введем гибкую обратную связь, охватывающую электромагнитный усилитель и осуществляемую с помощью стабилизирующего трансформатора $ТС$ (рис. 7-5). Первичная обмотка трансформатора включена на выходные зажимы $ЭМУ$, а в цепь вторичной обмотки включена одна из обмоток управления $ЭМУ$. Соответствующая структурная схема системы с обратной связью приведена на рис. 7-6.

Выпишем передаточные функции (4-4), (4-7), (4-10) и (5-65) соответственно всех звеньев, учитывая, что стабилизирующий трансформатор представляет собой дифференцирующее звено

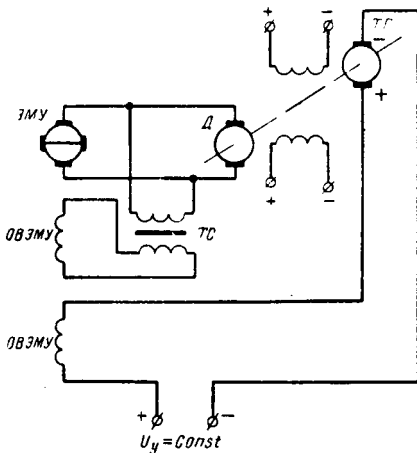


Рис. 7-5. Система автоматического регулирования с гибкой обратной связью

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1};$$

$$W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1};$$

$$W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1};$$

$$W_{тс}(p) = \frac{k_{тс} T_{тс} p}{T_{тс} p + 1},$$

где $k_{тс}$, $T_{тс}$ — соответственно коэффициент усиления и постоянная времени стабилизирующего трансформатора.

Найдем результирующую передаточную функцию $W_o(p)$ двух первых последовательно соединенных звеньев, охваченных обратной связью

$$W_o(p) = \frac{\frac{k_1 k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}}{1 + \frac{k_1 k_2 k_{тс} T_{тс} p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{тс} p + 1)}} = \frac{k_1 k_2 (T_{тс} p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{тс} p + 1) + k_1 k_2 k_{тс} T_{тс} p} \quad (7-48)$$

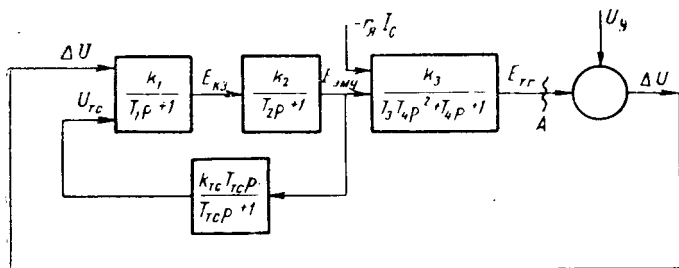


Рис. 7-6. Структурная схема системы автоматического регулирования с гибкой обратной связью

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{раз}(p) = W_o(p) W_3(p) = \frac{k_1 k_2 k_3 (T_{тс} p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1)(T_{тс} p + 1) + k_1 k_2 k_{тс} T_{тс} p} \quad (7-49)$$

или в краткой записи

$$W_{раз}(p) = \frac{K (T_{тс} p + 1)}{S(p)} \quad (7-50)$$

Система регулирования разомкнута в точке A (рис. 7-6). Найдем значение $E_{тг}$ при подаче на вход величины ΔU

$$\bar{E}_{тг} = \frac{K (T_{тс} p + 1)}{S(p)} \Delta \bar{U} - \frac{k_3}{T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1} r_{я} \bar{I}_c, \quad (7-51)$$

откуда уравнение разомкнутой системы

$$S(p) \bar{E}_{тг} = K (T_{тс} p + 1) \Delta \bar{U} - L(p) k_3 r_{я} \bar{I}_c, \quad (7-52)$$

где

$$L(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_{тс} p + 1) + k_1 k_2 k_{тс} T_{тс} p. \quad (7-53)$$

Вводя в уравнение (7-52) условие замкнутости $\Delta U = U_y - E_{тг}$, получаем уравнение замкнутой системы

$$[S(p) + K (T_{тс} p + 1)] \bar{E}_{тг} = K (T_{тс} p + 1) \bar{U}_y - L(p) k_3 r_{я} \bar{I}_c. \quad (7-54)$$

Переходя к обозначениям (4-24), получаем уравнение замкнутой системы с гибкой обратной связью в относительных безразмерных величинах

$$[S(p) + K(T_{\text{тс}}p + 1)] \bar{\varphi} = K(T_{\text{тс}}p + 1) \bar{\psi} - L(p) k_3 \bar{\sigma}. \quad (7-55)$$

Запишем это уравнение в развернутой форме

$$\begin{aligned} & [(T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3T_4p^2 + T_4p + 1)(T_{\text{тс}}p + 1) + \\ & + k_1k_2k_{\text{тс}}T_{\text{тс}}p(T_3T_4p^2 + T_4p + 1) + K(T_{\text{тс}}p + 1)] \bar{\varphi} = \\ & = K(T_{\text{тс}}p + 1) \bar{\psi} - [(T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_{\text{тс}}p + 1) + k_1k_2k_{\text{тс}}T_{\text{тс}}p] k_3 \bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (7-56)$$

Произведем умножение в правой и левой частях уравнения, соберем в правой и левой частях коэффициенты при одинаковых степенях p и, обозначив

$$\begin{aligned} a_0 &= T_1T_2T_3T_4T_{\text{тс}}; \\ a_1 &= T_1T_2T_3T_4 + T_1T_2T_4T_{\text{тс}} + T_1T_3T_4T_{\text{тс}} + T_2T_3T_4T_{\text{тс}}; \\ a_2 &= T_1T_2T_4 + T_1T_3T_4 + T_2T_3T_4 + T_1T_2T_{\text{тс}} + T_1T_4T_{\text{тс}} + T_2T_4T_{\text{тс}} + \\ & + T_3T_4T_{\text{тс}} + k_1k_2k_{\text{тс}}T_3T_4T_{\text{тс}}; \\ a_3 &= T_1T_2 + T_1T_4 + T_2T_4 + T_3T_4 + T_1T_{\text{тс}} + T_2T_{\text{тс}} + T_4T_{\text{тс}} + k_1k_2k_{\text{тс}}T_4T_{\text{тс}}; \\ a_4 &= T_1 + T_2 + T_4 + T_{\text{тс}} + k_1k_2k_{\text{тс}}T_{\text{тс}} + k_1k_2k_3T_{\text{тс}}; \\ K &= k_1k_2k_3; \\ d_0 &= T_1T_2T_{\text{тс}}; \\ d_1 &= T_1T_2 + T_1T_{\text{тс}} + T_2T_{\text{тс}}; \\ d_2 &= T_1 + T_2 + T_{\text{тс}} + k_1k_2k_{\text{тс}}T_{\text{тс}}, \end{aligned} \quad (7-57)$$

получим

$$\begin{aligned} (a_0p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + K + 1) \bar{\varphi} &= K(T_{\text{тс}}p + 1) \bar{\psi} - \\ - (d_0p^3 + d_1p^2 + d_2p + 1) k_3 \bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (7-58)$$

Введение гибкой отрицательной обратной связи с помощью дифференцирующего звена первого порядка повышает порядок уравнения на единицу.

Действие обратной связи зависит от ее параметров — коэффициента усиления $k_{\text{тс}}$ и постоянной времени $T_{\text{тс}}$. Определим, при каких значениях постоянной времени $T_{\text{тс}}$ при прочих неизменных условиях система будет сохранять устойчивость. Произведем Д-разбиение

по $T_{\text{тс}}$. Для этого выделим из коэффициентов (7-57) левой части уравнения (7-58) слагаемые, содержащие $T_{\text{тс}}$:

$$\begin{aligned} a_0 &= (T_1 T_2 T_3 T_4) T_{\text{тс}}; \\ a_1 &= T_1 T_2 T_3 T_4 + (T_1 T_2 T_4 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4) T_{\text{тс}}; \\ a_2 &= (T_1 T_2 T_4 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4) + (T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4 + \\ &\quad + T_3 T_4 + k_1 k_2 k_{\text{тс}} T_3 T_4) T_{\text{тс}}; \\ a_3 &= (T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4 + T_3 T_4) + (T_1 + T_2 + T_4 + k_1 k_2 k_{\text{тс}} T_4) T_{\text{тс}}; \\ a_4 &= (T_1 + T_2 + T_4) + (1 + k_1 k_2 k_{\text{тс}} + k_1 k_2 k_3) T_{\text{тс}}. \end{aligned}$$

Обозначим коэффициенты при $T_{\text{тс}}$:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= T_1 T_2 T_3 T_4; \\ b_1 &= T_1 T_2 T_4 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4; \\ b_2 &= T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4 + T_3 T_4 + k_1 k_2 k_{\text{тс}} T_3 T_4; \\ b_3 &= T_1 + T_2 + T_4 + k_1 k_2 k_{\text{тс}} T_4; \\ b_4 &= 1 + k_1 k_2 k_{\text{тс}} + k_1 k_2 k_3. \end{aligned} \right\} \quad (7-59)$$

Обозначим коэффициенты, не содержащие $T_{\text{тс}}$:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= T_1 T_2 T_3 T_4; \\ c_1 &= T_1 T_2 T_4 + T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4; \\ c_2 &= T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4 + T_3 T_4; \\ c_3 &= T_1 + T_2 + T_4; \\ K_1 &= K + 1. \end{aligned} \right\} \quad (7-60)$$

Используя эти обозначения, напомним характеристическое уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_{\text{тс}} (b_0 p^5 + b_1 p^4 + b_2 p^3 + b_3 p^2 + b_4 p) + (c_0 p^4 + c_1 p^3 + c_2 p^2 + \\ + c_3 p + K_1) = 0, \end{aligned} \quad (7-61)$$

откуда

$$T_{\text{тс}} = - \frac{c_0 p^4 + c_1 p^3 + c_2 p^2 + c_3 p + K_1}{b_0 p^5 + b_1 p^4 + b_2 p^3 + b_3 p^2 + b_4 p}. \quad (7-62)$$

Заменим в полученном выражении p на $j\omega$

$$T_{\text{тс}} = - \frac{c_0 \omega^4 - c_1 j \omega^3 - c_2 \omega^2 + c_3 j \omega + K_1}{b_0 j \omega^5 + b_1 \omega^4 - b_2 j \omega^3 - b_3 \omega^2 + b_4 j \omega}. \quad (7-63)$$

Отделим в выражении (7-63) вещественную и мнимую части

$$P(\omega) = \frac{(b_0c_1 - b_1c_0)\omega^8 + (-b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0)\omega^6 + + (-b_1K_1 + b_2c_3 - b_3c_2 + b_4c_1)\omega^4 + (b_1K_1 - b_3c_3)\omega^2}{b_0^2\omega^{10} + (b_1^2 - 2b_0b_2)\omega^8 + (b_2^2 + 2b_0b_4 - 2b_1b_3) \times \times \omega^6 + (b_3^2 - 2b_2b_4)\omega^4 + b_4^2\omega^2}; \quad (7-64)$$

$$Q(\omega) = \frac{b_0c_0\omega^9 + (-b_0c_2 + b_1c_1 - b_2c_0)\omega^7 + + (b_0K_1 - b_1c_3 + b_2c_2 - b_3c_1 + b_4c_0)\omega^5 + + (-b_2K_1 + b_3c_3 - b_4c_2)\omega^3 + b_4K_1\omega}{b_0^2\omega^{10} + (b_1^2 - 2b_0b_2)\omega^8 + (b_2^2 + 2b_0b_4 - 2b_1b_3)\omega^6 + + (b_3^2 - 2b_2b_4)\omega^4 + b_4^2\omega^2}. \quad (7-65)$$

Вычислим коэффициенты при следующих значениях параметров:

$$T_1 = 0,05; T_3 = 0,2; K = 50; k_2 = 1; k_{TC} = 1;$$

$$T_2 = 0,1; T_4 = 1; k_1 = 25; k_3 = 2.$$

Подставив эти значения в выражения (7-59) и (7-60), получим следующие значения коэффициентов:

$$b_0 = 0,001; b_2 = 5,355; b_4 = 76; c_1 = 0,035;$$

$$b_1 = 0,035; b_3 = 26,15; c_0 = 0,001; c_2 = 0,355;$$

$$K_1 = 51. \quad c_3 = 1,15.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в выражения (7-64) и (7-65), получим

$$P(\omega) = \frac{-0,15\omega^6 - 2,25\omega^4 + 1246\omega^2}{10^{-6}\omega^{10} - 0,0095\omega^8 + 27\omega^6 - 130\omega^4 + 5776\omega^2}; \quad (7-66)$$

$$Q(\omega) = \frac{10^{-6}\omega^9 - 0,0046\omega^7 + 1,07\omega^5 + 278\omega^3 + 3876\omega}{10^{-6}\omega^{10} - 0,0095\omega^8 + 27\omega^6 - 130\omega^4 + 5776\omega^2}. \quad (7-67)$$

Подставляя в выражения (7-66) и (7-67) значения ω от $-\infty$ до $+\infty$, получим координаты точек кривой Д-разбиения.

Результаты вычислений приведены в табл. 7-2.

Таблица 7-2

ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$	ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
$-\infty$	0	0	$+\infty$	0,22	$+\infty$
-8	0,01	-0,03	0,01	0,22	67,10
-5	0,06	-0,12	0,1	0,22	6,72
-3	0,18	-0,32	1	0,22	0,73
-1	0,22	-0,73	3	0,18	0,32
-0,1	0,22	-6,72	5	0,06	0,12
-0,01	0,22	-67,10	8	0,01	0,03
0	0,22	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

На рис. 7-7 с помощью табл. 7-2 построена кривая Д-разбиения. Так как постоянная времени стабилизирующего трансформатора — величина вещественная, то на рис. 7-7 она совпадает с вещественной осью $P(\omega)$. Вероятную область устойчивости определяют штриховкой, которая наносится влево при перемещении вдоль кривой по мере изменения ω от $-\infty$ к $+\infty$.

При $\omega = 0$ кривая Д-разбиения терпит разрыв. При подходе к нулю от $-\infty$ $Q(\omega)$ стремится к $-\infty$. При подходе к нулю от $+\infty$ $Q(\omega)$ стремится к $+\infty$. Постоянная времени $T_{тс}$ — величина существенно положительная и отрицательных значений принимать не может.

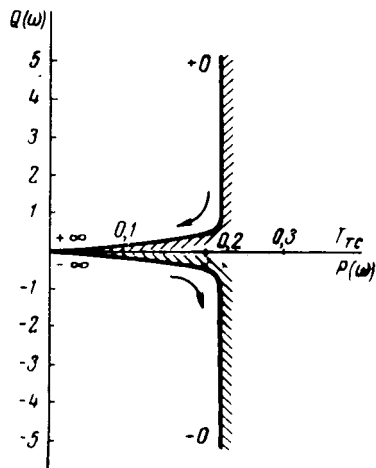


Рис. 7-7. Кривая Д-разбиения к примеру

Вероятной областью устойчивости может быть область 1, в сторону которой направлена штриховка и в которой $T_{тс}$ принимает положительные значения от 0 до $+\infty$. Для проверки этого положения исследуем систему на устойчивость при любом значении $T_{тс}$, находящемся в области 1. Принимаем, например, $T_{тс} = 0,5$. Тогда коэффициенты характеристического уравнения, вычисленные по выражениям (7-57) при значениях постоянных времени и коэффициентов усиления, приведенных в настоящем примере, имеют следующие значения:

$$a_0 = 0,0005; a_2 = 2,712; a_4 = 39,15;$$

$$a_1 = 0,0185; a_3 = 13,43; K + 1 = 50 + 1 = 51.$$

Характеристическое уравнение

$$0,0005p^5 + 0,0185p^4 + 2,712p^3 + 13,43p^2 + 39,15p + 51 = 0. \quad (7-68)$$

Подставляя в уравнение (7-68) $j\omega$ вместо P и отделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} P(\omega) &= 51 - 13,43\omega^2 + 0,0185\omega^4; \\ Q(\omega) &= 39,15\omega - 2,712\omega^3 + 0,0005\omega^5. \end{aligned} \quad (7-69)$$

Подставляя в выражения (7-69) различные значения ω от 0 до $+\infty$, получаем координаты годографа Михайлова. Результаты вычислений сведены в табл. 7-3.

С помощью табл. 7-3 на рис. 7-8 построен годограф Михайлова (без соблюдения масштаба), который проходит через 5 квадрантов, что свидетельствует об устойчивости системы. Следовательно, при всех значениях $T_{тс}$, находящихся в пределах от 0 сек до $+\infty$, система будет устойчива. Для увеличения быстродействия системы следует принимать значения $T_{тс}$ по возможности меньшими.

Таблица 7-3

ω	0	1	2	4	30	∞
$P(\omega)$	51	38	-2,7	-159	2 949	$+\infty$
$Q(\omega)$	0	36	56	-17	59 899	$+\infty$

Для того чтобы иметь возможность увеличить коэффициент усиления системы с сохранением ее устойчивости, следует охватить гибкой обратной связью те звенья, в которых происходит увеличение коэффициента усиления. В этом случае коэффициент усиления этих звеньев входит в коэффициенты характеристического уравнения и система может оставаться устойчивой при весьма больших коэффициентах усиления.

Системы до четвертого порядка включительно исследованы весьма детально [28] и даются рекомендации о способах включения гибкой обратной связи, при которых система остается устойчивой при сколько угодно больших коэффициентах усиления.

Исследование на устойчивость методом Д-разбиения производится по полному характеристическому уравнению, так как при упрощении уравнения отбрасыванием малых параметров получаются результаты, далекие от истинных.

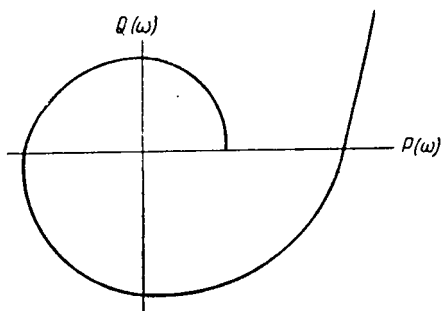


Рис. 7-8. Ногограф Михайлова стабилизированной системы

Контрольные вопросы

1. Что называется корректирующими устройствами и их назначение?
2. Какие корректирующие устройства называются параллельными, последовательными?
3. Как влияет жесткая обратная связь на характеристики охватываемых ее звеньев и системы в целом?
4. Как влияют гибкие обратные связи на динамические свойства системы в переходном режиме, на установившийся процесс?
5. Какое влияние оказывает на переходный процесс введение в закон регулирования производных, интеграла?
6. Достоинства и недостатки параллельных и последовательных корректирующих устройств?
7. Что называется структурно-устойчивой и структурно-неустойчивой системой?
8. Как можно стабилизировать неустойчивую систему?

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 8-1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Синтезом системы автоматического регулирования называется выбор структурной схемы и значений параметров ее отдельных звеньев, обеспечивающих заданную точность в установившемся режиме и характер переходного процесса, удовлетворяющий заданным показателям качества.

При синтезе систем автоматического регулирования всегда имеются серьезные ограничения в выборе структуры системы и параметров отдельных звеньев. Заданными, не подлежащими изменению, обычно являются характеристики регулируемого объекта. Полностью или частично ограничен выбор элементов, входящих в систему (исполнительных элементов, усилителей, датчиков и др.). Система автоматического регулирования может быть разбита на неизменяемую и изменяемую части, причем изменяемой частью оказываются корректирующие устройства.

Практически синтез систем автоматического регулирования сводится к выбору общего коэффициента усиления системы для обеспечения заданной точности в установившемся режиме и к синтезу корректирующих устройств для обеспечения заданных показателей качества переходного процесса.

В настоящее время существует несколько методов синтеза линейных систем автоматического регулирования. Если при синтезе требуется обеспечить ограниченное число показателей качества, то для выбора параметров можно воспользоваться методом распределения корней или методом распределения нулей и полюсов передаточной функции (§ 6-2), методом интегральных оценок (§ 6-3).

Вопросы синтеза систем автоматического регулирования детально рассматриваются в специальных монографиях, к которым следует обращаться при решении практических задач [5, 7, 33, 38]. Не следует переоценивать возможности расчетных методов синтеза систем автоматического регулирования. Вследствие сложности систем, отсутствия точных характеристик входящих в них элементов и регулируемого объекта можно получить только ориентировочные значения параметров корректирующих устройств. Окончательно значения этих параметров устанавливаются в процессе наладки и настройки систем в условиях работы.

При проектировании установки с применением нового, еще не изготовленного оборудования проектировщик не имеет в своем распоряжении характеристик объекта регулирования и других элементов. В этих случаях составляется только общая структурная схема системы автоматического регулирования. Затем в пуско-наладочный период экспериментально снимаются характеристики отдельных элементов и, если возможно, системы в целом, рассчитываются параметры корректирующих устройств и уточняются в процессе окончательной наладки.

Не следует, однако, и недооценивать расчетные методы синтеза систем, хотя они и представляются ограниченными. Следует твердо усвоить, что без расчетов экспериментальным путем получить систему автоматического регулирования с заданными показателями качества практически невозможно.

Все системы автоматического регулирования можно разделить на две группы: 1) быстродействующие, в которых постоянные времени элементов регулятора и объекта регулирования имеют один и тот же порядок (регуляторы скорости, частоты, напряжения, следящие системы); 2) медленнодействующие, в которых постоянные времени объекта могут иметь значения от нескольких минут до нескольких часов (различные технологические процессы).

В системах второй группы переходными процессами в регуляторах можно пренебречь. Уравнения системы в связи с этим и соответственно все исследования упрощаются.

В последующих параграфах рассмотрены вопросы синтеза корректирующих устройств применительно к системам первой группы, что является более сложным. Синтез корректирующих устройств в системах второй группы может выполняться теми же методами, но так как порядок уравнений оказывается невысоким, трудоемкость вычислений будет гораздо меньшей.

§ 8-2. СИНТЕЗ МЕТОДОМ ЛОГАРИФИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Метод синтеза корректирующих устройств с помощью логарифмических частотных характеристик предложен В. В. Солодовниковым. Более подробно этот метод рассмотрен в [33], а здесь он приведен без обоснований.

Выбор корректирующих устройств согласно этому методу осуществляется в следующем порядке. Строят логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики разомкнутой нескорректированной системы способом, указанным в § 2-3 и 5-5.

На том же графике строят желаемую логарифмическую амплитудную частотную характеристику, соответствующую системе, отвечающей заданным техническим требованиям, которые могут быть различными, но в общем могут содержать следующие показатели: 1) порядок астатизма системы (количество интегрирующих звеньев, входящих в систему); 2) максимальную величину перерегулирования

8%, вызываемого ступенчатым воздействием (см. рис. 6-1); 3) максимальное время переходного процесса t_0 (см. рис. 6-1), вызываемого ступенчатым воздействием; 4) максимальное ускорение $a_{\max}$, с которым изменяется регулируемая величина при ступенчатом воздействии, и ряд других показателей.

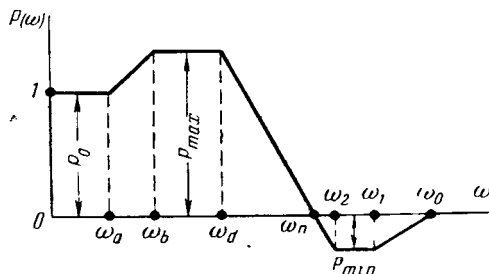


Рис. 8-1. Типовая вещественная частотная характеристика

В конкретных случаях интерес может представлять только часть перечисленных показателей.

Чтобы иметь возможность построить желаемую амплитудную частотную характеристику вместо реальной вещественной частотной характеристики, В. В. Солодовников предложил пользоваться приближенной типовой вещественной частотной характеристикой, которая измене-

нием своих параметров может быть к реальной характеристике.

Типовая вещественная частотная характеристика приведена на рис. 8-1. Она определяется следующими параметрами:

P_0 , $P_{\max}$, $P_{\min}$ — соответственно начальная, максимальная и минимальная ординаты;

$\chi = \frac{\omega_a}{\omega_n}$ — основной коэффициент наклона;

$\chi_a = \frac{\omega_a}{\omega_b}$, $\chi_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ — дополнительные коэффициенты наклона;

$\lambda_1 = \frac{\omega_b}{\omega_n}$, $\lambda_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$ — основной и дополнительный коэффициенты формы.

Соответствующие обозначения ω ясны из рис. 8-1.

Динамические свойства системы рассматриваются при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия.

При построении желаемой амплитудной частотной характеристики ее можно разбить на три характерных участка.

1. Участок низких частот, лежащий в пределах частот от нуля до первой сопрягающей частоты. Для статических систем наклон низкочастотной части логарифмической амплитудной частотной характеристики должен составлять 0 дБ/сек, для астатических — 20 в дБ/дек (в — число интегрирующих звеньев в системе, или порядок астатизма системы).

В обоих случаях ордината низкочастотной асимптоты при частоте $\omega = 1$ должна составлять 20 лг K (K — общий коэффициент усиления разомкнутой системы).

За низкочастотную часть желаемой характеристики можно принимать низкочастотную часть характеристики нескорректированной

системы. Этот участок характеристики определяет точность воспроизведения системой медленно меняющихся воздействий.

2. Участок, расположенный в области средних частот и определяющий запас устойчивости системы и ее качество при ступенчатом воздействии. В зоне средних частот должно происходить пересечение амплитудной характеристики с осью абсцисс при частоте, которая называется частотой среза ω_c .

Для обеспечения достаточного запаса устойчивости желаемая частотная характеристика при частоте среза ω_c должна иметь наклон -20 дб/дек.

3. Участок высоких частот, мало влияющий на качество переходного процесса, может не корректироваться.

Сопряжение среднечастотного участка желаемой характеристики с соседними может осуществляться непосредственно или, если это возможно, с помощью прямых, имеющих наклон 40 или 60 дб/дек. При этом особое внимание следует обращать на то, чтобы желаемая логарифмическая амплитудная характеристика имела наклон, возможно меньшие отличающийся от наклона нескорректированной характеристики. Это важно для того, чтобы получить более простую передаточную функцию корректирующего устройства.

Частота среза ω_c в среднечастотном диапазоне определяется, исходя из заданных $\delta\%$ и t_0 , по номограмме, приведенной на рис. 8-2.

По заданному $\delta\%$ определяется максимальная ордината $P_{\max}$ вещественной частотной характеристики, соответствующей желаемой амплитудной частотной характеристике. При значении $P_{\max}$ находим ординату кривой $t_0 = f(P_{\max})$. Ордината равна $\frac{n\pi}{\omega_c}$ и в то же время определяет заданное значение t_0 .

Таким образом

$$t_0 = \frac{n\pi}{\omega_c},$$

откуда

$$\omega_c = \frac{n\pi}{t_0}. \quad (8-1)$$

Предположим, например, что $\delta\% = 25\%$, $t_0 = 1 \text{ сек.}$ Тогда по кривой $\delta\%$ (рис. 8-2) находим $P_{\max} = 1,2$. Этому значению $P_{\max}$ соответствует значение $t_0 = \frac{3\pi}{\omega_c}$. Но $t_0 = 1$, так что из выражения (8-1) получим

$$\omega_c = \frac{3\pi}{1} \approx 10 \text{ рад/сек.}$$

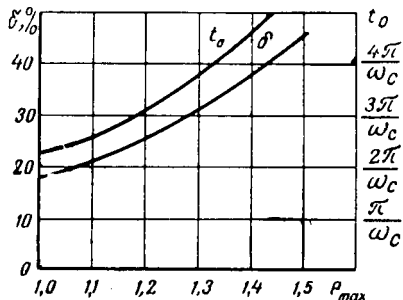


Рис. 8-2. Номограмма для определения частоты среза

Если выбрать частоту среза желаемой логарифмической амплитудной характеристики меньшей, чем получается из выражения (8-1), то нельзя гарантировать, что время переходного процесса не превзойдет заданное, т. е. t_0 .

По найденному выше максимальному значению $P_{\max}$ вещественной частотной характеристики находим минимальное значение $P_{\min}$

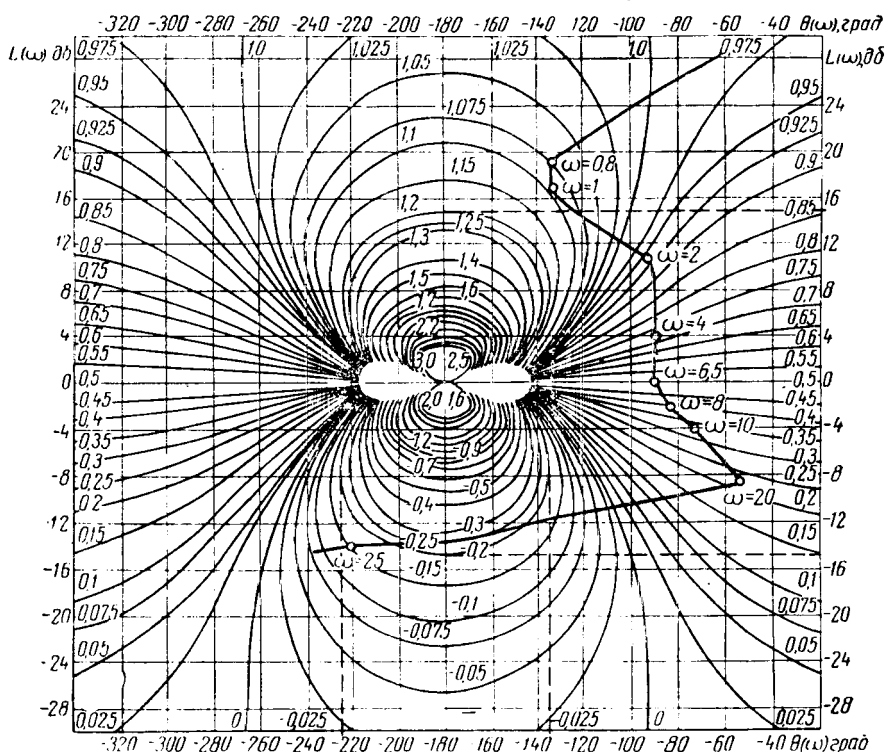


Рис. 8-3. К построению вещественной частотной характеристики замкнутой системы по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы

из приближенного соотношения для типовой вещественной характеристики

$$P_{\min} = 1 - P_{\max}. \quad (8-2)$$

Для рассмотренного выше случая получим

$$P_{\min} = 1 - 1,2 = -0,2.$$

Скорректированная система, чтобы обеспечить удовлетворительную работу, должна иметь определенный запас устойчивости по амплитуде и по фазе. Эти величины могут быть найдены по номограмме, изображенной на рис. 8-3. По оси ординат отложены отношения

выходной амплитуды к входной в децибелах, а по оси абсцисс сдвиг фаз выходной величины по отношению к входной разомкнутой системы. Кривые на рисунке являются линиями равных значений вещественной частотной характеристики замкнутой системы. Соответствующие значения вещественной частотной характеристики обозначены цифрами, стоящими у линий.

Для определения необходимого запаса по амплитуде находим на номограмме линии, соответствующие $P_{\max}$ и $P_{\min}$. В рассмотренном выше примере это линии 1,2 и $-0,2$. На номограмме (см. рис. 8-3) эти кривые симметричны относительно оси абсцисс.

Запас по амплитуде найдем, проведя к этим кривым горизонтальные касательные и прочитав соответствующие отметки на оси ординат. Для рассматриваемого примера получим $L_1 = 15 \text{ дб}$, $L_2 = -15 \text{ дб}$. Это значит, что среднечастотная часть логарифмической амплитудной частотной характеристики, проходящая через точку, соответствующую частоте среза ω_c , должна быть продолжена в обе стороны до ординат L_1 и L_2 и только тогда сопрягаться с соседними участками.

Запас устойчивости по фазе γ_1 находим, проведя вертикальные касательные к кривым $P_{\max}$ и $P_{\min}$ и отсчитав значение угла в градусах от касательной до линии -180° . Для данного примера $\gamma_1 = 45^\circ$. Это значит, что на всем интервале частот, на котором желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика удовлетворяет неравенству

$$L_1 \geq L_{\text{ж}}(\omega) \geq L_2, \quad (8-3)$$

фазовая характеристика должна отстоять от линии 180° не менее чем на 45° .

Так как скорректированная система является минимально-фазовой, то качество ее однозначно определяется амплитудной частотной характеристикой. Однако в том случае, когда предполагается в последующем приближенно построить кривую переходного процесса, следует построить и желаемую логарифмическую фазовую частотную характеристику. Эта характеристика может быть приближенно построена с помощью следующих выражений [33]:

в низкочастотной части (до частоты среза)

$$\gamma = \pi - \nu \frac{\pi}{2} - \left(k \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\omega_i}{\omega} \right) + \left(l \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{i=l} \frac{\omega_l}{\omega} \right); \quad (8-4)$$

в высокочастотной части (от частоты среза и выше)

$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{4} q_{\text{ср}} - \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\omega}{\omega_r}, \quad (8-5)$$

где ν — число интегрирующих звеньев в системе (степень астатизма); ω_i — сопрягающие частоты, меньшие того значения ω , при котором определяется γ ;

- k — число сопрягающих частот, при которых наклон логарифмической амплитудной частотной характеристики увеличивается на 20 дб/дек ;
- l — число сопрягающих частот, при которых наклон характеристики уменьшается на 20 дб/дек (рассматриваются точки сопряжения, находящиеся левее частоты ω_c , при которой определяется γ);
- $q_{\text{ср}}$ — количество единиц, соответствующих наклону среднечастотного участка характеристики (наклону -20 дб/дек соответствует $q_{\text{ср}} = 1$);
- ω_p — сопрягающие частоты, большие ω_c ;
- m — число сопрягающих частот, больших ω_c , при которых наклон характеристики увеличивается на 20 дб , и находящихся левее частоты ω , при которой определяется γ .

Найденные значения γ откладываются вверх от линии -180° . Кривая, соединяющая полученные точки, представляет желаемую фазовую частотную характеристику.

В случае последовательного корректирующего устройства желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика $L_{\text{ж}}(\omega)$ может рассматриваться как сумма двух характеристик: характеристики нескорректированной системы $L_{\text{нк}}(\omega)$ и характеристики корректирующего устройства $L_{\text{к}}(\omega)$

$$L_{\text{ж}}(\omega) = L_{\text{нк}}(\omega) + L_{\text{к}}(\omega), \quad (8-6)$$

откуда логарифмическая амплитудная частотная характеристика последовательного корректирующего устройства

$$L_{\text{к}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{нк}}(\omega). \quad (8-7)$$

Таким образом, для построения логарифмической амплитудной частотной характеристики последовательного корректирующего устройства следует из желаемой амплитудной характеристики графически вычесть характеристику нескорректированной системы. По найденной логарифмической амплитудной характеристике корректирующего устройства составляется его передаточная функция, по которой затем подбирается схема корректирующего устройства.

Выбранное корректирующее устройство может иметь логарифмическую частотную характеристику, несколько отличающуюся от желаемой.

Чтобы убедиться в правильности выбора корректирующего устройства, его амплитудную характеристику следует сложить с характеристикой нескорректированной системы, по результирующей характеристике построить вещественную частотную характеристику методом, изложенным выше, а с помощью последней методом типовых треугольников или трапеций построить кривую переходного процесса.

При выборе параллельного корректирующего устройства приближенное значение его логарифмической амплитудной частотной

характеристики $L_k(\omega)$ может быть найдено по формуле

$$L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{нк}}(\omega) = L_o(\omega) + L_k(\omega), \quad (8-8)$$

справедливой для частот, при которых $L_o(\omega) + L_k(\omega) \gg 0$.

Здесь $L_o(\omega)$ — логарифмическая амплитудная частотная характеристика звеньев, охваченных обратной связью.

Как следует из выражения (8-8), вначале находят результирующую характеристику $L_o(\omega) + L_k(\omega)$, после чего, исходя из технической осуществимости, определяют точки съема и ввода обратной связи и строят логарифмическую амплитудную частотную характеристику $L_o(\omega)$ звеньев, охваченных обратной связью.

Затем из результирующей амплитудной характеристики $L_o(\omega) + L_k(\omega)$ вычитают характеристику $L_o(\omega)$ и определяют, таким образом, приближенную логарифмическую амплитудную частотную характеристику корректирующего устройства, находящегося в цепи обратной связи. По найденной характеристике составляют передаточную функцию корректирующего звена, по которой затем подбирают схему корректирующего устройства.

Правильность выбора корректирующего устройства проверяется так же, как и в случае последовательного корректирующего устройства, т. е. по логарифмической амплитудной частотной характеристике скорректированной системы строится вещественная частотная характеристика, а с помощью последней строится кривая переходного процесса. При проверке возникает необходимость построить вещественную частотную характеристику замкнутой системы по логарифмическим амплитудной и фазовой частотным характеристикам разомкнутой системы. Такое построение можно осуществить с помощью номограммы, приведенной на рис. 8-3. Ось частот на логарифмических характеристиках разбивается на интервалы. Для частот, ограничивающих интервалы, определяется амплитуда в децибелах и фаза в градусах и по этим значениям наносятся точки на номограмму с пометкой соответствующей частоты. Нанесенные точки соединяются плавной кривой, которая представляет собой амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы. Точки пересечения амплитудно-фазовой характеристики с линиями равных значений $P(\omega)$ дают значения ординат вещественной частотной характеристики замкнутой системы при частотах, которым соответствуют точки пересечения на амплитудно-фазовой характеристике.

По найденным значениям $P(\omega)$ и ω строится вещественная частотная характеристика, а по ней методом, описанным в § 6-4, строится кривая переходного процесса.

Однако выбор корректирующих устройств по приведенной выше схеме осуществляется относительно несложно только в редких случаях. Для обеспечения подбора корректирующих устройств по их логарифмическим амплитудным частотным характеристикам составлены специальные весьма обширные таблицы, в которых приведены различные схемы корректирующих устройств и соответствующие им логарифмические амплитудные частотные характеристики [20, 46].

В ряде случаев выбрать корректирующее устройство с помощью таблицы не удается и тогда эта задача решается общим аналитическим методом, который содержит два этапа: 1) определение передаточной функции по графически заданным частотным характеристикам; 2) реализация полученной передаточной функции в виде схемы корректирующего устройства.

Пример. Выбрать корректирующее устройство для системы автоматического регулирования скорости вращения двигателя постоянного тока, изображенной на рис. 4-1, при следующих условиях: величина максимального перерегулирования при единичном воздействии не должна превышать $\delta\% = 30\%$; максимальное время переходного процесса должно быть не более $t_0 = 2$ сек.

Передаточная функция этой системы в разомкнутом состоянии определяется выражением

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 T_4 p^2 + T_4 p + 1)}. \quad (8-9)$$

Построим логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики по этой передаточной функции для следующих значений параметров:

$$T_1 = 0,05 \text{ сек}; T_2 = 0,1 \text{ сек}; T_3 = 0,2 \text{ сек}; T_4 = 1 \text{ сек};$$

$$k_1 = 25; k_2 = 2; k_3 = 1.$$

Найдем передаточную функцию системы для принятых значений параметров

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{50}{(0,05p)(0,1p + 1)(0,2p^2 + p + 1)}. \quad (8-10)$$

Система относится к классу минимально-фазовых. Логарифмические частотные характеристики этой системы построены на рис. 5-11 для параметров, отличающихся от принятых в данном примере лишь значением общего коэффициента усиления $k_1 k_2 k_3 = 4$.

На фазовую характеристику изменение коэффициента усиления системы влияния не оказывает, она остается неизменной.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика перемещается при увеличении коэффициента усиления вверх параллельно самой себе. Построим эту характеристику приближенно по передаточной функции (8-10).

Определим сопрягающие частоты

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{T_3 T_4}} = \sqrt{\frac{1}{0,2}} = 2,24 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,1} = 10 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$\omega_3 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,05} = 20 \frac{1}{\text{сек}}$$

и отметим их на оси частот (рис. 8-4).

Система состоит из двух апериодических звеньев и одного колебательного. Низкочастотная часть амплитудной частотной характеристики представляет прямую, параллельную оси частот и отстоящую от нее на расстоянии $20 \lg 50 = 33,98 \text{ дБ}$.

При первой сопрягающей частоте $\omega_1 = 2,24 \text{ 1/сек}$ характеристика получает наклон 40 дБ/сек , как это имеет место у колебательных звеньев. При второй сопрягающей частоте $\omega_2 = 10 \text{ 1/сек}$, соответствующей апериодическому звену, наклон увеличивается на 20 дБ/сек

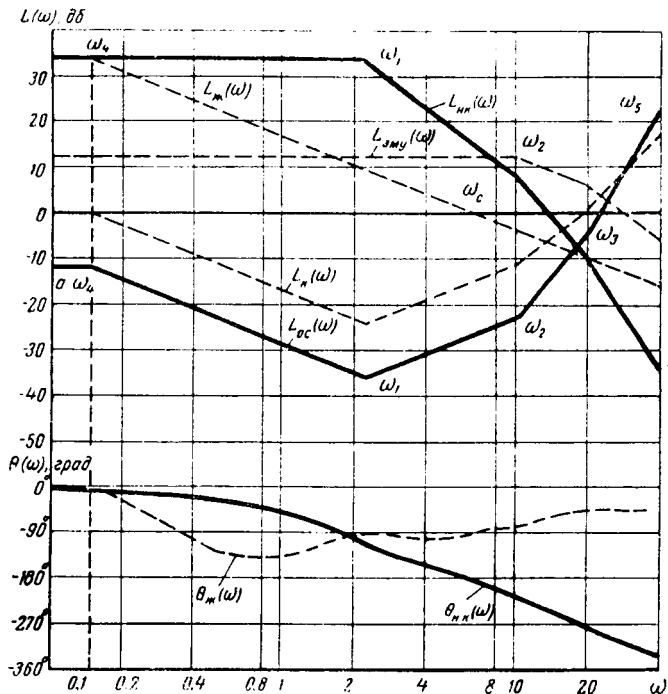


Рис. 8-4. Логарифмические частотные характеристики к примеру

и составляет 60 дБ/дек . При третьей сопрягающей частоте $\omega_3 = 20 \text{ 1/сек}$, соответствующей второму апериодическому звену, наклон характеристики увеличивается еще на 20 дБ/дек и составляет 80 дБ/дек .

Логарифмическую фазовую характеристику переносим с рис. 5-11 на рис. 8-4.

Система неустойчива, так как логарифмическая амплитудная частотная характеристика $L_{\text{нк}}(\omega)$ пересекает ось абсцисс при частоте большей, чем частота, при которой логарифмическая фазовая частотная характеристика $\theta(\omega)$ пересекает линию -180° .

Таким образом, корректирующее устройство наряду с обеспечением необходимого качества должно и стабилизировать систему.

Строим желаемую частотную характеристику. Низкочастотная часть характеристики остается неизменной — прямая, параллельная оси частот и отстоящая от нее на расстоянии 33, 98 дб.

С помощью номограммы рис. 8-2 находим, что при $\delta\% = 30\%$ максимальное значение ординаты вещественной частотной характеристики $P(\omega) = 1,3$, которому соответствует $t_0 = \frac{4\pi}{\omega_c}$. Но так как $t_0 = 2 \text{ сек}$, то

$$\omega_c = \frac{4\pi}{t_0} = \frac{4 \cdot 3,14}{2} = 6,3 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Находим минимальное значение ординаты вещественной частотной характеристики по выражению (8-2)

$$P_{\min} = 1 - 1,3 = -0,3.$$

По номограмме, приведенной на рис. 8-3, находим необходимый запас по амплитуде $L_1 = 13 \text{ дб}$, $L_2 = -13 \text{ дб}$, запас по фазе $\gamma_1 = 40^\circ$.

Отмечаем на оси частот (рис. 8-4) частоту среза $\omega_c = 6,5 \text{ 1/сек}$ и проводим через эту точку среднечастотную часть желаемой характеристики с наклоном 20 дб/сек . Эта характеристика пересекается с высокочастотной частью нескорректированной характеристики при частоте $\omega_3 = 20 \text{ 1/сек}$ и амплитуде $L_2 = -10 \text{ дб}$. Запас устойчивости по амплитуде несколько менее найденного по номограмме. Поэтому продолжаем среднечастотную часть характеристики в область высоких частот.

Сопряжение среднечастотной части характеристики с низкочастотной, как видно из рис. 8-4, происходит при частоте $\omega_4 = 0,145 \text{ 1/сек}$.

Таким образом, желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика $L_{\text{ж}}$ состоит из двух отрезков прямых: первого, параллельного оси частот, и второго, имеющего наклон -20 дб/дек . Запас по фазе приближенно находим для частот ω_4 и ω_c по выражению (8-4).

При частоте ω_4 запас по фазе составляет $\gamma_1 = \pi$, т. е. при частоте ω_4 фазовая характеристика практически совпадает с осью абсцисс.

При частоте $\omega = 2$ запас по фазе составляет

$$\gamma_2 = \pi - \left(k \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\omega_i}{\omega} \right).$$

Здесь $k = 1$; $\omega_i = 0,145 \text{ 1/сек}$;

$$\gamma_2 = 3,14 - \left(\frac{3,14}{2} - \frac{0,145}{2} \right) = 1,64 \text{ рад},$$

что соответствует $\gamma_2 = 94^\circ$.

При частоте $\omega_c = 6,3$ запас по фазе составляет

$$\gamma_3 = 3,14 - \left(\frac{3,14}{2} - \frac{0,145}{6,3} \right) = 1,59 \text{ рад},$$

что соответствует $\gamma_3 = 91^\circ$.

При частотах, больших частоты среза, запас по фазе определяется приближенно по выражению (8-5) и составляет

$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{4} q_{cp} = 3,14 - \frac{3,14}{4} = 2,36 \text{ рад},$$

что соответствует $\gamma = 135^\circ$.

Откладываем найденные значения запаса по фазе вверх от линии -180° и, соединяя полученные точки плавной кривой, получаем приближенную желаемую фазовую характеристику $\theta_{\text{ж}}(\omega)$. Таким образом, в диапазоне $L_1 \geq L_{\text{ж}} \geq L_2$ требуемый запас по фазе обеспечивается полностью.

Разность $L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{рк}}(\omega)$ представляет собой, как следует из формул (8-7) и (8-8), при последовательном корректирующем устройстве логарифмическую амплитудную частотную характеристику $L_{\text{к}}(\omega)$ этого устройства, а при параллельном корректирующем устройстве — результирующую характеристику $L_0(\omega) + L_{\text{к}}(\omega)$.

Примем параллельное корректирующее устройство и решим, каким образом следует его включить.

Технически наиболее просто включить отрицательную обратную связь вокруг электромашиного усилителя. В этом случае $L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{рк}}(\omega)$ будет представлять собой результирующую характеристику $L_{\text{к}}(\omega)$ ЭМУ, охваченного обратной связью. Чтобы найти характеристику корректирующего устройства, включенного в цепь обратной связи, нужно из результирующей характеристики вычесть логарифмическую амплитудную частотную характеристику ЭМУ, который может быть представлен в виде двух аperiодических звеньев, включенных последовательно.

На рис. 8-4 характеристика ЭМУ изображена ломаной линией $L_{\text{эму}}(\omega)$. Она представляет собой сумму характеристик 1 и 2 на рис. 5-11.

Вычитая из характеристики $L'_{\text{к}}(\omega)$ характеристику $L_{\text{эму}}(\omega)$, получим характеристику $L_{\text{ос}}(\omega)$ корректирующего устройства, находящегося в цепи обратной связи.

Подбор корректирующего устройства можно выполнить с помощью табл. 7-1. В таблице нет корректирующего устройства, имеющего логарифмическую частотную характеристику, полученную в данном примере, но ее можно получить последовательным соединением нескольких корректирующих устройств, имеющихся в таблице.

Участок характеристики до частоты ω_1 можно получить схемой 5 (см. табл. 7-1). Для этого требуется обеспечить равенства

$$\omega_4 = \frac{1}{kT} \text{ и } \omega_1 = \frac{1}{T}.$$

Так как $\omega_4 = 0,145 \text{ 1/сек}$; $\omega_1 = 2,24 \text{ 1/сек}$,
то

$$T = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{2,24} = 0,4 \text{ сек},$$

$$k = \frac{4}{\omega_4 T} = \frac{1}{0,145 \cdot 0,4} = 17,2.$$

Для рассматриваемой схемы справедливы следующие соотношения (см. табл. 7-1)

$$T = CR_2; \quad k = \frac{R_1 + R_2}{R_2}.$$

Чтобы определить параметры схемы, один из них необходимо задать.

Принимаем $C = 20 \text{ мкф} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ ф}$. Тогда

$$R_2 = \frac{T}{C} = \frac{0,4}{2 \cdot 10^{-5}} = 20\,000 \text{ ом} = 20 \text{ ком};$$

$$R_1 = kR_2 - R_2 = 17,2 \cdot 20 - 20 = 324 \text{ ком}.$$

Все элементы схемы найдены.

Участок характеристики $L_{oc}(\omega)$ в интервале частот от ω_1 до ω_2 может быть получен последовательным включением с принятой выше схемой (схема 4, см. табл. 7-1). Учитывая, что понадобится также получить и следующие участки характеристики, наклонную часть характеристики, обеспечиваемую контуром по схеме 4, рассчитаем в диапазоне частот от ω_1 до ω_5 . Для этого требуется обеспечить равенства

$$\omega_1 = \frac{1}{T} \text{ и } \omega_5 = \frac{1}{kT}.$$

Кроме того, для исключения влияния второго контура на предыдущий между ними должен быть включен разделяющий усилитель, передающий воздействия только в одном направлении — от первого контура ко второму.

Так как $\omega_1 = 2,24 \text{ 1/сек}$, $\omega_5 = 40 \text{ 1/сек}$ и $T = 0,4 \text{ сек}$, то

$$k = \frac{1}{\omega_5 T} = \frac{1}{40 \cdot 0,4} = 0,0625.$$

Для рассматриваемой схемы справедливы следующие соотношения:

$$T = CR_1; \quad k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Задаем $C = 20 \text{ мкф} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ ф}$. Тогда

$$R_1 = \frac{T}{C} = \frac{0,4}{2 \cdot 10^{-5}} = 20\,000 \text{ ом} = 20 \text{ ком};$$

$$R_2 = \frac{k}{1-k} R_1 = \frac{0,0625}{1-0,0625} \cdot 20 = 1,34 \text{ ком}.$$

Участок характеристики $L_{cc}(\omega)$ в диапазоне частот от ω_2 до ω_3 может быть получен последовательным включением через разделительный усилитель еще одного контура по схеме 4 при параметрах

$$\omega_2 = \frac{1}{T}; \quad \omega_5 = \frac{1}{kT}.$$

Учитывая, что $\omega_2 = 10$ 1/сек, $\omega_5 = 40$ 1/сек, находим

$$T = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ сек};$$

$$k = \frac{1}{\omega_5 T} = \frac{1}{40 \cdot 0,1} = 0,25 \text{ сек}.$$

Задаем $C = 20 \text{ мкф} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ ф}$. Тогда

$$R_1 = \frac{T}{C} = \frac{0,1}{2 \cdot 10^{-5}} = 5000 \text{ ом} = 5 \text{ ком};$$

$$R_2 = \frac{k}{1-k} R_1 = \frac{0,25}{1-0,25} \cdot 5 = 1,66 \text{ ком}.$$

Участок $L_{oc}(\omega)$ в диапазоне частот от ω_3 до ω_5 отличается от заданного наклоном в 20 дБ/дек. Оставляем его без корректировки, так как высокочастотный диапазон практически влияния на качество переходного процесса не оказывает. Составленная таким образом характеристика корректирующего устройства будет сдвинута относительно оси абсцисс и не будет совпадать с характеристикой

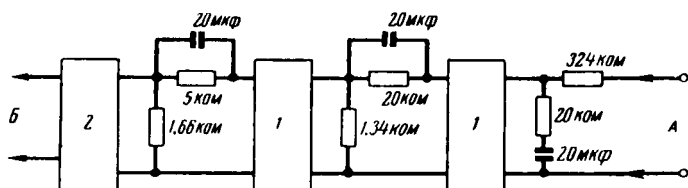


Рис. 8-5. Схема корректирующего устройства:

1 — разделительный усилитель; 2 — согласующий усилитель; А — от выходных щеток ЭМУ; Б — к обмотке управления ЭМУ

$L_{oc}(\omega)$. Чтобы переместить ее на необходимое место, а также согласовать напряжение и мощность на выходе корректирующего устройства с напряжением и мощностью обмотки управления ЭМУ, на выходе корректирующего устройства ставится усилитель мощности.

Окончательная схема корректирующего устройства приведена на рис. 8-5. Она получилась весьма сложной (требует трех усилителей) и практически в таком виде не осуществлялась бы. На этом примере показан метод синтеза корректирующего устройства. Реально корректирующие устройства проектируются с меньшим количеством усилителей, но в этом случае схема контуров вследствие взаимного влияния сильно усложняется и соответственно усложняется

Таблица 8-1

t, сек	Треугольник <i>едо</i>		Треугольник <i>асо</i>		Треугольник <i>обг</i>		φ
	$\tau_1 = \omega_1 t = 22t$	$\varphi_1 = H_1 h_{\tau} = 0,74 h_{\tau}$	$\tau_2 = \omega_2 t = 5,2t$	$\varphi_2 = H_2 h_{\tau} = 0,46 h_{\tau}$	$\tau_3 = \omega_3 t = 1t$	$\varphi_3 = H_3 h_{\tau} = -0,2 h_{\tau}$	
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	2,2	0,455	0,52	0,075	0,1	-0,006	0,524
0,2	4,4	0,650	1,04	0,143	0,2	-0,013	0,780
0,4	8,8	0,682	2,08	0,273	0,4	-0,025	0,930
0,6	13,2	0,703	3,12	0,353	0,6	-0,038	1,018
0,8	17,6	0,715	4,16	0,398	0,8	-0,050	1,063
1,0	22,0	0,718	5,20	0,414	1,0	-0,062	1,070
1,2	26,4	0,721	6,24	0,416	1,2	-0,073	1,064
1,4	30,8	0,725	7,30	0,417	1,4	-0,085	1,057
1,6	35,2	0,728	8,34	0,420	1,6	-0,095	1,053
1,8	39,6	0,728	9,38	0,428	1,8	-0,105	1,053
2,0	44,0	0,729	10,40	0,431	2,0	-0,114	1,056
2,2	48,4	0,730	11,44	0,436	2,2	-0,126	1,040
2,4	52,8	0,730	12,48	0,437	2,4	-0,131	1,036
2,6	57,2	0,730	13,52	0,437	2,6	-0,138	1,029
2,8	61,6	0,731	14,56	0,438	2,8	-0,145	1,024
3,0	66,0	0,731	15,60	0,440	3,0	-0,151	1,020
3,2	70,4	0,731	16,64	0,443	3,2	-0,156	1,018
3,4	74,8	0,732	17,68	0,445	3,4	-0,161	1,016
3,6	79,2	0,732	18,72	0,445	3,6	-0,165	1,012

их синтез. Эти вопросы здесь не рассматриваются, а достаточно полно изложены в [20, 21, 46].

Проверим, действительно ли желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика $L_{\text{ж}}(\omega)$ обеспечивает выполнение системой заданных требований качества. Для этого по кривым $L_{\text{ж}}(\omega)$ и $\theta_{\text{ж}}(\omega)$ с помощью номограммы (рис. 8-3) строим вещественную частотную характеристику (рис. 8-6, а). Затем разбиваем эту характеристику на треугольники (рис. 8-6, а и б) и с помощью расчетной табл. 8-1 строим кривую переходного процесса (рис. 8-6, в).

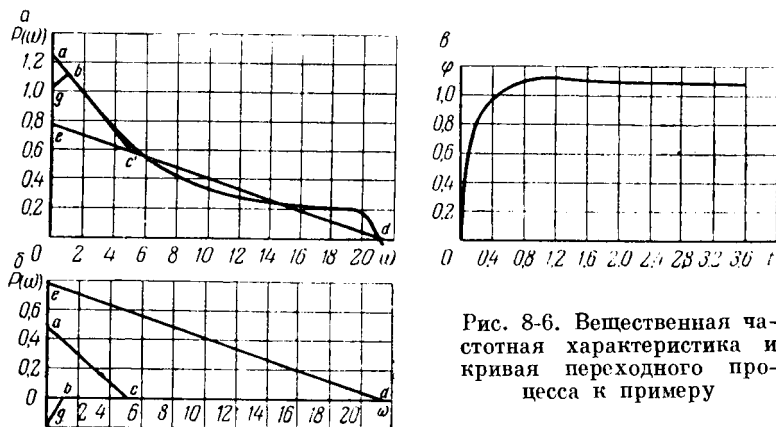


Рис. 8-6. Вещественная частотная характеристика и кривая переходного процесса к примеру

Эта кривая удовлетворяет заданным условиям качества и, следовательно, корректирующее устройство выбрано правильно.

Существенным достоинством синтеза систем автоматического регулирования методом логарифмических частотных характеристик является то, что он может применяться в тех случаях, когда частотные характеристики некоторых элементов системы получены экспериментально.

§ 8-3. СИНТЕЗ МЕТОДОМ КОРНЕВЫХ ГОДОГРАФОВ

В § 6-2 отмечалось, что показатели качества переходного процесса замкнутой системы автоматического регулирования зависят от расположения нулей и полюсов ее передаточной функции.

При плавном уменьшении значений какого-либо параметра системы нули и полюсы будут перемещаться на комплексной плоскости, описывая некоторые кривые (траектории), которые называются *корневыми годографами*.

По корневым годографам можно подобрать параметры системы, обеспечивающие наиболее благоприятный с точки зрения требований технологии переходный процесс.

Для построения корневых годографов одному из параметров системы задают различные значения (остальные параметры остаются

постоянными) и вычисляют соответствующие нули и полюсы. Вычисленные значения сводят в таблицу, по которой затем строят годографы. Находя с помощью годографов наиболее благоприятное расположение нулей и полюсов, можно определить соответствующее значение интересующего параметра.

Чтобы найти наиболее благоприятные значения нескольких параметров нужно построить корневые годографы для каждого из них при постоянных значениях всех остальных.

Пользоваться этим методом практически можно только в том случае, если имеется вычислительное устройство для решения алгебраических уравнений — электронный корнерискатель, так как определение значений нулей и полюсов передаточной функции без вычислительных устройств очень трудоемко.

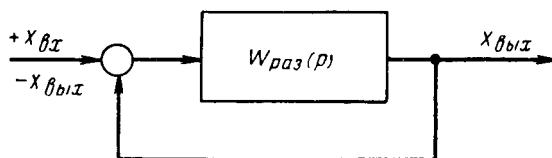


Рис. 8-7. Одноконтурная замкнутая система

Американский ученый В. Эванс предложил метод корневых годографов, пригодный для выбора только общего коэффициента усиления разомкнутой системы. По Эвансу, корневым годографом называется линия (траектория), описываемая корнем характеристического уравнения (полюсом передаточной функции) замкнутой системы автоматического регулирования на комплексной плоскости при увеличении коэффициента усиления разомкнутой системы от нуля до бесконечности.

Основой метода В. Эванса является однозначная связь между нулями и полюсами передаточной функции разомкнутой системы и нулями и полюсами передаточной функции замкнутой системы. Эта связь становится очевидной на основании следующих рассуждений.

На рис. 8-7 приведена структурная схема простой замкнутой одноконтурной системы автоматического регулирования. Здесь $W_{\text{раз}}(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы, представляющая в обычных системах рациональную дробь, т. е. отношение двух алгебраических полиномов (многочленов) от p

$$W(p) = \frac{a(p)}{b(p)}, \quad (8-11)$$

где $a(p)$ и $b(p)$ — полиномы от p (в простых случаях $a(p) = 1$)

Передаточная функция замкнутой системы при условии, что коэффициент обратной связи равен единице,

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} \quad (8-12)$$

После подстановки значения $W_{\text{раз}}(p)$ из выражения (8-11) получим

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{\frac{a(p)}{b(p)}}{1 + \frac{a(p)}{b(p)}} = \frac{a(p)}{a(p) + b(p)}. \quad (8-13)$$

Сравнивая выражения (8-11) и (8-13), приходим к выводу, что нули (корни числителя) передаточных функций замкнутой и разомкнутой систем одинаковы, так как в обеих передаточных функциях в числителе находится полином $a(p)$.

Полюсы передаточной функции замкнутой системы представляют корни характеристического уравнения этой системы

$$a(p) + b(p) = 0 \quad (8-14)$$

или

$$\frac{a(p)}{b(p)} + 1 = 0. \quad (8-15)$$

Полюсами передаточной функции замкнутой системы являются значения p , при которых $\frac{a(p)}{b(p)} = -1$, и, следовательно, эти полюсы зависят от передаточной функции разомкнутой системы и от ее нулей и полюсов. Корни полиномов $a(p)$ и $b(p)$, входящих в передаточную функцию разомкнутой системы, могут быть легко найдены, так как эти корни являются корнями элементарных множителей, описывающих звенья, составляющие разомкнутую систему. Найти корни характеристического уравнения (8-14) замкнутой системы простыми средствами нельзя. Метод корневых годографов позволяет найти корни уравнения $a(p) + b(p) = 0$ по корням полиномов $a(p)$ и $b(p)$ каждого в отдельности.

На комплексной плоскости наносятся нули и полюсы передаточной функции разомкнутой системы (8-11). Полюсы разомкнутой системы — это начальные точки годографов, которые соответствуют полюсам передаточной функции замкнутой системы при коэффициенте усиления $K = 0$. По мере увеличения коэффициента усиления полюсы на комплексной плоскости перемещаются, причем каждому значению K соответствуют вполне определенные значения полюсов. Геометрические места полюсов на комплексной плоскости, соответствующие всем значениям K от нуля до бесконечности, представляют корневые годографы. Для удобства использования годографы размечают значениями K , выписанными возле соответствующих им значений полюсов. По вычерченным годографам выбирают наиболее благоприятное с точки зрения требований переходного процесса расположение полюсов. Прочтя соответствующее выбранному значению полюсов значение коэффициента K , можно считать задачу решенной. Точное построение корневых годографов по Эвансу можно выполнить, если вычислять корни характеристического уравнения замкнутой системы при различных значениях коэффициента усиления. Однако такое построение можно рекомендо-

вать только в том случае, если корни характеристического уравнения отыскиваются вычислительным устройством (корнеискателем)

В. Эванс предложил приближенный метод построения годографов и разработал специальное спиральное лекало, которое значительно облегчает построение. Подробно этот метод, описание лекала и способа его применения приведены в [36]. Толкование годографов и выбор наиболее выгодного расположения корней для обеспечения требуемого качества рассмотрим на конкретном примере.

Предположим, что передаточная функция разомкнутой системы (см. рис. 8-7) имеет вид

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{K}{(p+2)(p+4)}. \quad (8-16)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{\frac{K}{(p+2)(p+4)}}{1 + \frac{K}{(p+2)(p+4)}} = \frac{K}{(p+2)(p+4) + K}. \quad (8-17)$$

Характеристическое уравнение системы

$$(p+2)(p+4) + K = 0$$

или

$$p^2 + 6p + (8+K) = 0. \quad (8-18)$$

Корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - (8+K)} = -3 \pm \sqrt{1-K}. \quad (8-19)$$

Задавая различные значения K , получим соответствующие значения корней, которые приведены ниже.

$$\begin{aligned} K=0; & \quad p_1 = -2; & \quad p_2 = -4; \\ K=\frac{3}{4}; & \quad p_1 = -2,5; & \quad p_2 = -3,5; \\ K=1; & \quad p_1 = -3; & \quad p_2 = -3 \text{ (двойной корень);} \\ K=2; & \quad p_{1,2} = -3 \pm j; \\ K=5; & \quad p_{1,2} = -3 \pm 2j; \\ K=10; & \quad p_{1,2} = -3 \pm 3j; \\ K=17; & \quad p_{1,2} = -3 \pm 4j. \end{aligned}$$

На рис. 8-8 по найденным значениям построены корневые годографы. При построении нужно применять одинаковые масштабы по вещественной и мнимой осям. Количество годографов равно порядку характеристического уравнения (в данном случае два). Они берут начало в полюсах передаточной функции замкнутой системы $(-2, j0)$ и $(-4, j0)$ и движутся навстречу друг другу по вещественной оси. В точке $(-3, j0)$ они под прямым углом покидают вещественную ось.

и расходятся в разные стороны. Сверху и справа цифрами обозначены значения коэффициента усиления. Соответствующие значения корней определяются по градуировке осей координат.

Рассматривая годографы, можно сделать следующие выводы. При изменении K от 0 до 1, т. е. до тех пор, пока корень выражения (8-19) остается вещественным, полюсы передаточной функции перемещаются по вещественной оси. Переходный процесс остается аperiodическим. При дальнейшем возрастании K , когда корень выражения (8-19) становится мнимым, полюсы отходят от вещественной оси, становятся комплексными сопряженными. Переходный процесс будет колебательным и регулируемая величина перейдет к установившемуся значению с затухающими колебаниями. С возрастанием коэффициента усиления увеличивается колебательность переходного процесса — отношение мнимой части комплексного полюса к вещественной $\mu = \frac{\omega}{\alpha}$, так как мнимые части комплексных полюсов увеличиваются.

Полюсы перемещаются так, что сумма их вещественных частей остается постоянной (в данном примере 6). Это общее правило, справедливое для передаточных функций систем любой сложности.

Если полюсы передаточной функции разомкнутой системы (начала годографов) соединить прямыми с любой точкой на годографе передаточной функции замкнутой системы, то сумма углов, образуемых этими прямыми с положительным направлением вещественной оси, во всех случаях составляет

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_4 = 180^\circ.$$

Это общее правило, справедливое для передаточных функций с любым числом полюсов, используется при приближенном построении годографов.

С увеличением K годографы удаляются в бесконечность, однако остаются в левой полуплоскости, и система остается устойчивой. При системах более высоких порядков годографы могут изгибаться

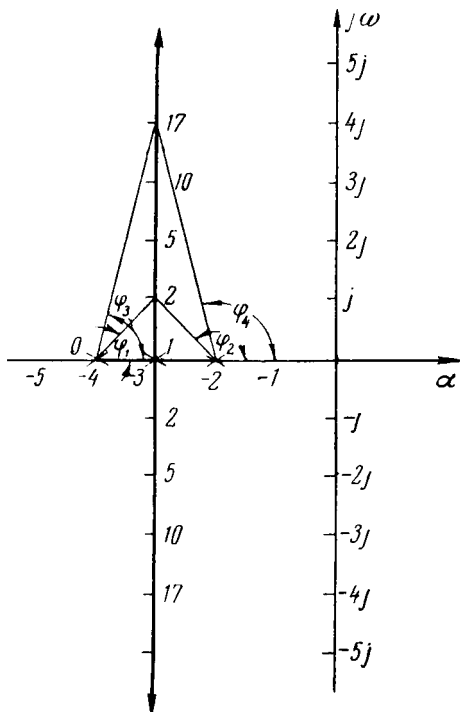


Рис. 8-8. Корневые годографы

вправо и с увеличением K переходить в правую полуплоскость. Система теряет устойчивость.

Предположим, что в данном случае нужно подобрать коэффициент усиления, чтобы обеспечить колебательность $\mu = 1$. Для этого нужно обеспечить равенство вещественной и мнимой частей полюсов

$$p_{1,2} = -3 \pm 3j.$$

Непосредственно из годографа следует, что соответствующий коэффициент усиления $K = 10$.

Недостатком метода корневых годографов является то, что он не может быть применен, если характеристики некоторых элементов представлены экспериментально. Поэтому метод корневых годографов применяется реже метода логарифмических частотных характеристик.

Контрольные вопросы

1. Что называется синтезом систем автоматического регулирования?
2. Какие элементы системы автоматического регулирования могут выбираться при синтезе?
3. В каком порядке осуществляется выбор корректирующих устройств методом логарифмических частотных характеристик?
4. Что называется корневым годографом?
5. Какие параметры системы можно выбрать методом корневых годографов?
6. В каком порядке производится выбор искомого параметра методом корневых годографов?

ОСОБЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 9-1. РАЗНОВИДНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В предыдущих главах рассмотрены линейные системы автоматического регулирования, которые описываются обыкновенными линейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями. Такие системы называются *обыкновенными линейными системами*.

В технике получили также применение линейные системы автоматического регулирования, которые имеют различные особенности, отличающие их от обыкновенных линейных систем, и которые объединяются в группу под общим названием *особые линейные системы* автоматического регулирования.

К этой группе относятся следующие линейные системы: 1) с запаздыванием; 2) с распределенными параметрами; 3) с переменными параметрами; 4) импульсного регулирования.

Все перечисленные системы могут быть также и нелинейными, если они содержат хотя бы одно нелинейное звено.

Системы с запаздыванием находят применение на обогатительных фабриках. Системы с распределенными параметрами в горной промышленности не применяются. Объекты с переменными параметрами в горной промышленности имеются, но скорость изменения параметров в них относительно невелика и до настоящего времени, как правило, не учитывалась.

В следующем параграфе рассматриваются системы с запаздыванием и дается общее понятие о системах с распределенными и переменными параметрами.

Импульсные системы могут найти широкое применение в горно-обогатительной промышленности, и поэтому они рассмотрены несколько подробнее.

§ 9-2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Линейными системами с запаздыванием называются линейные системы автоматического регулирования, содержащие одно или несколько запаздывающих звеньев.

Запаздыванием обычно обладают регулируемые объекты и очень редко система управления, элементы которой почти всегда могут быть подобраны так, чтобы исключить запаздывание. Примером

объектов с запаздыванием может служить шаровая или стержневая мельница, сушильная или обжиговая печь, отсадочная и флотационная машины. У всех этих объектов изменение воздействия на входе передается на выход с запаздыванием во времени, которое может достигать десятков минут.

Составление уравнений систем с запаздыванием производится так же, как и обыкновенных линейных систем.

На рис. 9-1 приведена структурная схема системы с запаздыванием, которая содержит два линейных звена с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ и два запаздывающих звена с передаточными функциями $e^{-\tau_1 p}$ и $e^{-\tau_2 p}$ (τ_1 и τ_2 — постоянные запаздывания).

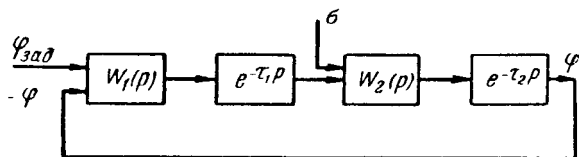


Рис. 9-1. Структурная схема системы с запаздыванием

Передаточная функция разомкнутой системы представляет произведение передаточных функций звеньев, входящих в систему

$$W_{раз}(p) = W_1(p) e^{-\tau_1 p} W_2(p) e^{-\tau_2 p}. \quad (9-1)$$

Объединяя передаточные функции линейных звеньев без запаздывания и передаточные функции запаздывающих звеньев, получим

$$W_{раз}(p) = W_0(p) e^{-(\tau_1 + \tau_2) p}. \quad (9-2)$$

Здесь $W_0(p)$ — передаточная функция линейной системы без учета запаздывания. Такую систему иногда называют предельной.

В случае многоконтурных систем результирующие передаточные функции будут сложнее, однако они составляются по тем же правилам, которые относятся к системам без запаздывания (см. § 4-3).

Рассмотрим определение устойчивости систем с запаздыванием. Наличие множителя $e^{-\tau p}$ приводит к тому, что характеристическое уравнение может иметь бесконечное число корней. Для определения устойчивости систем третьего порядка и выше критерий Гурвица неприменим, использование критерия Михайлова оказывается сложным. Наиболее простым оказывается определение устойчивости с помощью критерия Найквиста, которое приводится ниже.

Рассмотрим систему автоматического регулирования, имеющую одно запаздывающее звено. Расчленим ее на две части — линейную часть без запаздывания или предельную систему с передаточной функцией $W_0(p)$ и запаздывающее звено с передаточной функцией $e^{-\tau p}$, последовательно соединенные между собой (рис. 9-2). Результирующую передаточную функцию всей системы получаем как про-

изведение передаточных функций последовательно соединенных элементов

$$W_{\text{раз}}(p) = W_0(p) e^{-\tau p}. \quad (9-3)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики системы с запаздыванием получим, заменяя в выражении (9-3) p на $j\omega$

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = W_0(j\omega) e^{-j\tau\omega}. \quad (9-4)$$

Представим комплексное выражение $W_0(j\omega)$ в показательной форме

$$W_0(j\omega) = A_0(\omega) e^{j\theta_0(\omega)}, \quad (9-5)$$

где $A_0(\omega)$ — модуль частотной функции предельной системы;

$\theta_0(\omega)$ — аргумент этой функции.

Подставив значение $W_0(j\omega)$ из выражения (9-5) в уравнение (9-4), получим

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = A_0(\omega) e^{j[\theta_0(\omega) - \tau\omega]}. \quad (9-6)$$

Из уравнения (9-6) следует, что для построения амплитудно-фазовой характеристики системы с запаздыванием следует построить амплитудно-фазовую характеристику предельной системы и повернуть каждый радиус-вектор этой системы по часовой стрелке на угол, равный $\tau\omega$.

Предположим, что предельная система устойчива и ее амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$ (кривая 1, рис. 9-3).

Проведем из начала координат так называемую единичную окружность, проходящую через точку $(-1, j0)$, отметим точку A пересечения этой окружности с кривой 1 и обозначим частоту, соответствующую точке A , через ω_a , а угол между радиусом-вектором OA и отрицательной вещественной полуосью через γ_a .

Построим амплитудно-фазовую характеристику системы с запаздыванием поворотов всех радиусов-векторов на угол $\tau\omega_a$ (кривая 2, рис. 9-3). Радиус-вектор OA при этом повернется на угол $\tau\omega_a$. Пока значение угла $\tau\omega_a$ удовлетворяет неравенству

$$\tau\omega_a < \gamma_a, \quad (9-7)$$

амплитудно-фазовая характеристика системы с запаздыванием не охватывает точку $(-1, j0)$ и система остается устойчивой. Если $\tau\omega_a =$

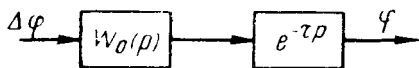


Рис. 9-2. Структурная схема разомкнутой системы с запаздыванием

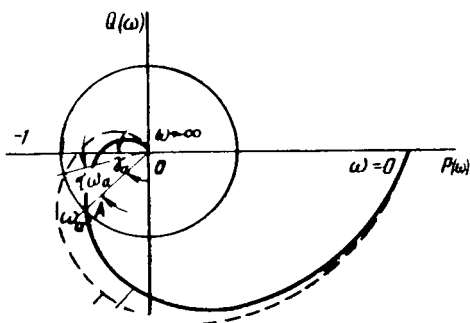


Рис. 9-3. Амплитудно-фазовая характеристика системы с запаздыванием

$= \gamma_a$, амплитудно-фазовая характеристика пересекает вещественную ось в точке $(-1, j0)$ и система находится на границе устойчивости. Если $\tau\omega_a < \gamma_a$, система с запаздыванием неустойчива. Отношение

$$\frac{\gamma_a}{\omega_a} = \tau_{кр} \quad (9-8)$$

называется *критическим временем запаздывания*.

Таким образом, система с постоянным запаздыванием, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии в том случае, если ее амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

Если предельная система в замкнутом состоянии неустойчива, то неустойчивой в большинстве случаев будет и система с запаздыванием. Однако возможны случаи, когда амплитудно-фазовая характеристика предельной системы имеет такую форму, что единичная окружность пересекает ее в нескольких точках. Тогда неустойчивая предельная система при определенных значениях запаздывания может стать устойчивой.

Исследование качества систем с запаздыванием может производиться построением кривой переходного процесса при помощи вещественных частотных характеристик. Однако в настоящее время это удобнее и быстрее можно выполнить с помощью моделирующих вычислительных машин [5].

Линейными системами с распределенными параметрами называются такие линейные системы автоматического регулирования, которые содержат длинные трубопроводы или электрические линии большой протяженности, параметры которых вследствие больших геометрических размеров нельзя считать сосредоточенными в одной точке.

Как указывалось выше, системы с распределенными параметрами в горной промышленности не применяются.

При исследовании систем с распределенными параметрами используется аппарат дифференциальных уравнений в частных производных, с помощью которых учитываются волновые процессы в трубопроводах и электрических линиях. После преобразований получаются дифференциальные уравнения, аналогичные уравнениям систем с запаздыванием. Исследование устойчивости и качества систем с распределенными параметрами производится по этим уравнениям так же, как и систем с запаздыванием [5].

Линейными системами с переменными параметрами называются такие линейные системы автоматического регулирования, у которых параметры регулируемого объекта меняются во времени.

Примерами объектов с переменными параметрами могут служить: шаровая мельница, у которой статическая и динамическая характеристики меняются во времени по мере износа мелющих шаров; угледобывающий комбайн, у которого характеристики меняются во времени по мере затупления режущих зубков. Переменные параметры имеют некоторые подвижные объекты — самолет, ракета,

у которых меняются масса и момент инерции по мере сгорания топлива.

Изменение параметров регулируемого объекта приводит к тому, что переменными во времени оказываются коэффициенты дифференциального уравнения.

В настоящее время разработаны общие методы исследования систем с переменными параметрами, описываемыми уравнениями первого порядка и в некоторых случаях уравнениями второго порядка. Исследования оказываются довольно сложными и в то же время недостаточно полными.

Синтез систем с переменными параметрами математическими методами пока невозможен и может осуществляться с помощью электронных вычислительных машин, которые позволяют путем просмотра наиболее важных режимов работы подобрать подходящие корректирующие устройства, обеспечивающие требуемое качество переходных процессов.

В тех случаях, когда во время переходного процесса параметры системы изменяются незначительно (квазистационарные системы), можно произвести анализ системы и синтез корректирующих устройств методом замороженных коэффициентов. Сущность этого метода заключается в том, что параметрам и, следовательно, коэффициентам дают постоянные значения, соответствующие различным моментам времени в пределах диапазона изменения параметров в рассматриваемом интервале времени. Система с переменными параметрами сводится к системе с постоянными параметрами, анализ и синтез ее производятся методами, изложенными в предыдущих главах.

Такое исследование отличается трудоемкостью, так как его нужно произвести последовательно для всех замороженных значений параметров. При этом важно правильно выбрать моменты времени для замораживания параметров, чтобы охватить все существенные варианты их значений.

Если при всех значениях параметров в диапазоне их изменений качество системы регулирования соответствует заданным требованиям, то считается, что качество будет удовлетворительным и при параметрах, переменных во времени.

§ 9-3. ПРИНЦИПЫ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Линейной системой импульсного регулирования называется такая линейная система автоматического регулирования, которая кроме звеньев непрерывного действия, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями, содержит импульсное звено.

Импульсным называется звено, в котором непрерывное входное воздействие преобразуется в импульсы с постоянными или переменными амплитудой и длительностью, начала которых следуют друг за другом через равные промежутки времени.

Импульсные системы обеспечивают несколько меньшую точность, чем соответствующие непрерывные системы, так как вследствие периодических размыканий цепи регулирования происходит потеря некоторой части информации о ходе процесса. Если время между началами следующих друг за другом импульсов принять большим по сравнению со временем существенных изменений управляемой величины, то импульсная система станет вообще неработоспособной. Однако в конкретных условиях время между началами соседних импульсов всегда может быть выбрано таким, чтобы заметной потери информации не происходило и обеспечивалась требуемая точность регулирования. В этом случае импульсные системы обладают некоторыми существенными достоинствами по сравнению с непрерывными. Так, при ограниченной мощности чувствительных элементов импульсные системы позволяют управлять мощными системами, не применяя больших усилений. При передаче управляющих воздействий на расстояние их выгодно преобразовывать в импульсную форму для уменьшения искажающего влияния помех и для передачи по одному каналу нескольких величин. В случае использования для управления цифровых вычислительных машин, которые выдают дискретную информацию, возможно применение только импульсных систем.

Импульсные системы чаще применяются для регулирования медленно меняющихся процессов (регулирование температуры, давления и т. п.).

В замкнутых системах импульсного регулирования с воздействием по отклонению управляющее воздействие, пропорциональное отклонению действительного значения регулируемой величины от заданного, передается в промежутки времени, когда существуют импульсы, т. е. когда система замкнута. В интервалах между импульсами система работает как разомкнутая. В системах импульсного регулирования применяются импульсные звенья трех типов.

К первому типу относятся импульсные звенья, в которых непрерывная входная величина преобразуется в последовательность импульсов, высота которых пропорциональна значениям его входной величины в моменты съема сигнала с сохранением знака входной величины, но длительность импульсов остается постоянной. Длительность импульсов называется *рабочим интервалом*, так как в течение этого промежутка времени импульсы воздействуют на исполнительное устройство. В рабочем интервале система ничем не отличается от систем непрерывного регулирования.

Схема импульсного звена первого типа приведена на рис. 9-4, б. Прямая падающая дужка 1 совершает периодические движения вверх и вниз и прижимает указатель 2 во время рабочего интервала на постоянный промежуток времени к той или иной точке потенциометра 3, к концам которого подключены две батареи 4 с равными э. д. с. Входной величиной данного импульсного звена является смещение x указателя 2 относительно средней точки потенциометра. Выходная величина импульсного звена представляет импульсы,

вырезаемые из кривой входной величины. Величина импульса пропорциональна среднему значению входной величины за отрезок времени, равный длительности импульса. Выходной величиной звена на рис. 9-4, б являются импульсы напряжения постоянной длительности δ (рис. 9-4, а), но различные по величине и знаку в зависимости от отклонения указателя от средней точки в моменты прижима его опускающейся дужкой.

В импульсном звене первого типа скорость исполнительного двигателя изменяется в каждом рабочем интервале пропорционально значению входной величины импульсного звена в моменты съема. В зависимости от скорости в каждом рабочем интервале изменяется

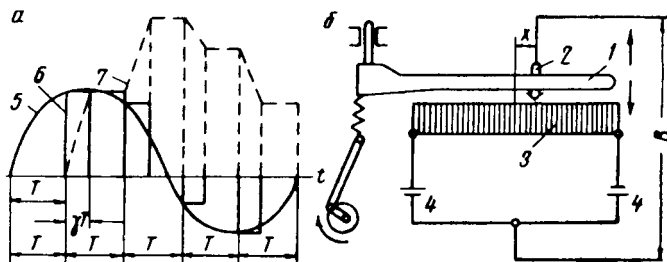


Рис. 9-4. Импульсное звено первого типа

и величина хода исполнительного двигателя (график 7). Здесь величина T , определяющая время между началом двух соседних импульсов, называется *интервалом регулирования*, или периодом чередования импульсов. Длительность импульса (рабочий интервал) обозначается через γT . Коэффициент γ называется *скважностью импульсного звена* и представляет собой отношение рабочего интервала к интервалу регулирования, так что $0 \leq \gamma \leq 1$.

Вместо падающей дужки система может быть снабжена ключом (прерывателем), который периодически замыкает на равные промежутки времени цепь регулирования.

Ко второму типу относятся импульсные звенья, в которых непрерывная входная величина преобразуется в последовательность импульсов, длительность которых пропорциональна значениям входной величины в момент съема, а высота импульсов остается постоянной с сохранением знака входной величины (рис. 9-5, а). Схема импульсного звена приведена на рис. 9-5, б. Скошенная падающая дужка 4 совершает периодические движения вверх и вниз и прижимает указатель 5 во время рабочего интервала к контактной пластинке 6, имеющей посредине изолирующий разрыв и соединенной с батареями 7, имеющими равные э. д. с. Входной величиной звена является смещение x указателя относительно средней точки контактной пластины. Выходной величиной B являются импульсы напряжения постоянной высоты, но различные по длительности благодаря скосам

падающей дужки и различные по знаку в зависимости от направления отклонения указателя от средней точки.

К третьему типу относятся импульсные звенья, в которых непрерывная входная величина преобразуется в последовательность импульсов постоянной высоты и длительности, но с различными знаками, зависящими от знаков входной величины в моменты съема

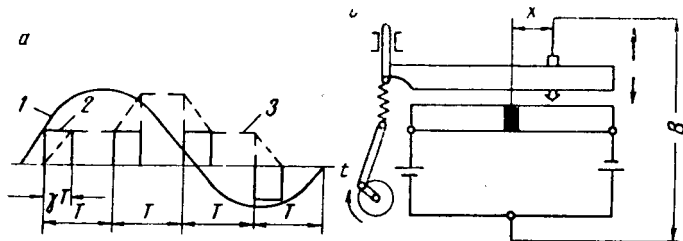
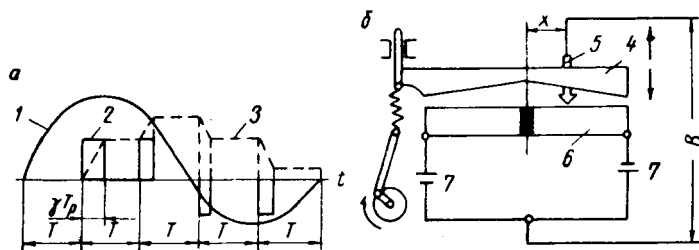


Рис. 9-5. Импульсное звено второго типа:

1 — входная величина; 2 — выходная величина; 3 — изменение хода исполнительного двигателя

(рис. 9-6,а). Это импульсное звено отличается от звеньев второго типа только тем, что вместо скошенной падающей дужки в нем применена прямая дужка (рис. 9-6,б).

Отношение высоты импульса к соответствующей ординате входной величины представляет коэффициент усиления импульсного звена.



Ри. 9-6. Импульсное звено третьего типа

(позиции 1, 2 и 3 — см. рис. 9-5)

Если импульсы следуют непрерывно друг за другом, т. е. когда рабочий интервал γT равен интервалу регулирования T , что соответствует $\gamma = 1$, импульсное звено превращается в обычное усильтельное звено непрерывного действия.

При малом значении γ , близком к нулю, импульсное звено превращается в прерыватель, который периодически замыкает цепь регулирования на короткий промежуток времени. Такие прерыватели применяются в схемах автоматического регулирования с искусственной вибрацией для ослабления вредного влияния сил тре-

ния. Для регулирования медленно меняющихся процессов используются главным образом системы второго и третьего типов. Системы первого типа применяются в измерительной и радиолокационной технике.

Для исследования переходных процессов в импульсных системах автоматического регулирования аппарат обыкновенных линейных дифференциальных уравнений непригоден. Эти исследования могут производиться применением разностных уравнений, графоаналитически или с помощью дискретного преобразования Лапласа. Первые два метода очень трудоемки и практически применяются редко.

Известны две разновидности дискретного преобразования Лапласа — обычное дискретное преобразование и z -преобразование. В настоящей главе используется z -преобразование, получающее в последние годы все более широкое применение, поскольку выражения получаются более простыми.

§ 9-4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ z -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Непрерывная функция времени $x(t)$ может быть заменена изображением по Лапласу с помощью известной формулы

$$F(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt. \quad (9-9)$$

Если взять дискретный интервал времени, равный *интервалу регулирования* T , и представить непрерывное время в виде

$$t = nT, \quad (9-10)$$

где $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ — порядковые номера импульсов, то интеграл в выражении (9-9) можно заменить суммой

$$F(p) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x(nT) e^{-pnT}$$

или

$$F(p) = T \sum_{n=0}^{n=\infty} x(nT) e^{-pnT}. \quad (9-11)$$

Введем обозначение

$$e^{pT} = z \quad (9-12)$$

и подставим его в выражение (9-11)

$$F(p) = T \sum_{n=0}^{n=\infty} x(nT) z^{-n}. \quad (9-13)$$

Выражение

$$F(z) = \frac{F(p)}{T} = \sum_{n=0}^{n=\infty} x(nT) z^{-n} \quad (9-14)$$

называется *z-преобразованием* дискретной функции времени.

Иногда применяется символическая запись

$$F(z) = Z[x(nT)].$$

В обычном преобразовании Лапласа оператор p представляет комплексное число $p = c + j\omega$. При переходе к частотным характеристикам вещественная часть оператора $c = 0$, $p = j\omega$ и оператор z -преобразования в этом случае

$$z = e^{pT} = e^{j\omega T}. \quad (9-15)$$

Если аргумент ω изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то оператор p меняется вдоль мнимой оси комплексной плоскости соответственно от $-\infty$ до $+\infty$, а оператор z при этом изменяется по окружности единичного радиуса.

Т а б л и ц а 9-1

Оригинал	Обыкновенное преобразование	Модифицированное преобразование
$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{\varepsilon Tz}{z-1}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$	$\frac{zd^\varepsilon}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}, \quad d = e^{-\alpha T}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zd^\varepsilon}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$
$\sin \beta t$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \sin \varepsilon \beta T + z \sin \delta \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}, \quad \delta = 1 - \varepsilon$
$\cos \beta t$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \cos \varepsilon \beta T - z \cos \delta \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}, \quad \delta = 1 - \varepsilon$

Таким образом, преобразование (9-15) отображает мнимую ось комплексной плоскости p в окружность единичного радиуса на плоскости z . При этом левая полуплоскость комплексной плоскости p отображается в круг единичного радиуса на плоскости z .

Для большого количества функций составлены таблицы z -преобразований. В табл. 9-1 приведены z -преобразования нескольких функций. Более полные таблицы приведены в [23].

Обратный переход от z -преобразования к функции времени может быть осуществлен по формуле обращения

$$x(nT) = \frac{1}{j2\pi} \oint F(z)^{n-1} dz. \quad (9-16)$$

Интегрирование ведется по окружности радиуса $r = e^{\sigma T}$. Проще обратный переход выполнять разложением z -преобразования в ряд Лорана по степеням z . Для большинства реальных систем z -преобразование представляет дробно-рациональную функцию, разложение которой в ряд Лорана производится простым делением числителя на знаменатель. Коэффициенты при соответствующих степенях z равны значениям функции времени в дискретные моменты $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д.

Пример. Найдём оригинал функции

$$F(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}.$$

Делением числителя на знаменатель получим бесконечный ряд

$$\frac{\frac{T^2}{2}(z^2+z)}{z^3-3z^2+3z-1} = \frac{T^2}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \dots + \frac{n^2}{z^n} \right),$$

откуда

$$x(nT) = \frac{1}{2} (nT)^2,$$

где $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д.

Учитывая выражение (9-10), получим

$$x(nT) = \frac{1}{2} t^2.$$

Широко используется также z -преобразование с запаздыванием

$$F(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x(nT + \varepsilon T) z^{-n} = Z_{\varepsilon}[x(t)]. \quad (9-17)$$

Здесь коэффициент ε может принимать значения в пределах $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Из выражения (9-17) следует, что z -преобразование с запаздыванием определяется для непрерывной функции в дискретные моменты времени $t = nT + \varepsilon T$. Эти моменты времени свинуты по отношению к основным дискретным моментам времени на величину εT в сторону опережения. Поэтому иногда это преобразование называют

«упреждающим» z -преобразованием, или модифицированным z -преобразованием. Такое преобразование дает возможность рассчитывать выходную величину в любой момент времени внутри интервала регулирования.

В табл. 9-1 приведены также значения z -преобразований с запаздыванием. В теории z -преобразования существуют теоремы, в основном аналогичные теоремам обычного преобразования Лапласа. Эти теоремы с доказательствами приведены в [21, 23].

§ 9-5. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ИМПУЛЬСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Анализ систем импульсного регулирования предназначен для определения устойчивости и показателей качества переходных процессов.

Следует отметить, что исследование систем импульсного регулирования является задачей более сложной, чем исследование непрерывных систем, и сложность эта резко возрастает при повышении порядка системы. Однако в большинстве случаев системы импульсного регулирования могут быть с достаточной для практики точностью описаны дифференциальными уравнениями второго или первого порядка, реже — третьего. Это связано с тем, что импульсные системы применяются, как правило, для регулирования медленно протекающих производственных процессов, в которых постоянные времени элементов регулятора можно считать равными нулю, так как они на несколько порядков меньше постоянных времени регулируемого объекта. В этом случае порядок уравнения системы равен порядку уравнения регулируемого объекта. Применяются также специальные быстродействующие импульсные системы высоких порядков, которые в настоящем курсе не рассматриваются.

При исследовании систем импульсного регулирования используются дискретные передаточные функции, аналогичные передаточным функциям непрерывных систем. -

Рассмотрим систему с разомкнутой в точке A обратной связью (рис. 9-7). Она состоит из импульсного элемента, изображенного в виде ключа, и непрерывной части с передаточной функцией $W(p)$. Ключ замыкается через равные промежутки времени на очень короткое время и на его выходе получают импульсы вида, приведенного на рис. 9-4, при очень малой скважности γ . Такие импульсы можно рассматривать как последовательность дельта-функций. Вследствие инерционности непрерывной части на ее выходе при подаче на вход дискретных сигналов будет иметь место непрерывный сигнал. Разомкнутая импульсная система, представляющая совокупность импульс-

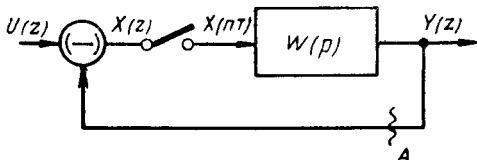


Рис. 9-7. Структурная схема системы импульсного регулирования

ного элемента с непрерывной частью, в которой при дискретном входном сигнале выходной сигнал непрерывен, называется *импульсным фильтром*.

Несмотря на то, что выходной сигнал разомкнутой импульсной системы непрерывен, ее обычно рассматривают в те же дискретные моменты времени, что и входной сигнал.

Передаточной функцией разомкнутой импульсной системы называется отношение z -преобразований выходного $Y(z)$ и входного $X(z)$ сигналов при нулевых начальных условиях.

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (9-18)$$

Можно показать [5], что передачная функция разомкнутой импульсной системы при подаче на вход последовательности дельта-функций определяется из выражения

$$W(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} w(kT) z^{-k}, \quad (9-19)$$

где $w(kT)$ — функция веса (см. § 2-3) непрерывной части ($k = 1, 2, 3, \dots$).

В реальных системах импульсного регулирования управление производится не дельта-функциями, а импульсами, имеющими конечные амплитуду и длительность (рис. 9-8, а).

В этом случае выражением (9-19) пользоваться нельзя.

Найдем условную функцию веса непрерывной части при воздействии на ее входе импульса конечной длительности γT и единичной высоты. Такой импульс можно заменить двумя единичными ступенчатыми функциями $1(t)$ и $-1(t - \gamma T)$, которые прикладываются на вход непрерывной части со сдвигом во времени γT (рис. 9-8, б). Выходная величина непрерывной части (функция веса) в этом случае может быть представлена как разность двух переходных функций (см. § 2-3)

$$w(kT) = h(kT) - h(kT - \gamma T). \quad (9-20)$$

Подставив значение $w(kT)$ из выражения (9-20) в (9-19), получим

$$W(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} h(kT) z^{-k} - \sum_{k=0}^{k=\infty} h(kT - \gamma T) z^{-k}$$

или

$$W(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} h(kT) z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} h(kT + \varepsilon T) z^{-k}, \quad (9-21)$$

где $\varepsilon = 1 - \gamma$.

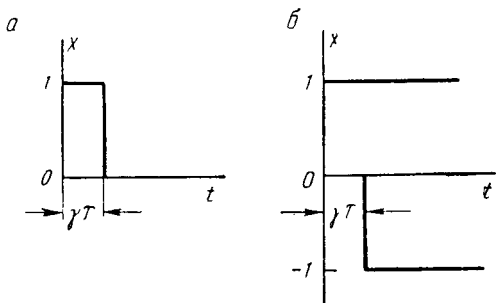


Рис. 9-8. Импульс конечной длительности и единичной амплитуды

Учитывая выражения (9-14) и (9-17), получим

$$W(z) = F(z) - z^{-1}F(z, \varepsilon), \quad (9-22)$$

где $F(z)$ и $F(z, \varepsilon)$ — соответственно обычное z -преобразование и z -преобразование с запаздыванием переходной функции $h(t)$ непрерывной части системы.

Пример. Найдем передаточную функцию разомкнутой импульсной системы, непрерывная часть которой представлена апериодическим звеном с переходной функцией (3-11)

$$h(t) = k(1 - e^{-\alpha t}),$$

где $\alpha = \frac{1}{T_1}$.

Найдем z -преобразования $h(t)$ по табл. 9-1 и, подставив их в выражение (9-22), получим

$$W(z) = k \left[\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)} - z^{-1} \frac{z}{z-1} + z^{-1} \frac{zd^{\varepsilon}}{z-d} \right],$$

где $d = e^{-\alpha T}$;

T — интервал регулирования.

После преобразований получим

$$W(z) = k \frac{d^{\varepsilon} - d}{z - d}. \quad (9-23)$$

Можно найти передаточную функцию разомкнутой импульсной системы при импульсах различной формы [21, 23]. Вид передаточной функции импульсной системы при одной и той же непрерывной части существенно меняется в зависимости от формы импульсов.

Рассмотрим замкнутую систему импульсного регулирования (см. рис. 9-8). Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{W(z)}{1 + W(z)}. \quad (9-24)$$

Передаточная функция по отклонению выходной величины от входной (по ошибке)

$$\Phi_x(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{1}{1 + W(z)}, \quad (9-25)$$

где $W(z)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

Знаменатель передаточной функции (9-24) представляет характеристическое уравнение замкнутой системы.

Рассмотрим определение устойчивости систем импульсного регулирования. Так как на вход системы подаются непрерывно возмущающие ее импульсы, то определение устойчивости, сформулированное для системы непрерывного регулирования, здесь оказывается непригодным.

Для систем импульсного регулирования можно дать следующее определение устойчивости: если при ограниченном входном сигнале выходной сигнал будет также ограничен, то система импульсного регулирования является устойчивой.

Для определения устойчивости импульсных систем разработаны алгебраические и частотные критерии устойчивости, аналогичные критериям для непрерывных систем [5, 21, 23].

Необходимым и достаточным условием устойчивости непрерывной системы является расположение корней знаменателя передаточной функции (ее полюсов) в левой полуплоскости корней.

В случае импульсной системы, описываемой дискретной передаточной функцией вида (9-24), для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения [знаменателя передаточной функции (9-24)] замкнутой системы располагались внутри круга единичного радиуса или имели модуль меньше единицы.

Это условие является следствием из свойства z -преобразования, которое отображает левую полуплоскость комплексной плоскости оператора p в круг единичного радиуса на плоскости z (§ 9-4). Ниже приводятся условия устойчивости без вывода [11].

Для характеристического уравнения первого порядка вида $a_0z + a_1 = 0$ при $a_0 > 0$ условие устойчивости

$$a_0 - a_1 > 0. \quad (9-26)$$

Для системы второго порядка, характеристическое уравнение которого имеет вид $a_0z^2 + a_1z + a_2$ при $a_0 > 0$, условия устойчивости записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &> 0; \\ a_0 - a_2 &> 0; \\ a_0 - a_1 + a_2 &> 0. \end{aligned} \quad (9-27)$$

Для системы третьего порядка, характеристическое уравнение которого имеет вид $a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0$, условия устойчивости записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0; \\ b_1 &= 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0; \\ b_2 &= 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0; \\ b_3 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0; \\ b_1b_2 - b_0b_3 &= 8(a_0^2 - a_3^2 - a_0a_2 + a_1a_3) > 0. \end{aligned} \quad (9-28)$$

Для уравнений более высокого порядка определение устойчивости алгебраическим методом усложняется. В этом случае удобнее применять аналог частотного критерия Найквиста [21, 23]. Здесь этот критерий не рассматриваем, так как в горной промышленности импульсные системы высоких порядков не применяются. Оценка качества систем импульсного регулирования обычно не может быть выполнена с такой полнотой, как для непрерывных систем.

Относительно просто может быть определено отклонение (ошибка) в установившемся режиме. Для этого нужно разложить в ряд

Маклорена передаточную функцию по отклонению (по ошибке). Это разложение имеет вид [21]

$$x(nT) = c_0 x(nT) + c_1 x'(nT) + \frac{c_2}{2!} x''(nT) + \dots \quad (9-29)$$

Коэффициенты ошибок $c_0, c_1, c_2, \dots$ находятся по формуле

$$c_n = \left[\frac{d^n \Phi_x(z)}{dp^n} \right] = \left[\frac{d^n \Phi_x(e p T)}{dp^n} \right]. \quad (9-30)$$

При $c_0 \neq 0$ система регулирования будет статической, при $c_0 = 0$ — астатической первого порядка, при $c_0 = c_1 = 0$ — астатической второго порядка. Коэффициент c_0 представляет установившееся отклонение статической системы, коэффициент c_1 — установившееся отклонение по скорости астатической системы первого порядка и т. д.

Оценка качества может быть произведена также по переходной функции, которая описывает реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие.

Уравнение непрерывной функции может быть получено следующим образом. Изображение (z -преобразование) переходной функции $H(z)$ представляет произведение дискретной передаточной функции замкнутой импульсной системы на z -преобразование единичного ступенчатого воздействия (см. табл. 9-1).

$$H(z) = \Phi(z) \frac{z}{z-1} = \frac{W(z)}{1-W(z)} \cdot \frac{z}{z-1}. \quad (9-31)$$

Подставляя в (9-31) значение передаточной функции конкретной системы и переходя от изображения к оригиналу, получим уравнение переходной функции во временной области, по которому можно построить кривую. Из рассмотрения кривой переходной функции можно вынести суждение о качестве переходного процесса.

Вопросы синтеза корректирующих устройств систем импульсного регулирования решаются методами, аналогичными методам для непрерывных систем, но имеющими специфические особенности. Достаточно полно эти методы изложены в монографиях [11, 23].

Контрольные вопросы

1. Какие линейные системы относятся к особым?
2. Какие особенности имеют линейные системы с запаздыванием?
3. Как получить передаточную функцию линейной системы с запаздыванием?
4. Как исследовать линейную систему с запаздыванием на устойчивость с помощью критерия устойчивости Найквиста?
5. Как можно исследовать качество линейных систем с запаздыванием?
6. Какие особенности имеют линейные системы с распределенными параметрами?
7. Какие особенности имеют линейные системы с переменными параметрами?
8. Каким образом производится исследование линейных систем с переменными параметрами?

9. Какие системы называются линейными системами импульсного регулирования?

10. Какие особенности имеют линейные системы импульсного регулирования, в каких случаях они применяются?

11. Какие применяются типы импульсных звеньев?

12. Какие математические методы применяются для исследования импульсных систем?

13. В чем состоит сущность z -преобразования?

14. Как получить прямое и обратное z -преобразование?

15. Как получить дискретную передаточную функцию импульсной системы разомкнутой, замкнутой, по отклонению (по ошибке)?

16. Как можно исследовать устойчивость импульсной системы?

17. Как исследовать качество импульсной системы?

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 10-1. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В предыдущих главах рассмотрены вопросы линейной теории автоматического регулирования, с помощью которой можно исследовать и проектировать системы, состоящие исключительно из линейных элементов. Однако имеется обширный класс нелинейных систем, которые с помощью линейной теории исследовать невозможно.

Нелинейными называются системы автоматического регулирования, содержащие хотя бы один нелинейный элемент или элемент с ограниченным по величине воздействием (ограниченной мощностью, перемещением и т. п.).

Характеристики нелинейных элементов могут быть различными. На рис. 10-1 приведены нелинейные характеристики, наиболее часто встречающиеся на практике.

К нелинейным относятся элементы, имеющие переменный коэффициент усиления. Если с увеличением отклонения коэффициент усиления уменьшается, то это аналогично насыщению или ограниченной мощности. Однако в некоторых случаях специально конструируются нелинейные элементы, у которых с увеличением отклонения коэффициент усиления увеличивается.

К нелинейным элементам относятся также логические устройства, с помощью которых могут быть сформированы нелинейности весьма разнообразных форм.

Принцип суперпозиции (наложения), широко применяемый для исследования линейных систем, в случае исследования нелинейных систем неприменим, так как эффект входного сигнала на выходе зависит от других сигналов и от уровня сигнала.

В нелинейных системах возможны автоколебания, которые являются периодическим движением, вызываемые внутренними свойствами системы, а не под влиянием внешних периодических воздействий.

По характеру переходных процессов и условиям устойчивости нелинейные системы в ряде случаев существенно отличаются от линейных. Устойчивая линейная система остается устойчивой при любых начальных отклонениях от установившегося состояния. Нелинейные системы могут быть устойчивыми при малых отклонениях и потерять устойчивость при больших отклонениях. Все это затрудняет исследование нелинейных систем и к тому же современная тео-

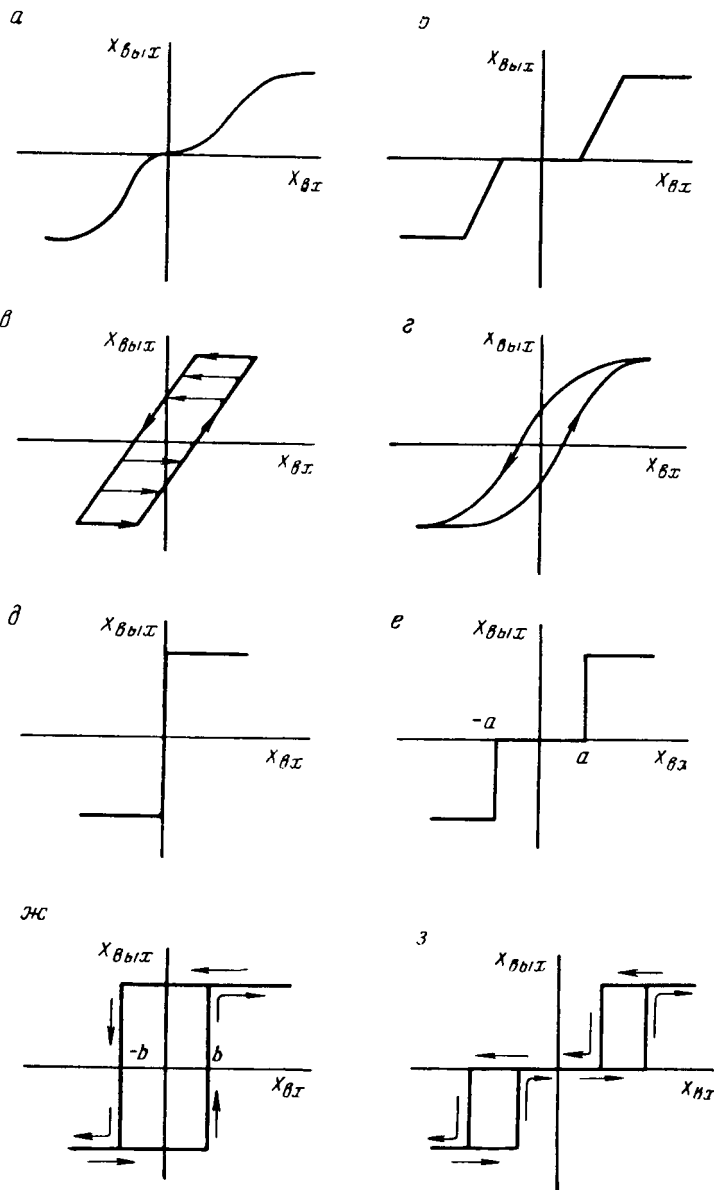


Рис. 10-1. Характеристики нелинейных элементов:

a — элемент с насыщением; $б$ — элемент с нечувствительностью и ограниченной мощностью или ограниченным перемещением; $в$ — элемент с сухим трением или мертвым ходом; $г$ — гистерезис в стали; $д$ — идеальная релейная характеристика; $е$ — релейная характеристика с зоной нечувствительности; $ж$ — релейная характеристика с коэффициентом возврата $k_B < 1$; $з$ — релейная характеристика с зоной нечувствительности и коэффициентом возврата $k_B < 1$

$k_B < 1$

рия нелинейных систем не дает общих аналитических методов исследования, с помощью которых можно было бы получить ответы, интересующие инженерную практику, с такой же полнотой, с какой их дает линейная теория.

В последующих параграфах рассмотрены методы исследования нелинейных систем, получившие наибольшее распространение. К ним относятся: 1) метод фазовой плоскости; 2) метод гармонической линеаризации.

В настоящее время А. В. Башариным разработан приближенный графический метод исследования систем автоматического регулирования, который дает возможность произвести также синтез корректирующих устройств в нелинейных системах. Он не дает решения задачи в общем виде и не позволяет установить зависимость между параметрами системы и качеством переходного процесса, однако в некоторых случаях он может быть очень полезен. Желющие могут ознакомиться с ним по монографии [4].

Широко применяются в настоящее время для исследования систем автоматического регулирования электронные моделирующие устройства. Этот вопрос рассмотрен в главе 12.

Нелинейные системы могут содержать один или несколько нелинейных элементов, образующих различные сочетания с линейными элементами. В настоящей главе рассмотрен наиболее распространенный и простой случай, когда система имеет только один нелинейный элемент. Более сложные случаи рассматриваются в специальных монографиях, например [5].

§ 10-2. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Фазовой плоскостью называется плоскость, в которой по оси абсцисс отложено отклонение регулируемой величины x , а по оси ординат производная от отклонения, или скорость его изменения y . Каждой точке этой плоскости соответствует одно определенное состояние (определенная фаза) системы.

Точка, определяющая на фазовой плоскости состояние системы, называется *изображающей точкой*. Перемещению изображающей точки на фазовой плоскости соответствует изменение состояний системы во времени. Траектория перемещения изображающей точки называется *фазовой траекторией*.

Фазовые траектории дают геометрическое качественное представление о переходном процессе в системе, так как время в этом представлении исключено. Чтобы получить количественное представление о переходном процессе, нужно решить дифференциальное уравнение системы во времени.

Фазовая плоскость со всеми траекториями, которые дают полное представление о возможных движениях и состоянии равновесия, называется *фазовым портретом* системы.

Применение метода фазовой плоскости ограничено следующими условиями:

1. Фазовая плоскость применяется для анализа нелинейных систем только второго порядка. Попытки применения этого метода для исследования систем более высокого порядка в многомерном фазовом пространстве не дали удовлетворительных результатов. Для качественной оценки нелинейной системы высокого порядка ее предварительно путем упрощающих допущений следует привести ко второму порядку.

2. Фазовую плоскость можно применить для исследования переходных процессов системы при ступенчатом или линейном воздействии на входе. Исследовать систему при синусоидальном воздействии на входе нельзя.

3. Метод фазовой плоскости можно применять для нелинейностей, которые зависят от входной величины и не зависят от времени.

Чтобы выяснить сущность метода фазовой плоскости, рассмотрим его для простоты применительно к линейной системе второго порядка. Предположим, что линейная система автоматического регулирования второго порядка при ступенчатом воздействии на входе описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10-1)$$

Уравнение любой системы с постоянными коэффициентами путем нескольких преобразований всегда можно привести к такому виду. Состояние системы, описываемой дифференциальным уравнением, полностью определяется, если известны значения отклонения регулируемой величины и его $(n - 1)$ производных, где n — порядок уравнения.

В рассматриваемом случае состояние системы второго порядка в каждый момент времени определяется значениями x и $\frac{dx}{dt}$. Введем обозначение $y = \frac{dx}{dt}$.

Рассмотрим вначале случай, когда в уравнении (10-1) $h = 0$. Это — консервативная система. Уравнение примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10-2)$$

Решение этого уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(\omega_0 t + \alpha); \\ y &= \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

Чтобы получить изображение переходного процесса на плоскости x, y , исключим время в выражениях (10-3)

$$\cos(\omega_0 t + \alpha) = \frac{x}{A}; \quad \sin(\omega_0 t + \alpha) = -\frac{y}{A\omega_0}.$$

Возводим в квадрат и складываем обе части последних выражений

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 \omega_0^2} = 1. \quad (10-4)$$

На фазовой плоскости уравнение (9-4) представляет собой семейство подобных вложенных друг в друга эллипсов. Через каждую точку плоскости проходит только один эллипс, отвечающий определенному значению величины A , которая зависит от начальных условий. Эллипсы нигде не пересекаются и имеют один общий центр (рис. 10-2).

Если в какой-либо момент времени t_1 состояние системы характеризуется отклонением x_1 и скоростью y_1 , то эти значения однозначно определяют на фазовой плоскости изображающую точку M_1 .

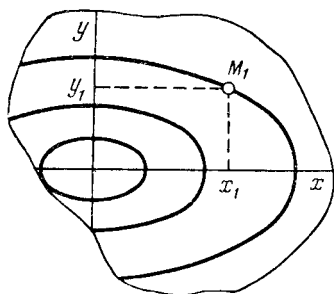


Рис. 10-2. Фазовые траектории консервативной системы

Если с течением времени состояние системы меняется, то изображающая точка перемещается по фазовой траектории. Движение изображающей точки по фазовой траектории на рис. 10-2 будет происходить по часовой стрелке. Это очевидно на основании следующих рассуждений. Пока скорость положительна ($y > 0$), отклонение x будет возрастать, когда скорость станет меньше нуля, x начинает убывать. Следовательно, в верхней полуплоскости точка M_1 перемещается слева направо, а в нижней полуплоскости — справа налево.

По фазовым траекториям можно судить о характере движения изучаемой системы. Замкнутой траектории на фазовой плоскости соответствует периодическое движение регулируемой системы. Действительно, если в некоторый момент времени t состояние системы определялось положением изображающей точки M_1 (рис. 10-2), имеющей координаты x_1 и y_1 , то спустя некоторое время изображающая точка пройдет по эллипсу и вернется в это же положение, т. е. система через определенные промежутки времени будет приходить в соответственно одинаковые состояния, принимая те же величины отклонения x и скорости y , что соответствует периодическому движению. Для того чтобы учесть все возможные периодические движения системы, следует ее фазовую плоскость полностью заполнить подобными вложенными друг в друга эллипсами.

Системы, в которых возможно бесчисленное множество периодических движений, непрерывно переходящих одно в другое, называются *консервативными*. В таких системах характер движения зависит от начальных условий и возникшие колебания не прекращаются, хотя и не нарастают. Поэтому практически система регулирования, которой соответствует замкнутая фазовая траектория, неустойчива.

Общий центр эллипсов является особой точкой фазовой плоскости, которая называется *центром*. Это единственная точка на фазовой плоскости, которая соответствует установившемуся состоянию системы.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (10-1) $h \neq 0$. Решение уравнения при условии, что $\omega_0^2 < h^2$, имеет вид

$$x = Ae^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad (10-5)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$;

A и α — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Для представления движения на фазовой плоскости найдем $y = \frac{dx}{dt}$, дифференцируя выражение (10-5),

$$y = -Ahe^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha) - A\omega_1 e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha). \quad (10-6)$$

Исключим из выражений (10-5) и (10-6) время t . Для этого умножим выражение (10-5) на h и сложим с выражением (10-6)

$$y + hx = -A\omega_1 e^{-ht} \sin(\omega_1 t + \alpha). \quad (10-7)$$

Умножив выражение (10-5) на ω_1 , получим

$$\omega_1 x = A\omega_1 e^{-ht} \cos(\omega_1 t + \alpha). \quad (10-8)$$

Возводя в квадрат обе части выражений (10-7) и (10-8) и складывая их, получим

$$(y + hx)^2 + \omega_1^2 x^2 = A^2 \omega_1^2 e^{-2ht}. \quad (10-9)$$

Разделив выражение (10-7) на выражение (10-8), получим

$$-\frac{y + hx}{\omega_1 x} = \operatorname{tg}(\omega_1 t + \alpha),$$

откуда

$$t = -\left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{y + hx}{\omega_1 x} \right) \frac{1}{\omega_1}. \quad (10-10)$$

Подставив значение t из выражения (10-10) в выражение (10-9), получим

$$(y + hx)^2 + \omega_1^2 x^2 = C^2 e^{\frac{2h}{\omega_1} \operatorname{arctg} \frac{y + hx}{\omega_1 x}}, \quad (10-11)$$

где

$$C^2 = C^2 \omega_1^2 e^{\frac{2h\alpha}{\omega_1}}.$$

Это — уравнение семейства логарифмических спиралей, наматывающихся на начало координат (рис. 10-3). Чтобы убедиться в этом, произведем следующие преобразования.

Полагаем $\omega_1 x = u$; $y + hx = v$. Подставив эти значения в выражение (10-11), получим

$$u^2 + v^2 = C^2 e^{\frac{2h}{\omega_1} \operatorname{arctg} \frac{v}{u}}. \quad (10-12)$$

Перейдем к полярной системе координат r и φ

$$u = r \cos \varphi; \quad v = -r \sin \varphi.$$

Тогда выражение (10-12) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} r^2 &= C^2 e^{\frac{2h}{\omega_1} \arctg \left(-\frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} \right)} = C^2 e^{\frac{2h}{\omega_1} \arctg (-\operatorname{tg} \varphi)} = \\ &= C^2 e^{-\frac{2h}{\omega_1} \varphi} \end{aligned}$$

или

$$r = C e^{-\frac{h}{\omega_1} \varphi}. \quad (10-13)$$

Это — уравнение логарифмической спирали в полярной системе координат. С течением времени угол φ неограниченно возрастает, так как

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v}{u} = -\frac{y + hx}{\omega_1 x} = \operatorname{tg} (\omega_1 t + \alpha),$$

откуда

$$\varphi = \omega_1 t + \alpha. \quad (10-14)$$

Радиус-вектор r с течением времени неограниченно убывает, что становится очевидным, если значение φ подставить в выражение (10-13).

Таким образом, с течением времени изображающая точка, двигаясь по спирали, неограниченно приближается к началу координат $x = 0$ и $y = 0$.

Изображающая точка через определенные промежутки времени пересекает оси x и y , при этом, когда $x = 0$, $y \neq 0$, а при $y = 0$ $x \neq 0$, что соответствует колебательному режиму. Так как с каждым оборотом спирали изображающая точка приближается к началу координат, амплитуда колебаний уменьшается, следовательно, колебания затухающие, система устойчива.

Рассмотрен случай, когда $\omega_0^2 > h^2$. В случае, когда $\omega_0^2 < h^2$, т. е. когда корни характеристического уравнения вещественные и равные, процесс будет затухать по аperiодическому закону. Соответствующая фазовая диаграмма приведена на рис. 10-4.

Уравнения фазовых траекторий, рассмотренных выше, получены решением линейного уравнения второго порядка. Сделано это для того, чтобы наиболее просто изложить понятие о фазовой плоскости. В случае нелинейных систем второго порядка решить дифференциальное уравнение в общем виде обычно не удастся.

Однако для построения фазовой плоскости нет необходимости решать исходное дифференциальное уравнение второго порядка;

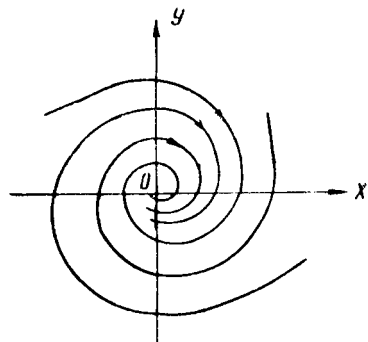


Рис. 10-3. Фазовые траектории устойчивой колебательной системы

можно найти уравнения фазовых траекторий, интегрируя дифференциальное уравнение первого порядка, что является более простой задачей.

Смысл введения фазовой плоскости заключается в том, что она позволяет выяснить вопрос о возможных движениях в динамических системах, не решая полностью исходного уравнения, а ограничиваясь его первым интегралом.

Уясним, как это делается, используя приведенное выше линейное уравнение второго порядка.

Уравнение (10-1) может быть представлено двумя уравнениями первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y; \\ \frac{dy}{dt} &= -2hy - \omega_0^2 x.\end{aligned}\quad (10-15)$$

Разделив второе уравнение на первое, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2hy + \omega_0^2 x}{y}.\quad (10-16)$$

Если уравнение (10-16) проинтегрировать, то можно получить уравнение фазовой траектории, аналогичное уравнению (10-13). Однако интегрирование уравнения первого порядка вида (10-16) в случае нелинейных систем в большинстве случаев невозможно. Фазовые траектории при этом могут быть построены методом изоклин. Точность этого метода невысока, но он дает возможность дать хотя бы качественную оценку переходного процесса нелинейной системы второго порядка.

Уравнение (10-16) определяет поле (совокупность) касательных к фазовым траекториям на фазовой плоскости. Можно выяснить характер этого поля, если построить семейство изоклин.

Изоклиной называется линия, во всех точках пересечения которой с траекториями касательные к фазовым траекториям имеют одинаковый наклон к оси абсцисс. Обозначим его через $\alpha = \frac{dy}{dx}$.

Полагая $\alpha = \text{const}$ и подставляя его в уравнение (10-16), получим

$$\frac{dy}{dx} = \alpha = -\frac{2hy + \omega_0^2 x}{y},\quad (10-17)$$

откуда уравнение изоклины

$$y = -\frac{\omega_0^2}{\alpha + 2h} x = \sigma x.\quad (10-18)$$

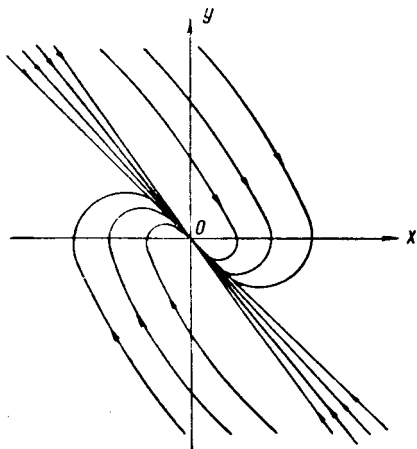


Рис. 10-4. Фазовая диаграмма апериодического процесса с устойчивым узлом

В данном случае это уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{\alpha + 2h}. \quad (10-19)$$

Принимая $\omega_0 = 2$ и $h = 3$, получим

$$\sigma = -\frac{4}{\alpha + 6}.$$

Задавая различные значения α , вычислим угловые коэффициенты σ , которые приведены ниже.

α	0	2	10	$+\infty$	-2	-3	-5
σ	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-0	-1	$-\frac{4}{3}$	-4
α	-6	-7	-8	-9	-10	-12	$-\infty$
σ	-4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	

На рис. 10-5 построены изоклины для значений α , меняющихся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Значения α выписаны у соответствующих им изоклин.

Фазовую траекторию можно строить из любой точки, расположенной на любой изоклине. В качестве начальной принимаем точку A на изоклине, соответствующей $\alpha = -9$. Касательная к фазовой траектории в точке A имеет угловой коэффициент $\alpha = -9$. На следующей изоклине в направлении по часовой стрелке угловой коэффициент касательной составляет $\alpha = -10$.

Однако точка, в которой должна быть проведена эта касательная, чтобы попасть на фазовую траекторию, проходящую через точку A , неизвестна. Построение фазовой траектории можно выполнить приближенно. Из точки A в направлении движения часовой стрелки проводится отрезок прямой с угловым коэффициентом -9 до точки B , расположенной приблизительно посередине между соседними изоклинами. Из точки B проводится в направлении движения часовой стрелки отрезок прямой с угловым коэффициентом -10 до точки C , находящейся между следующими изоклинами, и т. д. Получается фазовая траектория, составленная из отрезков касательных, которую можно заменить плавной кривой.

На рис. 10-5 фазовая траектория построена полностью, она стремится к началу координат, что свидетельствует об устойчивости системы. Таким же образом на рис. 10-5 построена и другая фазовая траектория из точки M , соответствующей другим начальным условиям, через точки N и L . Изображающая точка движется по другой траектории, но характер ее остается тот же — система аperiодически стремится к устойчивому состоянию.

В случае нелинейных систем изоклины могут быть криволинейными. В этих случаях для каждого значения α изоклина строится по точкам (вычисляются значения y по задаваемым значениям x).

Следует иметь в виду, что построение изоклин для нелинейных систем в некоторых случаях оказывается настолько трудоемким, что от него приходится отказываться.

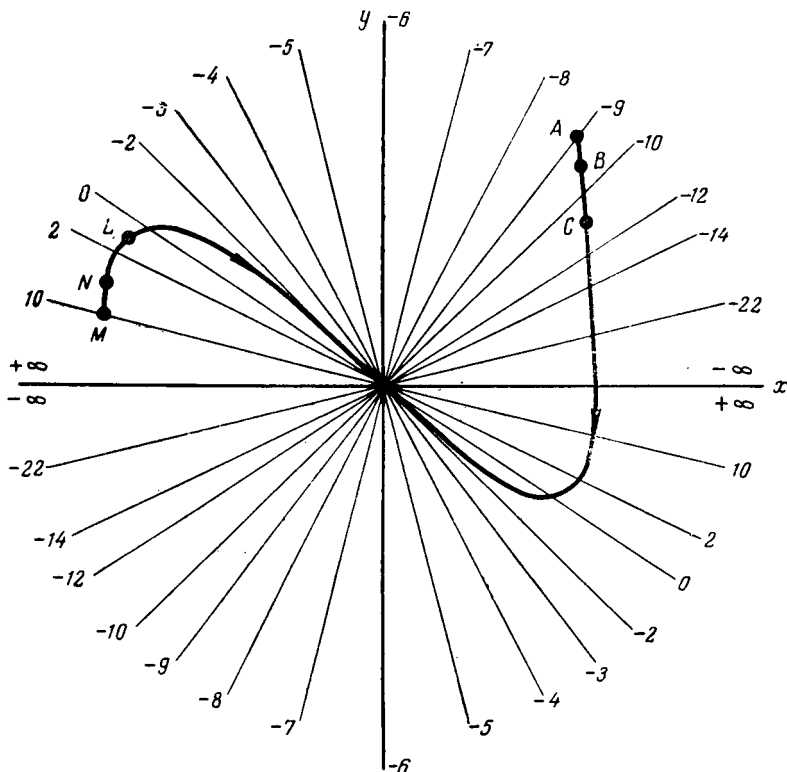


Рис. 10-5. Изоклины

Из уравнения (10-16) следует, что в каждой точке фазовой плоскости имеется единственная касательная к фазовой траектории, так как каждой паре значений x и y соответствует только одно значение $\frac{dy}{dx}$ и, следовательно, через каждую точку фазовой плоскости проходит только одна фазовая траектория.

Через точку, где $\frac{dy}{dx} = 0$, т. е. одновременно обращаются в нуль $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, может проходить одновременно несколько фазовых траекторий. Эта точка называется *особой точкой*. Для системы второго порядка эта точка соответствует состоянию равновесия.

Рассмотрим, какие особые точки и какие фазовые траектории возможны на фазовой плоскости. В случае замкнутой фазовой траектории особая точка, как уже упоминалось выше, называется *центром*. Когда фазовые траектории описываются уравнением (10-11), вся плоскость заполнена семейством спиралей, накручивающихся на особую точку и неограниченно к ней приближающихся. Такая особая точка называется *устойчивым фокусом*. Система, положению равновесия которой соответствует устойчивый фокус, является устойчивой.

В том случае, когда процесс затухает по аperiодическому закону (см. рис. 10-4), особая точка называется *устойчивым узлом*.

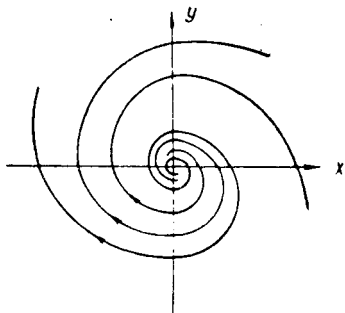


Рис. 10-6. Фазовая диаграмма расходящегося колебательного процесса с неустойчивым фокусом

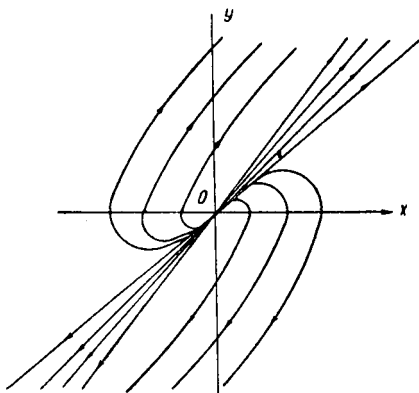


Рис. 10-7. Фазовая диаграмма расходящегося аperiодического процесса с неустойчивым узлом

Предположим теперь, что исходное дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2h \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10-20)$$

В случае, когда $\omega_0^2 > h^2$, корни характеристического уравнения комплексные с положительной вещественной частью. Фазовые траектории имеют вид спиралей, свертывающихся с особой точки, неограниченно от нее удаляясь (рис. 10-6). Движение системы в этом случае будет колебательным с возрастающей амплитудой, система неустойчива, особая точка называется *неустойчивым фокусом*.

При $h^2 > \omega_0^2$, когда корни характеристического уравнения вещественные, положительные и различные, фазовые траектории имеют вид парабол, по которым изображающая точка неограниченно удаляется от особой точки (рис. 10-7). Движение системы в этом случае будет аperiодическим неустойчивым, особая точка называется *неустойчивым узлом*.

Предположим, что система автоматического регулирования второго порядка имеет не отрицательную обратную связь, а положительную, при этом отклонение, возникшее в системе, не уменьшается, а увеличивается. Уравнение такой системы имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x = 0. \quad (10-21)$$

Представим уравнение (10-21) двумя уравнениями первого порядка

$$y = \frac{dx}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = -2hy + \omega_0^2 x,$$

откуда получим уравнение фазовых траекторий в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy + \omega_0^2 x}{y}. \quad (10-22)$$

Рассмотрим случай, когда $h = 0$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega_0^2 x}{y}.$$

Интегрируя это уравнение, получим решение в следующем виде:

$$\frac{y^2}{\omega_0^2 A^2} - \frac{x^2}{A^2} = 1, \quad (10-23)$$

где A — постоянная интегрирования.

Это — уравнение семейства равнобоких гипербол, отнесенных к главным осям.

Полагая $A = 0$, получим уравнения двух асимптот

$$y = \omega_0 x; \quad y = -\omega_0 x.$$

Фазовые траектории приведены на рис. 10-8.

Направление движения изображающей точки показано на траекториях стрелками. На какой бы траектории ни находилась изображающая точка, в конечном итоге она будет неограниченно удаляться от особой точки. Исключение составляют только асимптоты, но и в этом случае состояние равновесия будет неустойчивым, так как достаточно сколь угодно малого возмущения, чтобы изображающая точка перешла на какую-либо другую фазовую траекторию, по которой она беспрестанно удалится от особой точки.

Такая особая точка называется *седлом*. Здесь рассмотрен случай, когда $h = 0$. Исследования показывают, что качественный характер фазовых траекторий и особой точки не меняется и при $h \neq 0$.

Рассмотренные фазовые траектории и особые точки полностью отражают все возможные движения и состояние покоя для линейных

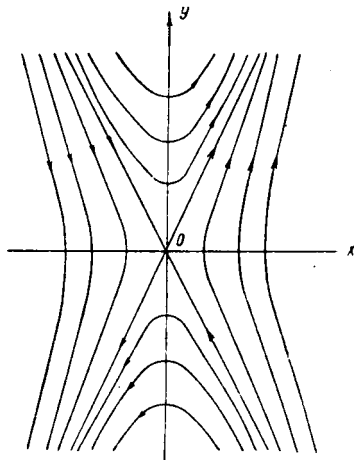


Рис. 10-8. Фазовая диаграмма переходного процесса с седлом

систем. В случае нелинейных систем имеют место те же особые точки, что и для линейных систем, а именно: центр, устойчивые и неустойчивые фокус, узел и седло.

Однако особые точки для случая нелинейных систем могут в какой-то мере характеризовать движения только в небольшой окрестности особой точки. Если в системе имеют место большие отклонения от положения особой точки, то характер движения фазовыми траекториями линейной системы не определяется. Для полной характеристики движения в нелинейных системах большое значение имеют особые траектории. Различают три типа особых траекторий на фазовой плоскости.

Первый тип особых траекторий — это рассмотренные выше *особые точки*. В данном случае состояние равновесия рассматривается как частный случай движения.

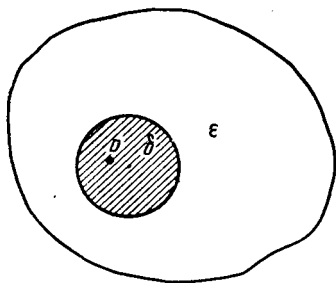


Рис. 10-9. К определению устойчивости по Ляпунову

В связи с изучением нелинейных систем сформулируем более строго определение устойчивости системы. В соответствии с определением, данными Ляпуновым, состояние равновесия называется устойчивым, если для любой заданной сколь угодно малой области ϵ допустимых отклонений от состояния равновесия (рис. 10-9) существует такая окрестность δ вокруг точки равновесия, что ни одно движение, начинающееся внутри окрестности, никогда не достигает границ

области ϵ допустимых отклонений при любом сколь угодно большом значении времени t . Если такой окрестности δ не существует, система неустойчива. Другими словами, можно сказать, что для любой сколь угодно малой области ϵ допустимых отклонений существует своя область начальных отклонений, отличных от нулевых, при которых отклонения системы в переходном режиме не выходят за пределы области ϵ .

Устойчивость, по Ляпунову, есть устойчивость «в малом», т. е. для области достаточно малых начальных отклонений. За пределами этой области вследствие значительного отступления характеристик системы от линейной картина фазовых траекторий, описанных выше для линейных систем, может настолько измениться, что примет качественно другой характер.

Второй тип особых траекторий — изолированные замкнутые кривые, называемые *предельными циклами*.

Как было рассмотрено выше, линейной консервативной системе соответствует замкнутая фазовая траектория, причем таких траекторий на плоскости бесконечное множество и ни одна из них не может быть выделена в качестве особой.

В неконсервативных нелинейных системах могут существовать только особые изолированные замкнутые траектории — предельные

циклы, а все соседние траектории наворачиваются на предельные циклы или сходят с них.

На рис. 10-10, *а* изображена фазовая диаграмма системы, имеющей точку равновесия типа неустойчивого фокуса и один предельный цикл. Система неустойчива в малом, но амплитуда расходящихся колебаний из-за нелинейности характеристик увеличивается только до определенного предела и затем остается постоянной.

Все траектории, находящиеся внутри предельного цикла, свертываются с неустойчивого фокуса и наворачиваются изнутри на предельный цикл. Все траектории, находящиеся вне предельного цикла,

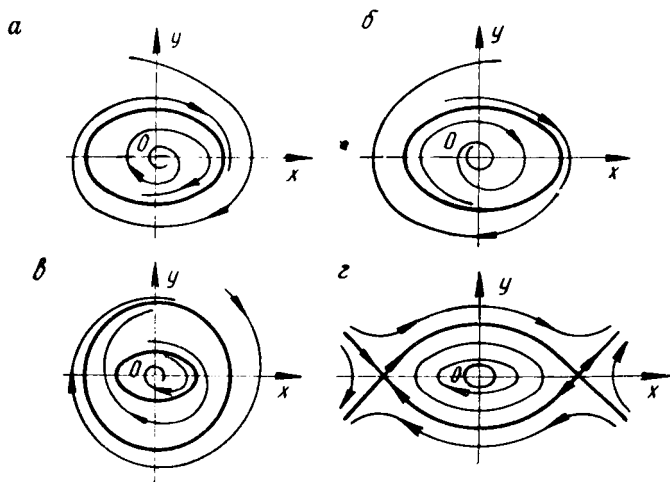


Рис. 10-10. Особые траектории фазовых диаграмм

также наворачиваются на него. С течением времени изображающая точка, не находящаяся в точке равновесия, приблизится сколь угодно близко к предельному циклу. Такой предельный цикл называется *устойчивым*.

Система, которой соответствует устойчивый предельный цикл, совершает устойчивые автоколебания, амплитуда которых не зависит от начальных условий, а определяется свойствами нелинейной системы. Размеры предельного цикла по оси x определяют амплитуду колебаний, а по оси y — скорость изменения регулируемой величины.

На рис. 10-10, *б* изображена фазовая диаграмма системы, имеющей неустойчивый предельный цикл и устойчивый фокус. Система устойчива в малом и неустойчива в большом. Если изображающая точка в начале своего движения находилась внутри предельного цикла, она будет двигаться по спирали к устойчивому фокусу. Если начальное отклонение было таково, что изображающая точка оказалась вне предельного цикла, то она будет от него удалаться по спирали в бесконечность.

Если изображающая точка находится на предельном цикле, то система совершает автоколебания, но достаточно малейшего отклонения от предельного цикла под влиянием случайного внешнего воздействия и изображающая точка начнет удаляться от него либо к устойчивому фокусу, либо в бесконечность. Практически работа на предельном цикле невозможна.

Возможны случаи, когда система имеет несколько предельных циклов. На рис. 10-10, в показана фазовая диаграмма системы, имеющей два предельных цикла и устойчивый фокус. Первый предельный цикл неустойчивый, второй более удаленный от фокуса — устойчивый.

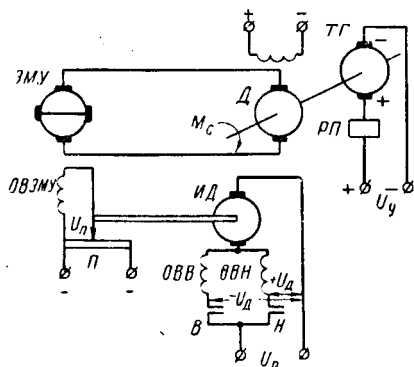


Рис. 10-11. Релейная система

Если соседние траектории наворачиваются на предельный цикл с одной стороны и свертываются с другой, то предельный цикл называется *полуустойчивым*. Третий тип особых траекторий носит название *сепаратрис*. Они разделяют плоскость на области с различными видами движения. На рис. 10-10, г кроме центра имеются еще две особые точки типа седла, через которые и проходят сепаратрисы, разделяющие фазовую плоскость на пять областей. Область, замкнутая сепаратрисами, является областью устойчивого незатухающего колебательного процесса, тогда как остальные представляют области неустойчивых расходящихся процессов.

В примерах, рассмотренных выше, предполагали, что одним уравнением можно описать движение изображающей точки на всей фазовой плоскости. Однако в некоторых нелинейных системах это сделать невозможно. Так, например, если один из элементов замкнутой системы автоматического регулирования имеет релейную характеристику, приведенную на рис. 10-1, д, то движение системы описывается двумя дифференциальными уравнениями, одно из которых справедливо для положительных значений $x_{вх}$ и $x_{вых}$, другое — для отрицательных значений. Точно так же двумя уравнениями будет описываться движение изображающей точки на фазовой плоскости.

Если один из элементов системы имеет релейную характеристику (см. рис. 10-1, е), то движение изображающей точки описывается тремя уравнениями. Рассмотрим этот случай подробнее.

На рис. 10-11 приведена релейная система автоматического поддержания скорости двигателя постоянного тока. Двигатель $Д$ получает питание от электромашинного усилителя $ЭМУ$, обмотка управления которого $ОВ ЭМУ$ питается напряжением U_n от потенциометра $П$ с движком, перемещаемым исполнительным двигателем $ИД$. Исполнительный двигатель включается в сеть через реверсирующие

контакты трехпозиционного поляризованного реле $РП$, катушка которого включена в цепь сравнения э. д. с. тахогенератора $E_{тг}$ и управляющего напряжения U_y .

Если действительная скорость двигателя равна заданной, то $E_{тг} = U_y$, якорь поляризованного реле занимает среднее положение, исполнительный двигатель отключен от сети, и напряжение U_n , снимаемое с потенциометра, неизменно.

При изменении скорости двигателя пропорционально изменяется э. д. с. тахогенератора $E_{тг}$ и под действием разности

$$\Delta U = U_y - E_{тг} \quad (10-24)$$

через катушку поляризованного реле начинает протекать ток. Однако вследствие наличия у реле зоны нечувствительности якорь реле притянется в одну или другую сторону только после того, как ΔU достигнет значения $\pm \Delta U_0$. Исполнительный двигатель включится и будет передвигать движок потенциометра, изменяя напряжение U_n , в направлении, при котором ΔU , т. е. разность между заданной и действительной скоростями, уменьшается. Когда ΔU станет меньше $\pm \Delta U_0$, якорь поляризованного реле займет среднее положение, исполнительный двигатель отключится от сети, перемещение движка потенциометра и изменение U_n прекратятся.

Расчленим эту систему на звенья и составим дифференциальное уравнение.

Первое звено. Поляризованное реле $РП$. Вход — цепь, состоящая из последовательно соединенных якоря тахогенератора, катушки реле и источника управляющего напряжения U_y . Выход — выходные контакты реле. На вход этого звена подается разность напряжений ΔU , на выходе получается выходное напряжение U_d реле. Это — релейное звено с характеристикой, изображенной на рис. 10-1, *е*. Если входная величина ΔU меньше зоны нечувствительности $\pm \Delta U_0$, то напряжение на выходе реле равно нулю. Если $\Delta U > \pm \Delta U_0$, то на выходе реле появляется напряжение U_d , и в зависимости от знака перед ΔU исполнительный двигатель включается на одно или другое направление вращения. Изменение в схеме, меняющее направление вращения двигателя $ИД$, условно будет обозначать как перемену знака выходного напряжения U_d поляризованного реле.

Уравнение реле имеет вид

$$U_d = \begin{cases} U_p & \text{при } \Delta U > \Delta U_0 \\ -U_p & \text{при } \Delta U < -\Delta U_0 \\ 0 & \text{при } |\Delta U| < \Delta U_0 \end{cases} \quad (10-25)$$

Второе звено. Исполнительный двигатель $ИД$ с потенциометром $П$. Вход — цепь, содержащая один из выходных контактов реле $РП$; соответствующую этому контакту обмотку возбуждения, якорь исполнительного двигателя и источник напряжения U_p . Выход — выходные зажимы потенциометра $П$.

Когда выходные контакты реле $P\Pi$ разомкнуты, двигатель неподвижен, выходное напряжение U_{Π} потенциометра не меняется. При замыкании одного из контактов реле $P\Pi$ исполнительный двигатель включается на неизменное напряжение $\pm U_p$ и вращается в одну или другую сторону с постоянной скоростью, что приводит к изменению с постоянной скоростью выходного напряжения U_{Π} потенциометра.

Скорость изменения напряжения U_{Π} можно определить следующим образом. Обозначим время перемещения движка потенциометра из одного крайнего положения в другое через T_{Π} и назовем эту величину постоянной времени потенциометра. Рабочую длину потенциометра обозначим через L_{Π} . Тогда скорость изменения напряжения потенциометра при включенном исполнительном двигателе

$$\frac{dU_{\Pi}}{dt} = \pm k_1 \frac{L_{\Pi}}{T_{\Pi}} \text{ при } U_d = \pm U_p, \quad (10-26)$$

где k_1 — коэффициент передачи.

Это — интегрирующее (астатическое) звено.

Третье звено. Электромашинный усилитель. По аналогии с уравнением (4-33) можно написать

$$(T_{\text{эму}}p + 1) \bar{E}_{\text{эму}} = k_2 \bar{U}_{\Pi}. \quad (10-27)$$

Четвертое звено. Двигатель постоянного тока с тахогенератором. По аналогии с уравнением (4-34) можно написать

$$(T_{\text{э}}T_{\text{м}}p^2 + T_{\text{м}}p + 1) \bar{E}_{\text{тг}} = k_3 (\bar{E}_{\text{эму}} - r_{\text{я}} \bar{I}_{\text{с}}). \quad (10-28)$$

Положим, что в рассматриваемой системе постоянной времени $T_{\text{эму}}$ электромашинного усилителя и электрической постоянной времени $T_{\text{э}}$ можно пренебречь по сравнению с электромеханической постоянной времени двигателя. Тогда уравнения третьего и четвертого звеньев соответственно приобретут вид

$$\bar{E}_{\text{эму}} = k_2 \bar{U}_{\Pi}; \quad (10-29)$$

$$(T_{\text{м}}p + 1) \bar{E}_{\text{тг}} = k_3 (\bar{E}_{\text{эму}} - r_{\text{я}} \bar{I}_{\text{с}}). \quad (10-30)$$

Подставив значение $E_{\text{эму}}$ из выражения (10-29) в выражение (10-30), получим

$$(T_{\text{м}}p + 1) \bar{E}_{\text{тг}} = k_2 k_3 \bar{U}_{\Pi} - k_3 r_{\text{я}} \bar{I}_{\text{с}} \quad (10-31)$$

или в обычной форме

$$T_{\text{м}} \frac{dE_{\text{тг}}}{dt} + E_{\text{тг}} = k_2 k_3 U_{\Pi} - k_3 r_{\text{я}} I_{\text{с}}. \quad (10-32)$$

В уравнении (10-25) можно заменить

$$\Delta U = U_y - E_{\text{тг}}.$$

Полагая $U_y = \text{const}$, можно окончательно принять

$$\Delta U = -\Delta E_{\text{тг}}.$$

Тогда уравнение (10-26) с учетом уравнения (10-25) и указанной замены и уравнение (10-32), записанные в отклонениях, будут иметь вид

$$\frac{d\Delta U_{\text{п}}}{dt} = \begin{cases} -k_1 \frac{L_{\text{п}}}{T_{\text{п}}} & \text{при } \Delta E_{\text{тг}} > \Delta U_0 \\ k_1 \frac{L_{\text{п}}}{T_{\text{п}}} & \text{при } \Delta E_{\text{тг}} < -\Delta U_0 \\ 0 & \text{при } |\Delta E_{\text{тг}}| < \Delta U_0 \end{cases}; \quad (10-33)$$

$$T_{\text{м}} \frac{d\Delta E_{\text{тг}}}{dt} + \Delta E_{\text{тг}} = k_2 k_3 \Delta U_{\text{п}} - k_3 r_{\text{я}} \Delta I_{\text{с}}. \quad (10-34)$$

Перейдем к относительным безразмерным единицам, обозначив

$$\frac{\Delta E_{\text{тг}}}{E_{\text{тг}0}} = \varphi; \quad \frac{\Delta U_{\text{п}}}{U_{\text{п}0}} = \eta; \quad \frac{r_{\text{я}} \Delta I_{\text{с}}}{r_{\text{я}} I_{\text{н}}} = \sigma;$$

$$\frac{L_{\text{п}}}{L_{\text{п}}} = 1; \quad \frac{\Delta U_0}{E_{\text{тг}0}} = a.$$

Уравнения (10-33) и (10-34) в относительных безразмерных единицах имеют вид

$$\frac{d\eta}{dt} = \begin{cases} -\frac{k_1}{T_{\text{п}}} & \text{при } \varphi > a \\ \frac{k_1}{T_{\text{п}}} & \text{при } \varphi < -a \\ 0 & \text{при } |\varphi| < a \end{cases}; \quad (10-35)$$

$$T_{\text{м}} \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = k_2 k_3 \eta - k_3 \sigma. \quad (10-36)$$

Получена система уравнений, состоящая из уравнения релейной части (10-35) и уравнения линейной части (10-36). Чтобы построить фазовый портрет, необходимо сделать ряд преобразований.

Исключим из этих уравнений η , для чего предварительно продифференцируем уравнение (10-36). При этом будем полагать, что в течение рассматриваемого переходного процесса отклонение нагрузки на двигатель не меняется и, следовательно, $\sigma = \text{const}$

$$T_{\text{м}} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} = k_2 k_3 \frac{d\eta}{dt}. \quad (10-37)$$

Подставим значение $\frac{d\eta}{dt}$ из уравнения (10-37) в уравнение (10-35), обозначив $k_1 k_2 k_3 = K$:

$$T_{\text{м}} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} = \begin{cases} -\frac{K}{T_{\text{п}}} & \text{при } \varphi > a \\ \frac{K}{T_{\text{п}}} & \text{при } \varphi < -a \\ 0 & \text{при } |\varphi| < a \end{cases}. \quad (10-38)$$

Исключим из этой системы уравнений время. Для этого перенесем $\frac{d\varphi}{dt}$ в правую часть и, обозначив

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi',$$

разделим правую и левую части уравнения на $\varphi' T_m$. В результате этого получим три уравнения, определяющие движение изображающей точки на фазовой плоскости:

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = -\frac{1}{T_m} - \frac{K}{T_n T_m \varphi'} \quad \text{при } \varphi > a; \quad (10-39)$$

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = -\frac{1}{T_m} + \frac{K}{T_n T_m \varphi'} \quad \text{при } \varphi < -a; \quad (10-40)$$

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = -\frac{1}{T_m} \quad \text{при } |\varphi| < a. \quad (10-41)$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\varphi = \frac{T_m}{T_n} K \ln \left(\varphi' + \frac{K}{T_n} \right) - T_m \varphi' + C_1 \quad \text{при } \varphi > a; \quad (10-42)$$

$$\varphi = -\frac{T_m}{T_n} K \ln \left(\varphi' - \frac{K}{T_n} \right) - T_m \varphi' + C_2 \quad \text{при } \varphi < -a; \quad (10-43)$$

$$\varphi = -T_m \varphi' + C_3 \quad \text{при } |\varphi| < a. \quad (10-44)$$

Разобьем фазовую плоскость на три области двумя вертикальными линиями (рис. 10-12): область I — правее линии $\varphi = a$; область II — левее линии $\varphi = -a$; область III — между прямыми $\varphi = -a$ и $\varphi = a$.

Построим фазовый портрет релейной системы при следующих значениях параметров: $T_m = 2$ сек; $T_n = 10$ сек; $K = 5$; $a = \pm 0,1$.

Подставив эти значения в уравнения (10-42) ÷ (10-44), получим

$$\varphi = \ln(\varphi' + 0,5) - 2\varphi' + C_1 \quad \text{при } \varphi > a; \quad (10-45)$$

$$\varphi = \ln(\varphi' - 0,5) - 2\varphi' + C_2 \quad \text{при } \varphi < -a; \quad (10-46)$$

$$\varphi = -2\varphi' + C_3 \quad \text{при } |\varphi| < a. \quad (10-47)$$

Предположим, что движение изображающей точки начинается в области I, соответствующей уравнению (10-45), в точке M, в которой $\varphi = 0,3$; $\varphi' = 0,4$. Подставляя эти начальные условия в урав-

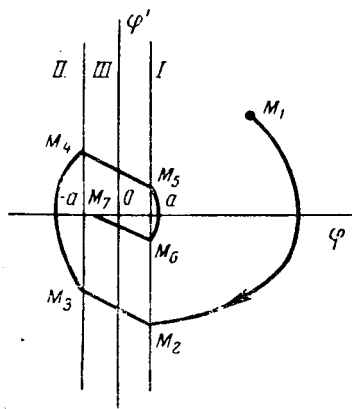


Рис. 10-12. Фазовая диаграмма релейной системы

нение (10-45), находим постоянную интегрирования, и уравнение приобретает вид

$$\varphi = \ln(\varphi' + 0,5) - 2\varphi' + 1,23.$$

Подставляя в это уравнение различные значения φ' в сторону уменьшения, находим участок фазовой траектории до точки, в которой $\varphi = a = 0,1$; $\varphi' = -0,33$ и которая находится на границе с областью III. Подставляя эти начальные условия в уравнение (10-47), находим постоянную интегрирования и получаем для области III уравнение

$$\varphi = -2\varphi' - 0,56,$$

являющееся уравнением прямой M_2-M_3 .

По начальным условиям в точке M_3 находим постоянную интегрирования для уравнения (10-46), которое для области II примет вид

$$\varphi = -\ln(\varphi' - 0,5) - 2\varphi' - 0,92.$$

По этому уравнению строится отрезок кривой M_3-M_4 . Аналогично строятся последующие отрезки прямой и кривой (точки M_5 , M_6 , M_7). Точка M_7 попала на ось абсцисс между точками a и $-a$, т. е. в зоне нечувствительности III. Дальнейшее перемещение изображающей точки прекратится и система придет в состояние равновесия, т. е. она устойчива.

Следует заметить, что в уравнении (10-46) под знаком логарифма находится отрицательное число, так как подставляются отрицательные значения φ' . Однако эти отрицательные числа могут быть сделаны положительными простым поворотом осей координат на 180° вокруг начальной точки, который не влияет на форму фазовых траекторий. Поэтому при логарифмировании отрицательное число заменяется положительным.

На рис. 10-12 фазовая траектория представляет ломаную спираль, по которой изображающая точка движется в направлении начала координат. Если изображающая точка при движении по фазовой траектории удаляется от начала координат, система будет неустойчивой. Построение фазовых траекторий при различных видах релейных характеристик приводится в специальных монографиях [5, 23].

§ 10-3. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Метод гармонической линеаризации является приближенным, полученным в результате распространения частотных методов на исследование нелинейных систем.

Предложено несколько разновидностей применения гармонической линеаризации (метод гармонического баланса Н. И. Крылова и Н. Н. Боголюбова, метод Б. В. Булгакова), но все они близки между собой. В основу этих разновидностей положены частотная или гармоническая линеаризация нелинейностей и понятие об эквивалентном комплексном коэффициенте усиления нелинейного элемента.

Метод гармонической линеаризации позволяет: 1) определить условия устойчивости нелинейной системы (найти значения изменяемых параметров, при которых система будет устойчива); 2) определить возможные автоколебания в системе; 3) найти частоту и амплитуду автоколебаний. Применение метода возможно при условии, что характеристики элементов не меняются с течением времени и что выходная величина нелинейного элемента зависит от значений входной величины и не зависит от ее производных и интегралов.

Сущность гармонической линеаризации состоит в следующем. Предположим, что имеется нелинейный элемент, в котором зависимость между выходной и входной величинами представляет нелинейную функцию вида

$$x_2 = \varphi(x_1, \dot{x}_1), \quad (10-48)$$

т. е. выходная величина в общем случае является нелинейной функцией входной величины и ее производной. Подадим на вход нелинейного элемента гармоническое воздействие

$$x_1 = A \sin \omega t. \quad (10-49)$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = A\omega \cos \omega t. \quad (10-50)$$

Подставив значения x_1 и $\dot{x}_1$ из выражений (10-49) и (10-50) в выражение (10-48) и заменив $\omega t = \psi$, получим

$$x_2 = \varphi(A \sin \psi, A\omega \cos \psi). \quad (10-51)$$

Это сложная периодическая функция, содержащая гармонические составляющие с частотами, увеличивающимися до бесконечности. Разложив правую часть выражения (10-51) в ряд Фурье, получим

$$\begin{aligned} x_2 = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) d\psi + \\ & + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi[(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin \psi] d\psi \right] \sin \psi + \\ & + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos \psi] d\psi \right] \cos \psi + \text{высшие гармоники.} \end{aligned} \quad (10-52)$$

Первое слагаемое в приведенном разложении представляет собой постоянную составляющую. В наиболее распространенных нелинейностях постоянная составляющая отсутствует и поэтому в дальнейшем будем считать первое слагаемое равным нулю. Можно провести линеаризацию и в том случае, если постоянная составляющая не равна нулю. Этот вопрос рассмотрен, например, в [5]. Высшие гармоники разложения отбрасываются и во внимание принимается

только первая (основная) гармоника разложения. Это вносит погрешность в окончательный результат, однако в практических расчетах она, как правило, допустима, поскольку в реальных системах автоматического регулирования линейная часть является фильтром низких частот, т. е. такой динамической системой, которая пропускает только низкие частоты. Высокие частоты гасятся элементами, содержащими индуктивности, механические массы и т. п. и ими можно пренебречь.

Из выражений (10-49) и (10-50) получим

$$\sin \psi = \frac{x_1}{A}; \quad \cos \psi = \frac{px_1}{A\omega}. \quad (10-53)$$

Обозначим через $g(A)$ и $b(A)$ коэффициенты первой гармоники разложения (10-52), деленные на A :

$$\left. \begin{aligned} g(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \sin \psi \, d\psi; \\ b(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \varphi(A \sin \psi, A\omega \cos \psi) \cos \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (10-54)$$

Учитывая сказанное выше и применяя обозначения (10-53) и (10-54), выражение (10-52) может быть переписано в виде

$$x_2 = \left[g(A) + \frac{p}{\omega} b(A) \right] x_1. \quad (10-55)$$

Выражение (10-55) является линейным. Таким образом, гармоническая линеаризация заключается в том, что нелинейная функция вида (10-48) с точностью до высших гармоник заменяется линейной функцией вида (10-55).

Выражение

$$I(A) = \left[g(A) + \frac{p}{\omega} b(A) \right] \quad (10-56)$$

по аналогии с коэффициентом при x_1 в частотном анализе линейных систем называется *приближенной передаточной функцией нелинейного элемента*.

Если в выражении (10-56) заменить p на $j\omega$ при $\omega = \text{const}$, то получим приближенное значение эквивалентного комплексного коэффициента усиления нелинейного элемента

$$I(A) = [g(A) + jb(A)] \quad (10-57)$$

или в показательной форме

$$I(A) = A_n(A) e^{j\theta_n(A)}. \quad (10-58)$$

Здесь

$$A_n(A) = \sqrt{g^2(A) + b^2(A)} \quad (10-59)$$

модуль эквивалентного комплексного коэффициента усиления, а его аргумент

$$\theta_n(A) = \arctg \frac{b(A)}{g(A)}. \quad (10-60)$$

Таким образом, эквивалентным комплексным коэффициентом усиления нелинейного элемента называется комплексное число, модуль которого представляет отношение амплитуды первой гармоники на выходе нелинейного элемента к амплитуде синусоидального воздействия на его входе, а аргумент — разность фаз первой гармоники на выходе и синусоидального воздействия на входе.

При изменении амплитуды и частоты синусоидального воздействия на входе значение эквивалентного комплексного коэффициента усиления $I(A)$ меняется.

В настоящее время коэффициенты разложения в ряд Фурье $g(A)$ и $b(A)$ для значительного количества нелинейностей вычислены, что облегчает применение метода гармонической линеаризации. На рис. 10-13 приведены нелинейные характеристики, для которых коэффициенты разложения имеют следующий вид:

для характеристики на рис. 10-13, а

$$g(A) = \frac{4B}{\pi A}; \quad b(A) = 0;$$

для характеристики на рис. 10-13, б

$$g(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}; \quad b(A) = 0; \quad a < A;$$

для характеристики на рис. 10-13, в

$$g(A) = \frac{2B}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{k_B a}{A}\right)^2} \right];$$

$$b(A) = -\frac{2Ba}{\pi A^2} (1 - k_B); \quad a < A;$$

для характеристики на рис. 10-13, г

$$g(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}; \quad b(A) = -\frac{4Ba}{\pi A^2}; \quad a < A.$$

Буквенные обозначения, приведенные в формулах, ясны из рис. 10-13. Ограничение справедливости формул условием $a < A$ имеет тот смысл, что если амплитуда A входной синусоиды будет меньше половины зоны нечувствительности a , то нелинейный элемент не сработает и движение в системе будет отсутствовать. Поэтому все расчеты начинаются с предельного значения $A = a$. Обращаем внимание на то, что если нелинейная характеристика однозначна, не имеет гистерезиса, то коэффициент $b(A) = 0$ и эквивалентный комплексный коэффициент усиления, вычисленный по формуле (10-57), будет числом вещественным.

Рассмотрим систему автоматического регулирования, состоящую из нескольких линейных звеньев и одного нелинейного. Все линейные звенья могут быть объединены в один эквивалентный линейный элемент и тогда структурная схема примет вид, изображенный на рис. 10-14.

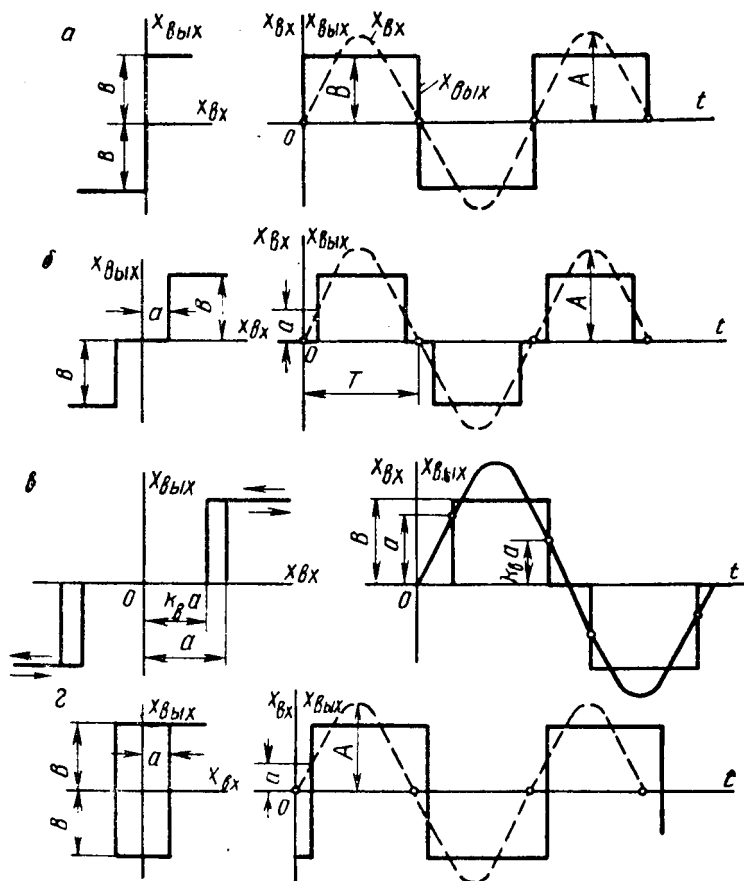


Рис. 10-13. К определению коэффициентов гармонической линейаризации нелинейных элементов

Рассмотрим нелинейный элемент. Предположим, что на его вход подано синусоидальное воздействие

$$x_1 = A \sin \psi.$$

Тогда, пользуясь гармонической линейаризацией, находим эквивалентный комплексный коэффициент усиления и с точностью до высших гармоник можем определить выходную величину

$$x_2 = I(A) x_1. \quad (10-61)$$

Рассмотрим линейную часть. Обозначив ее передаточную функцию через $W(p)$, получим уравнение в операторной форме

$$x_3 = W(p) \bar{x}_2. \quad (10-62)$$

В частном случае, когда величина x_2 является гармонической функцией с неизменными амплитудой A_1 и частотой ω , она может быть представлена в показательной форме

$$x_2 = A_1 e^{j\omega t}. \quad (10-63)$$

Установившееся значение на выходе линейного элемента при этом

$$x_3 = W(j\omega) A_1 e^{j\omega t}. \quad (10-64)$$

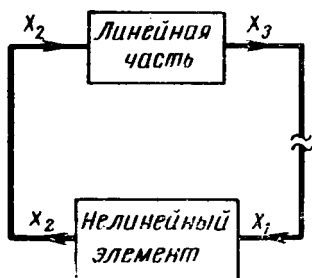


Рис. 10-14. Структурная схема системы с нелинейным элементом

Здесь $W(j\omega)$ называется *комплексным коэффициентом усиления линейной части*, получающимся из $W(p)$, если вместо p подставить $j\omega$.

В соответствии с уравнением (10-64) на выходе линейной части получаются также гармонические колебания, отличающиеся от x_2 по амплитуде и фазе, причем это отличие полностью определяется комплексным коэффициентом усиления

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}.$$

Модуль $|W(j\omega)|$ представляет собой отношение выходной амплитуды к входной, аргумент $\theta(\omega)$ — разность фаз выходной и входной синусоид. Для линейной части комплексный коэффициент изменяется при изменении частоты, но не зависит от амплитуды входного сигнала.

Рассмотрим теперь систему в целом. Предположим, что система находится на грани устойчивости и в ней возникли незатухающие колебания с частотой ω и амплитудой на входе нелинейного элемента A . Тогда уравнения системы в соответствии с выражениями (10-61), (10-62) и рис. 10-14 будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= I(A) x_1; \\ x_3 &= W(j\omega) x_2; \\ x_3 &= -x_1. \end{aligned} \right\} \quad (10-65)$$

Исключая из этих уравнений x_1 и x_3 , получим

$$[W(j\omega) I(A) + 1] x_2 = 0 \quad (10-66)$$

Так как в системе происходят незатухающие колебания, то $x_2 \neq 0$ и, следовательно,

$$W(j\omega) I(A) + 1 = 0. \quad (10-67)$$

Это — уравнение свободных колебаний системы. Левая часть уравнения является комплексной величиной. Приравнявая отдельно ее вещественную и мнимую части нулю, получим два уравнения с двумя неизвестными: частотой ω и амплитудой A . Если в результате решения этих уравнений получаются вещественные числа, то в системе возможны колебания с найденными частотой и амплитудой. Если при решении получаются мнимые числа, то колебания в системе невозможны, система устойчива.

Проще и нагляднее это решение произвести графически.

Перепишем уравнение (10-67) следующим образом:

$$W(j\omega) = \frac{1}{T(A)}. \quad (10-68)$$

Левая часть уравнения при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ представляет амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части системы в разомкнутом состоянии.

Правая часть уравнения при изменении амплитуды от 0 или от $A = a$ до $+\infty$ представляет обратную амплитудную характеристику нелинейного элемента системы регулирования. Обе характеристики могут быть вычерчены в одной системе координат. Точка пересечения характеристик дает решение уравнения (10-68). При этом частота колебаний определяется частотой на амплитудно-фазовой характеристике в точке пересечения кривых, а амплитуда колебаний определяется значением амплитуды на амплитудной характеристике нелинейного элемента в той же точке (рис. 10-15, а).

Если амплитудно-фазовая характеристика линейного элемента и амплитудная характеристика нелинейного элемента не пересекаются (рис. 10-15, б), то в системе автоколебания невозможны. Если указанные кривые касаются друг друга (рис. 10-15, в), то система (приблизительно) находится на границе устойчивости.

Имея амплитудную характеристику линейного элемента, можно так выбрать параметры линейной части системы, чтобы указанные кривые не пересекались и, следовательно, система была устойчивой.

Устойчивость колебаний в системе можно оценить следующим способом, который не является достаточно строгим, но в большинстве случаев дает правильные результаты. Дадим небольшое приращение амплитуде колебаний в точке B (рис. 10-15, а). При положительном приращении $+\Delta A$ на обратной амплитудной характеристике получим, например, точку A_1 , а при отрицательном приращении $-\Delta A$ — точку A_2 .

Если амплитудно-фазовая характеристика устойчивой разомкнутой линейной части не охватывает точку A_1 , соответствующую положительному приращению амплитуды ΔA , и охватывает точку A_2 , соответствующую отрицательному приращению амплитуды ΔA , то автоколебания будут устойчивы. В соответствии с этим определением автоколебания в точке B на рис. 10-15, а — устойчивы, а в точке C — неустойчивы.

Метод гармонической линейризации позволяет правильно выбрать параметры изменяемой части нелинейной системы. Метод гармонической линейризации применим и при наличии в системе нескольких нелинейностей при различном их сочетании с линейными звеньями. Подробно эти вопросы рассматриваются в [5].

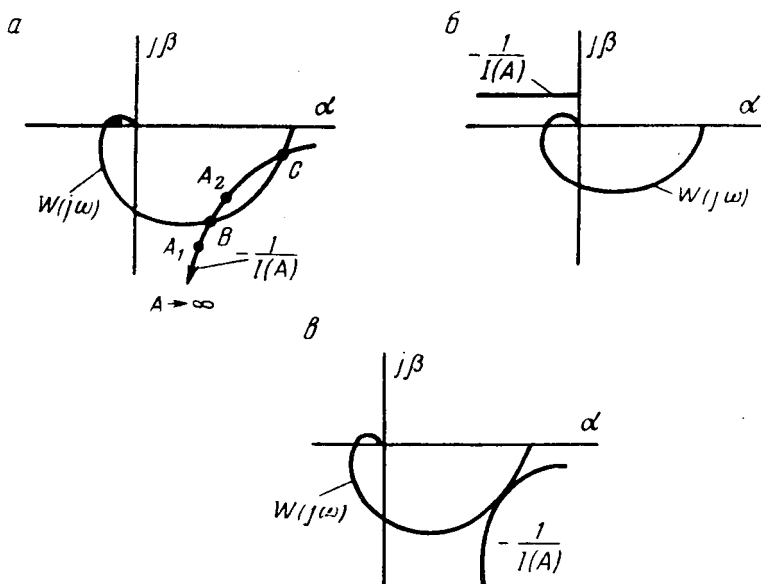


Рис. 10-15. Графическое решение линейного и линейризованного уравнения

Пример 1. Определим устойчивость релейной системы, приведенной на рис. 10-11, методом гармонической линейризации. Из уравнения (10-36) линейной части найдем ее передаточную функцию по управляющему воздействию

$$W(p) = \frac{\bar{\varphi}}{\eta} = \frac{k_2 k_3}{T_m p + 1}.$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики линейной части

$$W(j\omega) = \frac{k_2 k_3}{T_m j\omega + 1}. \quad (10-69)$$

Если релейный элемент имеет характеристику, изображенную на рис. 10-1, *е*, или, что то же, на рис. 10-13, *б*, то коэффициенты разложения имеют вид

$$g(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}; \quad b(A) = 0; \quad a < A.$$

Эквивалентный комплексный коэффициент усиления является в данном случае часто вещественным числом

$$I(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}.$$

Обратная амплитудная характеристика

$$-\frac{1}{I(A)} = -\frac{\pi A}{4B \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}. \quad (10-70)$$

Расчет произведем для условий примера в предыдущем параграфе: $T_m = 2 \text{ сек}$; $T_n = 10 \text{ сек}$; $k_1 = 1$; $k_2 = 5$; $k_3 = 1$; $K = 5$; $a = \pm 0,1$.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики линейной части получим, подставляя в выражение (10-69) соответствующие значения принятых величин

$$W(j\omega) = \frac{5}{2j\omega + 1}. \quad (10-71)$$

Параметр B релейной характеристики (см. рис. 10-13, б) представляет собой выходную величину релейного элемента. В данном случае это скорость изменения напряжения U_n , снимаемого с потенциометра Π . Численно эта величина в рассматриваемом случае в относительных безразмерных единицах равна

$$B = \frac{k_1}{T_n} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Подставляя значения величин в выражение (10-70), получим уравнение обратной амплитудной характеристики нелинейного элемента

$$-\frac{1}{I(A)} = -\frac{3,14 A}{4 \cdot 0,1 \sqrt{1 - \left(\frac{0,1}{A}\right)^2}}. \quad (10-72)$$

На рис. 10-16, а на комплексной плоскости построены по уравнению (10-71) амплитудно-фазовая характеристика линейной части, которая представляет полукруговую (аперiodическое звено), и по

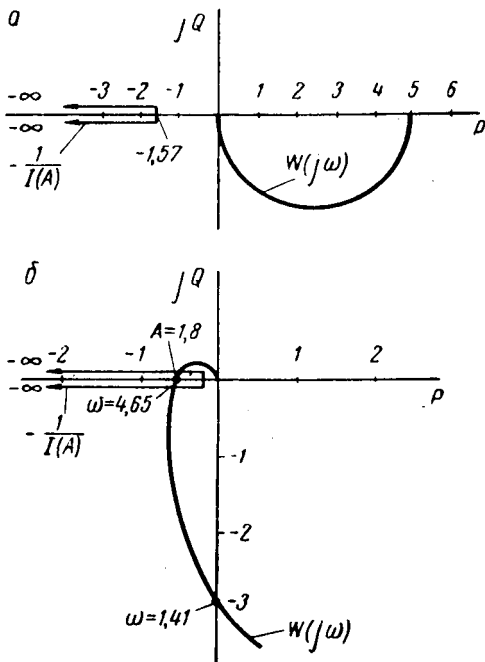


Рис. 10-16. Графическое решение уравнений к примеру

уравнению (10-72) обратная амплитудная характеристика нелинейного элемента, которая представляет прямую, приходящую по вещественной оси из $-\infty$ до $-1,57$ и снова уходящую в $-\infty$. Ни при каком значении параметров линейной и нелинейной частей эти характеристики не могут пересечься и поэтому такая система всегда устойчива.

Пример 2. Рассмотрим ту же систему с учетом электромашинного усилителя и полного уравнения двигателя. Постоянная времени электромашинного усилителя в уравнении (10-27) $T_{\text{эму}} = 0,3 \text{ сек.}$

Электрическая постоянная времени двигателя в уравнении (10-28) $T_z = 0,2 \text{ сек.}$, электрохимическая постоянная времени в том же уравнении $T_m = 1 \text{ сек.}$

Постоянная времени потенциометра $T_n = 1 \text{ сек.}$ Коэффициенты усиления $k_1 = 1$; $k_2 = 5$; $k_3 = 1$. Зона нечувствительности $a = \pm 0,1$. Выходная величина релейного элемента $B = \frac{k_1}{T_n} = 1$.

Уравнение линейной части, учитывая, что электромашинный усилитель является аperiодическим звеном, а двигатель колебательным:

$$(T_{\text{эму}}p + 1)(T_z T_m p^2 + T_m p + 1)\bar{\varphi} = k_2 k_3 \bar{\eta} - k_3 \bar{\sigma}. \quad (10-73)$$

Подставляя в уравнение (10-73) численные значения параметров, после преобразований получим

$$(0,06 + 0,5p^2 + 1,3p + 1)\bar{\varphi} = 5\bar{\eta} - \bar{\sigma}. \quad (10-74)$$

Находим из уравнения (10-74) передаточную функцию разомкнутой линейной части по управляющему воздействию η и, заменяя p на $j\omega$, получим уравнение амплитудно-фазовой характеристики линейной части

$$W(j\omega) = \frac{-2,5\omega^2 + 51}{0,0036\omega^6 + 0,094\omega^4 + 0,69\omega^2 + 1} + j \frac{0,3\omega^3 - 6,5\omega}{0,0036\omega^6 + 0,094\omega^4 + 0,69\omega^2 + 1}. \quad (10-75)$$

Подставляя новые значения a и B в выражение (10-72), получим уравнение обратной амплитудной характеристики релейного элемента

$$\frac{1}{I(A)} = - \frac{0,785A}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,1}{A}\right)^2}}. \quad (10-76)$$

На рис. 10-16, б на комплексной плоскости по уравнениям (10-75) и (10-76) построены амплитудно-фазовая характеристика линейной части и обратная амплитудная характеристика релейного элемента. Расчет ведется при изменении A от 0,1 до $+\infty$. Эти характеристики пересекаются на вещественной оси в точке с координатами $(-0,51, j0)$. Этой точке на амплитудно-фазовой характеристике линейной части соответствует частота $\omega = 4,65 \frac{1}{\text{сек.}}$, а на обратной амплитудной характеристике релейного элемента амплитуда $A = 1,8$. Это значит,

что в системе возможны автоколебания с частотой $\omega = 4,65 \frac{1}{сек}$ и амплитудой $A = 1,8$.

Напоминаем, что A представляет собой амплитуду на входе нелинейного элемента, измеряемую в единицах, принятых для измерения входной величины нелинейного элемента.

Автоколебания в системе устойчивы, так как при подстановке в выражение (10-76) значений амплитуды, превышающих 1,8 и меньших 1,8, получаем на обратной амплитудной характеристике точки, соответственно не охватываемую и охватываемую амплитудно-фазовой характеристикой линейной части.

Контрольные вопросы

1. Какие системы автоматического регулирования называются нелинейными?
2. Какие виды нелинейных элементов Вам известны?
3. Какие существуют ограничения применению метода фазовой плоскости?
4. Что называется фазовой плоскостью, изображающей точкой, фазовой траекторией?
5. Виды фазовых траекторий, какие переходные процессы им соответствуют?
6. Что называется изоклиной, как с помощью изоклин построить фазовые траектории?
7. Назовите особые точки и особые траектории на фазовой плоскости?
8. Что называется предельным циклом, их виды?
9. Как исследовать на фазовой плоскости релейную систему?
10. В чем сущность метода гармонической линеаризации?
11. Каковы ограничения применения метода гармонической линеаризации?
12. Что называется приближенной передаточной функцией и эквивалентным комплексным коэффициентом усиления нелинейного элемента?
13. Что называется комплексным коэффициентом усиления линейной части?
14. В каком порядке производится исследование нелинейной системы методом гармонической линеаризации?

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ РАЗОМКНУТЫЕ, КОМБИНИРОВАННЫЕ И С НЕСКОЛЬКИМИ УПРАВЛЯЕМЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

§ 11-1. РАЗОМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЖЕСТКОЙ ПРОГРАММОЙ

Разомкнутой системой автоматического управления с жесткой программой называется такая система, у которой воздействия передаются только от управляющего элемента к управляемому объекту; контроль выполнения программы управления и компенсация возмущающих воздействий не приводятся. Блок-схема такой системы приведена на рис. 1-10, а. На управляющий элемент подается задание Z с жесткой неизменной программой, которое управляющим элементом УЭ преобразуется в управляющее воздействие и через усилитель $У$ и исполнительный элемент $И$ передается на управляемый объект. Управляемая величина не контролируется и не сопоставляется с заданной программой. Под действием внешних воздействий, например нагрузки, управляемая величина может отклоняться от значений, задаваемых программой, однако эти отклонения не измеряются и не оказывают никакого влияния на управляющий элемент и управляющее воздействие.

Разомкнутые системы с жесткой программой применяются в тех случаях, когда высокой точности выполнения заданной программы управления не требуется. К таким системам относятся, например, системы автоматического пуска насосов, вентиляторов, компрессоров конвейеров и т. п.

Разомкнутые системы автоматического управления с жесткой программой, как правило, всегда устойчивы. В них отсутствует обратная связь и поэтому свободные колебания системы обычно не возникают. Единственным и достаточным условием устойчивости разомкнутой системы является условие, чтобы все звенья, входящие в нее, были устойчивы. Это условие всегда может быть обеспечено при проектировании системы.

К качеству переходных процессов в разомкнутых системах обычно высоких требований не предъявляют. В мощных приводах иногда возникают проблемы предотвращения перенапряжений, чрезмерных ускорений, усилий, моментов.

Для улучшения переходных процессов могут применяться местные жесткие или гибкие обратные связи, охватывающие отдельные звенья, однако система в целом при этом остается разомкнутой.

Вопросы статистики и динамики разомкнутых систем автоматического управления с жесткой программой рассматриваются в других курсах.

§ 11-2. РАЗОМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПО ВОЗМУЩЕНИЮ

Разомкнутой системой автоматического управления с воздействием по возмущению называется такая система, в которой управляющее воздействие формируется в зависимости от измеряемых внешних возмущающих воздействий и направлено на их компенсацию. В этих системах применяется принцип инвариантности.

Инвариантностью называется полная или частичная независимость управляемой величины от возмущающих воздействий, которая достигается компенсацией этих воздействий.

В реальных системах удастся измерять основные возмущения, оказывающие наиболее существенное влияние на процесс регулирования. К основным возмущениям обычно относится изменение нагрузки. Это изменение можно измерить и сформировать компенсирующее воздействие, обеспечивающее достаточно точное воспроизведение системой заданной программы. Второстепенные возмущения или помехи, остающиеся при этом некомпенсированными, оказывают вредное влияние на режим работы системы.

Чтобы устранить влияние помех, их также нужно измерить и компенсировать. Однако практически это далеко не всегда можно осуществить, поэтому в чистом виде принцип управления по возмущению применяется только в тех случаях, когда управляемый объект обладает сильным самовыравниванием. В этом случае влиянием помех на режим работы объекта можно пренебречь. Если управляемый объект не обладает самовыравниванием, то управление по возмущению принять нельзя. В этом случае влияние помех приводит к постепенно увеличивающемуся отклонению управляемой величины от заданного значения, на которое измеритель основного возмущения не реагирует. Накапливающееся отклонение, называемое «сползанием нуля», делает систему практически неработоспособной.

Следует отметить, что в системах управления по возмущению нет обратных связей, подобных тем, которые имеются в системах регулирования по отклонению. В системах управления по возмущению в зависимости от величины возмущения производится формирование управляющего воздействия, которое подается на вход системы и компенсирует в той или иной степени влияние возмущения. Однако конечный результат управления — соответствие управляемой величины заданному значению — не контролируется. Управляемая величина как угодно может отличаться от заданной, но на управляющее воздействие это не влияет и коррективы в управление внесены быть не могут.

Воздействие по возмущению в системах автоматического управления может осуществляться различными устройствами, основными из которых являются устройства компаундирования, параметрической стабилизации и измерительно-вычислительные устройства [41, 43].

Компаундирование применяется в электрических машинах для компенсации возмущения, вызываемого нагрузкой электропривода.

В качестве примера рассмотрим компаундирование двигателя постоянного тока (рис. 11-1). Двигатель имеет главные обмотки возбуждения 1, создающие основной магнитный поток. Последовательно с обмоткой якоря включены дополнительные обмотки 2, предназначенные для компенсации влияния внешней нагрузки M_c .

В установившемся режиме движущий момент $M_{дв}$ и момент сопротивления равны и скорость при этом $\omega = \text{const}$. Номинальной нагрузке соответствует скорость ω_n и $i_{ян}$.

При увеличении момента сопротивления скорость вращения двигателя уменьшается, а величина тока $i_{я}$, протекающего в цепи

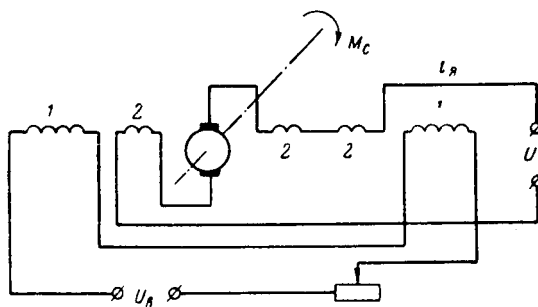


Рис. 11-1. Компаундирование электрического двигателя постоянного тока

якоря и дополнительных обмоток 2, вследствие уменьшения противо-
э. д. с. $E_{я} = C_2 \Phi$ увеличивается.

$$i_{я} = \frac{U - E_{я}}{r_{я}}. \quad (11-1)$$

Так как магнитный поток, создаваемый обмотками 2, направлен встречно потоку главных обмоток 1, то общий поток Φ машины снижается. Движущий момент машины постоянного тока определяется выражением

$$M_{дв} = C_1 \Phi i_{я}. \quad (11-2)$$

Подставляя значение $E_{я} = C_2 \Phi$ в выражение (11-1), а затем полученное значение $i_{я}$ в выражение (11-2), получим

$$M_{дв} = \frac{C_1}{r_{я}} (U\Phi - C_2 \Phi^2). \quad (11-3)$$

При снижении магнитного потока Φ в пределах, соответствующих допустимой нагрузке двигателя, разность величин, находящихся в скобках выражения (11-3), увеличивается и, следовательно, увеличивается движущий момент в соответствии с увеличением момента нагрузки. Скорость вращения двигателя при этом снижается гораздо в меньшей степени, чем при отсутствии компаундирования.

Величина снижения скорости зависит от числа витков дополнительных обмоток 2.

Компаундирование дает эффект только для двигателей с достаточно жесткой механической характеристикой, обладающих высоким самовыравниванием.

Устройства параметрической стабилизации поддерживают постоянство режима работы стабилизируемой системы изменением своих свойств под влиянием внешних возмущений.

Примером параметрического стабилизатора может служить бареттер, работающий в качестве стабилизатора тока (рис. 11-2).

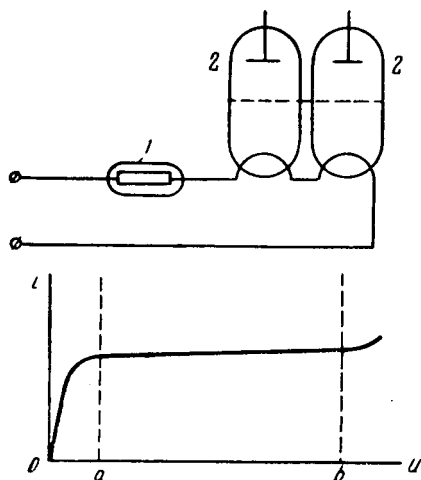


Рис. 11-2. Схема бареттера и его вольтамперная характеристика

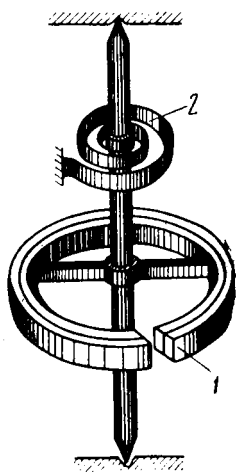


Рис. 11-3. Балансирный механизм с температурной компенсацией

Бареттер 1 представляет собой железную нить, помещенную в стеклянный баллон, заполненный водородом. Вольтамперная характеристика бареттера нелинейна, причем на участке ab величина рабочего тока при изменении питающего напряжения меняется очень мало.

Бареттер включается последовательно с нагрузкой, в которой должен поддерживаться ток постоянной величины. На рис. 11-2 такой нагрузкой является цепь накала электронных ламп 2.

Другим примером параметрической стабилизации может служить устройство температурной компенсации хода часов, которое является автоматическим прибором, поддерживающим равномерное движение стрелок.

Точность хода часов определяется точностью периодического движения балансного механизма, осуществляющего перемещение стрелок на один зуб колеса за каждый период колебания. Балансный механизм состоит из маховика 1 с пружиной 2 (рис. 11-3). Момент

инерции сосредоточен главным образом в ободе маховика. Период колебания маховика определяется формулой

$$T = K \sqrt{\frac{J}{C}}, \quad (11-4)$$

где K — постоянная;
 J — момент инерции маховика;
 C — жесткость пружины.

При изменении температуры период колебаний балансного механизма меняется из-за изменения жесткости пружины и геометрических размеров маховика. Чтобы компенсировать влияние температуры, обод маховика I выполняется биметаллическим и разрезным. При изменении температуры свободные концы обода пригибаются к центру или отгибаются наружу, что приводит к изменению момента инерции в такой же степени, в какой меняется жесткость пружины. Подкоренное выражение в формуле (11-4) остается постоянным и, следовательно, постоянным остается период колебаний балансного механизма.

Измерительно-вычислительные устройства, или устройства с самоустанавливающейся программой, состоят из следующих частей: измерительной, которая измеряет величину возмущения, и вычислительной, которая по результатам измерения формирует программу управляющих воздействий, компенсирующих влияние измеренного возмущения.

В настоящее время предложено очень большое количество измерительно-вычислительных устройств, которые отличаются друг от друга принципом действия, способами формирования программы управляющих воздействий. В некоторых случаях применяются сложные вычислительные устройства, в других — вычислительные устройства предельно простые.

В качестве примера рассмотрим измерительно-вычислительное устройство, предложенное О. Г. Кервалишвили для автоматического управления шахтной подъемной машиной в период замедления в зависимости от статической нагрузки [16].

Упрощенная схема этого устройства приведена на рис. 11-4. Ток в цепи статора асинхронного подъемного двигателя при постоянстве питающего напряжения пропорционален статической нагрузке подъемной машины. Величина выпрямленного напряжения на выходе выпрямительного моста BC пропорциональна величине тока в первичной обмотке трансформатора тока TT , включенного в цепь статора подъемного двигателя и, следовательно, величине статической нагрузки подъемной машины.

Напряжение U_1 , снимаемое с потенциометра Π_n , сравнивается с напряжением, снимаемым с потенциометра $\Pi_{эт}$, питающегося эталонным напряжением $U_{эт}$. Напряжения U_1 и $U_{эт}$ включены встречно. Если напряжение, снимаемое с эталонного потенциометра, равно U_1 , то в цепи катушки поляризованного реле PI тока нет. Если U_1 отличается от падения напряжения на участке r_3 эталонного потен-

циометра, то реле $P\Pi$ срабатывает и в зависимости от знака разности напряжений замыкает контакты $P\Pi_1$ или $P\Pi_2$ в цепи якоря двигателя D с независимым возбуждением и включает его на напряжение U .

Двигатель D , вращаясь, перемещает ползунок эталонного реостата в направлении уменьшения разности между напряжением U_1 и напряжением на участке r_3 . Когда эта разность приблизится к нулю, ток в цепи катушки поляризованного реле $P\Pi$ уменьшится практически до нуля, оно отпустит свой якорь и отключит якорь двигателя D от источника напряжения U .

При вращении двигатель перемещает также ползунок потенциометра управления Π_y , с которого снимается напряжение на управляющую обмотку $\mathcal{E}MU$ электромашинного усилителя. Последний управляет тормозным приводом, устанавливая тормозной момент в соответствии со статической нагрузкой подъемного двигателя.

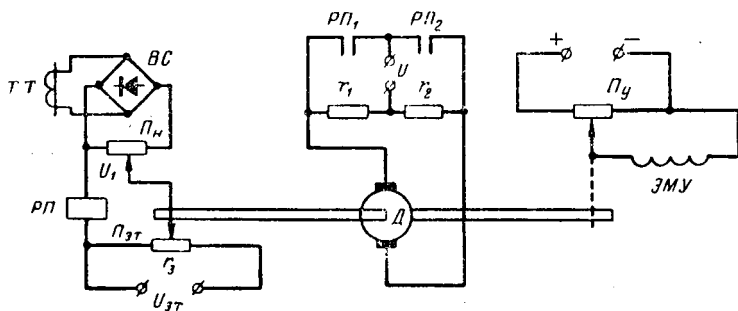


Рис. 11-4. Система с воздействием по возмущению

Трансформатор тока, выпрямительный мост, эталонный потенциометр, поляризованное реле и двигатель представляют собой измерительную часть устройства, которая производит измерение компенсационным методом статической нагрузки подъемного двигателя в период равномерного хода подъемной машины. Двигатель и управляющий потенциометр представляют собой вычислительную часть устройства, которая в зависимости от результатов измерения устанавливает программу управления тормозным приводом. Последний работает в период замедления после окончания периода равномерного хода. Таким образом, двигатель и управляющий потенциометр выполняют также роль запоминающего устройства, которое запоминает программу управления тормозным приводом и в период замедления ее не меняет, так как в этот период подъемный двигатель отключается от сети и одновременно выключается измерительная часть.

Устройство и принцип действия тормозного привода не рассматриваем, отсылая желающих ознакомиться с ними к соответствующей литературе [16].

Принцип управления по возмущению был сформулирован французским ученым Понселе (1829 г.) и русским ученым Чиколевым (1874 г.), которые дали описания и разработку регуляторов, работа-

вших по воздействиям от внешних нагрузок управляемой системы. Затем принцип управления по возмущению был оставлен, так как высказывались мнения, что этот принцип практически реализовать невозможно. Это задержало развитие теории управления по возмущению. Однако в практических инженерных разработках идеи компенсации возмущений неоднократно использовались, опережая развитие теории.

Принцип компенсации возмущений впервые был теоретически обоснован в 1939 г. проф. А. Н. Щипановым. Затем во второй половине сороковых годов теория инвариантности начала развиваться в работах акад. В. С. Кулебакина, Б. Н. Петрова, проф. А. Г. Ивахненко и др. В настоящее время она продолжает разрабатываться советскими и зарубежными учеными.

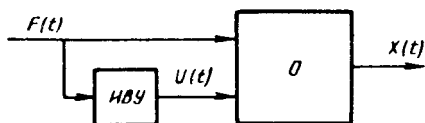


Рис. 11-5. Возможный вариант системы с воздействием по возмущению

Условие инвариантности, или компенсации воздействия возмущений в системах, движение которых описывается линейными

дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, определяется следующим образом. Предположим, что на систему O действует возмущение (рис. 11-5). Для компенсации возмущения предусмотрено измерительно-вычислительное устройство $ИВУ$, на вход которого подается возмущающее воздействие $F(t)$, а выходом является величина $U(t)$, подаваемая на вход системы O . Предположим, что измерительно-вычислительное устройство имеет передаточную функцию $Q(p)$; тогда величины $F(t)$ и $U(t)$ в операторной форме связаны уравнением

$$\bar{U} = Q(p) \bar{F}. \quad (11-5)$$

Обозначим передаточную функцию объекта по возмущающему воздействию через $\frac{C(p)}{A(p)}$, а передаточную функцию объекта по управляющему воздействию через $\frac{B(p)}{A(p)}$, где $A(p)$, $B(p)$ и $C(p)$ — операторные многочлены от p . Составляющая выходной величины $X_1(t)$, обусловленная возмущающим воздействием $F(t)$, в операторной форме может быть найдена из выражения

$$\bar{X}_1 = \frac{C(p)}{A(p)} \bar{F}, \quad (11-6)$$

откуда

$$A(p) \bar{X}_1 = C(p) \bar{F}. \quad (11-7)$$

Составляющая выходной величины $X_2(t)$, обусловленная управляющим воздействием $U(t)$, в операторной форме может быть найдена из выражения

$$\bar{X}_2 = \frac{B(p)}{A(p)} \bar{U}, \quad (11-8)$$

откуда

$$A(p) \bar{X}_2 = B(p) \bar{U}. \quad (11-9)$$

Так как рассматриваемая система линейна и к ней применим метод суперпозиции, согласно которому сумма результатов отдельных воздействий равна результату суммарного воздействия, то, складывая (11-7) и (11-9), получим

$$A(p) (\bar{X}_1 + \bar{X}_2) = B(p) \bar{U} + C(p) \bar{F} \quad (11-10)$$

или, заменяя $X_1 + X_2 = X$,

$$A(p) \bar{X} = B(p) \bar{U} + C(p) \bar{F}. \quad (11-11)$$

Подставляя в выражение (11-11) значение U из выражения (11-5), получим

$$A(p) \bar{X} = [B(p) Q(p) + C(p)] \bar{F}. \quad (11-12)$$

Условие инвариантности, т. е. полной компенсации возмущающего воздействия, и, следовательно, независимости выходной величины X от возмущающего воздействия, выполняется тогда, когда оператор, находящийся в квадратных скобках выражения (11-12), обращается в нуль

$$B(p) Q(p) + C(p) = 0. \quad (11-13)$$

Из этого условия находим передаточную функцию измерительно-вычислительного устройства

$$Q(p) = -\frac{C(p)}{B(p)}. \quad (11-14)$$

При выполнении условия (11-14) влияние возмущающего воздействия $F(t)$ на систему компенсируется влиянием того же воздействия $F(t)$, идущего через измерительно-вычислительное устройство с передаточной функцией $Q(p)$. Если компенсация полная, то, когда система 0 находится в равновесии, воздействие $F(t)$ не нарушает его.

В действительности в реальных системах абсолютно точная компенсация в переходных режимах недостижима. Объясняется это тем, что управляющая величина $U(t)$, а также все величины, действующие внутри системы 0, имеют конечные значения и не могут или не должны превышать некоторых максимальных допустимых значений. Это свойство реальных систем дает возможность полностью компенсировать только такие возмущающие воздействия $F(t)$, при которых все величины, действующие в системе, не выходят за допустимые пределы.

Например, возмущающее воздействие типа единичного скачка полностью компенсировать нельзя, так как в этом случае производная от возмущения стремится к бесконечности и для ее компенсации в системе должна возникать соответствующая компенсирующая величина, тоже стремящаяся к бесконечности, что в реальных системах, описываемых уравнением вида (11-12), невозможно. Однако

и в этих случаях управление по возмущению оказывается чрезвычайно эффективным, так как даже частичная компенсация возмущения резко повышает качество переходного процесса.

В системах, описываемых уравнением вида (11-12), хорошо осуществляется компенсация возмущений $F(t)$ ограниченной величины, у которых в моменты, когда $F(t) = 0$, равны нулю и производные от возмущения $F'(0) = 0$; $F''(0) = 0$ и т. д., и нарастание возмущения происходит с ограниченной скоростью.

Если закон изменения возмущающего воздействия известен заранее, то в уравнении (11-14) закон изменения управляющего воздействия $U(t)$ подбирается так, чтобы компенсировать изменяющееся возмущение и обеспечить точное выполнение задания. В этом случае правая часть уравнения (11-14) должна быть равна нулю.

$$B(p)\bar{U} + C(p)\bar{F} = 0, \quad (11-15)$$

откуда

$$\bar{U} = -\frac{C(p)}{B(p)}\bar{F}. \quad (11-16)$$

Полученное выражение аналогично выражению (11-14). Вычисленное по выражению (11-16) значение $U(t)$ подается на вход параллельно с возмущением $F(t)$ и таким образом обеспечивается компенсация влияния $F(t)$ на систему. Изменение $U(t)$ может осуществляться специальным программным устройством, которое работает синхронно с изменением возмущения, но независимо от него.

§ 11-3. КОМБИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как упоминалось выше, применение разомкнутых систем автоматического управления по возмущению ограничено случаями, когда управляемый объект обладает сильным самовыравниванием.

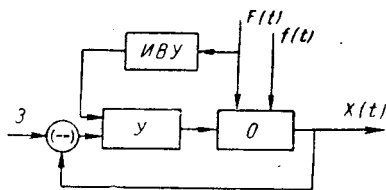


Рис. 11-6. Комбинированная система автоматического управления

В большинстве случаев самовыравнивание управляемых объектов оказывается недостаточным. Поэтому для получения высококачественного управления применяют комбинированные системы автоматического управления, реагирующие на отклонение управляемой величины и на изменение возмущающих воздействий.

Способы сочетания систем, реагирующих на возмущение и на отклонение управляемой величины, могут быть различными. В простейшем случае эти системы работают совершенно независимо друг от друга (рис. 11-6). В других случаях воздействия по возмущению и по отклонению могут взаимодействовать друг с другом [43]. Ограничимся рассмотрением наиболее простого случая.

В комбинированных системах автоматического управления разомкнутая часть системы, передающая воздействия по возмущению, несет основную нагрузку по управлению объектом, она выполняется достаточно мощной, чтобы обеспечить необходимое быстродействие. Часть системы, работающая по отклонению регулируемой величины, несет относительно небольшую нагрузку по исправлению неточностей в выполнении заданной программы, которые допускаются системой, действующей по возмущению, и поэтому она может быть относительно маломощной. Эти две части в комбинированных следящих системах называют иногда системами грубого и точного воспроизведения.

В линейных системах управляющие воздействия обеих частей проходят через систему независимо, не искажая друг друга, подчиняясь принципу суперпозиции.

При наличии в системе нелинейностей воздействия одной части системы могут существенно влиять на прохождение воздействий другой части системы. Принцип суперпозиции в этом случае неприменим.

Комбинированные системы оказываются более простыми и дешевыми при обеспечении высоких показателей качества, не всегда достижимых в сложных и дорогих системах, построенных с использованием лишь одного принципа регулирования по отклонению управляемой величины. На базе комбинированных систем построены следящие системы, обладающие весьма высокой динамической точностью и это в основном и привлекло внимание исследователей и практиков к вопросам управления по возмущению.

В комбинированных линейных системах выбор параметров можно осуществить на основании следующих рассуждений. Предположим, что на комбинированную систему действует основное возмущение $F(t)$ и второстепенные возмущения — помехи $f(t)$ (рис. 11-6). Основное возмущение компенсируется управляющим воздействием по разомкнутой цепи, помехи обрабатываются замкнутой цепью, реагирующей на отклонение регулируемой величины от заданного значения.

Линеаризованное уравнение динамики системы может быть написано в следующем виде

$$A(p)\bar{X} = C(p)\bar{F} + M(p)\bar{f}, \quad (11-17)$$

где $A(p)$, $C(p)$, $M(p)$ — операторные многочлены от p ;

$\bar{F}$, $\bar{f}$ — изображения соответственно главного возмущения и помех;

$\bar{X}$ — изображение отклонения управляемой величины.

Пользуясь принципом суперпозиции, уравнение динамики (11-17) можно разбить на две части:

для основного возмущения

$$A(p)\bar{X}_1 = C(p)\bar{F}; \quad (11-18)$$

для помех

$$A(p) \bar{X}_2 = M(p) \bar{f}. \quad (11-19)$$

Здесь X_1 и X_2 — части отклонения управляемой величины соответственно от основного возмущения и от помех. В любой момент сохраняется равенство

$$X_1 + X_2 = X. \quad (11-20)$$

Для выбора значений параметров замкнутой цепи исследуется изложенными в предыдущих главах методами уравнение (11-19). Определяется устойчивость системы. С помощью Д-разбиения находят возможные пределы изменения тех или иных параметров. Описанными ранее методами может быть исследовано качество системы и выбрана в случае необходимости корректирующие устройства. Следует отметить, что вследствие относительно небольших нагрузок, которые создают помехи, корректирующие устройства могут оказаться либо простыми, либо совсем ненужными. В результате такого исследования в уравнении (11-19) оказываются найденными параметры операторного многочлена $A(p)$ левой части. После многочлен $A(p)$ подставляется в уравнение (11-18) и больше не меняется. Одним из описанных в настоящем параграфе методов подбирается управляющее воздействие, обеспечивающее полную или частичную инвариантность по основному возмущению.

Следует отметить, что компаундирующие или измерительно-вычислительные устройства, включаемые в разомкнутую цепь компенсирующих устройств, на параметры замкнутой цепи влияния не оказывают.

Желающих ознакомиться с системами автоматического управления с воздействием по возмущению подробнее отсылаем к работам [41, 43].

§ 11-4. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ УПРАВЛЯЕМЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

В современной технике приходится иметь дело с объектами, в которых нужно управлять одновременно несколькими величинами. В технической литературе применительно к системам с несколькими управляемыми величинами, как правило, применяется термин регулирование, которым в дальнейшем изложении и будем пользоваться.

Примерами объектов с несколькими регулируемыми величинами являются: 1) паровой котел, у которого регулируемые величины являются давление и температура пара, уровень воды; регулирующими величинами — подача топлива и воды; возмущающей величиной — расход пара; 2) генератор переменного тока, у которого регулируемые величины являются напряжение и частота; регулирующими величинами — подача воды или пара в турбину и напряжение возбуждения; возмущающей величиной — нагрузка генератора; 3) горный комбайн, у которого регулируемые величины являются производительность комбайна и мощность, развиваемая

приводным двигателем; регулируемыми величинами — скорость подачи и скорость резания; возмущающей величиной — крепость угольного пласта.

Для поддержания значений регулируемых величин в объекте на заданном уровне или для изменения их по заданному закону устанавливаются регуляторы и дополнительные устройства, которые вместе с регулируемым объектом образуют систему автоматического регулирования с несколькими регулируемыми величинами.

Системы с несколькими регулируемыми величинами делятся на системы несвязанного и связанного регулирования. *Системами несвязанного регулирования* называются такие, в которых регуляторы, предназначенные для регулирования различных величин, не связаны друг с другом и могут взаимодействовать только через общий для них регулируемый объект.

Системы несвязанного регулирования делятся на зависимые и независимые.

Зависимыми называют такие системы, у которых изменение любой одной регулируемой величины влечет за собой изменение всех остальных регулируемых величин. Например, изменение уровня воды в котле влечет за собой изменение давления и температуры пара; изменение давления пара влечет за собой изменение его температуры и уровня воды.

Независимыми называют такие системы, у которых изменение любой одной регулируемой величины не вызывает изменения остальных регулируемых величин. Например, изменение напряжения отдельно работающего генератора не влечет за собой изменения частоты переменного тока.

В независимых системах процессы регулирования отдельных величин можно рассматривать изолированно, анализ и синтез их могут производиться методами, изложенными в предыдущих главах для систем с одной регулируемой величиной.

Системами связанного регулирования называют такие, у которых регуляторы различных регулируемых величин связаны друг с другом конструктивно и помимо регулируемого объекта.

Системы связанного регулирования и зависимые системы несвязанного регулирования, т. е. все системы, у которых регулируемые величины как-то связаны между собой, называются многосвязными системами регулирования. Этим системам может быть дано следующее определение. *Многосвязными* называются системы автоматического регулирования с несколькими регулируемыми величинами, которые связаны между собой через регулируемый объект, регулятор или нагрузку.

В системах связанного регулирования связи между регуляторами могут быть построены различным образом. Эти связи могут обеспечивать постоянное соотношение между регулируемыми величинами при изменении любой из них, могут обеспечивать и неизменность всех регулируемых величин при изменении любой одной из них, обеспечивая автономность регулирования.

Автономной системой регулирования называется такая многосвязная система, у которой связи между регуляторами таковы, что изменение одной регулируемой величины в процессе регулирования не вызывает изменения остальных регулируемых величин.

Многосвязные системы нельзя рассматривать как простую сумму систем с одной регулируемой величиной. Для многосвязных систем разработана специальная теория, в которой предлагаются специальные методы исследования таких систем. Рассмотрим принципы, положенные в основу исследования многосвязных систем.

В объектах многосвязных систем автоматического регулирования по каждой регулируемой величине имеется свой отдельный выход. Количество входов должно быть не меньше количества выходов, в некоторых случаях входов может быть больше, чем выходов. По каждой регулируемой величине образуется своя система регулирования и при этом каждой регулируемой величине должен соответствовать один исполнительный орган и один регулятор. Регулируемый объект подвергается также внешним возмущениям, которые воздействуют на все или только на некоторые регулируемые величины. Кроме того, все регулируемые величины взаимодействуют между собой. Математическое описание процессов регулирования в многосвязных системах оказывается достаточно сложным. Чтобы несколько упростить математические выражения, применяется матричная форма записи системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим в общем виде многосвязную систему, в которой осуществляется регулирование трех величин. На рис. 11-7 представлено в матричной форме уравнение регулируемого объекта. Величины X_1, X_2, X_3 являются входными, Y_1, Y_2, Y_3 — выходными. Каждый элемент матрицы A_{ik} представляет собой передаточную функцию, связывающую выходную величину с входной. Из приведенной матрицы следует, что все выходные величины связаны со всеми входными. Так, например, передаточная функция A_{11} связывает выходную величину Y_1 с входной X_1 , передаточная функция A_{32} связывает Y_3 и X_2 . Чтобы получить выходную величину в зависимости от всех входных, необходимо входные величины умножить на передаточные функции, стоящие в соответствующей строке, и просуммировать произведения. Для объекта, приведенного на рис. 11-7, получим систему из трех уравнений в изображениях по Лапласу

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3; \\ Y_2 &= A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3; \\ Y_3 &= A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3. \end{aligned} \right\} \quad (11-21)$$

На рис. 11-8 представлено в матричной форме уравнение регуляторов, которые связаны между собой конструктивно. На вход подаются разности измеренных регулируемых выходных величин Y'' регулируемого объекта и заданных значений Y^* регулируемых величин. Элементы матрицы B_{ik} представляют соответствующие передаточные функции регуляторов и связей между ними.

Для системы регуляторов получаем также систему из трех уравнений в изображениях по Лапласу

$$\left. \begin{aligned} X_1^p &= B_{11}(Y_1^n - Y_1^3) + B_{12}(Y_2^n - Y_2^3) + B_{13}(Y_3^n - Y_3^3); \\ X_2^p &= B_{21}(Y_1^n - Y_1^3) + B_{22}(Y_2^n - Y_2^3) + B_{23}(Y_3^n - Y_3^3); \\ X_3^p &= B_{31}(Y_1^n - Y_1^3) + B_{32}(Y_2^n - Y_2^3) + B_{33}(Y_3^n - Y_3^3). \end{aligned} \right\} \quad (11-22)$$

Элементы сравнения регулируемых величин не связаны между собой. Не связаны также регулирующие элементы с передаточными функциями C_1, C_2, C_3 и измерительные элементы с передаточными функциями M_1, M_2, M_3 .

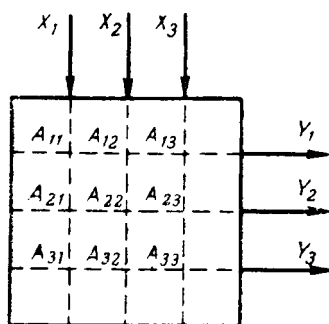


Рис. 11-7. Уравнение объекта в матричной форме

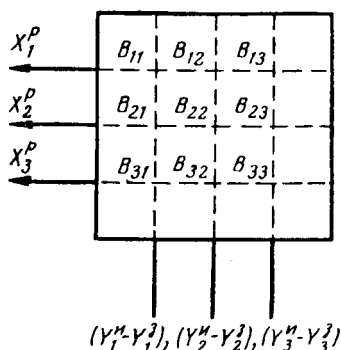


Рис. 11-8. Уравнение регуляторов в матричной форме

На рис. 11-9 представлена в матричной форме функциональная схема многосвязной системы автоматического регулирования. На этой схеме внешние воздействия F складываются с воздействиями, поступающими из регуляторов, и поступают в объект через одни и те же входы.

Уравнения регулируемого объекта и регуляторов можно написать в сокращенной форме. Так, уравнение объекта (11-21) можно записать в виде

$$Y_l = \sum_{k=1}^{k=3} A_{lk} X_k. \quad (11-23)$$

Уравнение регуляторов (11-22) можно записать в виде

$$X_k^p = \sum_{l=1}^{l=3} B_{kl} (Y_l^n - Y_l^3) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (11-24)$$

Уравнение измерительных элементов

$$Y_l^n = M_l Y_l \quad (l = 1, 2, 3). \quad (11-25)$$

Уравнение регулирующих элементов и возмущений

$$X_k = C_k X_k^p + F_k. \quad (11-26)$$

Решая систему уравнений (11-23)–(11-26) относительно выходной регулируемой величины Y_l регулируемого объекта, получим

$$Y_l = \sum_{k=1}^{k=3} \sum_{l=1}^{l=3} A_{ik} C_k B_{kl} (M_l Y_l - Y_l^3) + \sum_{k=1}^{k=3} A_{ik} F_k. \quad (11-27)$$

Выражение (11-27) представляет в самом общем виде изображение по Лапласу одной из выходных регулируемых величин замкнутой

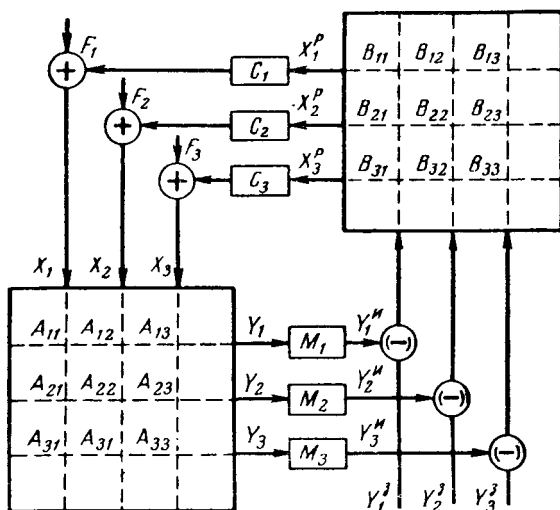


Рис. 11-9. Многосвязная система автоматического регулирования в матричной форме

многосвязной системы автоматического регулирования для случая, когда каждая регулируемая величина зависит от всех остальных регулируемых величин и от всех возмущающих воздействий, поступающих в регулируемый объект, причем связь между этими величинами осуществляется через объект и через регуляторы. Если регуляторы между собой не связаны и связь между регулируемыми величинами осуществляется только через объект, в выражении (11-27) исчезнет знак суммы по l и выражение для Y_l примет вид

$$Y_l = \sum_{k=1}^{k=3} A_{ik} C_k B_k (M_k Y_k - Y_k^3) + \sum_{k=1}^{k=3} A_{ik} F_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (11-28)$$

В этом случае матрица регуляторов, приведенная на рис. 11-8, распадается, так как остаются только передаточные функции регуляторов B_{11} , B_{22} , B_{33} , расположенные на главной диагонали, а все

передаточные функции взаимных связей между регуляторами обращаются в нуль, так как связи между регуляторами отсутствуют.

В случае автономной системы связи между регуляторами оказываются такими, что на каждую регулируемую величину оказывают влияние только соответствующие ей возмущения. Другие регулируемые величины, задания и возмущения на рассматриваемую регулируемую величину влияния не оказывают. Это возможно в том случае, если в выражении (11-27) значащими будут произведения передаточных функций объекта и регуляторов, входящих в отдельные, так называемые *сепаратные системы регулирования*. Эти передаточные функции расположены на главных диагоналях матриц ($A_{11}B_{11}$, $A_{22}B_{22}$, $A_{33}B_{33}$). Все остальные произведения, в которые входят передаточные функции связей между сепаратными системами в объекте и между регуляторами, должны быть равны нулю.

Выражение (11-27) при этом распадается на три самостоятельных уравнения, не связанных друг с другом:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= A_{11}C_1B_{11}(M_1Y_1 - Y_1^3) + A_{11}F_1; \\ Y_2 &= A_{22}C_2B_{22}(M_2Y_2 - Y_2^3) + A_{22}F_2; \\ Y_3 &= A_{33}C_3B_{33}(M_3Y_3 - Y_3^3) + A_{33}F_3; \end{aligned} \right\} \quad (11-29)$$

Математически это условие выполняется в том случае, если элементы полной матрицы системы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю или являются величинами, определяемыми посредством диагональных элементов. Подробно условия автономности рассмотрены в [29].

В многосвязных системах могут решаться также вопросы инвариантности регулируемых величин от части или от всех возмущающих воздействий. В этом случае сепаратные системы строятся как комбинированные, содержащие системы по отклонению и по возмущению.

В реальных системах условие автономности и условие инвариантности абсолютно реализовать обычно невозможно. Они реализуются с точностью до малой величины ϵ , что в подавляющем большинстве случаев удовлетворяет требованиям инженерной практики.

Решение вопросов устойчивости в многосвязных системах автоматического регулирования аналогично решению этих вопросов в системах с одной регулируемой величиной.

Для того чтобы многосвязная система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы были устойчивыми все входящие в нее сепаратные системы. Если хоть одна сепаратная система окажется неустойчивой, неустойчивой будет вся многосвязная система. Чтобы исследовать замкнутую сепаратную систему на устойчивость, нужно найти ее характеристическое уравнение и воспользоваться критерием Гурвица. Для этого следует выписать изображение выходной регулируемой величины Y , для искомой сепаратной системы, воспользовавшись в зависимости от характера связей системы выражением (11-27), (11-28) или (11-29), а затем, преобразуя это выражение, получить в явной форме характеристическое уравнение и исследовать его.

При увеличении коэффициентов усиления одноконтурных сепаратных систем, которое может понадобиться для увеличения установленной точности, устойчивость может быть потеряна. Чтобы избежать этого, в сепаратные системы вводятся корректирующие устройства в виде гибких обратных связей вокруг элементов с большим коэффициентом усиления. Это позволяет принимать весьма большие коэффициенты усиления без потери устойчивости. Применение в сепаратных системах коэффициентов усиления, весьма больших по сравнению с передаточными коэффициентами межсистемных связей, придает многосвязной системе свойства автономности с точностью до малой величины ϵ [29].

Исследование качества регулирования имеет смысл, если оно выполняется по каждой регулируемой величине отдельно. Такое исследование ведется по уравнению сепаратной системы. Это уравнение может быть получено из изображений по Лапласу для регулируемой величины Y_i , т. е. по одному из выражений (11-27), (11-28), (11-29). В полученном уравнении воздействия со стороны других регулируемых величин и возмущений, поступающие в исследуемую систему, могут рассматриваться как обычные возмущения.

Методами, разработанными для систем с одной регулируемой величиной, производятся исследования качества регулирования сепаратной системы и, если это необходимо, производится синтез корректирующих устройств.

Вопросу анализа и синтеза многосвязных систем регулирования посвящена монография [29], по которой можно ознакомиться с методами исследования этих систем более подробно.

Контрольные вопросы

1. Что называется разомкнутой системой автоматического регулирования с жесткой программой?
2. Что называется инвариантностью?
3. В каких случаях можно применять принцип регулирования с воздействием по возмущению в чистом виде?
4. Какими способами может осуществляться компенсирующее воздействие по возмущению?
5. Что называется комбинированной системой автоматического регулирования?
6. Как можно добиться в системе компенсации действующих на нее возмущений?
7. Как осуществить выбор параметров в комбинированной системе автоматического регулирования?
8. Каковы особенности систем автоматического управления с несколькими регулируемыми величинами?
9. Какие системы называются системами несвязанного, связанного регулирования, зависимыми, независимыми, многосвязными, автономными?
10. Как составить в общем виде выражение для регулируемой величины в многосвязной системе?
11. Что называется сепаратной системой?
12. Как выполняется условие автономности многосвязных систем?
13. Как в многосвязных системах исследуются устойчивость и качество переходных процессов?

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННЫХ МОДЕЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

§ 12-1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Современные методы и средства электронного моделирования позволяют ускорить исследование систем автоматического управления, особенно нелинейных, сделать его значительно полнее и в ряде случаев решать задачи, которые другими методами решить не удастся.

Моделирование состоит в том, что система в целом или отдельные ее элементы заменяются моделью, которая с большей или меньшей полнотой и точностью воспроизводит свойства моделируемой системы или ее элементов.

Различают два основных метода моделирования — физическое и математическое.

При *физическом* моделировании исходное устройство заменяется моделью одной с ним физической природы, которая отличается обычно геометрическими размерами. Физическое моделирование широко применяется в аэродинамике, в строительной технике, а иногда и при исследовании систем автоматического управления.

Несмотря на то, что при физическом моделировании свойства моделируемого устройства воспроизводятся наиболее полно, от него в большинстве случаев приходится отказываться, так как для каждого нового процесса или при изменении параметров исследуемого приходится создавать новые, обычно очень дорогие модели. Физическое моделирование применяется в тех случаях, когда никакими другими способами устройство или процесс исследовать нельзя.

При *математическом* моделировании исходное устройство (или система) должно быть предварительно описано с помощью системы дифференциальных уравнений, которые затем реализуются устройствами моделирующей установки. Различными комбинациями этих устройств можно составлять системы, описываемые такими же дифференциальными уравнениями, как и уравнения исходной системы.

По конструкции математические моделирующие устройства делятся на механические, гидравлические, пневматические и электрические (в том числе и электронные). В зависимости от конструкции переменные величины исследуемой системы выражаются в моделях механическим перемещением деталей, высотой уровня жидкости, давлением воздуха, величиной электрического тока или напряжения. Математическое моделирование может осуществляться двумя путями:

построением моделей прямой аналогии и использованием вычислительных машин.

В устройствах первой группы используется известная аналогия между механическими, гидродинамическими, тепловыми, электрическими и другими явлениями. Исследование изучаемого процесса производится на модели другой физической природы, что позволяет упростить и удешевить изготовление моделей и облегчить исследование. В этом случае каждому физическому элементу оригинала соответствует определенный элемент другой физической природы на модели.

Устройства второй группы представляют собой аналоговые вычислительные машины, построенные из отдельных вычислительных элементов, осуществляющих элементарные математические операции: сложение, вычитание, умножение, дифференцирование и интегрирование. Такие устройства отличаются универсальностью и получили преимущественное распространение.

Математическое моделирование может осуществляться и на цифровых электронных вычислительных машинах, однако широкого применения оно не получило вследствие большой сложности программирования, меньшей наглядности полученных результатов и меньшей общей скорости работы.

§ 12-2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ¹

Чтобы исследовать систему автоматического регулирования на аналоговой вычислительной машине, необходимо расчленить эту систему на типовые звенья, составить структурную схему системы, на которой показать все связи между звеньями, и по известным параметрам звеньев определить численные значения коэффициентов в уравнениях звеньев. Таким образом, исходными данными для исследования являются: 1) система уравнений звеньев, входящих в систему; 2) структурная схема системы с указанием связей между звеньями.

Существует два способа моделирования переходных процессов в системах автоматического регулирования.

Первый способ состоит в том, что по имеющимся структурной схеме и дифференциальным уравнениям отдельных звеньев составляется дифференциальное уравнение всей системы, в соответствии с которым на аналоговой машине производится набор схемы соединений решающих элементов.

Второй способ, который называется способом структурного моделирования, предполагает построение электронной модели из блоков, имитирующих поведение отдельных звеньев системы. Динамические свойства отдельных звеньев моделируются по их дифференциальным уравнениям, или по передаточным функциям. При моделировании

¹ § 12-2 и 12-3 написаны инж. В. Г. Шарудой.

по передаточным функциям уменьшается число используемых решающих элементов, но в некоторых случаях значительно усложняется набор значений коэффициентов.

Способ структурного моделирования является более удобным, так как структура моделей оказывается аналогичной структуре реальной системы. На такой модели легко воспроизводится изменение отдельных параметров, изменение структуры включением корректирующих устройств, выбор корректирующих устройств.

В приведенных ниже исследованиях использован способ структурного моделирования с моделированием динамических свойств звеньев по дифференциальным уравнениям.

До набора задачи на машине уравнения звеньев преобразовываются — они решаются относительно старшей производной, выбираются переходные масштабы для перевода физических переменных

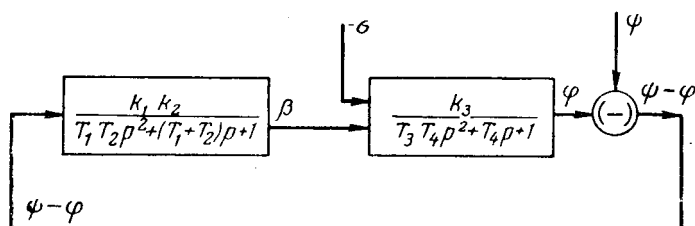


Рис. 12-1. Структурная схема линейной статической системы

в машинные, выбираются масштаб времени и начальные условия. Затем составляется структурная схема соединений решающих элементов машины, схема набирается на машине и модель готова для исследования.

Рассмотрим методику моделирования на примере системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока, принципиальная и структурная схемы которой приведены на рис. 4-1 и 4-2. При моделировании для упрощения два аperiодических звена можно объединить в одно звено второго порядка. Соответствующая структурная схема изображена на рис. 12-1.

Уравнения звеньев этой системы в безразмерных отклонениях в обычной дифференциальной форме имеют вид

$$T_1 T_2 \beta'' + (T_1 + T_2) \beta' + \beta = k_1 k_2 (\psi - \varphi); \quad (12-1)$$

$$T_3 T_4 \varphi'' + T_4 \varphi' + \varphi = k_3 (\beta - \sigma). \quad (12-2)$$

Входные и выходные величины решающих усилителей аналоговой машины представляют собой напряжения, выраженные в вольтах, поэтому безразмерные переменные уравнений (12-1) и (12-2) следует

представить также в виде напряжений

$$\left. \begin{aligned} \beta &= m_{\beta} U_{\beta}; & \beta' &= m_{\beta'} U_{\beta'}; & \beta'' &= m_{\beta''} U_{\beta''}; \\ \varphi &= m_{\varphi} U_{\varphi}; & \varphi' &= m_{\varphi'} U_{\varphi'}; & \varphi'' &= m_{\varphi''} U_{\varphi''}; \\ \psi &= m_{\psi} U_{\psi}; & \sigma &= m_{\sigma} U_{\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (12-3)$$

где $\beta, \beta', \beta'', \varphi, \varphi', \varphi'', \psi, \sigma$ — безразмерные переменные;
 $U_{\beta}, U_{\beta'}, U_{\beta''}, U_{\varphi}, U_{\varphi'}, U_{\varphi''}, U_{\psi}, U_{\sigma}$ — соответствующие им машинные переменные, σ ;
 $m_{\beta}, m_{\beta'}, m_{\beta''}, m_{\varphi}, m_{\varphi'}, m_{\varphi''}, m_{\psi}, m_{\sigma}$ — переходные масштабы от безразмерных переменных к напряжениям, $\frac{1}{\sigma}$.

Подставим значения безразмерных переменных из (12-3) в уравнения (12-1) и (12-2)

$$T_1 T_2 m_{\beta''} U_{\beta''} + (T_1 + T_2) m_{\beta'} U_{\beta'} + m_{\beta} U_{\beta} = k_1 k_2 (m_{\psi} U_{\psi} - m_{\varphi} U_{\varphi}); \quad (12-4)$$

$$T_3 T_4 m_{\varphi''} U_{\varphi''} + T_4 m_{\varphi'} U_{\varphi'} + m_{\varphi} U_{\varphi} = k_3 (m_{\beta} U_{\beta} - m_{\sigma} U_{\sigma}). \quad (12-5)$$

Решив полученные уравнения относительно старших производных напряжений $U_{\beta''}$ и $U_{\varphi''}$, получим машинные уравнения исследуемой системы

$$\begin{aligned} U_{\beta''} = & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \frac{m_{\beta'}}{m_{\beta''}} U_{\beta'} - \frac{1}{T_1 T_2} \frac{m_{\beta}}{m_{\beta''}} U_{\beta} + \frac{k_1 k_2}{T_1 T_2} \frac{m_{\psi}}{m_{\beta''}} U_{\psi} - \\ & - \frac{k_1 k_2}{T_1 T_2} \frac{m_{\varphi}}{m_{\beta''}} U_{\varphi}; \end{aligned} \quad (12-6)$$

$$\begin{aligned} U_{\varphi''} = & -\frac{T_4}{T_3 T_4} \frac{m_{\varphi'}}{m_{\varphi''}} U_{\varphi'} - \frac{1}{T_3 T_4} \frac{m_{\varphi}}{m_{\varphi''}} U_{\varphi} + \\ & + \frac{k_3}{T_3 T_4} \frac{m_{\beta}}{m_{\varphi''}} U_{\beta} - \frac{k_3}{T_3 T_4} \frac{m_{\sigma}}{m_{\varphi''}} U_{\sigma}. \end{aligned} \quad (12-7)$$

Принимаем те же значения постоянных времени и коэффициентов усиления, что и в примере, приведенном в § 5-2,

$$T_1 = 0,05 \text{ сек}; T_2 = 0,1 \text{ сек}; T_3 = 0,2 \text{ сек}; T_4 = 1 \text{ сек};$$

$$k_1 = 2; k_2 = 2; k_3 = 1; K = k_1 k_2 k_3 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4.$$

Подставляя эти значения в уравнения (12-6) и (12-7), получим

$$U_{\beta''} = -30 \frac{m_{\beta'}}{m_{\beta''}} U_{\beta'} - 200 \frac{m_{\beta}}{m_{\beta''}} U_{\beta} + 800 \frac{m_{\psi}}{m_{\beta''}} U_{\psi} - 800 \frac{m_{\varphi}}{m_{\beta''}} U_{\varphi}; \quad (12-8)$$

$$U_{\varphi''} = -5 \frac{m_{\varphi'}}{m_{\varphi''}} U_{\varphi'} - 5 \frac{m_{\varphi}}{m_{\varphi''}} U_{\varphi} + 5 \frac{m_{\beta}}{m_{\varphi''}} U_{\beta} - 5 \frac{m_{\sigma}}{m_{\varphi''}} U_{\sigma}. \quad (12-9)$$

При выборе переходных масштабов следует исходить из того, что машинные переменные не должны превышать ± 100 в. Это вызвано

необходимостью работы решающих усилителей в пределах линейных участков их характеристик. Однако масштабы необходимо выбирать так, чтобы решение уравнений происходило при наибольшем допустимом напряжении на выходе усилителей. При этом обеспечиваются наименьшие погрешности решений.

Чтобы выполнить эти требования, необходимо ориентировочно оценить максимальные пределы изменения безразмерных переменных и в соответствии с ними выбрать масштабы. Пределы изменения безразмерных переменных проще всего установить после нескольких пробных решений исходных уравнений на машине. При этом сначала задаются значениями переменных, во много раз превышающими действительные, а затем путем их последовательного уменьшения добиваются полного использования машины.

Для рассматриваемой системы (см. рис. 12-1) принимаем следующие максимально возможные значения переменных:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\max} = 50; \beta'_{\max} = 200; \beta''_{\max} = 10\,000; \varphi_{\max} = 2; \\ \varphi'_{\max} = 20; \varphi''_{\max} = 200; \psi_{\max} = 2; \sigma_{\max} = 2. \end{aligned} \right\} \quad (12-10)$$

Из соотношений (12-3) при условии, что максимальные значения переменных составляют 100 ϵ , получим

$$\begin{aligned} m_{\beta} &= \frac{\beta_{\max}}{100} = \frac{50}{100} = 0,5 \frac{1}{\epsilon}; & m_{\beta'} &= \frac{\beta'_{\max}}{100} = \frac{200}{100} = 2 \frac{1}{\epsilon}; \\ m_{\beta''} &= \frac{\beta''_{\max}}{100} = \frac{10\,000}{100} = 100 \frac{1}{\epsilon}; & m_{\varphi} &= \frac{\varphi_{\max}}{100} = \frac{2}{100} = 0,02 \frac{1}{\epsilon}; \\ m_{\varphi'} &= \frac{\varphi'_{\max}}{100} = \frac{20}{100} = 0,2 \frac{1}{\epsilon}; & m_{\varphi''} &= \frac{\varphi''_{\max}}{100} = \frac{200}{100} = 2 \frac{1}{\epsilon}; \\ m_{\psi} &= \frac{\psi_{\max}}{100} = \frac{2}{100} = 0,02 \frac{1}{\epsilon}; & m_{\sigma} &= \frac{\sigma_{\max}}{100} = \frac{2}{100} = 0,02 \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения масштабов в уравнения (12-8) и (12-9), получим машинные уравнения для конкретных параметров системы

$$U_{\beta''} = -0,6U_{\beta} - U_{\beta'} + 0,16U_{\psi} - 0,16U_{\varphi}; \quad (12-11)$$

$$U_{\varphi''} = -0,5U_{\varphi'} - 0,05U_{\psi} + 1,25U_{\beta} - 0,05U_{\sigma}. \quad (12-12)$$

Если хотя бы один из коэффициентов машинных уравнений (12-11) и (12-12) окажется больше 10, то необходимо изменить масштабы так, чтобы все коэффициенты были меньше 10. В противном случае решающие усилители будут работать неустойчиво.

Уравнения (12-11) и (12-12) являются исходными для составления структурной схемы соединений решающих элементов машины. Рассмотрим уравнение (12-11). Если в этом уравнении просуммировать члены правой части, используя решающий усилитель 1 (рис. 12-2) в режиме сумматора, то на выходе этого усилителя получим напряжение $U_{\beta''}$ со знаком минус. Знак минус обусловлен свойством решающих усилителей аналоговых машин изменять на выходе знак входного сигнала на обратный.

Рассмотрим, как получить на машине каждый член правой части уравнения (12-11). Интегрируя напряжение $-U_{\beta''}$ при помощи интегрирующего усилителя 2, получаем напряжение $+U_{\beta'}$. Знак этого напряжения изменяем при помощи усилителя 4, работающего в режиме инвертора. Напряжение $-U_{\beta'}$ с выхода усилителя 4 подается на вход сумматора 1. Аналогично получаем напряжение $-U_{\beta}$, интегрируя $U_{\beta'}$ при помощи интегратора 3.

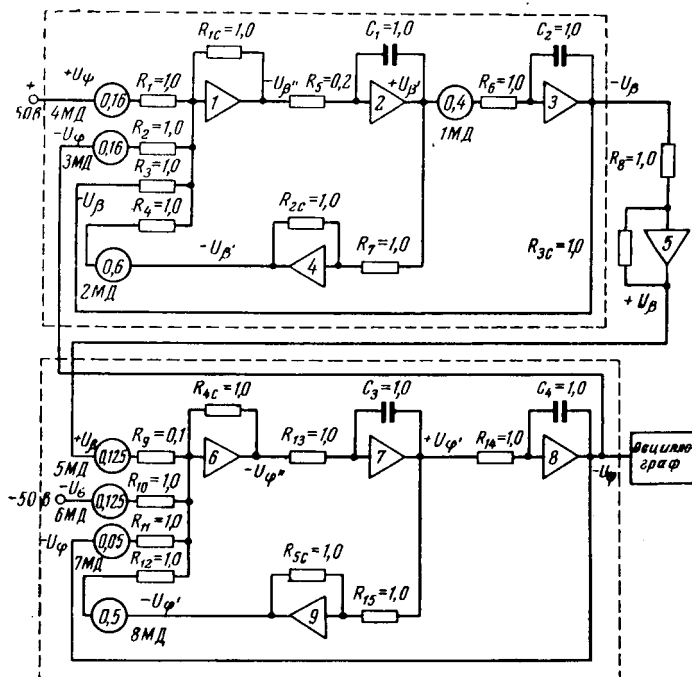


Рис. 12-2. Структурная схема модели для исследования линейной статической системы

Напряжение U_{ϕ} представляет собой управляющее воздействие системы и подается на вход сумматора 1 от постороннего источника. Напряжение $-U_{\phi}$, полученное двукратным интегрированием величины $-U_{\phi'}$ с помощью интегрирующих усилителей 7 и 8, подается с выхода структурной схемы модели, составленной для уравнения (12-12) аналогично схеме для уравнения (12-11) и приведенной в нижней части рис. 12-2.

Рассмотренная методика преобразования дифференциальных уравнений к машинному виду является общей для всех аналоговых машин. Последующие рекомендации по набору значений коэффициентов уравнений относятся к конкретной аналоговой машине типа ЛМУ-1.

Коэффициенты уравнений (12-11) и (12-12) набираются в схеме модели на машине с помощью масштабных делителей $МД$ и за счет

определенного соотношения между сопротивлениями R_{1c} ; R_{4c} и соответствующими входными сопротивлениями $R_1 \div R_4$; $R_9 \div R_{12}$ усилителей 1 и 6.

Сопротивления R_{1c} и R_{4c} в аналоговой машине ЛМУ-1 заданы и каждое из них равно 1 *Мом*. Сопротивления $R_1 \div R_4$ и $R_9 \div R_{12}$ сменные и составляют 0,1; 0,2; 0,4; 0,5; 0,8 и 1 *Мом*. Таким образом, сменными сопротивлениями можно установить на усилителях 1 и 6 коэффициенты передачи соответственно 10; 5; 2,5; 2; 1,25 и 1.

Масштабные делители — это потенциометры, у которых коэффициент передачи $k_{мд}$ (отношение выходного напряжения к входному) может изменяться через одну тысячную долю единицы от 0,001 до 1. Они применяются в тех случаях, когда коэффициенты передачи сменных сопротивлений отличаются от коэффициентов исходных уравнений.

В данном случае масштабные делители применены для набора коэффициентов при величинах U_β , $U_{\beta'}$, U_φ , $U_{\beta''}$, U_ψ , U_σ .

Определим, например, величину сопротивления R_4 и уставку масштабного делителя 2МД на входе усилителя 1. На этот вход подается напряжение $-U_{\beta'}$. Согласно уравнению (12-11) коэффициент при $-U_{\beta'}$ равен 0,6. Принимаем $R_4 = 1$ *Мом*, а на делителе 2МД ставим уставку 0,6. Остальные коэффициенты набираются аналогично.

Определение величин сопротивлений на входе усилителей, работающих в режиме интеграторов, и уставок масштабных делителей, стоящих перед ними, рассмотрим на примере усилителя 3. Коэффициент передачи k_3 этого усилителя может быть определен из соотношения масштабов на основании следующих рассуждений.

Интегратор осуществляет операцию интегрирования величины β' по времени, что записывается следующим выражением:

$$\beta = \int_0^t \beta' dt. \quad (12-13)$$

В схеме модели вместо β и β' действуют соответствующие напряжения. Применяв обозначения (12-3) вместо выражения (12-13), можем написать

$$m_\beta U_\beta = \int_0^t m_\beta U_{\beta'} m_t dt_m, \quad (12-14)$$

откуда

$$U_\beta = \frac{m_\beta m_t}{m_\beta} \int_0^t U_{\beta'} dt_m = k_3 \int_0^t U_{\beta'} dt_m, \quad (12-15)$$

где t — реальное время;
 t_m — машинное время;
 m_t — масштаб времени.

Коэффициент передачи интегрирующего усилителя

$$k_3 = \frac{m_3 m_t}{m_3}. \quad (12-16)$$

При выборе масштаба времени следует учитывать, что погрешность решающего усилителя в режиме интегратора возрастает с течением времени. Поэтому для снижения этой погрешности следует уменьшать продолжительность решения (брать m_t больше). Однако при большом значении m_t увеличивается коэффициент передачи интегратора. Практически m_t выбирают таким, чтобы коэффициент передачи интегратора был не больше 20. В таких условиях интегратор работает устойчиво.

Принимаем $m_t = 0,1$. Значения остальных масштабов приведены выше. Подставляя значения масштабов в выражение (12-16), получим

$$k_3 = \frac{2 \cdot 0,1}{0,5} = 0,4.$$

Коэффициент передачи усилителя 3 связан с величинами сопротивления R_6 , емкости конденсатора C_2 и уставкой масштабного делителя $1МД$ следующим соотношением:

$$k_3 = \frac{k_{1МД}}{R_6 C_2}. \quad (12-17)$$

Исходя из величины принятого выше коэффициента передачи и задаваясь величинами любых двух (из трех) параметров правой части (12-17), находят третий параметр.

Величина емкости в цепи обратной связи интегратора для аналоговых машин обычно принимается равной 1 мкф и, следовательно, $C_2 = 1$ мкф. Величину сопротивления R_6 принимаем равной 1 Мом. Неизвестным остается коэффициент передачи $k_{1МД}$ масштабного делителя $1МД$.

Находим его из выражения (12-17)

$$k_{1МД} = k_3 R_6 C_2 = 0,4 \cdot 1 \cdot 1 = 0,4. \quad (12-18)$$

Величины сопротивлений и уставки масштабных делителей, стоящих на входе других интеграторов, выбираются аналогично.

Коэффициенты передачи усилителей 4, 5 и 9, работающих в режиме инверторов, равны единице. Сопротивления $R_{2с}$, $R_{3с}$, $R_{6с}$, R_7 , R_8 и R_{15} принимаются одинаковыми и равными 1 Мом.

Выбранные значения сопротивлений в мегамах и емкостей в микрофарадах указаны на рис. 12-2 рядом с их условными обозначениями, а уставки масштабных делителей — внутри кружков. Управляющее воздействие ψ и нагрузка σ подаются на соответствующие усилители в виде напряжений от посторонних источников напряжения, причем полярность потенциала должна соответствовать знаку моделируемой величины в машинном уравнении.

Включение и отключение машины производится при помощи имеющейся в ней специальной схемы. Результат решения получается на осциллографе в виде кривой переходного процесса во времени. Перед исследованием рассматриваемой системы были поставлены следующие задачи: 1) получить кривую переходного процесса при исходных параметрах и определить установившуюся точность системы; 2) найти критический коэффициент усиления системы; 3) при малой точности системы в установившемся режиме ввести корректирующее устройство и увеличить общий коэффициент усиления с целью повышения точности.

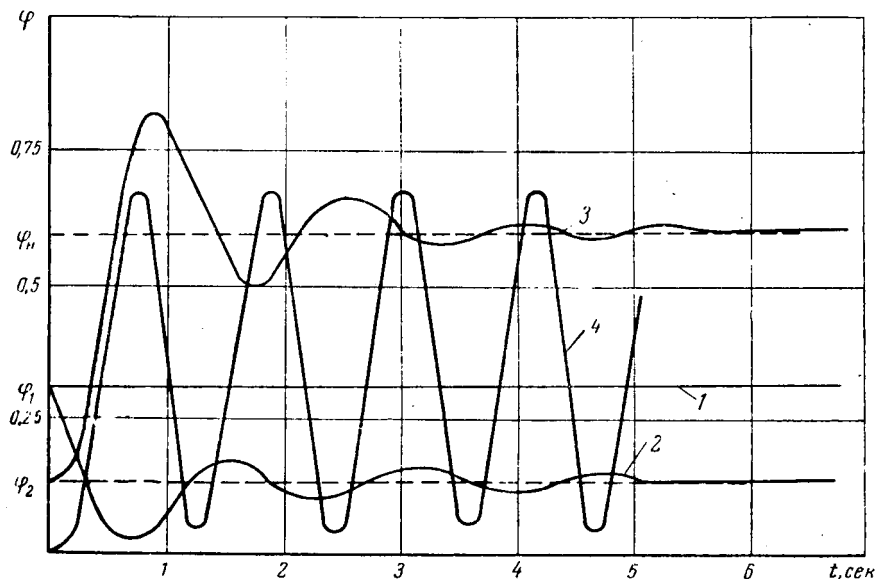


Рис. 12-3. Осциллограммы переходного процесса, полученные при моделировании линейной статической системы

На рис. 12-3 приведены осциллограммы, полученные при исходных параметрах. В осциллографе использовалась электронно-лучевая трубка с длительным послесвечением. Кривые переходных процессов копировались на кальку непосредственно с экрана.

На рис. 12-3 по оси ординат отложены относительные значения регулируемой величины φ , по оси абсцисс — реальное время в секундах. Горизонтальная линия 1 на рисунке соответствует установившемуся значению регулируемой величины для случая, когда $\psi = 0,4$ и $\sigma = 0$ (холостой ход).

При ступенчатом набросе нагрузки до номинальной $\sigma = 1$ возникает переходный процесс, величина φ совершает затухающие колебания (кривая 2) и приходит к новому установившемуся значению $\varphi_2 < \varphi_1$. Кривая 3 представляет переходный процесс в случае, когда

управляющее воздействие ψ скачком увеличено от $\psi = 0,4$ до $\psi = 1,0$ при $\sigma = 1$. Регулируемая величина стремится к установившемуся значению $\varphi_n = 0,6$. Таким образом, при номинальной нагрузке и управляющем воздействии $\psi = 1$ регулируемая величина достигает 0,6 от значения управляющего воздействия, так что система очень не точна.

Чтобы повысить точность системы, нужно увеличить ее коэффициент усиления. Коэффициент усиления на модели увеличивался изменением уставки масштабных делителей ЗМД и 4МД (см. рис. 12-2), что соответствует в реальной схеме изменению коэффициента усиления электромашинного усилителя и, следовательно, всей системы.

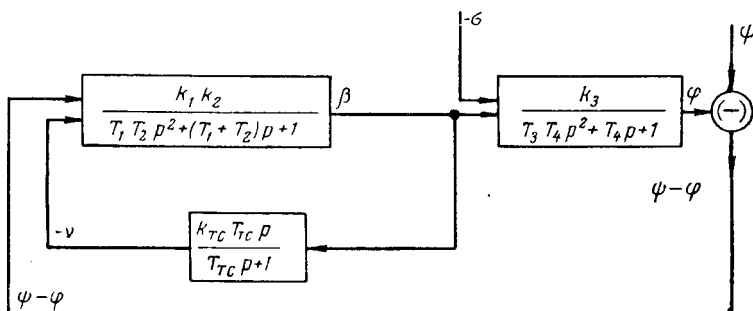


Рис. 12-4. Структурная схема линейной статической системы с гибкой обратной связью

Оказалось, что при $K = 9,12$ регулируемая величина стала совершать незатухающие колебания, система оказалась на грани устойчивости (кривая 4). Расчетом для этой системы критический коэффициент усиления был найден в § 5-3 равным 9,4.

Чтобы иметь возможность увеличивать коэффициент усиления системы, введем гибкую обратную связь вокруг ЭМУ с помощью стабилизирующего трансформатора. Структурная схема такой системы приведена на рис. 12-4.

Эта система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

электромашинный усилитель

$$T_1 T_2 \beta'' + (T_1 + T_2) \beta' + \beta = k_1 k_2 \psi - k_1 k_2 \varphi - k_1 k_2 v; \quad (12-19)$$

двигатель

$$T_3 T_4 \varphi'' + T_4 \varphi' + \varphi = k_3 \beta - k_3 \sigma; \quad (12-20)$$

стабилизирующий трансформатор

$$T_{TC} v' + v = k_{TC} T_{TC} \beta'. \quad (12-21)$$

Увеличим коэффициент усиления k_1 с 2 до 25 (при этом $K = k_1 k_2 k_3 = 50$) и примем $k_{TC} = 1$.

В этой системе необходимо подобрать постоянную времени $T_{\text{тс}}$ стабилизирующего трансформатора таким образом, чтобы переходный процесс был сходящимся.

Машинные уравнения САР, полученные по методике, изложенной в предыдущем примере, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} U_{\beta''} &= -1,5U_{\beta'} - 0,5U_{\beta} + U_{\psi} - 2,5U_{\varphi} - 10U_{\gamma}; \\ U_{\varphi''} &= -0,5U_{\varphi'} - 0,05U_{\varphi} + 0,5U_{\beta} - 0,02U_{\sigma}; \\ U_{\gamma} &= -\frac{0,1}{T_{\text{тс}}} U_{\gamma} + 5U_{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (12-22)$$

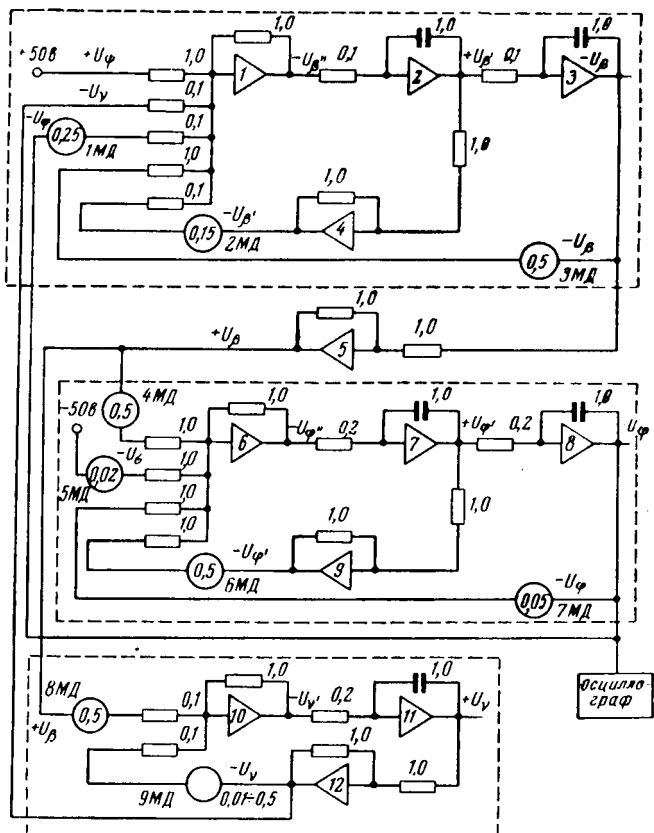
Принятые масштабы переменных

$$m_{\beta} = 0,5 \frac{1}{\text{с}}; \quad m_{\beta'} = 10 \frac{1}{\text{с}}; \quad m_{\beta''} = 200 \frac{1}{\text{с}}; \quad m_{\psi} = 0,02 \frac{1}{\text{с}};$$

$$m_{\varphi} = 0,05 \frac{1}{\text{с}}; \quad m_{\varphi'} = 0,5 \frac{1}{\text{с}}; \quad m_{\varphi''} = 5 \frac{1}{\text{с}}; \quad m_{\sigma} = 0,02 \frac{1}{\text{с}};$$

$$m_{\gamma} = 0,2 \frac{1}{\text{с}}; \quad m_{\gamma'} = 2 \frac{1}{\text{с}}; \quad m_t = 0,5.$$

Рис. 12-5. Структурная схема модели для исследования линейной статической системы с гибкой обратной связью



Структурная схема модели, составленная по уравнениям (12-22), приведена на рис. 12-5. Пунктирными линиями обведены схемы, соответствующие каждому из этих уравнений.

На рис. 12-6 приведены осциллограммы, полученные на модели системы регулирования со стабилизирующим трансформатором. Горизонтальная линия 1 соответствует установившемуся значению регулируемой величины φ_1 для случая, когда $\psi = 0,4$ и $\sigma = 0$ (холостой ход). При ступенчатом возрастании нагрузки до номинальной ($\sigma = 1$)

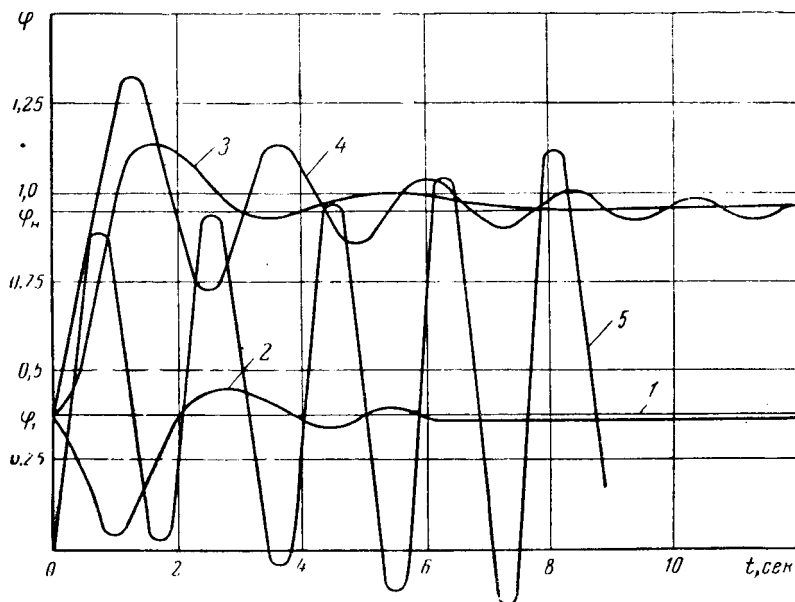


Рис. 12-6. Осциллограммы переходных процессов, полученные при моделировании линейной статической системы с глубокой обратной связью

величина φ меняется по кривой 2 и, совершая затухающие колебания, приходит к новому установившемуся значению, несколько меньшему значения φ_1 . Кривая 3 получена для случая, когда управляющее воздействие ψ скачком увеличено от 0,4 до 1,0 при $\sigma = 1$. Регулируемая величина стремится к установившемуся значению $\varphi_n = 0,96$. Таким образом, при номинальной нагрузке и управляющем воздействии $\psi = 1$ регулируемая величина достигает 0,96 от значения управляющего воздействия, что говорит о высокой статической точности системы регулирования.

Кривые 2 и 3 получены при постоянной времени стабилизирующего трансформатора $T_{тс} = 0,33 \text{ сек.}$ Сравнивая кривые 2 и 3 на рис. 12-3 и 12-6, видим, что гибкая обратная связь при соответствующем подборе ее параметров позволила за счет увеличения коэф-

коэффициента усиления значительно повысить статическую точность системы регулирования и сохранить систему устойчивой.

При уменьшении $T_{\text{тс}}$, что на модели осуществляется изменением уставки масштабного делителя $9МД$ (см. рис. 12-5), запас устойчивости системы понижается и переходный процесс становится колебательным. На рис. 12-6 кривая 4 получена при ступенчатом увеличении управляющего воздействия ψ от 0,4 до 1,0 при $\sigma = 1$ для случая, когда $T_{\text{тс}} = 0,15 \text{ сек.}$ Как видим, регулируемая величина приходит к установившемуся значению с медленно затухающими колебаниями.

Уменьшая постоянную времени $T_{\text{тс}}$, можно сделать систему даже неустойчивой, о чем свидетельствует кривая 5, которая характеризует переходный процесс в системе при $T_{\text{тс}} = 0,08 \text{ сек.}$ Регулируемая величина при этом совершает колебания с возрастающей амплитудой. Это значит, что система неустойчива.

§ 12-3. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ АСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Исследование на аналоговой вычислительной машине нелинейных систем автоматического регулирования практически не отличается от исследования линейных систем. Некоторую трудность иногда представляет набор статических характеристик нелинейных элементов. Для типичных нелинейностей разработаны схемы их набора, а в остальных случаях исследователю приходится создавать свои схемы для воспроизведения той или иной нелинейности.

В качестве примера исследуем работу нелинейной астатической системы с релейным элементом, приведенной на рис. 10-11. Эта система описывается уравнениями (10-25)–(10-28). Выпишем эти уравнения.

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_y - E_{\text{тг}}; \\ U_d &= \begin{cases} U_p & \text{при } \Delta U > \Delta U_0 \\ -U_p & \text{при } \Delta U < -\Delta U_0 \\ 0 & \text{при } |\Delta U| < \Delta U_0 \end{cases}; \\ \frac{dU_n}{dt} &= \pm k_1 \frac{L_n}{T_n}; \quad \text{при } U_d = \pm U_p; \\ (T_{\text{эму}}p + 1) \bar{E}_{\text{эму}} &= k_2 \bar{U}_n; \\ (T_{\text{э}} T_{\text{м}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1) \bar{E}_{\text{тг}} &= k_3 (\bar{E}_{\text{эму}} - r_{\text{я}} \bar{I}_{\text{с}}).\end{aligned}$$

Перейдем к безразмерным величинам, обозначив

$$\begin{aligned}\frac{U_d}{U_p} &= \mu; \quad \frac{U_p}{U_p} = 1; \quad \frac{E_{\text{тг}}}{E_{\text{тг}0}} = \varphi; \quad \frac{U_y}{E_{\text{тг}0}} = \psi; \\ \frac{\Delta U_0}{E_{\text{тг}0}} &= a; \quad \frac{\Delta U}{E_{\text{тг}0}} = \Delta \varphi; \quad \frac{U_n}{U_{n0}} = \eta; \quad \frac{L_n}{L_{n0}} = 1; \\ \frac{E_{\text{эму}}}{E_{\text{эму}0}} &= \beta; \quad \frac{r_{\text{я}} I_{\text{с}}}{r_{\text{я}} I_{\text{сн}}} = \sigma; \quad \frac{k_1}{T_n} = B.\end{aligned}$$

Подставив эти значения в приведенные выше уравнения, получим

$$\Delta\varphi = \psi - \varphi; \quad (12-23)$$

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{при } \Delta\varphi > a \\ -1 & \text{при } \Delta\varphi < -a \\ 0 & \text{при } |\Delta\varphi| < a \end{cases}; \quad (12-24)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B\mu; \quad (12-25)$$

$$(T_{\text{эму}}p + 1)\bar{\beta} = k_2\bar{\eta}; \quad (12-26)$$

$$(T_3T_{\text{м}}p^2 + T_{\text{м}}p + 1)\bar{\varphi} = k_3\bar{\beta} - k_3\bar{\sigma}. \quad (12-27)$$

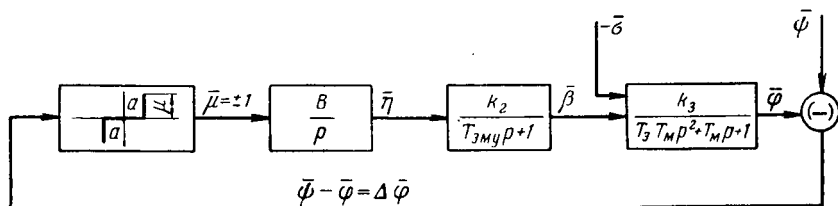


Рис. 12-7. Структурная схема нелинейной астатической системы

Структурная схема рассматриваемой системы приведена на рис. 12-7. Исследуем систему при тех же значениях параметров, что и в примере 2 (см. § 10-3)

$$T_{\text{эму}} = 0,3 \text{ сек}; T_3 = 0,2 \text{ сек}; T_{\text{м}} = 1 \text{ сек}; T_{\text{п}} = 1 \text{ сек};$$

$$k_1 = 1; k_2 = 5; k_3 = 1; B = 1; a = \pm 0,1.$$

Уравнения (12-23)–(12-27), приведенные к машинному виду по рассмотренной ранее методике, запишутся соответственно следующим образом:

$$U_{\Delta\varphi} = U_{\psi} - U_{\varphi}; \quad (12-28)$$

$$U_{\mu} = \begin{cases} 50 & \text{при } U_{\Delta\varphi} > U_a \\ -50 & \text{при } U_{\Delta\varphi} < -U_a \\ 0 & \text{при } |U_{\Delta\varphi}| < U_a \end{cases}; \quad (12-29)$$

$$U_{\tau} = 0,04U_{\mu}; \quad (12-30)$$

$$U_{\varepsilon} = -0,33U_{\beta} + 0,834U_{\eta}; \quad (12-31)$$

$$U_{\varphi} = -0,5U_{\varphi} - 0,25U_{\varphi} + 0,25U_{\beta} - 0,05U_{\sigma}. \quad (12-32)$$

Принятые при этом масштабы переменных

$$\begin{aligned} m_{\beta} &= 0,1 \frac{1}{\varepsilon}; \quad m_{\beta'} = 1 \frac{1}{\varepsilon}; \quad m_{\varphi} = 0,1 \frac{1}{\varepsilon}; \quad m_{\varphi''} = 0,2 \frac{1}{\varepsilon}; \\ m_{\varphi'''} &= 2 \frac{1}{\varepsilon}; \quad m_{\psi} = 0,1 \frac{1}{\varepsilon}; \quad m_{\eta} = 0,05 \frac{1}{\varepsilon}; \quad m_{\eta'} = 0,5 \frac{1}{\varepsilon}; \\ m_{\sigma} &= 0,02 \frac{1}{\varepsilon}; \quad m_{\mu} = 0,02 \frac{1}{\varepsilon}; \quad m_t = 0,5. \end{aligned}$$

Для воспроизведения характеристики идеального релейного звена (см. рис. 10-13, б) составлена структурная схема модели, приведенная на рис. 12-8, а. На рис. 12-8, б приведена статическая релейная характеристика, воспроизводимая этой схемой, в машинных координатах. Сравнивая характеристики на рис. 10-13, б и рис. 12-8, б, видим, что

$$\mu = m_{\mu} U_{\mu}; \quad a = m_{\psi} (U_{\psi_0} - U_{\varphi_0}) = m_{\varphi} (U_{\psi_0} - U_{\varphi_0}), \quad (12-33)$$

где $U_{\psi_0} - U_{\varphi_0} = U_a$ — условное обозначение зоны нечувствительности на релейной характеристике.

Схема, изображенная на рис. 12-8, а, работает следующим образом. Так как на диоды в цепях обратных связей усилителей 1 и 2 подано запирающее напряжение $\pm U_{\mu}/2$, то сопротивления в цепях обратных связей усилителей равны бесконечности. Коэффициент усиления усилителей при этом весьма большой. В силу этого можно считать, что напряжение на выходе усилителей достигает предельного значения $\pm U_{\mu}/2$ при малейшем изменении входного напряжения.

При отсутствии входного сигнала $U_{\psi} - U_{\varphi}$ на выходе усилителя 1 благодаря постоянным напряжениям $\pm (U_{\psi_0} - U_{\varphi_0})$ будет напряжение $-U_{\mu}/2$, а на выходе усилителя 2 — напряжение $+U_{\mu}/2$. На выходе суммирующего усилителя 3 напряжение равно нулю.

При возрастании входного напряжения, например $+(U_{\psi} - U_{\varphi})$, на выходе усилителя 1 будет все время $-U_{\mu}/2$, так как знак входного напряжения совпадает со знаком напряжения смещения $+(U_{\psi_0} - U_{\varphi_0})$, а на выходе усилителя 2 напряжение $+U_{\mu}/2$ будет сохраняться только до тех пор, пока входное напряжение $+(U_{\psi} - U_{\varphi})$ не станет больше по абсолютной величине напряжения $-(U_{\psi_0} - U_{\varphi_0})$. При $|(U_{\psi} - U_{\varphi})| > |(U_{\psi_0} - U_{\varphi_0})|$ на выходе усилителя 2 скачком появляется напряжение $-U_{\mu}/2$, а на выходе суммирующего усилителя 3 — напряжение $+U_{\mu}$. При подаче на вход сигнала обратной полярности схема работает аналогично. Согласно принятым масштабам напряжение $\pm (U_{\psi_0} - U_{\varphi_0}) = 1,0 \varepsilon$, а $U_{\mu} = 50 \varepsilon$. По уравнениям (12-28)—(12-32) с учетом рис. 12-8 составлена структурная схема моделирования релейной астатической системы (рис. 12-9).

При принятых численных значениях параметров в исследуемой системе возникают автоколебания, амплитуда и частота которых постоянны и не зависят от величины входного сигнала ψ , а целиком определяются параметрами системы. На рис. 12-10, а показана оциллограмма изменения регулируемой величины φ во времени при подаче

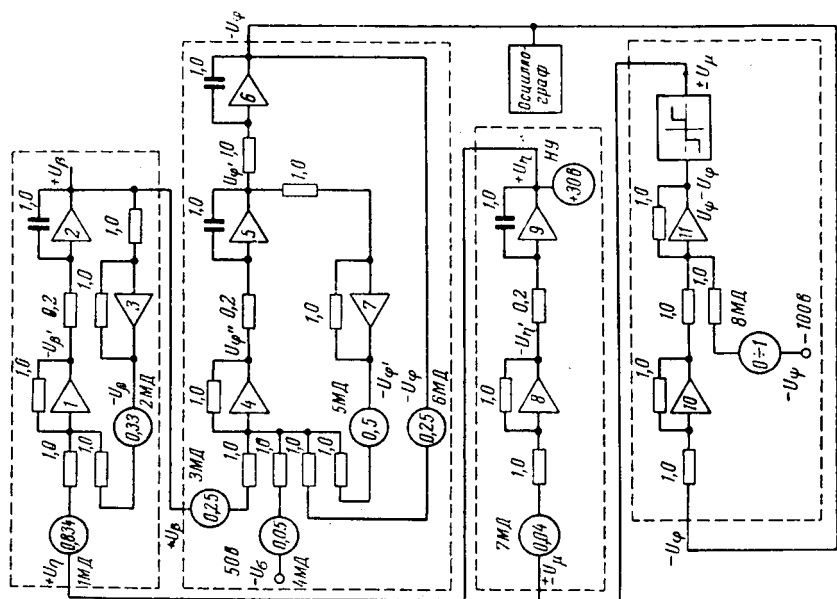
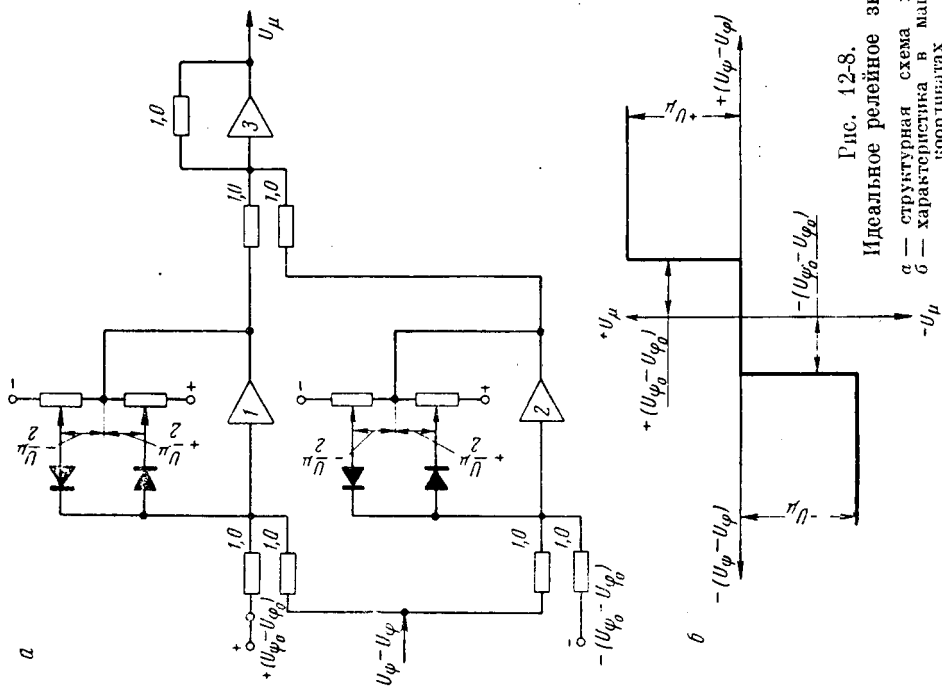


Рис. 12-9. Структурная схема для исследования нелинейной астатической системы

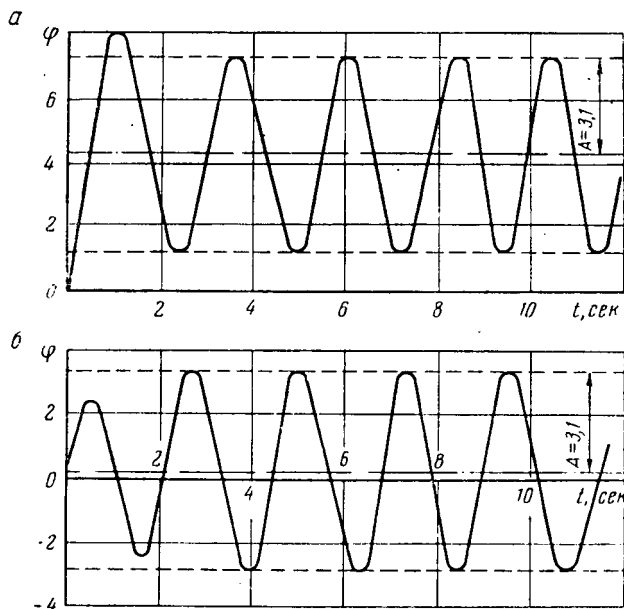


Рис. 12-10. Осциллограммы автоколебаний, полученные при моделировании нелинейной астатической системы

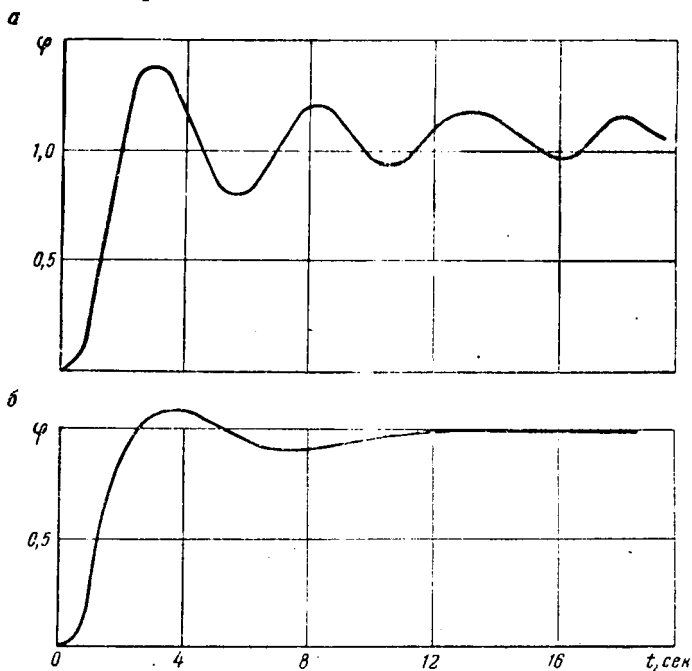


Рис. 12-11. Осциллограммы переходных процессов, полученные при моделировании нелинейной астатической системы

на вход системы ступенчатого воздействия $\psi = 4,5$. При изменении величины входного воздействия от 0 до 0,05 посредством изменения уставки делителя $8МД$ (см. рис. 12-9) регулируемая величина совершает автоколебания с той же амплитудой и частотой (рис. 12-10, б).

Поставим теперь задачу сделать систему устойчивой, а переходный процесс — аperiodическим. Изменим для этого коэффициент усиления k_2 электромашинного усилителя и величину B , т. е. постоянную времени, T_n , в уравнениях (12-25) и (12-26). На структурной схеме (см. рис. 12-9) это соответствует изменению уставки масштабных делителей $1МД$ и $7МД$. При этом на выходе усилителя 9 зададим напряжение начальных условий $+30$ в, что соответствует начальному значению $\eta = 1,5$.

На рис. 12-11, а показана кривая переходного процесса в системе при $k_2 = 1,25$ и $T_n = 4$ сек. Как видно, переходный процесс в системе имеет вид затухающих колебаний. Увеличение T_n до 13,5 сек при том же значении $k_2 = 1,25$ позволяет получить аperiodический переходный процесс (рис. 12-11, б). Таким образом, с помощью моделирующей машины без трудоемких вычислений получен удовлетворительный переходный процесс и определены параметры системы, при которых этот процесс может быть получен.

Контрольные вопросы

1. Какие применяются виды моделирования?
2. В чем состоит сущность физического и математического моделирования?
3. Какими способами можно осуществлять математическое моделирование?
4. В чем состоит сущность использования прямой аналогии и использования аналоговых вычислительных машин?
5. Какую подготовительную работу нужно выполнить, прежде чем набирать уравнения системы на аналоговой вычислительной машине?
6. Как перейти от реальных переменных к машинным переменным?
7. Как выбираются переходные масштабы?
8. Как набираются коэффициенты машинных уравнений?
9. Какие операции на модели соответствуют изменению реальных параметров системы?
10. В каком виде получаются результаты исследования на аналоговой вычислительной машине?

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

§ 13-1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

«Необходимость непрерывного наблюдения за автоматами со стороны человека — это нелепость современного этапа развития техники, получившего название автоматизации, нелепость, от которой кибернетика, надо надеяться, со временем избавит промышленность». Эти слова, принадлежащие английскому ученому — кибернетику Ст.Биру [6], являются свидетельством того, какие широкие перспективы технического прогресса заложены в развитии и внедрении в промышленность идей кибернетики.

Как самостоятельная наука кибернетика сформировалась в 1948 г. и ее основоположник — американский ученый Н. Винер — определил ее как науку об управлении и связи в животном и машине. Позже было дано более широкое определение: *кибернетика* — это наука, занимающаяся установлением общих принципов и законов управления объектами различной природы для достижения ими определенных целей на основе получения, передачи, переработки и использования информации [34]. Кибернетика занимается вопросами техники, биологии, физиологии, психологии, социологии, языкознания и пр.

В этой книге рассматривается приложение кибернетики к технике — техническая кибернетика.

Техническая кибернетика — это раздел науки, разрабатывающий теорию управления техническими системами, выполняющими сложные логические операции по выбору оптимальных режимов работы и приспособлению к изменяющимся внешним условиям и освобождающими человека от многих операций управления, требующих участия его высшей нервной деятельности.

Кибернетические системы автоматического управления являются основой комплексной автоматизации производственных процессов. Использование обычных систем автоматического управления и регулирования при этом не исключается, эти системы имеют свою область применения. Однако в большом числе случаев, когда обыкновенные системы оказываются бессильными, с задачами управления успешно справляются кибернетические системы.

При исследовании кибернетических систем автоматического управления, подвергающихся случайным воздействиям, аппарат дифференциальных уравнений оказывается недостаточным. Дополнительно

используются элементы теории вероятностей, статистической динамики, теории информации, алгебры логики.

Теория информации изучает количественные закономерности получения, передачи, обработки и хранения информации. Эта научная дисциплина, возникшая из практических задач теории связи, применительно к системам управления изучает вопросы передачи воздействий (информации) от одного элемента системы к другому. Между этими элементами могут находиться устройства, образующие канал связи. Теория информации изучает помехоустойчивость, пропускную способность каналов связи, способы кодирования информации, способы получения информации на фоне случайных помех.

Обычные системы автоматического управления описываются дифференциальными уравнениями, передаточными функциями, интегральными уравнениями и т. д.

Для описания сложных функций управления, содержащих логические и дискретные действия, применяются алгоритмы функционирования.

Алгоритмом функционирования называется совокупность правил или указаний, определяющих поведение системы управления. Алгоритм может представлять собой словесное описание последовательности действий элементов системы или математическую запись с применением специальной символики. Такая символика разработана в алгебре логики (см. § 13-5), а также в вычислительной технике для составления программ электронных вычислительных машин [21].

В последующих параграфах этой главы сжато излагаются основные положения теории вероятностей, статистической динамики и алгебры логики.

§ 13-2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Теория вероятностей — это математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений или процессов.

Случайными называются такие явления или процессы, которые при многократном повторении протекают каждый раз несколько иначе.

Случайные явления или процессы характеризуются случайными величинами. Так, например, при изготовлении на станке однотипных деталей их размеры будут несколько отклоняться от размеров, указанных на чертеже, причем предвидеть точную величину отклонения нельзя. При многократном точном измерении длины комнаты каждый раз будет получен несколько иной результат, причем точно предвидеть заранее изменение результата невозможно. Размер отдельной детали, результат одного измерения являются случайными величинами.

Случайной величиной называется величина, которая в ходе какого-либо процесса может принять одно из многих значений, заранее неизвестное.

Дискретными или *прерывными* называются случайные величины, которые могут принимать отдельные изолированные значения, заранее известные. Например, число выпавших очков при бросании игральной кости может принять одно из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6 и никакое другое.

Непрерывными называются случайные величины, которые могут принимать любое значение в определенных пределах. Такими величинами являются размеры деталей и результаты измерений длины комнаты в приведенных выше примерах.

Случайным событием называется любое явление, которое может произойти или не произойти. Примеры случайных событий: снятая со станка готовая деталь может иметь отклонение от размера по чертежу на 0,12 мм, но может иметь и другое отклонение; при бросании игральной кости сверху может оказаться тройка, но может оказаться и другое число.

Количественной оценкой возможности появления того или иного события является его вероятность. В некоторых случаях вероятность случайного события может быть заранее рассчитана. Например, если известно, что игральная кость изготовлена из однородного материала, то при ее бросании случаи появления сверху одного из шести чисел равновозможны или, как говорят, имеют равную вероятность. Так как возможных случаев шесть, то вероятность появления одного из чисел будет

$$P = \frac{1}{6}. \quad (13-1)$$

Вероятностью случайного события называется отношение количества благоприятных случаев к общему количеству случаев.

При решении практических задач определить вероятность путем рассуждений, приведенных выше, невозможно. В этом случае ее можно определить экспериментально. Если будем многократно бросать кость и записывать общее количество бросков n и количество появлений заданного количества очков m и время от времени будем находить отношение

$$P^* = \frac{m}{n}, \quad (13-2)$$

то заметим, что при увеличении количества бросков отношение (13-2) все ближе будет приближаться к $\frac{1}{6}$. При очень большом числе бросков это отношение станет сколь угодно близким к $\frac{1}{6}$. Отношение числа благоприятных событий m к общему числу опытов n называется *относительной частотой* или *статистической вероятностью* события.

По закону больших чисел при увеличении количества опытов статистическая вероятность может сколь угодно близко приближаться к истинной вероятности.

На этом основано экспериментальное определение вероятности. Производится по возможности большее число опытов и по выраже-

нию (13-2) определяется статистическая вероятность, которая приближенно принимается за истинную вероятность. Вероятность *достоверного* события, которое обязательно произойдет, равна единице ($P=1$). Вероятность *невозможного* события равна нулю ($P=0$). Вероятность случайного события всегда находится в пределах

$$1 > P > 0. \quad (13-3)$$

Введем понятия о сумме и произведении событий.

Суммой двух событий A и B называется событие C , состоящее в выполнении события A или события B или обоих вместе,

$$C = A + B.$$

Произведением двух событий A и B называется событие C , состоящее в совместном выполнении события A и события B ,

$$C = AB.$$

Случайные события делятся на независимые и зависимые, несовместные и совместные.

Независимыми называются случайные события, если появление события A не изменяет вероятности появления события B .

Зависимыми называются случайные события, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Условной вероятностью случайного события A называется вероятность случайного события A , вычисленная при условии, что произошло случайное событие B . Она обозначается $P(A/B)$.

Несовместными называются случайные события A и B , если они не могут произойти одновременно. Например, при бросании игральной кости сверху не могут появиться сразу два числа.

Вероятность несовместных случайных событий, т. е. вероятность того, что появится событие A или событие B , равна сумме вероятностей каждого события в отдельности

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (13-4)$$

Вероятность того, что несовместные случайные события появятся одновременно, равна нулю

$$P(AB) = 0.$$

Совместными называются случайные события, которые могут произойти (но не обязательно происходят) одновременно.

Вероятность совместных независимых случайных событий A и B

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B). \quad (13-5)$$

Вероятность совместных зависимых случайных событий A и B (A зависит от B)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(B)P(A/B). \quad (13-6)$$

Случайные величины могут быть описаны с помощью *статистических характеристик*, которые делятся на *вероятностные* и *числовые*.

Рассмотрим вероятностные характеристики случайных величин.

Предположим, что случайная величина X может принимать возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$. Суммарная вероятность появления всех возможных значений случайной величины равна единице. Вероятности появления каждого из возможных значений меньше единицы и в общем случае различны. Суммарная вероятность некоторым образом распределена между отдельными возможными значениями случайной величины. Если распределение вероятностей между возможными значениями случайной величины известно, то оказывается известным закон распределения случайной величины.

Законом распределения случайной величины называется зависимость между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Этот закон может быть представлен в различных формах. Простейшей формой представления закона распределения дискретных случайных величин является таблица

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 \dots & x_n \\ \hline P_i & P_1 & P_2 \dots & P_n \end{array}$$

Такую таблицу называют рядом распределения дискретной случайной величины. По этой таблице можно построить график, называемый многоугольником распределения дискретной случайной величины.

Непрерывную случайную величину таблицей представить нельзя, так как эта величина имеет бесчисленное множество возможных значений, заполняющих некоторый интервал величин.

Для непрерывных случайных величин закон распределения представляется в виде некоторой функции — *функции распределения*, которой называют вероятность случайного события, заключающегося в том, что случайная величина X будет меньше некоторого возможного значения x , т. е. вероятность выполнения неравенства ($X < x$) будет

$$F(x) = P(X < x). \quad (13-7)$$

Функцию распределения $F(x)$ иногда называют *интегральным законом распределения*. Функции распределения непрерывных случайных величин в подавляющем большинстве случаев практики непрерывны. Функции распределения можно применять и к дискретным величинам. Такая функция в этом случае является разрывной ступенчатой функцией, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины. Если функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X непрерывна и дифференцируема, то производная от функции распределения

$$f(x) = F'(x) \quad (13-8)$$

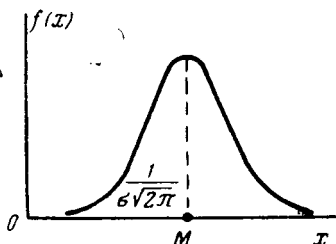
называется *дифференциальным законом распределения* или *плотностью распределения* непрерывной случайной величины. *Плотность*

распределения представляет собой предел средней вероятности на данном участке значений непрерывной случайной величины. Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть найдена из выражения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (13-9)$$

Понятие плотности распределения относится только к непрерывным случайным величинам.

Большое количество случайных величин подчинено так называемому нормальному закону распределения (закону Гаусса), для которого плотность распределения вероятности определяется из выражения



$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}, \quad (13-10)$$

где σ — среднее квадратичное отклонение случайной величины;

M — математическое ожидание случайной величины.

Рис. 13-1. Кривая нормального закона распределения

Кривая нормального закона распределения изображена на рис. 13-1. Существуют и другие законы распре-

деления (например, экспоненциальный, Пуассона, биномиальный).

Рассмотрим числовые характеристики случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i. \quad (13-11)$$

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание будет

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (13-12)$$

где $f(x)$ — плотность распределения случайной величины.

В терминах арифметики математическое ожидание приблизительно представляет собой среднее арифметическое $M(X)$ полученных в n опытах значений x_i случайной величины X

$$\tilde{M}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (13-13)$$

По аналогии с механикой, полагая, что вероятностям соответствуют массы, а случайным величинам расстояния до оси, математическое ожидание называют *первым начальным моментом*.

Центрированной случайной величиной $\overset{\circ}{X}$, соответствующей случайной величине X , называется отклонение случайной величины X от ее математического ожидания

$$\overset{\circ}{X} = X - M(X). \quad (13-14)$$

Математическое ожидание центрированной случайной величины (*первый центральный момент*) равно нулю

$$M(\overset{\circ}{X}) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)] P_i = 0. \quad (13-15)$$

Рассмотрим *второй центральный момент*, выражение которого имеет вид

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 P_i. \quad (13-16)$$

В этом выражении суммируются произведения квадратов центрированной случайной величины на соответствующие вероятности. Величина $D(X)$ представляет собой *дисперсию случайной величины*. Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины. Дисперсия характеризует рассеивание случайной величины.

Для характеристики случайной величины широко пользуются понятием *среднеквадратичного отклонения* $\sigma(X)$ случайной величины X , которое равно квадратному корню из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (13-17)$$

Выше рассматривались характеристики отдельной случайной величины. Однако при исследовании кибернетических систем автоматического управления приходится иметь дело не с одной, а с двумя и более случайными величинами, образующими систему случайных величин.

Рассмотрим систему, состоящую из двух случайных величин X и Y . Функцией распределения величин X и Y называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $(X < x)$ и $(Y < y)$

$$F(x, y) = P[(X < x)(Y < y)]. \quad (13-18)$$

Случайные величины, входящие в систему, могут быть независимыми и зависимыми. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если функция распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Математические ожидания случайных величин X и Y

$$\left. \begin{aligned} M(X) &= \sum_{i=1}^n x_i P_i; \\ M(Y) &= \sum_{j=1}^k y_j P_j. \end{aligned} \right\} \quad (13-19)$$

Эти математические ожидания являются первыми начальными моментами. Дисперсии случайных величин X и Y представляют собой вторые центральные моменты

$$\left. \begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 P_i; \\ D(Y) &= \sum_{j=1}^k [y_j - M(Y)]^2 P_j. \end{aligned} \right\} \quad (13-20)$$

Второй смешанный центральный момент называется корреляционным моментом, или моментом связи,

$$K(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [x_i - M(X)] [y_j - M(Y)] P_{ij}. \quad (13-21)$$

Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент характеризует не только связь между случайными величинами, но и их рассеивание. Если отклонение одной из величин от математического ожидания будет мало, то корреляционный момент будет мал, как бы тесно ни были связаны величины X и Y .

Для характеристики связи между случайными величинами X и Y независимо от рассеивания применяется коэффициент корреляции этих величин, который определяется из выражения

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)}, \quad (13-22)$$

где $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$ — среднеквадратичные отклонения случайных величин X и Y .

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты связи только линейной зависимости. Коэффициент корреляции для независимых случайных величин равен нулю.

Числовые характеристики, полученные выше, предполагают знание всех значений соответствующих случайных величин. При экспериментальном определении значений известным оказывается ограниченное число значений случайных величин. По ограниченному числу значений случайной величины можно определить приближенные числовые характеристики (оценки) по формулам, аналогичным приведенным выше [8].

Оценка математического ожидания определяется по выражению

$$\tilde{M}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (13-23)$$

Оценка дисперсии

$$\tilde{D}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i - \tilde{M}(X)]^2}{n-1}. \quad (13-24)$$

Оценка корреляционного момента

$$\tilde{K}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [x_i - \tilde{M}(X)][y_j - \tilde{M}(Y)]}{n-1}. \quad (13-25)$$

Оценка среднеквадратических отклонений

$$\tilde{\sigma}(X) = \sqrt{\tilde{D}(X)}; \quad \tilde{\sigma}(Y) = \sqrt{\tilde{D}(Y)}. \quad (13-26)$$

Оценка коэффициента корреляции

$$\tilde{r}(X, Y) = \frac{\tilde{K}(X, Y)}{\tilde{\sigma}(X)\tilde{\sigma}(Y)}. \quad (13-27)$$

По закону больших чисел приближенные оценки числовых характеристик с увеличением числа опытов неограниченно приближаются к истинному их значению. При ограниченном числе опытов можно вычислить так называемый доверительный интервал, который показывает величину возможной ошибки в определении числовых характеристик и вероятность того, что характеристика не выйдет за заданные пределы.

Доверительным интервалом называется интервал, ограниченный величиной ошибки $\pm \varepsilon$ от найденной приближенной оценки числовой характеристики случайной величины, в который с вероятностью β (доверительной вероятностью) попадет истинное значение числовой характеристики. Границы доверительных интервалов определяются методами, изложенными в специальной литературе [8].

§ 13-3. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайным (стохастическим) процессом называется совокупность значений случайной величины X , зависящих от времени t . При многократном повторении случайные процессы каждый раз протекают несколько иначе, причем заранее нельзя предвидеть, как именно. Случайные процессы называют также *случайными функциями*.

Случайные процессы при каждой конкретной реализации дают определенный уже не случайный процесс, который отличается от

других реализаций. Совокупность всех возможных реализаций и дает случайный процесс.

Основными числовыми характеристиками случайных процессов являются математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция.

Математическое ожидание случайного процесса найдем на основании следующих рассуждений. Рассмотрим случайный процесс в момент времени t_1 (рис. 13-2 и 13-3). Случайный процесс превратится при этом в случайную величину, которая в момент времени t_1 может принимать различные значения. Случайная величина, которая получается в фиксированный момент времени случайного процесса, называется *сечением случайного процесса* в этот момент времени.

Найдем математическое ожидание для сечений случайного процесса в моменты времени t_1, t_2, t_3 и т. д. Нанесем полученные точки

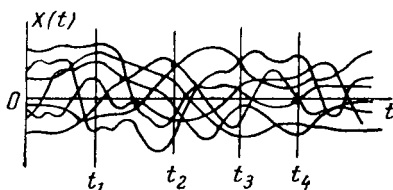


Рис. 13-2. Стационарный случайный процесс

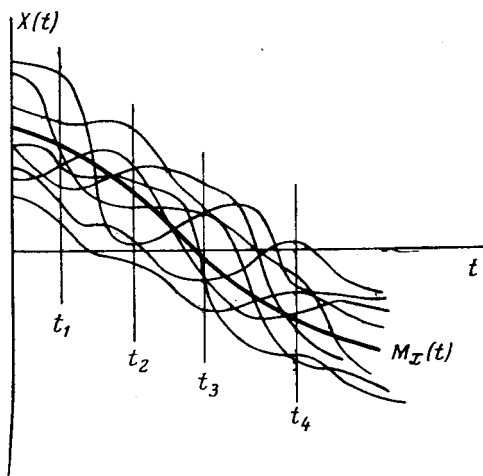


Рис. 13-3. Нестационарный случайный процесс

на график и соединим их плавной кривой. Полученная кривая представляет собой математическое ожидание $M_x(t)$ случайного процесса $X(t)$. На рис. 13-3 кривая математического ожидания случайного процесса нанесена жирной линией. На основании изложенного можно дать следующее определение.

Математическим ожиданием случайного процесса называется неслучайный процесс $M_x(t)$, который в каждый момент времени t равен математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса.

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, значение которой для каждого момента времени t равно дисперсии соответствующего сечения случайного процесса.

Извлекая квадратный корень из дисперсии, получим среднеквадратичное отклонение $\sigma_x(t)$ случайного процесса $X(t)$

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (13-28)$$

Рассмотрим два сечения случайного процесса $X(t)$ и $X(t + \tau)$, соответствующие моментам времени t и $t + \tau$. При малых значениях

т случайные величины (сечения) $X(t)$ и $X(t + \tau)$ будут тесно связаны друг с другом, они будут близки друг к другу. При увеличении интервала τ связь между случайными величинами $X(t)$ и $X(t + \tau)$ уменьшается. Степень зависимости между случайными величинами может быть охарактеризована их корреляционным моментом

$$R_x(t, \tau) = M \{ [X(t) - M_x(t)] [X(t + \tau) - M_x(t + \tau)] \}, \quad (13-29)$$

где M — знак математического ожидания.

Полученная корреляционная функция, зависящая от момента времени t и интервала τ , может быть определена следующим образом.

Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $R_x(t, \tau)$ двух моментов времени, которая для каждой пары моментов времени t и $t + \tau$ равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайного процесса. Корреляционная функция в общем случае зависит от промежутка времени τ между моментами времени t и $t + \tau$ и от положения момента t на оси времени.

Все случайные процессы можно разделить на стационарные и нестационарные.

Стационарным называется случайный процесс, статистические характеристики которого не меняются при изменении момента времени начала отсчета процесса. Процессы, рассматриваемые в отрезки времени, следующие друг за другом, оказываются идентичными, они имеют вид непрерывных случайных колебаний около некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер колебаний с течением времени существенно не меняются. Графическое изображение нескольких реализаций стационарного случайного процесса приведено на рис. 13-2.

Нестационарным называется случайный процесс, статистические характеристики которого меняются при изменении момента времени начала отсчета процесса (см. рис. 13-3).

Кибернетические системы автоматического управления очень часто работают в условиях, когда на их входы подаются воздействия, имеющие характер стационарных случайных процессов.

Для стационарного случайного процесса математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение являются постоянными величинами. В частном случае математическое ожидание стационарного случайного процесса может быть равным нулю.

Корреляционная функция стационарного случайного процесса зависит только от интервала времени τ и не зависит от положения начальной точки t этого интервала на оси времени

$$R_x(\tau) = M \{ [X(t) - M_x(t)] [X(t + \tau) - M_x(t)] \}. \quad (13-30)$$

Некоторые стационарные случайные процессы обладают эргодическим свойством.

Эргодическим называется стационарный случайный процесс, у которого статистические характеристики, полученные при обработке одной реализации достаточно большой продолжительности,

идентичны статистическим характеристикам, полученным при обработке множества реализаций той же общей продолжительности.

Это свойство в значительной степени упрощает исследование стационарных случайных процессов, так как суждение о процессе можно вынести по наблюдениям лишь над одной реализацией и вместо выражения (13-30), в котором рассматривается множество реализаций, можно воспользоваться выражением, использующим одну реализацию в течение интервала времени от $-T$ до T :

$$R_x(\tau) \approx \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [X(t) - M_x(t)] [X(t + \tau) - M_x(t)] dt. \quad (13-31)$$

Если рассматривать центрированный стационарный случайный процесс, для которого математическое ожидание $M_x(t) = 0$, то вместо выражения (13-31) получим

$$R_x(\tau) \approx \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dot{X}(t) \dot{X}(t + \tau) dt. \quad (13-32)$$

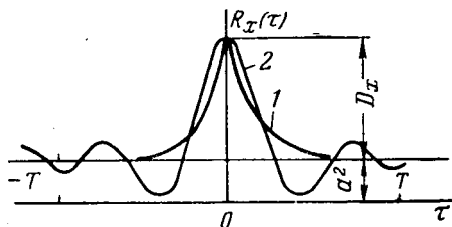


Рис. 13-4. Типичные кривые корреляционных функций

По выражению (13-32) значение корреляционной функции получается приближенным потому, что процесс рассматривается хотя и на достаточно

большом, но конечном интервале времени T . Корреляционная функция стационарного случайного процесса четная, симметричная относительно оси ординат

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau). \quad (13-33)$$

Типичные кривые корреляционных функций стационарных случайных процессов приведены на рис. 13-4. С возрастанием τ значения корреляционной функции монотонно (кривая 1) или с колебаниями (кривая 2) стремятся к постоянной величине a^2 , которая представляет постоянную составляющую процесса $X(t)$ и в частном случае может быть равна нулю.

Если корреляционная функция с возрастанием τ стремится к нулю, то соответствующий ей стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством. Если корреляционная функция стремится к постоянному числу a^2 , то стационарный случайный процесс эргодическим свойством не обладает.

Если $\tau = 0$, то выражение (13-29) примет вид

$$R_x(0) = M[X(t) - M_x(t)]^2 = D_x(t), \quad (13-34)$$

т. е. в этом случае корреляционная функция обращается в дисперсию случайного процесса. Часто пользуются нормированной

корреляционной функцией, которая в общем случае определяется из выражения

$$r_x(t, t + \tau) = \frac{R_x(t, t + \tau)}{\sigma_x(t) \sigma_x(t + \tau)}. \quad (13-35)$$

Для стационарного случайного процесса $\sigma_x(t) = \sigma_x(t + \tau)$, поэтому

$$\sigma_x(t) \sigma_x(t + \tau) = \sigma_x^2(t) = D_x(t) \quad (13-36)$$

и, следовательно,

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x(t)}. \quad (13-37)$$

При $\tau = 0$ $r_x(0) = 1$.

Связь между двумя случайными процессами выражается взаимной корреляционной функцией.

Для эргодических стационарных случайных процессов, стационарно между собой связанных, взаимная корреляционная функция выражается смешанным центральным моментом второго порядка

$$R_{xy}(\tau) = M \{ [X(t) - M_x(t)] [Y(t + \tau) - M_y(t + \tau)] \}$$

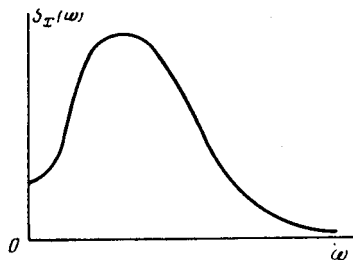


Рис. 13-5. Спектральная плотность стационарного случайного процесса

или аналогично выражению (13-32) для центрированных стационарных случайных процессов

$$R_{xy}(\tau) \approx \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) Y(t + \tau) dt. \quad (13-38)$$

Стационарный случайный процесс, имеющий вид непрерывных случайных колебаний около некоторого среднего значения, может быть разложен в бесконечный ряд гармонических составляющих различных частот. Это разложение называется *спектральным разложением*. График спектрального разложения строится в прямоугольных координатах, причем по оси абсцисс откладывается частота, а по оси ординат дисперсии, соответствующие различным частотам. Полученная кривая $S_x(\omega)$ называется *спектральной плотностью дисперсии* или просто спектральной плотностью стационарного случайного процесса (рис. 13-5). Площадь, ограниченная кривой $S_x(\omega)$, равна дисперсии стационарного случайного процесса. Таким образом, *спектральной плотностью стационарного случайного процесса* называется кривая $S_x(\omega)$, изображающая плотность распределения дисперсий по частотам.

Спектральная плотность $S_x(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ связана с корреляционной функцией этого процесса

преобразованиями Фурье следующим образом:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (13-39)$$

и, наоборот,

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (13-40)$$

Таким образом, если известна корреляционная функция стационарного случайного процесса, то можно найти спектральную плотность этого процесса, и наоборот.

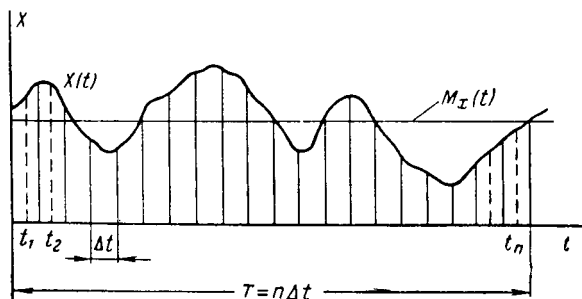


Рис. 13-6. Реализация стационарного случайного процесса

В условиях практики характеристики стационарного случайного процесса можно получить только путем обработки опытных данных. В эргодическом стационарном случайном процессе все характеристики могут быть получены по одной реализации этого процесса, если наблюдения велись в течение достаточно большого промежутка времени T .

Предположим, что реализация эргодического стационарного случайного процесса представлена записанной регистрирующим прибором кривой $X(t)$, изображенной на рис. 13-6.

Разобьем кривую на части, соответствующие равным интервалам времени Δt , на которых кривая изменяется сравнительно мало, и обозначим середины полученных участков через $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n$.

Найдем приближенное значение математического ожидания процесса. Оно представляет собой среднее арифметическое ординат кривой процесса на рассматриваемом участке

$$M_x(t) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i). \quad (13-41)$$

На рис. 13-6 математическое ожидание $M_x(t)$ изображено прямой, параллельной оси времени. Теперь случайный процесс можно центрировать, т. е. отсчитывать ординаты кривой процесса от прямой математического ожидания $M_x(t)$.

Найдем приближенное значение дисперсии рассматриваемого случайного процесса. Для этого возведем в квадрат все значения ординат $\dot{X}(t)$ центрированного процесса, просуммируем эти квадраты и разделим сумму на число ординат

$$D_x(t) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\dot{x}(t_i)]^2. \quad (13-42)$$

Вычислим для рассматриваемого стационарного случайного процесса корреляционную функцию, используя выражение (13-32). Учитывая, что для стационарного случайного процесса корреляционная функция симметрична, можно ограничиться только положительным промежутком времени $0 - T$, который придется учитывать не полностью, а только для значений t , при которых $t + \tau \leq T$, откуда интервал интегрирования

$$t = T - \tau. \quad (13-43)$$

На основании приведенных соображений вместо выражения (13-32) получим

$$R_x(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \dot{X}(t) \dot{X}(t+\tau) dt. \quad (13-44)$$

Интервал интегрирования T разбит на n участков длительностью Δt и, следовательно,

$$T = n \Delta t. \quad (13-45)$$

Выразим τ через дискретные величины, кратные Δt

$$\tau = m \Delta t = \frac{mT}{n}; \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (13-46)$$

тогда

$$T - \tau = T - \frac{mT}{n}. \quad (13-47)$$

Подставим эти значения в выражение (13-44), вместо знака интеграла напишем знак суммы и после несложных преобразований получим

$$R_x\left(\frac{mT}{n}\right) \approx \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \dot{X}(t_i) \dot{X}(t_{i+m}). \quad (13-48)$$

Вычисление значений корреляционной функции по выражению (13-48) производится по точкам для $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ до таких значений m , при которых корреляционная функция практически

обращается в нуль. По рассчитанным точкам в координатах $R_x(\tau)$, τ строится график корреляционной функции (см. рис. 13-4).

Аналогично может быть получено выражение для расчета по экспериментальным данным взаимной корреляционной функции

$$R_{xy}\left(\frac{mT}{n}\right) \approx \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \dot{X}(t_i) \dot{Y}(t_{i+m}). \quad (13-49)$$

Для построения корреляционной функции необходимо вычислить ее значения для десятков, а иногда и сотен точек. При обычных расчетах это очень трудоемкая работа, поэтому в настоящее время сконструированы специальные приборы, которые вычисляют корреляционную функцию автоматически. Такие приборы, известные под названием коррелографов, имеют различную конструкцию, однако наиболее совершенными являются электронные коррелографы.

Корреляционные функции можно также вычислять на обычных цифровых электронных машинах по специальной программе.

Для определения спектральной плотности $S(\omega)$ случайных процессов разработаны спектральные анализаторы, которые определяют спектральную плотность по экспериментальной записи случайного процесса на достаточно большом интервале времени.

Корреляционные функции и функции спектральной плотности учитывают линейные зависимости случайных процессов и пригодны для характеристики линейных систем. В настоящее время разработаны методы приближенного применения этих функций в нелинейных системах.

§ 13-4. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В некоторых случаях системы автоматического управления работают в условиях, когда на них кроме управляющих сигналов воздействуют случайные воздействия, помехи. Накладываясь на управляющие сигналы, помехи искажают результаты управления, нарушают его точность.

Для исследования влияния помех на точность управления необходимо установить закономерности прохождения случайных сигналов через систему автоматического управления.

Если на вход линейной системы с постоянными параметрами, называемой стационарной линейной системой, поступает сигнал $X(t)$ типа стационарной случайной функции, то выходной сигнал $Y(t)$ будет также представлять собой стационарную случайную функцию, но с характеристиками, отличными от характеристик входного сигнала.

Практический интерес представляет преобразование системой математического ожидания, корреляционной функции, спектральной плотности, дисперсии, среднеквадратичного отклонения стационарной

случайной функции. Ниже приводится без вывода правило преобразования спектральной плотности $S(\omega)$ стационарных случайных процессов (функций) линейными системами. Вывод этого правила приводится в [8, 21, 36].

При преобразовании стационарного случайного процесса линейной системой с постоянными параметрами ее спектральная плотность умножается на квадрат модуля амплитудно-фазовой частотной характеристики системы

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S(\omega). \quad (13-50)$$

Чтобы выполнить такое преобразование, нужно иметь аналитическое выражение спектральной плотности случайного процесса на входе.

К решению этой задачи можно подойти следующим образом. Записывают стационарный случайный процесс, поступающий на вход системы с помощью регистрирующего прибора, или составляют таблицу значений этого процесса в течение достаточно длительного промежутка времени и с помощью коррелографа или другим методом вычисляют корреляционную функцию входной случайной величины. Строят график корреляционной функции и аппроксимируют его приближенным аналитическим выражением. С помощью выражения (13-39) находят аналитическое выражение спектральной плотности случайного процесса на входе, по выражению (13-50) — спектральную плотность случайного процесса на выходе, а по выражению (13-40) — корреляционную функцию случайного процесса на выходе. Полагая в корреляционной функции выходного случайного процесса $\tau = 0$, находят дисперсию случайного процесса на выходе, которая представляет квадрат среднеквадратичного процесса на выходе.

Среднеквадратичное отклонение случайного процесса на выходе характеризует ошибку, которую вносят случайные помехи в управление.

Например, линейная разомкнутая система автоматического управления описывается дифференциальным уравнением

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) Y(t) = (b_0 p + b_1) X(t), \quad (13-51)$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ — соответственно входная и выходная стационарные случайные помехи системы.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики системы

$$W(j\omega) = \frac{b_0 j\omega + b_1}{a_0 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_2}. \quad (13-52)$$

Квадрат модуля амплитудно-фазовой характеристики получаем, умножая числитель и знаменатель выражения (13-52) на комплексные сопряжения выражения

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{b_0^2 \omega^2 + b_1^2}{a_0^2 \omega^4 + (a_1^2 - 2a_0 a_2) \omega^2 + a_2^2}. \quad (13-53)$$

Предположим, что стационарная случайная помеха $X(t)$ на входе записана, вычислена ее корреляционная функция и построен график (кривая 1 на рис. 13-4), для которого постоянная составляющая a^2 равна нулю.

Такая корреляционная функция приближенно может быть выражена формулой

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha^{1/2} |\tau|}, \quad (13-54)$$

где D_x — начальное значение корреляционной функции при $\tau = 0$,
равное дисперсии случайной помехи;

α — постоянное число;

τ — интервалы, на которых вычисляется корреляционная функция.

Подставляя в выражение (13-39) значение корреляционной функции из выражения (13-54), находим спектральную плотность случайной помехи на входе системы

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_x e^{-\alpha^{1/2} |\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (13-55)$$

Подставив в выражение (13-50) значения модуля амплитудно-фазовой характеристики из выражения (13-53) и спектральной плотности на входе системы из выражения (13-55), получим выражение для спектральной плотности помехи на выходе системы

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{b_0^2 \omega^2 + b_1^2}{a_0^2 \omega^4 + (a_1^2 - 2a_0 a_2) \omega^2 + a_2^2} \cdot \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (13-56)$$

По выражению (13-40) корреляционная функция помехи на выходе системы

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (13-57)$$

Полагая в выражении (13-57) для корреляционной функции $\tau = 0$ и учитывая также четность функции $S_y(\omega)$, найдем дисперсию помехи на выходе

$$D_y = R_y(0) = 2 \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (13-58)$$

Подставляем в выражение (13-58) значение $S_y(\omega)$ из выражения (13-56)

$$D_y = \frac{2D_x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b_0^2 \omega^2 + b_1^2}{a_0^2 \omega^4 + (a_1^2 - 2a_0 a_2) \omega^2 + a_2^2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega. \quad (13-59)$$

Интеграл можно вычислить, разложив предварительно подынтегральное выражение на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов.

Среднеквадратичная ошибка, вызываемая помехой, определяется по выражению

$$\sigma_y = \sqrt{D_y}. \quad (13-60)$$

В некоторых следящих системах случайная функция, поступающая на вход системы, является полезным сигналом, и задача системы управления состоит в том, чтобы на выходе с возможно большей точностью воспроизвести входную случайную функцию. К таким системам относятся, например, радиолокационные установки, следящие за целью.

В этих системах ошибка воспроизведения

$$\varepsilon(t) = X(t) - Y(t) \quad (13-61)$$

представляет собой случайную функцию, для оценки которой применяются обычные характеристики.

В связи с тем, что в промышленных условиях такие системы встречаются сравнительно редко, здесь они не рассматриваются. Подробно они рассмотрены в [36, 48]. При статистическом анализе нелинейных систем обычно пользуются приближенными методами, в случае слабых нелинейностей используют линейные методы, которые остаются справедливыми на некотором участке нелинейной характеристики [48].

Статистические методы дают возможность определить динамические характеристики управляемых объектов, когда другие способы оказываются не применимы. Динамические характеристики управляемых объектов экспериментально можно получить, подавая на вход ступенчатое, импульсное и гармоническое воздействия. Однако во многих случаях на вход объекта невозможно подать воздействие специального вида, так как это ведет к недопустимым в производственных условиях нарушениям технологического процесса или такие воздействия технически не осуществимы.

С помощью статистического метода можно экспериментально определить импульсную переходную функцию управляемого объекта, не нарушая нормального режима его работы. В основу этого метода положено справедливое для эргодических стационарных случайных процессов [36] соотношение

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^{\infty} R_x(\tau - t) k(t) dt, \quad (13-62)$$

где $R_{yx}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция между входным и выходным сигналами объекта;

$R_x(\tau - t)$ — корреляционная функция стационарного случайного сигнала на входе объекта;

$k(t)$ — импульсная переходная функция управляемого объекта.

В случае линейного объекта с одним входом и выходом для определения импульсной переходной функции необходимо записать случайные процессы, которые почти всегда имеют место на входе и выходе объекта, вычислить корреляционную функцию на входе и взаимную корреляционную на выходе и, наконец, решить интегральное уравнение (13-62).

Следует, однако, учитывать, что экспериментальное статистическое определение импульсной переходной функции выполняется далеко не просто. Для вычисления корреляционных функций необходим коррелограф. Графики корреляционной функции следует аппроксимировать аналитическими выражениями, которые затем подставить в уравнение (13-62). Интегральное уравнение в конечном виде не решается, а для его решения предложены приближенные методы, приведенные, например, в монографии [36].

§ 13-5. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

В системах автоматического управления для выполнения программы управления часто бывает необходимо осуществлять различные логические операции. Техническими средствами, с помощью которых могут осуществляться логические операции, являются обыкновенные электромагнитные реле и бесконтактные схемы, собранные на электронных лампах, полупроводниковых или магнитных элементах.

Для анализа и синтеза схем, предназначенных для выполнения логических операций, применяется математический аппарат алгебры логики. Алгебра логики оперирует с высказываниями. Каждое высказывание может быть либо истинным, либо ложным. Истинность высказывания обозначается «1», а ложность «0». Таким образом, алгебра логики есть алгебра двух чисел: 1 и 0. В схемах управления истинности высказывания соответствует замыкание цепи, которое обозначается символом «1», ложности высказывания соответствует размыкание цепи, которое обозначается символом «0».

Рассмотрим основные операции алгебры логики и их техническую реализацию.

Конъюнкция или умножение высказываний. Обозначается символами $D = A \wedge B \wedge C$ или $D = ABC$ и читается следующим образом: высказывание D истинно, если истинны все высказывания, т. е. и A , и B , и C . Поэтому логический элемент, с помощью которого выполняется конъюнкция или умножение, называется элементом «И».

На структурных схемах такой элемент обозначается прямоугольником, в который вписана буква «И» (рис. 13-7, а). Стрелками на входе показаны величины, которые перемножаются (количество входов равно количеству умножаемых величин). На выходе одна стрелка показывает выходную величину. Сигнал на выходе ($D = 1$) появляется только в том случае, если появляются сигналы на всех входах ($A = 1$, $B = 1$ и $C = 1$). На рис. 13-7, б показана одна из возможных реализаций элемента «И» на полупроводниковых диодах. Напряжение на выходе такой схемы появится в том случае,

когда будет подано напряжение на все входы и будут заперты все диоды D_1 . Выходное сопротивление значительно больше сопротивлений в цепи D_2 .

Дизъюнкция или сложение высказываний. Обозначается символами $D = A \nabla B \nabla C$ или $D = A + B + C$ и читается следующим образом: высказывание D истинно, если истинно высказывание A или B или C . Логический элемент, с помощью которого выполняется дизъюнкция или сложение, поэтому называют элементом «ИЛИ». Условное обозначение его и возможная реализация на полупроводниковых диодах изображены соответственно на рис. 13-8, *а* и *б*.

Отрицание высказывания или инверсия. Обозначается символом $B = \bar{A}$ и читается так: высказывание B истинно, если не истинно

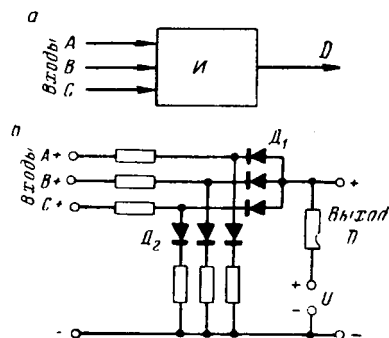


Рис. 13-7. Логический элемент «И»

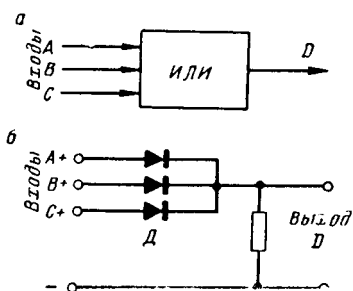


Рис. 13-8. Логический элемент «ИЛИ»

(ложно) высказывание A . Логический элемент, с помощью которого выполняется операция отрицания или инверсии, называется соответственно элементом «НЕ». Условное обозначение элемента «НЕ» и возможная реализация его на полупроводниковом диоде приведены на рис. 13-9, *а* и *б*. Здесь сопротивления $R_1 = R_2$, а при отсутствии напряжения на входе схемы на выход ее поступает напряжение $0,5U$. Когда на вход схемы подается встречное напряжение, превышающее U , выходное напряжение становится равным нулю.

С помощью логических элементов «И», «ИЛИ» и «НЕ» может быть собрана схема, реализующая любую сложную логическую операцию в системе управления. Имеются комбинированные логические элементы, реализующие две логические операции, например «ИЛИ — НЕ». С комбинированными логическими элементами можно ознакомиться по заводским каталогам.

Триггер — это устройство, имеющее два устойчивых состояния, одному из которых можно присвоить символ «1», а другому «0». Триггеры используются в качестве бесконтактного переключателя или в качестве элементов памяти. Реализация триггеров на различных элементах рассматривается в курсе промышленной электроники поэтому здесь конкретные схемы триггеров не приводятся.

Триггер может быть собран из логических элементов «ИЛИ» и «НЕ». Блок-схема такого триггера приведена на рис. 13-10.

Предположим, что на входах A и B и на выходе C сигналы отсутствуют. Система может находиться в этом устойчивом состоянии сколь угодно долго. Подадим на вход A сигнал — единицу и в результате, как это легко проследить по схеме, на выходе схемы C тоже получим единицу. Эта единица по линии обратной связи будет подана на вход элемента «ИЛИ₁», но никаких изменений в состоянии схемы это не вызовет. Снимем сигнал с входа A , но так как на другом входе элемента «ИЛИ₁» сигнал сохранился, состояние схемы не измени-

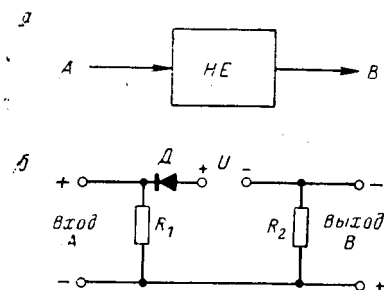


Рис. 13-9. Логический элемент «НЕ»

лось. Говорят, что схема «запомнила» единицу. Подадим теперь сигнал на вход B элемента «ИЛИ₂». На входе элемента «НЕ₂» появится единица, а на выходе единица исчезнет и

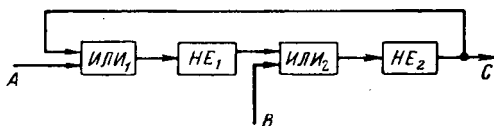


Рис. 13-10. Схема триггера, собранного из логических элементов «ИЛИ» и «НЕ»

появится нуль. Сигнал B стер из памяти схемы единицу. Нуль по цепи обратной связи будет передан на вход элемента «ИЛИ₁», однако состояние схемы не изменится. Не изменится оно и после снятия сигнала B с входа элемента «ИЛИ₂». Система находится в устойчивом равновесии.

Условное обозначение триггера как элемента памяти приведено на рис. 13-11. Эффект воздействия сигналов, подаваемых на входы A и B , такой же, как и в схеме, изображенной на рис. 13-10.

Например, построим схему управления на логических элементах (схема заимствована из [47]). Из бака (рис. 13-12) непрерывно вытекает жидкость. Наполнение бака производится через трубопровод, имеющий вентиль K . Система автоматического управления должна обеспечить открытие вентили K при снижении уровня жидкости ниже точки a и закрытие его в момент достижения уровнем точки b .

Для получения информации (сигнала) при достижении уровнем жидкости точек a и b установлены датчики A и B . Датчик A дает сигнал, когда уровень жидкости находится в точке a и выше. Датчик B дает сигнал, когда уровень жидкости находится в точке b и выше.

Составим алгоритм, который должна реализовать система автоматического управления:

1) если уровень жидкости находится ниже точки a (сигналы датчиков отсутствуют, $A = 0$, $B = 0$), то вентиль K должен открыться,

т. е. должен появиться сигнал на входе исполнительного электромагнита ($C = 1$);

2) если уровень находится между точками a и b ($A = 1, B = 0$), то положение вентиля изменять не нужно ($C = 1$);

3) если уровень поднялся до точки b ($A = 1, B = 1$), то вентиль должен закрыться ($C = 0$);

4) если уровень снова снизился и находится между точками a и b ($A = 1, B = 0$), то вентиль должен оставаться закрытым ($C = 0$).

Чтобы получить аналитическое выражение этого словесного алгоритма, составим предварительно таблицу значений сигналов на входе и выходе схемы (табл. 13-1) и проанализируем ее.

На 1, 3, 5-м и всех последующих нечетных тактах, когда значения

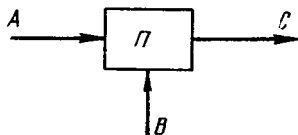


Рис. 13-11. Условное обозначение элемента памяти

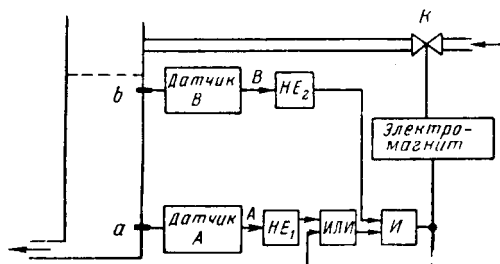


Рис. 13-12. Система автоматического регулирования уровня жидкости в баке

Таблица 13-1

Наименование сигналов	Состояние элементов схемы для тактов работы					
	1	2	3	4	5	6
A	0	1	1	1	0	1
B	0	0	1	0	0	0
C	1	1	0	0	1	1

сигналов A и B одинаковы, выходной сигнал имеет противоположное значение. Эта логическая зависимость описывается равнозначными выражениями

$$C = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

или

$$C = \overline{AB}. \quad (13-63)$$

На 2, 4, 6-м и всех последующих четных тактах сигнал B меняет значение, но это не вызывает изменения значения сигнала C . Таким образом, для сохранения неизменным значения сигнала C необходимо, чтобы сохранялись соотношения (13-63) или

$$C = \overline{B}C. \quad (13-64)$$

Чтобы система управления могла реализовать заданный алгоритм, следует произвести дизъюнкцию (сложить) выражения (13-63) и (13-64)

$$C = \overline{AB} + \overline{B}C. \quad (13-65)$$

Вынеся в выражении (13-65) за скобки величину $\bar{B}$, получим более простое выражение

$$C = (\bar{A} + C) \bar{B}, \quad (13-66)$$

представляющее собой аналитическое выражение алгоритма функционирования рассматриваемой системы автоматического управления.

Для реализации этого алгоритма необходимо иметь два элемента «НЕ» и по одному элементу «И» и «ИЛИ». Схема соединений логических элементов в системе управления показана на рис. 13-12.

Контрольные вопросы

1. Что называется технической кибернетикой?
2. Чем отличаются кибернетические системы автоматического управления?
3. Что называется алгоритмом?
4. Что называется случайным явлением, случайной величиной?
5. Какие случайные величины называются дискретными, непрерывными?
6. Что называется случайным событием?
7. Что называется вероятностью случайного события?
8. Что называется относительной частотой или статистической вероятностью?
9. Что называется суммой, произведением двух событий?
10. Что называется независимыми, зависимыми, несовместными, совместными событиями?
11. Что называется условной вероятностью случайного события?
12. Что называется законом распределения случайной величины, функцией распределения?
13. Что называется плотностью распределения?
14. Как определяется нормальный закон распределения?
15. Что называется математическим ожиданием, дисперсией, среднеквадратичным отклонением случайной величины?
16. Какие случайные величины называются независимыми, зависимыми?
17. Что такое коэффициент корреляции?
18. Что называется оценками числовых характеристик случайных величин?
19. Что называется доверительным интервалом?
20. Что называется случайным процессом?
21. Какой случайный процесс называется стационарным, нестационарным?
22. Что называется сечением случайного процесса?
23. Что называется математическим ожиданием, дисперсией, среднеквадратичным отклонением случайного процесса?
24. Что называется корреляцией и взаимной корреляционной функциями случайного процесса?
25. Что называется спектральной плотностью стационарного случайного процесса?
26. Какие процессы называются эргодическими?
27. Как получить экспериментально математическое ожидание, корреляционную функцию, дисперсию стационарного случайного процесса?
28. Как получить корреляционную функцию и среднеквадратичное отклонение на выходе линейной системы, если имеется запись случайного воздействия на входе и передаточная функция системы?
29. Как определить статистическим методом импульсную переходную функцию объекта?
30. Что является предметом алгебры логики?
31. Что такое конъюнкция, дизъюнкция, инверсия?
32. Какие логические элементы реализуют операции, перечисленные в предыдущем вопросе?
33. Для каких целей можно применить триггер?

КИБЕРНЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 14-1. ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Одним из основных направлений развития систем автоматического управления является усовершенствование средств автоматического управления отдельными объектами.

На ранней стадии автоматизации производственных процессов применялись относительно простые разомкнутые и замкнутые системы автоматического управления отдельными машинами (установками, станками и т. п.), обладающие невысокими быстродействием и точностью.

Со временем к автоматизируемым процессам стали предъявляться более высокие требования: увеличение скорости, точности; повышение производительности; улучшение качества продукции; экономия материалов, электроэнергии, топлива; высвобождение рабочей силы; улучшение условий труда; повышение надежности. Повышенные требования приводят к усложнению систем: вместо одноконтурных стали применяться сложные многоконтурные системы с различными обратными связями, вместо систем по отклонению или по возмущению — более совершенные комбинированные системы.

Однако самые совершенные и сложные системы обладают существенным недостатком: они требуют настройки и удовлетворительно работают при вполне определенных условиях. Если условия, при которых была произведена настройка, существенно изменились, работа системы автоматического управления ухудшается, либо становится совсем невозможной. Требуется новая настройка. Если условия меняются часто, требуются частые настройки. При этом нельзя гарантировать, что в каждый момент система настроена наилучшим образом и обеспечивает управление наиболее целесообразно. Системы со стабильной настройкой не могут вести автоматическое управление процессом, поддерживая какой-либо параметр на наибольшем или наименьшем уровне (например, производительность, расход топлива и т. п.).

Чтобы обеспечить наиболее целесообразное управление процессами при меняющихся условиях, используют самонастраивающиеся системы, которые обладают свойством автоматически приспосабливаться к меняющимся условиям работы, автоматически менять настройку таким образом, чтобы управляемый процесс протекал наиболее благоприятным образом. Самонастраивающиеся системы

применяются, как правило, для управления отдельными объектами как относительно простыми, так и весьма сложными. Однако эти системы достаточно сложны и их целесообразно применять только в тех случаях, когда без них обойтись нельзя. Во всех случаях, когда задача управления может быть решена с помощью обычных систем управления, самонастраивающиеся системы применять не следует.

Вторым направлением развития систем автоматического управления является переход от автоматизации отдельных объектов к комплексной автоматизации отдельных производственных процессов, группы процессов, цехов, предприятий.

Комплексная автоматизация производственных процессов является высшей формой автоматизации, обеспечивающей наибольший технико-экономический эффект. Это определяет одно из основных направлений технического прогресса в народном хозяйстве нашей страны. Для автоматического управления комплексно автоматизированными процессами применяют игровые системы.

На рис. 1-9 кибернетические системы классифицируются по способу функционирования. В настоящей главе рассмотрены главным образом принципы технической реализации таких систем. Один и тот же способ функционирования технически может быть реализован различными методами, каждый из которых может иметь преимущественную область применения в зависимости от характера управляемых объектов и проходящих через них воздействий.

В следующем параграфе рассматриваются оптимальные системы. Эти обыкновенные системы не относятся к кибернетическим, однако принципы оптимизации лежат в основе всех кибернетических систем, в которых оптимизация достигается автоматически. Эти системы не рассматривались ранее потому, что необходимо было предварительно ознакомить читателей с элементами математической статистики. В классификации на рис. 1-9 оптимальные системы не выделены, так как по способу функционирования они не отличаются от приведенных в ней обыкновенных систем.

§ 14-2. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Оптимальной называется система автоматического управления, которой приданы наилучшие качества по какому-либо показателю. Например, система, оптимальная по быстродействию, осуществляет наиболее быстрый переход из одного установившегося состояния в другое; система, оптимальная по установившейся погрешности, обеспечивает наивысшую в данных условиях точность управления объектом; системы, оптимальные по среднеквадратичному отклонению, обеспечивают наименьшую среднеквадратичную погрешность при случайных воздействиях. Системы могут быть оптимальными по затратам энергии, по производительности, по качеству продукции, по надежности и по целому ряду других показателей.

Для каждой конкретной оптимальной системы определяется и конкретный критерий оптимальности.

Критерием оптимальности называется числовая величина, зависящая от параметров системы управления или от программы, по которой изменяется управляющая величина на входе системы. Критерий оптимальности составляется так, чтобы для получения удовлетворительных результатов управления нужно было бы его минимизировать.

Критерий оптимальности выражается в какой-либо математической форме. Для системы, оптимальной по быстродействию, критерий оптимальности представляет собой время переходного процесса. Для системы, оптимальной по установившейся точности, критерием оптимальности может служить минимум ошибки управления, выраженный интегралом

$$I = \int_0^{\infty} x^2(t) dt,$$

где $x(t)$ — отклонение управляемой величины от заданного значения.

Величина I , зависящая от выбора функции $x(t)$, называется *функционалом*. Критерием максимальной точности системы может рассматриваться также минимум статической ошибки при максимальном внешнем воздействии или минимум среднеквадратичной ошибки при случайном воздействии. Функционал обычно составляется так, чтобы оптимальности системы всегда соответствовал бы минимум функционала.

Обеспечение оптимизации одного из качеств системы обязательно сопровождается ограничениями других ее качеств. При достижении максимальной точности может быть задано ограничение стоимости, внешних возмущений. При получении максимального быстродействия ограничиваются мощность, скорость, ускорения привода.

При синтезе оптимальных систем ставится задача получить наилучшие показатели качества с учетом заданных ограничений.

При оптимизации систем автоматического управления приходится решать задачи двух видов: оптимизация программы управления и оптимизация передаточной функции системы управления.

Оптимизация программы управления состоит в том, что она находится в результате расчета по какому-либо критерию оптимальности. Структура и параметры системы управления при этом считаются заданными и не меняются.

Оптимизация передаточной функции системы управления заключается в синтезе структуры и выборе параметров системы управления, обеспечивающих оптимизацию какого-либо показателя качества при ограничении всех остальных.

Предложено несколько способов оптимизации передаточных функций. В их основе лежат следующие математические методы: 1) классические вариационные методы; 2) принцип максимума Понтрягина; 3) метод динамического программирования.

Эти методы достаточно сложны и требуют трудоемких вычислений. Поэтому предпочтение отдается применению вычислительных машин с использованием специально для них разработанных методов.

Оптимизация передаточных функций при учете реальных ограничений приводит, как правило, к введению в систему управления нелинейных элементов. В целом ряде случаев на полезный сигнал, поступающий на вход системы управления, накладываются случайные помехи, которые этот сигнал искажают. Возникает задача рассчитать оптимальную систему управления таким образом, чтобы искажения сигнала были минимальными. Очень удобным критерием оптимальности при наличии случайных помех является критерий минимума среднеквадратичной ошибки при одновременном действии полезного сигнала и помех.

Задачи оптимизации систем могут быть различными по сложности.

При наиболее простой задаче система управления задана линейным дифференциальным уравнением; полезный сигнал меняется медленно и его частотный спектр расположен в низкочастотной области, а стационарные случайные помехи имеют достаточно высокую частоту. Необходимо выбрать параметры системы так, чтобы минимизировать среднеквадратичную ошибку на выходе, вызванную случайной помехой, т. е. минимизировать дисперсию помехи на выходе. Задача эта решается следующим образом. Имея запись стационарной случайной помехи на входе, методом, изложенным в § 13-4, находим дисперсию этой помехи на выходе по формуле (13-59). Затем находим значения параметров, при которых дисперсия будет минимальной. При достаточно простом выражении (13-59) оно интегрируется, а затем, чтобы найти минимум дисперсии, полученное выражение дифференцируется по изменяемым параметрам, и производные приравниваются нулю. В рассмотренном случае производится подавление высокочастотных помех, что не сказывается существенным образом на точности воспроизведения медленно меняющегося низкочастотного управляющего сигнала.

Более сложной является задача, когда требуется найти структуру и значения параметров системы, при которых на выходе будет получен минимум среднеквадратичной ошибки при условии, что управляющий сигнал и помехи представляют собой стационарные случайные функции с известными вероятностными характеристиками. В результате решения требуется найти передаточную функцию замкнутой системы, которая при заданных ограничениях обеспечит получение минимума среднеквадратичной ошибки. Метод решения этой задачи предложил американский математик Н. Винер.

Поскольку в горной и других отраслях промышленности задачи в такой постановке не встречаются, этот метод здесь не излагаем. Н. Винер решал эту задачу применительно к управлению огнем зенитной артиллерии. Ознакомиться с этим методом можно в [36].

Напомним, что оптимальные системы не являются кибернетическими, так как они не в состоянии приспособливаться к изменяющимся условиям работы и при неверном расчете или настройке не обеспечивают минимума критерия оптимальности.

§ 14-3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ (САМООПТИМИЗИРУЮЩИЕСЯ) СИСТЕМЫ

Экстремальными называются кибернетические системы автоматического управления, обеспечивающие отыскание и поддержание таких наивыгоднейших управляющих воздействий на входе управляемого объекта, при которых выходная величина управляемого объекта достигает наибольшего или наименьшего (экстремального) значения (например, максимальная производительность, наименьший расход топлива и т. п.).

Одной из особенностей экстремальных систем по сравнению с обычными системами является принципиально более сложный характер обратной связи.

Другая особенность состоит в том, что если в обычных системах процесс регулирования сводится к ликвидации рассогласования между заданной и регулируемой величинами, причем направление изменения управляющего воздействия для уменьшения рассогласования в каждый данный момент очевидно, то в экстремальных системах направление изменения управляющего воздействия для получения экстремального значения управляемой величины неизвестно.

Это направление определяется в процессе автоматического поиска, являющегося наиболее существенной и характерной особенностью экстремальных систем. Поиск состоит в том, что система изменяет управляющее входное воздействие на некоторую величину и анализирует полученное значение управляемой величины. По результатам анализа производится изменение входной величины еще на один шаг в том или другом направлении и т. д. Таким образом, система путем попыток и проб находит требуемое значение управляемой величины.

Анализ регулируемой величины производится в цепи обратной связи, содержащей для этого устройства логического действия, являющиеся элементами цифровых вычислительных машин, счетная функция которых отодвигается на второй план, а на первый план выдвигается способность машины к выполнению логических операций. При этом устройства обратной связи должны быть достаточно просты и надежны.

Экстремальные системы целесообразно применять в тех случаях, когда управляемый объект или система имеет характеристику с явно выраженным экстремумом, который в зависимости от внешних условий может смещаться (рис. 14-1, а). Если при изменении внешних условий экстремум не изменяется или изменяется только по величине, наступая при неизменном значении входного управляющего сигнала (рис. 14-1, б), то применение экстремальной системы нецелесообразно, поскольку экстремальное значение выходной регу-

лируемой величины может быть найдено при настройке, так что необходимость автоматического поиска экстремума отпадает.

В настоящее время нельзя дать полный обзор возможностей применения экстремальных систем, однако в самых различных областях техники уже сформулированы задачи, которые решаются или могут решаться такими системами. Рассмотрим несколько примеров.

Угольный комбайн. Основными показателями работы угольного комбайна являются качество выдаваемого угля, которое определяется количеством угольной мелочи — штыба, и производительность, которая определяется мощностью двигателя комбайна и крепостью угля. Чем крепче уголь в пласте, тем при неизменной мощности двигателя меньше скорость подачи и, следовательно, меньше

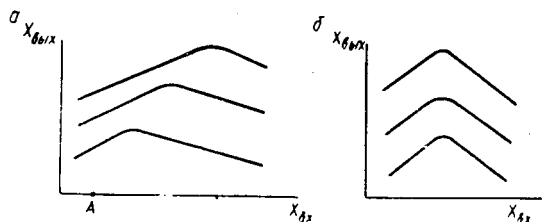


Рис. 14-1. Экстремальные характеристики управляемых объектов

производительность. Для получения минимального количества штыба каждой скорости подачи должна соответствовать вполне определенная скорость резания. При нарушении этого соответствия резко возрастает измельчение угля. Задачей самонастраивающейся экстремальной системы является поддержание максимальной производительности комбайна при ограниченной мощности приводного двигателя путем регулирования скорости подачи при изменении крепости пласта и изменение скорости резания при уменьшении скорости подачи для обеспечения минимального измельчения угля.

Флотационная установка. Показателями работы флотационной установки являются качество обогащенного концентрата и количество полезного ископаемого, которое уходит в отходы. Эти показатели зависят от соотношения твердого обогащаемого вещества и воды и количества флотореагента, поступающих во флотационную камеру. Задачей экстремальной системы является обеспечение максимального содержания полезного ископаемого в концентрате и минимального в отходах. Система должна автоматически менять входные параметры с тем, чтобы поддерживать наивыгоднейший режим работы установки.

Доменная печь. Одним из основных показателей хода доменного процесса является скорость схода шихты, т. е. скорость, с которой понижается верхний уровень шихты. Чем больше производительность печи при нормальной работе, тем выше скорость схода шихты.

Задачей экстремальной системы является обеспечение максимальной скорости схода шихты путем изменения входных параметров: давления, температуры и влажности, подаваемого в печь воздуха, давления ковшникового газа, количества и состава подаваемой шихты и др.

Металлорежущий станок. Показателем производительности металлорежущего станка является вес стружки, снимаемой резцом в единицу времени. Задачей экстремальной системы является обеспечение снятия стружки максимального веса при условии, что температура резца не превышает заданной величины.

Известны также и многие другие возможности применения экстремальных систем.

Практически экстремальные системы могут быть осуществлены по разным принципиальным схемам. Общим для всех схем является элемент, измеряющий величину, экстремальное значение которой

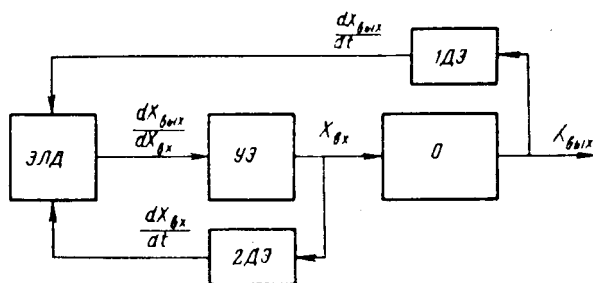


Рис. 14-2. Блок-схема экстремальной системы с прямым использованием производной

требуется поддерживать. Устройство такого измерительного элемента зависит от физической природы измеряемой величины; иногда это может быть вычислительное устройство, но у самых различных устройств на выходе должно получаться напряжение, пропорциональное измеряемой величине. В остальной части различные схемы экстремальных систем могут сильно отличаться друг от друга.

Рассмотрим некоторые возможные принципы построения экстремальных систем.

Экстремальные системы с прямым использованием сигнала по производной. Блок-схема такой системы приведена на рис. 14-2. Выходная величина $X_{\text{вых}}$ управляемого объекта подается на дифференцирующий элемент 1ДЭ, на выходе которого получается производная по времени выходной величины $dx_{\text{вых}}/dt$. Входная величина $X_{\text{вх}}$ подается не только в объект, но и в дифференцирующее устройство 2ДЭ, на выходе которого получается производная по времени входной величины $dx_{\text{вх}}/dt$. Обе производные поступают в элемент логического действия ЭЛД, который дает на выходе отношение первой производной ко второй $dx_{\text{вых}}/dx_{\text{вх}}$, поступающее на вход управляющего элемента УЭ.

Предположим, что входная величина $X_{вх}$ увеличивается начиная с точки A (см. рис. 14-1, a). Выходная величина объекта, работающего на одной из характеристик, также возрастает. Производные по времени входной и выходной величин положительны, поэтому положительной оказывается и производная выходной величины по входной $dx_{вых}/dx_{вх}$. При этом управляющий элемент продолжает увеличивать входную величину $X_{вх}$. Когда выходная величина достигнет максимума, производные выходной величины по времени и по входной величине будут равны нулю ($dx_{вых}/dt$ и $dx_{вых}/dx_{вх} = 0$), однако управляющий элемент на это не реагирует.

При дальнейшем возрастании входной величины выходная начинает убывать, производные выходной величины по времени и по входной величине становятся отрицательными, т. е. $dx_{вых}/dt < 0$, $dx_{вых}/dx_{вх} < 0$. Когда производная $dx_{вых}/dx_{вх}$ станет по абсолютному значению достаточно большой, чтобы быть выделенной из фона помех, управляющий элемент реверсирует направление изменения входной величины $X_{вх}$, которая начнет уменьшаться. Изменение знака производной может реализоваться переменной полярности напряжения, подаваемого на вход управляющего элемента, что и вызывает реверс направления изменения входной величины. Входная величина уменьшается до тех пор, пока выходная величина не пройдет максимум в обратном направлении и знак производной станет положительным, что при определенном значении производной вызовет реверс управляющего элемента.

Таким образом, система будет совершать колебания около максимального значения выходной величины и если максимум по каким-либо причинам переместится в другое место, система отыщет его и выходная величина будет колебаться около него. Частота колебаний зависит от скорости изменения входной величины и величины зоны поиска. Последнюю нельзя сделать очень малой, так как величина производной, вызывающая реверс управляющего элемента, должна быть достаточно большой и превышать уровень помех настолько, чтобы они не могли вызвать ложного реверса. С увеличением зоны поиска среднее значение выходной величины уменьшается и отличается от максимального значения на большую величину.

Недостатком системы с прямым использованием сигнала по производной является наличие в ней дифференцирующих блоков, которые увеличивают высокочастотные помехи, вносящие большие ошибки в работу системы и делающие иногда работу системы невозможной.

Чтобы исключить дифференцирующие блоки, были созданы системы, использующие не величину производной и ее знак, а только знак производной. Для определения знака производной дифференцирующие блоки не нужны, так как производная заменяется отношением конечных приращений

$$\frac{dx_{вых}}{dx_{вх}} = \frac{\Delta x_{вых}}{\Delta x_{вх}},$$

которые могут быть получены путем сравнения соседних значений.

Одна из возможных систем с определением знака производной рассматривается ниже.

Системы с запоминанием экстремума. Особенностью таких систем является то, что в них по достижении управляемой величиной экстремального значения оно запоминается и, если вследствие изменения входной величины в дальнейшем происходит уменьшение управляемой величины, система реверсирует изменение входной величины и приближает таким образом управляемую величину к экстремальному значению. Блок-схема экстремальной системы с запоминанием экстремума приведена на рис. 14-3, а.

Предположим, что управляющий элемент $УЭ$ изменил значение входной величины объекта $О$ в некотором направлении. Выходная и входная величины управляемого объекта подаются на вход вычислительного устройства $ВУ$, которое определяет точку статической характеристики объекта и преобразовывает значения выходной величины в напряжение. Напряжение с выхода $ВУ$ подается в запоминающее устройство $ЗУ$ и в элемент сравнения $ЭС$. Последний сравнивает напряжения, поступающие с вычислительного и запоминающего устройств. Если эти напряжения одинаковы, то управляющий элемент производит изменение входной величины объекта в том же направлении и система продолжает работать, как описано выше.

После прохода экстремума выходная величина начинает уменьшаться и с выхода вычислительного устройства на запоминающее устройство и элемент сравнения подается соответственно меньшее напряжение. Однако запоминающее устройство сохраняет напряжение, соответствующее экстремальному значению выходной величины, и подает это напряжение на элемент сравнения. Текущее напряжение оказывается меньше экстремального и элемент сравнения реверсирует управляющий элемент $УЭ$, а он изменяет входную величину в противоположном направлении. Одновременно элемент сравнения подает импульс на запоминающее устройство, которым стирается запомненное экстремальное значение, и напряжение на выходе $ЗУ$ становится снова пропорциональным текущему значению выходной величины. При проходе экстремума в обратном направлении его значение запоминается, система реверсируется и весь цикл

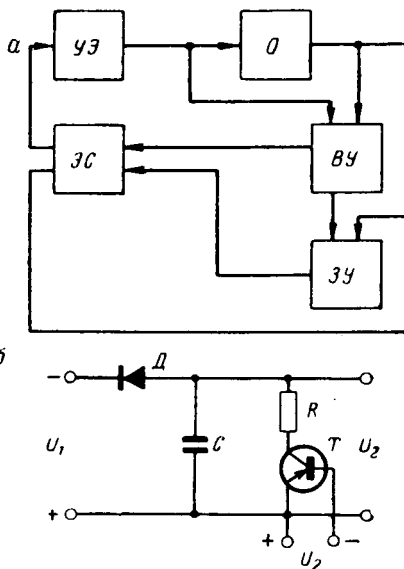


Рис. 14-3. Блок-схема системы с запоминанием экстремума и схема запоминающего устройства

повторяется. Система обеспечивает колебание выходной величины в окрестностях экстремума.

Одна из возможных схем устройства, запоминающего экстремум, приведена на рис. 14-3, б. На вход этого устройства подается напряжение U_1 , пропорциональное текущему значению управляемой величины. Выходное напряжение U_2 подается на элемент сравнения. От элемента сравнения к транзистору подается напряжение U_3 . Когда управляемая величина увеличивается, то увеличивается напряжение U_1 и конденсатор C заряжается. После прохода экстремума напряжение U_1 уменьшается, однако конденсатор не разряжается, так как этому препятствует диод D , и на выходе остается напряжение U_2 , пропорциональное экстремальному значению управляемой величины. После реверса управляющего элемента с элемента

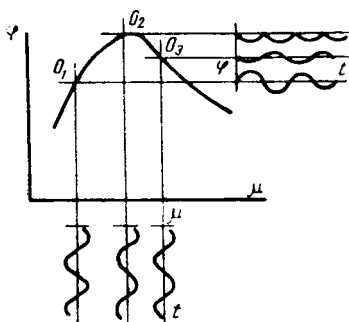


Рис. 14-4. Действие непрерывного поискового сигнала

сравнения подается напряжение U_3 , которое открывает транзистор T , в результате чего конденсатор разряжается через транзистор и сопротивление R . Напряжение U_2 снова становится равным входному напряжению U_1 . Запоминающее устройство готово к проходу через экстремум в обратном направлении.

Экстремальные системы с непрерывным поисковым сигналом или системы с модулирующими колебаниями. Эти системы отличаются тем, что на входную величину с помощью специального модулирующего устройства накладываются синусоидальные колебания,

благодаря чему система находится в режиме вынужденных колебаний с относительно небольшой амплитудой. Одновременно происходит также изменение входной величины, вызывающее перемещение рабочей точки по характеристике объекта.

Из рис. 14-4 видно, что при одной и той же фазе колебаний входной величины фаза колебаний выходной величины зависит от того, с какой стороны от максимума находится режим работы системы. При прохождении режима работы через точку максимума фаза меняется на обратную. Изменение фазы улавливается фазовым дискриминатором и преобразуется в изменение полярности управляющего тока, в соответствии с которой система изменяет входную величину так, чтобы приблизить режим работы к оптимальному.

Недостатками системы с модуляцией является необходимость компенсации сдвига фазы колебаний, вызываемого инерционностью элементов, которая в реальных устройствах всегда имеется (на рис. 14-4 изображено преобразование фазы в безынерционном объекте регулирования). Кроме того, сложным оказывается и устройство фазовых дискриминаторов для низких частот (доли герца), которые целесообразно применять для модуляции входной величины.

Экстремальные системы шагового типа. Эти системы отличаются тем, что входная величина изменяется дискретно — шагами. Блок-схема такой системы приведена на рис. 14-5. Вычислительное устройство *ВУ* определяет значение выходной величины, соответствующее данному значению входной величины. Найденное значение выходной величины подается на запоминающее устройство *ЗУ* и на элемент сравнения *ЭС*. Генератор импульсов подает командный импульс, под действием которого элемент сравнения дает команду на управляющий элемент, а тот изменяет входную величину на один шаг. При этом значение выходной величины, полученное от вычислительного устройства, сбрасывается, но оно остается в запоминающем устройстве. После окончания шага входной величины вычислительное устройство определяет новое значение выходной величины и передает его в элемент *ЭС* и устройство *ЗУ*. В элементе *ЭС* оно сравнивается с предыдущим значением выходной величины, переданным с запоминающего устройства *ЗУ*. Если зафиксировано увеличение выходной величины, то после подачи импульса генератором *ГИ* следующий шаг производится в том же направлении. Если отмечено уменьшение выходной величины, то элемент сравнения дает команду на реверс управляющего элемента и входная величина изменяется на один шаг в противоположном направлении, приближая входную величину к экстремальному значению. Системы шагового типа могут применяться для управления объектами со значительным запаздыванием.

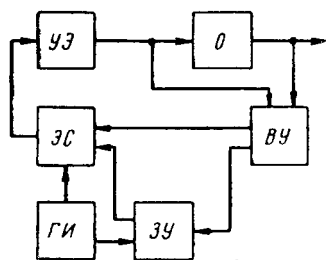


Рис. 14-5. Блок-схема экстремальной шаговой системы

Все рассмотренные экстремальные системы при некоторых условиях могут потерять устойчивость. Это возможно в тех случаях, когда изменение характеристики объекта происходит быстрее поисковых операций системы. Потеря устойчивости выражается в том, что входная величина изменяется в направлении, не приближающем, а удаляющем выходную величину от экстремального значения. Для предотвращения потери устойчивости применяются стабилизирующие устройства, в качестве которых часто применяются коммутаторы поверочных реверсов. Стабилизирующий коммутатор через определенное число шагов (3; 5 или больше) производит поверочный реверс управляющего элемента независимо от команды элемента сравнения. При этом все команды сбрасываются и после реверса система начинает искать экстремум снова. Поверочный реверс позволяет прервать ошибочный процесс поиска экстремума, если он возник, и восстановить правильное функционирование системы.

Имеются системы, у которых экстремальное значение выходной величины зависит не от одной, а от нескольких входных величин. Системы управления оказываются в этом случае сложнее. Основные принципы их построения подробно рассмотрены в [13, 43].

К экстремальным относятся также самоорганизующиеся системы, которые отличаются тем, что под действием изменяющихся внешних воздействий они автоматически меняют структуру изменяемой части управляющего устройства с целью сохранения минимума заданного критерия оптимальности.

К самоорганизующимся относятся системы с самонастраивающимися корректирующими устройствами, у которых меняется структура этих устройств [21]. Самоорганизующиеся системы не получили еще широкого распространения в технике и используются пока главным образом как модели сложных биологических и общественных систем.

§ 14-4. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ОБУЧЕНИЯ

Системы автоматического обучения можно разделить на три группы: самообучающиеся, обучаемые и обучающие.

Самообучающимися называются такие системы, в которых способ функционирования для отыскания оптимального режима работы

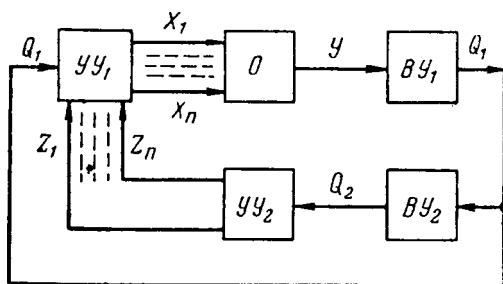


Рис. 14-6. Структурная схема самообучающейся системы

управляемого объекта автоматически целенаправленно совершенствуется по мере накопления в системе опыта управления. В процессе самообучения система, постепенно совершенствуясь, находит неизвестный при конструировании способ функционирования, являющийся наилучшим с точки зрения оптимальности.

При этом в окружающей среде отсутствует какое-либо обучающее устройство. Самообучение системы происходит на основании анализа результатов управления и улучшения их в заданном направлении.

Структурная схема одного из возможных вариантов самообучающейся системы приведена на рис. 14-6. Назначение системы состоит в нахождении и поддержании минимального значения критерия оптимальности Q_1 (например, стоимости единицы продукции, к. п. д. установки и т. п.). Из-за отсутствия достаточной информации о характеристиках объекта O при проектировании системы минимальное значение величины Q_1 и наилучший метод поиска ее минимума неизвестны.

Выходная величина Y управляемого объекта O подается на вычислительное устройство $ВУ_1$, которое вычисляет величину Q_1 . Эта величина подается на управляющее устройство $УУ$, которое осуществляет поиск ее минимума, причем, вероятно, не наилучшим способом. Одновременно величина Q_1 подается на вычислительное

устройство $ВУ_2$, которое готовит информацию Q_2 для управляющего устройства $УУ_2$, изменяющего закон функционирования управляющего устройства $УУ_1$ в направлении улучшения поиска минимума критерия оптимальности. Управляющее устройство $УУ_2$ для изменения структуры или алгоритма поиска воздействует на управляющее устройство $УУ_1$ величинами $Z_1 — Z_n$. Последнее в процессе отыскания оптимального режима воздействует на объект величинами $X_1 — X_n$. С течением времени по мере накопления опыта система улучшает закон функционирования, находит и удерживает оптимальный режим работы объекта.

Если характеристики объекта стабильны, то после отыскания оптимального режима самообучающаяся система управления может быть снята и заменена более простой системой, которая будет осуществлять найденный закон управления. Развитие самообучающихся систем находится в начальной стадии, но очевидно, что в будущем они могут получить значительное распространение для управления объектами, о характеристиках которых и о возможных условиях работы предварительно нельзя получить достаточно полную информацию.

Обучаемыми называются такие системы, которые для нормального функционирования в процессе работы накапливают опыт, получая обучающее воздействие извне: либо со стороны человека-оператора, либо со стороны автоматического обучающего устройства, не входящего в состав обучаемой системы. К обучаемым относятся системы, содержащие управляющую машину, которая следит за работой человека, ведущего управление. После запоминания достаточно большого количества ситуаций управление передается машине, которая действует в соответствии с накопленным опытом.

К обучаемым относятся также классифицирующие машины, предназначенные для распознавания различных образов, например печатных знаков и звуков, а также для медицинской и технической диагностики.

В основу обучения могут быть положены различные принципы. Рассмотрим некоторые из них. На входе машины может появляться некоторое конечное множество дискретных ситуаций $x_1, x_2, \dots, x_n$, а на выходе — некоторое конечное множество дискретных реакций. Первоначально входные ситуации и выходные реакции никак между собой не связаны. Обучение состоит в том, чтобы научить машину преобразовывать заданным образом входные ситуации в соответствующие выходные реакции. Если в процессе обучения, получив на входе какую-либо конкретную ситуацию, машина выдала правильную выходную реакцию, она получает сигнал «поощрения» и найденное соотношение запоминает. При неправильной реакции сигнал «поощрения» со стороны обучающего не поступает и неверные соотношения не запоминаются. Постепенно путем перебора всех возможных входных ситуаций и реакций на выходе машина запомнит все правильные соотношения. В дальнейшем она будет выдавать правильные реакции на входные ситуации, т. е. может принять управле-

ние системой на себя, освободив от этой функции человека-оператора.

Обучаемая машина может быть применена для управления объектом компенсацией возмущений. В этом случае машина, получая информацию о поступающем на объект возмущении, должна сформировать управляющее воздействие для компенсации возмущения. Однако необходимое преобразование, которое должна осуществить машина, чтобы для любого значения возмущения сформировать соответствующее компенсирующее управляющее воздействие, неизвестно. В процессе обучения машина может запомнить компенсирующие значения управляющих воздействий только для ограниченного количества значений. Компенсирующие управляющие воздействия для промежуточных значений возмущений машина находит, интерполируя запомненные ею в процессе обучения ситуации.

Обучаемые классифицирующие машины в процессе обучения знакомятся с ограниченным количеством однотипных, но несколько отличающихся ситуаций или образов (например букв, напечатанных разными шрифтами и различных размеров) и указаниями, к какому классу эти ситуации или образы относятся. Накопленный ограниченный опыт позволяет машине в дальнейшем с малой вероятностью ошибки распознавать и другие ситуации или образы, относящиеся к известным ей классам.

Обучаемые машины пока тоже находятся в основном в стадии опытных разработок.

Обучающими называются системы, предназначенные для обучения человека или автомата. Довольно широкое применение получили обучающие машины, с помощью которых человеку прививаются различные навыки (тренажеры летчиков, водителей). Применяются эти машины также и для обучения студентов. Далеко не все обучающие машины являются кибернетическими.

Кибернетические обучающие машины в настоящем курсе не рассматриваются.

§ 14-5. ИГРОВЫЕ (БОЛЬШИЕ) СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Игровыми называются системы автоматического управления, в которых команды управления формируются путем обработки информации о ходе управляемого процесса методами, разрабатываемыми в теории игр и в теории исследования операций.

Игровые системы предназначены для управления сложными производственными системами и комплексами (предприятиями и группами предприятий) и поэтому их иногда называют большими системами автоматического управления.

Теория игр является математической дисциплиной, устанавливающей количественные закономерности в конфликтных ситуациях.

Теория исследования операций — это научная дисциплина, изучающая вопросы выбора решений по организации и управлению целенаправленными процессами (операциями). Эта дисциплина воз-

ника в годы второй мировой войны применительно к исследованиям военных операций. Впоследствии она получила применение в промышленности, экономике и других областях человеческой деятельности, где приходится сталкиваться с проблемой сложного выбора решений в конфликтных ситуациях. При исследовании операций используется также теория игр.

Конфликтными называются ситуации, в которых сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих различные, в большинстве случаев прямо противоположные цели. Примеры конфликтных ситуаций: военные действия двух враждующих сторон, экономическое соперничество, управление сложным предприятием или группой предприятий и т. п.

В последнем случае одной стороной является руководство предприятием, организующее по возможности оптимальный ход производственного процесса; второй стороной является совокупность случайных возмущающих воздействий, поступающих на предприятие в различных его точках и нарушающих оптимальный ход производственного процесса. Возмущающими воздействиями в данном случае могут являться неполадки или аварии оборудования, нарушение технического снабжения, нарушение технологии производственных процессов, невыполнение запланированной длительности отдельных производственных операций и т. п.

Управление производственным процессом всегда дискретно и представляет ряд последовательных этапов. На основании имеющейся информации формируются управляющие воздействия и передаются по соответствующим адресам. Затем в порядке контроля собирается новая информация о ходе производственного процесса, формируются новые управляющие воздействия и снова передаются в места исполнения.

Для осуществления оптимального управления необходимо собрать и своевременно обработать необходимую информацию. При неавтоматическом управлении работники аппарата управления оказываются, как правило, перегруженными информацией. Информация измеряется в двоичных единицах — битах. Исследования показали, что средний человек способен принимать решения, близкие к оптимальным, если он перерабатывает информацию в объеме порядка двух-трех бит в секунду. На современных предприятиях работникам управления приходится перерабатывать объемы информации, значительно превышающие оптимальные. При этом теряется до 10% информации. Поскольку информационные потоки обрабатываются последовательно несколькими работниками, то суммарная потеря информации может превышать 50%. Следовательно, решения принимаются при наличии только половины необходимой информации. Такие решения и соответствующие им управляющие команды, конечно, не в состоянии обеспечить оптимальный ход производственного процесса. Предприятие работает гораздо ниже своих возможностей только потому, что управляется не наилучшим образом.

В таких условиях повышение эффективности управления возможно только путем его автоматизации с помощью кибернетических игровых систем. На рис. 14-7 приведена общая блок-схема игровой системы автоматического управления. Приемники информации *ПИ* собирают информацию о ходе производственного процесса в управляемой системе *УС* и передают ее в управляющую машину *УМ*. Машина обрабатывает полученную информацию, формирует управляющие команды и передает их в устройства передачи команд *ПК*, которые направляют команды в нужные точки управляемой системы. Затем описанный цикл повторяется снова.

В качестве управляющей машины применяются цифровые электронные вычислительные машины, которые работают по специальной программе, предусматривающей сравнение большого числа возможных в данных условиях различных решений, определение оптимального решения с учетом всех ограничений и формирование соответствующих команд.

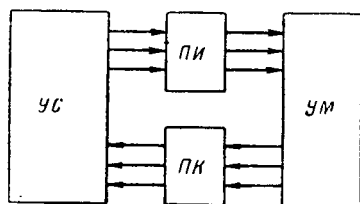


Рис. 14-7. Блок-схема игровой системы

Критерием, на основании которого в управляющей машине производится сравнение различных решений и выбор оптимального решения, является так называемая функция выгоды.

В теории игр функцией выгоды называется числовая функция V , зависящая от стратегий игры, выбранных сторонами, увеличение которой для рассматриваемой стороны соответствует увеличению выигрыша этой стороны и уменьшению выигрыша второй стороны.

Функция выгоды — это вероятностная категория, и математически она представляет математическое ожидание выигрыша в конце игры

$$V_i = M_i.$$

Здесь индекс i означает порядковый номер игрока. При двусторонней игре $i = 1; 2$.

В игровых системах автоматического управления функция выгоды имеет несколько другое значение. Производственный процесс практически не имеет конца, как игра, поэтому определяется функция выгоды в конце каждого хода.

Функция выгоды в игровых системах автоматического управления представляет математическое ожидание выигрыша в конце очередного хода. В процессе формирования управляющих команд интерес представляет значение функции выгоды, которое будет получено в результате реализации команд в будущем — в конце предполагаемого хода, и поэтому в этом случае функцию выгоды называют упрежденным значением математического ожидания выигрыша в конце хода или этапа управления.

Определение функции выгоды при автоматическом управлении является весьма сложной задачей, требующей для своего решения детального изучения производственного процесса.

Поиск оптимального решения при заданных условиях производственной ситуации, который должна выполнять управляющая машина, может осуществляться различными методами, эффективность которых весьма различна. Машина может искать оптимальное решение, например, путем простого перебора всех возможных вариантов. В производственных условиях число возможных вариантов решений настолько велико, что даже быстродействующая электронная вычислительная машина осуществить их перебор не в состоянии. Для получения результатов в приемлемое время управляющая машина может осуществлять оптимальное решение методами динамического или линейного программирования.

Создание системы полностью автоматизированного управления производством является делом будущего.

На первом этапе ограничиваются созданием систем, которые собирают и обрабатывают первичную производственную информацию. Работники управления предприятием получают всю необходимую информацию в обработанном виде и это позволяет резко улучшить качество управления производством. Такие системы называют *информационными*.

Следующим этапом является разработка систем, в которых обработанная информация поступает в управляющую машину, которая, пользуясь заложенными в ее программу функциями выгоды, находит оптимальные решения по оперативному управлению предприятием. Однако никаких команд управляющая машина никуда не передает. Решения передаются работникам управления. В этом случае управляющая машина выполняет роль *информатора-советчика*. На горном предприятии могут быть созданы советчик шахтного диспетчера, советчик начальника вентиляции, советчик главного инженера и т. п. Такие советчики могут быть очень полезными в сложных ситуациях управления.

Только после накопления достаточного опыта работы информационных систем и систем типа информатор-советчик можно приступить к разработке автоматических систем управления производственными предприятиями.

Следует иметь в виду, что большие системы автоматического управления предприятиями должны строиться по иерархическому принципу.

Иерархический принцип управления заключается в многоступенчатом построении управляющих систем, при котором функции управления распределяются между соподчиненными частями системы. Потоки информации, циркулирующей между ступенями, оказываются технически реализуемыми, система может функционировать достаточно четко.

Иерархическое построение автоматической системы управления применительно к горной промышленности весьма упрощенно можно

представить следующим образом: угольный трест — шахты — добычные участки и цехи — отдельные установки и технологические комплексы. Низшим по рангу звеном являются отдельные автоматизированные установки и технологические комплексы (подъемные, вентиляторные установки, добычные и проходческие комплексы и т. п.), для обеспечения работы которых собирается много информации и передается большое количество команд. Однако большая часть информации за пределы этих установок не выходит. В следующее звено, в цех или добычной участок передается ограниченное количество информации о работе и простоях, о количестве выполненной работы (количество добытого полезного ископаемого, количество грузов, прошедших через подъемную установку вверх и вниз, производительность и напор вентиляторной установки и т. п.). Цехи и участки передают в следующее звено суммарные показатели по участку, шахта передает в трест суммарные показатели по шахте.

Если построить автоматическую систему управления одноступенчатую, т. е. из треста управлять всеми установками и технологическими комплексами всех шахт, то объемы информации и управляющих команд, которые должна переработать управляющая машина, были бы настолько огромны, что их ни переработать, ни передать технически было бы невозможно.

Поэтому при разработке любых систем автоматического управления всегда нужно рассматривать возможность ее иерархического построения. При этом потоки информации в системе значительно уменьшаются по сравнению с системами того же назначения, в которых иерархия отсутствует. Системы, построенные по иерархическому принципу, оказываются более надежными, экономичными и быстродействующими.

Контрольные вопросы

1. В чем состоят основные тенденции развития систем автоматического управления?
2. Что называется оптимальной системой автоматического управления?
3. Что называется критерием оптимальности и как он выражается математически?
4. Какого вида две задачи приходится решать при оптимизации систем автоматического управления?
5. Какие существуют методы оптимизации передаточных функций?
6. Как можно минимизировать среднеквадратичную ошибку системы?
7. Какие системы называются экстремальными (самооптимизирующимися)?
8. В каких случаях целесообразно применять экстремальные системы, примеры?
9. Принцип действия экстремальной системы с прямым использованием сигнала по производной.
10. Принцип действия системы с запоминанием экстремума.
11. Принцип действия экстремальной системы с непрерывным поисковым сигналом (с модулирующими колебаниями).
12. Принцип действия экстремальной системы шагового типа.
13. На какие группы делятся системы автоматического обучения?
14. Какие системы называются самообучающимися и принцип их действия?
15. Какие системы называются обучаемыми и принцип их действия?
16. Какие системы называются обучающими?

17. Какие системы называются игровыми (большими)?
18. Какие задачи решают теория игр, теория исследования операций?
19. Какие ситуации называются конфликтными?
20. Какие недостатки имеют неавтоматизированные системы управления предприятиями?
21. Какими преимуществами обладает автоматизированное управление предприятиями?
22. Что называется функцией выгоды в теории игр и в игровых системах автоматического управления?
23. Какими методами может осуществляться поиск оптимального решения управляющей машиной?
24. Какие системы называются информационными и каковы их достоинства?
25. По какому принципу строятся системы информатор-советчик?
26. В чем сущность иерархического принципа управления и каковы его достоинства?

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 15-1. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К СИСТЕМАМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Автоматическое управление производственными процессами должно улучшать их технико-экономические показатели и если улучшения не происходит, то это свидетельствует о том, что подход к решению задачи автоматизации в чем-то неверен.

Эффективность автоматизации в каждом отдельном случае определяется конкретными расчетами с учетом индивидуальных особенностей автоматизируемого процесса, но есть ряд общих требований, которым по возможности должна удовлетворять любая система автоматического управления.

При проектировании необходимо добиваться максимальной простоты систем автоматического управления. Системе следует поручать только те функции, которые совершенно необходимы. Иногда проектировщик, стараясь создать наиболее совершенную систему, загромождает ее большим количеством контрольной, сигнальной и исполнительной аппаратуры, причем ряд сигналов и контрольных цепей вводится для получения «полной автоматизации», что не вносит существенных улучшений в работу системы, но значительно усложняет и удорожает ее. Все, без чего можно обойтись, должно быть из системы автоматического управления изъято. В данном случае вполне справедливой оказывается французская пословица: «Совершенной является не та вещь, к которой нечего добавить, а та, от которой нечего отнять».

Простота систем автоматического управления определяется: 1) минимальным в пределах технической и экономической целесообразности количеством функций, выполнение которых возлагается на систему; 2) минимальным количеством машин, аппаратов, приборов, устройств, соединительных проводов, входящих в систему. Вопрос о целесообразной простоте систем автоматического управления рассмотрен в § 15-3.

Система автоматического управления должна быть гибкой, т. е. допускать простой и быстрый переход от автоматического управления к ручному, и наоборот; в тех случаях, когда это требуется, необходимо обеспечить возможность управления из нескольких мест.

Система должна действовать четко как при нормальных, так и при аварийных режимах. Последнее требование сводится к тому,

чтобы в проектируемой системе при возможных повреждениях реле, контакторов, электронных ламп и т. п. не возникали так называемые ложные цепи. Любое повреждение в системе не должно сопровождаться дальнейшим развитием аварии.

В системах автоматического управления следует по возможности применять типовые средства сбора, передачи и переработки информации, типовые регуляторы, выпускаемые в достаточно широком ассортименте приборостроительной промышленностью, и только в тех случаях, когда типовые средства применить не удастся, можно ставить вопрос о разработке и изготовлении новых устройств для обеспечения проектируемой системы.

В системах автоматического управления необходимо обеспечивать правильное применение машин, аппаратов, приборов и устройств, чтобы их паспортные характеристики находились в соответствии с условиями работы системы в установившихся и переходных режимах. Например, у контакторов и реле паспортные значения напряжения катушек должны соответствовать напряжению цепей управления; длительные и разрывные токи главных и блокировочных контактов не должны превышать допустимые значения; в пределах допустимой должна быть частота включений; в электрических машинах эквивалентные токи не должны превышать длительно допустимые. В некоторых случаях для пропускания переходных процессов без заметных искажений электрические машины выбираются с резервом по напряжению и по мощности. Неправильный выбор машин и аппаратов снижает эксплуатационные возможности системы или делает ее неработоспособной.

В системах автоматического управления должны обеспечиваться удобство монтажа, эксплуатации, контроль за исправностью, удобство нахождения повреждений и ремонта. Монтаж современных устройств автоматики является сложным процессом и его обычно делят на ряд промежуточных операций. В специализированных цехах аппараты и приборы собирают в крупные монтажные единицы (панели, блоки), которые затем доставляются на место монтажа, где производится их установка и выполняются внешние соединения между ними.

В процессе эксплуатации аппаратура и устройства расстраиваются и изнашиваются. Поэтому необходимо иметь возможность проконтролировать исправность отдельных узлов и быстро найти повреждение. С этой целью сложные схемы секционируют, так что каждая секция питается через свои предохранители и выключатели. Кроме того, предусматривается сигнализация о состоянии ответственных деталей и устройств.

Для обеспечения бесперебойной работы автоматических устройств необходим их периодический ремонт. Конструкция элементов системы должна предусматривать удобство производства ремонтов, замены деталей, настройки, наладки. Наиболее удобной является замена целых блоков. В этом случае блок, в котором обнаружена неисправность, заменяется исправным, а дефектный блок ремонти-

руется в хорошо оборудованной мастерской. Быстроизнашивающиеся детали должны быть легко доступны, чтобы их было удобно менять.

Целесообразно проектировать системы автоматического управления с применением возможно меньшего количества типов блоков, панелей, аппаратов. В этом случае сильно упрощаются монтаж, эксплуатация, ремонт и можно иметь сравнительно малый резерв запасных блоков и аппаратов.

Для удобства эксплуатации устройства автоматики размещаются в отдельных изолированных и хорошо вентилируемых помещениях. При размещении в производственных цехах они защищаются от механических повреждений и пыли.

Системы автоматического управления должны обеспечивать безопасность труда, быть надежными и экономически выгодными.

§ 15-2. БЕЗОПАСНОСТЬ И ОХРАНА ТРУДА ПРИ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

Автоматизация производственных процессов способствует облегчению и оздоровлению труда горнорабочих, повышает его безопасность.

Создание добычных и проходческих автоматизированных комплексов освобождает людей от тяжелой работы в очень неблагоприятных и часто опасных условиях. Резко повышают безопасность работы на внутришахтном транспорте автоматическая блокировка, сигнализация и диспетчеризация. Автоматизация скиповых шахтных подъемных установок освобождает людей от работы в очень тяжелых условиях в пунктах загрузки и разгрузки скипов, освобождает машиниста от напряженного, утомительного труда по управлению подъемной машиной.

Однако следует помнить, что автоматизированные установки являются средством повышения безопасности труда только в том случае, если они правильно спроектированы и правильно эксплуатируются. Система автоматического управления, спроектированная без учета правил безопасности, сама может явиться причиной несчастных случаев и даже катастроф. Поэтому при проектировании и эксплуатации автоматизированных установок вопросам безопасности следует уделять самое серьезное внимание.

Если система автоматического управления электрическая, то она должна выполняться в соответствии с правилами безопасности для электрических устройств и установок.

Если система предназначена для работы в шахтах, опасных по газу или пыли, то она должна быть выполнена в соответствии с требованиями «Правил безопасности в угольных и сланцевых шахтах», т. е. с применением взрывобезопасных или искробезопасных аппаратов и оборудования, прошедших специальную проверку на испытательных станциях института по безопасности, должна быть защищена от вредного влияния влаги и пыли.

Установки с автоматизированным управлением должны снабжаться автоматической защитой, чтобы отказ системы управления не повлек за собой аварии. Например, подъемная установка с автоматическим управлением обязательно должна снабжаться ограничителем скорости и концевыми выключателями, защищающими ее от превышения скорости сверх допустимой и от переподъема.

Если предусмотрена возможность пуска установки из нескольких пунктов, то система должна быть спроектирована так, чтобы одновременно пуск можно было бы осуществить только из одного пункта, все остальные пункты должны быть в это время заблокированы. Передача управления на другой пункт должна осуществляться специальным переключающим устройством, на котором должен быть указатель, показывающий, какому пункту передано управление. Например, пуск автоматизированной подъемной установки может осуществляться из здания подъемной машины, из загрузочного устройства в стволе, от опрокидывателя в околоствольном дворе или автоматически после окончания загрузки и разгрузки подъемных сосудов. Передача управления на тот или иной пункт осуществляется специальным переключателем, установленным в здании подъемной машины. На сложных разветвленных конвейерных установках пуск также может предусматриваться из нескольких пунктов; передача управления должна осуществляться переключателем, установленным на главном пульте управления. Система автоматического управления установками должна быть спроектирована так, чтобы непосредственно перед пуском автоматически подавался бы акустический сигнал о предстоящем пуске, предупреждающий людей, которые могут случайно находиться в опасной близости к установке. Сигнал должен быть хорошо слышен во всех точках установки и иметь длительность, достаточную для того, чтобы люди успели уйти в безопасное место. Такая предупредительная сигнализация особенно важна на конвейерных линиях в шахте, на дробильно-сортировочных и обогатительных фабриках.

Пульты управления автоматизированными установками и комплексами должны снабжаться легко обозримыми и понятными мнемосхемами, на которых должно отражаться состояние рабочих агрегатов («Включено», «Выключено»), положение переключающих устройств, задвижек, заслонок. Это повышает безопасность работ при осмотрах и ремонтах установок.

Системы автоматического управления сложными комплексами должны быть спроектированы так, чтобы ремонтный персонал мог отключить любой агрегат, который после этого не мог бы быть включен ни из одного пункта; но в то же время ремонтники должны иметь возможность осуществлять пробный пуск с местного пульта управления.

Для того чтобы система автоматического управления была максимально безопасной, она должна собираться из надежных элементов. Если отдельные элементы обладают недостаточной надежностью, то система должна быть спроектирована так, чтобы эта ненадежность

по возможности компенсировалась рациональным построением схем.

В конкретных условиях к системам автоматического управления могут быть предъявлены и некоторые специальные требования по безопасности, обусловленные специфическими производственными условиями или применяемыми средствами автоматики (например, применение радиоактивных изотопов).

§ 15-3. НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Комплексная механизация и автоматизация производства приводит к усложнению применяемых систем управления, в которых количество узлов и деталей все возрастает. При этом все труднее становится обеспечить надежную и безотказную работу систем. Эта проблема является предметом новой научной дисциплины — теории надежности.

Теория надежности изучает общие закономерности, которых следует придерживаться при проектировании, изготовлении, испытании, приемке и эксплуатации технических систем и изделий для получения максимальной эффективности их использования.

Рассмотрим основные понятия и терминологию, применяемые в теории надежности.

Понятия теории надежности относятся к системам, элементам систем и вообще к изделиям, применяемым в технических устройствах. В дальнейшем для краткости будем говорить о системах, подразумевая, что все сказанное относится и к их элементам. Случаи, когда это не так, специально оговорены.

Системы могут находиться в состояниях исправности и неисправности.

Исправность — состояние системы, при котором она в данный момент времени соответствует всем требованиям, установленным как в отношении основных параметров, характеризующих нормальное выполнение заданных функций, так и в отношении второстепенных параметров, характеризующих удобство эксплуатации, внешний вид и т. п.

Неисправность — состояние системы, при котором она в данный момент времени не соответствует хотя бы одному из требований, установленных в отношении основных и второстепенных параметров.

Работоспособностью называется состояние системы, при котором она в данный момент времени соответствует всем требованиям, установленным в отношении основных параметров.

Отказ — полная или частичная утрата системой работоспособности.

Отказы делятся на внезапные и постепенные, устойчивые и самостраивающиеся.

Внезапными называются отказы, возникающие в результате скачкообразного изменения основных параметров систем при поломках, коротких замыканиях, обрывах и т. п. Причинами внезапных

отказов обычно являются скрытые дефекты, не обнаруженные в процессе изготовления или монтажа, или недопустимые перегрузки в процессе эксплуатации.

Постепенными называются отказы, возникающие в результате медленного, постепенного изменения одного или нескольких основных параметров при старении, износе, деформациях элементов системы.

Внезапные отказы предвидеть нельзя. Постепенные отказы можно предвидеть и предотвратить профилактическим ремонтом, заменой изношенных элементов системы.

Устойчивый — отказ, который устраняется лишь в результате мер, принятых для восстановления работоспособности системы.

Самоустраняющиеся — отказы, которые самопроизвольно исчезают без принятия специальных мер.

Однократно возникающий и затем исчезающий отказ называется сбоем. Причиной сбоев может быть понижение рабочего напряжения.

Ряд сбоев, быстро следующих друг за другом, называется *перемежающимся отказом*. Причиной перемежающихся отказов может быть прерывающийся контакт в переключателях, ламповых панелях, штепсельных разъемах.

Более полная классификация отказов приведена в [32].

Безотказность — свойство системы непрерывно сохранять работоспособность в определенных режимах и условиях эксплуатации. Безотказность в литературе обычно определяют как «надежность в узком смысле».

Долговечность — свойство системы длительно (с возможными перерывами на ремонт) сохранять работоспособность в определенных режимах и условиях эксплуатации до разрушения или другого предельного состояния.

Ремонтопригодность — приспособленность системы к предупреждению, обнаружению и устранению неисправностей и отказов; характеризуется затратами труда и средств на выполнение указанных работ.

Надежность — свойство системы выполнять свое назначение в заданных условиях эксплуатации в течение спроектированного времени. Понятие «надежность» охватывает рассмотренные выше свойства систем — безотказность, долговечность, ремонтпригодность.

Сохраняемость — свойство системы сохранять исправность и надежность в определенных условиях хранения и транспортировки.

Все технические системы и их элементы делятся на два класса: восстанавливаемые и невосстанавливаемые.

Восстанавливаемые — это такие системы, которые в случае возникновения отказа могут быть восстановлены.

Невосстанавливаемые — это такие системы, которые в случае возникновения отказа не поддаются или не подлежат восстановлению в процессе эксплуатации.

Все рассмотренные выше понятия являются качественными. Для инженерных расчетов надежности используются количественные характеристики или критерии, к которым относятся следующие.

Вероятность безотказной работы $p(t)$ — вероятность того, что при определенных режимах и условиях эксплуатации в течение заданной продолжительности t работы системы не произойдет ни одного отказа.

$$p(t) = \frac{N - n(t)}{N}, \quad (15-1)$$

где N — начальное число эксплуатируемых систем;

n — число систем, отказавших за время t .

Вероятность отказа $q(t)$ — вероятность того, что при определенных режимах и условиях эксплуатации в течение заданной продолжительности t работы системы произойдет отказ.

$$q(t) = \frac{n(t)}{N}. \quad (15-2)$$

Вероятность отказа является событием, противоположным вероятности безотказной работы, поэтому

$$p(t) + q(t) = 1. \quad (15-3)$$

Частота отказов $f(t)$ — число отказов $\Delta n(t)$ за единицу времени Δt , отнесенное к первоначальному количеству эксплуатируемых систем, при условии, что отказавшие системы не заменяются новыми.

$$f(t) = \frac{\Delta n(t)}{N \Delta t}. \quad (15-4)$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ — вероятность отказа невосстанавливаемой системы в единицу времени после данного момента времени при условии, что до этого момента времени отказ не возникал.

$$\lambda(t) = \frac{\Delta n(t)}{[N - n(t)] \Delta t}. \quad (15-5)$$

Интенсивность отказов может быть найдена как отношение

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)}. \quad (15-6)$$

В этом легко убедиться, подставив в выражение (15-6) значения $f(t)$ и $p(t)$ из выражений соответственно (15-4) и (15-1).

В справочной литературе приводится обычно интенсивность отказов за 1000 ч, за 10 000 ч и т. д. Чтобы получить интенсивность отказов за один час, справочные данные делят на 10^3 , 10^4 и т. д.

Среднее время безотказной работы $T_{\text{ср}}$ — математическое ожидание продолжительности работы системы до первого отказа.

$$T_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}, \quad (15-7)$$

где t_i — время безотказной работы i -й системы;

N — количество наблюдавшихся систем.

Наработка — продолжительность или объем работы системы в определенных условиях, измеряемые числом часов работы, числом циклов и т. п.

Наработка на отказ T_0 — среднее значение наработки восстанавливаемой системы между соседними отказами.

$$T_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i}{n}, \quad (15-8)$$

где τ_i — время исправной работы между i -м и $(i + 1)$ -м отказами;
 n — число отказов за время наблюдения.

Частота отказов $f(t)$ может быть найдена как производная от функции безотказной работы $p(t)$ (15-1) и представляет собой плотность распределения вероятности безотказной работы (см. § 13-2)

$$f(t) = -\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{d[n(t)]}{dt} \frac{1}{N}. \quad (15-9)$$

При экспериментальном определении $f(t)$ дифференциалы $d[n(t)]$ и dt заменяются конечными приращениями $\Delta n(t)$ и Δt ; в результате получается выражение (15-4).

Как указывалось в § 13-2, плотность распределения вероятности может подчиняться различным законам распределения. Установить, по какому именно закону происходит распределение плотности вероятности конкретной случайной величины, можно только опытным путем.

Специальные исследования показали, что вероятность отказов во времени шахтной аппаратуры автоматики распределяется по экспоненциальному закону. По этому же закону распределяется в большинстве случаев и вероятность отказов аппаратуры автоматики общепромышленного назначения.

В этом случае интенсивность отказов будет величиной постоянной, не зависящей от времени работы

$$\lambda = \text{const}. \quad (15-10)$$

Частота отказов

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (15-11)$$

Вероятность безотказной работы

$$p(t) = e^{-\lambda t}. \quad (15-12)$$

Вероятность отказа

$$q(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (15-13)$$

Среднее время безотказной работы

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (15-14)$$

Таким образом, если опытным путем найден один из критериев надежности, то по формулам (15-11)—(15-14) могут быть вычислены и все остальные. Повторяем, что эти соотношения выполняются точно только в случае экспоненциального закона распределения вероятности отказов и достаточно большого количества наблюдений.

Количественные характеристики надежности используются при проектировании систем автоматического управления для расчета их ожидаемой общей надежности. Характеристика надежности сложной системы может быть получена расчетом, если известны характеристики элементов, из которых составляется система. Количественные характеристики надежности элементов систем, отдельных аппаратов и деталей получают статистической обработкой длительных наблюдений за большим количеством элементов в процессе эксплуатации или при специальных стендовых испытаниях. Теоретическим путем эти характеристики получить нельзя. Поэтому работники предприятий должны с большим вниманием и очень серьезно относиться к наблюдениям за аппаратурой в процессе эксплуатации, которые организуют службы надежности заводов-изготовителей и проектные и исследовательские институты. Полученные после обработки наблюдений характеристики надежности [31] используются при проектировании.

При расчетах надежности сложных систем полезно составить логическую схему. Систему при этом расчлениют на элементы и определяют влияние на работу системы отказа каждого из элементов. Если будет установлено, что система может нормально функционировать только тогда, когда работоспособны все без исключения ее элементы, и отказ любого из них влечет за собой отказ всей системы, то такая схема соединения называется *логической схемой зависимого последовательного действия*, или просто логической последовательной схемой. При этом речь идет не о функциональной и не об электрической схемах, в которых могут быть и последовательные и параллельные соединения, а о логической схеме для расчета надежности.

Все отказы отдельных элементов схемы являются независимыми. Из теоремы умножения вероятностей независимых событий следует правило: вероятность безотказной работы $P(t)$ системы, состоящей из элементов, соединенных по логической схеме зависимого последовательного действия, равна произведению вероятностей безотказной работы $p_i(t)$ отдельных элементов

$$P(t) = \prod_{i=1}^n p_i(t). \quad (15-15)$$

Здесь все вероятности безотказной работы относятся к одному и тому же периоду времени. Так как каждая из вероятностей $p_i(t)$ меньше единицы, то общая вероятность безотказной работы системы оказывается меньше таковой для любого входящего в ее состав элемента. При сложных системах, состоящих из большого количества логически последовательно соединенных элементов, вероятность безотказной работы может оказаться настолько низкой, что систему окажется невыгодно эксплуатировать даже в случае, если она построена экономно и имеет минимальное количество составляющих ее элементов.

Рассмотрим возможные пути повышения надежности сложных систем.

Первый путь — *применение более надежных элементов* — не всегда осуществим, так как повышение надежности изделий, выпускаемых промышленностью, процесс длительный, обусловленный постепенным повышением культуры производства, применением более совершенных материалов и т. п.

Второй путь, который может дать непосредственный эффект — это *резервирование* путем рационального применения избыточных элементов в системе.

Сущность резервирования состоит в следующем. Если система построена так, что она может нормально функционировать, если из нескольких элементов работоспособность сохраняют все или только несколько, или любой один из них, то такое соединение называется *логическим параллельным соединением*, а система называется *резервированной*.

Из теоремы умножения вероятностей независимых событий следует правило: вероятность отказа $Q(t)$ системы, состоящей из логически параллельно соединенных элементов, равна произведению вероятностей отказа $q_i(t)$ отдельных элементов.

$$Q(t) = \prod_{i=1}^k q_i(t). \quad (15-16)$$

Общая вероятность отказа уменьшается и, следовательно, вероятность безотказной работы и надежность системы увеличиваются

$$P(t) = 1 - Q(t). \quad (15-17)$$

При смешанном параллельно-последовательном соединении, когда несколько групп параллельно соединенных элементов затем соединены последовательно, вероятность безотказной работы системы $P_{\text{общ}}(t)$ определяется по формуле

$$P_{\text{общ}}(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \prod_{j=1}^k [1 - p_j(t)] \right\}, \quad (15-18)$$

где i — порядковый номер группы из n групп элементов, соединенных последовательно;

j — порядковый номер элемента из общего числа k элементов, соединенных параллельно.

Если несколько групп последовательно соединенных элементов затем соединены параллельно, то справедливой будет следующая формула:

$$P_{\text{общ}}(t) = 1 - \prod_{j=1}^k \left[1 - \prod_{i=1}^n p_i(t) \right]. \quad (15-19)$$

Для конкретных схем соединений формула для $P_{\text{общ}}(t)$ может принимать и другую структуру.

Существуют различные виды резервирования: автономное, общее, раздельное и единичное.

Автономное резервирование состоит в применении нескольких независимых систем, выполняющих одну и ту же задачу. Применяется в особо ответственных случаях. Например, шахтная вентиляторная установка состоит из двух вентиляторов с отдельным приводом; шахтная водоотливная установка состоит из трех аналогичных насосных агрегатов; для электроснабжения ответственных потребителей монтируются две независимые линии электропередачи.

Общее резервирование состоит в резервировании всей системы, кроме входных и выходных блоков, *раздельное резервирование* — в резервировании системы по отдельным участкам, *единичное резервирование* — в замене элементов системы элементарными резервированными схемами.

В случае применения единичного резервирования нет необходимости при проектировании составлять специальные схемы, а можно ставить на место каждого элемента схемы типовую резервированную ячейку.

Все системы с резервированием можно разделить на *системы с активным резервированием*, в которых резервная цепь включается после потери работоспособности основной цепью, и *системы с пассивным резервированием*, в которых резервные цепи включены все время и работают наряду с основной.

Последний вид резервирования проще, так как отсутствуют переключающие устройства и, кроме того, при выходе из строя одной цепи никакого перерыва в работе не происходит. В системах шахтной автоматики, как правило, применяется пассивное раздельное или единичное резервирование, реже — общее.

При пассивном резервировании необходимо учитывать, какое действие на систему произведет отказ. Это действие зависит от вида отказов, которые по своим внешним проявлениям могут быть различными. Однако для подавляющего большинства элементов можно ограничиться рассмотрением двух предельных случаев отказов — обрыва и замыкания. Поэтому резервирование системы должно обеспечиваться резервом при этих обоих видах отказов.

На рис. 15-1 приведена схема резервирования контактного элемента, которая остается работоспособной при любом виде отказа в любом из четырех входящих в нее элементов.

Пример. Определить вероятность безотказной работы в течение месяца (720 ч) для проектируемой системы, которая содержит 5 транзисторов, 18 резисторов, 2 трансформатора, 2 реле, 8 конденсаторов и 15 соединительных зажимов. Все 50 элементов системы соединены логически последовательно, так что отказ любого элемента влечет за собой отказ всей системы.

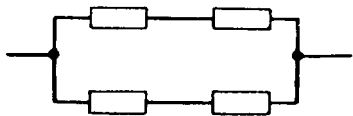


Рис. 15-1. Схема резервирования

По справочным данным, средняя интенсивность отказов в расчете на 1 000 000 ч ($\lambda_0 10^{-5}$, $\frac{1}{\text{ч}}$):

Транзисторы	0,30
Резисторы	0,28
Трансформаторы	0,05
Реле	0,20
Конденсаторы	0,24
Соединительные зажимы	0,005

Если известна интенсивность отказов элемента, то вероятность безотказной работы определяется по формуле (15-12). При логическом последовательном соединении элементов вероятность безотказной работы системы определяется по формуле (15-15). Определяя λ на 1 ч и подставляя найденные значения в формулы (15-12) и (15-15), получим

$$P(t) = e^{-(5 \cdot 0,30 + 18 \cdot 0,28 + 2 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,20 + 8 \cdot 0,24 + 15 \cdot 0,005) \cdot 10^{-5} t} = e^{-9,05 \cdot 10^{-5} t}$$

По этому выражению построена зависимость вероятности безотказной работы от времени (рис. 15-2, кривая 1). Вероятность безотказной работы в течение месяца (720 ч) по этой кривой составляет 0,935.

При увеличении числа последовательно соединенных элементов вероятность безотказной работы уменьшается. Предположим, что проектируется система, у которой число последовательно соединенных элементов каждого вида будет в 5 раз больше, чем в рассмотренной выше (250 элементов). Тогда вероятность безотказной работы найдем из выражения

$$P(t) = e^{-45,25 \cdot 10^{-5} t}$$

По этому выражению на рис. 15-2 построена кривая 2. Вероятность безотказной работы в течение месяца составляет 0,72, что значительно меньше, чем в первом случае.

Предположим теперь, что в последней системе осуществлено общее резервирование, при котором общими будут только входные

и выходные зажимы. Количество элементов системы увеличится вдвое для создания двух логически параллельных цепей (500 элементов).

Вероятность отказа нерезервированной системы

$$Q(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-45,25 \cdot 10^{-5}t}.$$

Вероятность отказа системы с двумя одинаковыми логически параллельными цепями

$$Q_p(t) = Q^2(t) = (1 - e^{-45,25 \cdot 10^{-5}t})^2.$$

Вероятность безотказной работы резервированной системы

$$P_p(t) = 1 - Q_p(t) = 1 - (1 - e^{-45,25 \cdot 10^{-5}t})^2 = 2e^{-45,25 \cdot 10^{-5}t} - e^{-90,5 \cdot 10^{-5}t}.$$

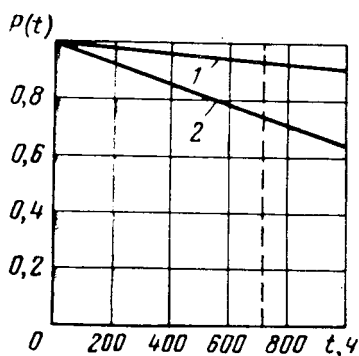


Рис. 15-2. Кривые вероятности безотказной работы

Кривая, построенная по этому выражению на рис. 15-2, практически совпадает с кривой 1. Вероятность безотказной работы в течение месяца составляет в этом случае 0,94.

Таким образом, резервирование резко повышает надежность работы системы, однако возможность его применения ограничивается в ряде случаев стоимостью резервированной системы, ее габаритами. Но во всех случаях, когда ограничения существенной роли не играют, применять его целесообразно.

Кроме резервирования существуют и другие пути повышения надежности.

Схемные методы позволяют получить надежные схемы из недостаточно надежных элементов. При разработке схем следует стремиться, чтобы они удовлетворяли следующим основным требованиям:

были достаточно простыми, но не в ущерб выполнению заданных функций;

были стабильными в работе, т. е. не меняли своих характеристик при изменении параметров составляющих элементов;

схемы не должны быть чувствительны к колебаниям напряжения; не требовать стабилизированных источников питания, которые сами по себе снижают общую надежность систем;

для узлов, отказы которых могут привести к катастрофическим последствиям или к большим материальным потерям, следует в первую очередь снижать тяжелые последствия отказов, а не вероятность их появления.

Перечисленные требования полностью выполнить бывает трудно, а иногда и невозможно, но во всяком случае необходимо пытаться найти разумное компромиссное решение.

Конструктивные методы повышения надежности предусматривают выбор элементов с максимально возможной надежностью с учетом их стоимости и возможности приобретения; выбор облегченных режимов работы по нагрузке, напряжению, температурным условиям и т. п.; выбор наиболее подходящих конструктивных материалов; выбор конструктивных решений, обеспечивающих прочность, виброустойчивость, удобство технического обслуживания и ремонтпригодность; возможность целесообразного применения контрольно-измерительной аппаратуры для автоматического и эпизодического контроля исправности системы и ее элементов.

Эксплуатационные меры повышения надежности систем включают своевременное проведение профилактических осмотров и ремонтов; повышение квалификации обслуживающего персонала; эксплуатацию в условиях и режимах, для которых система проектировалась.

Более подробно вопросы надежности изложены в специальных монографиях [3, 12, 31].

§ 15-4. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При проектировании систем автоматического управления производственными процессами нужно прежде всего решить: 1) какие объекты целесообразно автоматизировать в первую очередь; 2) какой конкретный экономический эффект можно ожидать от применения систем автоматического управления и каковы их степень автоматизации и надежность.

При широком внедрении автоматизации целесообразно в первую очередь вкладывать средства в мероприятия по автоматизации, которые немедленно могут дать наибольший экономический эффект (здесь не рассматриваются производственные процессы, которые вследствие вредности могут осуществляться только при автоматическом управлении).

Экономический эффект при внедрении автоматического управления может быть получен за счет следующих факторов [27, 39].

Сокращение числа обслуживающего персонала дает особенно большой эффект на тех процессах, где на управлении занято значительное число человек. Например, скважинные водопонижающие насосные установки при ручном управлении требовали для обслуживания большого числа мотористов. После перевода на автоматическое управление все установки обслуживает один электрослесарь в смену.

На неавтоматизированной конвейерной установке, состоящей из большого числа конвейеров, на каждом из них необходимо держать моториста для пуска и остановки. При автоматическом управлении установку обслуживает один дежурный на пульте и один дежурный электрослесарь.

Однако автоматизация не всегда приводит к сокращению обслуживающего персонала (например, при автоматическом управлении подъемной машиной). В этих случаях экономический эффект от внедрения автоматизации может быть достигнут за счет других факторов.

Увеличение производительности оборудования. Большой эффект получается в том случае, когда внедрение автоматического управления сопровождается переходом к новому высокопроизводительному технологическому процессу, который без автоматизации осуществить нельзя. Например, автоматическое управление выемкой полезного ископаемого и креплением в очистном забое можно применять только одновременно с применением гидрофицированных добычных комплексов, которые без автоматизации производительно работать не могут.

Перевод на автоматическое управление старого технологического оборудования также повышает его производительность от 2—5 до 10—15%. Так, например, перевод скиповой подъемной машины на автоматическое управление позволяет увеличить производительность подъемной установки по сравнению с ручным управлением на 10—12%.

Улучшение качества продукции. Технологические процессы при автоматическом управлении обеспечивают выпуск продукции более высокого качества, чем при ручном. Например, внедрение автоматического управления обогащательными комплексами на марганцевых обогащательных фабриках позволяет увеличить выход концентрата первым сортом и уменьшить потери марганца в хвостах. Это эквивалентно увеличению производственной мощности предприятия. Улучшение качества продукции почти всегда сопоставимо с увеличением количества. Особенно применительно к изделиям, заменяемым при эксплуатации вследствие их износа, например режущий инструмент для станков, режущие зубки для угольных комбайнов, электрические лампы и др.

Повышение качества этих изделий, увеличивающее их износостойкость и, следовательно, долговечность, эквивалентно увеличению их количества.

Сокращение расхода материалов и электроэнергии, обусловленное соблюдением оптимальных режимов работы, допусков, сокращением брака и связанных с этим непроизводительных затрат материалов и энергии, эквивалентно вводу новых мощностей по производству материалов и электроэнергии.

Улучшение организации производства, поскольку автоматизация создает принудительный режим процесса, при котором необходимо очень четкое взаимодействие всех звеньев технологической цепи.

Для различных производственных процессов перечисленные выше факторы могут иметь различное значение в эффективности внедрения автоматизации и, конечно, невозможно получить максимальный эффект одновременно по всем факторам и этого не следует добиваться.

Для каждого из автоматизируемых процессов на основании подробного его анализа следует определить **главные задачи автоматизации** и подчинить решению этих задач схему и технические средства автоматизации. Тогда другие факторы будут проявляться попутно и в той мере, в какой это возможно при решении главных задач.

Показателем, характеризующим состояние техники производства, его экономический уровень, является себестоимость.

Анализ структуры себестоимости, который состоит в определении удельного веса в ней различных статей расходов: на сырье, материалы, топливо, электроэнергию, заработную плату, амортизацию и прочие расходы, может дать весьма полезные сведения для определения ожидаемой эффективности автоматизации. Если анализ структуры себестоимости продукции покажет, что основную долю составляют, например, затраты на сырье, то главной задачей автоматизации является обеспечение экономии сырья. Если основную долю составляют затраты на заработную плату, то главная задача автоматизации — сокращение обслуживающего установку персонала. Однако себестоимость не является универсальным показателем, так как не учитывает, например, такие показатели, как производительность труда, величину и срок окупаемости капиталовложений на автоматизацию, влияние автоматизации на загрузку смежных предприятий и некоторые другие.

Основным показателем эффективности внедрения автоматического управления в настоящее время является **срок окупаемости затрат на автоматизацию**, который по принятым нормативам не должен превышать трех лет.

Таким образом, затраты, произведенные на проектирование, изготовление, монтаж и наладку системы автоматического управления, должны окупиться в течение не более трех лет за счет уменьшения эксплуатационных затрат автоматизированной установки или комплекса. После окончания срока окупаемости автоматизация должна приносить доход.

В прямой связи с окупаемостью затрат на автоматизацию находятся вопросы о целесообразности степени автоматизации и надежности.

Не следует излишне усложнять системы автоматического управления, добиваясь максимального совершенства. При автоматизации управления сложными комплексами выполнение некоторых операций целесообразно поручать обслуживающему персоналу, который все равно должен наблюдать за работой установки. Попытки добиться полной автоматизации обычно приводят к большому усложнению системы и такому увеличению капиталовложений и срока окупаемости, что автоматизация становится экономически невыгодной.

Надежность систем автоматического управления имеет огромное значение, однако следует помнить, что повышение надежности систем приводит к повышению их стоимости, причем стоимость растет очень быстро при приближении вероятности безотказной работы к единице. Поэтому целесообразный уровень надежности системы необходимо

определять экономическим расчетом. Срок окупаемости системы должен не выходить за пределы нормативного при максимально достижимой в этих условиях надежности.

Наконец, очень существенным является обеспечение примерно одинакового уровня автоматизации в различных звеньях предприятия, что приносит наибольший экономический эффект. Повышение степени автоматизации приводит к быстрому росту затрат, и поэтому выгоднее автоматизировать слабоавтоматизированные объекты — затраты здесь окупятся быстрее, чем при повышении степени автоматизации хорошо автоматизированных объектов.

Контрольные вопросы

1. Каким общим требованиям должны удовлетворять системы автоматического управления?
2. Каким требованиям правил безопасности должны удовлетворять автоматизированные установки?
3. Что является предметом теории надежности?
4. Что называется исправностью, неисправностью?
5. Что называется работоспособностью?
6. Что называется отказом? Виды отказов.
7. Что называется безотказностью, долговечностью, ремонтпригодностью?
8. Что называется надежностью, сохраняемостью?
9. Какие системы называются восстанавливаемыми, невосстанавливаемыми?
10. Какие существуют количественные характеристики надежности?
11. Что такое вероятность безотказной работы, вероятность отказа?
12. Что такое частота отказов, интенсивность отказов?
13. Что такое среднее время безотказной работы?
14. Что такое наработка, наработка на отказ?
15. Какому закону подчиняется плотность распределения вероятности безотказной работы?
16. Что называется логической последовательной схемой, логической параллельной схемой?
17. Как определяется надежность таких схем, если известна надежность составляющих их элементов?
18. Пути повышения надежности систем?
19. В чем состоит сущность резервирования и его виды?
20. В чем сущность схемных, конструктивных методов повышения надежности?
21. Эксплуатационные меры повышения надежности?
22. Какие вопросы нужно решать на первой стадии проектирования автоматизации производственных процессов?
23. Какие объекты целесообразно автоматизировать в первую очередь?
24. За счет каких факторов может быть получен экономический эффект при внедрении автоматического управления?
25. Как можно определить главные задачи автоматизации на данном предприятии или в отрасли промышленности?
26. В чем состоит анализ структуры себестоимости?
27. Что является основным показателем эффективности внедрения автоматического управления?
28. Как определяется целесообразная степень автоматизации?
29. Как определяется целесообразная надежность систем автоматического управления?
30. Какое значение имеет обеспечение одинакового уровня автоматизации?

Таблица h -функций для треугольных вещественных частотных характеристик

τ	h	τ	h	τ	h	τ	h
0,00	0,00000	0,35	0,111	0,70	0,220	1,5	0,449
01	0,00318	36	0,114	71	0,223	6	0,475
02	0,00637	37	0,117	72	0,226	7	0,500
03	0,00955	38	0,121	73	0,229	8	0,525
04	0,01270	39	0,124	74	0,232	9	0,548
0,05	0,0159	0,40	0,127	0,75	0,235	2,0	0,571
06	0,0191	41	0,130	76	0,238	1	0,593
07	0,0223	42	0,133	77	0,241	2	0,615
08	0,0254	43	0,136	78	0,244	3	0,635
09	0,0286	44	0,139	79	0,247	4	0,655
0,10	0,0318	0,45	0,142	0,80	0,250	2,5	0,674
11	0,0350	46	0,146	81	0,253	6	0,691
12	0,0382	47	0,149	82	0,256	7	0,709
13	0,0415	48	0,152	83	0,259	8	0,725
14	0,0446	49	0,155	84	0,262	9	0,740
0,15	0,0477	0,50	0,158	0,85	0,265	3,0	0,755
16	0,0509	51	0,161	86	0,268	1	0,768
17	0,0541	52	0,164	87	0,271	2	0,781
18	0,0573	53	0,167	88	0,274	3	0,793
19	0,0604	54	0,171	89	0,277	4	0,804
0,20	0,0637	0,55	0,174	0,90	0,280	3,5	0,815
21	0,0668	56	0,177	91	0,283	6	0,824
22	0,0700	57	0,180	92	0,286	7	0,833
23	0,0731	58	0,183	93	0,289	8	0,842
24	0,0763	59	0,186	94	0,292	9	0,849
0,25	0,0794	0,60	0,189	0,95	0,295	4,0	0,856
26	0,0826	61	0,192	96	0,298	1	0,862
27	0,0856	62	0,195	97	0,301	2	0,868
28	0,0889	63	0,198	98	0,304	3	0,873
29	0,0921	64	0,201	99	0,307	4	0,878
0,30	0,0952	0,65	0,204	1,0	0,310	4,5	0,882
31	0,0984	66	0,208	1	0,339	6	0,885
32	0,100	67	0,211	2	0,367	7	0,888
33	0,105	68	0,214	3	0,395	8	0,891
34	0,108	69	0,217	4	0,422	9	0,894
5,0	0,895	8,0	0,911	11,0	0,947	18,5	0,966
2	0,899	2	0,913	11,5	0,949	19,0	0,966
4	0,901	4	0,916	12,0	0,950	19,5	0,967
6	0,902	6	0,919	12,5	0,950	20,0	0,967
8	0,903	8	0,922	13,0	0,950	21,0	0,968
6,0	0,903	9,0	0,925	13,5	0,951	22,0	0,971
2	0,903	2	0,928	14,0	0,950	23,0	0,973
4	0,903	4	0,931	14,5	0,954	24,0	0,975
6	0,903	6	0,934	15,0	0,956	25,0	0,975
8	0,903	8	0,936	15,5	0,959	30,0	0,980
7,0	0,904	10,0	0,939	16,0	0,961	40,0	0,984
2	0,904	2	0,941	16,5	0,963	50,0	0,987
4	0,906	4	0,943	17,0	0,965	100,0	0,994
6	0,907	6	0,945	17,5	0,966	120,0	0,995
8	0,909	8	0,946	18,0	0,966		

ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматическое управление и вычислительная техника. Вып. 2. М., Машгиз, 1959.
2. Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления. Под ред. В. В. Солодовникова. М., изд-во «Машиностроение», 1965.
3. Астафьев А. В. Окружающая среда и надежность радиотехнической аппаратуры. М., изд-во «Энергия», 1965.
4. Башарин А. В. Расчет динамики и синтез нелинейных систем управления. М., Госэнергоиздат, 1960.
5. Бессекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М., изд-во «Наука», 1966.
6. Бир Ст. Кибернетика и управление производством. М., Физматгиз, 1963.
7. Васильев Д. В., Филиппов Г. С. Основы теории и расчета следящих систем. М., Госэнергоиздат, 1959.
8. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
9. Воронов А. А. Элементы теории автоматического регулирования. М., Воениздат, 1954.
10. Дель Торо В., Паркер С. Р. Принципы проектирования систем автоматического управления. Пер. с французского. М., Машгиз, 1963.
11. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. Пер. с английского. М., Физматгиз, 1963.
12. Дружинин Г. В. Надежность устройств автоматики. М., изд-во «Энергия», 1964.
13. Ивахненко А. Г. Техническая кибернетика. Киев. Гостехиздат УССР, 1962.
14. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование. М., Машгиз, 1962.
15. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. Пер. с английского. М., ГИИЛ, 1948.
16. Кервалишвили О. Г. Регулирование хода малой шахтной подъемной машины с применением центробежного тормоза. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. Тбилиси. Грузинский политехнический институт, 1961.
17. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1963.
18. Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. М., ГИТТЛ, 1953.
19. Копелович А. П. Автоматическое регулирование в черной металлургии. Краткий справочник. М., ГИЗ Цветмет, 1963.
20. Корректирующие цепи в автоматике. Сборник переводов статей под ред. Литвина-Седого. М., ГИИЛ, 1954.
21. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М., Госэнергоиздат, 1962.
22. Круг Г. К., Круг Е. К. Электрические корректирующие элементы в схемах автоматического контроля и регулирования. М., Госэнергоиздат, 1959.

23. Кузип Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. М., Машгиз, 1962.
24. Кузовков Н. Т. Теория автоматического регулирования. М., Оборонгиз, 1957.
25. Кулик В. Т. Принципы алгоритмизации и построения управляющих машин. Киев, Гостехиздат УССР, 1963.
26. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., Гостехиздат, 1948.
27. Лоссиевский В. Л., Плискин Л. Г. Вопросы автоматизации непрерывных производственных процессов. М., изд-во АН СССР, 1960.
28. Мееров М. В. Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин. М., изд-во АН СССР, 1956.
29. Мееров М. В. Системы многосвязного регулирования. М., изд-во «Наука», 1965.
30. Мелкозеров П. С. Приводы в системах автоматического управления. М., изд-во «Энергия», 1966.
31. Михайлов В. А. и др. Надежность аппаратуры горных автоматических устройств. Киев, изд-во «Техника», 1967.
32. Надежность технических систем и изделий. Основные понятия. Терминология. М., изд-во «Наука», 1965.
33. Основы автоматического регулирования. Теория. Под ред. В. В. Солодовникова. М., Машгиз, 1954.
34. Основы автоматического управления. Под ред. В. В. Солодовникова, т. III. М., изд-во «Машиностроение», 1963.
35. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1954.
36. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
37. Стрейц В., Шаламон И., Котек З., Балда М. Основы теории автоматического регулирования. Пер. с чешского. М., Гостоптехиздат, 1960.
38. Траксел Д. Синтез систем автоматического регулирования. Пер. с английского М., Машгиз, 1959.
39. Трапезников В. А. Автоматическое управление и экономика. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 1.
40. Тулин В. С. Теоретические основы автоматизации производственных процессов горной промышленности. М., МГИ, 1961.
41. Уланов Г. М. Регулирование по возмущению. М., Госэнергоиздат, 1960.
42. Фатеев А. В. Основы линейной теории автоматического регулирования. М., Госэнергоиздат, 1954.
43. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. М., Физматгиз, 1959.
44. Цыпкин Я. З. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях. М., Госэнергоиздат, 1951.
45. Чинаев П. И. Самонастраивающиеся системы. Расчет и проектирование. М., Машгиз, 1963.
46. Элементы систем автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова, т. II, ч. II. М., Машгиз, 1959.
47. Якубайтис Э. А. Основы технической кибернетики. АН Латв. ССР, 1962.
48. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
49. Берг А. И. Кибернетика и надежность, М., изд-во «Знание», 1964.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Глава 1. Основные понятия теории автоматического управления	3
§ 1-1. Системы автоматического управления и выполняемые ими функции	3
§ 1-2. Воздействия в системах автоматического управления. Типовые воздействия	4
§ 1-3. Свойства управляемых объектов и элементов автоматических управляющих устройств	6
§ 1-4. Обратные связи	13
§ 1-5. Классификация систем автоматического управления	15
Глава 2. Разновидности систем автоматического регулирования, задачи и методы их исследования	20
§ 2-1. Разновидности систем автоматического регулирования	20
§ 2-2. Основные задачи теории автоматического регулирования	23
§ 2-3. Дифференциальные уравнения, переходные и передаточные функции, частотные характеристики	26
§ 2-4. Энергетический расчет систем автоматического регулирования	39
Глава 3. Типовые звенья систем автоматического регулирования	42
§ 3-1. Расчленение систем автоматического регулирования	42
§ 3-2. Усилительное звено	43
§ 3-3. Аperiodическое звено	44
§ 3-4. Колебательное звено	49
§ 3-5. Интегрирующее звено	57
§ 3-6. Дифференцирующее звено	62
§ 3-7. Запаздывающее звено	67
Глава 4. Уравнения систем автоматического регулирования	70
§ 4-1. Возможные режимы работы систем автоматического регулирования	70
§ 4-2. Структурные схемы	71
§ 4-3. Дифференциальное уравнение линейной статической системы автоматического регулирования	75
§ 4-4. Дифференциальное уравнение линейной астатической системы автоматического регулирования	83
§ 4-5. Установившийся процесс систем автоматического регулирования	86
§ 4-6. Статические характеристики элементов систем автоматического регулирования	90

	Стр.
Глава 5. Исследование устойчивости линейных систем автоматического регулирования	97
§ 5-1. Понятие и условия устойчивости	97
§ 5-2. Критерий устойчивости Гурвица	100
§ 5-3. Критерий устойчивости Михайлова	104
§ 5-4. Амплитудно-фазовый критерий устойчивости Найквиста	109
§ 5-5. Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам	114
§ 5-6. Сравнительная оценка критериев устойчивости	118
§ 5-7. Выделение областей устойчивости	119
Глава 6. Исследование качества процесса регулирования линейных систем	126
§ 6-1. Показатели качества	126
§ 6-2. Исследование качества процесса регулирования методом распределения корней	128
§ 6-3. Метод интегральных оценок качества процесса автоматического регулирования	135
§ 6-4. Частотный метод исследования качества процесса автоматического регулирования	139
§ 6-5. Построение вещественной частотной характеристики замкнутой системы по частотным характеристикам разомкнутой системы	153
§ 6-6. Влияние на процесс регулирования малых параметров	157
Глава 7. Корректирующие устройства систем автоматического регулирования	162
§ 7-1. Назначение корректирующих устройств	162
§ 7-2. Параллельные корректирующие устройства	164
§ 7-3. Последовательные корректирующие устройства	170
§ 7-4. Стабилизация систем автоматического регулирования	176
Глава 8. Синтез линейных систем автоматического регулирования	184
§ 8-1. Общие сведения	184
§ 8-2. Синтез методом логарифмических частотных характеристик	185
§ 8-3. Синтез методом корневых годографов	199
Глава 9. Особые линейные системы автоматического регулирования	205
§ 9-1. Разновидности линейных систем	205
§ 9-2. Линейные системы с запаздыванием, с распределенными и переменными параметрами	205
§ 9-3. Принципы импульсного регулирования	209
§ 9-4. Основные понятия z-преобразования	213
§ 9-5. Исследование систем импульсного регулирования	216
Глава 10. Нелинейные системы автоматического регулирования	222
§ 10-1. Особенности нелинейных систем	222
§ 10-2. Метод фазовой плоскости	224
§ 10-3. Метод гармонической линеаризации	241
Глава 11. Системы автоматического управления разомкнутые, комбинированные и с несколькими управляемыми величинами	252

	Стр
§ 11-1. Разомкнутые системы автоматического управления с жесткой программой	252
§ 11-2. Разомкнутые системы автоматического управления с воздействием по возмущению	253
§ 11-3. Комбинированные системы автоматического управления	260
§ 11-4. Системы автоматического управления с несколькими управляемыми величинами	262
Глава 12. Исследование систем автоматического управления с помощью электронных моделирующих устройств	268
§ 12-1. Общие сведения	268
§ 12-2. Исследование линейной статической системы автоматического регулирования	270
§ 12-3. Исследование нелинейной астатической системы автоматического регулирования	281
Глава 13. Теоретические основы технической кибернетики	287
§ 13-1. Основные сведения	287
§ 13-2. Случайные события и случайные величины	288
§ 13-3. Случайные процессы	293
§ 13-4. Прохождение случайных сигналов через систему автоматического управления	302
§ 13-5. Элементы алгебры логики	306
Глава 14. Кибернетические системы автоматического управления	311
§ 14-1. Основные направления развития систем автоматического управления	311
§ 14-2. Оптимальные системы	312
§ 14-3. Экстремальные (самооптимизирующиеся) системы	315
§ 14-4. Системы автоматического обучения	322
§ 14-5. Игровые (большие) системы автоматического управления	324
Глава 15. Проектирование систем автоматического управления	330
§ 15-1. Основные требования, предъявляемые к системам автоматического управления	330
§ 15-2. Безопасность и охрана труда при автоматизации производства	332
§ 15-3. Надежность систем автоматического управления	334
§ 15-4. Экономические предпосылки и эффективность автоматического управления	343
Приложение	347
Литература	348

Иванов Анатолий Александрович

Теория автоматического управления и регулирования

Редактор издательства В. В. Мирская. Техн. редактор Л. Г. Лаврентьева
Переплет художника А. Е. Чучканова. Корректор Н. А. Громова

Сдано в набор 1/IV 1970 г. Подписано в печать 20/VII 1970 г. Т-09684. Формат 60×90^{1/16}.
Печ. л. 22. Уч.-изд. л. 22,3. Бумага № 1. Индекс 1—1—1. Заказ 1415/3790—12.
Тираж 12 000 экз. Цена 96 коп.

Издательство «Недра». Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19.
Ленинградская типография № 14 «Красный Печатник» Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Московский пр., 91.