ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХЛАДОТЕХНИКИ. ТЕПЛОМАССООБМЕН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХЛАДОТЕХНИКИ. ТЕПЛОМАССООБМЕН

Под редакцией проф. Э. И. Гуйго

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Холодильные и компрессорные машины и установки»

**МОСКВА
АГРОПРОМИЗДАТ
1986**

ББК 31.392
Т 34
УДК 621.57:536.2+536.48 (075)

С. Н. Богданов **Э. И. Гуйго** **В. Н. Филаткин**
Н. А. Бучко **Г. Н. Данилова** **О. Б. Цветков**

Рецензенты: Кафедра «Холодильные установки и кондиционирование воздуха» Московского технологического института мясной и молочной промышленности (д-р техн. наук, проф. *А. М. БРАЖНИКОВ*); Одесский технологический институт холодильной промышленности: кафедра холодильных установок (д-р техн. наук, проф. *И. Г. ЧУМАК*); кафедра тепломассообмена (д-р техн. наук, проф. *В. А. Календерьян*).

Теоретические основы хладотехники. Тепломассообмен/
Т 34 С. Н. Богданов, Н. А. Бучко, Э. И. Гуйго и др.; Под ред. Э. И. Гуйго.— М.: Агропромиздат, 1986.—320 с.: ил.— (Учебники и учеб. пособия для высш. учеб. заведений).

В учебном пособии изложены основные положения теории тепломассообмена, вопросы расчета процессов: нестационарной теплопроводности; передачи теплоты через оребренные поверхности; теплообмена при изменениях агрегатного состояния веществ; тепломассообмена в многокомпонентных средах. Уделено внимание особенностям теплового расчета и методам повышения эффективности холодильных аппаратов различных типов. Приведены сведения об основных методах определения теплофизических характеристик веществ и материалов, а также коэффициентов тепло- и массоотдачи.

Для студентов вузов холодильной и пищевой промышленности.

$$\text{Т}\ \frac{2303050000\text{-}305}{035\,(01)\text{-}86}\ 322\text{-}86$$

ББК 31.392

Сергей Николаевич Богданов, Наталия Александровна Бучко, Эдуард Иосифович Гуйго, Галина Николаевна Данилова, Владимир Николаевич Филаткин, Олег Борисович Цветков

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ХЛАДОТЕХНИКИ. ТЕПЛОМАССООБМЕН

Зав. редакцией **Л. В. Корбут.** Редактор **Г. А. Гусева.** Художественный редактор **Т. И. Мельникова.** Технический редактор **Т. С. Пронченкова** Корректоры **З. Т. Бегичева, Г. Ю. Стогова**

ИБ № 4460

Сдано в набор 13.01.86. Подписано в печать 06.05.86. Т-02449. Формат 60×90 1/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 20,0+0,25 форзац. Усл. кр.-отт. 20,50. Уч.-изд. л. 21,61+0,42 форзац. Изд. № 458. Тираж 7 000 экз. Заказ № 2216. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени ВО «Агропромиздат», 107807, ГСП, Москва, Б-53, ул. Садовая-Спасская, д. 18

Набрано в ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28. Отпечатано в Московской типографии № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7. Зак. 584.

ПРЕДИСЛОВИЕ

С начала XX в. явления распространения теплоты, которые до этого времени изучались только в курсах теоретической физики, стали предметом технических исследований. Их результаты широко используются в решении практических задач развития энергетики, строительного дела, металлургии и металлообработки, электроники и других отраслей техники. Особое значение теория теплообмена имеет для инженеров, специализирующихся в областях холодильной техники и теплотехники, криогенной техники и кондиционирования воздуха, составляя вместе с технической термодинамикой теоретические основы теплотехники и хладотехники.

За сравнительно короткий отрезок времени, в последние десятилетия, в становлении и развитии учения о теплообмене во всем мире достигнуты значительные успехи, причем весьма существен вклад, внесенный в эту работу трудами советских ученых: М.В. Кирпичева, М. А. Михеева, А. А. Гухмана, Г. Н. Кружилина, С. С. Кутателадзе, А. В. Лыкова и многих других.

В дальнейшей разработке теории переноса теплоты и ее практических приложений участвуют специалисты многих научно-исследовательских институтов и вузов Советского Союза.

В настоящее время в связи с быстрым развитием новой техники во всех отраслях народного хозяйства владение теорией и расчетными методами учения о тепломассообмене приобретает особое значение для инженеров всех специальностей и, в частности, для специалистов, работающих в области производства и применения искусственного холода, призванных внести важный вклад в выполнение Продовольственной программы СССР.

Настоящее пособие соответствует курсу «Тепломассоперенос» в учебных планах специальностей 0529, 0579, 0560 и предназначено для студентов вузов (и факультетов), готовящих инженеров по специальностям: «Холодильные и компрессорные машины и установки», «Криогенная техника», «Машины и аппараты кондиционирования воздуха», «Машины и аппараты пищевых производств», «Технология консервирования». Пособие обобщает 45-летний опыт учебной работы кафедры теоретических основ тепло- и хладотехники Ленинградского технологического института холодильной промышленности и содержит помимо краткого изложения общих положений теории тепломассообмена специальные разделы, готовящие будущего инженера-холодильщика к освоению профилирующих дисциплин. Содержание этих разделов соответствует потребностям курсов холодильных машин, холодильных установок, криогенной техники, кондиционирования воздуха и др.

Последовательность изложения материала соответствует общепринятой: вначале рассматриваются процессы теплопроводности, теплопередачи, массообмена, лучистого теплообмена для накопления необходимых физических и математических представлений, а затем расчет теплообменных аппаратов. В последней главе рассмотрены основные методы определения тепломассообменных характеристик.

Расчет оребренных поверхностей вынесен в отдельную главу в связи с некоторой специфичностью его и широким распространением таких поверхностей, особенно в холодильной технике.

В составлении пособия участвовали: канд. техн. наук. доц. С. Н. Богданов — глава 12; канд. техн. наук, доц. Н. А. Бучко — главы 3, 4, 6, части глав 5, 9; д-р техн. наук, проф. Э. И. Гуйго — главы 1, 2, части глав 5, 9; д-р техн. наук, проф. Г.Н. Данилова — главы 7, 8, 13, 14; д-р техн. наук, проф. В. Н.Филаткин — главы 10, 11; д-р техн. наук, проф. О. Б. Цветков — глава 15.

Общее редактирование пособия выполнено Э. И. Гуйго.

Авторы выражают признательность инженерам О. М. Ованесовой и Р. В. Клюевой за большую работу, выполненную ими при подготовке рукописи.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

a — коэффициент температуропроводности, м²/с;
C — коэффициент излучения, Вт/(м²·К⁴);
c — теплоемкость массовая, Дж/(кг·К);
c_i — константа подобия;
D — коэффициент диффузии, м²/с;
g — ускорение свободного падения, м/с²;
i — удельная энтальпия, Дж/кг;
k — коэффициент теплопередачи, Вт/(м²·К);
l — линейный размер, м;
M — масса, кг; массовый расход, кг/с;
p — давление, Па, бар;
Q — тепловой поток, Вт;
Q_τ — количество теплоты, Дж;
q — плотность теплового потока, Вт/м²;
R — термическое сопротивление, (м²·К)/Вт;
r — удельная теплота парообразования, Дж/кг;
T — температура по шкале Кельвина, К;
t — температура по международной практической шкале 1968 г., °С;
ΔT, Δt — температурный напор, К или °С;
V — объем, м³;
v — удельный объем, м³/кг;
α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К);
β — коэффициент массоотдачи, м/с;
ε — степень черноты;
Θ — безразмерная избыточная температура;
ϑ — избыточная температура, К или °С;
λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);
μ — динамический коэффициент вязкости, Па·с;
ν — кинематический коэффициент вязкости, м²/с;
ρ — плотность, кг/м³;
τ — время, с.

Критерии (числа) подобия

$\mathrm{Bi}=\alpha l/\lambda_с$ — критерий Био;
$\mathrm{Eu}=\Delta p/(\rho w^2)$ — » Эйлера;
$\mathrm{Fo}=a\tau/l^2$ — » Фурье;
$\mathrm{Gr}=gl^3\beta\Delta t/\nu^2$ — » Грасгофа;
$\mathrm{Nu}=\alpha l/\lambda_ж$ — » Нуссельта;
$\mathrm{Pe}=wl/a$ — » Пекле;
$\mathrm{Pr}=\mu c/\lambda=\nu/a$ — » Прандтля;
$\mathrm{Ra}=g\beta\Delta tl^3/(\nu a)$ — » Релея;
$\mathrm{Re}=wl/\nu$ — » Рейнольдса;
$\mathrm{St}=a/c\rho w$ — » Стантона.

Индексы

в — воздух;
ж — жидкость;
с — стенка (тело);
ср — средний;
п — пар.

ВВЕДЕНИЕ

Обмен энергией между телами (или областями одного тела), имеющими различную температуру, называют теплообменом. Как это установлено вторым началом термодинамики, теплота самопроизвольно переходит от области высокой температуры к области, имеющей более низкую температуру.

Передача теплоты может осуществляться тремя способами: теплопроводностью, конвективным переносом и излучением.

В реальных условиях эти способы теплообмена в чистом виде встречаются редко; они могут сопутствовать друг другу, сопровождаться переносом массы. В целях упрощения изучения каждый из процессов первоначально рассматривается отдельно.

Теплопроводностью, или кондукцией, называют процесс теплообмена между непосредственно соприкасающимися телами или частями тела, имеющими различную температуру.

Теплопроводность осуществляется молекулярным механизмом переноса теплоты: в зоне нагрева возрастает интенсивность движения молекул, энергия этого движения передается соседним молекулам, распространяясь в форме упругих волн к областям, имеющим меньшую температуру. Примером может служить процесс переноса теплоты сквозь стену здания при наличии разности температур между ее внутренней и наружной поверхностями.

Такой механизм теплопроводности характерен для жидкостей и твердых тел — диэлектриков. В металлах к нему добавляется интенсивный перенос энергии потоком свободных электронов. Поэтому теплопроводность металлов всегда выше, нежели диэлектриков. В жидкостях и газах теплопроводность в чистом виде может проявляться лишь в том случае, если они во всем своем объеме находятся в неподвижности. Вследствие относительно малой плотности теплопроводность газов, обусловленная соударением соседних молекул, была бы несущественной, однако здесь к основному механизму процесса добавляется перенос энергии в результате диффузии молекул в объеме газа.

Микрофизическая теория теплопроводности, излагаемая в курсах теоретической физики, достаточно сложна и не может считаться завершенной; в данном пособии эта проблема будет рассматриваться лишь в плане практического приложения.

Конвективным теплообменом называют перенос теплоты перемещающимися в пространстве элементами объема (слоями) среды. Этот процесс, реализуемый молярным механизмом, происходит лишь в жидкостях и газах. Конвективный перенос теплоты всегда включает в себя обмен энергией путем теплопроводности между элементами объема среды, вступающими в соприкосновение.

Наиболее важен для практики случай конвективного теплообмена между потоком жидкости или газа и поверхностью твердого тела. Этот процесс называют теплоотдачей. Движение среды — конвекция — может быть вынужденной и естественной (свободной). В первом случае среда перемещается каким-либо внешним побудителем (насос, вентилятор, ветер).

Примером свободной конвекции может служить самопроизвольное перемещение слоев жидкости или газа возле поверхности охлаждающих или нагревательных устройств, которое часто можно наблюдать зримо. Так, например, слой воздуха, нагревающийся при соприкосновении с поверхностью отопительной батареи в помещении, поднимается вверх, освобождая место для опускающегося рядом более плотного холодного слоя того же воздуха. Постепенно формируется медленное относительное перемещение всех слоев воздуха по сложным траекториям, обеспечивающее выравнивание температуры по всему объему помещения.

Интенсивность теплообмена при свободной конвекции, разумеется, невелика. Для ее повышения во всех случаях, когда это возможно, прибегают к вынужденному перемещению среды.

Более подробно конвективный теплообмен рассмотрен в главе 6.

Тепловым излучением называют электромагнитное излучение в инфракрасном диапазоне частот, испускаемое веществом за счет внутренней энергии.

Такая форма переноса теплоты характеризуется отсутствием непосредственного контакта между телами, обменивающимися теплотой. Теплообмен излучением происходит и в том случае, когда разделяющее тела пространство заполнено прозрачной для излучения средой, и в том случае, когда оно не заполнено каким-либо веществом. Примером последнего может служить излучение Солнцем теплоты на Землю через космическое пространство, в котором, как известно, плотность вещества ничтожна. В земных условиях прозрачной для излучения средой является сухой воздух. Непрозрачными являются большинство жидкостей и горючих газов; водяной пар, диоксид углерода и ряд других газов прозрачны лишь в некоторых интервалах длин волн излучения.

Механизм теплообмена излучением характеризуется двойной трансформацией энергии: на поверхности тела-излучателя его внутренняя энергия трансформируется в энергию электромагнитных колебаний, которые распространяются в пространстве, и на поверхности воспринимающего излучение тела энергия электромагнитных колебаний вновь трансформируется в теплоту.

Три названных процесса переноса теплоты в действительных условиях зачастую идут одновременно, дополняя друг друга или осуществляясь последовательно.

Типичным для практики случаем является теплообмен между двумя средами (теплоносителями) через разделяющую их твердую стенку. Такой процесс называется теплопередачей. Процесс теплопередачи включает в себя перенос теплоты теплоотдачей (и в ряде случаев излучением) от одной среды к поверхности стенки, теплопроводностью сквозь стенку и снова теплоотдачей (и излучением) от противоположной поверхности стенки к другой среде.

Многие процессы теплообмена сопровождаются переносом вещества. Так, например, при кипении образующийся пар перемещается в жидкости; при испарении воды в воздух теплообмен сопровождается переносом пара в паровоздушной смеси, причем этот перенос реализуется и молекулярным, и конвективным (молярным) механизмами. Такую совокупность процессов переноса массы называют конвективным массообменом.

Изучение совместно протекающих процессов переноса теплоты и вещества из одной части пространства в другую и является предметом курса тепломассообмена (тепломассопереноса).

В соответствии с представлениями современной физики явления переноса теплоты могут быть рассмотрены с двух точек зрения: на основе феноменологического и статистического методов. Название первого метода происходит от греческого слова fenomenus (явление); в нем рассматриваются соотношения между параметрами, характеризующими явление в целом, без учета особенностей микроструктуры участвующего в процессе вещества. Свойства вещества (среды) учитываются коэффициентами, определяемыми из опыта.

Статистический метод основан на изучении внутреннего строения вещества. Это в принципе исключает необходимость в эксперименте и позволяет получить более полные и точные расчетные соотношения. Однако такой подход более сложен и пока реализован лишь для простейших исходных моделей вещества.

В данном пособии, как и в большинстве учебников по теплообмену для технических вузов, принят феноменологический метод описания переноса, преимущество которого заключается в простоте исходных соотношений и использовании экспериментальных данных.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1.1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Температурное поле. Как было написано выше, возникновение процесса переноса теплоты обусловлено наличием разности температур в различных точках тела (пространства). Совокупность значений температур во всех точках рассматриваемой области пространства (тела) в данный момент времени называется температурным полем. Температурное поле скалярно, так как сама температура — скаляр.

Если температура является функцией одних только пространственных координат x, y, z, то такое поле называют установившимся, или стационарным. Если же температура зависит и от времени τ, т. е. $t=f(x, y, z, \tau)$, то температурное поле называют неустановившимся, или нестационарным. Соответствующие этим условиям (режимам) процессы теплообмена также называют стационарными или нестационарными.

Изотермическая поверхность. Если в теле, в котором имеется разность температур, выделить точки, температура которых одинакова, то в пространстве эти точки в совокупности образуют поверхность, называемую изотермической. Очевидно, что изотермические поверхности никогда не пересекаются друг с другом, ибо в данной точке пространства в данный момент времени возможно только одно значение температуры; они могут пересекаться с поверхностью тела или замыкаться сами на себя (цилиндр, шар). Пересечение изотермической поверхности плоскостью является изображением изотермы.

Тепловой поток, плотность теплового потока. Общее количество теплоты, переданное в процессе теплообмена через изотермическую поверхность в течение заданного отрезка времени τ, обозначим Q_τ. Единица измерения количества теплоты — джоуль (Дж).

Количество теплоты, передаваемой через рассматриваемую поверхность в процессе теплообмена, отнесенное к продолжительности процесса, называют тепловым потоком Q. Единица измерения теплового потока — ватт (Вт).

Тепловой поток, отнесенный к площади изотермической поверхности называют плотностью теплового потока q. Единица измерения плотности теплового потока — ватт на квадратный метр (Вт/м^2).

Количество теплоты, тепловой поток, плотность теплового потока — величины векторные. Векторы направлены по нормали к

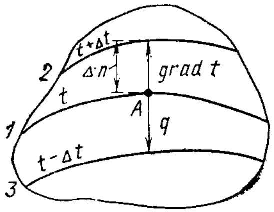


Рис. 1.1. К понятию о температурном градиенте

изотермической поверхности в сторону понижения температуры. Тепловой поток и плотность теплового потока постоянны в стационарных процессах и изменяются во времени в нестационарных тепловых процессах.

Температурный градиент. Пусть на рис. 1.1 линии *1* и *2* являются изотермами в теле произвольной формы, соответствующими температурам t (линия *1*) и $t+\Delta t$ (линия *2*). От точки A, нанесенной на изотерме с температурой t, возрастание температуры на величину Δt можно наблюдать в любом из направлений, кроме совпадающего с данной изотермой. Однако наиболее интенсивно возрастание температуры в направлении нормали к изотерме в данной точке, в котором расстояние Δn между изотермами наименьшее. Это возрастание температуры характеризуется т е м п е р а т у р н ы м г р а д и е н т о м — вектором, направленным по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равным частной производной от температуры по расстоянию, измеренному по этой нормали, т. е.

$$\mathrm{grad}\, t = \lim_{\Delta n \to 0}\left(\frac{\Delta t}{\Delta n}\right) = \frac{\partial t}{\partial n}. \qquad (1.1)$$

Единица измерения grad t — кельвин на метр (К/м). Положительное направление вектора — в сторону увеличения температуры, т. е. обратное по отношению к вектору теплового потока, направленного в сторону понижения температур (например, к изотерме $t—\Delta t$, линия *3* на рис. 1.1).

Таким образом, скалярному полю температур соответствует векторное поле температурных градиентов, а условие возникновения теплового потока можно сформулировать неравенством grad $t \neq 0$.

1.2. ЗАКОН ФУРЬЕ

В основе теории теплопроводности лежит закон (гипотеза) Фурье (1807 г.), в соответствии с которым элементарное количество теплоты, переносимой теплопроводностью внутри тела — сплошной среды, не имеющей прерывистого строения, пропорционально температурному градиенту, площади изотермической поверхности dF, перпендикулярной направлению теплового потока, и длительности процесса $d\tau$, т. е.

$$dQ_\tau = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF\, d\tau. \qquad (1.2)$$

Знак «минус» в правой части уравнения отображает противоположность направлений векторов теплового потока и температурного градиента: теплота распространяется в сторону понижения температуры, приращение температуры в этом направлении отрицательно.

Для теплового потока уравнение (1.2) запишется в виде

$$Q = -\int\limits_F \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF \tag{1.3}$$

и для плотности теплового потока, так как $q = \frac{dQ_\tau}{dF\,d\tau}$;

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \tag{1.4}$$

Коэффициент пропорциональности λ в уравнениях (1.2—1.4) называется коэффициентом теплопроводности. Его физический смысл легко уяснить, рассматривая решение уравнения (1.4) относительно λ.

$$|\lambda| = \frac{q}{(\partial t/\partial n)}.$$

Как видно, коэффициент теплопроводности представляет собой величину, численно равную количеству теплоты, передаваемой в единицу времени через единичную изотермическую поверхность тела при единичном температурном градиенте. Коэффициент теплопроводности измеряется в $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К/м}}$ [после сокращений Вт/(м·К)].

Следовательно, коэффициент теплопроводности, определяя величину передаваемого теплового потока при прочих единичных условиях, зависит только от свойств и параметров состояния материала данного тела и является его теплофизической характеристикой (феноменологическим коэффициентом).

Чтобы судить, насколько различна способность тел проводить теплоту, укажем примерные значения коэффициентов теплопроводности некоторых материалов: при комнатной температуре слой неподвижного воздуха имеет $\lambda = 0{,}02$ Вт/(м·К), вода — около 0,5; сталь — порядка 50, а медь — более 400 Вт/(м·К). Из этих данных видно, что металлы резко выделяются среди других материалов своими высокими значениями коэффициента теплопроводности. Наоборот, наихудшими проводниками теплоты являются газы, поэтому всякий теплоизоляционный материал представляет собой композицию твердого тела с воздухом. Этим же объясняется, например, устройство двойных рам в окнах.

В холодильной и криогенной технике используют в качестве теплоизоляционных материалы с ячеистыми, волокнистыми и порошкообразными структурами, имеющими низкие значения коэффициентов теплопроводности. К ним относятся мипора, пенополистирол, пенополиуретан, минеральная и стеклянная вата и др. [$\lambda = 0{,}02 \div 0{,}04$ Вт/(м·К)].

Коэффициент теплопроводности данного материала изменяется с изменением температуры, давления, влажности и ряда других факторов.

Это затрудняет отыскание теоретических решений для коэффициентов теплопроводности, в основном они определяются экспериментально (см. главу 15 настоящего пособия) и табулируются (см., например, приложение 1). При пользовании таблицами нужно следить за тем, чтобы физические характеристики материала (структура, плотность, влажность, температура, давление) соответствовали заданным условиям.

Уравнение закона Фурье может быть использовано как расчетное лишь после интегрирования выражения температурного градиента grad $t=\frac{\partial t}{\partial n}$. Задание значений температурных градиентов равнозначно, как уже указывалось, заданию температурного поля. Наиболее общим описанием температурного поля является выражение зависимости $t=f(x, y, z, \tau)$ в виде дифференциального уравнения.

1.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Цель получения дифференциального уравнения теплопроводности — дать описание температурного поля тела, в котором теплота передается теплопроводностью.

Нестационарный процесс. Рассмотрим случай нестационарного процесса теплопроводности $[t=f(x, y, z, \tau)]$ в неподвижном, однородном и изотропном теле. Это упрощает вывод уравнения, ибо относительное перемещение частей тела отсутствует; в дальнейшем будет приведено и описание теплопроводности в движущейся среде. Примем также, что физические параметры тела постоянны и деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, пренебрежимо мала.

Для вывода выделим в объеме рассматриваемого тела, нагреваемого или охлаждаемого (при отсутствии внутренних источников теплоты), элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy и dz. Расположим выделенный параллелепипед относительно прямоугольной системы координат, как показано на рис. 1.2.

Вектор теплового потока через элементарный параллелепипед разложим по координатным осям. Рассматривая его составляющую в направлении оси x, обозначим в соответствии с рис. 1.2 элементарное количество теплоты, получаемое левой гранью параллелепипеда от контактирующего с ней слоя тела, через dQ_{x1}, а теплоту, передаваемую соседним слоям противоположной гранью,— dQ_{x2}.

В соответствии с законом Фурье, принимая температуру левой грани равной t, выражение для dQ_{x1} можно записать так:

$$dQ_{x1} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dy\, dz\, d\tau. \qquad (1.5)$$

Изменение температуры тела в направлении оси x обозначено $\partial t/\partial x$, на отрезке dx изменение температуры будет равно $\frac{\partial t}{\partial x} dx$, поэтому температуру противоположной правой грани параллелепипеда можно представить так: $t+\frac{\partial t}{\partial x} dx$.

Соответственно выражение для dQ_{x2} запишем в виде

$$dQ_{x2} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left[t + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) dx\right] dy\, dz\, d\tau$$

или после раскрытия квадратных скобок в правой части

$$dQ_{x2} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dy\, dz\, d\tau - \lambda \times \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx\, dy\, dz\, d\tau. \qquad (1.6)$$

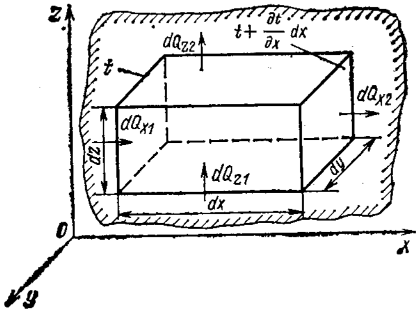


Рис. 1.2. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Представим, что теплота dQ_{x1} больше теплоты dQ_{x2}. Это значит, что параллелепипед будет нагреваться, т. е. температура его во времени будет возрастать. Количество теплоты dQ_x, пошедшей на нагрев параллелепипеда за время $d\tau$ (из составляющей, передаваемой в направлении оси x), можно получить, вычитая из правой части уравнения (1.5) правую часть уравнения (1.6):

$$dQ_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dy\, dz\, d\tau + \lambda \frac{\partial t}{\partial x} dy\, dz\, d\tau + \lambda \frac{d^2 t}{\partial x^2} dx\, dy\, dz\, d\tau = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx\, dy\, dz\, d\tau.$$

Если провести аналогичные рассуждения относительно двух других составляющих вектора теплового потока — по осям y и z, то можно записать:

$$dQ_y = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx\, dy\, dz\, d\tau;$$

$$dQ_z = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx\, dy\, dz\, d\tau.$$

Общее количество теплоты $dQ_т$, полученной путем теплопроводности и израсходованной на нагрев рассматриваемого элемента объема тела, равно сумме трех составляющих:

$$dQ_т = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz\, d\tau. \qquad (1.7)$$

В практике могут встречаться случаи, когда одновременно с этим теплота получается (или отдается) телом в результате теплового взаимодействия с внутренними источниками: положительными (прохождение электрического тока, химические реакции и т. д.) или отрицательными (испарение влаги внутри материала). Теплота, полученная от внутренних источников (при их равномерном распределении) может быть определена из соотношения

$$dQ_в = q_v\, dx\, dy\, dz\, d\tau, \qquad (1.8)$$

где q_v — мощность внутренних источников, численно равная количеству теплоты, выделяемой в единичном объеме тела в единицу времени, Вт/м³.

Тогда для полного количества введенной в объем теплоты имеем

$$dQ = dQ_т + dQ_в = \left[\lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + q_v\right)\right] dx\,dy\,dz\,d\tau. \quad (1.9)$$

В случае изобарного процесса вся теплота dQ пойдет на изменение энтальпии вещества в рассматриваемом объеме, т. е. $dQ=dI$, как это следует из закона сохранения энергии.

Изменение энтальпии можно записать в виде

$$dI = dQ = c\rho\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial t}{\partial \tau}\,d\tau, \quad (1.10)$$

где c — удельная теплоемкость; $\rho dxdydz$ — масса элементарного параллелепипеда; $\frac{\partial t}{\partial \tau}\,d\tau$ — изменение его температуры за рассматриваемый отрезок времени $d\tau$.

Приравнивая правые части уравнений (1.9) и (1.10), имеем

$$c\rho\,\frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda\nabla^2 t + q_v, \quad (1.11)$$

где $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа для температуры в декартовой системе координат.

Поделив левую и правую части уравнения (1.11) на $c\rho$, получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + q_v/(c\rho). \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) является дифференциальным уравнением теплопроводности в однородном неподвижном теле, выражающим зависимость температуры любой точки его от координат и времени, или, иначе, соотношение между временным и пространственным распределением температуры.

Здесь $a=\lambda/c\rho$ — комплексный теплофизический параметр тела, называемый коэффициентом температуропроводности. Единица измерения коэффициента температуропроводности — квадратный метр на секунду ($м^2/с$). Коэффициент a характеризует теплоинерционные свойства вещества, скорость изменения температуры в любой точке тела, поскольку в числителе его выражения находится величина λ, характеризующая способность вещества проводить теплоту, а в знаменателе — объемная теплоемкость $c\rho$ — мера тепловой инерции тела.

Следовательно, материалы, способные быстро изменять свою температуру в процессе нагрева или охлаждения, имеют высокие значения коэффициента температуропроводности, и наоборот. Очевидно, что этот коэффициент является важнейшей характеристикой при описании нестационарных процессов. Значение коэффициента температуропроводности данного вещества зависит от температуры и давления.

Поскольку вывод уравнения (1.12) основан на применении закона сохранения и превращения энергии, то его часто называют уравнением энергии.

Для систем, в которых отсутствуют внутренние источники теплоты, уравнение (1.12) примет более простую форму:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t. \tag{1.13}$$

Уравнение (1.13) описывает трехмерное температурное поле, когда температура тела переменна в направлении всех трех координатных осей. В случае двухмерного поля дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \tag{1.14}$$

и для одномерного поля

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\,\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \tag{1.15}$$

Краевые условия. Дифференциальное уравнение (1.13) относится к бесконечно малому элементу температурного поля и, взятое само по себе, не отражает развития процесса теплопроводности во всем рассматриваемом пространстве за все время, в течение которого он протекает.

Для получения полной картины, отражающей качественные и количественные признаки конкретной задачи, нужно математически поставить эту задачу. При постановке задачи нужно зафиксировать условия ее однозначности в виде геометрических условий (форма и размеры тела), физических условий (значения коэффициентов тепло- и температуропроводности), а также задать так называемые краевые условия.

В состав краевых условий к уравнению теплопроводности входят временны́е условия (начальное распределение температуры в объеме тела) и граничные условия, определяющие условия теплообмена на границах тела.

Перечисленные условия в совокупности определяют одно единственное явление и в этом смысле могут быть названы условиями единственности, а задача, решаемая с их помощью,— краевой задачей.

Начальное распределение температур в теле может быть различным. Например, в начальный момент нагревания или охлаждения ($\tau=0$) тело может иметь одинаковую температуру по всей своей массе:

$$t_{(x,\,y,\,z)} = t_{\mathbf{c}}.$$

В общем случае начальное распределение температур в теле может быть задано уравнением $t=f(x,\ y\ z)$ (при $\tau=0$).

Граничные условия формулируются обычно одним из следующих способов:

1. Граничные условия первого рода задаются распределением температуры на ограждающих поверхностях тела как функции положения точки поверхности и времени. В ряде практи-

чески важных задач оказывается возможным считать, что температура на ограничивающих поверхностях, например твердой стенки, одинакова во всех точках данной поверхности.

Очевидно, что в условиях первого рода рассматривается задача чистой теплопроводности: это единственно возможный механизм переноса теплоты сквозь стенку от одной ее граничной поверхности к другой.

2. Граничные условия второго рода состоят в задании на поверхности тела плотности теплового потока как функции времени и координат. Эти условия характерны лишь для некоторых задач теплообмена и в настоящем пособии практически не будут использоваться.

3. Граничные условия третьего рода заключаются в задании температуры среды $t_ж$, омывающей поверхность тела (жидкости или газа), и интенсивности теплообмена (теплоотдачи) между этой средой и поверхностью тела. Процесс теплоотдачи, который будет подробно рассмотрен в главе 4, описывается законом Ньютона — Рихмана, согласно которому количество теплоты, отдаваемой или получаемой телом от окружающей среды, пропорционально площади поверхности тела, разности температур между поверхностью тела (стенки) $t_с$ и средой $t_ж$ и длительности процесса:

$$Q_\tau = \alpha (t_ж - t_с) F\tau, \tag{1.16}$$

или

$$Q = \alpha (t_ж - t_с) F. \tag{1.17}$$

Коэффициент пропорциональности α называют коэффициентом теплоотдачи. В отличие от коэффициентов теплопроводности и температуропроводности коэффициент теплоотдачи не является теплофизической характеристикой вещества.

Если положить в уравнении (1.16) F и τ равными единице, то коэффициент теплоотдачи $\alpha = \dfrac{Q_\tau}{F\tau(t_ж - t_с)}$ представит собой величину, численно равную количеству теплоты, которой обменивается в единицу времени единичная поверхность тела со средой при единичной разности температур между ними. В общем случае коэффициент теплоотдачи отражает совместное действие конвекции и теплопроводности среды и поэтому зависит от многих факторов. Единицы измерения его — [Вт/(м^2·К)].

Определение значения коэффициента теплоотдачи α является сложной задачей. Такие задачи будут рассмотрены в дальнейшем. Здесь при решении отдельных задач значения α как меры интенсивности теплоотдачи будут считаться заданными.

Очевидно, что тепловой поток, отдаваемый единичной поверхностью тела среде, должен быть равен тепловому потоку, подводимому теплопроводностью из внутренних объемов тела к его поверхности, т. е.

$$\alpha (t_с - t_ж) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_с$$

или

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{\text{с}} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}), \qquad (1.18)$$

что и является наиболее общей записью граничного условия третьего рода.

Если понятия о граничных условиях третьего рода применить к случаю, когда твердая стенка разделяет собою две среды, для каждой из которых заданы $t_{\text{ж}1}$ и α_1, $t_{\text{ж}2}$ и α_2, очевидно, что при решении задачи придется рассматривать последовательную совокупность процессов теплоотдачи от одной среды к стенке, затем теплопроводности сквозь стенку и теплоотдачи от противоположной поверхности стенки ко второй среде. Таким образом, граничные условия третьего рода необходимы при рассмотрении процессов теплопередачи.

4. Граничные условия четвертого рода соответствуют теплообмену поверхности тела с окружающей средой при равенстве их температур (в условиях нестационарного температурного поля) или теплообмену соприкасающихся твердых тел, когда температуры соприкасающихся поверхностей одинаковы. При этом помимо равенства температур $T_{\text{с}1}(\tau) = T_{\text{с}2}(\tau)$ имеет место равенство тепловых потоков $-\lambda_1\left(\frac{\partial T_{\text{с}1}}{\partial n}\right)_{\text{с}} = -\lambda_2\left(\frac{\partial T_{\text{с}2}}{\partial n}\right)_{\text{с}}$.

Стационарный процесс. Для стационарного процесса теплопроводности в уравнении (1.9) $\partial t/\partial\tau = 0$. Тогда, поскольку $a \neq 0$ (как совокупность теплофизических характеристик материала), из уравнения (1.9) получим

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \qquad (1.19)$$

Еще более простой вид дифференциальному уравнению теплопроводности в стационарном процессе может быть придан для частных случаев:

для двухмерного температурного поля

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0; \qquad (1.20)$$

для одномерного температурного поля

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \qquad (1.21)$$

Очевидно, что интегрирование этих уравнений, особенно последнего, описывающего одномерное стационарное температурное поле, является наиболее простой задачей. Вместе с тем при этом могут быть получены решения, имеющие широкое прикладное значение. Теплообменные процессы в непрерывнодействующих устройствах, а также передача теплоты через ограждающие конструкции помещений при постоянных в течение длительного времени температурах наружной и внутренней сред можно рассматривать как не зависящие от времени, стационарные. Выбором формы и соотношения размеров теплопередающей стенки можно обеспечить одномерность температурного поля в ней.

Ниже рассматривается получение таких решений при задании граничных условий первого рода (процесс теплопроводности) и третьего рода (процесс теплопередачи).

Глава 2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Здесь рассматриваются теплопроводность и теплопередача в условиях отсутствия внутренних источников теплоты ($q_v=0$) для тел простейшей формы, для которых характерно одномерное температурное поле. К таким телам относятся неограниченная плоская стенка, т. е. пластина, толщина которой мала сравнительно с высотой и шириной; стенка неограниченного длинного цилиндра, диаметр которого намного меньше длины; шаровая стенка.

2.1. ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

Граничные условия первого рода (теплопроводность). Рассмотрены два случая: передача теплоты через однородную (однослойную изотропную) плоскую стенку и через многослойную плоскую стенку.

Однослойная стенка. Задачу можно формулировать так: дана неограниченная пластина толщиной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности λ; теплота передается через пластину только нормально ограничивающим ее граням (рис. 2.1).

Температуры t_{c1} и t_{c2} на обеих наружных поверхностях заданы и постоянны. Следовательно, обе наружные поверхности являются изотермическими; любое сечение по толщине стенки δ, проведенное параллельно граням, также даст изотермическую поверхность. Соответствующие изотермы показаны линиями *1*, *2*, *3* и т. д. на рис. 2.1.

Требуется найти распределение температуры и количество теплоты, проходящей через пластину площадью F за время τ.

Воспользуемся дифференциальным уравнением теплопроводности (1.21), так как задача относится к случаю стационарного температурного поля, в котором температура изменяется только по одной координате x (теплота по условию передается нормально к стенке, следовательно, температура изменяется только в этом направлении).

Частная производная в уравнении (1.21) может быть заменена полной, так как изменение температуры определяется только одной переменной x:

$$d^2t/dx^2=0.$$

Первое интегрирование этого уравнения дает

$$dt/dx=C_1. \tag{2.1}$$

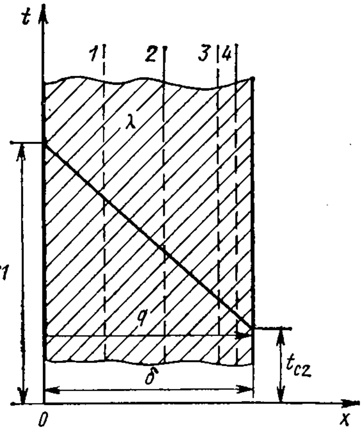


Рис. 2.1. Однородная плоская стенка. Граничные условия первого рода

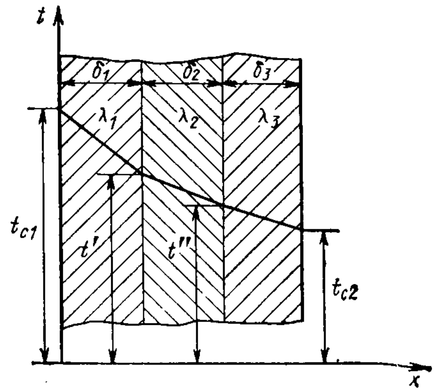


Рис. 2.2. Многослойная плоская стенка. Граничные условия первого рода

После второго интегрирования получим

$$t = C_1 x + C_2. \tag{2.2}$$

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия (рис. 2.2): $x=0$; $t=t_{c1}$; $x=\delta$; $t=t_{c2}$. При $x=0$ имеем $t_{c1}=C_2$, при $x=\delta$, $t_{c2}=C_1\delta+t_{c1}$, откуда

$$C_1 = \frac{t_{c2}-t_{c1}}{\delta}. \tag{2.3}$$

Если найденные значения постоянных подставить в уравнение (2.2), то

$$t = \frac{t_{c2}-t_{c1}}{\delta} x + t_{c1}. \tag{2.4}$$

Таким образом, мы получили ответ на один из вопросов — о распределении температуры в плоской стенке. Как видно, это распределение соответствует прямой линии, соединяющей конечные значения ординат t_{c1} и t_{c2} на двух противоположных гранях (см. рис. 2.1).

Одновременно найдено расчетное выражение температурного градиента для неограниченной пластины, ибо в соответствии с (2.1) и (2.3)

$$\mathrm{grad}_x t = \frac{dt}{dx} = C_1 = \frac{t_{c2}-t_{c1}}{\delta}. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в формулу закона Фурье, получим выражение для количества теплоты, проходящей через стенку площадью F за время τ:

$$Q_\tau = -\lambda \frac{dt}{dx} F\tau = -\lambda \frac{t_{c2}-t_{c1}}{\delta} F\tau,$$

поскольку по условию $t_{c1} > t_{c2}$

$$Q_\tau = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}) F\tau. \tag{2.6}$$

Тепловой поток

$$Q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}) F \tag{2.7}$$

и плотность теплового потока

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}),$$

или

$$q = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta/\lambda}. \tag{2.8}$$

Величину δ/λ называют термическим, или тепловым, сопротивлением теплопроводности. Единица измерения его — квадратный метр-кельвин на ватт ($м^2 \cdot К/Вт$). Численно эта величина равна падению температуры в стенке на единицу плотности теплового потока.

Многослойная плоская стенка. Рассмотрим эту задачу на примере трехслойной стенки (см. рис. 2.2), а затем полученный результат обобщим. Заданы толщины слоев, коэффициенты теплопроводности их, температуры на границах многослойной стенки t_{c1} и t_{c2}. Промежуточные температуры в плоскостях контакта слоев неизвестны, обозначим их t', t''. Контакт между слоями полагаем плотным и, следовательно, температуры поверхностей соприкасающихся слоев — одинаковыми. Изотермические поверхности представляют собою плоскости, параллельные плоскостям поверхностей слоев.

В соответствии с формулой (2.7) для первого слоя можно написать $Q = \frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_{c1} - t') F$, для второго — $Q = \frac{\lambda_2}{\delta_2}(t' - t'') F$ и для третьего — $Q = \frac{\lambda_3}{\delta_3}(t'' - t_{c2}) F$ (тепловой поток постоянен, так как процесс стационарен).

Если эту систему переписать так, чтобы в правой части остались только разности температур, т. е.

$$Q \frac{\delta_1}{\lambda_1} \frac{1}{F} = t_{c1} - t';$$

$$Q \frac{\delta_2}{\lambda_2} \frac{1}{F} = t' - t'';$$

$$Q \frac{\delta_3}{\lambda_3} \frac{1}{F} = t'' - t_{c2},$$

а затем левые и правые части уравнений сложить (для исключения незаданных промежуточных температур t', t''), то получим

$$Q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}\right)\frac{1}{F} = t_{c1} - t_{c2},$$

откуда

$$Q=\frac{(t_{c1}-t_{c2})\,F}{\delta_1/\lambda_1+\delta_2/\lambda_2+\delta_3/\lambda_3}. \quad (2.9)$$

На основании выражения (2.9) легко написать общую формулу для теплопроводности сквозь стенку, состоящую из n слоев:

$$Q=\frac{(t_{c1}-t_{c2})\,F}{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i/\lambda_i}, \qquad (2.10)$$

где i — номер слоя.

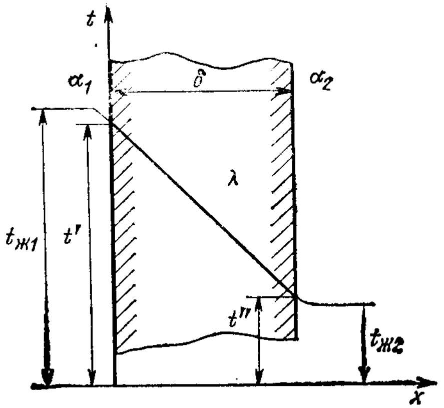


Рис. 2.3. Однородная плоская стенка. Граничные условия третьего рода

По аналогии с предыдущим суммы, стоящие в знаменателях уравнений (2.9) и (2.10), можно рассматривать как тепловое сопротивление многослойной стенки.

Граничные условия третьего рода (теплопередача). Рассмотрим также два случая: передачу теплоты через однородную (однослойную изотропную) плоскую стенку и через многослойную плоскую стенку.

Однослойная плоская стенка. В многочисленных практических задачах обычно известной является не температура поверхности стенки, как это предполагалось в двух предыдущих решениях, а температуры $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ сред, омывающих эти поверхности (рис. 2.3). Кроме того, должны быть известны коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 с той и другой стороны стенки.

Температуры поверхностей стенки неизвестны, обозначим их t' и t''. Весь процесс переноса теплоты от одной среды через стенку к другой среде (теплопередачу) мы рассматриваем состоящим из трех этапов: 1) теплоотдачи от среды с температурой $t_{ж1}$ к поверхности стенки, имеющей температуру t'; 2) теплопроводности через стенку; 3) теплоотдачи от поверхности стенки с температурой t'' к среде, имеющей температуру $t_{ж2}$ (способ учета теплообмена излучением будет показан позже, в главе 12). Первый и третий этапы процесса описываются законом Ньютона — Рихмана — уравнением (1.17), второй — формулой (2.7).

Итак, тепловой поток, передаваемый от среды, движущейся слева от стенки (см. рис. 2.3),

$$Q=\alpha_1\,(t_{ж1}-t')\,F;$$

тепловой поток, проходящий через стенку,

$$Q=\frac{\lambda}{\delta}\,(t'-t'')\,F;$$

тепловой поток, передаваемый среде от поверхности стенки справа,

$$Q=\alpha_2\,(t''-t_{ж2})\,F.$$

Эту систему можно переписать так, чтобы в правой части каждого равенства осталась разность температур. Тогда:

$$\frac{Q}{F}\frac{1}{\alpha_1}=t_{ж1}-t'; \quad \frac{Q}{F}\frac{\delta}{\lambda}=t'-t''; \quad \frac{Q}{F}\frac{1}{\alpha_2}=t''-t_{ж2}.$$

Эти формулы могут быть использованы для вычисления температур t' и t''. Если просуммировать левые и правые части этих уравнений, то получим

$$\frac{Q}{F}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}\right)=t_{ж1}-t_{ж2},$$

откуда

$$Q=\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{\delta}{\lambda}+\dfrac{1}{\alpha_2}}(t_{ж1}-t_{ж2})F. \tag{2.11}$$

Дробь, стоящую первым множителем в правой части, обозначают

$$k=\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{\delta}{\lambda}+\dfrac{1}{\alpha_2}} \tag{2.12}$$

и называют *коэффициентом теплопередачи*. Этот коэффициент в отличие от коэффициентов теплопроводности и температуропроводности не является теплофизической характеристикой хотя бы потому, что зависит от толщины стенки.

Если в формуле (2.11) принять $F=1$ м^2 и $t_{ж1}-t_{ж2}=1$, то k будет численно равен количеству теплоты, которая передается от одной среды к другой через стенку площадью 1 м^2 в единицу времени при единичной разности температур между средами. Отсюда единица измерения k — ватт на кв. метр-кельвин [Вт/(м$^2\cdot$К)], т. е. внешне такая же, как и у коэффициента теплоотдачи. Заметим, однако, что при определении k и α тепловые потоки относятся к различным по смыслу перепадам температур. Соответственно формула (2.11) может быть представлена в более краткой записи:

$$Q=kF(t_{ж1}-t_{ж2}). \tag{2.13}$$

Величину, обратную k, естественно назвать *термическим сопротивлением теплопередаче*:

$$\frac{1}{k}=R=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}.$$

Из этой формулы видно, что полное термическое сопротивление теплопередаче состоит из трех частей: сопротивлений теплоотдаче $1/\alpha_1$ и $1/\alpha_2$ и термического сопротивления теплопроводности. Единица измерения R — квадратный метр-кельвин на ватт (м$^2\cdot$К/Вт).

Многослойная плоская стенка. Рассмотрение предыдущих примеров исключает необходимость в подробном решении названной задачи, так как оно совершенно аналогично предыдущему. Отличие будет только в том, что вместо одного слоя стенка состоит из нескольких слоев, поэтому в формуле для коэффициента

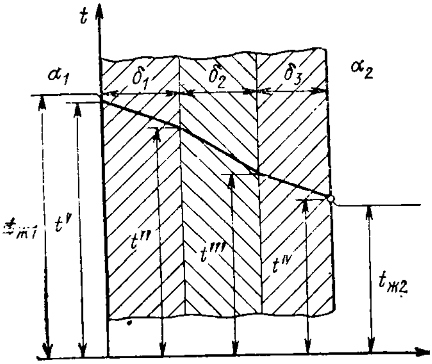


Рис. 2.4. Многослойная плоская стенка. Граничные условия третьего рода

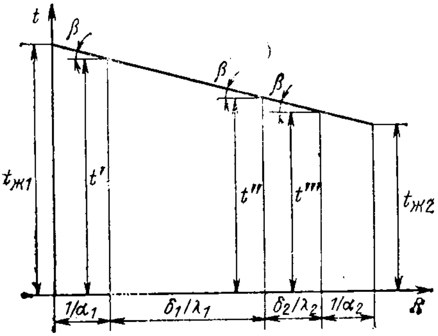


Рис. 2.5. Определение промежуточных температур

теплопередачи в знаменатель будет входить вместо термического сопротивления одного слоя сумма термических сопротивлений теплопроводности всех слоев. Таким образом, для теплоты, передаваемой через многослойную стенку, будет справедливо уравнение

$$Q_\tau = k\,(t_{ж1} - t_{ж2})\,F\tau, \tag{2.14}$$

которое верно и для однослойной стенки, так как равнозначно формуле (2.13), только для многослойной стенки

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i/\lambda_i + 1/\alpha_2}. \tag{2.15}$$

В каждом слое многослойной стенки температура будет изменяться по закону прямой, однако угол наклона прямой к оси x будет в каждом слое различен, так как различны значения δ и λ (рис. 2.4).

Графическое определение промежуточных температур. Часто бывает нужным определение температур t', t'', t''', t^{IV} в многослойной стенке (см. рис. 2.4). Их можно найти аналитически, используя систему уравнений вида (2.10). Кроме того, эти температуры легко найти графически, если осуществить следующее несложное построение: по оси x отложить в любом масштабе термические сопротивления, а по оси ординат — слева температуру $t_{ж1}$, а справа — $t_{ж2}$ и концы этих ординат соединить прямой (рис. 2.5). Тогда точки пересечения этой прямой с перпендикулярами, восстановленными для каждого из термических сопротивлений, будут иметь ординаты, численно равные температурам между слоями. Иначе, в координатах R—t изменение температуры в многослойной стенке изображается прямой линией. Справедливость изложенного легко подтвердить, доказав, что в таких координатах угол β наклона прямой, характеризующей изменение температуры, будет постоянным и одинаковым для всех слоев. С этой целью на основании закона Ньютона — Рихмана запишем величину термического сопротивления теплоотдаче с левой стороны стенки:

$$\frac{1}{\alpha_1}=\frac{q}{t_{ж1}-t'} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{t_{ж1}-t'}{1/\alpha_1}=q,$$

где q — плотность теплового потока.

Для первого слоя на основании уравнения (2.8) можно записать

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{t'-t''}{\delta_i/\lambda_i}=q.$$

Так как при стационарном температурном поле плотность теплового потока будет одной и той же для любого слоя, то это подтверждает постоянство угла наклона прямой, характеризующей изменение температуры в многослойной стенке в координатах R—t, т. е. правильность построения на рис. 2.5.

2.2. ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ СТЕНКУ

Граничные условия первого рода (теплопроводность). Рассмотрены два случая: передача теплоты через однослойную цилиндрическую стенку и через многослойную цилиндрическую стенку.

Однослойная цилиндрическая стенка. Рассматривается неограниченный цилиндр, для которого характерно одномерное температурное поле, когда температура стенки изменяется только в радиальном направлении и, следовательно, изотермическими являются концентрические цилиндрические поверхности в теле трубы (рис. 2.6). Внутренний радиус трубы r_1, наружный — r_2, ее длина l, коэффициент теплопроводности материала стенки $\lambda=\text{const}$ (стенка однородная и изотропная).

Граничными условиями задано: при $r=r_1$ $t=t_{c1}$ (на внутренней поверхности трубы); при $r=r_2$ $t=t_{c2}$ (на наружной поверхности трубы).

Выделим в стенке трубы цилиндрическую поверхность, имеющую радиус r, и запишем выражение для теплового потока через эту поверхность в соответствии с законом Фурье (1.2), выразив площадь выделенной поверхности через $2\pi rl$,

$$Q=-\lambda(dt/dr)\,2\pi rl.$$

Выражение для температурного градиента здесь записано в виде dt/dr, поскольку температура стенки изменяется только в направлении радиуса.

Обозначая

$$-Q/2\pi l\lambda=A, \tag{2.16}$$

перепишем исходное уравнение в виде $dt=A\,(dr/r)$. После интегрирования получим

$$t=A\ln r+B. \tag{2.17}$$

Это выражение показывает, что изменение температуры в стенке цилиндрической трубы подчиняется закону логарифмической кривой (при $\lambda=\text{const}$ и при отсутствии внутренних источников теплоты) — см. рис. 2.6.

Освободимся от постоянной интегрирования B, для чего воспользуемся граничными условиями:

$$t_{c1}=A\ln r_1+B;\ t_{c2}=A\ln r_2+B.$$

Вычтем из первого уравнения второе, тогда получим

$$A=\frac{t_{c1}-t_{c2}}{\ln(r_1/r_2)}. \qquad (2.18)$$

Тепловой поток можно определить, если найденное значение A из (2.18) подставить в (2.16). При этом, чтобы устранить минус в левой части уравнения, надо под знаком логарифма изменить отношение радиусов на обратное. Тогда

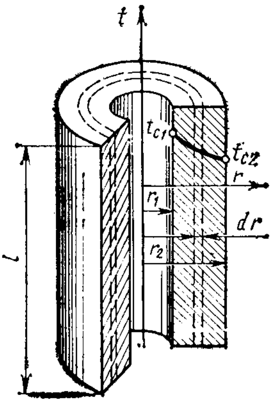


Рис. 2.6. Однородная цилиндрическая стенка. Граничные условия первого рода

$$Q=\frac{2\pi l\lambda(t_{c1}-t_{c2})}{\ln(r_2/r_1)},$$

или

$$Q=\frac{2\pi l(t_{c1}-t_{c2})}{(1/\lambda)\ln(r_2/r_1)}=\frac{\pi l(t_{c1}-t_{c2})}{(1/2\lambda)\ln(d_2/d_1)}. \qquad (2.19)$$

Величина $\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}$ имеет единицу измерения метр-кельвин на ватт (м·К/Вт) и называется линейным термическим сопротивлением цилиндрической стенки.

Многослойная цилиндрическая стенка. Записав уравнения (2.19) для каждого слоя многослойной цилиндрической стенки, состоящей из n слоев, для каждого из которых заданы $r_{нар}$, $r_{вн}$ и λ, и решив эти уравнения совместно, подобно тому, как это делалось в предыдущей задаче, получим

$$Q=\frac{2\pi l(t_{c1}-t_{c2})}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{r_{i+1}}{r_i}}=\frac{\pi l(t_{c1}-t_{c2})}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}. \qquad (2.20)$$

Граничные условия третьего рода (теплопередача). Рассмотрим два случая: передача теплоты через однослойную цилиндрическую стенку и через многослойную цилиндрическую стенку.

Однослойная цилиндрическая стенка. Задача решается аналогично тому, как это делалось для плоской стенки. Примем (рис. 2.7) $t_{ж1}>t_{ж2}$, т. е. теплота передается изнутри трубы наружу. Тогда тепловой поток, передаваемый средой к внутренней поверхности стенки, по формуле (1.17) равен

$$Q=\alpha_1(t_{ж1}-t')2\pi r_1 l.$$

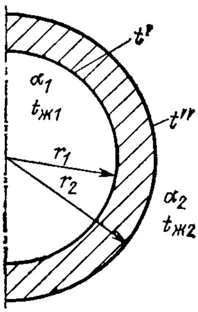


Рис. 2.7. Однородная цилиндрическая стенка. Граничные условия третьего рода

Тепловой поток, передаваемый через стенку трубы, в соответствии с формулой (2.19)

$$Q=\frac{2\pi l\lambda\,(t'-t'')}{\ln (r_2/r_1)}.$$

Тепловой поток, передаваемый наружной поверхностью трубы среде,

$$Q=\alpha_2\,(t''-t_{ж2})\,2\pi r_2 l.$$

Полученную систему перепишем так, чтобы в правой части каждого уравнения осталась только разность температур:

$$\frac{Q}{2\pi l}\frac{1}{\alpha_1 r_1}=t_{ж1}-t';$$

$$\frac{Q}{2\pi l}\frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}=t'-t'';$$

$$\frac{Q}{2\pi l}\frac{1}{\alpha_2 r_2}=t''-t_{ж2}.$$

Суммируя левые и правые части этих уравнений, найдем

$$\frac{Q}{2\pi l}\left(\frac{1}{\alpha_1 r_1}+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{1}{\alpha_2 r_2}\right)=t_{ж1}-t_{ж2},$$

откуда получим расчетную формулу для теплового потока

$$Q=\frac{2\pi l\,(t_{ж1}-t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 r_1}+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{1}{\alpha_2 r_2}}.$$

Вводя вместо радиусов диаметры, найдем

$$Q=\frac{\pi l\,(t_{ж1}-t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1}+\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}+\frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \qquad (2.21)$$

Обозначим

$$k_l=\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1}+\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}+\frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \qquad (2.22)$$

С учетом (2.22) уравнение (2.21) запишется в виде

$$Q=k_l\pi l\,(t_{ж1}-t_{ж2}). \qquad (2.23)$$

Величина k_l называется **линейным коэффициентом теплопередачи**. Единица его измерения — ватт на метр-кельвин [Вт/(м·К)]. Коэффициент k_l численно равен теплоте, которая проходит через стенку трубы длиной 1 м в единицу времени от одной среды к другой при единичной разности температур между ними.

Величина, обратная линейному коэффициенту теплопередачи, называется **линейным термическим сопротивлением**; оно равно

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

Единица измерения R_l — метр-кельвин на ватт (м·К/Вт). Величины $\frac{1}{\alpha_1 d_1}$ и $\frac{1}{\alpha_2 d_2}$ называют линейными термическими сопротивлениями теплоотдаче; $\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$, как уже указывалось,— линейным термическим сопротивлением теплопроводности.

Тепловой поток [формула (2.21)] может быть отнесен либо к единице длины трубы, либо к единице площади внутренней или наружной поверхности.

В первом случае получим линейную плотность теплового потока q_l (Вт/м):

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{\pi (t_{ж1} - t_{ж2})}{R_l};$$

во втором — плотность теплового потока через единицу площади соответствующей поверхности q (Вт/м²):

$$q_1 = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2})}{R_l d_1}$$

или

$$q_2 = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2})}{R_l d_2}.$$

Очевидно, что

$$q_l = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2.$$

Упрощение формулы теплопередачи через стенку трубы. Полученное выражение (2.21) для теплового потока через стенку трубы более сложно для расчетов, нежели соответствующая формула (2.11) для плоской стенки. В принципе можно использовать формулу (2.11) для расчета теплопередачи через цилиндрическую стенку, выразив в (2.11) площадь теплопередающей поверхности как $\pi d_x l$, т. е.

$$Q = \frac{\pi d_x l (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \tag{2.24}$$

Однако при этом придется решать вопрос об определении неизвестного d_x, по которому нужно вычислять площадь теплопередающей поверхности трубы — величину переменную в направлении теплового потока.

Значение d_x должно удовлетворять равенству

$$Q = \frac{\pi l (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} = \frac{\pi d_x l (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

и может быть найдено из него:

$$d_x = \frac{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}}{\frac{1}{\alpha_1 d_1}+\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}+\frac{1}{\alpha_2 d_2}}.$$

Очевидно, что в общем случае упрощение расчетов этим не достигается. Определение d_x может быть существенно упрощено для однослойных металлических труб, имеющих обычно малую толщину стенки (δ мало, отношение d_2/d_1 близко к 1) и большой коэффициент теплопроводности. Тогда в формуле для d_x можно без существенной погрешности пренебречь средними слагаемыми числителя и знаменателя как величинами, пренебрежимо малыми по сравнению с другими слагаемыми, и она примет вид

$$d_x \simeq \frac{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}}{\frac{1}{\alpha_1 d_1}+\frac{1}{\alpha_2 d_2}}.$$

В конкретных ситуациях возможно дальнейшее упрощение выбора расчетной величины d_x.

Рассмотрим три возможных варианта соотношений условий теплообмена на границах стенки.

1. Коэффициент теплоотдачи к внутренней поверхности значительно больше, чем коэффициент теплоотдачи к наружной поверхности трубы $\alpha_1 \gg \alpha_2$. В этом случае $\frac{1}{\alpha_1} \ll \frac{1}{\alpha_2}$. Поэтому первыми слагаемыми в числителе и знаменателе правой части последнего равенства можно пренебречь и принять $d_x \approx d_2$.

2. $\alpha_2 \gg \alpha_1$. В этом случае можно отбросить вторые слагаемые в числителе и знаменателе и получить $d_x \approx d_1$.

3. Коэффициенты теплоотдачи на обеих поверхностях одного порядка $\alpha_1 \approx \alpha_2$, тогда

$$d_x \approx \frac{2/\alpha}{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)} \approx \frac{d_1 d_2}{\frac{d_1+d_2}{2}}.$$

Если ввести обозначение среднего диаметра трубы $d_{\text{ср}} = \frac{d_1+d_2}{2}$, то, поскольку $d_1 = d_{\text{ср}} - \delta$ и $d_2 = d_{\text{ср}} + \delta$, где δ — толщина трубы,

$$d_x \approx \frac{(d_{\text{ср}}-\delta)(d_{\text{ср}}+\delta)}{d_{\text{ср}}} \approx \frac{d_{\text{ср}}^2-\delta^2}{d_{\text{ср}}} \approx d_{\text{ср}},$$

ибо очевидно, что для тонкостенной трубы $\delta^2 \ll d_{\text{ср}}^2$ и величиной δ^2 можно пренебречь.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом: расчет теплового потока через тонкостенные металлические трубы можно вести по формуле плоской стенки (2.24), при этом для определения площади теплопередающей поверхности нужно брать тот диаметр, со стороны которого меньше коэффициент теплоотдачи. В случае примерно одинаковых коэффициентов теплоотдачи расчет необходимо вести по среднему диаметру.

Многослойная цилиндрическая стенка. Совершенно так же, как это было сделано для однослойной стенки, можно вывести формулу для трубы, состоящей из n слоев. Запишем формулу по аналогии с уравнением (2.21)

$$Q = \frac{\pi l (t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}. \qquad (2.25)$$

Индекс i указывает номер произвольного i-го слоя, при этом d_{i+1} и d_i — наружный и внутренний диаметр i-го слоя.

Выбор материала тепловой изоляции трубопроводов. Критический диаметр изоляции. В практике часто возникает необходимость уменьшения теплового потока через ограждающие стенки путем нанесения на них дополнительного теплоизолирующего слоя какого-нибудь материала.

При этом, если такой слой наносится на плоскую стенку, площадь поверхности теплообмена не изменяется в направлении теплового потока, и поэтому не возникает вопроса о принципиальной пригодности того или иного материала для тепловой изоляции стенки. Любой материал в той или иной степени уменьшит тепловой поток.

При нанесении дополнительного слоя на цилиндрическую стенку одновременно с ростом сопротивления теплопроводности наблюдаются увеличение наружной теплоотдающей поверхности и вследствие этого уменьшение сопротивления теплоотдаче к внешней среде. Поэтому результат нанесения дополнительного слоя может быть двояким: в зависимости от теплопроводящих свойств материала этого слоя суммарный тепловой поток через изолированный цилиндр может как уменьшаться, так и увеличиваться. Отсюда возникает вопрос о выборе материала, пригодного для тепловой изоляции цилиндра.

Предположим, что мы имеем трубу с внутренним диаметром d_1 и наружным d_2, которую нужно изолировать для уменьшения теплопотерь. Обозначим наружный диаметр изоляции через d_3 (внутренним диаметром изоляции, естественно, будет d_2), тогда в соответствии с формулой (2.25) полное линейное термическое сопротивление изолированного трубопровода

$$R_{l_{общ}} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_с} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}, \qquad (2.26)$$

где $\frac{1}{\alpha_1 d_1} = R_{l_1}$ — линейное термическое сопротивление теплоотдаче внутри трубы; $\frac{1}{2\lambda_с} \ln \frac{d_2}{d_1} = R_{l_2}$ — линейное термическое сопротивление стенки трубы; $\frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_3}{d_2} = R_{l_3}$ — линейное термическое сопротивление слоя изоляции; $\frac{1}{\alpha_2 d_3} = R_{l_4}$ — линейное термическое сопротивление теплоотдаче от наружной поверхности.

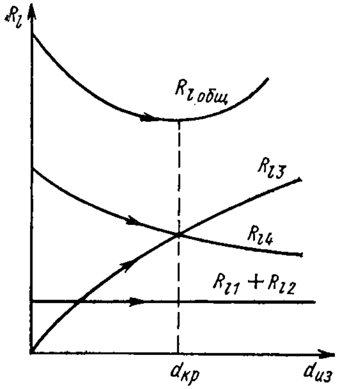


Рис. 2.8. К понятию о критическом диаметре изоляции трубопровода

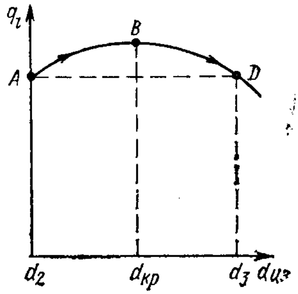


Рис. 2.9. Зависимость теплопотерь от диаметра изоляции трубопровода

Первые два слагаемых правой части уравнения (2.26) не зависят от наружного диаметра изоляции $d_з$, поэтому сумма этих сопротивлений на графике (рис. 2.8) может быть показана прямой, параллельной оси абсцисс. Два последних слагаемых зависят от $d_з$, но эта зависимость различна: если линейное термическое сопротивление самой изоляции $R_{lз}$ с ростом толщины изоляции, т. е. с увеличением $d_з$, будет повышаться, то линейное термическое сопротивление теплоотдаче на наружной поверхности изолированного трубопровода R_{l4} с увеличением $d_з$ будет понижаться ($d_з$ находится в знаменателе). Суммирование термических сопротивлений даст полное термическое сопротивление $R_{l\,общ}$ (верхняя кривая на рис. 2.8). Кривая имеет явно выраженный минимум при наружном диаметре изоляции $d_з$, который называется **критическим**.

Для определения численного значения критического диаметра изоляции исследуем уравнение (2.26) на экстремум.

Взяв первую производную от правой части уравнения по $d_з$ и приравняв ее нулю, получим

$$\frac{\partial (R_{l\,общ})}{\partial (d_з)} = \frac{1}{2\lambda_{из} d_з} - \frac{1}{\alpha_2 d_з^2} = 0.$$

Тогда диаметр изоляции, отвечающий экстремальной точке кривой $R_{l\,общ} = f(d_з)$, определится формулой

$$d_з = d_{кр} = 2\lambda_{из}/\alpha_2. \qquad (2.27)$$

Из формулы (2.27) следует, что критический диаметр изоляции не зависит от размеров трубопровода и не имеет геометрического смысла, хотя и измеряется линейной величиной (в метрах). Он будет тем меньше, чем меньше теплопроводность изоляции и чем больше коэффициент теплоотдачи α_2 от наружной поверхности изоляции к окружающей среде.

Вторая производная от $R_{l\,\text{общ}}$ больше нуля. Значит, критический диаметр соответствует минимуму термического сопротивления и, следовательно, максимуму теплового потока, как это показано на рис. 2.9. Из рис. 2.9 видно, что если на трубопровод наружным диаметром d_2 наносить материал, для которого расчетное значение $d_{\text{кр}}$ оказалось большим, чем d_2, то тепловые потери будут возрастать по сравнению с теплопотерями оголенного трубопровода (линия AB), достигнут максимума при $d_3=d_{\text{кр}}$ и только при нанесении изоляции толщиной $(d_3'-d_2)/2$ вновь станут такими же, как и для неизолированного трубопровода (точка D). Таким образом, окажется, что этот слой изоляции был нанесен напрасно.

Следовательно, для создания эффективной тепловой изоляции трубопровода необходимо, чтобы критический диаметр был меньше внешнего диаметра неизолированной трубы, т. е. $d_{\text{кр}} \leqslant d_2$ (см. рис. 2.9). Только при этом условии нанесение слоя изоляции любой толщины будет вызывать немедленное снижение теплопотерь (ветвь кривой *ВД*). Таким образом, для того чтобы изоляция вызвала уменьшение теплопотерь по сравнению с неизолированным трубопроводом при данном наружном диаметре трубы d_2 и заданном коэффициенте теплоотдачи α_2, необходимо подобрать такой теплоизоляционный материал, для которого $d_{\text{кр}} = \frac{2\lambda_{\text{из}}}{\alpha_2} \leqslant d_2$, т. е. коэффициент теплопроводности материала должен удовлетворять условию

$$\lambda_{\text{из}} \leqslant \frac{\alpha_2 d_2}{2}. \tag{2.28}$$

Например, для изоляции трубы диаметром $d_2=30$ мм предполагалось использовать пенобетон с коэффициентом теплопроводности $\lambda=0{,}26$ Вт/(м·К). Задан коэффициент теплоотдачи $\alpha_2=5$ Вт/(м²·К). Так как критический диаметр пенобетона

$$d_{\text{кр}} = \frac{2\lambda_{\text{из}}}{\alpha_2} = 2\cdot 0{,}26/5 = 0{,}104 \text{ м} = 104 \text{ мм} > d_2,$$

применять его для тепловой изоляции данной трубы нецелесообразно. В условиях поставленной задачи пригодны материалы, имеющие коэффициент теплопроводности

$$\lambda_{\text{из}} \leqslant 5\cdot 0{,}03/2 \leqslant 0{,}075 \text{ Вт/(м·К)},$$

а пенобетон может быть использован для изоляции труб диаметром $d_2 > 104$ мм.

Соотношение $d_2 < d_{\text{кр}}$, при котором нанесение дополнительного слоя материала на цилиндр приводит к увеличению теплопотерь, также может интересовать практику. Именно такое «охлаждающее» действие должна оказывать, например, электрическая изоляция, наносимая на проводники, из которых формируются обмотки электромашин. В этом случае теплофизические свойства наносимого материала должны удовлетворять условию

$$\lambda_{\text{из}} \geqslant \frac{\alpha_2 d_2}{2}.$$

Все сказанное в настоящем разделе, очевидно, относится не только к трубам круглого сечения, но и к телам иной геометрической формы, у которых площади внутренней и внешней поверхностей различны.

2.3. ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ ОДНОСЛОЙНУЮ ШАРОВУЮ СТЕНКУ

Граничные условия первого рода (теплопроводность). Задано: радиусы внутренней и наружной поверхностей r_1 и r_2, температуры их t_{c1} и t_{c2}, коэффициент теплопроводности материала стенки $\lambda=\text{const}$, процесс стационарный; изотермические поверхности — сферы, имеющие общий центр. Требуется получить уравнение температурного поля стенки, а также формулу для вычисления теплового потока. Используем тот же способ решения задачи, что и при расчете цилиндрической стенки. На основании закона Фурье запишем выражение для теплового потока через шаровую поверхность радиусом r

$$Q=-\lambda\frac{dt}{dr}4\pi r^2, \text{ откуда } dt=-\frac{Q}{4\pi\lambda}\frac{dr}{r^2},$$

т. е. температура по толщине шаровой стенки изменяется по гиперболическому закону.

Обозначая

$$-\frac{Q}{4\pi\lambda}=A, \tag{2.29}$$

интегрируем полученное уравнение

$$t=\frac{A}{r}+B.$$

Так как нам заданы граничные условия первого рода, то

$$t_{c1}=\frac{A}{r_1}+B; \quad t_{c2}=\frac{A}{r_2}+B.$$

После вычитания получим:

$$t_{c1}-t_{c2}=A\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right);$$

$$A=\frac{t_{c1}-t_{c2}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}.$$

Подставляя найденное значение A в уравнение (2.29), определим тепловой поток

$$Q=\frac{4\pi\lambda(t_{c1}-t_{c2})}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}, \text{ или } Q=\frac{2\pi\lambda(t_{c1}-t_{c2})}{\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}}. \tag{2.30}$$

Граничные условия третьего рода (теплопередача). В этом случае, имея заданными температуры сред $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2, для стационарного процесса можем записать:

$$\left.\begin{aligned} &Q=\alpha_1\pi d_1^2(t_{ж1}-t'); \\ &Q=\frac{2\pi\lambda(t'-t'')}{\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}}; \quad Q=\alpha_2\pi d_2^2(t''-t_{ж2}). \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

Из совместного решения этих уравнений получим

$$Q=\frac{\pi(t_{ж1}-t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2}+\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right)+\frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}=k_ш\pi(t_{ж1}-t_{ж2}). \tag{2.32}$$

Величина $k_ш=\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2}+\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right)+\frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}$ называется коэффициентом теплопередачи шаровой стенки (Вт/К), обратная ей величина — термическим сопротивлением теплопередаче шаровой стенки $R_ш$ (К/Вт).

Из уравнений системы (2.31) и уравнения (2.32) можно получить формулы для расчета температур на поверхностях слоев:

$$\left.\begin{aligned} &t_{с1}=t_{ж1}-k_ш\frac{t_{ж1}-t_{ж2}}{\alpha_1 d_1^2}; \\ &t_{с2}=t_{ж2}+k_ш\frac{t_{ж1}-t_{ж2}}{\alpha_2 d_2^2}, \quad \text{или} \\ &t_{с2}=t_{ж1}-\frac{k_ш(t_{ж1}-t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2}+\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

Для многослойной шаровой стенки формула теплового потока сохранит вид (2.32):

$$Q=k_ш\pi(t_{ж1}-t_{ж2}),$$

но коэффициент теплопередачи будет вычисляться по формуле

$$k_ш=\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\lambda_i}\left(\frac{1}{d_i}-\frac{1}{d_{i+1}}\right)+\frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}^2}},$$

где n — число слоев.

Критический диаметр шаровой стенки. Все соображения, приведенные выше по поводу выбора тепловой изоляции цилиндрической стенки, сохраняют силу и в данном случае. Применяя тот же метод решения, можно получить формулу для критического диаметра изоляции шаровой стенки

$$d_{кр}=\frac{4\lambda_ш}{\alpha_2}. \tag{2.34}$$

Теплоизолирующими свойствами будет обладать такой материал, для которого $d_{кр}<d_2$ — наружного диаметра шаровой стенки.

Глава 3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

3.1 ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ

Процессы передачи теплоты, в которых температурное поле и поле теплового потока изменяются во времени, называются нестационарными.

Нестационарные тепловые процессы в технике и природе встречаются практически чаще, чем стационарные. Нагрев или охлаждение приборов и машин при пуске, останове или изменении режима; конструктивных элементов зданий и других сооружений при изменении наружной температуры; термическая обработка продуктов и изделий; работа регенеративных теплообменных аппаратов — все это примеры нестационарных тепловых процессов.

Длительность процессов нестационарного конвективного теплообмена и излучения сравнительно мала и не имеет существенного влияния на формирование температурных полей тел в нестационарном режиме, поэтому эти процессы пока мало изучены — их нестационарностью обычно пренебрегают. Процессы же теплопроводности, наоборот, оказывают решающее влияние на формирование температурных полей при нестационарном тепловом состоянии отдельных тел и систем, поэтому задачи нестационарной теплопроводности давно привлекают внимание ученых: некоторые из этих задач решены еще в начале XIX в., задолго до оформления науки о теплообмене в самостоятельную дисциплину.

Процессы нестационарной теплопроводности можно разделить на две группы: а) нестационарные процессы, связанные с нарушением теплового равновесия, когда с течением времени система стремится к некоторому новому равновесному состоянию; б) нестационарные процессы, связанные с периодическим изменением теплового состояния тела (периодические изменения температуры окружающей среды или мощности тепловых источников и т. п.).

На рис. 3.1 в качестве примера процесса первой группы представлен характер изменения по времени температуры в отдельных точках тела, первоначально имевшего во всем объеме постоянную температуру $t_{нч}$, после внезапного погружения его в жидкость, температура которой поддерживается равной $t_ж=\mathrm{const}$, причем $t_ж<t_{нч}$. Очевидно, что нестационарный процесс в этом случае связан с охлаждением тела. С течением времени температура тела стремится к температуре жидкости (к новому равновесному состоянию). Отметим, что различные точки тела охлаждаются с разной скоростью: так, в начале процесса скорость изменения температуры центральных точек настолько мала, что их температуру можно считать практически неизменной, равной $t_{нч}$, в то время как температура точек, расположенных на поверхности тела, изменяется существенно уже в начале процесса.

Ко второй группе относится, например, процесс, вызванный гармоническими колебаниями температуры окружающей среды у

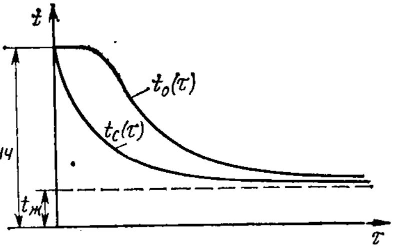


Рис. 3.1. Характер изменения температуры при охлаждении тела:
$t_c(\tau)$ — температура точки на поверхности; $t_0(\tau)$ — температура точки, расположенной в центре

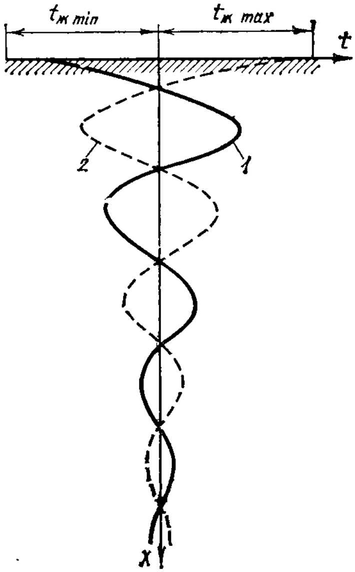


Рис. 3.2. Распределение температур по глубине массивного тела при гармонических колебаниях температуры окружающей среды $t_ж$:
1—$\tau/\tau_0=0$; 1; 2; ... — распределение температур при максимальном значении температуры среды $t_{ж\,max}$; 2—$\tau/\tau_0=0{,}5$; 1,5; .... — то же, при $t_{ж\,min}$ (τ_0 — период колебаний)

поверхности массивного тела: характер изменения температуры по глубине массивного тела при этом имеет вид, показанный на рис. 3.2

В большинстве задач нестационарной теплопроводности требуется найти температуры в определенных точках тела в заданный момент времени τ от начала процесса. Возможна и обратная задача: найти длительность процесса, в результате которого температура в данной точке тела примет определенное, наперед заданное значение. Наконец, в некоторых задачах бывает необходимо найти тепловой поток в определенной точке в заданный момент времени или полное количество теплоты, отданной (или полученной) телом в течение заданного промежутка времени.

В дальнейшем будет показано, что все перечисленные задачи сводятся к нахождению температуры рассматриваемого тела как функции времени и координат $t=f(\tau, x, y, z)$.

Эту зависимость можно найти, если проинтегрировать выведенное ранее (в главе 1) дифференциальное уравнение теплопроводности (1.13) при заданных краевых условиях.

Для некоторых конкретных задач теплопроводности дифференциальное уравнение может быть упрощено: в случае передачи теплоты в одном направлении задача становится одномерной и описывается дифференциальным уравнением вида (1.15); при распространении теплоты в двух направлениях задача является двухмерной и описывается дифференциальным уравнением (1.14). Для тел цилиндрической формы удобно перейти к цилиндрическим координатам, а для тел шаровой формы — к сферическим. Так, дифференциальное уравнение теплопроводности осесимметричной задачи в цилиндрической системе координат представляется выражением

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right),$$

где x и r — соответственно направления вдоль оси и вдоль радиуса цилиндра.

Дифференциальное уравнение и краевые условия полностью формулируют задачу. Дальнейшее аналитическое ее решение сводится к использованию методов, разработанных математической физикой. К основным из них относятся метод разделения переменных, методы интегральных преобразований (например, Лапласа), метод мгновенных точечных источников. Кроме аналитических для решения задач нестационарной теплопроводности применяют приближенные методы (см. разделы 3.7—3.12).

Систематическое изложение аналитических методов можно найти в монографиях [16, 24]. В следующем параграфе рассмотрено решение задачи нестационарной теплопроводности на примере охлаждения неограниченной пластины.

3.2. ОХЛАЖДЕНИЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ БЕЗ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛОТЫ

Постановка задачи. Рассматриваемая схема решения может быть использована во всех задачах нестационарной теплопроводности, для которых температурное поле одномерно. Можно сказать, что окончательный результат решения в равной мере применим как при охлаждении, так и при нагреве тела: условие о том, что пластина охлаждается, принято только для конкретности рассуждений и выкладок.

Будем рассматривать задачу теплопроводности при постоянных значениях теплофизических характеристик тела (λ, c, ρ) с граничными условиями третьего рода, так как они наиболее часто встречаются на практике и являются наиболее общими. Ниже показано, что граничные условия первого рода являются частным случаем граничных условий третьего рода.

Задача формулируется следующим образом. Плоская неограниченная пластина толщиной δ, имеющая во всех точках одинаковую начальную температуру $t_{нч}$, в момент времени $\tau=0$ помещается в среду, температура которой $t_ж<t_{нч}$. Температура среды во время охлаждения поддерживается постоянной. Охлаждение пластины происходит через обе ее поверхности с одинаковой интенсивностью путем теплоотдачи, иными словами, тепловой поток на поверхности подчиняется закону Ньютона — Рихмана $q=\alpha(t_с—t_ж)$. Коэффициент теплоотдачи α известен и не меняется в течение всего процесса. Известен также материал, из которого выполнена пластина, т. е. известны его теплофизические характеристики λ, c, ρ, a.

Требуется найти температурное поле пластины в произвольный момент времени $\tau>0$. Математически задачу можно сформулировать следующим образом. Дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерной задачи без внутренних источников теплоты

$$\partial t/\partial\tau = a\,(\partial^2 t/\partial x^2), \qquad (3.1)$$

где x может изменяться в пределах $0 \leqslant x \leqslant \delta/2$: так как охлаждение пластины происходит симметрично, целесообразно поместить начало координат в середину пластины и рассматривать процесс только в одной ее половине (рис. 3.3).

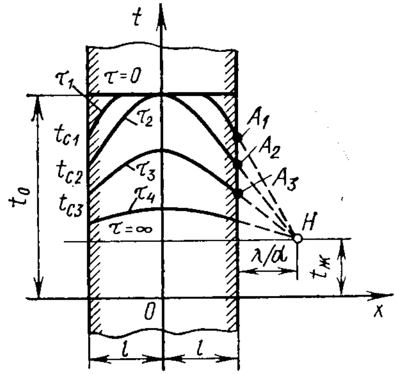


Рис. 3.3. Схема охлаждения пластины (граничные условия третьего рода)

Краевые условия:

1) начальное условие при $\tau=0$ и $0 \leqslant x \leqslant l$ $t=t_{нч}$, где $l=\delta/2$;

2) граничные условия: а) при $x=0$ и $\tau>0$ $(\partial t/\partial x)_0=0$, так как при симметричном охлаждении в середине пластины в любой момент времени температура будет максимальной; б) при $x=l$ и $\tau>0$ $-\lambda\,(\partial t/\partial x)_c = \alpha\,(t_c - t_ж)$.

Последнее выражение записано на основании равенства тепловых потоков на поверхности пластины: подходящего к поверхности из внутренних областей тела путем теплопроводности и отводимого от поверхности в процессе теплоотдачи.

Решение задачи в общем виде можно представить как функцию независимых переменных x и τ и параметров процесса a, λ, α, l, $t_{нч}$, $t_ж$:

$$t = f\,(\tau,\ x,\ a,\ \lambda,\ \alpha,\ l,\ t_{нч},\ t_ж). \qquad (3.2)$$

Следуя методу подобия, приведем условия задачи к безразмерной форме; это значительно сокращает число переменных, придает полученному решению обобщенность, а также упрощает анализ решения (подробнее преимущества такой формы записи уравнений поясняются в главе 5, в которой рассматриваются основные положения теории подобия).

Выполним операцию приведения уравнения (3.1) к безразмерной форме. Для этого произведем сначала замену искомой величины t так называемой избыточной температурой $\vartheta = t - t_ж$. Это равносильно тому, что отсчет температуры ведется не от общепринятого нуля (0°С или 0 К), а от известной в данной задаче температуры — температуры среды.

Так как $d\vartheta = dt$, то запись дифференциального уравнения и граничных условий от такой замены не изменится:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = a\left(\frac{\partial^2\vartheta}{dx^2}\right); \qquad (3.3)$$

при $$\tau = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l\ \ \vartheta = \vartheta_{нч}, \qquad (3.4)$$

где $\vartheta_{нч} = t_{нч} - t_ж$;

при $x=0,\ \tau>0\ (\partial\vartheta/\partial x)_0=0;$ (3.5)

при $x=l,\ \tau>0\ (\partial\vartheta/\partial x)_с=-(\alpha/\lambda)\,\vartheta_с,$ (3.6)

где $\vartheta_с=t_с-t_ж$.

Теперь переходим непосредственно к приведению уравнения и граничных условий к безразмерному виду. Для этого еще раз произведем замену переменных: вместо избыточной температуры искомой величиной введем так называемую безразмерную избыточную температуру $\Theta=\vartheta/\vartheta_{нч}=(t-t_ж)/(t_{нч}-t_ж)$ (далее для краткости Θ называется просто безразмерной температурой). Вместо координаты x введем безразмерную координату $X=x/l$. Такая замена равносильна тому, что в качестве масштаба для измерения температуры используется величина $\vartheta_{нч}$, а в качестве масштаба длины — величина l.

Для сохранения равенств исходные уравнения в соответствующих местах необходимо домножить на масштабы температуры и длины. Проделаем указанную операцию с дифференциальным уравнением (3.3):

$$\vartheta_{нч}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=a\cdot\frac{\vartheta_{нч}}{l^2}\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2},$$

или после сокращения и преобразования

$$\frac{\partial\Theta}{\partial(a\tau/l^2)}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}.$$

В такой форме дифференциальное уравнение безразмерно. В самом деле, легко убедиться, что величина l^2/a имеет размерность времени и потому комплекс $a\tau/l^2$ безразмерен. Этот комплекс обозначается символом Fo и называется к р и т е р и е м Ф у р ь е.

$$\mathrm{Fo}=a\tau/l^2.$$

Если рассматривать величину l^2/a как некоторый (естественный для задач нестационарной теплопроводности) масштаб времени, то критерий Фурье можно трактовать как безразмерное время.

Окончательно дифференциальное уравнение теплопроводности в безразмерной записи получается в следующем более простом виде:

$$\partial\Theta/\partial\,\mathrm{Fo}=\partial^2\Theta/\partial X^2. \quad (3.7)$$

Начальное условие

при $\mathrm{Fo}=0\ \ \Theta_{нч}=1;$ (3.8)

граничные условия:

при $X=0\ \ (\partial\Theta/\partial X)_0=0;$ (3.9)

при $X=1\ \ (\partial\Theta/\partial X)_с=\mathrm{Bi}\,\Theta_с,$ (3.10)

где $\Theta_с=\vartheta_с/\vartheta_{нч}$ — безразмерная температура поверхности стенки; $\mathrm{Bi}=\alpha l/\lambda$ — к р и т е р и й Б и о.

Физический смысл критерия Био состоит в том, что его величина характеризует соотношение интенсивностей отвода теплоты в процессе теплоотдачи и подвода теплоты из внутренних слоев тела к поверхности в результате процесса теплопроводности. Рассмотрим, какие преимущества имеет система, записанная в безразмерной форме [уравнения (3.7) — (3.10)], по сравнению с первоначальной [уравнения (3.3) — (3.6)]:

1. Искомая функция теперь имеет следующий вид:

$$\Theta = f(\mathrm{Fo},\ \mathrm{Bi},\ X). \tag{3.11}$$

Сравнивая его с выражением (3.2), видим, что число величин, влияющих на процесс, сократилось вдвое; параметры процесса теперь выражены только одним комплексом — критерием Био; часть параметров сгруппировалась с независимыми переменными.

2. Уравнения, записанные в безразмерной форме, приобретают обобщенный смысл, так как определенному численному значению критериев Fo и Bi соответствует множество задач с различными значениями a, l, α, λ, т. е. возможно рассматривать подобие процессов нестационарной теплопроводности (см. главу 5). Во всех этих задачах безразмерная координата X меняется в пределах от 0 до 1 (независимо от величины l), а безразмерная температура Θ — от 1 до 0 (независимо от значений $t_{нч}$ и $t_{ж}$).

Решение задачи методом разделения переменных. Этот метод решения задач нестационарной теплопроводности был разработан Фурье, который предположил, что искомую температурную функцию (3.2) можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых $\varphi(\tau)$ зависит только от времени, а другая $\psi(x)$ — только от координаты, т. е. в любой точке x, в любой момент времени τ должно быть

$$t(\tau,\ x) = \varphi(\tau)\,\psi(x)$$

или в безразмерной форме

$$\Theta = \varphi(\mathrm{Fo})\,\psi(X). \tag{3.12}$$

Указанное решение прежде всего должно удовлетворять дифференциальному уравнению (3.7). Если это так, то частная производная произведения $\varphi(\mathrm{Fo})\psi(X)$ по Fo должна быть равна второй частной производной этого же произведения по X, откуда

$$\psi(X)\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Fo}}[\varphi(\mathrm{Fo})] = \varphi(\mathrm{Fo})\frac{\partial^2}{\partial X^2}[\psi(X)].$$

В последнем уравнении легко разделяются переменные

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\,\mathrm{Fo}} = \frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}. \tag{3.13}$$

Равенство (3.13) должно выполняться при любых значениях аргументов: Fo (от 0 до ∞) и X (от 0 до 1), что возможно, если каждая его часть при любых значениях своего аргумента равна одной и той же постоянной величине. Обозначим эту величину $-\mu^2 = \mathrm{const}$. Наличие минуса перед μ^2 объясняется следующим. Искомое решение должно удовлетворять исходному дифференциальному уравнению (3.7) для затухающего процесса (в данном случае уравнению теплопроводности, при котором система стремится к равновесному тепловому состоянию). Это обеспечивается полученным ниже решением для функции φ лишь при отрицательном μ^2.

С учетом сказанного вместо дифференциального уравнения в частных производных (3.13), мы получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\,\mathrm{Fo}} = -\mu^2; & (3.14) \\ \dfrac{1}{\psi}\dfrac{d^2\psi}{dX^2} = -\mu^2. & (3.15) \end{cases}$$

Из курса математики известны решения уравнений вида (3.14) $\varphi = C_1 e^{-\mu^2 \mathrm{Fo}}$, где экспоненциальная функция $e^{-\mu^2 \mathrm{Fo}}$ с увеличением Fo (времени) стремится к нулю, т. е. обеспечивает затухание процесса.

Решение уравнения (3.15) имеет вид

$$\psi = C_2 \sin(\mu X) + C_3 \cos(\mu X).$$

Таким образом, искомая температурная функция имеет вид

$$\Theta = C_1 e^{-\mu^2 \mathrm{Fo}} [C_2 \sin(\mu X) + C_3 \cos(\mu X)]. \quad (3.16)$$

Значения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3 и величину μ следует находить из начального и граничных условий (3.8) — (3.10). Для того, чтобы воспользоваться граничными условиями, в которые входит производная $\partial\Theta/\partial X$, найдем ее выражение из (3.16)

$$\partial\Theta/\partial X = C_1 e^{-\mu^2 \mathrm{Fo}} \mu [C_2 \cos(\mu X) - C_3 \sin(\mu X)]. \quad (3.17)$$

В соответствии с (3.9) из (3.17) получаем $C_2 \cos 0 = C_3 \sin 0$, или $C_2 \cdot 1 = C_3 \cdot 0$, следовательно, $C_2 = 0$. Это означает, что частное решение $\psi(X) = C_2 \sin(\mu X)$ должно быть отброшено как неудовлетворяющее граничному условию. С учетом этого вместо (3.16) получаем выражение температурной функции

$$\Theta = A e^{-\mu^2 \mathrm{Fo}} \cos(\mu X) \quad (3.18)$$

и ее производной

$$\partial\Theta/\partial X = -A e^{-\mu^2 \mathrm{Fo}} \mu \sin(\mu X), \quad (3.19)$$

где $A = C_1 C_3 = \mathrm{const}$.

В соответствии с (3.18) из (3.10) находим

$$-A e^{-\mu^2 \mathrm{Fo}} \mu \sin(\mu \cdot 1) = \mathrm{Bi}\, A e^{-\mu^2 \mathrm{Fo}} \cos(\mu \cdot 1),$$

после сокращения и преобразования из этого уравнения получаем

$$\mu/\mathrm{Bi} = \cos\mu/\sin\mu, \text{ или } \mu/\mathrm{Bi} = \mathrm{ctg}\,\mu. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) называется характеристическим уравнением задачи нестационарной теплопроводности для пластины, из него может быть определена величина μ.

Однако уравнение (3.20) имеет не одно, а множество решений. Наиболее просто получить решение характеристического уравнения графически (рис. 3.4). Для этого обозначим его левую часть через $y_1 = \mu/\mathrm{Bi}$ — это линейная функция от μ с угловым коэффициентом $1/\mathrm{Bi}$; правую часть обозначим $y_2 = \mathrm{ctg}\,\mu$ — графически эта часть изображается множеством кривых котангенсоид. Их пересечения с прямой $y_1 = \mu/\mathrm{Bi}$ дают значения корней уравнения (3.20): мы имеем бесконечный ряд значений μ_n, причем каждая последующая величина больше предыдущей:

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_n < \ldots$$

Отметим, что каждому значению Bi соответствует свой ряд значений μ_n. Причем, если $\mathrm{Bi} \to \infty$, прямая $y_1 = \mu/\mathrm{Bi}$ совпадает с осью абсцисс, т. е.

$$\mu_1 = \pi/2; \; \mu_2 = 3\pi/2; \; \mu_3 = 5\pi/2; \; \ldots; \; \mu_n = (2n-1)\,\pi/2;$$

если же $\mathrm{Bi} = 0$, то прямая $y_1 = \mu/\mathrm{Bi}$ совпадает с осью ординат, т. е.

$$\mu_1 = 0; \; \mu_2 = \pi; \; \mu_3 = 2\pi; \; \ldots; \; \mu_n = (n-1)\,\pi.$$

При $0<\mathrm{Bi}<\infty$ значения μ_n лежат между указанными значениями для $\mathrm{Bi}=\infty$ и $\mathrm{Bi}=0$.

Каждому значению корня μ_n будет соответствовать свое частное распределение температуры в пластине:

$$\Theta_1 = A_1 e^{-\mu_1^2 \mathrm{Fo}} \cos(\mu_1 X);$$

$$\Theta_2 = A_2 e^{-\mu_2^2 \mathrm{Fo}} \cos(\mu_2 X); \qquad (3.21)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\Theta_n = A_n e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}} \cos(\mu_n X).$$

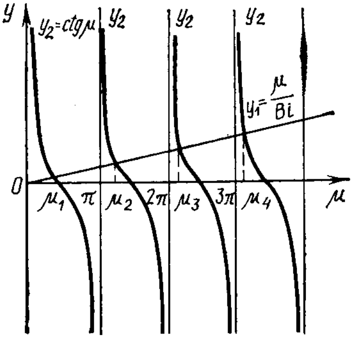


Рис. 3.4. Графическое решение характеристического уравнения $(\mu/\mathrm{Bi})=\mathrm{ctg}\,\mu$

Поскольку исходное дифференциальное уравнение (3.7) линейно, то и сумма всех или нескольких частных решений также будет удовлетворять исходному уравнению. Однако окончательное решение справедливо только при условии, что оно также удовлетворяет начальному условию (3.8), которое мы пока не принимали во внимание.

По условию (3.8) в начальный момент времени температура во всех точках пластины должна быть одинаковой (в общем случае она может быть произвольной функцией координаты). Очевидно, что ни одно из частных решений (3.21) само по себе не удовлетворяет этому условию, так как по уравнениям (3.21) температура в пластине не постоянна, а изменяется по закону косинуса. Однако если сложить множество косинусоид, то в результате при соответствующем подборе коэффициентов A_1, A_2, ..., A_n можно получить функцию температуры, отвечающую любому начальному условию, в том числе (3.8).

Окончательное решение имеет вид суммы бесконечного ряда гармонических функций.

Опуская промежуточные выводы, приведем результирующее выражение для вычисления коэффициента A_n в данной задаче:

$$A_n = \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n}. \qquad (3.22)$$

Таким образом, окончательное решение задачи в безразмерной форме представляется выражением

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}} \cos(\mu_n X), \qquad (3.23)$$

в котором величины μ_n представляют собой корни характеристического уравнения (3.20) и зависят только от значения критерия Bi, а коэффициенты A_n являются функциями от μ_n, т. е. в конечном счете также зависят только от Bi (при этом необходимо учитывать, что в зависимости от начального распределения температур функциональная связь между A_n и Bi изменяется). В табл. 3.1 приведены значения четырех первых значений μ_n и A_n в зависимости от Bi для рассматриваемой задачи. В монографии [24], а также в справочной литературе приводятся аналогичные таблицы для шести членов ряда.

Результирующее выражение температурной функции, получаемое при решении задач теплопроводности, в форме произведения функции времени $e^{-\mu^2 \mathrm{Fo}}$ на некоторую функцию от координаты справедливо не только для пластины [см. выражение (3.23)], но и для

Таблица 3.1 **Значения μ_n, A_n и B_n в уравнениях (3.23) и (3.28)**

Bi	μ_n				A_n	
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	A_1	A_2
0,00	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	1,0000	0,0000
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	1,0020	—0,0020
0,10	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	1,0159	—0,0197
0,50	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	1,0701	—0,0873
1,00	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	1,1192	—0,1517
2,00	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	1,1784	—0,2367
4,00	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	1,2287	—0,3215
10,00	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	1,2612	—0,3934
15,00	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	1,2677	—0,4084
30,00	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	1,2717	—0,4198
50,00	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	1,2727	—0,4227
100,00	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	1,2731	—0,4239
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	1,2732	—0,4244

других тел, в которых распространение теплоты происходит в одном направлении, как, например, в бесконечно длинном цилиндре или шаре. Различаются результирующие выражения видом функции координаты: вместо cos — для пластины, для цилиндра появляется функция Бесселя, а для шара — гиперболическая. Перечисленные тела называют иногда классическими. Для классических тел получены аналитические решения задач нестационарной теплопроводности. В случае, если внутри тел действуют источники или стоки теплоты, то задачи усложняются, а в уравнениях вида (3.11) появляются дополнительные определяющие критерии.

3.3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В соответствии с формой результирующих уравнений (3.11) или (3.23) порядок решения задачи нестационарной теплопроводности для тела классической формы следующий:

1. На основании исходных данных вычисляют безразмерную координату $X=x/l$ и критерии $\mathrm{Bi}=\alpha l/\lambda$ и $\mathrm{Fo}=a\tau/l^2$. Здесь l — характерный размер тела: для пластины при симметричном охлаждении $l=\delta/2$, при одностороннем охлаждении $l=\delta$; для бесконечно длинного цилиндра и шара $l=R$, где R — радиус.

2. По величине критерия Bi в специальных таблицах [24] находят значения μ_n и A_n для нескольких значений n. В обычных инженерных расчетах достаточно учитывать два-четыре члена суммы в формуле (3.23), т. е. $n\leqslant 4$ (для пластины см. табл. 3.1).

3. По формуле (3.23) или аналогичной ей для тел другой формы вычисляют значение безразмерной температуры Θ в данной точке в заданный момент времени. Поскольку $\Theta=(t(\tau, x)-t_ж)/(t_{нч}-t_ж)$, где $t_ж$ и $t_{нч}$ — известные по условию температуры среды и началь-

A_3	A_4	B_1	B_2	B_3	B_4
0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0005	—0,0002	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0050	—0,0022	1,0000	0,0002	0,0000	0,0000
0,0243	—0,0110	0,9955	0,0040	0,0003	0,0001
0,0466	—0,0217	0,9862	0,0124	0,0011	0,0002
0,0848	—0,0414	0,9635	0,0313	0,0037	0,0009
0,1396	—0,0750	0,9264	0,0582	0,0104	0,0029
0,2104	—0,1309	0,8743	0,0839	0,0236	0,0090
0,2320	—0,1514	0,8565	0,0885	0,0279	0,0120
0,2472	—0,1718	0,8354	0,0893	0,0315	0,0152
0,2517	—0,1779	0,8260	0,0899	0,0323	0,0161
0,2539	—0,1808	0,8185	0,0901	0,0324	0,0165
0,2546	—0,1819	0,8106	0,0901	0,0324	0,0165

ная температура тела, зная Θ, можно найти искомую температуру $t(\tau,\ x)$.

Отметим, что при вычислении Θ по уравнению (3.23) с конечным числом членов ($n \leqslant 4$) погрешность не превышает значения последнего члена (точнее, значения первого из отбрасываемых), так как суммируемый ряд знакопеременный и быстро сходящийся. Быстрая сходимость ряда связана с тем, что во все его члены входит множитель $e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}$, который убывает с увеличением показателя $\mu_n^2 \mathrm{Fo}$. Но, как было показано выше (см. рис. 3.4 и табл. 3.1), с увеличением номера члена n μ_n (и тем более μ_n^2) увеличивается, а $e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}$ уменьшается.

Скорость убывания функции $e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}$ зависит также от критерия Fo: в случае малых численных значений критерия $\mathrm{Fo}<0{,}3$ приходится учитывать большое число членов в уравнении (3.23), что усложняет расчеты.

Следует, однако, отметить, что решение задачи в форме (3.23) не является единственным: так, в монографии [24] для малых Fo приводятся решения, выполненные методом интегральных преобразований Лапласа, имеющие иной вид результирующего выражения. Известны также приближенные решения в форме многочленов и т. п. При значении $\mathrm{Fo}>0{,}3$ в выражениях типа (3.23) достаточно ограничиться одним первым членом ряда. В этом случае для пластины

$$\Theta = A_1 \cos(\mu_1 X)\, e^{-\mu_1^2 \mathrm{Fo}}. \qquad (3.24)$$

Режим охлаждения (или нагрева), определяемый формулой (3.24), называется регулярным. Как следует из сопоставления формул

(3.23) и (3.24), в регулярном режиме решение задачи существенно упрощается, причем не вызывает затруднений решение обратной задачи — определение времени достижения заданной температуры. Так, раскрывая значение критерия Fo и логарифмируя выражение (3.24), получаем

$$\ln\Theta = P - m\tau, \tag{3.25}$$

где P — некоторая функция критерия Bi и координат точки; $m = \mu_1^2 a/l^2$ — темп охлаждения (нагрева) тела при регулярном режиме.

Зная Θ, из уравнения (3.25) легко определить τ. Характерно, что темп охлаждения во всех точках тела одинаков. Измеряя изменение во времени температуры тела заданной формы, можно экспериментально найти темп охлаждения m, что в свою очередь позволяет установить значение коэффициента температуропроводности материала $a = ml^2/\mu_1^2$, а также коэффициента теплопроводности $\lambda = ac\rho$. Такой способ определения теплофизических характеристик называют методом регулярного режима (более подробно см. главу 15).

Проанализируем теперь, как влияет на закономерности теплообмена при нестационарной теплопроводности величина критерия Bi. Для этого вернемся к рассмотрению рис. 3.3 и докажем, что в любой момент времени $\tau > 0$ касательная к кривой распределения температур у поверхности тела проходит через так называемую направляющую точку H, расположенную на линии $t_ж = \mathrm{const}$ на расстоянии λ/α от поверхности тела. Доказательство сводится к рассмотрению граничного условия (3.6), которое можно переписать так:

$$(\partial t/\partial x)_с = (t_с - t_ж)/(\lambda/\alpha) = \mathrm{tg}\,\varphi, \tag{3.26}$$

где φ — угол, образуемый с осью x прямой линией, соединяющей точку H с точкой, соответствующей температуре $t_с$ на поверхности тела (на рис. 3.3 это штриховые линии для разных τ).

Из (3.26) следует, что прямая H — A является касательной к кривой распределения температур в точке $x = l$, т. е. у поверхности тела.

В безразмерных величинах рис. 3.3 имеет вид, представленный на рис. 3.5, а направляющая точка H при этом располагается на оси X и отстоит от стенки на расстоянии 1/Bi. Таким образом, чем больше Bi, тем ближе H к поверхности тела и тем больше $(\partial\Theta/\partial X)_с$, и наоборот, чем меньше Bi, тем меньше $(\partial\Theta/\partial X)_с$ и тем меньше различие между температурой поверхностных и внутренних точек тела.

Рассмотрим два предельных случая: Bi $\to \infty$ и Bi $\to 0$.

Первый предельный случай: Bi $\to \infty$ (практически Bi$>$100). Для тела конечных размеров (l — конкретная конечная величина) этот случай соответствует условию $\alpha/\lambda \to \infty$, т. е. большим значениям коэффициента теплоотдачи α и сравнительно малым значениям коэффициента теплопроводности λ. В этом случае направляющая точка H располагается на поверхности тела (рис. 3.5, *б*). Иначе говоря, сразу же после начала процесса температура поверхности принимает и в дальнейшем сохраняет постоянное значение $t_с = t_ж =$

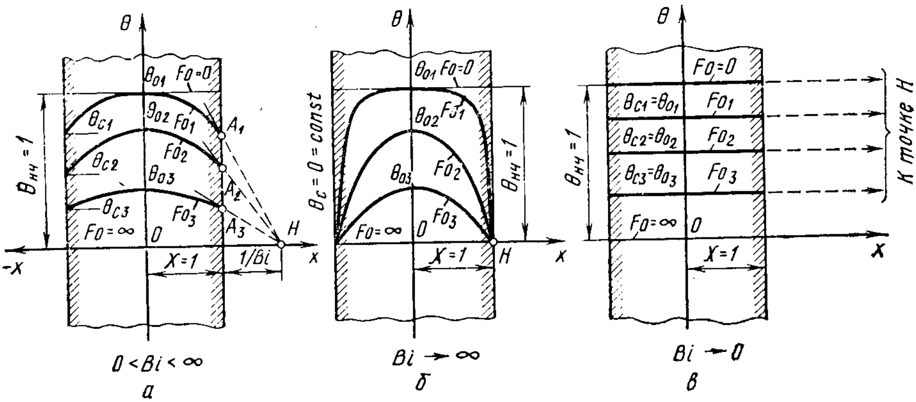


Рис. 3.5. Распределение температур в охлаждаемой (нагреваемой) пластине при различных значениях критерия Био

=const. Таким образом, при $\mathrm{Bi}\to\infty$ граничное условие третьего рода трансформируется в граничное условие первого рода. При этом интенсивность процесса охлаждения (нагрева) определяется внутренним процессом теплопроводности в теле и зависит только от физических свойств и размеров тела.

При $\mathrm{Bi}\to\infty$ общее решение (3.11) или (3.23) упрощается: из числа определяющих критериев выпадает критерий Bi. Так, для точек, расположенных в средней плоскости пластины (при $X=0$), уравнение для безразмерной температуры при $\mathrm{Fo}>0{,}3$ приобретает вид

$$\Theta_0=\frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right). \tag{3.27}$$

Второй предельный случай: $\mathrm{Bi}\to 0$ (практически при $\mathrm{Bi}<0{,}1$). На практике этот случай соответствует охлаждению (или нагреву) тел малой толщины и большой теплопроводности при малом α (например, тонкие металлические пластины, охлаждаемые в воздухе). Направляющая точка при этом удаляется от поверхности тела на бесконечно большое расстояние (рис. 3.5, *в*), а распределения температур в теле в различные моменты времени имеют вид прямых, параллельных оси абсцисс, т. е. в любой момент времени температура по всей толщине тела одна и та же. При этом интенсивность процесса охлаждения определяется внешним процессом теплоотдачи — процесс выравнивания температуры внутри тела происходит гораздо интенсивнее, чем отвод теплоты от поверхности.

Можно показать, что при этом все корни характеристического уравнения (3.20), кроме первого, кратны π и, следовательно, равны нулю все, кроме первого, члены суммы в уравнение (3.23). К тому же при $\mathrm{Bi}\to 0$ $\mu_1\to\sqrt{\mathrm{Bi}}$. В результате безразмерная температура всех точек пластины определяется уравнением

$$\Theta=\exp(-\mathrm{Bi}\cdot\mathrm{Fo}).$$

Аналогично для бесконечного цилиндра

$$\Theta = \exp(-2\mathrm{Bi}\cdot\mathrm{Fo}).$$

Эти зависимости могут быть положены в основу как аналитического, так и графического метода расчетного определения искомой безразмерной температуры тела.

3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР В ХАРАКТЕРНЫХ ТОЧКАХ ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ГРАФИКОВ

Как уже было показано, в характерных точках тела безразмерная координата имеет определенное фиксированное значение. Так, для центральных точек пластины, цилиндра и шара $X=0$, для точек на поверхности $X=1$. Это значит, что для указанных точек безразмерная температура однозначно определяется критериями Fo и Bi: $\Theta_0=f_0(\mathrm{Bi};\ \mathrm{Fo})$ при $X=0$; $\Theta_c=f_c(\mathrm{Bi},\ \mathrm{Fo})$ при $X=1$.

Здесь $\Theta_0=(t_0-t_ж)/(t_{нч}-t_ж)$ и $\Theta_c=(t_c-t_ж)/(t_{нч}-t_ж)$.

Для упрощения расчетной процедуры приведенные зависимости представляют графически. На рис. 3.6 и 3.7 представлены графики для определения безразмерной температуры на поверхности и в центре пластины. По оси абсцисс здесь отложено значение критерия Fo, а по оси ординат величина — $1-\Theta_0$ или $1-\Theta_c$ соответственно для центра и поверхности. Зависимость от критерия Bi представлена параметрически: каждой кривой на рисунке соответствует определенное значение критерия Bi от 0,1 до 1000. Аналогичные графики имеются и для безграничного цилиндра и шара (см., например, [15, 24]).

Порядок расчета температуры в заданной характерной точке в определенный момент времени по графикам сводится к следующему:

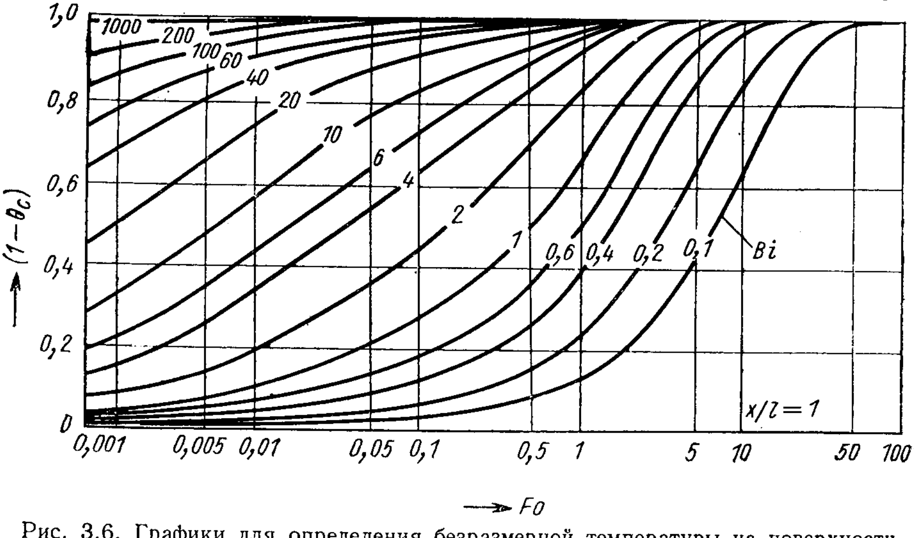


Рис. 3.6. Графики для определения безразмерной температуры на поверхности пластины $\Theta_c=f_c(\mathrm{Bi},\ \mathrm{Fo})$

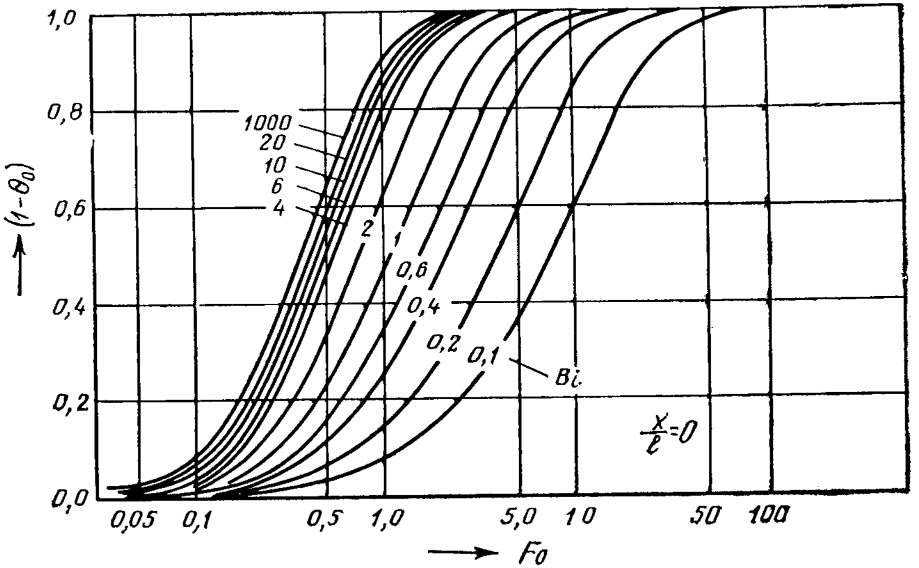


Рис. 3.7. Графики для определения безразмерной температуры в средней плоскости пластины $\theta_0 = f_0$ (Bi, Fo)

1) определяют критерий Fo по известным τ, a и характерному размеру тела l;

2) вычисляют критерий Bi по известным α, λ и l;

3) на оси абсцисс графиков откладывают соответствующее значение критерия Fo, проводят вертикаль до кривой, соответствующей найденному значению Bi, и, проектируя полученную точку на ось ординат, получают соответствующее значение $1-\Theta_0$ или $1-\Theta_c$, а затем Θ_0 или Θ_c;

4) по найденной безразмерной температуре Θ_0 или Θ_c определяют искомую температуру t_0 или t_c.

Очевидно, что с помощью приведенных графиков можно решить и обратную задачу: найти промежуток времени, необходимый для охлаждения (или нагрева) данной характерной точки тела до заданной температуры.

Другие графики, учитывающие изменения Bi и Fo в более широких пределах для перечисленных задач, а также для некоторых более сложных условий, можно найти в монографии [30].

3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕЛА И КОЛИЧЕСТВА ТЕПЛОТЫ

Часто при охлаждении (или нагреве) тела бывает нужно найти не температуру тела в определенной точке, а среднюю температуру тела к заданному моменту времени. В процессах охлаждения или нагрева средняя по объему температура $\bar{t}$ при заданном Bi зависит

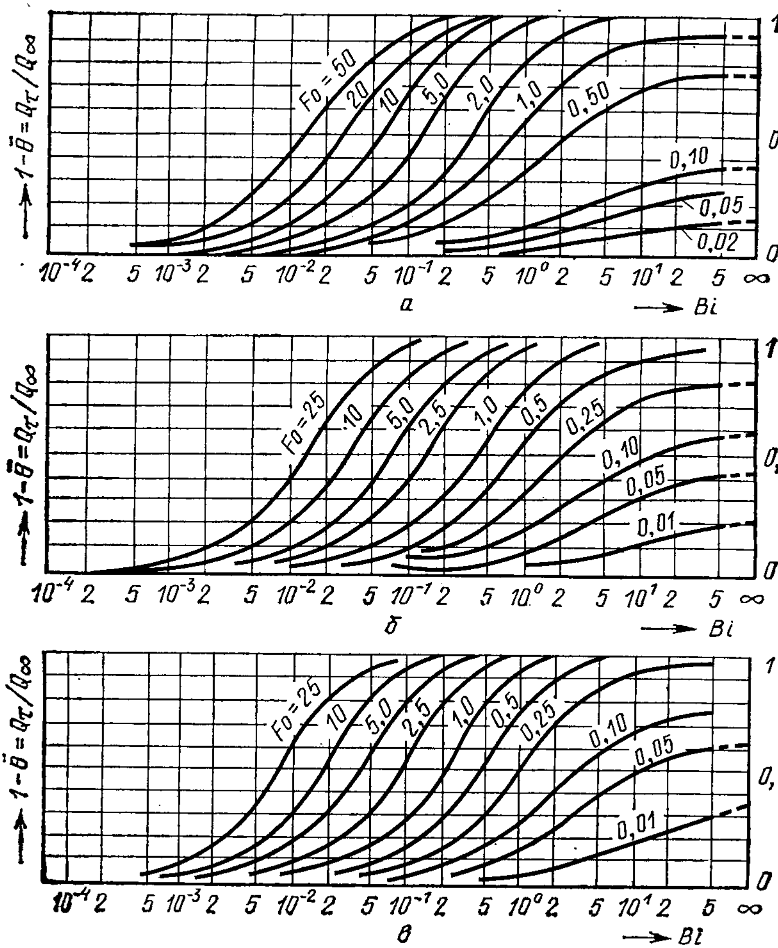


Рис. 3.8. Графики для определения количества переданной теплоты и среднеобъемной температуры охлаждаемого или нагреваемого тела:
а — пластины; *б* — цилиндра; *в* — шара

только от времени (или в безразмерной форме от критерия Fo):

$$\overline{\Theta} = f(\mathrm{Bi},\ \mathrm{Fo}),$$

где Θ — безразмерная средняя температура тела;

$$\overline{\Theta} = (\bar{t} - t_{ж})/(t_{нч} - t_{ж}).$$

Аналитическое решение для всех тел простейшей формы приводит к уравнению следующего вида:

$$\overline{\Theta} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}. \qquad (3.28)$$

Коэффициент B_n является функцией критерия Bi. Для пластины

$$B_n = A_n \sin \mu_n / \mu_n,$$

где A_n — коэффициент, определяемый уравнением (3.22); μ_n — корни характеристического уравнения (3.20).

Значения B_n в четырех первых членах суммы для неограниченной пластины в зависимости от Bi представлены в табл. 3.1. Соответствующие данные для шести членов ряда приводятся в специальной справочной литературе [15, 24].

Графики для определения безразмерной средней температуры тел простейшей формы представлены на рис. 3.8. По оси ординат здесь отложена величина $1-\overline{\Theta}$. Покажем, что с помощью этих графиков можно определить также количество теплоты, отданной телом к моменту времени τ в процессе охлаждения (или полученной в процессе нагрева).

Указанное количество теплоты (обозначим его Q_τ) связано со средней температурой тела уравнением

$$Q_\tau = c\rho V (t_{нч} - \bar{t}), \tag{3.29}$$

где V — объем тела.

Процесс охлаждения заканчивается, когда температура тела станет равной температуре окружающей среды (теоретически это достигается при $\tau \to \infty$). Полное количество теплоты, отданной телом среде в процессе охлаждения (обозначим его Q_∞), равно

$$Q_\infty = c\rho V (t_{нч} - t_ж). \tag{3.30}$$

Поделив выражение (3.29) на (3.30), получим

$$Q_\tau / Q_\infty = (t_{нч} - \bar{t}) / (t_{нч} - t_ж) = 1 - \overline{\Theta}.$$

Отношение Q_τ/Q_∞ можно найти при известных значениях критериев Fo и Bi, по графикам на рис. 3.8, *а*, *б*, *в* в зависимости от формы тела.

Определив Q_∞ из уравнения (3.30), по найденному отношению вычисляют искомую величину Q_τ.

3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕЛ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

Рассмотренные выше аналитические решения позволяют решать задачу нестационарной теплопроводности и для некоторых тел ограниченных размеров: цилиндра конечной длины, параллелепипеда с соизмеримыми длинами сторон, неограниченного стержня прямоугольного сечения. Рассмотрим, как решается задача для цилиндра конечной длины (рис. 3.9, *а*).

Цилиндр радиусом R и длиной h можно представить как тело, образованное пересечением безграничного цилиндра радиусом R с неограниченной пластиной толщиной $h=2l$. Теоретически можно показать, что безразмерная температура любой точки ограниченного

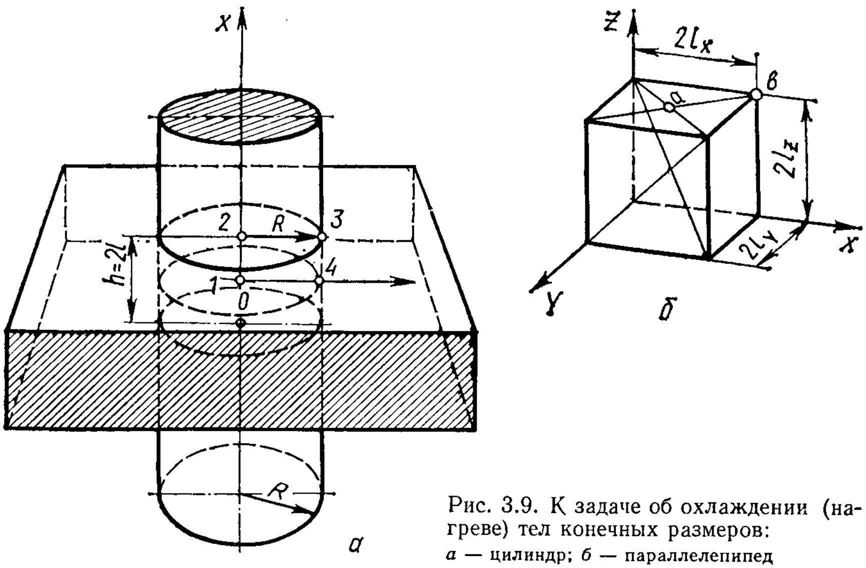


Рис. 3.9. К задаче об охлаждении (нагреве) тел конечных размеров:
а — цилиндр; *б* — параллелепипед

цилиндра представляет собой произведение безразмерных температур в соответствующих точках безграничных цилиндра и пластины, т. е.

$$\Theta = \Theta_ц \Theta_{пл},$$

где Θ — искомая безразмерная температура; $\Theta_ц = f_ц(\mathrm{Bi}_ц, \mathrm{Fo}_ц, r/R)$; $\Theta_{пл} = f_{пл}(\mathrm{Bi}_{пл}, \mathrm{Fo}_{пл}, x/l)$. Соответственно $\mathrm{Bi}_ц = \alpha R/\lambda$; $\mathrm{Fo}_ц = a\tau/R^2$; $\mathrm{Bi}_{пл} = \alpha l/\lambda$; $\mathrm{Fo}_{пл} = a\tau/l^2$.

Величины $\Theta_ц$ и $\Theta_{пл}$ могут быть найдены по графикам с учетом расположения рассматриваемой точки в безграничном теле. Так, для точки *1* (рис. 3.9, *а*) величина $\Theta_ц$ находится по графику для центральных точек неограниченного цилиндра, а величина $\Theta_{пл}$ — по графику для средней плоскости пластины. Для точки *2* величина $\Theta_ц$ определяется по тому же графику, что и для точки *1*, а $\Theta_{пл}$ — по графику для поверхностных точек пластины. Для точки *3* обе величины находятся по графикам для поверхностных точек цилиндра и пластины. Наконец, для точки *4* величина $\Theta_ц$ определяется по графику для поверхностных точек цилиндра, а величина $\Theta_{пл}$ — по графику для средней плоскости пластины.

Перечисленные четыре точки являются характерными для ограниченного цилиндра. Температуры остальных точек ограниченного цилиндра по графикам не могут быть найдены, но для их определения можно воспользоваться соответствующими формулами.

Средняя температура ограниченного цилиндра также может быть найдена как произведение величин $\bar{\Theta}_ц$ и $\bar{\Theta}_{пл}$, причем последние определяются с помощью графиков на рис. 3.8, *а*, *б*.

Аналогичные рассуждения справедливы и для параллелепипеда (см. рис. 3.9, *б*), но его следует рассматривать как тело, образованное пересечением трех неограниченных пластин. Например, безразмерную температуру в точке a находят следующим образом: $\Theta_a=\Theta_{x0}\Theta_{y0}\ \Theta_{zc}$, где Θ_{x0} — безразмерная температура в центре безграничной пластины толщиной $2l_x$; Θ_{y0} — безразмерная температура в центре безграничной пластины толщиной $2l_y$; Θ_{zc} — безразмерная температура на поверхности безграничной пластины толщиной $2l_z$.

При определении температуры в безграничном стержне прямоугольного сечения безразмерную температуру его точек следует представлять в виде произведения безразмерных температур двух неограниченных пластин.

Аналитического решения задач нестационарной теплопроводности для большинства тел более сложной формы не получено, но для их решения можно воспользоваться приближенными методами.

3.7. МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Сложные задачи теплопроводности, для которых не получены аналитические решения, могут быть решены приближенно. В настоящее время в связи с развитием ЭВМ наиболее распространенными являются различные методы численного решения дифференциальных уравнений, в частности методы конечных разностей. Они позволяют получить решения для тел сложной формы, составных (состоящих из различных материалов), с внутренними источниками теплоты, сложными граничными условиями и т. п.

Метод конечных разностей. Этот метод сводится к замене дифференциальных выражений, входящих в математическую формулировку задачи, конечно-разностными. При такой замене вместо дифференциальных уравнений с частными производными приходится решать обыкновенные алгебраические уравнения, что не вызывает особых математических трудностей, хотя всегда связано с большим объемом вычислений. Именно поэтому дальнейшее решение задачи удобно выполнять с помощью ЭВМ.

При решении задачи методом конечных разностей температуру определяют не в любой точке тела в любой момент времени, а только в определенных точках в определенные моменты времени — в узлах так называемой *пространственно-временной сетки*. Для этого тело разбивают на элементарные слои толщиной Δx (для одномерных задач) или на элементарные объемы, ячейки пространственной сетки с заданными размерами Δx, Δy — для двухмерной задачи и Δx, Δy, Δz — для трехмерной. В общем случае размеры ячеек могут быть неодинаковыми: Δx_1, Δx_2 и т. д.

Температурное поле в заданный момент времени характеризуется при этом совокупностью значений температуры в узлах сетки или *сеточной функцией* T на заданном *временном* слое. В ходе изменения температуры во времени может быть найдено значение сеточной функции T только через определенный конечный интервал времени $\Delta\tau$, т. е. на следующем временном слое. Таким образом, сеточная функция дискретна как в пространстве, так и во времени.

Поскольку методом конечных разностей могут быть определены температуры не во всех точках тела, а только в узлах пространственно-временной сетки, то в этом смысле данный метод (как и любой численный метод) подобен экспериментальному исследованию, только в эксперименте численные значения искомых величин в определенных точках получают измерениями, а при численном решении — расчетом. Поэтому численные решения можно назвать математическим или численным экспериментом.

Узлы сетки нумеруют в определенном порядке, значения T отмечают соответствующими индексами. Так, для двухмерной пространственной сетки $T_{i,j,k}$ — температура в узле с координатами $x=i\Delta x$, $y=j\Delta y$ в момент времени $\tau=k\Delta\tau$.

Принцип построения разностных схем на примере задачи об охлаждении безграничной пластины. Уяснить сущность метода конечных разностей проще всего на примере одномерной задачи, поэтому рассмотрим вначале задачу об охлаждении неограниченной пластины, аналитическое решение которой приведено в разделе 3.2. Перепишем еще раз дифференциальное уравнение теплопроводности (3.3) и краевые условия (3.4) — (3.6), составляющие математическую формулировку задачи, через размерную избыточную температуру $\vartheta=t(\tau,\ x)-t_ж$:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta\partial/\partial\tau=a\,\partial^2\vartheta/\partial x^2;\\
&\text{при}\ \ \tau=0\ \ \vartheta(0,\ x)=\vartheta_{нч}=\mathrm{const};\\
&\text{при}\ \ x=0\ \ (\partial\vartheta/\partial x)_0=0;\\
&\text{при}\ \ x=l\ \ (\partial\vartheta/\partial x)_с=-\alpha\vartheta_с/\lambda.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.31)$$

Напомним, что вследствие симметрии решение задачи достаточно получить для одной половины пластины $l=\delta/2$. Разобьем l на n элементарных слоев толщиной $\Delta x=l/n$. Пронумеруем эти слои, начиная от середины. Будем обозначать текущий номер слоя вдоль оси x буквой i, тогда номер слоя может принимать значения $i=0$, 1, 2, . . ., n, всего $(n+1)$ точек.

Допустим, что необходимо определить распределение температур в пластине к моменту времени $\tau_{кн}$. Тогда, разбивая этот отрезок времени на элементарные интервалы $\Delta\tau$, определяем, что расчеты необходимо будет выполнить на $p=\tau_{кн}/\Delta\tau$ временны́х слоях. Обозначим текущий номер временного слоя k, номер слоя может принимать значения $k=0$, 1, 2, . . ., p.

Прежде чем приступить к замене дифференциальных операторов поставленной задачи конечно-разностными, рассмотрим, как это делается на примере более простой функции одной переменной $y=f(x)$. Оказывается, что операция замены не однозначна и допускает определенный произвол. Так, первую производную функции y можно заменить несколькими разностными выражениями сеточной функции а) $\frac{dy}{dx} \approx \frac{Y_{i+1}-Y_i}{\Delta x}$ — правое разностное отношение;

б) $\frac{dy}{dx} \approx \frac{Y_i-Y_{i-1}}{\Delta x}$ — левое разностное отношение;

в) $\frac{dy}{dx} \approx \frac{Y_{i+1}-Y_{i-1}}{2\Delta x}$ — центральное разностное отношение.

Можно также применить комбинацию правого и левого разностных отношений с различной мерой влияния, или, как говорят, с различным весом,

$$\frac{dy}{dx} \approx \sigma \frac{Y_{i+1}-Y_i}{\Delta x} + (1-\sigma) \frac{Y_i-Y_{i-1}}{\Delta x}, \tag{3.32}$$

где σ — некоторое число; $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Легко видеть, что при $\sigma=1$ соотношение (3.32) соответствует правому, при $\sigma=0$ — левому, а при $\sigma=0{,}5$ — центральному разностному отношению.

Вторую производную d^2y/dx^2 в общем случае также можно заменить различными разностными отношениями, но здесь возможности вариации уменьшаются. Чаще всего вторую производную заменяют следующим разностным отношением:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{Y_{i+1}-Y_i}{\Delta x} - \frac{Y_i-Y_{i-1}}{\Delta x}\right) = \frac{Y_{i+1}+Y_{i-1}-2Y_i}{\Delta x^2}. \tag{3.33}$$

Для рассматриваемой задачи об охлаждении пластины в качестве аналога непрерывной функции $t(\tau, x)$ введем сеточную функцию T_{ik}. Заменим в математической формулировке задачи (3.31) дифференциальные операторы разностными. С учетом того, что частную производную $\partial t/\partial \tau$ можно заменить тремя разностными отношениями (правым, левым и центральным), соответственно получим три разностных выражения, аппроксимирующих (т. е. приближенно заменяющих) исходное дифференциальное уравнение:

$$\frac{T_{i,k+1}-T_{i,k}}{\Delta\tau} = a\,\frac{T_{i+1,k}+T_{i-1,k}-2T_{i,k}}{\Delta x^2}; \tag{3.34а}$$

$$\frac{T_{i,k}-T_{i,k-1}}{\Delta\tau} = a\,\frac{T_{i+1,k}+T_{i-1,k}-2T_{i,k}}{\Delta x^2}; \tag{3.34б}$$

$$\frac{T_{i,k+1}-T_{i,k-1}}{2\Delta\tau} = a\,\frac{T_{i+1,k}+T_{i-1,k}-2T_{i,k}}{\Delta x^2}. \tag{3.34в}$$

При аппроксимации граничных условий также можно использовать различные конечно-разностные аналоги.

Так, наличие максимума температурной функции в середине пластины может привести к следующим формам граничного условия при $x=0$:

а) при $i=0$ $(T_{0,k}-T_{1,k})/\Delta x=0$ и, следовательно,

$$T_{0,k}=T_{1,k}; \tag{3.35а}$$

б) при $i=0$ температурное поле симметрично, поэтому если ввести в рассмотрение дополнительный узел сетки под номером $i=-1$, то $T_{-1,k}=T_{1,k}$ при любом k, при этом температуру $T_{0,k}$ можно рассчитать по любому из уравнений (3.34) — (3.36), если в них произвести замену $T_{i-1,k}+T_{i+1,k}=T_{-1,k}+T_{1,k}=2T_{1,k}$. Например вместо уравнения (3.34а) получаем при $i=0$

$$\frac{T_{0,k+1}-T_{0,k}}{\Delta\tau}=a\,\frac{2T_{1,k}-2T_{0,k}}{\Delta x^2}\,. \tag{3.35б}$$

Граничное условие третьего рода на внешней границе можно представить также двумя способами:

а) при $i=n$ для любого k $\lambda(T_{n-1,k}-T_{n,k})/\Delta x=\alpha(T_{n,k}-T_ж)$, откуда

$$T_{n,k}=\frac{1}{1+\alpha\,\Delta x/\lambda}\,T_{n-1,k}+\frac{\alpha\,\Delta x/\lambda}{1+\alpha\,\Delta x/\lambda}\,T_ж; \tag{3.36а}$$

б) на внешней границе можно также ввести дополнительный узел сетки под номером $i=n+1$ и доказать, что при этом температура на границе (при $i=n$) вычисляется по любому из уравнений теплопроводности (3.34а), (3.34б), (3.34в), в котором, во-первых, произведена замена $T_{i-1,k}+T_{i+1,k}=T_{n-1,k}+T_{n+1,k}=2T_{n-1,k}$, а во-вторых, учтено действие поверхностного источника теплоты мощностью $q=\alpha\Delta t$, для чего в правую часть уравнения вводится дополнительный член $2\alpha(T_ж-T_{n,k})/c\rho\Delta x$; таким образом, для граничного узла $i=n$ вместо (3.34а) получаем

$$\frac{T_{n,k+1}-T_{n,k}}{\Delta\tau}=a\,\frac{2T_{n-1,k}-2T_{n,k}}{\Delta x^2}-\frac{2\alpha}{c\rho\,\Delta x}\,(T_{n,k}-T_ж). \tag{3.36б}$$

В литературе [39, 43] показано, что замена граничных условий по второму способу [т. е. уравнениями (3.35б) и (3.36б)] дает большую точность.

Начальное условие в разностной форме сводится к тому, что для любого $i=0,1,\ 2,\ \ldots,\ n$
при $k=0$

$$T_{i,0}=T_{нч}. \tag{3.37}$$

Выражения (3.34) — (3.37) представляют собой постановку задачи в разностной форме, при этом в зависимости от того, каким из уравнений (3.34а), (3.34б) или (3.34в) аппроксимируется исходное дифференциальное уравнение, изменяются алгоритм и качество решения задачи.

Таким образом, мы записали три различных *разностных схемы* для решения поставленной задачи. Покажем, что они неравноценны и что поэтому, выбирая ту или иную схему, необходимо иметь уверенность в том, что расчеты по данной схеме обеспечивают решение поставленной задачи с заданной точностью.

3.8. СХОДИМОСТЬ, ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Выбор разностной схемы должен обеспечить совпадение данного решения с точным при уменьшении шагов сетки Δx и $\Delta\tau$. Если это условие выполняется, то говорят, что разностное решение *схо-*

д и т с я к точному. Можно сказать, что сходимостью обладают разностные схемы, которые, во-первых, аппроксимируют исходную задачу, во-вторых, являются устойчивыми.

Понятие о порядке аппроксимации уясним на примере функции одной переменной $y=f(x)$. Для этого воспользуемся формулой разложения этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки x

$$y(x+\Delta x)=y(x)+\frac{\Delta x}{1!}\frac{dy}{dx}+\frac{\Delta x^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\Delta x^3}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots \qquad (3.38)$$

Допустим, что координата x совпадает с узлом сетки, тогда $y(x)=Y_i$ и $y(x+\Delta x)=Y_{i+1}$. Находя с учетом этого производную dy/dx из выражения (3.38), получаем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y_{i+1}-Y_i}{\Delta x}+\varepsilon_1, \qquad (3.39)$$

где $\varepsilon_1=-\frac{\Delta x}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\Delta x^2}{6}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{\Delta x^3}{24}\frac{d^4y}{dx^4}-\ldots$ — погрешность аппроксимации производной dy/dx правым разностным отношением.

Если рассмотреть разложение функции $y(x-\Delta x)$, то соответственно для dy/dx получим выражение, аналогичное (3.39), где погрешность аппроксимации производной dy/dx левым разностным отношением

$$\varepsilon_2=\frac{\Delta x}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\Delta x^2}{6}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{\Delta x^3}{24}\frac{d^4y}{dx^4}-\ldots \qquad (3.40)$$

Если пренебречь бесконечно малыми высших порядков, то погрешности аппроксимации ε_1 и ε_2 оказываются пропорциональными Δx. Иначе говоря, погрешности аппроксимации производной dy/dx правым или левым разностным отношением имеют первый порядок малости, что можно записать следующим образом:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y_{i+1}-Y_i}{\Delta x}+Z(\Delta x), \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{Y_i-Y_{i-1}}{\Delta x}+Z(\Delta x).$$

Порядок аппроксимации производной центральным разностным отношением можно найти, складывая и деля на 2 выражения левого и правого разностных отношений:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y_{i+1}-Y_{i-1}}{2\Delta x}+\varepsilon_3, \qquad (3.41)$$

где

$$\varepsilon_3=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}=-\frac{\Delta x^2}{6}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{\Delta x^4}{120}\frac{d^5y}{dx^5}-\ldots.$$

Таким образом, погрешность аппроксимации дифференциального оператора dy/dx центральным разностным отношением имеет второй порядок малости относительно Δx

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y_{i+1}-Y_{i-1}}{2\Delta x}+Z(\Delta x^2).$$

Порядок аппроксимации второй производной d^2y/dx^2 получим, если подставим в формулу (3.33) выражение для левого и правого разностного отношения с учетом погрешностей ε_1 и ε_2, после вычитания которых и деления на Δx находим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Y_{i+1}+Y_{i-1}-2Y_i}{\Delta x^2}+\varepsilon_4, \qquad (3.42)$$

где

$$\varepsilon_4=\varepsilon_1-\varepsilon_2=-\frac{\Delta x^2}{12}\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{\Delta x^4}{360}\frac{d^6y}{dx^6}-\ldots=Z(\Delta x^2),$$

т. е. вторая производная аппроксимируется со вторым порядком точности.

Переходя к разностным выражениям (3.34а), (3.34б), (3.34в), аппроксимирующим дифференциальное уравнение теплопроводности, убеждаемся, что степень аппроксимации этого уравнения разностными выражениями (3.34а) и (3.34в) будет $Z(\Delta\tau+\Delta x^2)$, т. е. погрешность имеет первый порядок малости относительно $\Delta\tau$ и второй порядок малости относительно Δx. Выражение же (3.34в) более точное, так как оно аппроксимирует дифференциальное уравнение со вторым порядком как относительно Δx, так и относительно $\Delta\tau$.

Можно убедиться, что граничные условия в форме уравнений (3.35а) и (3.36а) аппроксимируют исходные дифференциальные выражения с точностью $Z(\Delta x)$, т. е. более грубо, чем основное уравнение для внутренних точек (3.34), в то время как аппроксимация граничных условий выражениями (3.35б) и (3.36б) имеет тот же порядок точности, что и основное уравнение.

Таким образом, можно предположить, что самой предпочтительной является расчетная разностная схема, включающая уравнение (3.34в), основанное на замене производной $\partial t/\partial\tau$ центральным разностным отношением. Так оно и было бы, если бы вычисления можно было бы производить абсолютно точно.

На практике никогда не удается производить вычисления абсолютно точно, хотя бы потому, что в любом вычислительном устройстве числа представляются конечным числом знаков, т. е. всегда неизбежны ошибки округления. При этом в некоторых случаях неизбежные ошибки округления или другие малые ошибки, допущенные на каком-то этапе вычислений, при последующих вычислениях сглаживаются; в других случаях, наоборот, указанные ошибки в дальнейших расчетах накапливаются и быстро возрастают по величине, так что результаты таких вычислений оказываются совершенно неправильными. Разностные схемы, расчет по которым не приводит к росту погрешности из-за неизбежных ошибок округления при любых размерах ячеек пространственно-временно́й сетки, называются абсолютно устойчивыми. Таким свойством обладает, например, расчетная схема, основанная на уравнении (3.34б).

Разностные схемы, расчет по которым приводит к быстрому увеличению погрешности вычислений при любых размерах пространственно-временно́й сетки, называются абсолютно неустойчивыми. Таким свойством обладает расчетная схема, включающая уравнение (3.34в).

Наконец, встречаются схемы, которые являются устойчивыми только при определенных соотношениях между размерами ячеек пространственно-временно́й сетки. Такие схемы называются условно устойчивыми. В рассматриваемом случае условно устойчивой является расчетная схема, включающая разностное уравнение (3.34а).

Условие устойчивости расчетов по уравнению (3.34а) записывается следующим образом:

$$\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}\leqslant\frac{1}{2}\,. \qquad (3.43)$$

Это означает, что при использовании уравнения (3.34а) произвольно можно выбирать только один из размеров пространственновременнóй сетки. Обычно произвольно выбирают величину Δx, а $\Delta\tau$ находят из условия (3.43), откуда

$$\Delta\tau \leqslant \Delta x^2/2a. \tag{3.44}$$

Таким образом, прежде чем выбрать для решения рассматриваемой задачи ту или иную разностную схему, необходимо убедиться в ее устойчивости (строгое определение устойчивости можно найти в монографиях [3, 39]). Если схема является условно устойчивой, то необходимо соответствующим образом выбрать шаг по времени $\Delta\tau$ в зависимости от принятых размеров пространственной сетки [для одномерной задачи при граничных условиях первого рода — уравнение (3.44), для многомерных задач, а также при граничных условиях второго и третьего рода условия устойчивости более сложные]. После этого следует определить порядок аппроксимации разностной схемы. Он должен быть проверен во всех точках сетки, включая граничные, которые часто имеют более низкий порядок аппроксимации. При прочих равных условиях предпочтение отдается схемам с большим порядком аппроксимации.

3.9. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ЯВНАЯ И НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Итак, из трех приведенных здесь разностных схем работоспособными являются только абсолютно устойчивая (3.34б) и условно устойчивая (3.34а). Разностное решение по любой из них реализуется определением температурных полей на пространственной сетке последовательно от одного временного слоя к другому. При этом в начальный момент времени при $k=0$ температурное поле должно быть известно [см. выражение (3.37)]. Рассмотрим вначале условно устойчивую разностную схему.

Преобразуем уравнение (3.34а) к форме, более удобной для вычислений,

$$T_{i,\,k+1}=\left(1-\frac{2a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}\right)T_{i,\,k}+\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}(T_{i-1,\,k}+T_{i+1,\,k}). \tag{3.45}$$

Выражение (3.45) называют **рекуррентной формулой** для вычисления температуры во внутренних узлах пространственной сетки. По этой формуле определяется температура на временном слое $k+1$ по известным значениям температур на предыдущем временном слое k. Это означает, что, используя известное начальное распределение температур при $k=0$, по рекуррентной формуле (3.45) можно определить температуры во всех внутренних точках в момент времени $k=1$; температуры в граничных точках $i=0$ и $i=n$ определяются из граничных условий (3.35а), (3.35б) и (3.36а), (3.36б). После этого можно переходить к расчету в том же порядке температур на следующем временном слое $k=2$, принимая найденное температурное поле при $k=1$ в качестве исходного, и т. д. вплоть до искомого температурного поля при $k=p$.

Отметим, что вычисления по рекуррентному уравнению (3.45) можно осуществлять для любой точки сетки непосредственно и независимо от того, найдены или не найдены значения температур в остальных точках сетки на временном слое $k+1$. Это возможно потому, что температура $T_{i,k+1}$ в соответствии с формулой (3.45) зависит только от значений температур в точках временного слоя k.

Разностная схема, позволяющая вычислять температуру в любой точке сетки на временном слое $k+1$ только по значениям температур на предыдущем слое k, называется явной. Преимуществом явной схемы является простота организации процесса вычислений (простота алгоритма). Недостатком явной схемы является ее условная устойчивость, так как шаг по времени, определяемый из условий устойчивости (3.44), часто оказывается малым по величине и для определения $T_{i,k}$ при больших значениях $\tau_{\text{кн}}$ приходится просчитывать очень много временных слоев.

Указанного недостатка не имеет неявная разностная схема, которая основывается на уравнении (3.34б).

Для того чтобы построить вычислительный процесс с помощью разностного уравнения (3.34б), преобразуем его к следующей форме:

$$\left(1+2\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}\right)T_{i,k+1}-\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}T_{i-1,k+1}-\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}T_{i+1,k+1}=T_{i,k}. \qquad (3.46)$$

(При этом преобразовании выполнены следующие операции: к произвольным номерам временны́х слоев k и $k-1$ прибавили по единице; все температуры, относящиеся к последующему временному слою $k+1$ как неизвестные, перенесены в левую часть уравнения; в правой части оставлена единственная известная температура $T_{i,k}$.)

Уравнения типа (3.46) на временном слое $k+1$ можно записать для всех внутренних узлов $i=1, 2, \ldots, n-1$. Совместно с граничными условиями (3.35а), (3.35б) и (3.36а), (3.36б) они составляют систему из $(n+1)$ уравнений, в которой неизвестными являются $(n+1)$ значений температуры. Температурное поле предыдущего временного слоя k известно из начального условия или предшествующих расчетов. Таким образом, и в данном случае задача может быть решена последовательным определением температурной функции от предыдущего временного слоя к последующему. Однако при этом на каждом временно́м слое процедура определения сеточной функции является более сложной, чем по явной разностной схеме: на каждом временно́м слое приходится решать систему из $(n+1)$ алгебраических уравнений.

Разностная схема, для которой расчетная процедура сводится к решению на каждом временно́м слое системы алгебраических уравнений, число которых равно числу узлов пространственно-временной сетки, называется неявной. Преимущество неявной схемы состоит в ее абсолютной устойчивости, что позволяет при расчетах по этой схеме принимать бо́льшие (по сравнению с явной схемой) значения шага по времени $\Delta\tau$. Недостатком неявной схемы является более сложный алгоритм вычислений, поскольку число уравнений, входящих в подлежащую решению систему, может быть весьма большим (особенно для многомерных задач).

Для решения подобных систем разработаны специальные методы. Наиболее простым из них является **метод прогонки** (частный случай метода Гаусса), который в данном случае можно применить, поскольку матрица коэффициентов системы имеет трехдиагональную форму.

Рассмотрим метод прогонки на примере задачи об охлаждении безграничной пластины, математическая формулировка которой представлена неявной разностной схемой в виде уравнения (3.46), граничных и начального условий в форме уравнений (3.35б), (3.36б) и (3.37). Для удобства дальнейших выкладок перепишем уравнение (3.46) совместно с (3.35б) и (3.36б) в форме, соответствующей неявной разностной схеме:

$$\left(1+2\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}\right)T_{i,\,k+1}-\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}T_{i-1,\,k+1}-\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}T_{i+1,\,k+1}=T_{i,\,k};$$

$$\left(1+2\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}\right)T_{0,\,k+1}-2\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}T_{1,\,k+1}=T_{0,\,k}; \tag{3.47}$$

$$\left(1+2\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}+2\frac{\alpha\,\Delta\tau}{c\rho\,\Delta x}\right)T_{n,\,k+1}-2\frac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}T_{n-1,\,k+1}-2\frac{\alpha\,\Delta\tau}{c\rho\,\Delta x}T_{\text{ж}}=T_{n,\,k}. \tag{3.48}$$

На временно́м слое $(k+1)$ методом прогонки необходимо решить систему уравнений типа (3.46) — (3.48) — общее число уравнений $(n+1)$. Для простоты заменяем уравнение (3.46) уравнением в канонической форме, опуская индексацию по времени и обозначая неизвестные температуры буквой x_i, где i — номер узла пространственной сетки:

$$a_i x_{i-1}+b_i x_i+c_i x_{i+1}=d_i, \tag{3.49}$$

где при

$i=1,\,2,\,\ldots,\,n-1\quad a_i=c_i=-\dfrac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}$;

$b_i=1+2\dfrac{a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}$; $\quad d_i=T_{i,\,k}$.

При $i=n$, сопоставляя (3.48) с (3.49), получаем:

$$\left.a_n=-\frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2};\quad b_n=1+\frac{2a\,\Delta\tau}{\Delta x^2}+\frac{2\alpha\,\Delta\tau}{c\rho\,\Delta x};\quad c_n=-\frac{2\alpha\,\Delta\tau}{c\rho\,\Delta x};\quad d_n=T_{n,\,k},\right\} \tag{3.50}$$

при этом считаем, что $x_{n+1}=T_{\text{ж}}$.

При $i=0$ из (3.47) находим

$$x_0=\frac{T_{0,\,k}}{1+2a\,\Delta\tau/\Delta x^2}+\frac{2a\,\Delta\tau/\Delta x^2}{1+2a\,\Delta\tau/\Delta x^2}x_1. \tag{3.51}$$

Будем искать решение системы (3.49) — (3.51) в форме

$$x_i=\gamma_i+\beta_i x_{i+1}. \tag{3.52}$$

Поскольку i — произвольный номер, то должно быть справедливо также равенство

$$x_{i-1}=\gamma_{i-1}+\beta_{i-1}x_i.$$

Подставляем последнее выражение в исходное уравнение (3.49)

$$a_i\gamma_{i-1}+a_i\beta_{i-1}x_i+b_i x_i+c_i x_{i+1}=d_i$$

и находим отсюда

$$x_i=\frac{d_i-a_i\gamma_{i-1}}{b_i+a_i\beta_{i-1}}-\frac{c_i}{b_i+a_i\beta_{i-1}}x_{i+1}. \tag{3.53}$$

Сравнивая выражения (3.52) и (3.53), находим:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_i&=\frac{d_i-a_i\gamma_{i-1}}{b_i+a_i\beta_{i-1}};\\ \beta_i&=-\frac{c_i}{b_i+a_i\beta_{i-1}}.\end{aligned}\right\} \tag{3.54}$$

Выражения (3.54) представляют собой рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов γ_i и β_i по соответствующим значениям этих же коэффициентов в предыдущей точке γ_{i-1} и β_{i-1}. По (3.54) можно найти γ_i, β_i для $i=1, 2, \ldots, n$, причем входящие в эти формулы коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i определяются выражениями (3.49) и (3.50). Значения γ_0 и β_0 определяются из граничного условия (3.51): сопоставляя его с (3.52) при $i=0$, получаем:

$$\gamma_0=\frac{T_{0,\,k}}{1+2a\,\Delta\tau/\Delta x^2};\quad \beta_0=\frac{2a\,\Delta\tau/\Delta x^2}{1+2a\,\Delta\tau/\Delta x^2}. \tag{3.55}$$

После того как вычислены все коэффициенты, можно перейти к вычислению искомых температур x_i по рекуррентной формуле (3.52), при этом расчет производят в обратном порядке, т. е. начиная с x_n, а также полагают $x_{n+1}=T_ж$.

Итак, расчет по неявной разностной схеме температурного поля на одном временном слое сводится к вычислению коэффициентов γ_i, β_i по выражениям (3.54) и (3.55) при прогонке в прямом направлении ($i=0, 1, 2, \ldots, n$), а затем — температур по рекуррентной формуле (3.52) при прогонке в обратном направлении ($i=n, n-1, \ldots, 0$). В остальном порядок вычислений по неявной схеме такой же, как и по явной.

Количество вычислений на одном временно́м слое по неявной схеме больше, чем по явной, примерно в два раза. Тем не менее если шаг по времени $\Delta\tau_{ня}$ превышает $\Delta\tau_я$ более чем в 4 раза, то с точки зрения затрат машинного времени целесообразно использовать неявную схему.

Выше отмечалось, что погрешность вычислений при одинаковых Δx и $\Delta\tau$ меньше у той разностной схемы, у которой выше порядок аппроксимации, но эта относительная оценка, к сожалению, не дает возможности определить абсолютную погрешность вычислений температуры (в градусах). Приближенную оценку можно сделать на основании двух расчетов [43]: если в первом расчете определили $T_{i,\,k}$, при выбранных значениях Δx и $\Delta\tau$, то во втором расчете определяют $T'_{i,\,k}$, принимая $\Delta x'=2\Delta x$, $\Delta\tau'=4\Delta\tau$. Тогда погрешность температуры в первом расчете

$$\Delta T_{i,\,k}\approx\left|\frac{T'_{i,\,k}-T_{i,\,k}}{3}\right|. \tag{3.56}$$

В заключение описания разностных схем для задач теплопроводности отметим, что здесь были рассмотрены самые простые, но не самые точные разностные схемы. Более совершенные разностные схемы, как явные, так и неявные, можно найти в специальной литературе [3, 39].

3.10. ОСОБЕННОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Разностная постановка двух- и трехмерных задач теплопроводности аналогична одномерным и затруднений не вызывает; отличие состоит в том, что правые части разностных уравнений представляются суммами двух или трех разностных аналогов вторых производных. Например, для явной схемы двухмерной задачи теплопроводности основное разностное уравнение записывается в следующей форме:

$$\frac{T_{i,j,k+1}-T_{i,j,k}}{\Delta\tau}=a\left(\frac{T_{i-1,j,k}+T_{i+1,j,k}-2T_{i,j,k}}{\Delta x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{T_{i,j-1,k}+T_{i,j+1,k}-2T_{i,j,k}}{\Delta y^2}\right).$$

При этом условие устойчивости, которое для одномерной задачи определялось уравнением (3.44), приобретает вид

$$\Delta\tau\leqslant\frac{1}{2a\,(1/\Delta x^2+1/\Delta y^2)}\,.$$

Основная сложность при решении двух- и трехмерных задач теплопроводности — это большой объем вычислений, так как при этом резко возрастает число расчетных точек — узлов пространственной сетки (а при расчете по явной схеме и число временны́х слоев). Поэтому решение подобных задач даже на современных ЭВМ требует больших затрат машинного времени и является дорогостоящей операцией. Для уменьшения объема вычислений советскими математиками [39, 44] разработаны так называемые экономичные схемы. Наибольшее распространение получили разностные схемы, основанные на методе дробных шагов по временно́й переменной. Экономичность этих схем достигается сведением многомерной задачи к последовательному решению одномерных, для которых применим метод прогонки. Так, для решения двухмерных задач разработан *метод продольно-поперечной прогонки*, основная идея которого состоит в том, что на половине временно́го шага $\Delta\tau/2$ выполняется прогонка по пространственной координате x, а на второй половине временно́го шага — по координате y. Для решения трехмерных задач чаще всего применяют более сложный *метод расщепления*. Описание, алгоритмы и программы для некоторых задач такого типа можно найти в [3].

Заметим, что здесь изложены основы метода конечных разностей для задач нестационарной теплопроводности, но этим же способом могут быть решены и многомерные задачи стационарной теплопроводности, реше́ние которых другими методами бывает затруднительным. Для этого задаются любым произвольным начальным распределением температур в теле и граничными условиями соответствующей стационарной задачи и решают нестационарную задачу до больших значений $\tau_{\text{кн}}$ — ведут счет на установление стационарного режима. В книге [3] приводятся методы оценки величины $\tau_{\text{кн}}$, при которой состояние тела можно считать стационарным.

3.11. ПРИМЕРЫ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В качестве примеров приведем блок-схемы и программы решения рассмотренной выше задачи об охлаждении неограниченной пластины по явной и неявной схемам. Для простоты и общности решения рассматривается задача в безразмерной постановке [см. уравнения (3.7) — (3.10)].

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2};\ 0\leqslant X\leqslant 1;\ \mathrm{Fo}>0;\\&\text{при } \mathrm{Fo}=0\ \Theta_{\text{нч}}=1,\ 0\leqslant X\leqslant 1;\\&\text{при } X=0\ (\partial\Theta/\partial X)_0=0,\ \mathrm{Fo}>0;\\&\text{при } X=1\ (\partial\Theta/\partial X)_{\text{c}}=\mathrm{Bi}\Theta_{\text{c}},\ \mathrm{Fo}>0,\end{aligned}\right\}\tag{3.57}$$

где $X=x/l$; $\mathrm{Fo}=a\tau/l^2$; $\mathrm{Bi}=\alpha l/\lambda$.

Температура жидкости в эти уравнения в явной форме не входит, так как $\Theta_{\text{ж}}=0$.

Требуется определить температурное поле $\Theta=f(X)$ при $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_{\text{кн}}$ и заданном значении Bi.

Вследствие симметрии рассматривается полупластина, т. е. $l=\delta/2$ (рис. 3.10). Разбиваем полупластину на n слоев, безразмерная толщина слоя $\Delta X=1/n$. Узловые точки нумеруем $i=1, 2, \ldots, (n+1)$ (нумерация начата с единицы для удобства программирования на ФОРТРАНе). Выбираем шаг по времени $\Delta\mathrm{Fo}$;

а) при использовании условно устойчивой явной расчетной схемы $\Delta\mathrm{Fo}$ определяется из условия устойчивости, которое в безразмерной форме с учетом граничного условия третьего рода имеет вид

$$\Delta\mathrm{Fo}\leqslant\frac{1}{2\,(1/\Delta X^2+\mathrm{Bi}/\Delta X)};\tag{3.58}$$

б) при расчетах по неявной схеме $\Delta\mathrm{Fo}$ может быть выбран произвольно.

Общее число временны́х слоев $p=\mathrm{Fo}_{\text{кн}}/\Delta\mathrm{Fo}$. Будем нумеровать временны́е слои $k=0, 1, 2, \ldots, p$.

Переходим к разностным схемам (для простоты будем обозначать сеточную функцию, как и безразмерную температуру, Θ).

Явная разностная схема. Рассмотрим явную разностную схему.

1. Разностное уравнение для внутренних точек ($i=2, 3, \ldots, n$)

$$\frac{\Theta_{i,\,k+1}-\Theta_{i,\,k}}{\Delta\mathrm{Fo}}=\frac{\Theta_{i-1,\,k}+\Theta_{i+1,\,k}-2\Theta_{i,\,k}}{\Delta X^2}.\tag{3.59}$$

2. Граничные условия:
при $i=1$ в соответствии с (3.35б)

$$\frac{\Theta_{1,\,k+1}-\Theta_{1,\,k}}{\Delta\mathrm{Fo}}=\frac{2\Theta_{2,\,k}-2\Theta_{1,\,k}}{\Delta X^2};\tag{3.60}$$

Рис. 3.10. К решению методом конечных разностей задачи об охлаждении пластины

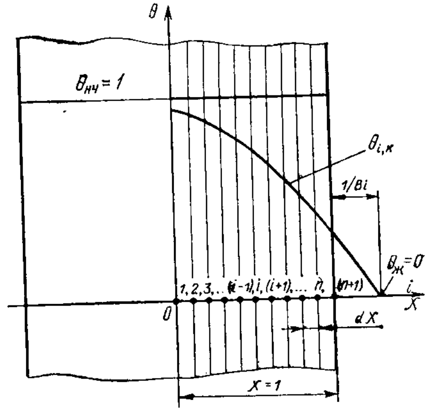
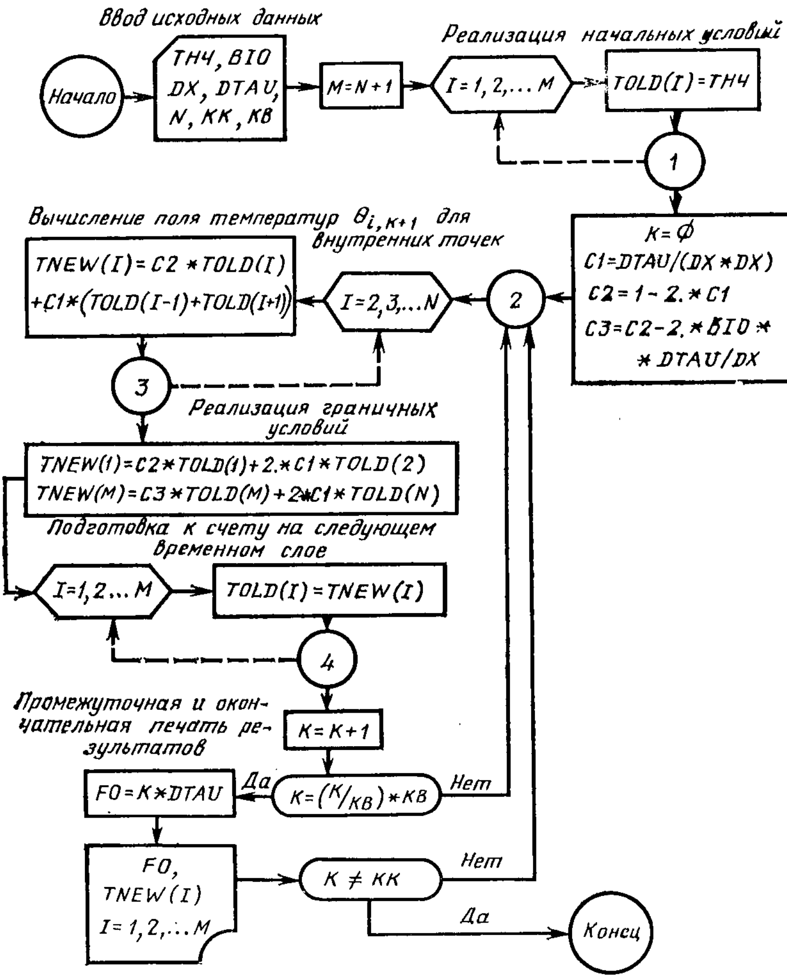


Рис. 3.11. Блок-схема программы явной расчетной схемы



при $i=n+1$ в соответствии с (3.36б)

$$\frac{\Theta_{n+1,\,k+1}-\Theta_{n+1,\,k}}{\Delta \mathrm{Fo}}=\frac{2\Theta_{n,\,k}-2\Theta_{n+1,\,k}}{\Delta X^2}-\frac{2\mathrm{Bi}\,\Delta\mathrm{Fo}\Theta_{n+1,\,k}}{\Delta X}. \qquad (3.61)$$

3. Начальное условие при $k=0$, $i=1, 1, \ldots, n+1$

$$\Theta_{i,\,0}=1. \qquad (3.62)$$

Принимаем для конкретности $\mathrm{Bi}=2$, $\mathrm{Fo}=0{,}4$, $n=10$, тогда $\Delta X=$ $=0{,}1$ и по (3.58) $\Delta\mathrm{Fo}\leqslant 0{,}00416$, принимаем $\Delta\mathrm{Fo}=0{,}004$.

Блок-схема программы для реализации расчетов по разностной схеме [см. уравнения (3.59) — (3.62)] представлена на рис. 3.11. Ниже приведены текст соответствующей программы на языке ФОРТРАН-IV и результаты расчета. В программе приняты следующие обозначения идентификаторов: массивы TOLD, TNEW — температурные поля соответственно на временны́х слоях k и $k+1$; DX — толщина элементарного слоя ΔX; DTAU — шаг по времени $\Delta\mathrm{Fo}$; BIO — критерий Bi; FO — критерий Fo; N — число пространственных слоев n; I — номер узла пространственной сетки; K — номер временно́го слоя; KK — номер последнего временно́го слоя p; KB — число шагов по времени, через которое предусматривается промежуточная выдача на печать температурного поля. При заданных $\mathrm{Fo}_{\text{кн}}=0{,}4$ и $\Delta\mathrm{Fo}=0{,}004$, KK=100 принимаем KB=20. Для удобства варьирования размерность массивов TOLD и TNEW принимаем большей, чем $n+1=11$, например по 22 точки.)

Текст программы для решения задачи об охлаждении пластины по явной конечно-разностной схеме приведен ниже.

```
      DIMENSION TOLD(22),TNEW(22)
      READ(5,100)DX,DTAU,BIO,TH,N,KK,KB
  100 FORMAT(4F8.5,3I4)
      M=N+1
      DO 1 I=1,M
    1 TOLD(I)=TH
      K=0
      C1=DTAU/(DX*DX)
      C2=1-2.*C1
      C3=C2-2.*BIO*DTAU/DX
    2 DO 3 I=2,N
    3 TNEW(I)=C2*TOLD(I)+C1*(TOLD(I-1)+TOLD(I+1))
      TNEW(1)=C2*TOLD(1)+2.*C1*TOLD(2)
      TNEW(M)=C3*TOLD(M)+2.*C1*TOLD(N)
      DO 4 I=1,M
    4 TOLD(I)=TNEW(I)
      K=K+1
      IF((K/KB)*KB.NE.K)GO TO 2
      FO=K*DTAU
      WRITE(6,102) FO,(TNEW(I),I=1,M)
  102 FORMAT(1X,F6.3,11(2X,F6.4))
      IF(K.NE.KK) GOTO 2
      STOP
      END
```

Результаты расчета представлены в табл. 3.2.

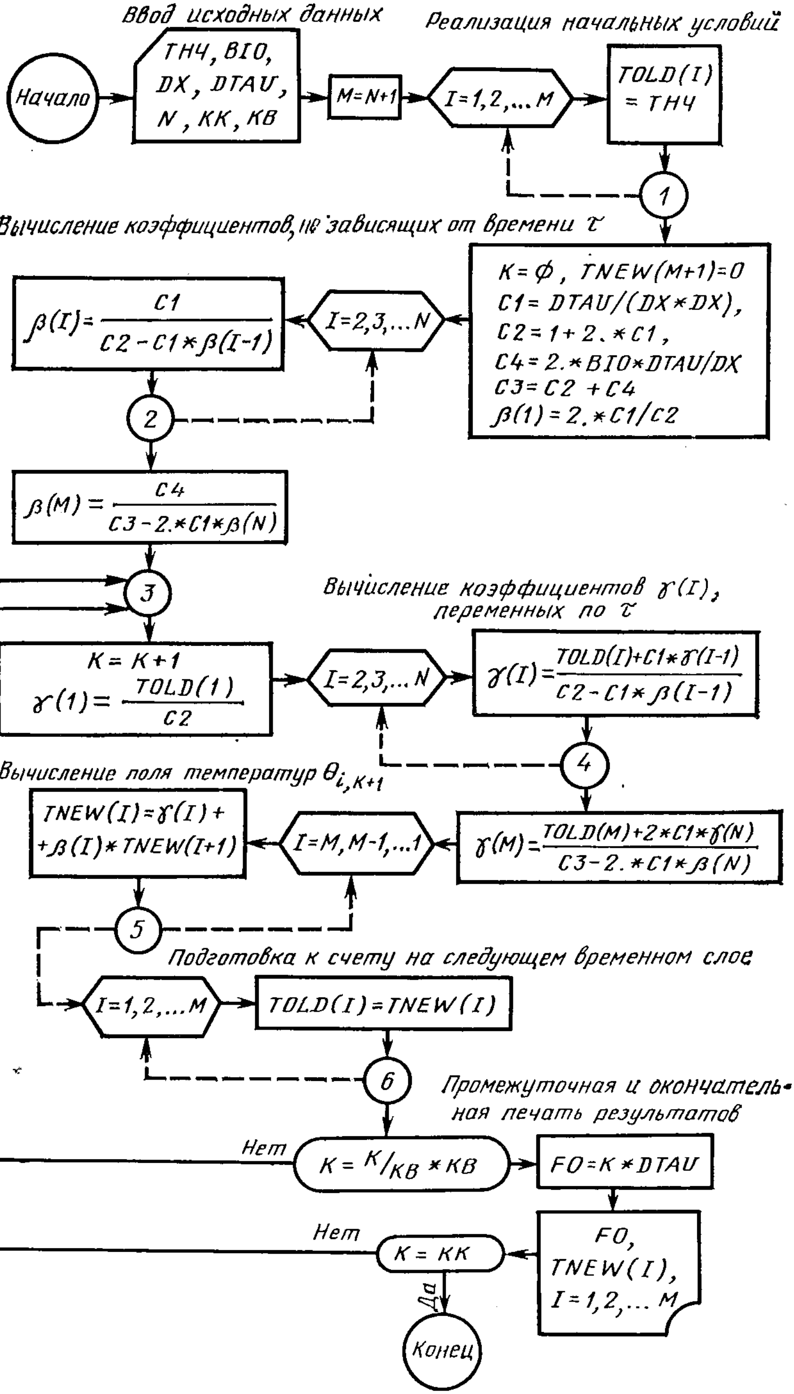


Рис. 3.12. Блок-схема программы неявной расчетной схемы

Таблица 3.2. **Распределение температур**

F_0	$x/l=0$	0,2	0,4	0,6	0,8	10,0
0.080	0.9958	0.9898	0.9651	0.9026	0.7789	0.5810
0.160	0.9515	0.9358	0.8861	0.7970	0.6637	0.4873
0.240	0.8826	0.8643	0.8092	0.7172	0.5895	0.4383
0.320	0.8095	0.7915	0.7379	0.6504	0.5320	0.3875
0.400	0.7393	0.7225	0.6726	0.5916	0.4830	0.3516

Примечание. Для краткости в таблицу включены точки через одну.

Неявная разностная схема. При расчете по неявной схеме сохраняем принятые ранее обозначения и численные значения исходных данных, за исключением шага по времени: принимаем $\Delta\mathrm{Fo}=0{,}020$, т. е. в пять раз большим, чем в расчете по явной схеме; соответственно KK=20, KB=4.

Рекуррентное уравнение сеточной функции температуры во всех расчетных точках $i=1, 2, 3, \ldots, (n+1)$

$$\Theta_{i,\,k+1}=\gamma_i+\beta_i\Theta_{i+1,\,k+1},$$

где в соответствии с (3.54) и (3.49) γ_i и β_i для внутренних точек $i=2, 3, \ldots, n$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\beta_i=\frac{\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2}{1+2\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2-\beta_{i-1}\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2};$$

$$\gamma_i=\frac{\Theta_{i,\,k}+\gamma_{i-1}\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2}{1+2\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2-\beta_{i-1}\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2}.$$

Для граничных точек:
при $i=1$ по (3.55):

$$\beta_1=\frac{2\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2}{1+2\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2};\quad \gamma_1=\frac{\Theta_{1,\,k}}{1+2\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2};$$

при $i=n+1$ по (3.54) и (3.50):

$$\beta_{n+1}=\frac{2\,\mathrm{Bi}\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X}{1+2\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2+2\mathrm{Bi}\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X-\beta_n 2\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2};$$

$$\gamma_{n+1}=\frac{\Theta_{n+1,\,k}+\gamma_n\,2\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2}{1+2\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2+2\mathrm{Bi}\,\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X-\beta_n 2\Delta\mathrm{Fo}/\Delta X^2}.$$

В программе приняты те же обозначения идентификаторов, что и для явной схемы, дополнительно включены массивы BETA и GAMMA, размерность которых такая же, как у массивов TOLD и TNEW. В расчетах также необходимо учитывать температуру $\Theta_{n+2,\,k}$, которая в любой момент времени равна температуре жидкости $\Theta_{ж}=0$.

Блок-схема программы представлена на рис. 3.12.

Текст программы для решения задачи об охлаждении пластины по неявной конечно-разностной схеме приведен ниже.

```
      DIMENSION TOLD(22),TNEW(22),BETA(22),GAMMA(22)
      READ(5,100)DX,DTAU,BIO,TH,N,KK,KB
100   FORMAT(4F8.5,3I4)
      WRITE(6,101) BIO,TH,DX,DTAU,N,KK,KB
101   FORMAT(1X4E11.4,1X,3I4)
      M=N+1
      DO 1 I=1,M
1     TOLD(I)=TH
      K=0
      TNEW(M+1)=0
      C1=DTAU/(DX*DX)
      C2=1+2.*C1
      C4=2.*BIO*DTAU/DX
      C3=C2+C4
      BETA(1)=2.*C1/C2
      DO 2 I=2,N
2     BETA(I)=C1/(C2-C1*BETA(I-1))
      BETA(M)=C4/(C3-2.*C1*BETA(N))
3     K=K+1
      GAMMA(1)=TOLD(1)/C2
      DO 4 I=2,N
4     GAMMA(I)=(TOLD(I)+C1*GAMMA(I-1))/(C2-C1*BETA(I-1))
      GAMMA(M)=(TOLD(M)+2.*C1*GAMMA(N))/(C3-2.*C1*BETA(N))
      DO 5 J=1,M
      I=M+1-J
5     TNEW(I)=GAMMA(I)+BETA(I)*TNEW(I+1)
      DO 6 I=1,M
6     TOLD(I)=TNEW(I)
      IF((K/KB)*KB.NE.K) GOTO 3
      FO=K*DTAU
      WRITE(6,102) FO,(TNEW(I),I=1,M)
      IF(K.NE.KK) GOTO 3
      STOP
      END
```

Результаты расчеты приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3 **Распределение температур**

F_0	$x/l=0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0.080	0.9890	0.9831	0.9606	0.9068	0.7950	0.5989
0.160	0.9453	0.9314	0.8869	0.8040	0.6747	0.4972
0.240	0.8809	0.8638	0.8117	0.7228	0.5967	0.4365
0.320	0.8111	0.7936	0.7414	0.6552	0.5371	0.3917
0.400	0.7429	0.7263	0.6768	0.5961	0.4872	0.3548

Примечание. Для краткости в таблицу включены точки через одну.

3.12. МЕТОД АНАЛОГИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В природе встречаются явления, которые, будучи различными по физической сущности, подчиняются одинаковым закономерностям, вследствие чего их математические описания по форме тождественны, несмотря на то, что входящие в них величины различаются по физическому смыслу и имеют различную разномерность. Такие явления называются аналогичными. В частности, аналогичны явления теплопроводности, диффузии, электропроводности и движения жидкостей при ламинарном режиме. Собственно идентичность законов теплопроводности, диффузии, электропроводности и т. п. следует из более общего философского представления о едином механизме переноса в пространстве субстанции любой природы (теплоты, вещества, электрических зарядов и др.), который математически можно представить в виде линейной зависимости между причиной и следствием (сравните законы Фурье, Фика, Ома и др.).

Очевидно, что при изучении ряда аналогичных явлений достаточно установить закономерности одного из них. При этом выбирают то из аналогичных явлений, которое можно исследовать проще, точнее, дешевле и быстрее. Так, решение сложных задач теплопроводности можно получить, изучая экспериментально соответствующий гидродинамический процесс или процесс электропроводности. При решении конкретных задач теплопроводности методом аналогии необходимо иметь аналоговую модель, которая позволяет реализовать условия однозначности, подобные условиям однозначности решаемой задачи.

Устройства, с помощью которых можно решать всевозможные задачи теплопроводности с различными условиями однозначности на гидравлической модели, называются **гидроинтеграторами**. В 40—60-х годах широкое распространение в нашей стране получил гидроинтегратор Лукьянова [24]. Он представляет собой систему стеклянных трубок (до нескольких сотен) и нескольких емкостей большого объема. Трубки имитируют элементарные слои (для одномерных) или элементарные объемы тела для многомерных задач теплопроводности. В зависимости от диаметра они обладают различным гидравлическим сопротивлением, аналогичным термическому сопротивлению соответствующего элементарного объема. Уровень жидкости в трубках соответствует температуре. Если установить в трубках уровни, соответствующие начальному распределению температуры в теле, а затем одновременно открыть краны, соединяющие их между собой и с баками, в которых уровень поддерживается соответствующим температуре на границах тела (при граничных условиях первого рода) или температуре окружающей среды (при граничных условиях третьего рода), то изменение во времени уровня жидкости в трубках гидроинтегратора будет соответствовать изменению температуры тела. (При граничном условии третьего рода между трубками, имитирующими объемы тела, и баком устанавливаются дополнительные трубки, имитирующие термическое сопротивление теплоотдаче $1/\alpha$.) Имеется возможность останавливать процесс перетекания жидкости в нужный момент времени и фиксировать соответствующее распределение температур.

В гидроинтеграторе Лукьянова реализуется процесс, лишь приближенно аналогичный процессу теплопроводности, так как непрерывная температурная функция заменяется дискретной в пространстве. Во времени же процесс движения жидкости непрерывен. Таким образом, решение задач теплопроводности на гидроинтеграторе занимает как бы промежуточное положение между точным аналитическим решением и конечно-разностным, поскольку в последнем температурная функция дискретна как в пространстве, так и во времени. Однако точность решения задач на гидроинтеграторе в основном определяется не точностью метода, а инструментальной погрешностью прибора: точностью установления и измерения уровней в отдельных трубках, точностью измерения времени между отсечками, плотностью перекрывающих кранов и т. п. Поэтому, несмотря на то, что с точки зрения возможностей гидроинтегратор представляет собой весьма совершенный прибор (на нем могут быть решены задачи теплопроводности со всевозможными начальными и граничными условиями, а также с внутренними источниками теплоты и с подвижными границами раздела фаз), в последние годы предпочтение в основном отдается математическому моделированию (в частности, конечно-разностным методам) с помощью ЭВМ или электроинтеграторам.

Известно три типа электроинтеграторов: а) статические; б) основанные на R-сетках и в) основанные на R—C-сетках. Из них статический интегратор является самым примитивным. Электрическая схема статического интегратора представляет собой элементарную ячейку, состоящую из нескольких (минимум трех) омических сопротивлений, сходящихся в одну точку, на концы которых можно подавать различные напряжения. Решение задач теплопроводности на статическом интеграторе на основании закона Кирхгофа соответствует численному решению по явной разностной схеме (3.45): на концы трех сопротивлений R_1, R_2 и R_3 подают напряжения, соответствующие температурам $T_{i-1,k}$, $T_{i+1,k}$ и $T_{i,k}$, тогда при соответствующем подборе сопротивлений R_1 и R_2, имитирующих термические сопротивления слоев, и R_3, имитирующего теплоемкость элементарного слоя, напряжение в узловой точке будет соответствовать температуре $T_{i,k+1}$.

Таким образом, отличие от численного решения состоит только в том, что в статическом электроинтеграторе вычислительные операции заменяются измерительными. Очевидно, что при быстродействии современных вычислительных машин этот метод не может конкурировать с математическим моделированием на ЭВМ ни по быстродействию, ни по трудоемкости, ни по точности.

Более совершенным устройством является электроинтегратор, основанный на R-сетках. Он представляет собой электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных элементарных ячеек омических сопротивлений (рис. 3.13, *а*). Если на внешние концы омических сопротивлений R_τ подавать напряжения, соответствующие температурам на временном слое k (т. е. $T_{i,k}$), а в граничные точки A и B — напряжения, соответствующие температурам сред $T_{ж1}$ и $T_{ж2}$, то в узловых точках $i=0, 1, 2, \ldots, n$ устанавливаются напряжения, соответствующие температурам на следующем временном слое $k+1$ (т. е. $T_{i,k+1}$). При этом решение соответствует неявной разностной схеме (3.46). По сравнению с единичной ячейкой статического электроинтегратора, электроинтеграторы на R-сетках позволяют во много раз ускорить измерительный процесс и

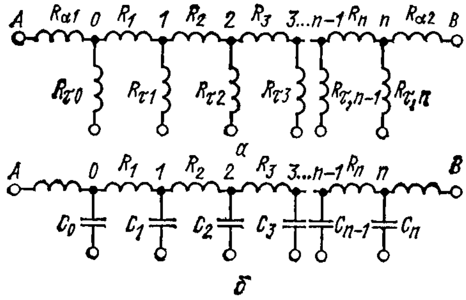


Рис. 3.13. Принципиальная схема электроинтеграторов на *R*-сетках (*а*) и на *R* — *С*-сетках (*б*)

даже допускают определенную автоматизацию, при которой отпадает необходимость регистрации напряжений на каждом временно́м слое. Однако и при этом процесс решения задач на *R*-сетках является по сравнению с решением на ЭВМ медленным и имеет кроме погрешности, присущей всем конечно-разностным методам, сравнительно большую инструментальную погрешность.

Наиболее совершенными аналоговыми машинами являются электроинтеграторы, основанные на *R*—*С*-сетках. Основным элементом в них является электрическая цепь, состоящая из омических и емкостных сопротивлений (рис. 3.13, *б*). Процесс решения на *R*—*С*-сетке подобен решению на гидроинтеграторе, т. е. температурное поле получается дискретным по пространственной координате, но непрерывным по времени. При этом аналогами теплоемкости элементарных слоев являются электрические емкости. Процесс по времени происходит очень быстро. Проследить за изменением напряжения (и соответственно температуры) отдельных точек во времени можно с помощью осциллографа, при этом результат представляется очень наглядно в виде графиков и может быть перенесен на фотографию.

В заключение в данном параграфе необходимо упомянуть, что аналоговые устройства могут быть с успехом применены для решения сложных многомерных задач стационарной теплопроводности. В частности, двухмерные задачи удобно моделировать на электропроводной бумаге с помощью электрогидродинамического интегратора (ЭГДА). Из бумаги можно вырезать любой сложный контур, различную теплопроводность материалов имитируют бумагой различной толщины (или склеивая ее в несколько слоев). Граничные условия моделируются путем подачи соответствующего напряжения через специальные прижимные шины или слои высокоэлектропроводной фольги, которую можно наклеить по контуру модели. Измеряя напряжение в различных точках модели, через масштабный множитель переходят к значению температуры. Переходя от точки к точке, получают картину температурного поля.

Известны аналоговые модели стационарного трехмерного температурного поля, в которых проводящей средой служит раствор электролита или электропроводный гель. Подробное изложение методов аналогии для задач теплопроводности можно найти в монографии [20].

Электрическое моделирование получает все более широкое развитие. Разработаны установки, позволяющие моделировать сложные процессы теплообмена.

Глава 4. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

4.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Конвекцией (от лат. convectio — привоз, принесение) называют движение отдельных макрообъемов в жидкости или газе друг относительно друга под действием сил различной природы. Под макрообъемами понимают конгломераты, состоящие из множества молекул. Их размеры значительно превосходят длину свободного пробега молекулы в газе или амплитуду колебания молекул в жидкости. Макрообъемы — это отдельные слои, или «комки», среды, которые способны в течение некоторого времени двигаться как единое целое. В том, что конвекция представляет собой движение макроструктурных элементов, можно убедиться, сделав ее видимой с помощью простейших приемов (введением в поток движущейся среды краски, дыма и т. п.).

Так же как движущиеся микроструктурные элементы среды (молекулы, электроны и др.), движущиеся макрообъемы являются носителями энергии в различных ее формах. Так, в результате конвекции всегда происходит обмен кинетической энергией (количеством движения) между отдельными слоями (комками) движущейся жидкости или газа. Если же конвекция происходит в среде с неравномерным распределением температуры, то перемещение макрообъемов приводит к теплообмену между областями среды с различными температурами. При отсутствии теплоподвода извне конвекция (как и теплопроводность) способствует выравниванию температур в среде и переходу ее к равновесному тепловому состоянию.

Если движущийся газ (или жидкость) представляет собой смесь (раствор) химически разнородных компонентов, причем состав смеси неоднороден (т. е. существует градиент концентрации отдельных компонентов), то кроме переноса количества движения происходит также конвективный перенос вещества (массы), приводящий к выравниванию концентраций.

В общем случае конвективным переносом называют перенос количества движения, теплоты и вещества в среде с неравномерным распределением скорости, температуры и концентрации. Этот более сложный процесс можно также назвать конвективным тепломассообменом, его закономерности рассматриваются в главе 10.

При прочих равных условиях перенос теплоты конвекцией происходит намного интенсивнее, чем теплопроводностью, поскольку порции энергии, переносимые макрообъемами, несоизмеримо больше порций энергии, которые могут быть перенесены отдельными молекулами. С другой стороны, движение макрообъемов всегда сопровождается движением отдельных молекул, т. е. перенос теплоты конвекцией всегда включает и теплопроводность. Как написано во введении, такой совместный перенос теплоты конвекцией и теплопроводностью называют **конвективным теплообменом**.

Конвективный теплообмен возможен только в жидкостях или газах.

Плотность теплового потока при конвективном теплообмене может быть представлена выражением

$$q = q_{к} + q_{тпр},$$

где $q_к$ и $q_{тпр}$ — составляющие плотности теплового потока за счет конвекции и теплопроводности соответственно.

Величина $q_к$ может быть выражена энтальпией потока, передаваемого через единичную площадь сечения, нормального вектору скорости.

$$q_к = \rho w_п i, \qquad (4.1)$$

где $w_п$ — составляющая скорости движения среды в направлении теплового потока; i — удельная энтальпия среды.

В соответствии с законом Фурье $q_{тпр} = -\lambda(\partial t/\partial n)$.

Таким образом,

$$q = \rho w_п i - \lambda(\partial t/\partial n). \qquad (4.2)$$

Характер конвективного теплообмена существенно изменяется в зависимости от причины возникновения движения жидкости или газа; в этом отношении различают свободную и вынужденную конвекцию.

Свободной конвекцией называют относительное перемещение макрообъемов среды, вызванное разностью плотностей нагретых и холодных слоев в поле массовых сил.

Условиями, необходимыми для возникновения свободной конвекции, являются: наличие разности температур между отдельными макрообъемами рассматриваемой среды; наличие поля массовых сил (гравитационных, магнитных и т. п.), действующих на эту среду.

Наиболее распространенным случаем является свободная конвекция в поле гравитационной силы Земли (гравитационная свободная конвекция). В этом случае нагретые слои жидкости или газа испытывают действие архимедовой (подъемной) силы и движутся вверх, а охлажденные слои движутся вниз.

Мы ограничимся рассмотрением только гравитационной конвекции, которую в дальнейшем и будем называть просто свободной конвекцией.

Свободная конвекция непосредственно связана с процессом переноса теплоты, который всегда возникает там, где есть разность температур. Свободная конвекция в отличие от вынужденной не может осуществляться без теплообмена.

Вынужденной конвекцией называется движение среды в целом, вызванное каким-либо внешним источником движения. Если какое-либо тело перемещается в неподвижной среде с помощью двигателя (например, судно в воде или самолет в воздухе), то движение среды относительно поверхности этого тела следует также считать вынужденным. В отличие от свободной вынужденная конвекция может и не сопровождаться теплообменом, если во всем потоке grad $t=0$ (изотермическое течение). Естественно, что в курсе теплопередачи изотермические течения не рассматриваются.

Конвективный теплообмен, как и процесс теплопроводности, может быть стационарным и нестационарным. Нестационарный конвективный теплообмен наблюдается, например, в случае смешения двух объемов жидкостей или газов, имеющих различную температуру.

С инженерной точки зрения важна и наиболее изучена задача стационарного конвективного теплообмена, когда в результате подвода теплоты извне в определенных точках рассматриваемого объема поддерживается постоянная температура, отличная от средней температуры среды. Практически это возможно на границе среды с какой-либо твердой поверхностью. Тогда между этой поверхностью и средой будет происходить постоянный теплообмен (предполагается, что у данной поверхности среда нагревается, а где-то в другом месте охлаждается, либо наоборот). Такой перенос теплоты, называемый теплоотдачей, происходит в теплообменных аппаратах, в строительных конструкциях, при движении тел в среде, температура которой отлична от температуры тела (самолеты, ракеты, метеориты и т. п.), т. е. в самых различных областях техники и природных явлениях.

Итак, теплоотдача есть теплообмен между поверхностью твердого тела и средой, соприкасающейся с этой поверхностью и находящейся в движении.

Как уже указывалось, процесс теплоотдачи принято описывать с помощью уравнения Ньютона — Рихмана (1.17). Количество теплоты, передаваемой через элементарную теплопередающую поверхность площадью dF, за элементарный промежуток времени $d\tau$ может быть представлено выражением

$$dQ_\tau = \pm\,\alpha\,(t_ж - t_с)\,dF\,d\tau,$$

где знак «плюс» соответствует случаю $t_ж > t_с$, а знак «минус» — случаю $t_ж < t_с$.

Уравнение Ньютона — Рихмана для теплового потока при постоянных значениях α, $t_с$ и $t_ж$ имеет вид

$$Q = \pm\,\alpha\,(t_ж - t_с)\,F; \qquad (4.3)$$

для плотности теплового потока

$$q = \pm\,\alpha\,(t_ж - t_с) = \alpha\,\Delta t, \qquad (4.4)$$

где $\Delta t = |t_ж - t_с|$ — абсолютная величина разности температур $t_ж - t_с$, называемая температурным напором.

Простота формул (4.3) и (4.4) является лишь кажущейся, так как они не отражают многообразия факторов, влияющих на интенсивность теплоотдачи. По существу, написание этих формул представляет собой некоторый формальный прием, переносящий все трудности расчета на определение коэффициента α.

Коэффициент теплоотдачи α в отличие от коэффициента теплопроводности λ не является физическим параметром среды и зависит от многих факторов (см. раздел 4.2).

Инженерное решение задач конвективного теплообмена сводится чаще всего к определению коэффициента теплоотдачи и вычислению количества переданной теплоты по формуле (4.3) или (4.4).

4.2. ОСНОВНЫЕ ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ТЕПЛООТДАЧИ

Мерой интенсивности теплоотдачи является коэффициент теплоотдачи. В общем случае этот коэффициент зависит от скорости движения $\vec{w}$, формы и ориентации поверхности твердого тела в пространстве (фактор Ф), линейных размеров тела $(l_1, l_2, \ldots)$, режима движения, температуры и теплофизических характеристик среды, а в отдельных случаях и от некоторых других величин, например температурного напора Δt. Существенно влияет на коэффициент теплоотдачи наличие фазовых переходов в среде, омывающей тело.

Теплофизические характеристики. Наиболее сильно на конвективный теплообмен влияют следующие характеристики: коэффициент теплопроводности λ, теплоемкость c, динамический коэффициент вязкости μ, плотность ρ, коэффициент объемного расширения β.

Коэффициент μ является коэффициентом пропорциональности в законе Ньютона для вязкого трения

$$S_{\text{тр}} = \mu\,(\partial \vec{w}/\partial n), \tag{4.5}$$

где $S_{\text{тр}}$ — напряжение трения на границе между соседними слоями движущейся среды; $\partial w/\partial n$ — изменение скорости в направлении, нормальном движению.

Вместо динамического коэффициента вязкости μ иногда удобнее пользоваться кинематическим коэффициентом вязкости $\nu = \mu/\rho$.

Отметим, что закон вязкого трения Ньютона в форме уравнения (4.5) справедлив только для так называемых ньютоновских жидкостей — это газы и маловязкие капельные жидкости, такие, как вода, холодильные агенты, спирты и т. п. Другая группа жидкостей (некоторые масла, пищевые продукты, клеточные суспензии и т. п.) не подчиняются закону (4.5) и имеют более сложную зависимость между $S_{\text{гр}}$, скоростью и коэффициентом динамической вязкости μ. По этой причине жидкости первой группы называют ньютоновскими, а второй — неньютоновскими, или реологическими. В данном пособии в основном рассматриваются ньютоновские жидкости.

Для таких жидкостей в достаточно широком интервале изменения температур плотность можно считать линейной функцией от температуры:

$$\rho = \rho_0\,[1 - \beta\,(t - t_0)], \tag{4.6}$$

где ρ_0 — плотность при некоторой фиксированной температуре t_0.

Коэффициент объемного расширения β показывает, во сколько раз увеличивается объем среды при нагреве на 1 К. Из соотношений термодинамики

$$\beta = \frac{1}{v}\,(\partial v/\partial T)_p, \tag{4.7}$$

где v — удельный объем среды; $(\partial v/\partial T)$ — частная производная удельного объема по температуре при постоянном давлении.

Для газов

$$\beta \approx 1/T, \qquad (4.8)$$

где T — абсолютная температура газа.

Режимы движения. Из курса гидравлики известно, что движение жидкостей и газов может быть либо ламинарным, либо турбулентным. Л а м и н а р н ы м (рис. 4.1, *а*) называется такое движение, при котором отдельные струи перемещаются параллельно друг другу и стенкам канала, не перемешиваясь. При этом между отдельными слоями может существовать градиент скорости, но направление вектора скорости в любой точке потока во времени не изменяется. Т у р б у л е н т н ы м (рис. 4.1, *б*) называется движение, при котором в отдельных точках потока наблюдаются пульсации скорости как по величине, так и по направлению и только осредненный вектор скорости имеет определенное направление и величину. Возможен и переходный режим движения.

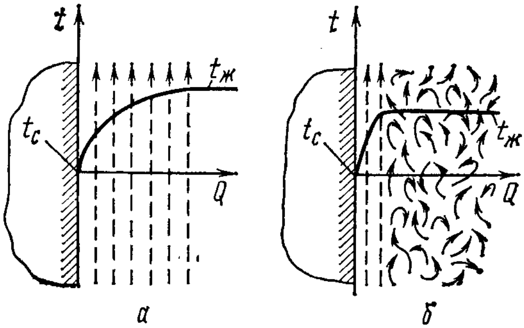


Рис. 4.1. Ламинарный (*а*) и турбулентный (*б*) режимы движения жидкости у твердой поверхности

В ламинарном потоке перенос теплоты конвекцией возможен только в направлении движения жидкости, т. е. вдоль ламинарных слоев, в то время как перенос теплоты теплопроводностью происходит во всех направлениях, в том числе перпендикулярно потоку от слоя к слою. Поскольку в процессе теплоотдачи температура стенки чаще всего постоянна (во всяком случае это справедливо для элементарного участка dF), стенка является изотермической поверхностью, вектор теплового потока направлен по нормали к ней и перпендикулярен вектору скорости. Этот случай соответствует условию, когда в уравнении (4.2) составляющая скорости движения в направлении теплового потока $w_п=0$, следовательно, плотность теплового потока от стенки в ламинарный поток жидкости

$$q_с = q_{тпр} = -\lambda\,(\partial t/\partial n)_с. \qquad (4.9)$$

Таким образом, теплоотдача в ламинарном потоке осуществляется путем теплопроводности.

В турбулентном потоке перенос теплоты происходит во всех направлениях и теплопроводностью, и конвекцией (в результате движения макрообъемов при турбулентных пульсациях скорости). Однако в непосредственной близости к стенке из-за эффекта «прилипания» к ней вязкой жидкости происходит торможение потока, турбулентные пульсации затухают. В результате вблизи стенки всегда существует тонкий вязкий подслой, в котором жидкость движется ламинарно (более подробно особенности гидродинамики потоков вблизи стенки будут рассматриваться в главе 6). В пределах вязкого подслоя передача теплоты практически осуществляется только путем теплопроводности [т. е. и в этом случае справедливо уравнение (4.9)], но за пределами вязкого подслоя в действие вступает конвективный механизм передачи теплоты. Поэтому при турбулентном режиме теплоотдача происходит интенсивнее, чем при ламинарном. Таким образом, значение коэффициента теплоотдачи зависит от режима движения.

В соответствии с изложенным общий вид функциональной зависимости для коэффициента теплоотдачи α можно представить выражением:

$$\alpha = f(\vec{w}, X, \lambda, c, \rho, \mu, \beta, \Delta t, \Phi, l_1, l_2, \ldots \text{ и др.}),$$

где X — фактор, учитывающий влияние режима движения среды.

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛООТДАЧИ

Дифференциальное уравнение теплоотдачи связывает коэффициент теплоотдачи с градиентом температуры вблизи теплоотдающей поверхности, т. е. показывает, как процесс теплоотдачи зависит от характера распределения температур (температурного поля) в движущейся жидкости. Для вывода этого уравнения запишем выражения теплового потока через элементарную площадку dF. С одной стороны, по уравнению Ньютона — Рихмана (4.3) для теплоотдачи

$$dQ = \alpha\, \Delta t\, dF.$$

С другой стороны, в непосредственной близости к стенке теплота при любом режиме движения передается только теплопроводностью [см. уравнение (4.9)], поэтому

$$dQ = -\lambda\, (\partial t/\partial n)_c\, dF,$$

где $(\partial t/\partial n)_c$ — градиент температуры вблизи стенки.

В последних уравнениях равны левые части, следовательно, можно приравнять и их правые части, откуда получаем

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\Delta t}\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_c . \qquad (4.10)$$

Уравнение (4.10) называют **дифференциальным уравнением теплоотдачи**. Из этого уравнения следует, что задача по определению коэффициента теплоотдачи может быть решена, если определить величину градиента температуры среды вблизи стенки $(\partial t/\partial n)_c$ (температурный напор Δt обычно задается условиями задачи). Величину $(\partial t/\partial n)_c$ можно найти, решив задачу о распределении температур в среде, ограниченной поверхностями теплоотдачи, аналогично тому, как это делалось для твердых тел при решении задач теплопроводности. Однако из изложенного в предыдущих параграфах следует, что температурное поле в движущейся среде должно зависеть от гидродинамических условий, т. е. от скоростного поля в потоке и режима движения среды.

При ламинарном режиме (см. рис. 4.1, *а*) кривая распределения температур имеет более пологий характер, чем при турбулентном (см. рис. 4.1, *б*), поскольку в последнем случае основное изменение температуры от $t_ж$ до $t_с$ происходит в тонком вязком подслое, а в турбулентной зоне потока температура отдельных слоев выравнивается в результате интенсивного перемешивания. Таким образом, распределение и градиент температуры у стенки при ламинарном и турбулентном режимах различны, причем $(\partial t/\partial n)_{с.\,тур} > (\partial t/\partial n)_{с.\,лам}$.

В общем случае решение задачи конвективного теплообмена сводится к совместному определению температурного и скоростного полей в движущейся жидкости. Последующие разделы данной главы посвящены постановке и математической формулировке такой задачи.

4.4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Как было показано в предыдущем разделе, процесс конвективного теплообмена характеризуется совокупностью тепловых и гидромеханических явлений. Такой процесс в общем виде может быть описан лишь системой дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнения системы, описывающей конвективный перенос в простейшем случае: движение однородной несжимаемой жидкости без внутренних источников теплоты. Под несжимаемой жидкостью понимают среду, плотность которой несущественно изменяется в зависимости от изменения кинетической энергии. Несжимаемыми можно считать все капельные жидкости, а также газы, если скорость газа мала по сравнению со скоростью звука. Поскольку при малых скоростях газы ведут себя как несжимаемая жидкость, в дальнейшем изложении термин «жидкость» будет применяться как собирательное понятие для капельных жидкостей и газов.

Задачи теплообмена при больших скоростях движения газов в данном курсе не рассматривается. Изложение этого раздела теории теплообмена можно найти, например, в учебнике [15].

Уравнение энергии. Для отыскания температурного поля, т. е. конкретного вида функции $t=f(x, y, z, \tau)$, записывают уравнение, которое устанавливает связь между изменениями температуры во времени и в пространстве для элементарного объема, $dV=dx\,dy\,dz$ (рис. 4.2), т. е. в дифференциальной форме. Такой зависимостью является дифференциальное уравнение энергии. Уравнение энергии следует из закона сохранения энергии применительно к элементарному объему dV, выделяемому в потоке жидкости. Оно аналогично дифференциальному уравнению теплопроводности в твердом теле или в неподвижной жидкости [см. уравнение (1.13)]; отличие состоит в том, что в данном случае теплота передается не только теплопроводностью, но и конвекцией, т. е. при движении теплопроводящей среды.

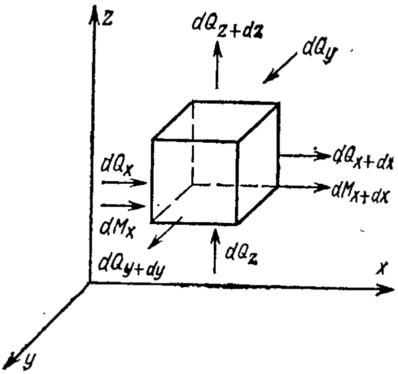


Рис. 4.2. К выводу дифференциальных уравнений энергии и сплошности

По оси x количество теплоты, поступающей в объем через левую грань $dy\,dz$ за элементарный промежуток времени $d\tau$, равно

$$dQ_x = q_x\,dy\,dz\,d\tau.$$

Количество теплоты, выходящей через правую грань того же размера за время $d\tau$,

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx}\,dy\,dz\,d\tau = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx\right)dy\,dz\,d\tau.$$

Разница между входящей и выходящей теплотой (или накопленная теплота) по оси x:

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,d\tau.$$

Заметим, что в соответствии с уравнением (4.2)

$$q_x = \rho w_x i - \lambda\,(\partial t/\partial x),$$

откуда

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = \rho w_x\,\frac{\partial i}{\partial x} + \rho i\,\frac{\partial w_x}{\partial x} - \lambda\,\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\,. \tag{4.11}$$

Суммируя по координатным осям, находим общее количество накопленной теплоты

$$dQ = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,d\tau,$$

или с учетом (4.11)

$$dQ = \left[\lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) - \rho\left(w_x\,\frac{\partial i}{\partial x} + w_y\,\frac{\partial i}{\partial y} + w_z\,\frac{\partial i}{\partial z}\right) - \right.$$
$$\left. - \rho i\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right)\right]dV\,d\tau.$$

Как будет показано ниже, по закону сохранения массы [см. уравнение сплошности (4.20)] для несжимаемой жидкости $(\partial w_x/\partial x) + (\partial w_y/\partial y) + (\partial w_z/\partial z) = 0$, и выражение для накопленной теплоты упрощается.

$$dQ = \left[\lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) - \rho\left(w_x\,\frac{\partial i}{\partial x} + w_y\,\frac{\partial i}{\partial y} + w_z\,\frac{\partial i}{\partial z}\right)\right]dV\,d\tau. \tag{4.12}$$

Если считать, что процесс происходит при постоянном давлении (что приближенно справедливо для процессов в теплообменниках и вообще для большинства процессов теплоотдачи), то накопленная теплота идет на изменение энтальпии тела. В данном случае для элементарного объема dF изменение энтальпии за время $d\tau$

$$dQ = \rho\, dV \frac{\partial i}{\partial \tau} d\tau, \qquad (4.13)$$

где ρdV — масса элементарного объема.

Приравнивая правые части уравнений (4.13) и (4.12) с учетом того, что $di = c_p dt$, где c_p — теплоемкость при постоянном давлении, находим

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} dV\, d\tau = \left[\lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \rho c_p \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}\right)\right] dV\, d\tau.$$

После деления обеих частей на $\rho c_p dV\, d\tau$, а также учитывая, что $\lambda / c_p \rho = a$, получаем

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) - \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}\right).$$

Последний член правой части этого выражения, содержащий проекции скорости, принято переносить в левую часть уравнения, тогда окончательное выражение для **уравнения энергии** приобретет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right). \qquad (4.14)$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения (4.14), называют **субстанциальной производной** температуры по времени, которую сокращенно принято обозначать $Dt/d\tau$.

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}. \qquad (4.15)$$

Такого рода производные используются при описании движущейся среды (субстанции).

Субстанциальная производная температуры складывается из локальной $\partial t/\partial \tau$ и конвективной $w_x (\partial t/\partial x) + w_y (\partial t/\partial y) + w_z (\partial t/\partial z)$ составляющих. Локальная составляющая вызвана нестационарностью температурного поля во времени: она соответствует изменению в единицу времени температуры в точке с координатами x, y, z. Конвективная же составляющая соответствует изменению температуры в объеме dV в связи с тем, что при своем перемещении в пространстве он попадает в области с иной температурой. Естественно, что конвективная составляющая температуры зависит от скорости. При стационарном конвективном теплопереносе $\partial t/\partial \tau = 0$. При $\vec{w} = 0$ равна нулю конвективная составляющая и уравнение энергии становится идентичным дифференциальному уравнению теплопроводности в твердом теле (1.13).

Выражение для субстанциальной производной температуры можно получить формальным путем, если рассмотреть температуру объема dV как сложную функцию вида $t=f\,[\tau,\ x(\tau),\ y(\tau),\ z(\tau)]$, где $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$ — координаты движущегося объема как функции времени. Полная производная температуры по времени в этом случае представляется суммой

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\partial t}{\partial x}\frac{dx}{d\tau}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}+\frac{\partial t}{\partial z}\frac{dz}{d\tau},$$

и, поскольку $dx/d\tau=w_x$, $d_y/d\tau=w_y$, $dz/d\tau=w_z$, полученная сумма как раз и соответствует субстанциальной производной $Dt/d\tau$.

Используя символическую запись субстанциальной производной (4.15), а также суммы вторых производных температуры по координатным осям через оператор Лапласа, получаем сокращенную (свернутую) запись уравнения энергии (4.14):

$$\frac{Dt}{d\tau}=a\nabla^2 t.$$

В уравнение энергии (4.14) входят составляющие скорости. Это означает, что температурное поле $t=f(x,\ y,\ z,\ \tau)$ не может быть получено интегрированием одного уравнения энергии, как это было сделано для теплопроводности в твердом теле. Иначе говоря, температурное поле можно найти после того, как будет найдено скоростное поле или в случае, если скорость также зависит от температуры, совместно с ним.

Уравнение движения. Уравнением, которое позволяет найти скоростное поле $\vec{w}=f(x,\ y,\ z,\ \tau)$, является уравнение движения. Это уравнение записывается на основании применения к элементарному объему dV (рис. 4.2) второго закона Ньютона из механики: сумма сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на ускорение (иначе, равна силе инерции). Для объема dV это можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i=\rho\, dV\,\frac{D\vec{w}}{d\tau}, \qquad (4.16)$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i$ — сумма действующих сил (n — их число); $D\vec{w}/d\tau$ — субстанциальная производная скорости по времени, т. е. ускорение.

В связи с тем что скорость является вектором, строгий вывод уравнения движения весьма сложен (см., например, вывод в монографии [41]). Приведем упрощенный вывод, следуя методике изложения этого материала в [26], для ламинарного потока вблизи плоской стенки (рис. 4.3). Поток имеет всего одну составляющую скорости w_x, которая изменяется только в одном направлении — по оси y.

На элементарный объем несжимаемой жидкости в вынужденном потоке действуют три силы:

1) сила тяжести (гравитационная сила)

$$P_{\text{тяж}} = g_x \rho \, dV,$$

где g_x — составляющая ускорения свободного падения по оси x;

2) сила давления окружающей среды. При движении в одном направлении x давление на вертикальные грани параллелепипеда будет взаимно уравновешиваться: различным может быть давление только на верхнюю и нижнюю грани. Сила от давления на верхнюю грань равна $p\,dy\,dz$, а на нижнюю грань — $\left(p + \frac{dp}{dx}dx\right) dy\,dz$. Равнодействующая силы давления

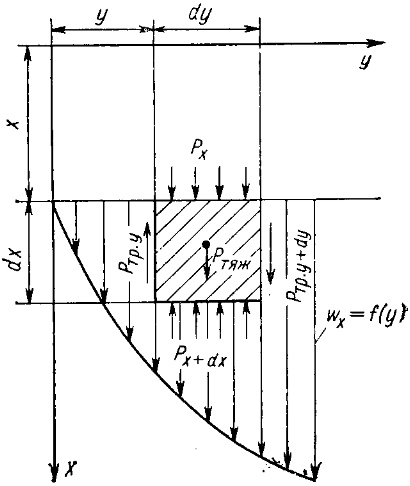


Рис. 4.3. К выводу дифференциального уравнения движения

$$P_{\text{дав}} = \frac{dp}{dx} dx\,dy\,dz;$$

3) сила внутреннего трения, обусловленная вязкостью реальных жидкостей. Поскольку градиент скорости отличен от нуля только в направлении y, то сила трения будет действовать только на левой и правой гранях параллелепипеда. Сила трения в соответствии с законом трения (4.5) на левой грани равна $\mu \frac{dw_x}{dy} dx\,dz$, на правой $-\mu \frac{d}{dy}\left(w_x + \frac{dw_x}{dy}dy\right) dx\,dz$. Равнодействующая силы трения

$$P_{\text{тр}} = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dx\,dy\,dz.$$

Таким образом, упрощенное **уравнение движения** в данном случае (после сокращения на dV) запишется так:

$$\rho \frac{Dw_x}{d\tau} = g_x \rho - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}.$$

Знак «минус» перед градиентом давления поставлен из тех соображений, что ускорение потока положительно только в направлении падения давления. В общем виде с учетом изменений скорости и ее составляющих по всем трем координатным осям уравнение движения может быть записано в следующей векторной форме:

$$\rho \frac{D\vec{w}}{d\tau} = \vec{g}\rho - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \vec{w}, \tag{4.17}$$

или в развернутой форме в проекциях на координатные оси:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial w_x}{\partial \tau}+\rho\left(w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}\right)=\\
&=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\frac{\partial w_y}{\partial \tau}+\rho\left(w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)=\\
&=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}\right);\\
&\rho\frac{\partial w_z}{\partial \tau}+\rho\left(w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{d w_z}{\partial z}\right)=\\
&=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(4.18)$$

Уравнения (4.18) в гидродинамике называют дифференциальными уравнениями Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Все члены уравнения (4.18) можно трактовать как силы, приходящиеся на единицу объема. При этом движущими являются силы давления и тяжести. В соответствии с уравнением движения они должны находиться в равновесии с силами инерции $\rho D\vec{w}/d\tau$ и трения $\mu\nabla^2\vec{w}$.

При вынужденном движении жидкости в каналах силой тяжести по сравнению с силой давления обычно можно пренебречь. Силу тяжести следует учитывать при вертикальном или наклонном движении жидкостей, имеющих свободные поверхности, например при падении капли или стекании пленки, когда сила тяжести является единственной движущей силой.

Уравнения энергии (4.14) и движения (4.18) в представленном виде выведены в предположении, что теплофизические характеристики c_p, λ, a, ρ, μ постоянны. В действительности большинство из них зависит от температуры, и, следовательно, указанное допущение вносит определенную неточность. Так, очевидно, нельзя не учитывать изменение плотности в зависимости от температуры при свободной конвекции, так как при этом разность плотностей нагретых и холодных слоев является единственной причиной движения.

При свободной конвекции зависимость плотности от температуры обычно учитывают в соответствии с выражением (4.6), где в качестве t_0 принимается некоторая известная по условию задачи температура, например температура жидкости вдали от стенки $t_ж$. С учетом этой зависимости уравнение движения (4.17) приобретает вид

$$\rho_ж(1-\beta\,\Delta t)\frac{D\vec{w}}{d\tau}=\rho_ж\vec{g}-\rho_ж\vec{g}\beta\,\Delta t-\operatorname{grad}p+\mu\nabla^2\vec{w},\qquad(4.19)$$

где $\Delta t=t(\tau,\ x,\ y,\ z)-t_ж$.

В уравнении (4.19) по сравнению с (4.17) вместо одного члена, учитывающего силу тяжести, появилось два: $\rho_ж\vec{g}$ — сила тяжести при фиксированной плотности $\rho_ж$ и $\rho_ж\,\vec{g}\,\beta\Delta\,t$ — так называемая подъемная сила. В большинстве задач свободной конвекции в уравнении движения учитывают только подъемную силу.

Заметим, что в уравнении движения давление p есть переменная величина, которая в потоке изменяется от точки к точке, а в общем случае может изменяться и во времени. Таким образом, в общем случае задача конвективного теплообмена сводится к определению трех взаимно связанных величин t, $\vec{w}$ и p. Это означает, что при математической формулировке задачи в систему кроме уравнений энергии и движения следует включить еще одно уравнение. Таким уравнением является уравнение сплошности (или неразрывности) потока.

Уравнение сплошности. Уравнение сплошности является математической записью закона сохранения массы. Приведем его упрощенный вывод для несжимаемой жидкости при $\rho=\text{const}$. Рассмотрим элементарный объем на рис. 4.2.

Масса жидкости, втекающей в объем по оси x через левую грань площадью $dydz$ за время $d\tau$, равна

$$dM_x = \rho w_x\, dy\, dz\, d\tau.$$

Масса жидкости, вытекающей в том же направлении через параллельную правую грань,

$$dM_{x+dx} = \rho\left(w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x}dx\right) dy\, dz\, d\tau.$$

Разность между массой вытекающей и массой втекающей жидкости по оси x

$$dM_{x+dx} - dM_x = \rho\frac{\partial w_x}{\partial x}dx\, dy\, dz\, d\tau.$$

Аналогичные выражения можно записать для осей y и z (на рис. 4.2, dM_y и dM_z не показаны). Однако по трем координатным осям массы втекающей и вытекающей жидкости должны быть равны, т. е.

$$\rho\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) dV\, d\tau = 0.$$

После сокращения на $\rho\, dVd\tau$ окончательно получаем уравнение сплошности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \qquad (4.20)$$

Таким образом, уравнения энергии (4.14), движения (4.17) или (4.19) и сплошности (4.20) составляют систему уравнений, которая математически описывает процесс конвективного теплообмена для несжимаемой жидкости. Если искомой величиной является коэффициент теплоотдачи, то система должна быть дополнена дифференциальным уравнением теплоотдачи (4.10).

4.5. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Дифференциальные уравнения энергии (4.14), движения (4.17) и сплошности (4.20) описывают процесс для множества задач, составляющих класс задач конвективного теплообмена при вынужденном движении несжимаемой жидкости без внутренних источников теплоты при постоянных значениях теплофизических параметров. Однако для решения каждой конкретной задачи необходимо сформулировать ряд более частных условий, отличающих данную задачу от остальных, входящих в этот же класс. Такие условия называются условиями однозначности. Их можно подразделить на четыре группы:

1) геометрические (форма и размеры объема, в котором происходит конвективный теплообмен);

2) физические (численные значения теплофизических характеристик λ, c_p, ρ, μ, β и др.);

3) начальные (поля t, $\vec{w}$, и p в начальный момент времени);

4) граничные (значения t, $\vec{w}$ и p на ограничивающих поток поверхностях).

Ниже рассматриваются только стационарные задачи конвективного теплообмена, для которых $\partial t/\partial\tau=0$, $\partial\vec{w}/\partial\tau=0$; в этом случае начальные условия не нужны.

Граничные условия сводятся к заданию температуры жидкости на входе в канал t_0 или на бесконечном удалении от стенки $t_ж$ и на поверхностях теплоотдачи — стенках канала или омываемого тела $t_с$. Также может быть известна не температура, а плотность теплового потока на стенке $q_с$. Если при этом пользоваться терминологией, введенной для задач теплопроводности, то первый случай (когда известна $t_с$) можно назвать граничными условиями первого рода, а второй (когда известна величина $g_с$) — граничными условиями второго рода.

Граничными условиями должны быть заданы не только температуры, но и p_0 (давление в начальном сечении), w_0 (скорость на входе в канал или вдали от стенки). Что же касается значения скорости вблизи стенки $w_с$, то при рассмотрении ньютоновских жидкостей ее принимают равной нулю, исходя из постулата о «прилипании» жидкости к стенке. Для неньютоновских жидкостей возможно явление «пристенного скольжения», т. е. $w_с\neq0$. Нет также необходимости задавать значение $p_с$, так как давление изменяется практически только вдоль потока и у стенки $(\partial p/\partial n)_с=0$.

Пример формулировки условий однозначности. Дано, что в трубу диаметром d и длиной L (рис. 4.4) поступает жидкость, для которой известны и приблизительно постоянны λ, ρ, c, μ. Жидкость имеет на входе постоянные температуру t_0, скорость w_0 и давление p_0. Температура стенок трубы поддерживается постоянной и равной $t_с>t_0$. Поскольку температуры и скорости на границах рассматриваемого объема постоянны, процесс будет стационарным, и задаваться начальными распределениями температур и скоростей не нужно. Требуется найти поля температур, скоростей и давлений по всему объему.

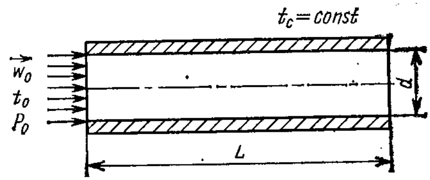


Рис. 4.4. К примеру формулировки условий однозначности в задачах конвективного теплообмена

Итак, полная постановка задачи конвективного теплообмена включает дифференциальные уравнения рассматриваемого класса задач и условия однозначности. Решение задачи сводится к аналитическому или численному интегрированию дифференциальных уравнений при заданных условиях однозначности.

При аналитическом решении условия однозначности фигурируют в буквенном (символьном) обозначении, а при численном — в виде конкретных чисел. Очевидно, что аналитическое решение является более общим и годится для группы явлений данного класса с качественно одинаковыми условиями однозначности (в 5.1 такие явления названы однородными). Численное решение пригодно только для единичного (индивидуального) явления.

Как уже упоминалось, численное решение для индивидуального явления равноценно единичному эксперименту (и потому называется математическим экспериментом).

Все величины, входящие в систему дифференциальных уравнений, описывающих процесс, можно разделить на три группы: искомые или зависимые переменные (в данном случае t, w, p); независимые переменные — аргументы: x, y, z, τ; параметры задачи (λ, c, ρ, μ, w_0, t_0, t_c, l и т. п. величины, входящие в условия однозначности).

Параметры задачи для индивидуального явления сохраняют постоянные значения, но изменяются при переходе от одного явления к другому. Результатом решения являются выражения для полей искомых переменных t, $\vec{w}$, p. В общем случае перечисленные величины являются взаимозависимыми. В частном случае при постоянстве теплофизических свойств решения гидродинамической и тепловой задач можно разделить, так как скоростное поле оказывается независимым от температурного [температура не входит в качестве переменной в уравнения (4.17) и (4.20)], что несколько упрощает задачу. Во всех случаях аналитическое решение задач конвективного теплообмена весьма сложно, и в настоящее время таких решений сравнительно мало.

Заметим, что с инженерной точки зрения получение общего решения, т. е. полной информации о полях t, $\vec{w}$ и p, не требуется, так как в большинстве задач искомой величиной является количество переданной теплоты, которое может быть вычислено по уравнению Ньютона — Рихмана, если найдена величина α. Однако если общее выражение для температурного поля $t=f(x, y, z)$ получено, то это означает, что путем дифференцирования могут быть определены градиент температуры у стенки $(\partial t/\partial n)_c$, а следовательно, и коэффициент теплоотдачи по уравнению (4.10).

Таким образом, общее решение дает возможность определить и значение коэффициента теплоотдачи. В тех случаях, когда получение аналитического решения затруднительно, задачу можно решить экспериментально или численно. При этом обычно ограничиваются упрощенным решением, чаще всего определением коэффициента теплоотдачи.

Недостатком описанных методов является то, что полученные результаты будут справедливы для единичного процесса (с заданными численными значениями условий однозначности), т. е. количество потребных экспериментов оказывается столь же безгранично большим, сколь велико многообразие условий реализации процессов конвективного теплообмена. Анализ и обобщение большого числа экспериментальных данных, включающих множество переменных факторов, весьма затруднительны. Кроме того, проведение натурного эксперимента в промышленных условиях экономически невыгодно, а иногда и вообще невозможно.

Выход из создавшегося положения найден в результате разработки *теории подобия*, которая является научной базой для постановки и обобщения результатов современного физического (и математического) эксперимента.

Теория подобия, как это будет показано в следующей главе, позволяет, не интегрируя полученных в главе 4 дифференциальных уравнений, сделать на их основе ряд важных выводов, необходимых для правильной обработки результатов экспериментальных исследований.

Глава 5. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

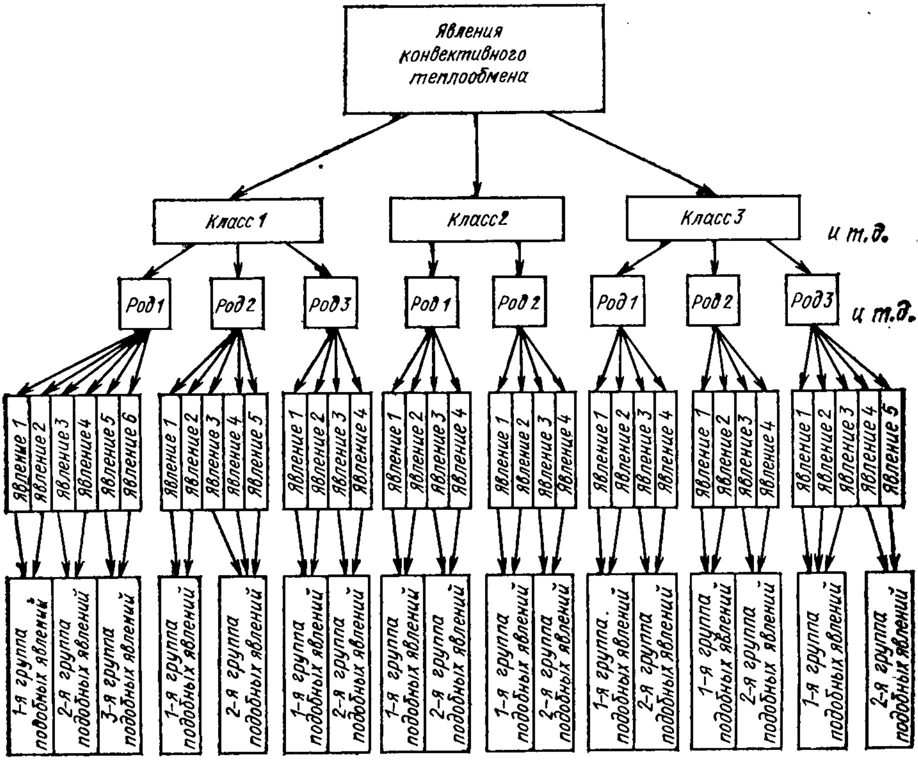
5.1. ПОДОБНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Как известно, *подобными* называются геометрические фигуры, для которых отношения любых сходственных линейных размеров равны постоянной величине c_l. Например, отношение сходственных сторон подобных треугольников

$$\frac{l_1}{l_1'}=\frac{l_2}{l_2'}=\frac{l_3}{l_3'}=c_l.$$

Постоянную c_l называют *константой геометрического подобия*, или геометрическим *множителем подобного преобразования*.

Понятие подобия может быть распространено и на другие явления; например, рассматривают подобие движения потоков жидкости или газа — кинематическое подобие; подобие сил, вызывающих движение,— динамическое подобие и т. д. В данном курсе нас будет интересовать подобие явлений передачи теплоты и, в частности, в



этой главе — подобие процессов конвективного теплообмена и теплоотдачи.

Подобие физических явлений более сложно, чем геометрическое, и, прежде чем перейти к его пояснению, целесообразно рассмотреть следующую классификацию физических явлений (см. схему). Все явления можно разбить на классы и роды.

Под классом понимают совокупность явлений одной физической природы, описываемых тождественными дифференциальными уравнениями. Примером класса может служить рассмотренный в главе 4 теплообмен при вынужденном движении ньютоновской несжимаемой жидкости, описываемый системой уравнений (4.14), (4.17), (4.20). Учет в уравнении движения подъемной силы [уравнение (4.19) вместо (4.17)] означает переход к другому классу, а именно к теплообмену при свободной конвекции (когда движение возникает только за счет разности температур) или при смешанной свободно-вынужденной конвекции (если причиной движения является как Δt, так и напор от какого-либо внешнего источника энергии).

Тождественными по форме дифференциальными уравнениями могут описываться явления различной физической природы, например явления теплопроводности и электропроводности. Такие явления называются аналогичными (см. раздел 3.12). Рассматриваемые далее методы подобия могут быть применены и в этом случае.

Понятие класса явлений весьма широко, в нем приходится выделять ряд явлений одного рода, между которыми обычно и устанавливают подобие.

Понятием р о д объединяется совокупность явлений одного класса с качественно одинаковыми условиями однозначности. Качественно одинаковыми называются такие условия однозначности, которые отличаются друг от друга только численными значениями переменных, составляющих эти условия. Примером рода явлений может служить совокупность всех разновидностей процесса теплоотдачи при вынужденном движении несжимаемой жидкости внутри круглой трубы. Другим родом явлений того же класса является, например, теплоотдача при поперечном обтекании трубы вынужденным потоком несжимаемой жидкости и т. п.

Каждое индивидуальное явление внутри рода отличается от другого явления того же рода численными значениями условий однозначности.

Теория подобия утверждает, что индивидуальные явления внутри рода можно объединить в группы подобных явлений.

Рассмотрим условия подобия сложного физического явления на примере конвективного теплообмена. Явления, относящиеся к одному классу и к одному роду, подобны, если для них подобны все величины, входящие в условия однозначности:

а) Подобны форма и размеры каналов или тел, обтекаемых потоком конвектирующей жидкости. Так, для двух подобных явлений

$$\frac{l_1}{l_1'} = \frac{l_2}{l_2'} = \ldots = c_l,$$

где l_1, l_2, ... — характерные размеры канала или обтекаемого тела для первого явления; l_1', l_2', ... — сходственные размеры канала или обтекаемого тела для второго явления.

При этом каждой точке в пространстве для первого явления соответствует сходственная точка в пространстве для второго явления; координаты любых сходственных точек, например, a и a' или b и b' связаны соотношением

$$\frac{x_a}{x_a'} = \frac{x_b}{x_b'} = \frac{y_a}{y_a'} = \frac{y_b}{y_b'} = \ldots = c_l.$$

Таким образом, первым условием подобия физических явлений является геометрическое подобие.

б) Подобны поля всех физических параметров, оказывающих влияние на процесс, т. е. для подобных явлений конвективного теплообмена в любых сходственных точках должны быть равны отношения:

$$\frac{\rho_a}{\rho_a'} = \frac{\rho_b}{\rho_b'} = \ldots = c_\rho; \quad \frac{\lambda_a}{\lambda_a'} = \frac{\lambda_b}{\lambda_b'} = \ldots = c_\lambda; \quad \frac{\mu_a}{\mu_a'} = \frac{\mu_b}{\mu_b'} = \ldots = c_\mu;$$

$$\frac{a_a}{a_a'} = \frac{a_b}{a_b'} = \ldots = c_a \text{ и т. д.}$$

Это условие называется **физическим подобием**, а константы c_ρ, c_λ, c_μ, ...— константами подобия физических параметров. Если физические параметры считать величинами постоянными, то физическое подобие выполняется автоматически.

в) Для нестационарных процессов подобны поля зависимых переменных в начальный момент времени; в частности, для процессов нестационарного теплообмена должны быть подобны поля температур при $\tau=0$. При этом подобные процессы происходят во времени так, что каждому моменту времени τ первого явления соответствует сходственный момент времени τ' второго явления. Сходственные моменты времени связаны между собой константой подобия $\tau/\tau'=c_\tau$.

Условие подобия во времени называют **условием гомохронности**. Очевидно, что для стационарных процессов условие гомохронности отпадает.

г) Подобны условия теплообмена на границах рассматриваемых объемов. Например, если на стенке канала, в котором происходит первое явление, задана температура стенки $t_c=\text{const}$, то на стенке подобного канала для второго явления должна быть также постоянная температура $t_c'=\text{const}$, отличающаяся от t_c только численным значением; если же t_c изменяется по длине стенки, то и t_c' должна изменяться по тому же закону, так что в любой сходственной точке на граничной поверхности $t_c/t_c'=c_t=\text{const}$.

Следствием перечисленных условий является то, что у подобных явлений все существенные для процесса величины изменяются в пространстве и во времени по одним и тем же закономерностям, т. е. описываются подобными полями. Это означает, что если найдена (например, в эксперименте) закономерность для температурного поля первого явления, то путем пересчета через множитель подобного преобразования c_t можно найти температурное поле второго явления.

При подобии сложных процессов и явлений множители преобразования находятся между собой в определенных соотношениях. Такие соотношения между множителями преобразования, так же как и сами множители, являются безразмерными и представляют собой комплексы, составленные из величин, существенных для данного процесса. Называются они **критериями**, или **числами подобия**. Таким образом, критерием подобия называется безразмерный комплекс, составленный из величин, существенных для данного процесса. При этом нулевая размерность является основным свойством критерия подобия и может служить проверкой правильности его составления.

Критерии подобия принято называть именами ученых, плодотворно работавших в соответствующей области науки, и обозначать двумя начальными латинскими буквами их фамилий. Получают критерии подобия из аналитических зависимостей, описывающих данный процесс. Таким образом, математическое описание процесса, хотя бы в виде дифференциальных уравнений общего вида, является необходимой предпосылкой использования теории подобия.

Если получено частное решение задачи для одного из подобных явлений (например, путем численного интегрирования дифференциальных уравнений), то, зная величины критериев подобия, можно путем пересчета получить решения для целой группы явлений, подобных первому. Однако первое частное решение не обязательно получать расчетным путем: в тех случаях, когда интегрирование исходных дифференциальных уравнений затруднительно, необходимые закономерности можно установить экспериментально.

В этом и состоит основная идея теории подобия. Теория подобия на определенном этапе обращается к эксперименту, но дает возможность результаты единичного (физического или математического) эксперимента распространить на целую группу явлений, подобных данному. В теории подобия рассматриваются методы и приемы, позволяющие правильно провести эксперимент на так называемом модельном явлении, чтобы иметь возможность результаты эксперимента обобщить и представить в форме, удобной для расчета других явлений, подобных изученному. Теория подобия входит как составная часть в общую теорию планирования эксперимента.

5.2. ТЕОРЕМЫ ПОДОБИЯ

Для того чтобы правильно поставить эксперимент, необходимо решить, по крайней мере, три основных вопроса: 1) какие величины надо измерять в опыте; 2) как обрабатывать результаты опыта; 3) на какие явления могут быть распространены полученные расчетные зависимости. Ответы на эти вопросы дают три теоремы подобия, излагающие основное содержание рассматриваемого метода.

Первая теорема подобия, впервые сформулированная Ньютоном (1685 г.), утверждает: *для подобных явлений любые одноименные критерии равны.* Ею дается ответ на первый из поставленных выше вопросов: в опытах нужно измерять все те величины, которые входят в критерий подобия, характеризующие данный процесс.

Вторая теорема подобия, предложенная Федерманом (1911 г.) и Букингемом (1914 г.), может быть сформулирована так: *решение дифференциального уравнения может быть представлено в виде функциональной зависимости между критериями подобия, характеризующими процесс и полученными из исходного уравнения (или системы уравнений)*. Такая зависимость называется уравнением подобия, или критериальным уравнением. Теорема отвечает на второй вопрос о том, как обрабатывать результаты опыта: опытные данные надо обрабатывать в виде зависимости между критериями подобия, т. е. в виде уравнения подобия.

Третья теорема подобия — теорема М. В. Кирпичева и А. А. Гухмана (1931 г.) уточняет условия, необходимые и достаточные, чтобы установить, на какие явления могут быть распространены результаты, полученные в модельном эксперименте, т. е. какие явления подобны исследованному. Теорема формулируется так: *подобны между собой те явления, у которых условия однозначности подобны и определяющие критерии равны.*

Определяющими называются критерии подобия, составленные только из величин, входящих в условия однозначности. Критерии подобия, содержащие зависимые переменные (в задачах конвективного теплообмена t или α), называются определяемыми.

Сформулированные третьей теоремой условия являются необходимыми и достаточными для подобия, в то время как первая теорема формулирует лишь необходимые условия подобия явлений. Заметим, что третью теорему подобия можно было бы сформулировать и так: подобны между собой те явления, которые принадлежат к одному классу, к одному роду и имеют равные определяющие критерии подобия. При этом равенство определяемых критериев вытекает как следствие из указанных условий и в специальной проверке не нуждается.

Итак, третья теорема, определяя условия, по которым могут быть найдены явления, подобные изученному экспериментально, дает ответ на третий вопрос, стоящий перед экспериментатором: полученные в результате обработки опытных данных расчетные зависимости могут быть распространены на группу явлений, подобных изученному.

Таким образом, применение теории подобия позволяет правильно поставить опыт, изучить сложные физические явления и процессы на моделях и, обработав результаты опыта в виде чисел подобия, составить уравнение подобия, пригодное для расчета всей группы явлений, подобных изученному. Тем самым ограничивается и уменьшается количество необходимых опытных данных: для каждой группы подобных явлений (подчас весьма многочисленной) достаточно выполнить лишь одно экспериментальное исследование. Метод исследования, основанный на применении теории подобия, называется методом подобия.

Необходимо, однако, помнить, что получаемые методом подобия обобщенные расчетные зависимости применимы лишь в тех пределах изменения определяющих критериев, которые имели место в эксперименте. Универсального решения метод подобия дать не может, он позволяет лишь обобщать опытные данные в области, ограниченной условиями подобия.

5.3. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ МНОЖИТЕЛЯМИ ПОДОБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПОЛУЧЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Рассмотрим применительно к задаче конвективного теплообмена метод получения критериев подобия, основанный на анализе соотношений между множителями подобного преобразования, которые получаются из дифференциальных уравнений. (В разделе 5.4 рассмотрен другой метод получения критериев — метод масштабных преобразований.)

Поскольку процессы теплоотдачи описываются системой уравнений, относящихся как к гидродинамической, так и к тепловой стороне явления, целесообразно раздельно рассмотреть условия гидродинамического и теплового подобия, получая соответствующие критерии подобия.

Условия гидродинамического подобия. Здесь должны быть рассмотрены условия, при которых в геометрически подобных системах осуществляются подобные движения потоков жидкости. (Жидкость, как уже указывалось, будем считать ньютоновской и несжимаемой.)

Пусть имеются две подобные между собой системы. Все величины, относящиеся к первой из них, будем обозначать буквами без штрихов, а величины второй системы — теми же буквами со штрихом. Гидродинамические условия потока описываются уравнениями движения (4.17) [в развернутой форме (4.18)] и сплошности (4.20) Ограничиваясь рассмотрением неразрывных (сплошных) сред, проанализируем лишь уравнения движения потоков. Последние для простоты выкладок будем писать лишь в виде проекций сил на ось z. Тогда для первой системы

$$\rho\frac{\partial w_z}{\partial\tau}+\rho\left(w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)=$$
$$=g\rho-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right).$$

Для стационарных процессов, которые и будут далее рассматриваться, $\partial w_z/\partial\tau=0$ и уравнение может быть упрощено:

$$\rho\left(w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)=g\rho-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right). \tag{5.1}$$

Аналогично для второй системы

$$\rho'\left(w'_x\frac{\partial w'_z}{\partial x'}+w'_y\frac{\partial w'_z}{\partial y'}+w'_z\frac{\partial w'_z}{\partial z'}\right)=g'\rho'-\frac{\partial p'}{\partial z'}+$$
$$+\mu'\left(\frac{\partial^2 w'_z}{\partial (x')^2}+\frac{\partial^2 w'_z}{\partial (y')^2}+\frac{\partial^2 w'_z}{\partial (z')^2}\right). \tag{5.2}$$

Поскольку рассматриваемые процессы подобны, отношения одноименных величин в сходственных точках для них одинаковы и имеют следующие значения:

$$x'/x=y'/y=z'/z=c_l;\quad w'/w=c_w;\quad \rho'/\rho=c_\rho;\quad p'/p=c_p;$$
$$\mu'/\mu=c_\mu;\quad g'/g=c_g.$$

С помощью множителей подобного преобразования c_l, c_w, c_ρ и т. д. выразим переменные второй системы через переменные первой:

$$x'=c_l x;\quad w'=c_w w;\quad \rho'=c_\rho\rho;\ \ldots$$

Подставляя полученные значения в уравнение (5.2) и вынося за скобку одноименные множители подобного преобразования, получим

$$\frac{c_\rho c_w^2}{c_l}\rho\left(w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)=c_g c_\rho g\rho-\frac{c_p}{c_l}\frac{\partial p}{\partial z}+$$
$$+\frac{c_\mu c_w}{c_l^2}\mu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right). \tag{5.3}$$

Теперь уравнения движения обеих систем (5.1) и (5.3) записаны через переменные первой системы. Очевидно, что из обоих уравнений одноименные переменные должны быть получены одинаковыми. Это возможно только при тождественности уравнений (5.1) и (5.3). Для этого необходимо, чтобы комплексы, составленные из множителей подобного преобразования, сократились, т. е. чтобы

$$\underset{(а)}{c_\rho c_w^2/c_l}=\underset{(б)}{c_g c_\rho}=\underset{(в)}{c_p/c_l}=\underset{(г)}{c_\mu c_w/c_l^2}. \tag{5.4}$$

Таким образом, для гидродинамически подобных потоков множители подобного преобразования не могут быть выбраны произвольно, а должны находиться из соотношений, определяемых выражением (5.4). Указанные соотношения целесообразно выразить через величины, непосредственно входящие в уравнение движения. Для этого рассмотрим соотношения (5.4) попарно. Из равенства комплексов (а) и (б) получим $c_\rho c_w^2=c_g c_l c_\rho$, или $c_w^2=c_g c_l$.

После подстановки значений множителей подобного преобразования имеем $\frac{(w')^2}{w^2}=\frac{g'}{g}\frac{l'}{l}$, или $\frac{gl}{w^2}=\frac{g'l'}{(w')^2}=\text{idem}$ (одно и то же).

Полученный комплекс, одинаковый для рассматриваемых подобных явлений и имеющий нулевую размерность (в чем легко убедиться), назван **критерием Фруда**:

$$gl/w^2=\mathrm{Fr}. \tag{5.5}$$

При его получении сопоставлялись левая часть уравнения движения, отображающая силу инерции, и первое слагаемое правой части, отображающее силу тяжести. Соответственно критерий подобия Fr характеризует соотношение сил инерции и тяжести при вынужденном движении жидкости.

Если далее рассмотреть равенство комплексов (а) и (в) соотношения (5.4), то можно получить:

$c_\rho c_w^2/c_l=c_p/c_l$, или $c_\rho c_w^2=c_p$; $\frac{\rho'}{\rho}\frac{(w')^2}{w^2}=\frac{p'}{p}$, или $\frac{p}{\rho w^2}=\frac{p'}{\rho'(w')^2}=\text{idem}$.

Комплекс $p/(\rho w^2)$ назван **критерием Эйлера**:

$$p/\rho w^2=\mathrm{Eu}.$$

Анализируя его вывод из уравнения (5.1), можно видеть, что критерий Эйлера характеризует соотношение сил инерции и давления при вынужденном движении.

Аналогично предыдущему, рассматривая равенства (а) и (г), имеем:

$$c_\rho c_w^2/c_l = c_\mu c_w/c_l^2;\quad c_\rho c_w c_l = c_\mu;$$

$$\frac{\rho'}{\rho}\frac{w'}{w}\frac{l'}{l} = \frac{\mu'}{\mu};\quad \frac{\rho' w' l'}{\mu'} = \frac{\rho w l}{\mu} = \text{idem}$$

(здесь и ранее под l и l' понимаются любые сходственные геометрические размеры систем).

Комплекс $\rho wl/\mu$ назван критерием Рейнольдса: $\rho wl/\mu = \mathrm{Re}$, или, поскольку $\mu/\rho = \nu$,

$$\mathrm{Re} = wl/\nu. \tag{5.6}$$

Очевидно, что этот критерий характеризует соотношение сил инерции и внутреннего трения (вязкости) при вынужденном движении среды. Следовательно, при гидродинамическом подобии двух или нескольких потоков для любых сходственных точек критерии подобия Fr, Eu и Re имеют одни и те же значения.

Критерии подобия можно видоизменять, рассматривая их совместно в целях приведения к виду, наиболее удобному для описания конкретных задач. Так, при исследовании движения, вызываемого различной плотностью отдельных частиц жидкости без перемещения всего ее объема внешним источником движения, скорость потока не может быть измерена, и поэтому критерии Fr и Re не могут быть определены. В этом случае удобнее их так скомпоновать, чтобы выделить новый критерий, в который входила бы разность плотностей отдельных частиц (слоев) жидкости, являющаяся причиной движения, а скорость потока была бы исключена. Для этого умножают Fr на Re^2 и на относительную разность плотностей потока $(\rho - \rho_0)/\rho_0$, где ρ и ρ_0 — плотности различных частиц (слоев) жидкости:

$$\mathrm{Fr}\,\mathrm{Re}^2\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} = \frac{gl}{w^2}\frac{w^2l^2}{\nu^2}\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} = \frac{gl^3}{\nu^2}\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}.$$

Полученный безразмерный комплекс

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\frac{gl^3}{\nu^2} = \mathrm{Ar} \tag{5.7}$$

называют критерием Архимеда.

Наконец, если разность плотностей различных слоев жидкости определяется разностью их температур Δt, как это бывает при естественной (свободной) конвекции, выражение $(\rho-\rho_0)/\rho_0$ можно в соответствии с уравнением (4.6) заменить произведением $\beta\Delta t$, где β — коэффициент объемного расширения жидкости; т. е. $(\rho-\rho_0)/\rho_0 = \beta\Delta t$. Подставляя это значение в уравнение (5.7), получим критерий Грасгофа:

$$\mathrm{Gr} = gl^3\beta\,\Delta t/\nu^2. \tag{5.8}$$

Критерий Gr характеризует соотношение сил инерции и тяжести подъемной силы) в условиях отсутствия вынужденного движения жидкости и наиболее удобен для описания свободного движения (естественной конвекции).

Условия теплового подобия. Здесь должны быть рассмотрены условия, при которых геометрически и гидродинамически подобные системы подобны также и в тепловом отношении, т. е. для них подобны температурные поля и тепловые потоки. Комплексы, характеризующие подобие температурных полей, могут быть получены методом, аналогичным рассмотренному выше, из анализа дифференциальных уравнений энергии (4.14) и теплоотдачи (4.10).

Для двух подобных между собой систем уравнения энергии могут быть написаны в следующем виде (с подстановкой значения субстанциальной производной):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}+w_x\frac{\partial t}{\partial x}+w_y\frac{\partial t}{\partial y}+w_z\frac{\partial t}{\partial y}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right); \qquad (5.9)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'}+w'_x\frac{\partial t'}{\partial x'}+w'_y\frac{\partial t'}{\partial y'}+w'_z\frac{\partial t'}{\partial z'}=a'\left[\frac{\partial^2 t'}{\partial (x')^2}+\frac{\partial^2 t'}{\partial (y')^2}+\frac{\partial^2 t'}{\partial (z')^2}\right]. \qquad (5.10)$$

Выражая переменные второй системы через переменные первой с помощью множителей подобного преобразования, будем иметь: $x'=c_l x$; $w'=c_w w$; $\tau'=c_\tau \tau$ и т. д., что позволяет выразить уравнение (5.10) второй системы через переменные первой системы:

$$\frac{c_t}{c_\tau}\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{c_w c_t}{c_l}\left(w_x\frac{\partial t}{\partial x}+w_y\frac{\partial t}{\partial y}+w_z\frac{\partial t}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{c_a c_t}{c_l^2}a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right). \qquad (5.11)$$

Очевидно, что для получения однозначных решений для одних и тех же величин, уравнения (5.9) и (5.11) должны быть тождественны, причем условие тождественности имеет вид

$$\underset{(а)}{c_t/c_\tau}=\underset{(б)}{c_w c_t/c_l}=\underset{(в)}{c_a c_t/c_l^2}. \qquad (5.12)$$

Полученное выражение показывает, из каких соотношений должны выбираться множители преобразования для подобных явлений теплообмена. Из равенства комплексов (а) и (в) соотношения (5.12)

$$c_t/c_\tau=c_a c_t/c_l^2;\; c_a c_\tau=c_l^2;\; \frac{a'}{a}\frac{\tau'}{\tau}=\frac{(l')^2}{l^2},\ \text{или}\ \frac{a'\tau'}{(l')^2}=\frac{a\tau}{l^2}=\text{idem}.$$

Полученный комплекс $a\tau/l^2$, одинаковый для рассматриваемых подобных процессов и имеющий нулевую размерность, назван критерием Фурье:

$$a\tau/l^2=\text{Fo}. \qquad (5.13)$$

Число Fo характеризует условие, из которого должны определяться сходственные моменты времени при нестационарных тепловых процессах (см. раздел 3.2).

Из равенства (б) и (в) можно получить $c_w c_t/c_l=c_a c_t/c_l^2$; $c_w\ c_l=c_a$

или $w'l'/(wl)=a'/a$. Иначе: $w'l'/a'=wl/a=\mathrm{idem}$. Комплекс wl/a назван критерием Пекле:

$$wl/a=\mathrm{Pe}. \qquad (5.14)$$

Если раскрыть значение коэффициента температуропроводности $a=\lambda/(c\rho)$ и умножить числитель и знаменатель выражения критерия Pe на разность температур ϑ между некоторыми точками потока, то критерий можно представить в следующей форме:

$$\mathrm{Pe}=\frac{\rho c w \vartheta}{\lambda\vartheta/l},$$

откуда следует физический смысл его: критерий Пекле есть отношение плотности теплового потока, передаваемого конвективным путем из одной точки пространства в другую, к плотности теплового потока, передаваемого между этими же точками путем теплопроводности. Как известно, конвективный перенос теплоты, характеристикой которого является критерий Pe, как раз и представляет собой совместное действие двух указанных механизмов переноса теплоты.

Критерий Pe целесообразно преобразовать в целях исключения из него скорости потока w как величины, уже вошедшей в другие критерии подобия (например, Re). Для этого разделим Pe на Re:

$$\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}}=\frac{wl/a}{wl/\nu}=\frac{\nu}{a}.$$

Полученный безразмерный комплекс назван критерием Прандтля:

$$\nu/a=\mathrm{Pr}. \qquad (5.15)$$

Критерий Прандтля, содержащий только теплофизические параметры, характеризует влияние физических свойств жидкости на конвективный теплообмен.

Рассматривая дифференциальное уравнение, описывающее условия теплообмена на границе поверхность тела — среда, т. е. уравнение (4.10) можем записать для первой системы

$$\alpha=-\frac{\lambda}{\Delta t}\left(\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial n}\right)_{\text{c}} \qquad (5.16)$$

и для другой системы, подобной первой,

$$\alpha'=-\frac{\lambda'}{\Delta t'}\left(\frac{\partial t'_{\text{ж}}}{\partial n'}\right)_{\text{c}}. \qquad (5.17)$$

Выразим уравнение (5.17) через переменные первой системы:

$$c_\alpha\alpha=-\frac{c_\lambda c_t}{c_t c_l}\left[\frac{\lambda}{\Delta t}\left(\frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial n}\right)_{\text{c}}\right], \qquad (5.18)$$

и запишем условие тождественности уравнений (5.16) и (5.18)

$$c_\alpha=c_\lambda c_t/c_t c_l, \quad \text{или} \quad c_\alpha c_l=c_\lambda.$$

Подставляя значения множителей подобного преобразования, получим

$$\alpha' l'/\lambda'=\alpha l/\lambda=\mathrm{idem}.$$

Этот безразмерный комплекс назван критерием Нуссельта:

$$\alpha l/\lambda = \mathrm{Nu}. \qquad (5.19)$$

Заметим, что критерий Nu включает в себя коэффициент теплоотдачи α, который при исследовании процессов конвективного теплообмена является обычно искомой величиной.

Таким образом, при тепловом подобии двух или нескольких систем имеет место равенство критериев Fo, Pe (или Pr), Nu.

В некоторых задачах конвективного теплообмена используется комплексный критерий Стантона.

$$\mathrm{St} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re\,Pr}} = \frac{\alpha}{\rho c_p w}. \qquad (5.20)$$

Следует напомнить, что необходимым условием теплового подобия является также подобие гидродинамическое, т. е. при тепловом подобии равны также Fr, Re (или Gr), Eu.

5.4. ПОЛУЧЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ МЕТОДОМ МАСШТАБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотренный в разделе 5.3 метод получения критериев подобия, характерных для процессов конвективного теплообмена, не является единственным. Та же задача может быть решена и другим математическим методом, в основе которого лежит приведение дифференциальных уравнений к безразмерному виду. Любое дифференциальное уравнение можно привести в безразмерную форму, заменяя исходные переменные на безразмерные путем соответствующих тождественных преобразований.

Под безразмерной переменной понимают исходную переменную, деленную на соответствующий масштаб. В качестве масштаба выбирается одноименная физическая величина, известная по условию задачи (т. е. входящая в условия однозначности). Этот прием называется методом масштабных преобразований. Рассмотрим его на примере системы уравнений для вынужденного движения несжимаемой жидкости, т. е. уравнений (4.14), (4.18), (4.20). (Для простоты рассматриваем стационарный процесс, т. е. $\partial t/\partial\tau = \partial\vec{w}/\partial\tau = 0$.)

В качестве масштабов можно выбрать следующие известные величины: масштаб длины l — характерный линейный размер, например длина обтекаемого тела или диаметр трубы и т. п.; масштаб скорости w_0 — скорость набегающего потока или средняя скорость в канале и т. п.; масштаб температур $\vartheta_0 = t_0 - t_c$ — известный температурный напор; масштаб давлений $\Delta p_0 = p_0 - p_{кн}$ — разность между давлением на входе и выходе из канала.

Масштабы температур и давлений обычно выбирают в виде разностей, потому что температура и давление входят в исходные уравнения только под знаком дифференциала. В этом случае для сокращения числа влияющих факторов удобно перейти от переменной t к избыточной температуре $\vartheta = t - t_c$. Поскольку $d\vartheta = dt$, то вид дифференциальных уравнений при такой замене остается неизменным, а из числа влияющих факторов выпадает t_c.

То же самое относится и к давлению: вместо переменной p будем применять (p_0-p), причем $d(p_0-p)=-dp$.

Введем следующие новые переменные: безразмерные координаты: $X=x/l$; $Y=y/l$; $Z=z/l$; безразмерную скорость и ее составляющие: $\vec{W}=\vec{w}/w_0$; $W_x=w_x/w_0$; $W_y=w_y/w_0$; $W_z=w_z/w_0$; безразмерная температура $\Theta=\frac{t-t_c}{t_0-t_c}=\vartheta/\vartheta_0$; безразмерное давление $P=(p_0-p)/(p_0-p_{кн})=\Delta p/\Delta p_0$.

Можно доказать, что у подобных явлений в сходственных точках (а для нестационарных процессов и в сходственные моменты времени) безразмерные переменные равны.

Рассмотрим безразмерные координаты сходственных точек a и a': $X_a=x_a/l$, $X'_a=x'_a/l'$, но по условию подобия $x_a/x'_a=l/l'=c_l$. Применяя к последнему выражению правило перестановки членов пропорции, получаем $x_a/l=x'_a/l'$, следовательно, $X_a=X'_a$. Аналогично $Y_a=Y'_a$ и $Z_a=Z'_a$.

У подобных явлений подобны поля скоростей и температур, т. е. для любой составляющей скорости, например, по оси x можно записать $w_{xa}/w'_{xa}=w_0/w'_0=c_w$.

Перестановкой членов пропорции отсюда получаем $\frac{w_{xa}}{w_0}=\frac{w'_{xa}}{w'_0}$, т. е. $W_{xa}=W'_{xa}$. Аналогичные выводы можно сделать для всех безразмерных переменных. Таким образом, у подобных явлений поля безразмерных величин тождественны.

Теперь введем новые переменные в дифференциальные уравнения процесса. Для того чтобы преобразования были тождественными, будем каждую переменную не только делить, но и умножать на соответствующий масштаб.

Уравнение энергии (4.14) при этом преобразуется следующим образом [предварительно в уравнении (4.14) всюду произведена замена ∂t на $\partial\vartheta$]:

$$\frac{w_x}{w_0}w_0\frac{\partial\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\vartheta_0\right)}{\partial\left(\frac{x}{l}l\right)}+\frac{w_y}{w_0}w_0\frac{\partial\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\vartheta_0\right)}{\partial\left(\frac{y}{l}l\right)}+\frac{w_z}{w_0}w_0\frac{\partial\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\vartheta_0\right)}{\partial\left(\frac{z}{l}l\right)}=$$

$$=a\left[\frac{\partial^2\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\vartheta_0\right)}{\partial\left(\frac{x}{l}l\right)^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\vartheta_0\right)}{\partial\left(\frac{y}{l}l\right)^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\vartheta_0\right)}{\partial\left(\frac{z}{l}l\right)^2}\right],$$

откуда

$$\frac{w_0\vartheta_0}{l}\left(W_x\frac{\partial\Theta}{\partial X}+W_y\frac{\partial\Theta}{\partial Y}+W_z\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)=\frac{a\vartheta_0}{l^2}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2}\right).$$

Для того чтобы оставить в правой части только безразмерные величины, сокращаем обе части последнего выражения на $a\ \vartheta_0/l^2$, Тогда

$$\frac{w_0 l}{a}\left(W_x\frac{\partial\Theta}{\partial X}+W_y\frac{\partial\Theta}{\partial Y}+W_z\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)=\nabla^2\Theta.$$

Можно утверждать, что уравнение (5.21) представляет собой безразмерную запись уравнения энергии. Действительно, правая часть этого уравнения $\nabla^2\Theta$ включает только безразмерные величины Θ, X, Y, Z и, следовательно, имеет нулевую размерность, поэтому и левая часть должна быть величиной безразмерной, т. е. безразмерным должен быть и комплекс $w_0 l/a=\mathrm{Pe}$ — уже известный нам критерий Пекле. Таким образом, в безразмерной форме уравнение энергии имеет вид:

$$\mathrm{Pe}\left(W_x\frac{\partial\Theta}{\partial X}+W_y\frac{\partial\Theta}{\partial Y}+W_z\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)=\nabla^2\Theta. \qquad (5.21)$$

Уравнение движения (4.18) для сокращения выкладок рассмотрим только в проекции на одну из координатных осей, например на ось X. Операция перевода к безразмерной форме аналогична приведенной выше для уравнения энергии и приводит к следующему выражению:

$$\frac{\rho w_0^2}{l}\left(W_x\frac{\partial W_x}{\partial X}+W_y\frac{\partial W_x}{\partial Y}+W_z\frac{\partial W_x}{\partial Z}\right)=g_x\rho+\frac{\Delta p_0}{l}\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{\mu w_0}{l^2}\nabla^2 W_x.$$

Если разделить это выражение на множитель у последнего члена $\mu\, w_0/l^2$, то получим дифференциальное уравнение движения в безразмерной форме

$$\frac{\rho w_0 l}{\mu}\left(W_x\frac{\partial W_x}{\partial X}+W_y\frac{\partial W_x}{\partial Y}+W_z\frac{\partial W_x}{\partial Z}\right)=\frac{g_x\rho l^2}{\mu w_0}+\frac{\Delta p_0 l}{\mu w_0}\frac{\partial P}{\partial X}+\nabla^2 W_x.$$

Поскольку безразмерные переменные, входящие в это уравнение, равны для всех подобных явлений, то для подобных явлений должны быть одинаковыми и безразмерные комплексы размерных величин, входящие в него в виде множителей $\rho w_0 l/\mu=\rho' w_0' l'/\mu'=\mathrm{idem}$; $g\rho l^2/(\mu w_0)=g'\rho'(l')^2/(\mu' w_0')=\mathrm{idem}$; $\Delta p_0 l/(\mu w_0)=\Delta p_0' l'/(\mu' w_0')=\mathrm{idem}$, т. е. каждый из этих комплексов можно считать критерием гидродинамического подобия. Полученные здесь три безразмерных комплекса принято выражать через три общепринятых критерия Re, Fr и Eu:

$$\frac{\rho w_0 l}{\mu}=\frac{w_0 l}{\nu}=\mathrm{Re};$$

$$\frac{g\rho l^2}{\mu w_0}\frac{w_0}{w_0}=\frac{w_0 l}{\nu}\frac{gl}{w_0^2}=\mathrm{ReFr},\ \text{где}\ \frac{gl}{w_0^2}=\mathrm{Fr};$$

$$\frac{\Delta\rho_0 l}{\mu w_0}\frac{\rho w_0}{\rho w_0}=\frac{w_0 l}{\nu}\frac{\Delta p_0}{\rho w_0^2}=\mathrm{ReEu},\ \text{где}\ \frac{\Delta p_0}{\rho w_0^2}=\mathrm{Eu}.$$

Таким образом, уравнение движения в проекции на ось X в безразмерной форме имеет вид

$$\mathrm{Re}\left(W_x\frac{\partial W_x}{\partial X}+W_y\frac{\partial W_x}{\partial Y}+W_z\frac{\partial W_x}{\partial z}\right)=\mathrm{Fr}_x\mathrm{Re}+\mathrm{EuRe}\frac{\partial P}{\partial X}+\nabla^2 W_x. \qquad (5.22)$$

Уравнение сплошности (4.20) в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{\partial W_x}{\partial X}+\frac{\partial W_y}{\partial Y}+\frac{\partial W_z}{\partial Z}=0 \qquad (5.23)$$

и новых критериев не дает.

Дифференциальное уравнение теплоотдачи (4.10) после введения безразмерных переменных выглядит следующим образом:

$$\alpha=-\frac{\lambda\vartheta_0}{\vartheta_0 l}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial N}\right)_c,$$

где $N=n/l$ — безразмерная координата по нормали к стенке.

Оставляя в правой части только безразмерные величины, получаем

$$\frac{\alpha l}{\lambda}=-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial N}\right)_c, \quad \text{или} \quad \mathrm{Nu}=-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial N}\right)_c, \qquad (5.24)$$

где безразмерный комплекс $\mathrm{Nu}=\alpha l/\lambda$ есть критерий Нуссельта.

Как уже указывалось выше, критерии, содержащие неизвестную (искомую) в данной задаче величину, называют определяемыми. Такими критериями для рассматриваемых в этой главе задач являются критерии: Нуссельта $\mathrm{Nu}=\alpha l/\lambda$ (искомой величиной является коэффициент теплоотдачи α) и Эйлера $\mathrm{Eu}=\Delta p_0/(\rho w_0^2)$, где $\Delta p_0=p_0-p_{\text{кн}}$ (искомой величиной является давление на выходе из канала $p_{\text{кн}}$).

Определяющими критериями (составленными только из величин, входящих в условия однозначности) в случае вынужденного движения несжимаемой жидкости являются критерии Pr и Re (влиянием критерия Фруда обычно пренебрегают).

При свободной конвекции определяющими являются критерии Gr и Pr. Поскольку при свободной конвекции скорость за пределами области нагрева (на входе в канал или вдали от стенки) $w_0\approx 0$, то критерий Re выпадает из числа определяющих.

При смешанной, свободно-вынужденной конвекции определяющими являются критерии Re, Pr и Gr.

5.5. УРАВНЕНИЯ ПОДОБИЯ

Процедура преобразования дифференциальных уравнений процесса к безразмерной форме убеждает в том, что система из четырех безразмерных уравнений (5.21), (5.22), (5.23), (5.24) равноценна исходной (4.14), (4.18), (4.20), (4.10), но безразмерная запись имеет ряд преимуществ.

Во-первых, безразмерные уравнения содержат меньшее число переменных, поскольку они объединены в комплексы — критерии подобия. Это облегчает дальнейшее выполнение как аналитического, так и численного решений этих уравнений. При этом определяющие критерии выполняют роль исходных данных (параметров задачи), а определяемые критерии включаются в число безразмерных искомых величин. Таким образом, решение дифференциальных уравнений, описывающих процесс, можно искать в виде зависимости между безразмерными переменными и критериями подобия, что соответствует содержанию второй теоремы подобия.

Во-вторых, получаемое таким образом решение при единственном сочетании численных значений определяющих критериев является справедливым не для единичного явления, а для всей группы подобных явлений. Если же выполнять ряд численных решений, задаваясь различными значениями отдельных критериев, то получим ряд решений для различных групп подобных явлений в пределах данного рода (см. рис. 5.1). Объединяя затем ряд полученных решений в виде функциональной зависимости безразмерной искомой величины (или определяемого критерия) от численных значений определяющих критериев, получаем закономерность, справедливую для всего рода явлений. В ней определяющие критерии выступают в качестве обобщенных переменных. Такую зависимость можно считать решением сформулированной задачи (описываемой дифференциальными уравнениями и граничными условиями), которое по своей ценности тем ближе к аналитическому решению, чем шире интервал принятых численных значений определяющих критериев. Разумеется, указанную зависимость можно получить также, выполняя ряд экспериментов на физических (или аналоговых) моделях изучаемого явления.

Зависимость искомой безразмерной переменной (или определяемого критерия) от определяющих критериев называется *уравнением подобия*, или *критериальным уравнением*. Общую форму уравнения подобия можно записать на основании безразмерных дифференциальных уравнений, описывающих процесс. На основе анализа системы уравнений (5.21)—(5.24) можно получить следующие уравнения подобия, связывающие безразмерные определяемые величины с определяющими критериями и безразмерными координатами (для нестационарных процессов следует учитывать и безразмерное время):

безразмерное поле температур

$$\Theta = f_1(X,\ Y,\ Z,\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}); \tag{5.25}$$

безразмерное поле скоростей

$$\vec{W} = f_2(X,\ Y,\ Z,\ \mathrm{Re}); \tag{5.26}$$

безразмерное поле давлений

$$\mathrm{Eu} = f_3(X,\ Y,\ Z,\ \mathrm{Re}); \tag{5.27}$$

безразмерный коэффициент теплоотдачи

$$\mathrm{Nu} = f_4(X,\ Y,\ Z,\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Gr},\ \mathrm{Pr}). \tag{5.28}$$

Конкретную количественную форму функций f_1, f_2, f_3, f_4 можно получить, проводя ряд экспериментов на физической модели или выполняя ряд численных решений (математических экспериментов). При этом каждую из искомых критериальных зависимостей (5.25)—(5.28) можно устанавливать независимо от остальных. Так, в отличие от аналитического пути при экспериментальном определении количественной формы функции f_4 для теплоотдачи не обязательно предварительно определять вид скоростного и температурного полей, т. е. определять вид функций f_1 и f_2. Как было показано, большинство инженерных задач сводится только к определению коэффициентов теплоотдачи, поэтому в дальнейшем мы ограничимся изложением методов получения критериальных уравнений теплоотдачи типа f_4 (5.28), так как критерий $\mathrm{Nu}=\alpha l/\lambda$ является единственным из рассмотренных здесь критериев подобия, содержащим искомую величину α.

При экспериментальном исследовании может оказаться, что часть критериев, включенных в систему, не влияет на рассматриваемое явление, или, как иногда говорят, критерии вырождаются. Например, при развитом турбулентном течении можно пренебречь подъемной силой по сравнению с силой инерции. Тогда для определения α при вынужденном турбулентном течении среды уравнение подобия примет вид

$$\mathrm{Nu}=f(X,\ Y,\ Z,\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}). \tag{5.29}$$

Если целью определения является не локальный (местный), а средний по поверхности теплообмена коэффициент теплоотдачи $\overline{\alpha}$, на величину которого координаты не влияют, то уравнение для среднего $\overline{\mathrm{Nu}}$ можно записать в виде

$$\overline{\mathrm{Nu}}=f(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}). \tag{5.30}$$

При свободной конвекции в отсутствии вынужденного движения среды в уравнении (5.28) вырождается критерий $\mathrm{Re}=wl/\nu$ и уравнение подобия примет вид

$$\overline{\mathrm{Nu}}=f(\mathrm{Gr},\ \mathrm{Pr}). \tag{5.31}$$

При смешанной, свободно-вынужденной конвекции

$$\overline{\mathrm{Nu}}=f(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr}). \tag{5.32}$$

В отношении представленных здесь уравнений подобия необходимо сделать три дополнительных замечания.

1. Прежде всего о форме и числе определяющих критериев. Из уравнений (5.21) и (5.22) первоначально были выведены критерии несколько иной формы, чем те, которые приняты в качестве определяющих в уравнениях подобия (5.25)—(5.28); было сказано, что критерии можно преобразовать (расчленением на множители, делением или умножением друг на друга и т. п.), подбирая комплексы, имеющие более очевидный физический смысл или более удобную форму дальнейшего обобщения результатов экспериментов. Так, критерий Пекле удобнее представить, как произведение $\mathrm{Pe}=\mathrm{Re}\ \mathrm{Pr}$, так как в первоначальный критерий $\mathrm{Pe}=w_0 l/a$ входят как гидродина-

мический фактор — скорость w_0, так и тепловой коэффициент температуропроводности a, в то время как в критерий Рейнольдса $\mathrm{Re}=w_0 l/\nu$ входят только величины, характеризующие гидродинамику процесса, а критерий Прандтля зависит только от физических параметров. Однако, выполняя такие преобразования, нужно помнить, что общее количество критериев, характерных для процесса, не может быть произвольным. Оно устанавливается в теории размерностей так называемой π-т е о р е м о й.

Согласно π-теореме физическое уравнение, содержащее $n \geqslant 2$ размерных величин, из которых $k \geqslant 1$ величин имеют независимую размерность, после приведения к безразмерному виду будет содержать $(n-k)$ безразмерных величин.

Анализируя систему уравнений (5.21)—(5.24), можно убедиться, что количество критериев, получаемых из каждого уравнения, равно числу физически разнородных членов исходного дифференциального уравнения минус единица.

Так, в уравнении энергии (4.14) два физически разнородных члена: члены вида $w_x \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$ и вида $a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)$, поэтому из уравнения энергии можно получить только один критерий. В уравнении сплошности (4.20) все члены одного вида, и оно, следовательно, не дает ни одного критерия. Из уравнения движения (4.18) (если не учитывать в нем силу тяжести) получается два критерия Re и Eu. Таким образом, из системы (4.14), (4.18) и (4.20) получаем три критерия: Pe, Re, Eu, из них два определяющих — Pe и Re.

Если же представить критерий Пекле в виде произведения $\mathrm{Pe}=\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}$, т. е. ввести новый критерий Pr, то, сохраняя общее число критериев неизменным, необходимо исключить из рассмотрения критерий Pe; тогда общее число критериев останется равным трем: Pr, Re, Eu, из них определяющие — Re и Pr, что отражено в уравнениях подобия (5.25)—(5.28).

Если выясняется, что на процесс кроме ранее рассмотренных влияет дополнительный фактор (например, при свободно-вынужденном движении — подъемная сила), то появляется дополнительный член в дифференциальном уравнении и дополнительный критерий в уравнении подобия [критерий Грасгофа Gr при свободно-вынужденном движении, см. уравнение (5.32)]. Наоборот, при чисто свободной конвекции отсутствует напор от внешних источников, в связи с чем скорость потока вдали от теплообменных поверхностей (скорость на входе) $w_0=0$, и критерий Рейнольдса выпадает из числа определяющих [см. уравнение (5.31)].

2. Строго говоря, уравнения подобия вида (5.25)—(5.28) справедливы для потоков, у которых стенки каналов характеризуются одним единственным геометрическим размером, например при одномерном движении неограниченного потока вдоль пластины или при поперечном обтекании неограниченным потоком бесконечно длинного цилиндра, шара и т. п. В первом случае в качестве характерного размера (геометрического масштаба) выбирается длина пластины L, т. е. $l=L$, а во втором — характерный размер — диаметр,

т. е. $l=d$. Если же форма канала более сложная, то соблюдение условия геометрического подобия требует введения в уравнения подобия в качестве определяющих дополнительных безразмерных комплексов: l_1/l, l_2/l, . . ., где l_1, l_2, . . . — все влияющие на процесс геометрические размеры канала.

Безразмерные определяющие комплексы, представляющие собой отношения одноименных величин, в теории подобия называются **симплексами**: l_1/l, l_2/l — симплексы геометрического подобия.

Так, при движении потока в круглой трубе диаметром d и длиной L в качестве характерного размера обычно выбирают диаметр как наиболее важный геометрический фактор, но если длина трубы также влияет на процесс, то в уравнении подобия учитывают определяющий геометрический симплекс L/d. При движении потока в прямоугольном канале сечением $a\times b$ и длиной L в качестве характерного размера обычно выбирают меньшую сторону сечения (допустим, a) и учитывают симплексы b/a и L/a. При записи вновь полученного уравнения подобия необходимо указать, какой геометрический размер принят в качестве характерного. Часто это делают, присваивая критериям, включающим геометрический фактор, соответствующий индекс. Например, запись Nu_d означает, что характерным размером в критерии является диаметр, а запись Re_L означает, что характерным размером является общая длина канала L. В одном уравнении подобия все критерии должны включать один и тот же характерный размер.

3. Переменность теплофизических свойств в зависимости от температуры может быть учтена введением в уравнение подобия для теплоотдачи **температурного фактора** — симплекса, представляющего собой отношение $T_ж/T_0$. Это строго справедливо в том случае, если зависимость всех теплофизических свойств от температуры можно представить в виде степенных функций одинаковой степени, например: $\mu=\mu_0(T/T_0)^n$, $\rho=\rho_0(T/T_0)^n$ и т. д. Указанное соотношение характерно для газов, но не всегда подтверждается для жидкостей.

Кроме температурного фактора переменность теплофизических свойств приближенно можно учесть соответствующим выбором **определяющей температуры**. Определяющей называется температура, по которой выбирают значения теплофизических параметров, входящих в критерии подобия. В качестве определяющей температуры на основании опытных данных может быть выбрана либо температура жидкости $t_ж$, либо среднеарифметическая температура $t_{ср}=0{,}5(t_ж+t_с)$, либо $t_с$. Чтобы показать, какая температура принята за определяющую при расчете данного критерия, рядом с критерием ставят соответствующий индекс, например: $\mathrm{Nu}_ж$, $\mathrm{Re}_{ср}$, $\mathrm{Pr}_с$ и т. д.

Выбором определяющей температуры может быть учтено влияние переменности теплофизических свойств среды лишь при определенном направлении теплового потока. Если одно и то же критериальное уравнение предполагается использовать для расчетов при различных направлениях теплового потока (от стенки к среде и наоборот), то в него вводится определяющий симплекс в виде отношения $Pr_ж/Pr_с$, который следует учитывать только для капельных жидкостей (для газов это отношение близко к единице). Здесь под $Pr_ж$ понимается критерий Прандтля для жидкости при ее средней температуре, а под $Pr_с$ — критерий Прандтля для той же жидкости, находящейся вблизи стенки, т. е. при температуре стенки.

Поясним, почему, вводя в уравнения подобия в качестве одного из аргументов отношение $Pr_ж/Pr_с$, можно учесть направление теплового потока.

При нагреве жидкости температура стенки выше, чем температура жидкости ($t_с > t_ж$), следовательно, вязкость прилегающих к стенке слоев жидкости в этом случае меньше, чем вдали от стенки. Это приводит к тому, что распределение скоростей в нагреваемом потоке будет иным по сравнению с распределением скоростей в изотермическом потоке: при нагреве скорость у стенки будет больше, чем в изотермическом потоке, иначе говоря, увеличится градиент скорости у стенки. Поскольку температурное поле в движущейся жидкости зависит от скоростного, то при увеличении градиента скорости увеличится и градиент температуры $(\partial t/\partial n)_с$.

При охлаждении жидкости наблюдается обратная картина. Таким образом, можно сделать вывод, что при равных температурных напорах Δt при нагреве градиент температуры у стенки больше, чем при охлаждении.

$$(\partial t/\partial n)_{с.\,нагр} > (\partial t/\partial n)_{с.\,охл}.$$

Отсюда в соответствии с дифференциальным уравнением теплоотдачи (4.10) получаем

$$\alpha_{нагр} > \alpha_{охл}.$$

С другой стороны, численное значение критерия $Pr = \nu/a$ прямо пропорционально значению коэффициента вязкости, т. е. при нагреве $t_ж < t_с$, $\nu_ж > \nu_с$ и, следовательно, $Pr_ж > Pr_с$, а отношение $Pr_ж/Pr_с > 1$. При охлаждении, наоборот, $\nu_ж < \nu_с$ и $Pr_ж/Pr_с < 1$.

Таким образом, вводя в уравнение в качестве множителя отношение $(Pr_ж/Pr_с)^n$, где $n > 0$, можно учесть влияние на величину критерия Nu направления теплового потока. Значение $n = 0{,}25$ найдено экспериментально.

Из всего сказанного выше об уравнениях подобия следует, что при определенных численных значениях определяющих критериев по этим уравнениям можно вычислить значение определяемого критерия, одинаковое для всех явлений, подобных исследовавшемуся на модели. При этом, чтобы избежать ошибок, необходимо четко представлять, какие же условия необходимы и достаточны для определения подобных явлений. Эти условия подробно перечислялись в разделе 5.1 и соответствуют содержанию третьей теоремы подобия.

5.6. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА И ОБОБЩЕНИЕ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ МЕТОДОМ ПОДОБИЯ. ПОЛУЧЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСЧЕТНЫХ ФОРМУЛ

Рассмотрим порядок постановки эксперимента на примере исследования теплообмена при развитом вынужденном движении несжимаемой жидкости в круглой трубе. Будем полагать, что длина трубы много больше ее диаметра ($L/d > 50$) и изменение физических параметров в зависимости от температуры пренебрежимо мало.

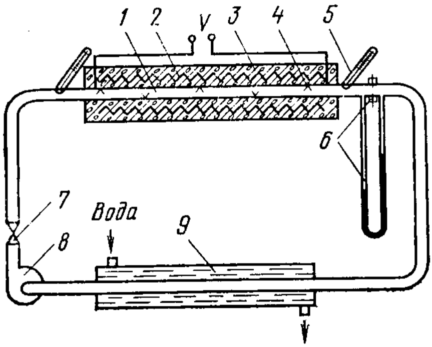


Рис. 5.1. Схема экспериментальной установки для исследования теплоотдачи при вынужденном турбулентном движении жидкости в трубе:

1 — экспериментальная труба; 2 — электронагреватель; 3 — изоляция; 4 — термопара; 5 — термометр; 6 — диафрагма и дифманометр; 7 — задвижка; 8 — насос; 9 — водяной холодильник.

Допустим, что нас будет интересовать среднее по поверхности трубы значение коэффициента теплоотдачи. Тогда общий вид уравнения подобия соответствует выражению (5.30). Искомую функциональную связь можно представить в виде степенной функции вида

$$\overline{\mathrm{Nu}} = C\,\mathrm{Re}^m \mathrm{Pr}^n, \qquad (5.33)$$

где коэффициент C и показатели m и n предстоит определить экспериментально. Такой вид функции продиктован соображениями удобства ее отыскания, а также тем, что степенная функция универсальна и при соответствующем подборе C, m, n может аппроксимировать почти любую плавную функциональную связь. Кроме того, при логарифмировании уравнения (5.33) зависимость между функцией $\lg \mathrm{Nu}$ и аргументами $\lg \mathrm{Re}$, $\lg \mathrm{Pr}$ получается линейной, что позволяет при планировании эксперимента использовать наиболее простые рандомизированные планы.

Для вычисления критериев необходимо решить вопрос о выборе характерного размера и определяющей температуры.

Как сказано выше, теорией подобия эти параметры однозначно не определены. Обычно в качестве характерного выбирают тот линейный размер канала, который в большей степени влияет на процесс, а в качестве определяющей температуры — ту, которую легче измерить и которая обычно бывает задана по условию задачи. Принимаем в качестве характерного размера внутренний диаметр трубы $l=d$, в качестве определяющей температуры — среднюю температуру жидкости в трубе $\overline{t}_{ж} = (t_{вх} + t_{вых})/2$. С учетом сказанного, уравнение (5.33) следует переписать:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{dж} = C\,\mathrm{Re}^m_{dж} \mathrm{Pr}^n_{ж}. \qquad (5.34)$$

В соответствии с первой теоремой подобия в опытах должны быть измерены величины, входящие в критерии подобия, характерные для данного процесса. Перечень этих величин очевиден:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{dж} = \overline{\alpha} d/\lambda_{ж};\ \ \mathrm{Re}_{dж} = \overline{w} d/\nu_{ж};\ \ \mathrm{Pr}_{ж} = \nu_{ж}/a_{ж}.$$

Соответственно планируются устройство экспериментального стенда и перечень приборов, необходимых для измерения указанных величин (или параметров, необходимых для определения этих величин по справочным данным).

Экспериментальная установка может иметь конструкцию, схематически изображенную на рис. 5.1. Подвод теплоты к экспериментальной трубе *1* можно производить любым способом, например с помощью электронагревателя *2*. Это обеспечит постоянный тепловой поток с поверхности трубы $q=Q/F=UI/(\pi\, dL)$.

Для создания вынужденного движения жидкости служит насос *8*; с помощью задвижки *7* можно менять расход, а следовательно, и среднюю скорость движения $\overline{w}$. Водяной холодильник *9* охлаждает выходящую жидкость до первоначальной температуры так, что в системе устанавливается некоторый стационарный режим в результате равенства теплот, подводимой в экспериментальной трубе и отводимой в холодильнике.

Найдем вначале зависимость $\overline{\mathrm{Nu}}$ от Re, при этом критерий Pr нужно поддерживать постоянным. Так как мы условились изменять температуру в небольших пределах, то условие Pr=const будет выполнено, если первую серию опытов по нахождению зависимости $\overline{\mathrm{Nu}}$ от Re проводить на какой-нибудь одной жидкости. Переменности критерия $\mathrm{Re}=\overline{w}d/\nu$ в установке можно достичь, изменяя $\overline{w}$ с помощью задвижки (ν изменять нельзя, так как будет нарушено условие Pr=const, а d изменять неудобно, так как для этого пришлось бы в каждом опыте устанавливать новую экспериментальную трубу).

Скорость можно вычислить по значению массового расхода жидкости G при данном положении задвижки:

$$\overline{w}=4G/(\rho\pi\, d^2),$$

де G — массовый расход, кг/с; его устанавливают по показанию дифманометра *6* вместо дифманометра здесь может быть расходомер иного типа, например ротаметр, счетчик расхода и т. п.).

В зависимости от Re будет меняться и критерий $\overline{\mathrm{Nu}}=\overline{\alpha}d/\lambda$ (так как d и λ для всей серии сохраняют постоянное значение, то переменность $\overline{\mathrm{Nu}}$ связана с изменением $\overline{\alpha}$). В опыте мы должны иметь возможность определять значение $\overline{\alpha}$. Для этого предусмотрены (см. рис. 5.1) термопары *4*, измеряющие температуру на поверхности трубы (в расчет берется $\overline{t}_с$), и термометры *5* для измерения температуры жидкости на входе в экспериментальную трубу и на выходе из нее (в расчет берется $t_ж$). Тогда $\overline{\alpha}$ можно определить по формуле

$$\overline{\alpha}=\frac{Q}{\pi\, dL\,(t_с-t_ж)}.$$

Теплоту можно найти как $Q=UI$, где UI — мощность электронагревателя. Такой расчет Q допустим, если изоляция *3*, предохраняющая от утечек теплоты в окружающую среду, весьма совершенна; в противном случае неизбежны потери, и для вычисления теплоты, воспринятой непосредственно жидкостью, лучше воспользоваться уравнением

$$Q=cG\,(t_{вых}-t_{вх}),$$

где c — удельная теплоемкость жидкости.

Данные экспериментов и вычислений заносят в табл. 5.1.

Таблица 5.1

№ опыта	$\overline{w}$, м/с	$\overline{\alpha}$, Вт/(м²·К)	$Re_{dж} = \overline{w}d/\nu_ж$	$\overline{Nu}_{dж} = \overline{\alpha}d/\lambda_ж$
		1-я серия ($Pr_ж = Pr_{ж1}$)		
1	$\overline{w}_1$	$\overline{\alpha}'_1$	Re_1	$\overline{Nu}'_1$
2	$\overline{w}_2$	$\overline{\alpha}'_2$	Re_2	$\overline{Nu}'_2$
3	$\overline{w}_3$	$\overline{\alpha}'_3$	Re_3	$\overline{Nu}'_3$
...	...	...	...	...
		2-я серия ($Pr_ж = Pr_{ж2}$)		
1	$\overline{w}_1$	$\overline{\alpha}''_1$	Re_1	$\overline{Nu}''_1$
2	$\overline{w}_2$	$\overline{\alpha}''_2$	Re_2	$\overline{Nu}''_2$
3	$\overline{w}_3$	$\overline{\alpha}''_3$	Re_3	$\overline{Nu}''_3$
...	...	...	...	...

Результаты одной серии опытов позволяют найти показатель m у критерия $Re_{dж}$ в уравнении (5.34). Здесь мы для наглядности остановимся на простейшем способе получения зависимости (5.34). (Это можно сделать более точно, применяя специальные статистические методы обработки опытных данных, например метод наименьших квадратов и др.)

Представим результаты опытов на графике $\lg Re_{dж}$—$\lg \overline{Nu}_{dж}$ (рис. 5.2, *а*). Через опытные точки проводят усредняющую прямую линию: тангенс угла наклона этой линии к оси абсцисс равен пока-

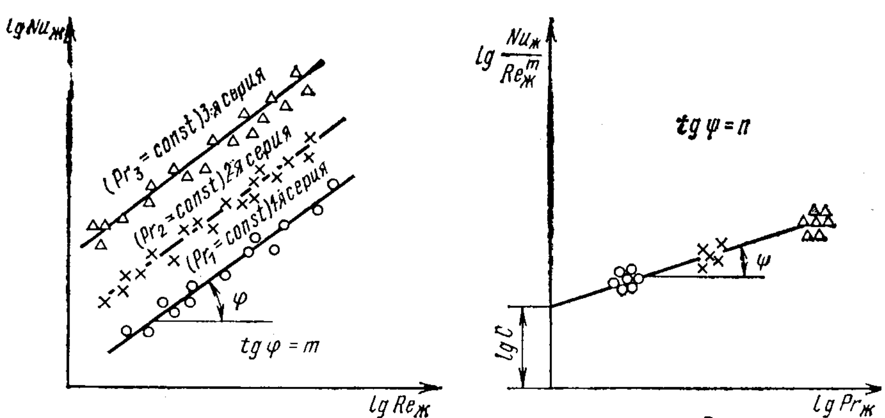


Рис. 5.2. К обработке опытных данных методом подобия:
а — определение показателя при Re; *б* — определение показателя при Pr и коэффициента *C*

зателю m. Действительно, прологарифмировав уравнение (5.34)

$$\lg \overline{Nu}_{d ж} = \lg (C\, Pr_ж^n) + m \lg Re_{d ж}, \qquad (5.35)$$

мы видим, что при постоянном $Pr_ж$ зависимость (5.35) в координатах $\lg Re_{d ж}$ — $\lg \overline{Nu}_{d ж}$ должна представлять собой прямую, составляющую с осью $\lg Re_{d ж}$ угол φ, для которого $\operatorname{tg} \varphi = m$.

В случае, если опытные точки не ложатся на одну прямую, можно разбить исследованную область на несколько интервалов, обобщая опытные точки некоторой ломаной линией, имеющей определенные значения показателя в пределах каждого интервала изменения определяющего критерия, т. е. при $Re_1 \leqslant Re_{d ж} \leqslant Re_2$ $m = m_1$, при $Re_2 \leqslant \leqslant Re_{d ж} \leqslant Re_3$ $m = m_2$ и т. д.

Для определения показателя n и постоянной C нужно провести несколько серий опытов с различными жидкостями, у которых разл чны $Pr_ж$. (В координатах $\lg Re_{d ж}$—$\lg \overline{Nu}_{d ж}$ эти серии должны давать линии, параллельные прямой, охватывающей первую серию опытов.)

Преобразуем уравнение (5.35) следующим образом:

$$\lg (\overline{Nu}_{d ж} / Re_{d ж}^m) = \lg C + n \lg Pr_ж. \qquad (5.36)$$

Показатель степени m теперь уже известен, и комплекс $\overline{Nu}_{d ж}/Re_{d ж}^m$ м жет быть найден для каждого опыта.

Результаты опытов заносят на график $\lg (Nu_{d ж}/Re_{d ж}^m)$ — $\lg Pr_ж$ (рис. 5.2, *б*). Данные каждой серии опытов здесь должны проектироваться почти в одну точку: разброс соответствует несовпадению опытных точек с прямой на рис. 5.2, *а*. Через группы опытных точек, принадлежащих различным сериям, проводят усредненную прямую, угол наклона которой с осью абсцисс ψ связан с показателем n соотношением $\operatorname{tg} \psi = n$.

Постоянную C также можно найти из графика на рис. 5.2, *б*: отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, равен $\lg C$.

Таким образом, на основании описанных экспериментов найдена расчетная форма уравнения подобия. Это уравнение справедливо для явлений, имеющих одинаковые дифференциальные уравнения и качественно одинаковые условия однозначности, т. е. это уравнение описывает теплоотдачу в явлениях одного рода. Каждому сочетанию значений критериев $Re_{d ж}$ и $Pr_ж$ соответствует группа подобных явлений. Заметим, что для явлений одного рода полученные данные нельзя использовать за пределами тех изменений критериев, которые исследовались в экспериментах, так как для других интервалов критериев могли оказаться иными величины C, m и n.

Это значит, что в справочной литературе рядом с конкретным (расчетным) уравнением подобия должны быть помещены данные о том, к какому роду явлений относится это уравнение, в каких пределах изменения критериев оно справедливо, а также какой размер и температура приняты в данном уравнении в качестве определяющих. При расчетах определяющие температуру и линейный размер нужно выбирать точно так же, как это было сделано при получении уравнения подобия.

Глава 6. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОФАЗНОЙ СРЕДЕ

6.1. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНЫ ВЫНУЖДЕННЫМ ПОТОКОМ. ПОНЯТИЕ О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Общие представления о гидродинамических условиях процесса. Рассмотрим в качестве примера особенности движения вынужденного потока ньютоновской несжимаемой жидкости вдоль плоской (или слабо искривленной) поверхности. Будем полагать, что скорость набегающего потока w_0 вдали от стенки сохраняет постоянное значение и поток изотермичен (т. е. нет теплообмена со стенкой).

Как упоминалось (см. раздел 4.2), под ньютоновскими жидкостями понимают капельные жидкости типа воды, а также газы: для них справедлив закон трения Ньютона в форме уравнения (4.5). У таких веществ коэффициенты вязкости малы (например, $\nu=10^{-5}\div10^{-7}$ м²/с), поэтому в большинстве практических задач критерий $\mathrm{Re}=w_0 l/\nu$ имеет большую величину, порядка 10^3—10^8.

Это означает, что сила трения в основном потоке пренебрежимо мала по сравнению с силой инерции. Однако, как впервые было показано Прандтлем (1904 г.), в результате эффекта «прилипания» ньютоновской жидкости к твердой поверхности в непосредственной близости от поверхности в тонком пристенном слое возникают большие градиенты скорости и, следовательно, в соответствии с уравнением (4.5) сила трения здесь оказывается существенной даже при малых значениях ν. Прандтль предложил условно разделить поток на две зоны: первая зона — тонкий пристенный слой, в котором проявляются силы вязкого трения, названный пограничным слоем, и вторая зона — основной, или невозмущенный, поток, в котором силой трения можно пренебречь. Анализируя уравнение движения, Прандтль показал, что при больших численных значениях критерия Re толщина слоя δ, в котором наблюдается существенный градиент скорости, несоизмеримо мала по сравнению с обычно встречающимися размерами обтекаемых тел, т. е. $\delta \ll l$. Этот слой следует называть гидродинамическим, или динамическим пограничным.

Итак, *динамическим пограничным слоем* называется тонкий пристенный слой (толщиной $\delta_д$), в котором проявляются силы вязкого трения, а скорость изменяется от нуля (вблизи стенки) до скорости невозмущенного потока w_0 (на внешней границе пограничного слоя).

Теоретически внешнюю границу динамического пограничного слоя точно определить нельзя, так как скорость потока стремится к w_0 лишь на бесконечном удалении от стенки. Но практически, измеряя скорость каким-либо прибором, мы всегда можем указать границу пограничного слоя в том месте, где прибор не будет улавливать разницы между скоростью в данной точке и в остальном потоке. Приближенно толщиной пограничного слоя считают расстояние от стенки, на котором скорость достигает значения $0{,}99\,w_0$. Существуют и иные, более объективные способы оценки толщины пограничного слоя.

Толщина пограничного слоя по длине обтекаемого тела переменна. Так, при набегании потока на пластину (рис. 6.1) тормозящее действие трения вначале сказывается в более тонком слое, далее по мере увеличения расстояния от передней кромки пластины x толщина пограничного слоя растет. На рис. 6.1 внешняя граница динамического пограничного слоя показана пунктирной линией.

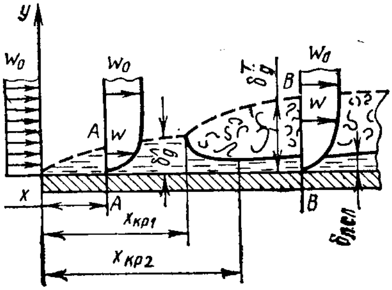


Рис. 6.1. Схема движения жидкости и образование динамического пограничного слоя при обтекании пластины вынужденным потоком

На переднем участке движение жидкости в пограничном слое всегда ламинарно (независимо от режима движения в невозмущенном потоке). Но на определенном расстоянии от переднего края $x_{кр1}$ характер движения в слое меняется: появляются отдельные завихрения потока, а на расстоянии $x_{кр2}$ движение во внешней части пограничного слоя приобретает развитый турбулентный характер. При этом закономерность изменения толщины пограничного слоя по длине пластины становится иной (см. перелом пунктирной линии в точке $x_{кр1}$ на рис. 6.1). Однако и в турбулентном пограничном слое у самой стенки остается еще более тонкий слой ламинарно движущейся жидкости. Его называют **ламинарным**, или **вязким, подслоем** ($\delta_{псл}$ на рис. 6.1).

Для подобных явлений расстояние от передней кромки $x_{кр}$, которое соответствует смене режимов движения в пограничном слое, определяется по численному значению критерия Рейнольдса, называемому критическим, $Re_{кр}=w_0 x_{кр}/\nu$. Приближенно для пластины $Re_{кр}\approx 5\cdot 10^5$.

Точное значение $Re_{кр}$ указать трудно, так как оно зависит от многих факторов и прежде всего от турбулентности набегающего (невозмущенного) потока: чем больше турбулентность набегающего потока, тем меньше $Re_{кр}$. По этой же причине обычно указывается одно критическое значение, тогда как более точно следовало бы указать два: $Re_{кр1}=w_0 x_{кр1}/\nu$ и $Re_{кр2}=w_0 x_{кр2}/\nu$ — между $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$ (см. рис. 6.1) расположена область переходного режима. Экспериментально установлено, что в зависимости от начальной турбулентности и других факторов — шероховатости пластины, ее вибрации, а также наличия теплообмена и т. п.— $Re_{кр}$ может изменяться в пределах от 10^4 до $4\cdot 10^6$.

Отметим, что введение понятий пограничного слоя и невозмущенного потока позволяет упростить математическое описание процессов гидродинамики и теплообмена, так как для каждой из этих зон дифференциальные уравнения соответственно упрощаются. Это дает возможность в отдельных случаях получить решения гидродинамической и тепловой задач аналитическим путем. Так, теоретически решена задача конвективного теплообмена при обтекании пластины вынужденным потоком. Не имея возможности в кратком пособии подробно рассмотреть существующие методы решения, приведем некоторые закономерности, получаемые на основе этих методов, и покажем, как, используя указанные гидродинамические закономерности, можно оценить интенсивность конвективного теплообмена, в частности получить значение коэффициента теплоотдачи.

Впервые гидродинамическая задача обтекания пластины ламинарным потоком была решена Блаузиусом, который установил, что распределение скоростей в любом сечении потока можно представить в виде общей зависимости от одной единственной безразмерной переменной $\eta = y\sqrt{w_0/(\nu x)}$, т. е., по Блаузиусу,

$$w(y)/w_0 = f(\eta),$$

где $w(y)$ — скорость на расстоянии y от стенки.

Теоретически скорость $w(y)$ асимптотически стремится к w_0 при $y \to \infty$, но практически уже при $\eta=5$ $w(y)=0{,}99\,w_0$. Таким образом, под толщиной ламинарного слоя $\delta_д^л$ можно понимать значение, равное y при $\eta=5$, откуда

$$\delta_д^л = 5/\sqrt{w_0/(\nu x)},$$

или в безразмерной форме

$$\delta_д^л/x = 5/\sqrt{\mathrm{Re}_x}. \tag{6.1}$$

Здесь $\mathrm{Re}_x = w_0 x/\nu$ — локальное значение критерия Рейнольдса.

Характер изменения скорости в сечении A — A ламинарного пограничного слоя показан на рис. 6.1.

Градиент скорости вблизи стенки, по Блаузиусу (в безразмерной форме),

$$(dW/d\eta)_с = 0{,}33 = \mathrm{const}, \tag{6.2}$$

где $W = w(y)/w_0$ — безразмерная скорость. Соответственно в размерной форме

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)_с = 0{,}33 Re_x^{0,5}\, w_0/x,$$

что дает возможность вычислить напряжение трения на стенке (см. уравнение (4.5)

$$S_{тр.\,с} = \mu\left(\frac{dw}{dy}\right)_с = 0{,}33\rho w_0^2 \mathrm{Re}_x^{-0,5}. \tag{6.2a}$$

Примерно такие же результаты получаются по упрощенному методу Кармана — Польгаузена, в котором принимается, что за пределами пограничного слоя скорость неизменна: при $y \geqslant \delta_д^л$ $w(y) = w_0$, а распределение скоростей в пограничном слое описывается уравнением кубической параболы

$$w(y)/w_0 \approx 1{,}5\,(y/\delta_д^л) - 0{,}5\,(y/\delta_д^л)^3, \tag{6.3}$$

где $\delta_д^л = \frac{4{,}64x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$, что с погрешностью до 7% соответствует более точному решению Блаузиуса.

Из выражения (6.1) следует, что толщина ламинарного гидродинамического пограничного слоя (участок, соответствующий $x < x_{кр1}$) увеличивается по длине пластины пропорционально $x^{0,5}$.

Толщина турбулентного пограничного слоя также увеличивается по длине пластины. Приближенно толщину турбулентного динамического пограничного слоя можно определить из выражения [42].

$$\delta_{д}^{т} \approx 0{,}376x/\mathrm{Re}_x^{0,2}, \tag{6.4}$$

т. е. $\delta_{д}^{т}$ возрастает вдоль пластины пропорционально $x^{0,8}$.

Толщина вязкого подслоя соответственно определяется выражением

$$\delta_{псл}/\delta_{д}^{т} \approx 194/\mathrm{Re}_x^{0,7}. \tag{6.5}$$

Характер распределения скорости по сечению турбулентного пограничного слоя показан на рис. 6.1 в сечении B — B. Это распределение — качественно иное, чем в ламинарном пограничном слое: изменение w в основном происходит в ламинарном подслое, причем можно считать, что здесь скорость линейно зависит от y, изменяясь в пределах от нуля (при $y=0$) до некоторого значения $w_{псл}$ на внешней границе вязкого подслоя (при $y=\delta_{псл}$).

Величина $w_{псл}$ приближенно определяется уравнением

$$w_{псл}/w_0 \approx 2{,}12/\mathrm{Re}_x^{0,1}. \tag{6.6}$$

В турбулентной части пограничного слоя распределение скоростей отвечает уравнению

$$w(y)/w_0 = (y/\delta_{д}^{т})^{1/7}. \tag{6.7}$$

С учетом линейного распределения в вязком подслое и уравнений (6.4) — (6.6) градиент скорости у стенки

$$dw/dy = w_{псл}/\delta_{псл} = 0{,}0296\mathrm{Re}_x^{0,8}w_0/x,$$

что дает возможность вычислить напряжение трения у стенки по формуле (4.5)

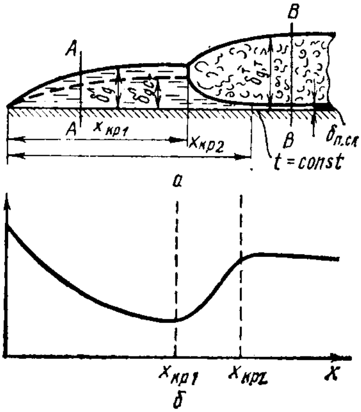
$$s_{тр.\,с} = \mu\frac{dw}{dy} = 0{,}0296\mathrm{Re}_x^{0,8}w_0\rho\nu/x$$

или, после преобразований,

$$s_{тр.\,с} = 0{,}0296\rho w_0^2\mathrm{Re}_x^{-0,2}. \tag{6.8}$$

Теплоотдача в ламинарном пограничном слое. Рассмотрев гидродинамические условия изотермического потока, перейдем к более сложному явлению — конвективному теплообмену при обтекании пластины вынужденным потоком. Будем считать, что известна температура набегающего потока $t_0=\mathrm{const}$ и температура стенки $t_с=\mathrm{const}$.

Как показал Г. Н. Кружилин (1936 г.), в процессе теплоотдачи температурное поле у стенки приблизительно аналогично полю скоростей, т. е. изменение температуры от $t_с$ до температуры невозмущенного потока t_0 происходит в тонком пристенном слое, который называют тепловым пограничным слоем. Введение понятия о тепловом пограничном слое позволяет уточнить ранее обсуждавшиеся (см. раздел 4.2) представления о механизме передачи теплоты в процессе теплоотдачи. Поскольку за пределами пограничного слоя grad $t\approx0$ передача теплоты от стенки к жидкости (или на-



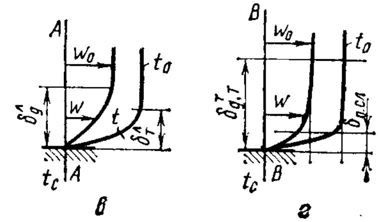


Рис. 6.2. Сопоставление динамического и теплового пограничных слоев при обтекании пластины капельными жидкостями (*а*); изменение по длине пластины локального коэффициента теплоотдачи (*б*); распределение температур и скоростей в ламинарном (*в*) и турбулентном (*г*) пограничных слоях

оборот) происходит только в пределах пограничного слоя: теплопроводностью в направлении, перпендикулярном стенке, и конвекцией — вдоль нее.

Толщина теплового пограничного слоя $\delta_т^л$ при ламинарном режиме зависит от толщины динамического пограничного слоя и свойств жидкости, характеризуемых критерием Pr. Г. Н. Кружилиным было установлено следующее соотношение между названными величинами:

$$\delta_т^л = \delta_д^л / \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}. \qquad (6.9)$$

Выражение (6.9) показывает, что при Pr=1 толщина теплового пограничного слоя равна толщине динамического пограничного слоя. Условие Pr=1 является условием аналогии процессов передачи теплоты и количества движения в ламинарном пограничном слое, при этом поля безразмерных скоростей и температуру у стенки становятся тождественными.

Значения критерия Pr близки к единице для большинства газов, например, для воздуха $\mathrm{Pr} \approx 0{,}7$. Для большинства капельных жидкостей $\mathrm{Pr} > 1$, и, следовательно, для них тепловой пограничный слой тоньше динамического (рис. 6.2, *а*). Тем не менее если пренебречь зависимостью теплофизических параметров (в частности, вязкости) от температуры, то можно считать, что скорость не зависит от температуры, и для распределения скоростей справедливы выражения (6.1)—(6.3), полученные из анализа динамического пограничного слоя. Для распределения температур при этом получаются аналогичные зависимости. Так, в ламинарном пограничном слое распределение безразмерной температуры приближенно описывается уравнением

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{t(y) - t_c}{t_0 - t_c} = 1{,}5\,(y/\delta_т^л) - 0{,}5\,(y/\delta_т^л)^3. \qquad (6.10)$$

Соответственно производная температуры по нормали к стенке (в данном случае по оси y)

$$\frac{d\vartheta}{dy}=\frac{1{,}5\vartheta_0}{\delta_{\text{т}}^{\text{л}}}-\frac{1{,}5\vartheta_0}{(\delta_{\text{т}}^{\text{л}})^3}\,y^2, \tag{6.11}$$

а ее значение у стенки (при $y=0$)

$$(d\vartheta/dy)_{\text{с}}=1{,}5\vartheta_0/\delta_{\text{т}}^{\text{л}}. \tag{6.12}$$

При подстановке выражения (6.12) в дифференциальное уравнение теплоотдачи (4.5) получаем зависимость локального коэффициента теплоотдачи α_x (в некотором сечении x) от локальной толщины теплового пограничного слоя.

$$\alpha_x=1{,}5\lambda/\delta_{\text{т}x}^{\text{л}}. \tag{6.13}$$

Таким образом, коэффициент теплоотдачи обратно пропорционален толщине теплового пограничного слоя. На участке ламинарного пограничного слоя α_x уменьшается (рис. 6.2, *б*), так как растет $\delta_{\text{т}}^{\text{л}}$.

Подставляя в выражение (6.13) значения $\delta_{\text{т}}^{\text{л}}$ с учетом соотношений (6.9) и (6.3), получаем

$$\alpha_x=0{,}33\,\frac{\lambda}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}. \tag{6.14}$$

Среднее по длине пластины l значение коэффициента теплоотдачи определяется выражением

$$\bar{\alpha}=\frac{1}{l}\int\limits_0^l \alpha_x\,dx. \tag{6.15}$$

После подстановки в выражение (6.15) α_x из (6.14) и интегрирования получаем

$$\bar{\alpha}=2\alpha_{x=l}=0{,}66\,\frac{\lambda}{l}\sqrt{\mathrm{Re}_l}\,\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}. \tag{6.16}$$

Переписывая уравнение (6.16) в безразмерной форме с учетом поправки на переменность физических параметров в поперечном сечении потока, получаем

$$\mathrm{Nu}_{l,\,\text{ж}}=0{,}66\mathrm{Re}_{l,\,\text{ж}}^{0{,}55}\mathrm{Pr}_{\text{ж}}^{0{,}33}\,(\mathrm{Pr}_{\text{ж}}/\mathrm{Pr}_{\text{с}})^{0{,}25}. \tag{6.17}$$

В этом уравнении индекс l у критериев Рейнольдса и Нуссельта означает, что в качестве характерного размера принята длина пластины; индекс ж означает, что в качестве определяющей здесь принята температура жидкости вдали от стенки (т. е. температура невозмущенного потока t_0).

Теплоотдача в турбулентном пограничном слое. Турбулентный тепловой пограничный слой, как и турбулентный динамический пограничный слой, устанавливается на расстоянии от передней кромки пластины $x>x_{\text{кр}2}$. Толщины теплового и динамического пограничных слоев при турбулентном режиме можно считать одинаковыми $\delta_{\text{д}}^{\text{т}}=\delta_{\text{т}}^{\text{т}}$.

При турбулентном режиме процесс переноса теплоты в пограничном слое сложнее, чем в ламинарном. Теория турбулентности, а следовательно, и механизм переноса теплоты в турбулентном потоке до сих пор не изучены в полной мере. Тем не менее общие представления об этом механизме были заложены О. Рейнольдсом еще в 1875 г. в его гидродинамической теории теплообмена.

Анализируя экспериментальные данные о зависимости напряжения трения у твердой поверхности $S_{\text{тр. с}}$ и коэффициента теплоотдачи α от скорости потока w_0, Рейнольдс установил, что между переносом теплоты и количества движения существует аналогия. Это привело его к мысли о едином механизме переноса теплоты и количества движения в движущихся жидкостях и газах, представление о котором мы уже использовали, давая определение конвективного теплообмена (см. раздел 4.1). При этом в турбулентной части пограничного слоя в результате хорошего перемешивания макрообъемов среды скорость и температура почти постоянны по ее толщине (рис. 6.2, *а*, *г*).

Основное изменение скорости и температуры происходит в самом ламинарном подслое, через который теплота передается в основном теплопроводностью. Рейнольдс предположил, что через вязкий подслой теплота передается только теплопроводностью и, следовательно, изменение температуры, как и скорости, по толщине подслоя имеет линейный характер, а в турбулентной части слоя теплота и количество движения передаются только конвекцией. Им было доказано, что для описания явлений переноса теплоты и количества движения в турбулентном потоке применимы выражения, аналогичные закону Фурье (1.2) (для переноса теплоты) и закону вязкого трения Ньютона (4.6) (для переноса количества движения), в которые вместо величин λ и μ введены коэффициенты турбулентной теплопроводности $\lambda_{\text{т}}$ и турбулентной вязкости $\mu_{\text{т}}$. В отличие от λ и μ $\lambda_{\text{т}}$ и $\mu_{\text{т}}$ не являются физическими параметрами среды, а зависят также от гидродинамических условий, в частности от величины критерия Re. В любом случае коэффициенты турбулентного переноса $\lambda_{\text{т}}$ и $\mu_{\text{т}}$ намного больше, чем соответствующие значения λ и μ, однако определение их численных значений для конкретных процессов пока вызывает большие трудности.

Представление об аналогии между процессами передачи теплоты и количества движения в турбулентном пограничном слое приводит к следующей зависимости локального коэффициента теплоотдачи от гидродинамических характеристик потока w_0, $S_{\text{тр. с}}$ и $w_{\text{псл}}$:

$$\alpha_x = \frac{S_{\text{тр. с}} c_p}{w_0} \frac{1}{1 + \frac{w_{\text{псл}}}{w_0}(\mathrm{Pr} - 1)}$$

Здесь напряжение трения на стенке $S_{\text{тр. с}}$ определяется выражением (6.8), а скорость на внешней границе вязкого подслоя $w_{\text{псл}}$ — выражением (6.6). Переходя к безразмерной форме с учетом указанных зависимостей для локального критерия Нуссельта, получаем выражение

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}0296\mathrm{Re}_x^{0,8}E, \qquad (6.18)$$

где $E = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) = \dfrac{1}{1+(2{,}12/\mathrm{Re}_x^{0,1})(\mathrm{Pr}-1)}$.

При $\mathrm{Pr}=1$ величина $E=1$ и формула хорошо подтверждается экспериментальными данными. При $\mathrm{Pr}\neq 1$ (т. е. для капельных жидкостей) теория Рейнольдса не в полной мере соответствует экспериментам. Это можно объяснить прежде всего тем, что в действительности нет резкой границы между вязким подслоем и турбулентной частью пограничного слоя. Очевидно, существует зона, в которой следует учитывать перенос теплоты и теплопроводностью,и конвекцией одновременно. Этот промежуточный слой называют буферным. Разработки, развивающие гидродинамическую теорию теплообмена в настоящее время, в основном направлены на уточнение физических представлений о механизме переноса в буферном слое, а также на создание методов определения турбулентных коэффициентов переноса.

В соответствии с многочисленными экспериментальными данными [11, 26] для локального критерия Нуссельта уравнение подобия при турбулентном режиме обтекания пластины вынужденным потоком имеет вид

$$\mathrm{Nu}_{x,ж} = 0{,}03\mathrm{Re}_{x,ж}^{0,8}\mathrm{Pr}_ж^{0,43}(\mathrm{Pr}_ж/\mathrm{Pr}_с)^{0,25}. \qquad (6.19)$$

Из уравнения (6.19) следует, что и в турбулентном режиме коэффициент теплоотдачи по длине пластины уменьшается, но в меньшей степени, чем при ламинарном: $\alpha_x \sim x^{-0,2}$. Общий характер изменения коэффициента теплоотдачи по длине пластины показан на рис. 6.2, *б*; зона возрастания коэффициента теплоотдачи соответствует переходному режиму.

Среднее по длине пластины значение коэффициента теплоотдачи связано с его локальным значением при $x=l$ выражением

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l}\int_0^l \alpha_x dx = 1{,}25\alpha_{x=l}.$$

Откуда для среднего значения критерия Нуссельта получается уравнение подобия

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{l,ж} = 0{,}037\mathrm{Re}_{l,ж}^{0,8}\mathrm{Pr}_ж^{0,43}(\mathrm{Pr}_ж/\mathrm{Pr}_с)^{0,25}. \qquad (6.20)$$

Таким образом, расчет теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины, на которой существуют ламинарный и турбулентный участки пограничного слоя, следует проводить отдельно: для участка $x\leqslant x_{кр1}$ — по уравнениям (6.14) или (6.17), а для участка $x_{кр2}\leqslant x\leqslant l$ — по уравнениям (6.19) или (6.20), при этом в формулы (6.19) и (6.20) в качестве характерных размеров подставляются соответственно x и l, отсчитанные от передней кромки пластины. Если набегающий на пластину поток хорошо турбулизирован, то, поскольку при этом $\mathrm{Re}_{кр}$ (и соответственно $x_{кр}$) резко уменьшается по сравнению со случаем, когда невозмущенный поток ламинарен, приближенно можно пренебречь ламинарным участком пограничного слоя и считать, что средний коэффициент теплоотдачи по всей пластине соответствует уравнению (6.20).

6.2. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ДВИЖЕНИИ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ

В этом разделе рассматриваются гидродинамические процессы и теплообмен в трубах, т. е. в каналах круглого сечения. Однако, как показано в конце раздела, полученные закономерности могут быть применены и для расчета теплоотдачи в каналах некруглого сечения.

Гидродинамические условия процесса. При движении сред внутри каналов гидродинамический характер процессов существенно отличается от процессов обтекания тел внешним потоком, поэтому гидродинамические задачи наружного обтекания тел называют в н е ш н и м и, а задачи движения сред внутри каналов — в н у т р е н н и м и. Основное отличие внутренних задач от внешних состоит в том, что в условиях ограничения потока стенками канала пограничный слой не может свободно развиваться по всей длине канала, как это описано в разделе 6.1 на примере обтекания пластины.

Рассмотрим особенности внутренних задач на примере движения в трубах (рис. 6.3). Допустим, что жидкость поступает в трубу постоянного сечения с одинаковой по сечению скоростью w. Для несжимаемой жидкости это значение скорости будет являться ее средним значением в любом сечении, поскольку расход жидкости через трубу с непроницаемыми стенками $G=\rho w \pi d^2/4=\mathrm{const}$. Однако вследствие эффекта прилипания жидкости к стенкам сразу же за входным сечением начнется перераспределение локальных значений скорости по сечению (см. профили скорости на рис. 6.3, *а*, *б*, в сечениях *I*—*I*). Это связано с тем, что на начальном участке трубы у стенок будет возникать пограничный слой подобно тому, как это наблюдалось при обтекании пластины (ср. рис. 6.1 и 6.3), но по мере увеличения толщины пограничного слоя зона «невозмущенного» потока сужается и совсем исчезает в точке, где толщина пограничного слоя достигает значения радиуса трубы: в этой точке смыкаются пограничные слои, нарастающие на противоположных стенках сечения трубы, а распределение скоростей приобретает характер, изображенный на рис. 6.3, *а*, *б* в сечениях

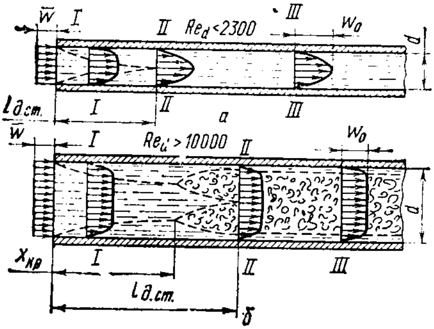


Рис. 6.3. Схема гидродинамической стабилизации движения в трубах при ламинарном (*а*) и турбулентном (*б*) режимах

II—II. Расстояние от входа в канал до сечения, в котором происходит смыкание динамических пограничных слоев, называется участком гидродинамической стабилизации. Возможны три варианта стабилизации.

1. Толщина пограничного слоя достигает значения радиуса трубы на участке ламинарного пограничного слоя (см. рис. 6.3, *а*), т. е. при этом $l_{\text{д. ст}}<x_{\text{кр}1}$, где $x_{\text{кр}1}$ — расстояние по длине обтекаемого тела, соответствующее началу перестройки ламинарного пограничного слоя в турбулентный. В этом случае в трубе по всей длине за участком стабилизации устанавливается ламинарный режим движения.

2. Толщина пограничного слоя становится равной радиусу трубы после того, как пройдет перестройка ламинарного пограничного слоя в турбулентный (см. рис. 6.3, *б*), при этом $l_{\text{д. ст}}>x_{\text{кр}2}$, где $x_{\text{кр}2}$— расстояние по длине обтекаемого тела, соответствующее концу перестройки ламинарного слоя в турбулентный. В этом случае по всей длине трубы за участком стабилизации устанавливается турбулентный режим движения, однако (так же, как это характерно для турбулентного пограничного слоя при внешнем обтекании) у самой стенки трубы сохраняется вязкий ламинарный подслой.

3. Если толщина пограничного слоя становится равной радиусу трубы на участке перестройки пограничного слоя, т. е. если $x_{\text{кр}1}<$ $<l_{\text{д. ст}}<x_{\text{кр}2}$, то в трубе устанавливается переходный режим движения.

Таким образом, режим стабилизированного движения данной жидкости при заданном значении $\bar{w}$ будет определяться только величиной диаметра трубы: в трубах малого диаметра устанавливается ламинарный режим, в трубах большого диаметра — турбулентный. Поэтому наиболее важным, характерным размером, от которого зависит характер движения внутри каналов, является их поперечный размер, для труб это диаметр d.

Обобщенной характеристикой, определяющей режим в трубах для любых жидкостей при любых скоростях движения, является критерий Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_d=\bar{w}d/\nu;$$

при $\mathrm{Re}_d\leqslant2300$ — ламинарный режим:
при $\mathrm{Re}_d\geqslant10000$ — турбулентный режим;
при $2300<\mathrm{Re}_d<10000$ — переходный режим.

Длина участка гидродинамической стабилизации при ламинарном режиме определяется соотношением

$$l_{\text{д. ст}}/d=0{,}05\mathrm{Re}_d.$$

При турбулентном режиме длина участка стабилизации слабо зависит от Re_d и приближенно равна

$$l_{\text{д. ст}}\approx 15d.$$

В стабилизированном потоке распределение скоростей остается неизменным по длине (сравните распределения скоростей в сече-

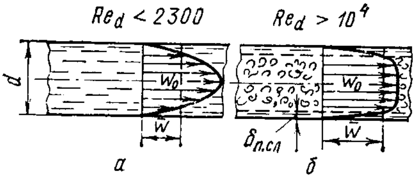


Рис. 6.4. Характер распределения скоростей по сечению стабилизированного потока при ламинарном (*а*) и турбулентном (*б*) режимах

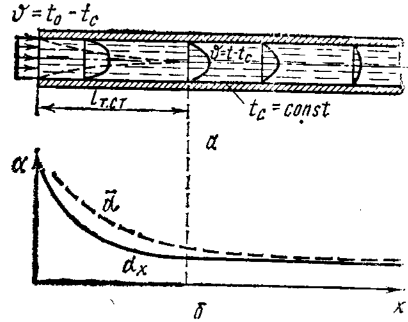


Рис. 6.5. Участок тепловой стабилизации (*а*) и характер изменения коэффициента теплоотдачи (*б*) при ламинарном «изотермическом» потоке в трубе

ниях *II—II* и *III—III* на рис. 6.3, *а* для ламинарного, на рис. 6.3, *б* для турбулентного режима).

При ламинарном режиме в любом сечении стабилизированного потока распределение скоростей представляет собой квадратичную параболу (рис. 6.4, *а*) и соответствует уравнению

$$w(y)/w_0 = 1 - (y/r)^2, \tag{6.21}$$

где $w(y)$ — локальная скорость на расстоянии y от оси трубы; w_0 — максимальная скорость на оси трубы; r — радиус трубы.

При этом максимальная скорость определяется по величине средней скорости как $w_0 = 2\,\bar{w}$.

Интересно отметить, что распределение скоростей при ламинарном режиме не зависит от критерия Рейнольдса, т. е. при $Re_d < 2300$ поля скоростей в трубах подобны друг другу, или, как говорят, в ламинарном режиме поля скоростей а в т о м о д е л ь н ы.

При турбулентном режиме основное изменение скорости (от нуля на стенке до w_0 на оси потока) происходит в вязком подслое (рис. 6.4, *б*), но при этом распределение скоростей по сечению зависит от Re_d: чем больше величина Re_d, тем профиль скоростей по сечению становится «более наполненным», т. е. тем меньше различие между $\bar{w}$ и w_0. Так, при наименьшем для развитого турбулентного режима значении критерия Рейнольдса $Re_d = 10^4$ получено $\bar{w}/w_0 \approx 0{,}8$, а при $Re_d = 10^8$ $\bar{w}/w_0 \approx 0{,}9$. Отметим, что при любых значениях Re_d в турбулентном режиме отношение $\bar{w}/w_0$ всегда больше, чем в ламинарном. Соответственно с увеличением Re_d в турбулентном режиме увеличивается градиент скорости у стенки. При этом градиент скорости при турбулентном режиме всегда значительно больше, чем при ламинарном.

Теплоотдача при ламинарном режиме. Теплоотдача при ламинарном режиме движения жидкостей в трубах характеризуется большей сложностью, и ее анализ требует учета большего количества факторов, нежели в предыдущем случае продольного омывания пластины. Чтобы облегчить понимание этого процесса, рассмотрим его вначале упрощенно.

Начнем с идеализированной схемы теплообмена в изотермическом потоке, т. е. теплообмена при исчезающе малых разностях температур между стенкой и средой. Именно в этом случае теплофизические свойства среды (в том числе вязкость) постоянны, поле скоростей стабилизированного потока описывается уравнением параболы (6.21), а потому применимы и остальные зависимости, приведенные в предыдущем разделе.

В потоке жидкости поступающей в трубу, вблизи ее стенок кроме динамического пограничного слоя образуется тепловой пограничный слой, толщина которого при $\mathrm{Pr}\neq 1$ отличается от толщины динамического. В связи с этим смыкание теплового и динамического пограничных слоев происходит в разных сечениях трубы, т. е. длина участка тепловой стабилизации $l_{\text{г. ст}}$ в общем случае не равна длине участка гидродинамической стабилизации $l_{\text{д. ст}}$: для капельных жидкостей (при $\mathrm{Pr}>1$) $l_{\text{т. ст}}>l_{\text{д. ст}}$ для газов (при $\mathrm{Pr}\approx 1$) $l_{\text{г. ст}}\approx$ $\approx l_{\text{д. ст}}$.

Теоретически [29] длина участка тепловой стабилизации определяется следующими соотношениями:

$$l_{\text{т. ст}}/d = 0{,}05\mathrm{Re}_d\mathrm{Pr} \qquad (6.22\text{а})$$

при граничных условиях первого рода ($t_\text{c}=\mathrm{const}$);

или
$$l_{\text{т. ст}}/d = 0{,}07\mathrm{Re}_d\mathrm{Pr} \qquad (6.22\text{б})$$

при граничных условиях второго рода ($q_\text{c}=\mathrm{const}$).

Из этих соотношений следует, что для вязких жидкостей, у которых числа Прандтля велики (до 1000 и более), участок тепловой стабилизации может превышать диаметр в сотни и тысячи раз, т. е. практически распространяется на всю длину трубы.

На участке тепловой стабилизации теплообмен между жидкостью и стенкой происходит только в пределах теплового пограничного слоя, а в центральной части сохраняется постоянная температура t_0 — температура жидкости на входе. Распределения избыточных температур $\vartheta=t(y)-t_\text{c}$ в различных сечениях трубы имеют характер, представленный на рис. 6.5, *а*: с ростом толщины теплового пограничного слоя градиент температуры возле стенки и соответственно величина коэффициента теплоотдачи по длине пластины уменьшаются. Для расчета локального коэффициента теплоотдачи на участке тепловой стабилизации может быть использовано [15] уравнение (6.14), дополненное множителем $(x/d)^{0,1}$, учитывающим стесненный характер движения потока. Локальный коэффициент теплоотдачи на участке тепловой стабилизации α_x, как и средний по длине коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}$, уменьшается по длине трубы (рис. 6.5, *б*).

После смыкания тепловых пограничных слоев в теплообмене участвует весь поток жидкости. Распределение избыточной температуры ϑ по сечению становится подобным распределению скоростей, т. е. имеет вид параболы с максимальным значением ϑ на оси трубы, но в отличие от скорости средняя температура жидкости в результате теплообмена по длине трубы изменяется, приближаясь к температуре стенки, т. е. по длине трубы $\vartheta \to 0$ и $d\vartheta/dy \to 0$. При этом для ламинарного режима характерно то, что и избыточная температура ν, и градиент температуры вблизи стенки $(d\vartheta/dy)_c$ убывают с одинаковой скоростью, поэтому на стабилизированном в тепловом отношении участке [в соответствии с дифференциальным уравнением теплоотдачи (4.10)] коэффициент теплоотдачи сохраняет постоянное значение $\alpha_x = \text{const}$ (см. рис. 6.5, *б*).

Теоретически [29] критерий Нуссельта в зависимости от граничных условий принимает при этом следующие численные значения:

$$\left. \begin{aligned} \text{Nu}_{\text{стаб}} &= 3{,}66 \ \text{при} \ t_c = \text{const}; \\ \text{Nu}_{\text{стаб}} &= 4{,}36 \ \text{при} \ q_c = \text{const}. \end{aligned} \right\} \qquad (6.23)$$

Здесь индекс «стаб» означает, что критерий отвечает условиям потока, стабилизированного в тепловом отношении.

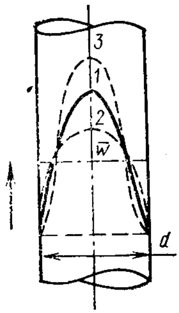
Однако, как отмечено выше, поток, стабилизированный в тепловом отношении, в трубах обычной длины не устанавливается, поэтому значения коэффициентов теплоотдачи, вычисленные в соответствии с выражениями (6.23), следует рассматривать как минимально возможные. В реальных процессах коэффициенты теплоотдачи оказываются больше минимальных в результате действия дополнительных факторов, не учитывающихся в идеализированной модели теплообмена в «изотермическом» потоке. Прежде всего в реальных процессах температурный напор $\vartheta_0 = t_0 - t_c$ может быть велик, т. е. поток уже нельзя будет считать изотермическим. Рассмотрим, как повлияет это на процессы гидродинамики и теплообмена.

Во-первых, как сказано ранее (см. раздел 5.3), при значительных температурных напорах следует учитывать влияние переменности теплофизических свойств жидкости в зависимости от температуры. Так, изменение вязкости приводит к деформации скоростного, а следовательно, и температурного поля у стенки трубы: при $t_c > t_0$ (нагрев жидкости) вязкость вблизи стенки меньше, а скорость больше, чем в изотермическом потоке; наоборот, при $t_c < t_0$ (охлаждение жидкости) скорость у стенки трубы оказывается меньше, чем в изотермическом потоке. Если учесть, что средняя скорость потока в трубе $w = \text{const}$, то характер деформированных профилей скорости соответствует рис. 6.6. Соответствующее изменение коэффициента теплоотдачи учитывается, как уже отмечалось, введением в уравнения подобия в качестве определяющих аргументов симплексов $(\mu_ж/\mu_c)$ или отношения критериев Прандтля $(\text{Pr}_ж/\text{Pr}_c)$.

Во-вторых, под влиянием разности температур в потоке возникает разность плотностей нагретых и холодных слоев, что в свою очередь приводит к возникновению в гравитационном поле подъемной силы. Подъемная сила всегда стремится вызвать свободную конвекцию в среде (независимо от того, находится ли среда в покое или движется). Однако действие подъемной силы может проявляться

Рис. 6.6. Деформация кривой распределения скоростей по сечению трубы под влиянием неизотермичности потока при вязком ламинарном движении:

1 — параболическое распределение при $t=\text{const}$; *2* — деформированный профиль скорости при нагреве жидкости; *3* — деформированный профиль скорости при охлаждении жидкости



только при определенных условиях: в ламинарных потоках вязких жидкостей при малых температурных напорах подъемная сила подавляется силами вязкого трения и свободная конвекция не возникает; если же подъемная сила превышает силу вязкости или хотя бы соизмерима с ней, то в потоке кроме основного вынужденного движения возникает свободная конвекция. Такой вид движения в общем случае называют смешанной или свободно-вынужденной конвекцией. При смешанной конвекции скорость в любой точке потока можно представить как геометрическую сумму скоростей свободной и вынужденной конвекции. В зависимости от преобладающих сил ламинарный режим движения в трубах принято подразделять на два подрежима: вязкостный, в котором силы вязкого трения преобладают над остальными, и вязкостно-гравитационный, в котором подъемная сила соизмерима с силой вязкости. Очевидно, что вязкостно-гравитационный режим можно также назвать смешанной конвекцией.

Рассмотрим, как можно оценить соотношение сил в ламинарном потоке. Для примера рассмотрим движение на участке тепловой стабилизации $l \leqslant l_{\text{т. ст}}$ в вертикальной трубе, как это сделано в учебнике [27]. Учитывая, что температурный напор существует только в пределах теплового пограничного слоя, среднюю толщину которого на рассматриваемом участке обозначим $\overline{\delta_{\text{т}}^{\text{л}}}$, величину подъемной силы по порядку (т. е. с точностью до числового коэффициента) можно оценить выражением

$$P_{\text{под}} \sim g\,\Delta\rho\overline{\delta_{\text{т}}^{\text{л}}}\,2\pi r l,$$

где $\Delta\rho=\rho\beta(t_0-t_c)$ — разность плотностей в пограничном слое.

Толщина пограничного слоя $\delta_{\text{т}}^{\text{л}}$ связана с коэффициентом теплоотдачи уравнением (6.9), откуда для средней толщины с точностью до числового коэффициента получаем $\overline{\delta_{\text{т}}^{\text{л}}} \sim \lambda/\bar{\alpha}$.

Сила вязкого трения в соответствии с законом трения (4.6)

$$P_{\text{тр}} \sim \mu \frac{dw}{dy} 2\pi r l, \quad \text{или} \quad P_{\text{тр}} \sim \mu \frac{\bar{w}}{r} 2\pi r l,$$

где с учетом того, что у стенки скорость равна нулю, приближенно принято, что $dw/dy \approx \bar{w}/r$.

Условие соизмеримости рассматриваемых сил представляется как $P_{\text{под}} \approx P_{\text{тр}}$ или

$$g\rho\beta\vartheta_0 \frac{\lambda}{\bar{\alpha}} \approx \mu \frac{\bar{w}}{r},$$

откуда, преобразуя, получаем

$$\frac{g\beta\vartheta_0 d^2}{2\nu\bar{w}} \approx \frac{\bar{\alpha}d}{\lambda}.$$

В последнем выражении правая часть равна критерию Нуссельта, а слева стоит безразмерный комплекс, который легко преобразуется к виду $Gr_d/2Re_d$. Таким образом, из условия соизмеримости подъемной силы силе трения получаем соотношение

$$Nu_d \approx \frac{1}{2}\frac{Gr_d}{Re_d}. \qquad (6.24)$$

Ценность уравнения (6.24) как расчетного мала, так как экспериментально получены более точные зависимости [см. далее уравнения (6.25), (6.27)], однако из уравнения (6.24) следует необходимость учета для вязкостно-гравитационного режима критерия Gr и соотношения Gr/Re. В монографии [29] показано, что существует критическое значение последнего соотношения, при котором происходит нарушение устойчивости ламинарного потока, т. е. в потоке даже при $Re<2300$ появляются завихрения. (Численное значение $(Gr/Re)_{кр}$ зависит от ориентации и формы канала.)

Вязкостный режим характерен для таких теплообменников, как маслоохладители, подогреватели жидкого топлива (мазута и т. п.), он также может иметь место в испарителях холодильных машин, предназначенных для охлаждения таких хладоносителей, как рассолы, растворы этиленгликоля и т. п. Вязкостный ламинарный режим в трубах, по данным Б. С. Петухова [29], наблюдается при $Re_{d,ж}<2200$ и $Gr_{d,ср}Pr_{ср}<5\cdot 10^8$ [здесь в качестве определяющей принята средняя температура $t_{ср}=0,5(t_0+t_c)$, где t_0 — температура на входе в трубу]. Там же рекомендовано следующее уравнение для расчета среднего по длине трубы l коэффициента теплоотдачи:

$$\overline{Nu}_{d,ж}=1,55\left(Re_{d,ж}Pr_ж\frac{d}{l}\right)^{0,33}\left(\frac{\mu_ж}{\mu_c}\right)^{0,14}\varepsilon_l, \qquad (6.25)$$

где в качестве определяющей выбрана среднелогарифмическая температура жидкости в трубе $t_ж=t_c+0,5\,\Delta t_{ср.\,лог}$;

$$\Delta t_{ср.\,лог}=\frac{t_0-t_{вых}}{\ln\dfrac{t_0-t_{вых}}{t_{вых}-t_c}}.$$

Формула (6.25) справедлива при $t_c=\text{const}$ в следующих пределах изменения определяющих критериев:

$$\frac{1}{Re_{d,ж}Pr_ж}\frac{l}{d}<0,01; \quad 0,07<\frac{\mu_c}{\mu_ж}<1500.$$

Для газов симплекс $\mu_ж/\mu_c$ не учитывается.

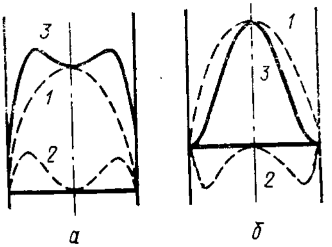
Коэффициент ε_l учитывает влияние на теплоотдачу участка гидродинамической стабилизации и вычисляется по формуле

$$\varepsilon_l=0,6\left(\frac{1}{Re_{d,ж}}\frac{d}{l}\right)^{-1/7}\left(1+2,5\frac{1}{Re_{d,ж}}\frac{d}{l}\right) \qquad (6.26)$$

при $\dfrac{1}{Re_{d,ж}}\dfrac{d}{l}<0,1$.

Если $\dfrac{1}{Re_{d,ж}}\dfrac{d}{l}\geqslant 0,1$, то $\varepsilon_l\approx 1$.

При вязкостно-гравитационном ламинарном режиме гидродинамические процессы и теплообмен усложняются вследствие влияния свободной конвекции; при этом важным фактором становится ори-



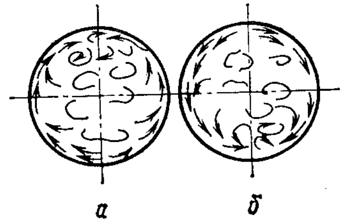


Рис. 6.7. Распределение скоростей при вязкостно-гравитационном режиме движения в вертикальной трубе:

а — нагрев восходящего потока; *б* — охлаждение восходящего потока; *1* — профиль составляющей скорости за счет вынужденной конвекции; *2* — профиль составляющей скорости за счет свободной конвекции; *3* — результирующее распределение скоростей

Рис. 6.8. Поперечная циркуляция при вязкостно-гравитационном режиме в горизонтальной трубе:

а — нагревание жидкости; *б* — охлаждение жидкости

ентация трубы в пространстве. Характер деформации профиля скорости в вертикальной трубе под влиянием свободной конвекции показан на рис. 6.7 При вертикальном расположении канала возможны два варианта смешанной конвекции: а) направления составляющих скорости от свободной и вынужденной конвекции совпадают (как в случае нагрева восходящего вынужденного потока или охлаждении нисходящего); б) направления свободной и вынужденной конвекции противоположны (как в случае охлаждения восходящего вынужденного потока или нагрева нисходящего).

В первом случае теплоотдача монотонно возрастает с увеличением численного значения комплекса Gr_d/Re_d, так как при сложении составляющих скорости вынужденного и свободного движения увеличивается градиент скорости у стенки (см. профиль скорости *2* на рис. 6.7, *а*, *б*). Во втором случае при увеличении комплекса Gr_d/Re_d до некоторого критического значения $(Gr_d/Re_d)_{кр} \approx 200$ теплоотдача уменьшается, так как при сложении противоположно направленных скоростей уменьшается градиент скорости у стенки (см. профиль *3* на рис. 6.7, *а*, *б*). Однако дальнейшее увеличение комплекса Gr_d/Re_d приводит к нарушению устойчивости ламинарного потока: в потоке появляются завихрения, поток турбулизируется, в результате чего теплоотдача увеличивается.

В горизонтальных трубах направления вынужденного и свободного движения взаимно перпендикулярны. В результате свободной конвекции в горизонтальных трубах возникают циркуляционные токи жидкости, направленные при нагреве жидкости вдоль стенок трубы вверх, в верхней части происходит перемешивание более нагретых пристенных слоев с более холодными слоями жидкости центральной части потока (рис. 6.8, *а*). При охлаждении жидкости в трубе наблюдается обратная картина (рис. 6.8, *б*). В результате сложения составляющих скорости, вызываемых свободной и вынужденной конвекцией, как при нагреве, так и при охлаждении траектории отдельных струй жидкости приобретают характер спиралей, что приводит к увеличению теплоотдачи за счет лучшего перемешивания жидкости (независимо от направления теплового потока).

Таким образом, наличие свободной конвекции в ламинарном потоке практически всегда приводит к увеличению теплоотдачи: при равных критериях Re_d теплоотдача в вязкостно-гравитационном режиме может быть в несколько раз больше, чем в вязкостном. Однако точное вычисление коэффициентов теплоотдачи в вязкостно-гравитационном режиме затруднительно, так как любое изменение граничных условий (ориентации канала) может существенно изменить теплоотдачу.

Для ориентировочных расчетов среднего коэффициента теплоотдачи в вязкостно-гравитационном режиме можно рекомендовать уравнение подобия, полученное М. А. Михеевым [26],

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{d,\,ж} = 0{,}15\,(\mathrm{Re}_{d,\,ж}\mathrm{Pr}_ж)^{0{,}33}\,(\mathrm{Gr}_{d,\,ж}\mathrm{Pr}_ж)^{0{,}1}\left(\frac{\mathrm{Pr}_ж}{\mathrm{Pr}_с}\right)^{0{,}25}\varepsilon_l. \quad (6.27)$$

Здесь ε_l — коэффициент, учитывающий влияние участка стабилизации; для длинных труб при $l/d \geqslant 50$ $\varepsilon_l = 1$; для коротких труб при $l/d < 50$ коэффициент $\varepsilon_l > 1$ и имеет следующие значения:

l/d	1	2	5	10	15	20	30	40
ε_l	1,90	1,70	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02

Теплоотдача при турбулентном и переходном режимах. При развитом турбулентном движении в потоке преобладают силы инерции. Влияние свободной конвекции для этого режима оказывается пренебрежимо малым.

Уравнение подобия для среднего коэффициента теплоотдачи при развитом турбулентном режиме ($\mathrm{Re} > 10^4$), полученное М. А. Михеевым [26] на основании обобщения большого числа экспериментальных данных, имеет вид

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{d,\,ж} = 0{,}021\,\mathrm{Re}_{d,\,ж}^{0{,}8}\mathrm{Pr}_ж^{0{,}43}\left(\frac{\mathrm{Pr}_ж}{\mathrm{Pr}_с}\right)^{0{,}25}\varepsilon_l. \quad (6.28)$$

Формула (6.28) справедлива в следующих пределах изменения критериев: $\mathrm{Re}_{d,\,ж} = 10^4 \div 5\cdot10^6$; $\mathrm{Pr}_ж = 0{,}6 \div 2500$. Коэффициент ε_l учитывает влияние начального участка стабилизации: для длинных труб при $l/d \geqslant 50$ $\varepsilon_l = 1$, при $l/d < 50$ $\varepsilon_l > 1$, его можно определить по табл. 6.1 (в отличие от вязкостно-гравитационного при турбулентном режиме ε_l зависит не только от l/d но и от критерия $\mathrm{Re}_{d,\,ж}$).

Для газов отношение $(\mathrm{Pr}_ж/\mathrm{Pr}_с)^{0{,}25} \approx 1$ и формула (6.28) упрощаются и приводятся к виду

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{d,\,ж} = 0{,}018\,\mathrm{Re}_{d,\,ж}^{0{,}8}\varepsilon_l. \quad (6.29)$$

Уравнения (6.28) и (6.29) справедливы не только для круглых труб, но и для каналов другой формы сечения (прямоугольной, треугольной, кольцевой), при продольном омывании пучков труб (т. е. когда в трубе большого диаметра расположено много труб меньшего диаметра и жидкость движется вдоль труб), а также при движении жидкости, не заполняющей всего сечения канала. Во всех

Таблица 6.1. **Значения ε_l при турбулентном режиме**

$\mathrm{Re}_{d,ж}$	l/d							
	1	2	5	10	15	20	30	40
$1\cdot10^4$	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03
$2\cdot10^4$	1,51	1,40	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02
$5\cdot10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02
$10\cdot10^4$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02
$100\cdot10^4$	1,14	1,11	1,08	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01

этих случаях в качестве характерного размера следует применять так называемый эквивалентный диаметр

$$d_{эк}=4f/u, \tag{6.30}$$

где f — площадь поперечного сечения потока; u — полный периметр потока (независимо от того, какая часть периметра участвует в теплообмене).

При движении жидкости в изогнутых трубах (коленах, змеевиках) на поток кроме рассмотренных выше дополнительно действует центробежная сила, которая отжимает поток к внешней стенке изогнутого канала. Это способствует лучшему перемешиванию жидкости, в результате чего коэффициент теплоотдачи увеличивается. Влияние центробежной силы на величину критерия Nu и коэффициент теплоотдачи учитывают, вводя в уравнения подобия (6.28) и (6.29) поправочный коэффициент

$$\varepsilon_R=1+1{,}77d/R, \tag{6.31}$$

где R — радиус изгиба трубы.

Для переходного режима движения в трубах (при $2300<\mathrm{Re}_{d,ж}<10^4$) характерна периодическая смена ламинарного и турбулентного режимов. При этом чем больше критерий Re, тем большая доля времени приходится на турбулентный режим. Эту долю можно оценить коэффициентом перемежаемости ω: при развитом турбулентном режиме $\omega=1$, при ламинарном $\omega=0$. Характерно, что коэффициент перемежаемости зависит не только от критерия Рейнольдса, но и от относительного положения сечения по длине трубы x/d: чем дальше данное сечение от входа, тем более вероятен в нем турбулентный режим. В интервалы времени, соответствующие существованию ламинарного режима, на теплоотдачу может значительно влиять свободная конвекция. Кроме того, переход от ламинарного к турбулентному режиму или наоборот имеет гистерезисный характер: если в процессе скорость увеличивается, то при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$ может еще сохраняться ламинарный режим, а если скорость уменьшается, то тем же численным значениям Re будет соответствовать турбулентный режим.

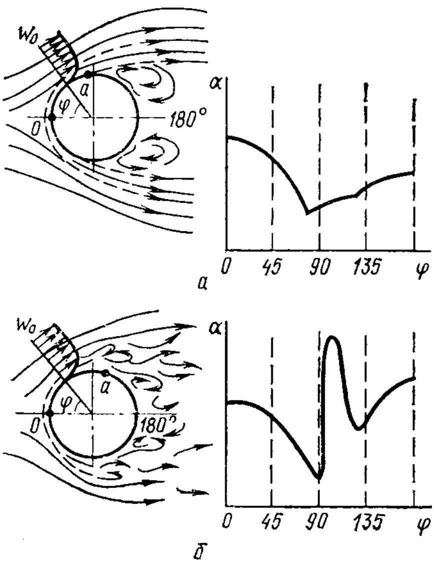


Рис. 6.9. Изменение коэффициента теплоотдачи при поперечном обтекании цилиндра при ламинарном (*а*) и турбулентном (*б*) пограничном слое. — — — — внешняя граница пограничного слоя

Поэтому в настоящее время достаточно точной обобщенной методики расчета теплоотдачи в переходном режиме не существует. Точно могут быть определены лишь пределы изменения коэффициента теплоотдачи: максимальное его значение соответствует зависимости (6.28), минимальное — зависимости (6.27). Ориентировочные расчеты осредненных во времени значений α в переходном режиме можно выполнить, используя формулу (6.28) для турбулентного режима и вводя в нее поправочный коэффициент $\varepsilon_n = f(\mathrm{Re})$ ($\varepsilon_n < 1$). Рекомендуемые в [26] значения коэффициента ε_n следующие:

$\mathrm{Re}_{d,\text{ж}}$	2300	3000	4000	5000	6000	8000	10 000
ε_n	0,40	0,57	0,72	0,81	0,88	0,96	1

При этом не учитывается возможное турбулизирующее влияние свободной конвекции, т. е. предполагается, что $\mathrm{Gr} \approx 1$.

6.3. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ВЫНУЖДЕННЫМ ПОТОКОМ ОДИНОЧНЫХ ТРУБ И ТРУБНЫХ ПУЧКОВ

Одиночные трубы. Безотрывное обтекание цилиндра набегающим потоком среды наблюдается только при $\mathrm{Re} \leqslant 5$. При бóльших значениях Re пограничный слой (см. рис. 6.9, штриховая линия), который образуется по обе стороны от лобовой точки *о*, постепенно утолщается вплоть до точки отрыва *а*. В этой точке пограничный слой оттесняется от поверхности образующимися в кормовой части вихревыми течениями. Средняя толщина пограничного слоя и положение точки *а* зависят от значения критерия Re.

При $5 < \mathrm{Re} < 200\,000$ у поверхности цилиндра образуется ламинарный пограничный слой, отрыв которого происходит при $\varphi \simeq 80 \div 84°$ (φ — угол, отсчитываемый от лобовой точки). Изменение локального коэффициента теплоотдачи в зависимости от угла φ для ламинарного пограничного слоя показано на рис. 6.9, *а*.

Максимальное значение коэффициент теплоотдачи имеет в лобовой точке, так как здесь толщина пограничного слоя минимальна. Минимальное значение коэффициента теплоотдачи в точке *а*, где

Таблица 6.2. **Коэффициент** ε_ψ

Угол атаки ψ, °	Для одиночных цилиндров ε_ψ, од	Для пучков труб ε_ψ, пуч	Угол атаки ψ, °	Для одиночных цилиндров ε_ψ, од	Для пучков труб ε_ψ, пуч
10	0,55	0,42	50	0,87	0,88
20	0,60	0,52	60	0,94	0,94
30	0,65	0,67	70	0,98	0,98
40	0,76	0,78	80	1	1
			90	1	1

пограничный слой имеет максимальную толщину; в кормовой части коэффициент теплоотдачи вновь возрастает, причем возрастание это тем больше, чем больше значение Re. Так, при $\mathrm{Re}<3\cdot10^4$ теплоотдача лобовой части цилиндра больше, чем кормовой, при $\mathrm{Re}>3\cdot10^4$ — наоборот.

При $\mathrm{Re}>200\,000$ пограничный слой успевает до отрыва перейти в турбулентный, при этом точка отрыва *a* перемещается в сторону бо́льших значений φ ($\varphi\simeq120°$). Характер изменения коэффициента теплоотдачи по окружности цилиндра при турбулентном пограничном слое показан на рис. 6.9, *б*.

Подробные исследования выполнены только для ламинарного пограничного слоя. Обобщая экспериментальные данные, А. А. Жукаускас [11] получил следующие уравнения подобия:

при $\mathrm{Re}_{d,\,ж}=5\div1000$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{d,\,ж}=0{,}5\mathrm{Re}_{d,\,ж}^{0,5}\mathrm{Pr}_ж^{0,38}\,(\mathrm{Pr}_ж/\mathrm{Pr}_c)^{0,25}\,\varepsilon_\psi; \tag{6.32}$$

при $\mathrm{Re}_{d,\,ж}=1000\div200\,000$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{d,\,ж}=0{,}25\mathrm{Re}_{d,\,ж}^{0,6}\mathrm{Pr}_ж^{0,38}\,(\mathrm{Pr}_ж/\mathrm{Pr}_c)^{0,25}\,\varepsilon_\psi. \tag{6.33}$$

В качестве определяющего размера здесь принят диаметр цилиндра, в качестве определяющей скорости — скорость, отнесенная к самому узкому сечению канала, в котором расположен цилиндр. Коэффициент ε_ψ учитывает влияние на теплообмен угла атаки, т. е. угла между направлением потока и осью трубы. Наибольший коэффициент теплоотдачи наблюдается, если угол атаки $\psi=90°$, при этом $\varepsilon_\psi=1$. При $\psi<90°$ $\varepsilon_\psi<1$ и может быть найден из табл. 6.2.

Трубные пучки. Теплообменные аппараты с одиночно расположенной трубой в поперечном потоке жидкости применяют редко, чаще аппараты компонуют из трубных пучков. Наиболее распространены в технике два основных типа трубных пучков: коридорные (рис. 6.10, *а*) и шахматные (рис. 6.10, *б*).

В трубных пучках трубы первого ряда находятся приблизительно в тех же условиях, что и одиночный цилиндр. На теплообмене второго и последующих рядов сказывается турбулизация потока, создаваемая первыми рядами, но эффект добавочной турбулизации постепенно ослабевает по мере увеличения числа предшествующих поперечных рядов. Экспериментально установлено, что, начиная с

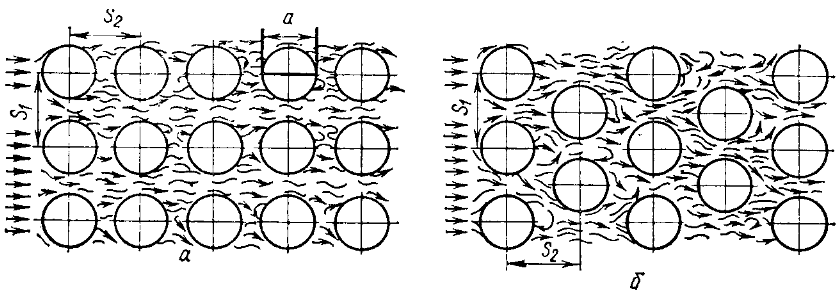


Рис. 6.10. Схемы расположения труб в коридорном (a) и шахматном ($б$) трубных пучках и характер движения жидкости в них

третьего ряда, поток практически стабилизирован, поэтому и средний коэффициент теплоотдачи для всех последующих рядов можно считать постоянной величиной.

Коэффициент теплоотдачи первого ряда составляет приблизительно 60% значения α на стабилизированном участке ($\alpha_1=0,6\ \alpha_3$) как для коридорного, так и для шахматного пучков. Для второго ряда в коридорном пучке $\alpha_2=0,9\ \alpha_3$, а при шахматном расположении труб $\alpha_2=0,7\ \alpha_3$.

На интенсивность теплообмена пучков влияет также плотность пучка, которую можно характеризовать соотношениями между поперечным шагом s_1, продольным шагом s_2 и диаметром труб (см. рис. 6.10).

Средний коэффициент теплоотдачи для третьего и последующих рядов труб может быть вычислен по следующему уравнению:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{\text{ж}}=C\mathrm{Re}_{\text{ж}}^{n}\mathrm{Pr}_{\text{ж}}^{0,33}(\mathrm{Pr}_{\text{ж}}/\mathrm{Pr}_{\text{с}})^{0,25}\,\varepsilon_s\varepsilon_\psi, \qquad (6.34)$$

где для шахматных пучков $C=0,41$; $n=0,60$; для коридорных пучков $C=0,26$; $n=0,65$. Поправочный коэффициент ε_s учитывает влияние относительных шагов: для шахматного пучка при $s_1/s_2<2$ $\varepsilon_s=(s_1/s_2)^{1/6}$; при $s_1/s_2\geqslant 2$ $\varepsilon_s=1,12$; для коридорного пучка $\varepsilon_s=(s_2/d)^{-0,15}$. Поправка на угол атаки ε_ψ для пучков может быть определена по табл. 6.2.

Формула (6.34) справедлива в интервале значений критерия $\mathrm{Re}=10^3\div10^5$. В качестве характерного размера принят диаметр труб, в качестве характерной скорости — скорость в самом узком сечении потока в пучке.

Средний для всего пучка коэффициент теплоотдачи можно вычислить по формуле

$$\alpha_{\text{ср}}=\frac{\bar\alpha_1F_1+\bar\alpha_2F_2+\ldots+\bar\alpha_nF_n}{F_1+F_2+\ldots+F_n}, \qquad (6.35)$$

где F_1, F_2, ..., F_n — площадь поверхности труб соответствующего ряда.

Если $F_1=F_2=\ldots=F_n$, то формула упрощается

$$\alpha_{\text{ср}}=\frac{\bar\alpha_1+\bar\alpha_2+(n-2)\bar\alpha_3}{n}, \qquad (6.36)$$

где n — число рядов труб в пучке.

6.4. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ СВОБОДНОЙ (ЕСТЕСТВЕННОЙ) КОНВЕКЦИИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ниже рассматривается только свободная конвекция, вызываемая гравитационным полем Земли, как наиболее изученная и наиболее часто встречающаяся. Возле поверхности нагретого тела в гравитационном поле слои жидкости, прилегающие к телу, нагреваются, становятся легче и начинают подниматься, возникают восходящие конвективные токи (возле охлажденной поверхности соответственно конвективные токи будут направлены вниз). Если объем, в котором расположено рассматриваемое тело, достаточно велик, то конвективные токи возле рассматриваемой поверхности не взаимодействуют с конвективными токами, возникающими возле других нагретых или холодных поверхностей в данном объеме, т. е. изучаемый процесс теплоотдачи может рассматриваться изолированно. Такой случай теплообмена называют *свободной конвекцией в неограниченном пространстве*. В качестве примеров такого вида теплообмена можно привести теплоотдачу от радиатора водяного отопления к воздуху в комнате или от воздуха в камере холодильника к охлаждающей батарее.

Теплоотдача при свободной конвекции вдоль вертикальной поверхности. Рассмотрим более подробно, как развивается свободная конвекция у вертикальной поверхности в неограниченном объеме и какие факторы влияют на теплоотдачу в этом случае. При нагреве движение начинается у нижней кромки вертикальной поверхности (рис. 6.11). Жидкость движется в тонком слое у поверхности. Этот слой можно назвать пограничным при свободной конвекции. В отличие от пограничного слоя при вынужденной конвекции в нем наблюдается своеобразное распределение скоростей: скорость в направлении, перпендикулярном стенке, вначале возрастает от нуля до некоторого максимального значения, а затем падает, приближаясь к нулю на внешней границе пограничного слоя, так как при свободной конвекции невозмущенная среда за пределами пограничного слоя имеет нулевую скорость вынужденного движения, а конвективные токи от свободной конвекции в ней размыты, ослаблены, и в математической постановке их скорость также может быть принята нулевой. Примерный профиль скорости в ламинарном пограничном слое при свободной конвекции представлен на рис. 6.12. Здесь же показан и характер изменения избыточной температуры в тепловом пограничном слое. При свободной конвекции толщины теплового и динамического пограничных слоев приблизительно равны.

В нижней части вертикальной поверхности (см. рис. 6.11) движение жидкости в пограничном слое ламинарно, а толщина слоя постепенно возрастает по высоте в результате вовлечения в движение новых порций жидкости. На определенной высоте характер движения изменяется; появляются завихрения, постепенно уменьшается толщина ламинарного слоя, прилегающего к стенке,— это область переходного режима. Наконец, при достаточной высоте в верхних областях движение может приобрести развитый турбулент-

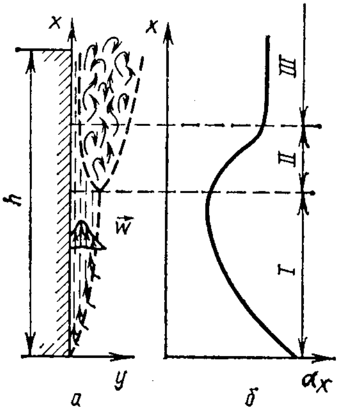


Рис. 6.11. Характер движения (*а*) и изменение коэффициента теплоотдачи (*б*) при свободной конвекции вдоль вертикальной поверхности

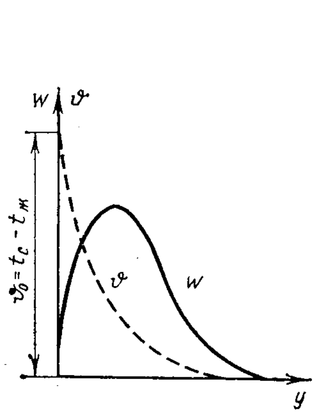


Рис. 6.12. Распределение скоростей и температур в ламинарном пограничном слое при свободной конвекции

ный характер, при этом в непосредственной близости от стенки сохраняется ламинарный подслой.

Характер движения в пограничном слое (см. рис. 6.11, *а*) и его толщина самым существенным образом сказываются на величине коэффициента теплоотдачи (см. рис. 6.11, *б*). В ламинарной зоне *I* локальный коэффициент теплоотдачи падает по мере утолщения пограничного слоя; в переходной зоне II коэффициент теплоотдачи растет, так как теплообмен интенсифицируется за счет турбулентного переноса, а толщина ламинарной части слоя уменьшается; в турбулентной зоне *III* коэффициент теплоотдачи имеет постоянное значение независимо от высоты, т. е. эта зона автомодельна относительно геометрического размера.

Задача о теплообмене при свободном ламинарном движении вдоль вертикальной поверхности в неограниченном пространстве решена теоретически (это решение можно найти, например, в монографии [41]). Из действующих сил в данном случае учитывают только подъемную силу и силу вязкости, пренебрегая силой инерции. Интенсивность теплообмена в этом случае определяется всего одним критерием Релея (Ra), который можно представить как комбинацию знакомых нам критериев Gr и Pr: Ra=Gr Pr. Критерий Рейнольдса в случае свободной конвекции не является определяющим критерием подобия, так как при свободной конвекции скорость не входит в условия однозначности (скорость среды вдали от стенки близка к нулю).

Уравнение подобия для локального коэффициента теплоотдачи в зоне *I* при ламинарной свободной конвекции ($10^3 < Ra_{x,\,ж} < 10^9$), полученное путем обобщения экспериментальных данных, имеет вид

$$Nu_{x,\,ж} = C Ra_{x,\,ж}^{0,25} (Pr_ж/Pr_c)^{0,25}, \qquad (6.37)$$

где x — координата вдоль потока, отсчитанная от точки начала обогреваемого участка; $C=0{,}55$ при $t_c=\mathrm{const}$ и $C=0{,}60$ при $q_c=\mathrm{const}$.

Средний по высоте h коэффициент теплоотдачи может быть вычислен как $\bar{\alpha}=4/3\ \alpha_{x=h}$ при $t_c=\text{const}$ или как $\bar{\alpha}=5/4\ \alpha_{x=h}$ при $q_c=\text{const}$; при этом в обоих случаях получается примерно одинаковсе значение $\bar{\alpha}$. Поэтому для вычисления среднего коэффициента теплоотдачи независимо от граничных условий применимо единое уравнение подобия

$$\overline{\text{Nu}}_{h,\text{ж}}=0{,}75\text{Ra}_{h,\text{ж}}^{0,25}(\text{Pr}_\text{ж}/\text{Pr}_\text{c})^{0,25}. \qquad (6.38)$$

Уравнение (6.38) справедливо при $10^3<\text{Ra}_{h,\text{ж}}<10^9$.

Для турбулентного пограничного слоя (зона *III*), когда $\text{Ra}_{h,\text{ж}}>6\cdot10^{10}$,

$$\overline{\text{Nu}}_{h,\text{ж}}=0{,}15\text{Ra}_{h,\text{ж}}^{1/3}(\text{Pr}_\text{ж}/\text{Pr}_\text{c})^{0,25}. \qquad (6.39)$$

Заметим, что последняя формула справедлива как для среднего коэффициента теплоотдачи, так и для местных (локальных) коэффициентов теплоотдачи, поскольку α не зависит от линейного размера — режим турбулентного режима автомоделен.

Формулы (6.37)—(6.39) справедливы при значениях чисел Прандтля от 0,7 до $3\cdot10^3$ не только для вертикальных пластин, но и для вертикальных труб. В качестве определяющего размера в критерии входят высота пластины или вертикальный размер трубы.

Для переходного режима течения (зона *II*, $10^9<\text{Ra}_{h,\text{ж}}<6\cdot10^{10}$), характеризуемого большим разбросом опытных точек, единой расчетной формулы для α не получено; в приближенных расчетах используется формула (6.39).

При теплообмене с воздухом или другим двухатомным газом указанные формулы упрощаются $[\text{Pr}_\text{ж}\approx1,\ (\text{Pr}_\text{ж}/\text{Pr}_\text{c})^{0,25}\approx1]$: для ламинарного режима

$$\overline{\text{Nu}}_{h,\text{ж}}=0{,}7\text{Gr}_{h,\text{ж}}^{0,25}; \qquad (6.40)$$

для турбулентного режима

$$\overline{\text{Nu}}_{h,\text{ж}}=0{,}132\text{Gr}_{h,\text{ж}}^{0,33}. \qquad (6.41)$$

Теплоотдача при свободной конвекции около наклонных и горизонтальных пластин и труб. Отклонение поверхности теплообмена от вертикали может быть учтено введением в формулу (6.38) поправочного коэффициента [33] $(1+\cos\varphi)/2$, где φ — угол между нижней теплоотдающей поверхностью пластины и вертикалью: при $\varphi=0$ — пластина вертикальна; при $\varphi=90°$ — горизонтальна (теплоотдающая поверхность обращена вниз). Указанная поправка применима при $\text{Ra}_l<10^9$; характерный размер l — длина наклонной поверхности (для горизонтальной пластины — меньший размер).

Надежных данных для наклонных пластин, обращенных теплоотдающей поверхностью вверх, нет.

Для горизонтальных пластин, близких по форме к квадрату и обращенных теплоотдающей поверхностью вверх, могут быть использованы следующие зависимости:

при $\text{Ra}_l=2\cdot10^4\div8\cdot10^6$ $\qquad \overline{\text{Nu}}_l=0{,}54\text{Ra}_l^{0,25}$,

при $\text{Ra}_l=8\cdot10^6\div10^{14}$ $\qquad \overline{\text{Nu}}_l=0{,}15\text{Ra}_l^{0,33}$.

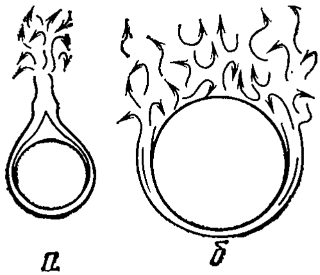


Рис. 6.13. Свободная конвекция у горизонтальных труб малого (*а*) и большого (*б*) диаметров

В приведенных зависимостях в качестве определяющей температуры принята $t_{ср}=0,5(t_с+t_ж)$.

Из изложенного следует, что теплоотдача от пластины, обращенной теплоотдающей поверхностью вниз, ухудшается, так как при этом затруднен отвод нагреваемой (более легкой) жидкости за пределы поверхности. Теплоотдача же от горизонтальной пластины, обращенной греющей поверхностью вверх, при ламинарном режиме несколько меньше, а при турбулентном — практически такая же, как от вертикальной пластины. Уменьшение теплоотдачи при ламинарном режиме объясняется существованием у краев пластины восходящих токов нагретой жидкости, которые изолируют центральные части пластины и затрудняют поступление к ней свежих порций жидкости из окружающей среды.

У горизонтально расположенных труб свободная конвекция развивается так, как показано на рис. 6.13: при малом диаметре у поверхности трубы существует только ламинарный пограничный слой (рис. 6.13, *а*), при большом диаметре в верхней части может наблюдаться турбулентное движение (рис. 6.13, *б*).

Для ламинарного движения возле горизонтальной трубы при $10^3<\mathrm{Ra}<10^8$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{d,\,ж}=0{,}50\mathrm{Ra}_{d,\,ж}^{0,25}(\mathrm{Pr}_ж/\mathrm{Pr}_с)^{0,25}. \qquad (6.42)$$

При турбулентном движении возле горизонтальной трубы приближенно можно использовать уравнение (6.39), в котором в качестве определяющего размера принимают половину длины окружности. Возле поверхности очень тонких цилиндров (проволок) (при $\mathrm{Ra}<1$) движения вообще не возникает даже при значительных разностях температур между поверхностью и окружающей средой; теплоотдача происходит исключительно путем теплопроводности через неподвижную пленку разогретой жидкости, поэтому этот режим получил название пленочного. При пленочном режиме $\mathrm{Nu}=0{,}5=\mathrm{const}$. В качестве определяющего размера здесь принят диаметр, в качестве определяющей температуры — средняя температура между температурами поверхности и жидкости.

В переходном режиме от пленочного к ламинарному для горизонтальных труб ($1<\mathrm{Ra}<500$) коэффициент теплоотдачи приближенно можно вычислить по формуле

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{ср\,d}=1{,}18\mathrm{Ra}_{ср\,d}^{1/8}, \qquad (6.43)$$

где характерный размер и определяющая температура те же, что и при пленочном режиме.

6.5. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Этот вид теплообмена также называют передачей теплоты через жидкостные прослойки. Наиболее характерным примером свободной конвекции в ограниченном пространстве является передача теплоты через воздушную прослойку между стеклами двойных оконных рам. В зимнее время у внутреннего нагретого стекла возникает восходящий поток, у наружного холодного — нисходящий.

Если расстояние между стенками в ограниченном пространстве достаточно велико и восходящий и нисходящий потоки не взаимодействуют, а между ними существует зона неподвижной среды, то этот случай (рис. 6.14, *а*), по существу, соответствует свободной конвекции в неограниченном пространстве: теплоотдачу у нагретой и у холодной стенок можно рассчитывать самостоятельно.

При уменьшении расстояния δ восходящий и нисходящий потоки среды начинают взаимодействовать друг с другом, затормаживаться, внутри прослойки образуется ряд замкнутых циркуляционных контуров (рис. 6.14, *б*). Раздельное определение коэффициентов теплоотдачи возле нагретой и холодной стенок становится невозможным.

В предельном случае при некотором малом расстоянии между нагретой и холодной поверхностями восходящий и нисходящий токи полностью затормаживают друг друга, среда в прослойке оказывается неподвижной, и передача теплоты через нее происходит только путем теплопроводности (рис. 6.14, *в*). Тепловой поток в последнем случае можно рассчитать по формуле теплопроводности для плоской безграничной стенки

$$Q = \lambda/\delta\,(t_{c1} - t_{c2})\,F, \tag{6.44}$$

где λ — коэффициент теплопроводности среды; δ — толщина прослойки; t_{c1} и t_{c2} — температуры нагретой и холодной поверхностей.

Эта форма расчета может быть принята и для бо́льших значений δ, когда некоторая часть теплоты передается помимо теплопроводности также и конвективным путем в результате циркуляции среды в прослойке, при условии внесения в расчетную формулу поправки, учитывающей конвективный перенос.

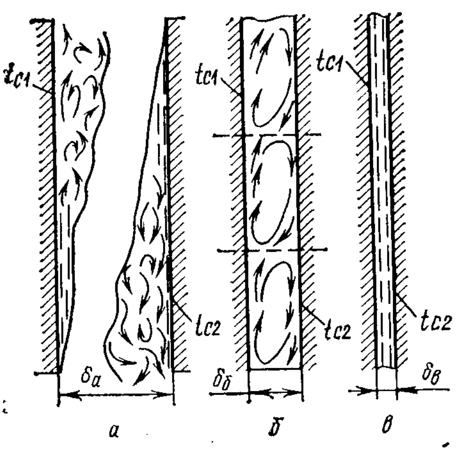


Рис. 6.14. Свободная конвекция в вертикальных жидкостных и газовых прослойках разной толщины ($\delta_а > \delta_б > \delta_в$)

В расчетной практике принято, заменяя действительный сложный процесс переноса теплоты через газовые и жидко-

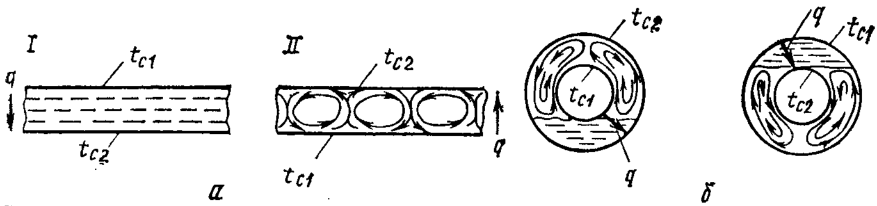


Рис. 6.15. Характер свободной конвекции в горизонтальных жидкостных и газовых прослойках ($t_{c1} > t_{c2}$):

а — плоская прослойка; *б* — кольцевая прослойка

стные прослойки эквивалентным процессом теплопроводности, вводить в формулу (6.44) вместо действительного коэффициента теплопроводности среды λ так называемый эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{эк}$, т. е. считать

$$Q = \lambda_{эк}/\delta\,(t_{c1} - t_{c2})\,F. \qquad (6.45)$$

При наличии конвективного переноса $\lambda_{эк}/\lambda = \varepsilon_к > 1$,

где $\varepsilon_к$ — коэффициент конвекции, являющийся функцией комплекса Gr Pr=Ra; т. е. $\varepsilon_к = f(\mathrm{Ra})$.

Вид последней функции установлен экспериментально. Для $10^3 < \mathrm{Ra} < 10^{10}$

$$\varepsilon_к \cong 0{,}18\mathrm{Ra}_{ср\,\delta}^{0{,}25}. \qquad (6.46)$$

Здесь $\mathrm{Ra}_{ср\,\delta} = g\dfrac{\delta^3\beta\,\Delta t}{\nu a}$; δ — толщина прослойки; $\Delta t = t_{c1} - t_{c2}$; в качестве определяющей температуры принята $t_{ср} = 0{,}5(t_{c1} + t_{c2})$.

Опытом установлено, что при $\mathrm{Ra} \leqslant 10^3$ коэффициент конвекции $\varepsilon_к = 1$, следовательно, $\lambda_{эк} = \lambda$, теплота передается через прослойку только теплопроводностью и может быть рассчитана по (6.44).

Формулы (6.44) и (6.45) применимы не только для вертикальных плоских щелей, но также и для горизонтальных плоских, цилиндрических и сферических прослоек. При этом нужно иметь в виду, что в каждом отдельном случае процесс отличается определенным своеобразием.

Так, в горизонтальных плоских щелях перенос теплоты зависит от взаимного расположения теплой и холодной поверхностей: при расположении теплой поверхности вверху конвективные потоки практически не возникают (рис. 6.15, *а*, случай *I*) и, следовательно, не нужно учитывать коэффициент конвекции. При расположении теплой поверхности внизу, наоборот, создается хорошая циркуляция (см. рис. 6.15, *а*, случай *II*).

В горизонтальных цилиндрических прослойках (рис. 6.15, *б*) движение развивается лишь в зоне, лежащей выше нижней образующей теплой поверхности при нагреве среды и выше верхней образующей, отводящей теплоту поверхности при охлаждении среды. Аналогичен характер теплообмена и в сферических прослойках.

Очевидно, что в этих случаях следует использовать формулы (6.44) и (6.45) совместно, разбивая поверхность на отдельные участки, различающиеся механизмом переноса теплоты.

Глава 7. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ

7.1. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРОЦЕССЕ КИПЕНИЯ

Кипением называют процесс парообразования в жидкости, нагретой выше температуры насыщения, характеризуемый возникновением новых свободных поверхностей раздела жидкой и паровой фаз.

Для возникновения кипения необходимы перегрев жидкости относительно температуры насыщения и наличие центров парообразования. Центрами парообразования называют места возникновения зародышей паровой фазы на поверхности нагрева или в объеме жидкости. Зародыш — это область, занимаемая паровой фазой в момент ее возникновения внутри жидкой фазы.

В процессе превращения жидкости в пар при кипении поглощается теплота парообразования, поэтому для осуществления кипения необходим подвод теплоты к кипящей жидкости.

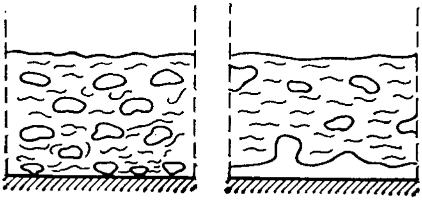
Кипение может происходить в объеме жидкости, перегретой выше температуры насыщения $t_н$ (объемное кипение), и на поверхности твердого тела, к которой подводится извне теплота. В первом случае паровые пузырьки могут возникать в любом месте объема жидкости, если температура последней существенно выше $t_н$. Такой процесс можно осуществить либо при наличии внутренних источников теплоты в жидкости (например, в энергетических реакторах), либо при резком понижении давления над жидкостью до $p<p_н$ (тогда он называется кавитацией).

Процессы кипения встречаются в различного рода устройствах, применяемых в теплоэнергетике, атомной энергетике, холодильной и криогенной технике, химической, пищевой и других отраслях промышленности.

В большинстве парогенераторов теплоэнергетических установок и во всех испарителях холодильных и криогенных машин в настоящее время осуществляется процесс кипения на поверхности труб, стенок и т. п. Поэтому в дальнейшем рассматривается именно этот вид кипения.

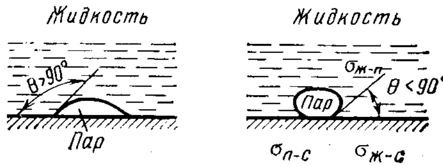
Плотность теплового потока, отводимого от греющих источников при кипении жидкости, может быть весьма высокой ($q=10^5 \div 10^7$ Вт/м^2) при умеренных температурных напорах, и этот процесс часто используют для отвода больших количеств теплоты относительно малых по площади поверхностей теплообмена. Высокая интенсивность теплоотдачи при кипении связана с турбулизацией пристенного слоя жидкости паровыми пузырьками и, что особенно важно, с массообменом в кипящей жидкости — отводом теплоты парообразования и переносом ее вместе с паровой фазой в объем жидкости.

При кипении на греющем источнике, погруженном в жидкость, она возле поверхности нагрева перегрета, а в остальном объеме температура жидкости равна температуре насыщения или несколько выше нее. Такое кипение называют кипением в насыщенной жидкости.



а б

Рис. 7.1. Основные режимы кипения: *а* — пузырьковое; *б* — пленочное



а б

Рис. 7.2. Форма паровых пузырей для жидкостей, не смачивающих (*а*) и смачивающих (*б*) твердую поверхность нагрева

При высоких плотностях теплового потока кипение может происходить и тогда, когда температура основной массы жидкости ниже $t_н$, т. е. в недогретой (ненасыщенной) жидкости. В этом случае парообразование осуществляется только в пристенном слое. Пар, образующийся в виде пузырьков, выходя из этого слоя, частично или полностью конденсируется. Такой процесс называют кипением с недогревом.

В зависимости от конструкции аппарата кипение может происходить в большом объеме жидкости либо внутри труб и каналов.

В зависимости от условий различают также кипение при свободном и вынужденном движении жидкости.

Из рассмотренных выше видов кипения в холодильной и криогенной технике наиболее часто встречаются: кипение на твердой поверхности в большом объеме при свободном движении жидкости, кипение внутри труб при свободном и вынужденном движении жидкости. Поэтому в дальнейшем процессы кипения будем изучать главным образом применительно к этим случаям.

Опытным путем установлено наличие двух основных режимов кипения: пузырькового и пленочного (рис. 7.1).

При пузырьковом кипении пар образуется на поверхности нагрева в виде отдельных пузырьков, периодически возникающих, увеличивающихся в объеме и уходящих через массу жидкости в паровое пространство над ней. При этом основная часть поверхности нагрева омывается жидкостью, а перенос теплоты происходит главным образом в прилегающем к поверхности пограничном слое, который интенсивно перемешивается и разрушается паровыми пузырьками.

При пленочном кипении на поверхности нагрева образуется паровой слой (пленка пара), отделяющий ее от массы жидкости. От этого слоя со стороны, обращенной к жидкости, время от времени отрываются крупные паровые объемы, которые всплывают в жидкости. Подвод теплоты от греющей поверхности к жидкости происходит через паровой слой в основном путем теплопроводности (при очень высоких q и путем излучения). Теплопроводность пара в 20—40 раз меньше, чем у жидкости. Вследствие этого интенсивность теплообмена при устойчивом пленочном кипении в десятки раз меньше, чем при пузырьковом.

Существование того или иного режима кипения зависит от плотности теплового потока q или от температурного напора Δt, физических свойств жидкости, свойств поверхности нагрева, давления $p_н$, а также от гидродинамических характеристик потока в целом.

Под **температурным напором** при кипении обычно понимают разность между температурой поверхности нагрева (стенки) $t_с$ и температурой насыщения $t_н$, т. е. $\Delta t = t_с - t_н$. Очевидно, что плотность теплового потока от греющей поверхности к кипящей жидкости, температурный напор и коэффициент теплоотдачи связаны между собой законом Ньютона — Рихмана.

Среди свойств жидкости, оказывающих влияние на теплоотдачу, особое значение имеет смачиваемость поверхности нагрева жидкостью, которая определяет условия протекания процесса кипения. Дело в том, что доля поверхности непосредственного соприкосновения парового пузырька с твердой поверхностью зависит от краевого угла смачивания θ. Для жидкостей, не смачивающих поверхность, $\theta > 90°$ (рис. 7.2, *а*), для жидкостей, смачивающих поверхность, $\theta < 90°$ (рис. 7.2, *б*). В первом случае в течение всего процесса парообразования поверхность нагревателя непосредственно контактирует с паровой фазой, во втором — с жидкой. Естественно, что условия протекания процесса и интенсивность теплоотдачи в этих случаях разная. По существу, термин «пузырьковое кипение» следует относить к жидкостям, смачивающим твердую поверхность. По отношению к большинству материалов, из которых изготовляют теплообменные поверхности, смачивающими жидкостями являются вода, холодильные агенты, криогенные жидкости и др., несмачивающей — ртуть. Дальнейшее изложение относится к жидкостям, смачивающим поверхность теплообмена.

Развитие и существование того или иного режима кипения в большой степени зависит от способа обогрева поверхности. Подвод теплоты к греющей поверхности может осуществляться либо электронагревом, либо с помощью какой-либо греющей среды (конденсирующегося пара, горячей жидкости и т. д.). В первом случае q зависит только от мощности электронагревателя (граничные условия II рода), а Δt и α определяются значением q и условиями кипения; во втором случае температура поверхности $t_с$ является заданной (граничные условия I рода), а q и α зависят от Δt и условий кипения.

7.2. РЕЖИМЫ КИПЕНИЯ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ. КРИВАЯ КИПЕНИЯ

Наиболее простым и вместе с тем весьма важным для установления некоторых общих закономерностей является кипение в большом объеме при свободном движении жидкости. В этом случае гидродинамические условия процесса определяются собственно парообразованием, а образующийся пар свободно удаляется от поверхности нагрева.

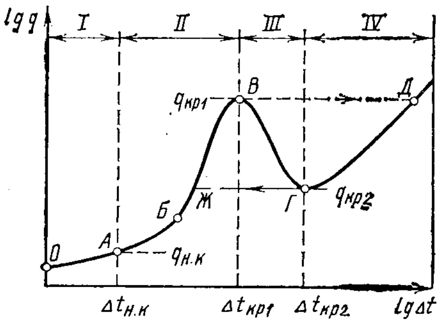


Рис. 7.3. Кривая кипения жидкости: *I* — свободная конвекция; *II* — пузырьковое кипение (*АБ* — неразвитое; *БВ* — развитое); *III* — переходный режим; *IV* — пленочное кипение

Рассмотрим процесс теплообмена между погруженным в жидкость плоским нагревателем и жидкостью при постоянном давлении p и соответствующей ему температуре насыщения $t_н$. Развитие и смена различных режимов кипения зависят от условий подвода теплоты.

Пусть в нашем случае обогрев производится конденсирующимся паром, т. е. в качестве независимой переменной задана температура стенки $t_с$. Изменяя температуру конденсации греющего пара, мы будем изменять величину температурного напора Δt, определяющего интенсивность процесса парообразования, а следовательно, и значения плотности теплового потока, отводимого от источника теплоты, а также коэффициента теплоотдачи.

Зависимость между плотностью теплового потока и температурным напором при кипении находят на основании опытных данных. Наиболее наглядно изображение такой зависимости в логарифмических координатах. Соответствующий график называют к р и в о й к и п е н и я. На рис. 7.3 схематически изображена типичная для всех жидкостей кривая кипения при $p=\text{const}$ для случая обогрева стенки конденсирующимся паром.

При малых температурных напорах Δt (участок *ОА*) имеет место чисто конвективный теплообмен между греющей поверхностью и жидкостью. Перегретая у нагревателя жидкость поднимается вверх к границе раздела фаз, на поверхности которой происходит испарение. Паровые пузырьки отсутствуют. При величине температурного напора, соответствующей точке *А*, начинается образование пузырьков пара. Этот температурный напор и плотность теплового потока, характеризующие начало кипения, обозначим $\Delta t_{н.\,к}$ и $q_{н.\,к}$. Однако при значениях Δt на участке кривой *АБ* число паровых пузырьков еще невелико и кипение носит неразвитый характер, перенос теплоты происходит главным образом в результате конвективного теплообмена и лишь в малой степени за счет парообразования.

При дальнейшем увеличении Δt число паровых пузырьков на греющей поверхности возрастает, увеличивается перегрев всей жидкости, что обеспечивает некоторый дополнительный подвод теплоты к пузырькам при всплытии их. Это — режим развитого кипения, при котором основное количество теплоты отводится от поверхности нагрева в результате парообразования (участок *БВ* на кривой кипения).

На всем протяжении изменения температурного напора от 0 до $\Delta t_{кр1}$ плотность теплового потока q увеличивается с ростом Δt, но наибольшая степень влияния последнего соответствует развитому кипению ($q \sim \Delta t^{(3-4)}$). При $\Delta t = \Delta t_{\text{кр}1}$ (точка B) плотность теплового потока достигает максимально возможной при пузырьковом кипении величины, равной $q_{\text{кр}1}$. Величину $q_{\text{кр}1}$ называют первой критической плотностью теплового потока. При дальнейшем увеличении Δt плотность теплового потока уменьшается (участок $ВГ$ кривой кипения). На поверхности нагрева образуются области, покрытые паровой пленкой. Этот режим называется переходным (от пузырькового к пленочному), для него характерна приближенная зависимость $q \sim \Delta t^{-1}$. Теплоотдача с ростом Δt в переходном режиме ухудшается, и при $\Delta t = \Delta t_{\text{кр}2}$ (точка $Г$) вся греющая поверхность покрывается паровой пленкой, при этом плотность отводимого потока $q = q_{\text{кр}2}$ становится минимальной. Величину $q_{\text{кр}2}$, соответствующую $\Delta t_{\text{кр}2}$, называют второй критической плотностью теплового потока. При $q > q_{\text{кр}2}$ начинается устойчивое пленочное кипение. Таким образом, $q_{\text{кр}2}$ — это минимально возможная плотность теплового потока для пленочного режима кипения.

При дальнейшем повышении $\Delta t > \Delta t_{\text{кр}2}$ коэффициент теплоотдачи остается постоянным либо несколько уменьшается, а при высоких Δt увеличивается в результате переноса теплоты через паровую пленку путем излучения. Это — режим устойчивого пленочного кипения (участок $ГД$ на кривой кипения). При этом режиме плотность теплового потока возрастает с ростом температурного напора, причем $q \sim \Delta t$.

Если в качестве независимой переменной использовать q (например, при подводе теплоты от электронагревателя), то на участке свободной конвекции и пузырькового кипения процесс развивается так же, как и при нагреве конденсирующимся паром. Кипение возникает при $q = q_{\text{н. к}}$ (точка A), существуют режимы неразвитого ($АБ$) и развитого ($БВ$) кипения. Но как только плотность создаваемого на поверхности теплового потока превысит $q_{\text{кр}1}$, пузырьковый режим сразу сменяется пленочным (линия $ВД$ на рис. 7.3). При этом интенсивность теплоотдачи резко падает, а температура греющей поверхности возрастает. Последнее обстоятельство может привести к разрушению греющей поверхности (например, стенки трубы), и поэтому знание величин $q_{\text{кр}1}$ и $\Delta t_{\text{кр}1}$ необходимо для правильного выбора температурных режимов работы аппаратов. Скачкообразный переход от пузырькового кипения к пленочному (линия $ВД$) называется первым кризисом кипения. Если при достигнутом стабильном состоянии пленочного кипения начать уменьшать q, то пленочный режим сохранится вплоть до $q = q_{\text{кр}2}$ (точка $Г$). В точке $Г$ наблюдается скачкообразный переход от пленочного кипения к пузырьковому (линия $ГЖ$). Этот переход также имеет кризисный характер и называется вторым кризисом кипения. Стабильного переходного режима при независимом задании q не существует.

Различие в значениях $q_{\text{кр}1}$ и $q_{\text{кр}2}$ обусловлено наличием гистерезиса в тепловых и гидродинамических явлениях при переходе от одного режима кипения к другому [21].

Значения $q_{кр1}$ и $\Delta t_{кр1}$ зависят от свойств жидкости, формы, ориентации и свойств поверхности нагрева, а также от давления (температуры) насыщения. С увеличением давления $q_{кр1}$ возрастает, примерно при $p/p_{кр}=0{,}35$ достигает максимума, а затем падает.

Значения $q_{кр1}$ могут быть рассчитаны на основе гидродинамической теории кризисов, предложенный Кутателадзе, согласно которой

$$q_{кр1}=Kr\sqrt{\rho_п}\sqrt[4]{\sigma g(\rho_ж-\rho_п)},$$

где K — коэффициент.

Формула хорошо подтверждается экспериментами с неметаллическими жидкостями при $K=0{,}13\div0{,}16$ [21].

При атмосферном давлении опытные значения $q_{кр1}$ примерно составляют для воды $1{,}25\cdot10^6$ Вт/м²; для аммиака $0{,}7\cdot10^6$; для R22 $0{,}44\cdot10^6$; для R12 $0{,}36\cdot10^6$ Вт/м².

Для выбора правильного режима работы парогенераторов, выпарных и других энергетических аппаратов необходимо знать $\Delta t_{кр1}$ и $q_{кр1}$. Действительно, увеличение температуры греющей поверхности выше определенного предела приводит к резкому снижению производительности аппарата, а увеличение тепловой нагрузки выше $q_{кр1}$ в аппаратах, работающих при заданных тепловых потоках,— к резкому повышению температуры и разрушению металлической стенки аппарата. Аппараты холодильных и криогенных установок, пищевой, молочной и мясной промышленности работают при температурных напорах и нагрузках, значительно меньших $\Delta t_{кр}$ и $q_{кр}$. Поэтому дальше рассматривается только область пузырькового кипения.

7.3. МЕХАНИЗМ ПАРООБРАЗОВАНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ

Парообразование. На основании визуальных наблюдений, данных фотографирования, скоростной киносъемки и измерений, выполненных различными исследователями, можно представить физическую картину пузырькового кипения следующим образом.

При подводе к поверхности нагрева определенного количества теплоты или при достижении ею определенной температуры в отдельных местах поверхности возникают пузырьки пара, которые очень быстро (за сотые и тысячные доли секунды) увеличиваются в размерах, отрываются от поверхности и через жидкость уходят в паровое пространство над нею. Объем паровых пузырьков во время пребывания на поверхности нагрева увеличивается в 10^5—10^9 раз. Слой жидкости, прилегающей к поверхности нагрева (пограничный слой), оказывается при этом перегретым по сравнению с остальной жидкостью и температурой насыщения. Чрезвычайно быстрый рост и отрыв пузырьков вызывают турбулентные пульсации масс жидкости в пограничном слое. Характер распределения температур по высоте сосуда, ко дну которого подводится теплота, представлен на рис. 7.4.

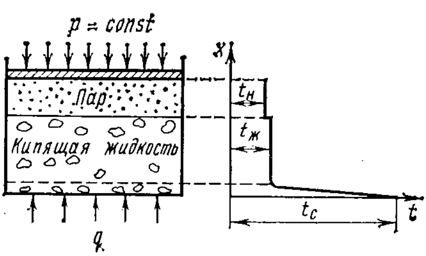


Рис. 7.4. Распределение температур в кипящей жидкости

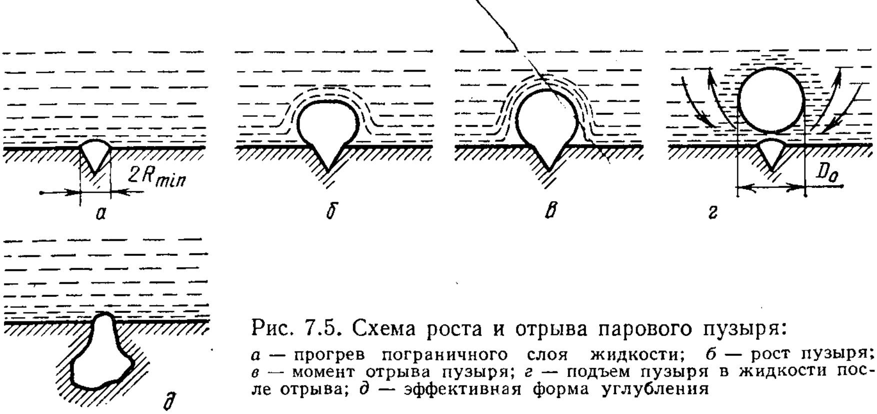


Рис. 7.5. Схема роста и отрыва парового пузыря:

а — прогрев пограничного слоя жидкости; *б* — рост пузыря; *в* — момент отрыва пузыря; *г* — подъем пузыря в жидкости после отрыва; *д* — эффективная форма углубления

Основное изменение температуры от $t_с$ до $t_н$ происходит в тонком пристенном пограничном слое, остальная масса жидкости имеет примерно одинаковую температуру $t_ж$, которая несколько выше температуры насыщения $t_н$, соответствующей давлению p.

При атмосферном давлении и $q=22400$ Вт/м^2 для воды $t_с=109°$C; $t_ж=100{,}4°$C; $t_н \simeq 100°$C, толщина пограничного слоя $\delta \approx 2$ мм, для R22 $t_с=-30°$C; $t_ж=-(39{,}9 \div 39{,}8)°$C; $t_н=-40°$C; $\delta \approx 0{,}5$ мм. С увеличением давления температурный напор, необходимый для переноса данного количества теплоты, так же как и толщина пограничного слоя, уменьшается.

При увеличении объема пузырька на поверхности нагревателя перегретый слой жидкости перемещается вместе с поверхностью раздела пузырька. Отрывающиеся пузырьки увлекают с собой из пограничного слоя некоторое количество перегретой жидкости, место которой занимает жидкость, менее нагретая, подтекающая из объема. Последняя в течение некоторого времени прогревается за счет подвода теплоты от греющей поверхности, и затем процесс роста и отрыва повторяется.

Схема роста и отрыва парового пузырька, соответствующая описанной, показана на рис. 7.5.

После отрыва пузырьки всплывают и уходят в паровое пространство над жидкостью. При подъеме рост пузырька, т. е. испарение жидкости в него, продолжается. Однако изменение объема пузырьков в слабо перегретой жидкости на несколько порядков меньше, чем у поверхности нагрева.

Рассмотренная схема справедлива для пузырькового кипения в области изолированных пузырьков, характерной для не слишком высоких плотностей теплового потока и давлений. В этой области пузырьки, образующиеся одновременно в разных местах поверхности нагрева и в разное время на одном и том же месте, почти не связаны и не взаимодействуют (либо слабо взаимодействуют) друг с другом.

В период отрыва одного пузырька до возникновения следующего (время ожидания) происходит прогрев жидкости у поверхности нагрева за счет теплоты, подводимой путем теплопроводности от более горячей стенки. Это процесс нестационарный.

Существует две гипотезы о механизме подвода теплоты к пузырьку в период роста. В одной из них (М. Плессет и С. Цвик, Л. Скривен и др.) предполагается, что необходимая для испарения теплота подводится от окружающей пузырек перегретой жидкости, обладающей запасом энтальпии $\Delta i = c_ж \rho_ж \Delta t$ путем нестационарной теплопроводности. Во второй (Д. А. Лабунцов) исходят из предположения, что при развитом пузырьковом кипении основная часть теплоты подводится от поверхности нагрева к границе раздела фаз у основания пузырька путем стационарной теплопроводности через микрослой жидкости.

В общем случае можно считать, что в период роста подвод теплоты, идущей на испарение, осуществляется двумя путями: стационарной теплопроводностью через микрослой жидкости у основания пузырька и нестационарной теплопроводностью от перегретой жидкости, окружающей пузырек.

Теплообмен. Существуют различные взгляды на причины, обусловливающие высокую интенсивность теплообмена при кипении, основанные на различных представлениях о механизме этого процесса и допущениях, принятых их авторами. Рассмотрим два преобладающих в настоящее время направления в этом вопросе.

Большая группа исследователей, в том числе М. Якоб, С. С. Кутателадзе, Г. Н. Кружилин и др., считают основной причиной интенсивного теплообмена при кипении турбулизацию и разрушение пограничного слоя образующимися на поверхности и периодически отрывающимися от нее паровыми пузырьками. При этом последние уносят с собой слои перегретой жидкости, место которой занимают холодные, что также интенсифицирует теплообмен. На основании такой гипотетической модели получен ряд обобщенных уравнений, описывающих теплообмен при кипении, в том числе уравнение С. С. Кутателадзе и уравнение Г. Н. Кружилина. Появившиеся в последние годы экспериментальные факты об уменьшении температуры стенки нагревателя в период роста парового пузырька и увеличении этой температуры после его отрыва и другие экспериментальные данные в известной степени противоречат первой модели или во всяком случае требуют ее уточнения.

Второй подход к объяснению механизма теплообмена при кипении основывается на ряде прецизионных измерений, показавших, что на поверхности нагрева под пузырьком в течение всего процесса парообразования остается тонкая пленка — микрослой жидкости (работы Ф. Мура и Р. Меслера, М. Купера и А. Лойда и др.). Высокая интенсивность теплоотдачи согласно этой модели объясняется интенсивным испарением микрослоя в период роста пузырька за счет отвода теплоты от стенки. Вследствие этого температура стенки при росте пузырька понижается, а после отрыва, когда его место занимает перегретая жидкость, повышается. Такая модель механизма теплообмена была применена Д. А. Лабунцовым для приближенного теоретического описания процесса и расчета коэффициента теплоотдачи. При этом предполагалось, что при развитом пузырьковом кипении объемное паросодержание высоко и интенсивность теплообмена определяется термическим сопротивлением теплопроводности тонкой жидкостной прослойки, остающейся на поверхности нагрева в течение всего процесса.

Таким образом, в настоящее время не существует точных установившихся представлений о механизме теплообмена при кипении, а вследствие этого нет и строгого теоретического описания этого процесса. Вместе с тем представляется возможным применение обеих рассмотренных выше моделей, так как правомерность каждой из них зависит от условий протекания процесса (температурного напора, давления, свойств жидкости, поверхности нагрева и др.). При малых Δt и низких p (условия работы холодильных и криогенных установок), когда кипение имеет слабо развитый характер, правильнее использовать первую модель, а при высоких q и p — вторую.

Независимо от принятого механизма теплообмена плотность теплового потока, передаваемого поверхностью нагревателя кипящей среде ($q_с$), можно представить в виде приближенного балансового соотношения

$$q_с = q_п + q_ж,$$

где $q_п$ и $q_ж$ — плотности теплового потока, отводимого от поверхности уходящими паровыми пузырьками и перегретой жидкостью.

Плотность теплового потока, отводимого паровой фазой, можно выразить через теплоту, пошедшую на превращение жидкости в пар, заключенный в z (1/м^2) паровых пузырьков, имеющих средний диаметр D_0 (м) при средней частоте отрыва их u (1/с):

$$q_п = V_п \rho_п r = \frac{\pi D_0^3}{6} z u \rho_п r,$$

где $V_п=(\pi D_0^3/6)\,zu$ — величина, численно равная объему паровых пузырьков, образующихся на поверхности площадью 1 м² в единицу времени, м³/(м²·с); $V_п$ — $\rho_п$ — величина, численно равная массе пара, образующегося на поверхности 1 м² в единицу времени, кг/(м²·с).

Плотность теплового потока, уносимого перегретой жидкостью, уходящей от поверхности нагрева вместе с паровыми пузырьками, можно выразить через теплоту, расходуемую на подогрев пограничного слоя от $t_н$ до средней температуры 0,5 $(t_н+t_с)$,

$$q_ж=V_ж\rho_ж c_ж\,[0{,}5\,(t_н+t_с)-t_н]=V_ж\rho_ж c_ж\,(t_с-t_н)/2.$$

Здесь $V_ж$ — величина, численно равная объему жидкой фазы, увлекаемой паром с поверхности площадью 1 м² в единицу времени; $c_ж$ и $\rho_ж$ — теплоемкость и плотность жидкой фазы.

Естественно предположить, что $V_ж=CV_п$, где C — коэффициент пропорциональности.

Если пренебречь теплотой, отводимой конвективным теплообменом от участков поверхности, где отсутствуют паровые пузырьки, то

$$q_с=\frac{\pi D_0^3}{6}\,zu\,[\rho_п r+0{,}5Cc_ж\rho_ж\,(t_с-t_н)].$$

Из последнего выражения следует, что $q_с$, а следовательно, и $\alpha=q_с/\Delta t$ пропорциональны числу действующих центров парообразования z и объемной скорости парообразования D_0^3u (м³/с). Величины z, D_0, u называют внутренними характеристиками (или микрохарактеристиками) процесса парообразования.

7.4. ВНУТРЕННИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА ПАРООБРАЗОВАНИЯ

В соответствии с рассмотренными выше физическими представлениями интенсивность теплообмена при кипении зависит от условий возникновения, роста и отрыва паровых пузырьков. Величинами, характеризующими эти процессы, являются: число центров парообразования z, скорость роста пузырька $w=dR/d\tau$ (здесь R — радиус его в момент времени τ), частота отрыва u, диаметр пузырька в момент отрыва D_0.

Возникновение паровых пузырьков. Из общих физических предпосылок вытекает, что центрами парообразования могут служить: 1) образованные термическими флуктуациями группы молекул жидкости, энергия которых соответствует энергии паровой фазы; 2) пузырьки пара или газа, адсорбированные твердой поверхностью или находящиеся в объеме жидкости; 3) мельчайшие твердые частицы, а также неоднородности и включения в материале теплообменной поверхности, уменьшающие молекулярное сцепление ее с жидкостью.

Известно, что жидкость, обедненную центрами парообразования, можно перегреть на десятки градусов выше $t_н$ без того, чтобы в ней началось кипение. Однако при введении в такую жидкость пузырьков воздуха, песчинок или других частичек твердого тела жидкость мгновенно вскипает, а ее температура снижается до нормального уровня. Это связано с большими энергетическими затратами, необходимыми для образования межфазной поверхности (жидкость — пар) в гомогенной среде (чистой жидкости). В гетерогенной среде, где уже присутствуют поверхности раздела фаз, например газ — жидкость или твердое тело — жидкость, расход энергии на возникновение парообразования существенно уменьшается.

В настоящее время большинство исследователей склоняются к тому, что в случае кипения на твердой поверхности центрами парообразования служат микроуглубления на поверхности нагрева: впадины, трещины, канавки, заполненные паром или газом. Вследствие этого кипение на шероховатых поверхностях нагрева возникает при меньших перепадах температур и характеризуется бо́льшими значениями α, чем на гладких поверхностях.

Наиболее благоприятной формой микроуглубления является такая, при которой оно не смачивается жидкостью и остается заполненным паром или неконденсирующимся газом после отрыва и удаления парового пузырька. С этой точки зрения наиболее эффективными являются микроуглубления, имеющие входное отверстие меньшего размера, чем размер самой полости (рис. 7.5, *д*).

Величина диаметра (радиуса) впадины, которая может стать центром парообразования, связана с физическими свойствами жидкости, а также и с условиями, при которых происходит кипение, в частности с перегревом жидкости.

Необходимость перегрева обусловлена тем, что, с одной стороны, пузырек пара должен находиться в термическом равновесии с окружающей его жидкостью, а с другой — иметь большее давление и, следовательно, более высокую температуру насыщения, чем температура $t_н$, соответствующая внешнему давлению p, под которым находится жидкость.

Давление $p_п$ внутри пузырька пара из-за поверхностного натяжения выше давления окружающей его жидкости $p_ж$ на величину Δp, определяемую для сферической формы пузырька законом Лапласа:

$$\Delta p = p_п - p_ж = 2\sigma/R, \tag{7.1}$$

где $\sigma = \sigma_{п.ж}$ — поверхностное натяжение на границе раздела между паром и жидкостью; R — радиус пузырька.

На пузырек поверхностное натяжение действует подобно упругой оболочке, т. е. стремится сжать его. Сжимающее усилие тем больше, чем меньше диаметр пузырька.

Если $\Delta p \geqslant 2\sigma/R$, паровой пузырек может существовать и развиваться; если $\Delta p < 2\sigma/R$, он конденсируется. Давлению пара в пузырьке соответствует температура насыщения $t_{н.п}$. По условию термического равновесия такую же температуру должна иметь жидкость, окружающая пузырек. Следовательно, жидкость должна быть перегрета в сравнении с температурой насыщения $t_{н.ж}$, соответствующей давлению $p_ж$. Пренебрегая влиянием кривизны поверхности раздела на давление (или температуру) насыщения, считаем, что $p_ж=p$, где p — давление над плоской поверхностью жидкости.

Разности давлений Δp соответствует разность температур $\Delta t = t_{н.п} - t_{н.ж}$. Так как зародыш пузырька находится у самой стенки, то можно считать, что $t_{н.п}=t_с$.

Следовательно, существование парового зародыша и его развитие возможны только при наличии перегрева стенки и пограничного слоя выше температуры насыщения, соответствующей внешнему давлению над плоской поверхностью.

При небольших разностях $p_п$ и $p_ж$

$$\Delta p = p_п - p_ж \cong \Delta t\,(dp/dT_н). \qquad (7.2)$$

Производная от давления по температуре на линии насыщения определяется из уравнения Клапейрона — Клаузиуса

$$(dp/dT)_н = \frac{r\rho_ж\rho_п}{T_н(\rho_ж - \rho_п)}. \qquad (7.3)$$

Здесь r — теплота парообразования, Дж/кг; $\rho_ж$ — плотность насыщенной жидкости, кг/м^3; $\rho_п$ — плотность сухого насыщенного пара, кг/м^3; $T_н$ — температура насыщения, К.

Решая совместно уравнения (7.3) и (7.2) и считая, что при давлениях, не слишком близких к критическому, $\rho_ж \gg \rho_п$, получаем

$$\Delta p = r\rho_п\Delta t/T_н. \qquad (7.4)$$

Подставляя Δp из (7.4) в (7.1), находим зависимость между Δt и R:

$$\Delta t = 2\sigma T_н/(Rr\rho_п). \qquad (7.5)$$

Соотношение (7.5) показывает, что для возникновения кипения на паровом зародыше радиусом R требуется определенный перегрев жидкости, величина которого зависит от температуры насыщения и физических свойств жидкости и пара. Чем больше R, тем меньше необходимый перегрев, и наоборот, чем больше Δt, тем меньшему R соответствует начало парообразования.

Из уравнения (7.5) следует также, что при данном перегреве жидкости Δt не все имеющиеся в жидкости паровые зародыши способны к дальнейшему росту, а только такие, радиус которых R больше некоторого минимального:

$$R_{min} = 2\sigma T_н/(r\rho_п\Delta t). \qquad (7.6)$$

Величина R_{min} называется также критическим радиусом парового зародыша. Она характеризует минимальный радиус внешней поверхности паровых зародышей, возникающих на поверхности теплообмена и способных к дальнейшему росту. Одновременно R_{min} определяет размеры элементов, которые могут стать центрами парообразования, например радиус микроуглублений на греющей поверхности. Как видно из уравнения (7.6), величина R_{min} связана определенным образом с физическими свойствами жидкости и условиями, при которых происходит кипение, в частности с пере-

Таблица 7.1. **Значения R_{min} (мм) для некоторых веществ**

Вещество	$\Delta t=1$		$\Delta t=5$	
	$1\cdot 10^5$ Па	$19\cdot 10^5$ Па	$1\cdot 10^5$ Па	$19\cdot 10^5$ Па
Вода	0,0325	0,0019	0,0065	0,0004
Аммиак	0,0056	0,0007	0,0032	0,00014
R12	0,0077	0,0002	0,0015	0,00004

гревом жидкости. Отсюда также следует, что кипение должно возникать в местах наибольшего перегрева жидкости, а такими местами являются впадины и углубления на поверхности нагрева. Бóльшая вероятность возникновения кипения в углублениях поверхности твердого тела обусловлена также меньшей величиной работы образования в них парового пузырька в сравнении с гладкой поверхностью (см. в [15]).

Значения R_{min}, вычисленные по уравнению (7.6) для трех веществ, приведены в табл. 7.1.

Как показывают эксперименты, число действующих центров парообразования зависит от R_{min}: чем меньше R_{min}, тем больше z, при этом $z \sim R_{min}^{-2}$. В соответствии с этим и данными табл. 7.1 значение z должно возрастать при увеличении давления и перегрева. При прочих одинаковых условиях кипения число центров парообразования зависит от микрошероховатости поверхности нагрева (числа и геометрии впадин), а также от характера физико-химического взаимодействия паровой и жидкой фаз вещества с твердой поверхностью нагрева (т. е. от угла θ). Поэтому для разных сочетаний жидкость — твердое тело это влияние различно, точные методы его учета пока отсутствуют. На основании экспериментальных данных, полученных в ЛТИХПе в опытах с хладонами, влияние микрошероховатости может быть приближенно оценено высотой неровностей R_z, определяемой по ГОСТу.

Поскольку коэффициент теплоотдачи при кипении прямым образом связан с z, выполненный анализ позволяет считать, что значение α должно возрастать с ростом перегрева, давления, микрошероховатости поверхности. Эти выводы полностью подтверждаются экспериментами.

Рост и отрыв паровых пузырьков. Если на поверхности существует зародыш радиусом $R \geqslant R_{min}$, то окружающая его перегретая жидкость будет испаряться, а паровой пузырек — расти, т. е. увеличивать свой объем. Скорость роста пузырька характеризуется величиной $w = dR/d\tau$ и зависит от скорости испарения жидкости, которая в свою очередь определяется количеством подводимой теплоты.

Как уже отмечалось выше, подвод теплоты может осуществляться путем стационарной теплопроводности от поверхности нагрева через микрослой жидкости к поверхности пузырька у его основания и путем нестационарной теплопроводности от перегретого слоя жидкости, окружающей пузырек. В этом общем случае скорость роста паровых пузырьков выражается уравнением, предложенным Д. А. Лабунцовым и В. В. Яговым [15],

$$\frac{dR}{d\tau}=\beta \frac{a}{R} \mathrm{Ja}\, \varphi (\mathrm{Ja}), \qquad (7.7)$$

где

$$\varphi (\mathrm{Ja}) = 1+\frac{\gamma}{\beta} \mathrm{Ja}+\frac{\gamma}{\beta} \sqrt{2\beta\, \mathrm{Ja}+\gamma (\mathrm{Ja})^2}. \qquad (7.8)$$

Здесь β — численный коэффициент ($\beta=6$); a — температуропроводность жидкости; R — радиус пузыря в момент времени τ; Ja — число Якоба; γ — величина, зависящая от геометрических факторов; при значениях угла смачивания Θ, равных 40—90°, $\gamma=0{,}1\div0{,}49$.

Значения $\varphi(\mathrm{Ja})$ приведены в [15].

Число Якоба $\mathrm{Ja}=c_p t \rho_ж/(r\rho_п)$ характеризует соотношение между теплотой перегрева жидкости (или избыточной энтальпией в перегретом слое) и теплотой парообразования. В предельном случае, когда $\mathrm{Ja}<1$ (давление выше атмосферного), рост паровых пузырьков определяется теплопроводностью через микрослой и

$$\frac{dR}{d\tau}=\beta \frac{a}{R} \mathrm{Ja}. \qquad (7.9)$$

Уравнение (7.9) получено при условии постоянства температуры стенки во время роста пузырьков. В действительности эта температура изменяется, и характер изменения зависит от теплофизических свойств материала поверхности, учитываемых коэффициентом аккумуляции теплоты, равным

$$\sqrt{a c_p \rho}.$$

Влияние материала, а также толщины стенки нагревателя существенным образом проявляется при кипении криогенных жидкостей [7].

По мере роста пузырька изменяются и действующие на него силы, из которых основными являются: подъемная $P_g=V_г(\rho_ж-\rho_п)$ и сила поверхностного натяжения $P_\sigma=\pi D_0 \sigma f(\Theta)$. Если пренебречь динамическими эффектами, воздействующими на пузырек во время его роста (силами инерции жидкости и пара, сопротивлением движению пузырька), то условие равновесия сил в момент отрыва можно записать следующим образом:

$$(\pi D_0^3/6)\, g\, (\rho_ж-\rho_п)=\pi D_0 \sigma f(\theta), \qquad (7.10)$$

где D_0 — диаметр пузырька в момент отрыва; $f(\Theta)$ — некоторая функция краевого угла смачивания.

Решая уравнение (7.10) относительно D_0 получаем

$$D_0=\sqrt{6f(\theta)\frac{\sigma}{g(\rho_ж-\rho_п)}}=\sqrt{6f(\theta)\, l_0}. \qquad (7.11)$$

Выражение

$$l_0=\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_ж-\rho_п)}} \qquad (7.12)$$

называется капиллярной постоянной и имеет единицу измерения — метр. Численное соотношение между отрывным объемом пузырька, капиллярной постоянной и контактным углом при условии (7.10) найдено В. Фритцем. С учетом этой величины из уравнения (7.11) получается следующая формула для отрывного диаметра пузырька:

$$D_0=0{,}020\theta\sqrt{\sigma/g(\rho_ж-\rho_п)}. \qquad (7.13)$$

Формула (7.13) согласуется с опытными данными при атмосферном давлении и не отражает влияния изменения давления ниже и выше атмосферного. Как показывают эксперименты, D_0 зависит не только от свойств жидкости и давления, но и от температурного напора, материала греющей поверхности (для криогенных жидкостей) и др., так что уравнение отражает лишь порядок величины D_0. Холодильные агенты и криогенные жидкости характеризуются малыми значениями D_0.

Частота отрыва паровых пузырьков $u=1/(\tau_{ож}+\tau_{рс})$, где $\tau_{ож}$ — время ожидания; $\tau_{рс}$ — время роста. Если заменить $\tau_{ож}=\psi\tau_{рс}$, где ψ — некоторый численный коэффициент, пределы изменения которого могут быть приняты от 0 до 1, то

$$u=1/[\tau_{рс}(1+\psi)]. \qquad (7.14)$$

Рассмотрев уравнение (7.14) совместно с (7.7), при $\tau=\tau_{рс}$, $\psi=0$ и $R=0{,}5D_0$, и учитывая соотношение (7.13), можно убедиться, что частота отрыва является функцией многих величин:

$$u=f(\lambda,\ c_p,\ \rho_ж,\ \rho_п,\ r,\ \sigma,\ \theta,\ \Delta t). \qquad (7.15)$$

Среднюю скорость роста пузырька на поверхности нагрева можно характеризовать как $\bar{w}=D_0/\tau_{рс}$ или, принимая во внимание (7.14), как $\bar{w}=D_0(1+\psi)u$. При $\tau_{ож}=0$, $\psi=0$ и $\bar{w}=D_0u$.

По опытным данным, при атмосферном давлении и $\Delta t=10$°C для воды $D_0=(2\div4)$ мм; $u=(40\div60)$ $с^{-1}$; $D_0u=(120\div150)$ мм/с; для R12 $D_0=(0{,}6\div0{,}7)$ мм; $u=(50\div60)$ $с^{-1}$; $D_0u=(35\div40)$ мм/с.

7.5. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛООТДАЧИ ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ

На основании изложенных выше представлений и математических зависимостей для процесса парообразования можно считать, что коэффициент теплоотдачи при кипении является функцией многих независимых переменных:

$$\alpha=f(\lambda_ж,\ c_p,\ \rho_ж,\ \rho_п,\ \mu_ж,\ r,\ \sigma_{ж,п},\ \theta_{ж,п},\ R_z,\ P_н,\ \Delta\tau). \qquad (7.16)$$

Иначе говоря, он зависит от теплофизических свойств жидкости, от физико-химических свойств системы жидкость — поверхность нагрева, микрошероховатости поверхности нагрева, давления (температуры) насыщения и от температурного напора (или плотности теплового потока).

Коэффициент теплоотдачи при пузырьковом кипении возрастает с ростом теплопроводности, теплоемкости и плотности жидкости и с уменьшением ее вязкости и поверхностного натяжения ($\sigma_{ж,п}$). Увеличение плотности пара и теплоты парообразования также приводит к росту коэффициента теплоотдачи. Для всех жидкостей α при пузырьковом кипении увеличивается с увеличением q (или Δt) и давления. Кроме величин, отраженных в уравнении (7.16), на интенсивность теплоотдачи при пузырьковом кипении влияет еще целый ряд факторов. К ним относятся величина недогрева жидкости, уровень жидкости над поверхностью нагрева, характер движения жидкости, ускорение свободного падения и др. Их влияние рассмотрено, например, в [15].

Аналитическое определение вида функции f в уравнении (7.16) является задачей еще более сложной, чем в случае конвективного теплообмена однофазных сред. Это обусловлено большим числом величин, определяющих процесс, сложным и до сих пор недостаточно изученным характером их влияния на α, статистической природой процесса кипения. Процессы возникновения, роста и отрыва пузырьков носят в определенной степени случайный характер и поэтому могут быть описаны только с помощью вероятностных, т. е. статистических, закономерностей. Для установления последних требуется наличие большого количества экспериментальных данных. Изучению этих вопросов посвящено много исследований, выполняемых у нас в стране и за рубежом. Однако до сих пор здесь еще много нераскрытого и неясного, особенно в области механизма процесса теплообмена.

В настоящее время количественная связь между коэффициентом теплообмена и факторами, от которых он зависит, устанавливается опытным путем. Для того чтобы можно было распространить полученные результаты на другие условия, их обобщают, применяя различные методы, физическое обоснование некоторых из них было рассмотрено выше.

7.6. МЕТОДЫ ОБОБЩЕНИЯ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ И РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ КИПЕНИЯ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ

Наиболее часто обобщение опытных данных по кипению осуществляется с помощью теории подобия. Имеется большое число уравнений подобия, предложенных разными авторами. Рассмотрим некоторые особенности составления критериев и уравнений, описывающих теплообмен при развитом пузырьковом кипении.

Как показывает опыт, в случаях, когда линейный характерный размер поверхности нагрева l больше D_0 и высота уровня жидкости над нагревателем $h > (5 \div 10) D_0$, величины l и h не влияют на теплоотдачу. В связи с этим в качестве определяющего размера в критерии, характеризующие пузырьковое кипение, вводится величина l_0 из выражения (7.12), пропорциональная отрывному диаметру пузыря.

В качестве скорости в критерий Рейнольдса вводится комплекс, определяющий среднюю объемную скорость парообразования:

$$w_{\text{кип}} = q / r\rho_{\text{п}}. \tag{7.17}$$

Соответственно одним из определяющих критериев является «пузырьковый» критерий Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_* = \frac{w_{\text{кип}} l_0}{\nu} = \frac{q}{r\rho_{\text{п}}\nu} \sqrt{\sigma / g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}})}. \tag{7.18}$$

Определяемым критерием при кипении является преобразованное число Нуссельта

$$\mathrm{Nu}_* = \frac{\alpha l_0}{\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\sigma / g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{п}})}, \tag{7.19}$$

которое также называют «пузырьковым».

Наиболее последовательными, физически обоснованными и распространенными являются уравнения подобия, предложенные С. С. Кутателадзе, Г. Н. Кружилиным и Д. А. Лабунцовым. Они получены обычными методами теории подобия и различаются способом учета специфики процесса кипения. Более подробно эти методы обобщения описаны в [15]. Основные физические предпосылки и выводы критериев приводятся в оригинальных работах авторов.

Критериальное уравнение Кутателадзе при некоторых упрощающих предпосылках имеет вид

$$\mathrm{Nu}_* = f(\mathrm{Re}_*,\ \mathrm{Pr},\ \mathrm{K}_p).$$

На основании опытных данных для ряда веществ, главным образом для воды и жидкостей, близких к ней по свойствам, из этого уравнения получена формула

$$\mathrm{Nu}_* = 0{,}44\, \mathrm{Re}_*^{0,7}\, \mathrm{Pr}^{0,3} \mathrm{K}_p^{0,65}. \qquad (7.20)$$

Функциональная зависимость между критериями, полученными Кружилиным, может быть представлена в виде $\mathrm{Nu}_* = f(\mathrm{Re}_*, \mathrm{Pr}, \mathrm{K}_t)$, или с учетом опытных данных

$$\mathrm{Nu}_* = 0{,}082\, \mathrm{Re}_*^{0,7}\, \mathrm{Pr}^{0,25}\, \mathrm{K}_t^{0,367}. \qquad (7.21)$$

В уравнениях (7.20) и (7.21): Pr критерий Прандтля для жидкости. Критерии

$$\mathrm{K}_p = p/\sqrt{\sigma g(\rho_ж - \rho_п)}$$

$$\text{и}\quad \mathrm{K}_t = \frac{(r\rho_п)^2}{c_p T_н \rho_ж \sqrt{\sigma g(\rho_ж - \rho_п)}}.$$

Обозначения и единицы измерения величин соответствуют приведенным выше.

Уравнение (7.20) дает лучшее согласование с опытом при высоких давлениях, уравнение (7.21) — при низких. При выводе этих уравнений не рассматривались факторы, отражающие влияние системы жидкость — поверхность и механических свойств поверхности на число действующих центров парообразования. Кроме того, влияние давления на теплоотдачу для разных жидкостей оказывается различным. По этим причинам формулы (7.20) и (7.21) являются приближенными, а применение их ограниченно. В частности, при использовании уравнений (7.20) и (7.21) для расчета коэффициентов теплоотдачи при кипении хладонов возникает большая погрешность (до 200—300%).

Влияние свойств вещества и давления можно учесть более точно, применяя закон соответственных состояний. С использованием этого закона В. М. Боришанским обработаны опыты по кипению азличных жидкостей. Результаты представлены в относительных координатах на рис. 7.6: по оси ординат отложено отношение $(\alpha/q^{0,7})_p$ при данном давлении p к величине $(\alpha/q^{0,7})_{p_*}$ при некотором давлении $p_* = 0{,}03\, p_{кр}$, по оси абсцисс — приведенное давление $p/p_{кр}$. Как видно из рис. 7.6, α возрастает с повышением давления, причем степень влияния последнего увеличивается с приближением к кри-

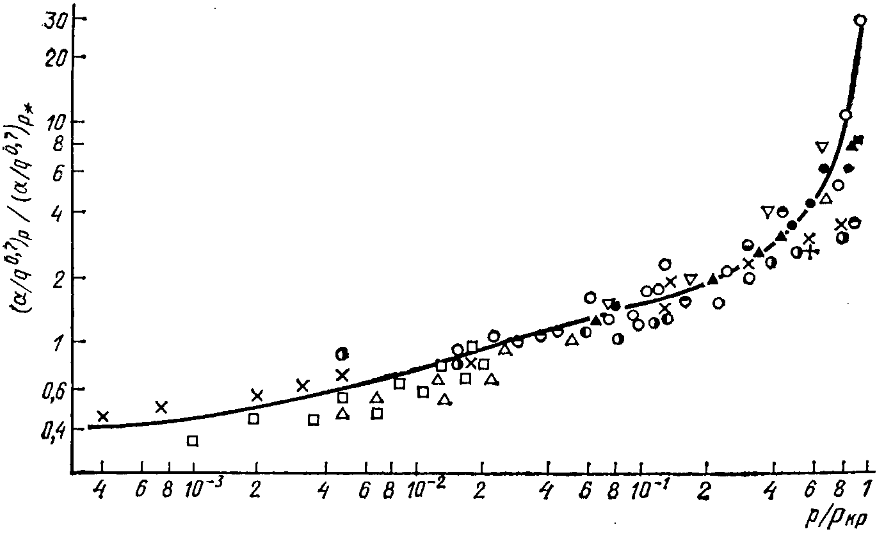


Рис. 7.6. Зависимость $(\alpha/q^{0,7})_p/(\alpha/q^{0,7})_{p_*}$ от приведенного давления $p/p_{\text{кр}}$

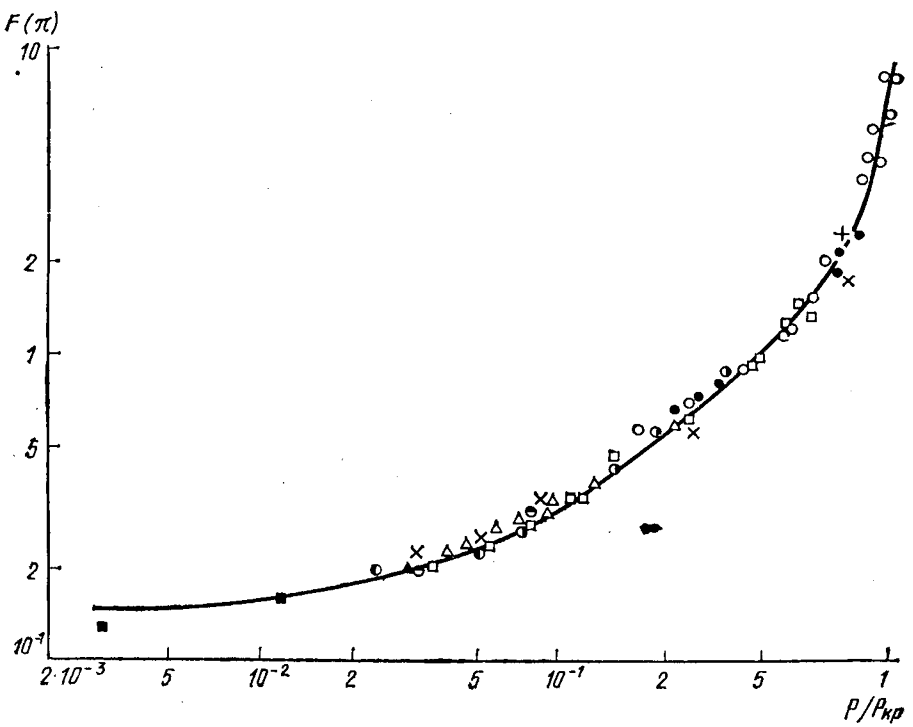


Рис. 7.7. Обобщенная зависимость F(π) для пузырькового кипения хладонов в большом объеме

тическому давлению. Именно поэтому влияние давления на теплоотдачу при кипении воды ($p_{кр}=22{,}1$ МПа) и хладонов ($p_{кр}=3{,}9\div 4{,}9$ МПа) сказывается по-разному.

Заметим также, что при обобщении опытных данных с помощью приведенного давления самые точные результаты получают в случае сравнения веществ, в наибольшей степени отвечающих условиям термодинамического подобия.

Для обобщения экспериментальных данных по кипению различных хладонов Г. Н. Даниловой был использован метод термодинамического подобия. В результате получено следующее уравнение для расчета коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = C_0 F(\pi)\, q^{0,75} (R_z/R_{z_0})^{0,2}. \tag{7.22}$$

Здесь

$$C_0 = 550 p_{кр}^{1/4} T_{кр}^{-1/8} M^{-1/8}, \tag{7.23}$$

где $p_{кр}$ — критическое давление 0,1 МПа; $T_{кр}$ — критическая температура, К; M — молекулярная масса; $F(\pi)$ — некоторая функция давления;

$$\pi = p/p_{кр},$$

p — давление насыщения, при котором происходит кипение; R_z — высота микронеровностей поверхности нагрева, мкм;
$R_{z_0} = 1$ мкм.

При $0{,}003 \leqslant \pi \leqslant 0{,}9$

$$F(\pi) = 0{,}14 + \pi\left(1{,}6 + \frac{0{,}4}{1-\pi}\right). \tag{7.24}$$

В интервале $0{,}05 \leqslant \pi \leqslant 0{,}5$ с достаточной степенью точности $F(\pi) = 0{,}14 + 2{,}2\pi$.

Сопоставление опытных данных о влиянии давления на теплоотдачу хладонов (разные обозначения точек) с уравнением (7.24) (сплошная линия) приведено на рис. 7.7. Значение R_z для кипения на трубах промышленного изготовления составляет 3—5 мкм.

Значения $p_{кр}$ и C_0 для ряда хладонов приведены в табл. 7.2.

Для расчета теплоотдачи при кипении криогенных жидкостей можно рекомендовать уравнение, полученное Ю. А. Кириченко на основании анализа связи теплоотдачи с внутренними характеристиками парообразования и выражения последних через свойства вещества,

$$\alpha = 0{,}094 \left(\frac{\lambda'}{\sigma T_н}\right)^{1/2} \frac{(r\rho_п)^{1/4}}{(ag)^{1/12}} q^{3/4}, \tag{7.25}$$

границы применения которого определяются значениями критерия Якоба $\mathrm{Ja} < 70$.

Таблица 7.2

Величина	Холодильный агент								
	R11	R12	R13	R21	R22	R113	RC318	R502	R142
$p_{кр}\cdot 10^{-5}$, Па	43,7	40,5	38,6	51,6	49,4	41,1	28,0	40,5	41,1
C_0	3,50	4,20	5,22	4,10	4,74	3,07	3,85	4,54	4,05

Теоретический подход к описанию теплоотдачи был осуществлен Д. А. Лабунцовым. В предположении, что теплота от поверхности нагрева к кипящей жидкости переносится путем теплопроводности через тонкий пристенный слой жидкости, им путем общей качественной оценки толщины этого слоя получено следующее уравнение для определения коэффициента теплоотдачи [27]:

$$\alpha = 0{,}075\left[1 + 10\left(\frac{\rho_п}{\rho_ж - \rho_п}\right)^{2/3}\right]\left(\frac{\lambda^2}{\nu\sigma T_н}\right)^{1/3} q^{2/3}.$$

Для случая кипения воды после подстановки величин, характеризующих ее свойства, формула приобретает вид

$$\alpha = \frac{3{,}4p^{0{,}18}}{1 - 0{,}0045p} q^{2/3}, \qquad (7.26)$$

где p — в бар, q — в Вт/м².

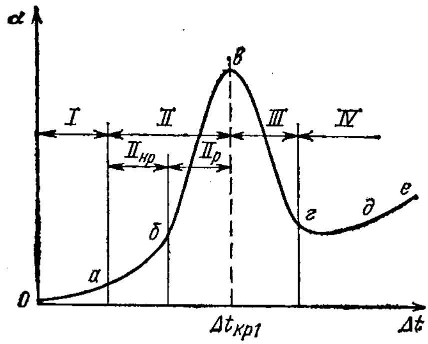
Пределы применимости формулы по давлению ($1 \div 200$) бар.

Следует иметь в виду, что все обобщенные уравнения (вследствие статистической природы процесса кипения и неопределенности взаимосвязи между свойствами жидкости и поверхности нагрева) характеризуют некоторый средний уровень теплоотдачи. Они описывают опытные данные в пределах средней погрешности до 30—35%. Для различных сочетаний свойств жидкости и поверхности нагрева и для различного уровня давлений кипения показатели степени и коэффициенты в уравнениях подобия могут быть разными. Поэтому если имеются опытные данные по теплоотдаче, то их использование может дать более точные расчетные зависимости.

Опытные данные о зависимости коэффициента теплоотдачи от температурного напора, характерные для кипения жидкости на смачиваемой ($\theta < 90°$) поверхности нагрева при постоянном давлении, представлены на рис. 7.8. Области и режимы кипения на рис. 7.8 соответствуют кривой кипения, рассмотренной в разделе 7.2 (см. рис. 7.3). На участке *Оа* (см. рис. 7.8) имеет место конвективный перенос теплоты в свободно движущейся жидкости, на участке *аб* — неразвитого кипения — теплообмен осуществляется совокупностью процессов парообразования и естественной конвекции. Для области развитого кипения (участок *бв*) механизм теплообмена рассмотрен выше (см. раздел 7.3). На всем участке кривой *Ов* коэффициент теплоотдачи увеличивается с ростом Δt, причем наибольшая степень влияния последнего имеет место в области развитого кипения ($\alpha \sim \Delta t^{2-3}$) и наименьшая — в области свободной конвекции ($\alpha \sim \Delta t^{0{,}25-0{,}33}$).

При $\Delta t = \Delta t_{кр1}$ наступает переход из пузырькового кипения к пленочному, причем участок *вг* соответствует переходной области, в которой сосуществуют пузырьковое и неустойчивое пленочное кипение, а участок *ге* — устойчивому пленочному кипению.

В области *вг* α уменьшается с ростом Δt, так как паровая пленка захватывает все большие и большие участки поверхности. После того как исчезнет последний смачиваемый участок, перенос теплоты осуществляется через паровую пленку в основном путем теплопро-



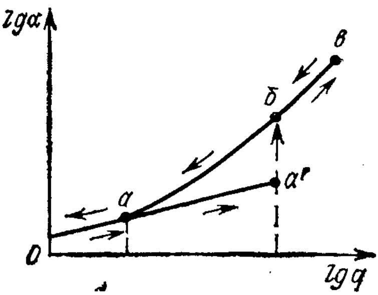


Рис. 7.8. Зависимость $\alpha=f(\Delta t)$ при различных режимах кипения в большом объеме:

I — свободная конвекция, сопровождающаяся испарением с поверхности жидкости; *II* — пузырьковое кипение ($II_{\text{нр}}$ — неразвитый режим; $II_{\text{р}}$ — развитый режим); *III* — переходный режим; *IV* — устойчивое пленочное кипение

Рис. 7.9. Гистерезис в величинах q при переходе от естественной конвекции к кипению и обратно

водности, коэффициент теплоотдачи примерно постоянен (участок *гд*), а затем он снова начинает увеличиваться из-за теплового излучения через паровую пленку (участок *ge*).

В опытах с разными жидкостями отмечается гистерезис в значениях плотности теплового потока, соответствующих началу (точка *а'*) и прекращению (точка *а*) кипения при постепенном увеличении и уменьшении теплового потока (рис. 7.9). Поэтому в области неразвитого кипения возможны различные значения α в пределах, ограниченных линиями *аб* и *аа'*.

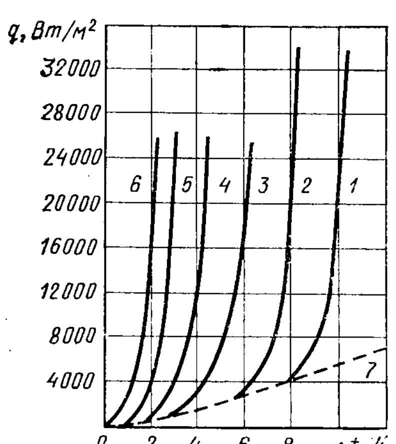


Рис. 7.10. Плотность теплового потока в зависимости от температурного напора для R12:

1 — $t_{\text{н}}=-10$°C; *2* — 0°C; *3* — +20°C; *4* — +40°C; *5* — +60°C; *6* — +80°C; *7* — свободное движение

Разумеется, величины Δt и q взаимосвязаны. На рис. 7.10 представлена зависимость плотности теплового потока от температурного напора при кипении R12 на горизонтальной стальной трубе ($d=18$ мм) при разных температурах кипения. С возрастанием $t_{\text{н}}$ при одном и том же Δt значения q, а следовательно, и α увеличиваются. Одновременно уменьшается значение Δt, соответствующее переходу от кипения к свободной конвекции.

Рассмотрим методику расчета коэффициентов теплоотдачи для областей *I*—*II* (см. рис. 7.8).

В области *I* коэффициент теплоотдачи может быть рассчитан по уравнению, которое описывает свободное движение жидкости:

$$\mathrm{Nu} = C_{\text{с. д}} (\mathrm{Gr\,Pr})^{m_1}, \tag{7.27}$$

где определяющим размером является линейный размер поверхности нагрева, а определяющей температурой — $t_н$; $C_{\text{с. д}}$ — числовой коэффициент, зависящий от режима свободного движения.

Если в уравнение (7.27) подставить выражение чисел подобия и решить его относительно коэффициента теплоотдачи, то получим

$$\alpha = C_{\text{с. д}} \frac{\lambda}{l} \left(\frac{g l^3 \beta}{\nu a} \right)^{m_1} \Delta t^{m_1}. \tag{7.28}$$

Подставив $\Delta t = q/\alpha$ в (7.28), получим

$$\alpha = B_{\text{с. д}} \Delta t^{m_1} = A_{\text{с. д}} q^m, \tag{7.29}$$

где $B_{\text{с. д}} = C_{\text{с. д}} \frac{\lambda}{l} \left(\frac{g l^3 \beta}{\nu a} \right)^{m_1}$; $A_{\text{с. д}} = B_{\text{с. д}}{}^{1/(1+m_1)}$; $m = m_1/(1+m_1)$.

Значения $A_{\text{с. д}}$ и $B_{\text{с. д}}$ зависят от свойств кипящей жидкости, температуры (или давления) насыщения и от размеров нагревателя. Влияние последнего исчезает при $m_1 = 1/3$. Уравнения типа (7.29) для области I получают и непосредственно из опытов. При этом численные значения m_1, $C_{\text{с. д}}$ различны при кипении разных жидкостей.

В опытах, проведенных в ЛТИХПе для областей I и $II_{\text{нр}}$ (рис. 7.8), получено при кипении на горизонтальной трубе хладонов $m_1 = 0{,}33$; $C_{\text{с. д}} = 0{,}2$; при кипении аммиака $m_1 = 0{,}25$; $C_{\text{с. д}} = 0{,}50$. В обоих случаях пределы изменения $\mathrm{GrPr} = 10^3 \div 10^8$.

Область $II_{\text{р}}$ описывается уравнениями подобия, рассмотренными в разделе 7.6, либо другими обобщенными зависимостями, учитывающими закономерности процесса развитого пузырькового кипения и соответствующие ему опытные данные. На основании этих зависимостей либо непосредственно путем обработки и анализа опытных данных с конкретными жидкостями на определенных поверхностях нагрева устанавливают размерные формулы для расчета коэффициента теплоотдачи. Их обычно представляют в виде

$$\alpha = C f(p)\, q^n, \tag{7.30}$$

или, введя обозначение $A = Cf(p)$,

$$\alpha = A q^n. \tag{7.31}$$

Здесь C — коэффициент, зависящий от свойств жидкости и свойств поверхности нагрева; $f(p)$ — некоторая функция давления, различная для разных жидкостей и областей давления. По опытным данным, для разных жидкостей наиболее вероятные значения $n = 0{,}6 \div 0{,}8$.

Значения C, $f(p)$ и n для некоторых веществ [при q — в Вт/м²; α — в Вт/(м²·К); p — в бар] приведены в табл. 7.3.

Пределы применимости формул (7.22) и (7.26) по давлению указаны выше. Вторая формула для воды в табл. 7.3 относится к $\pi \leqslant 0{,}18$, формула для аммиака — к $\pi = 0{,}017 \div 0{,}08$ (получена А. В. Куприяновой).

Таблица 7.3. **Значения n, $f(p)$ и C в формуле (7.30) для различных веществ (трубы промышленного изготовления)**

Вещество	n	$f(p)$	C	Источник
Вода	0,67	$p^{0,18}(1-0,0045\ p)$	3,5	Формула (7.26)
Вода	0,70	$p^{0,15}$	3,0	[15]
Аммиак	0,70	$p^{0,21}$	2,2	[36]
R12	0,75	$0,14+\pi\left(1,6+\dfrac{0,4}{1-\pi}\right)$	5,5	Формула (7.22)
R22	0,75	$0,14+\pi\left(1,6+\dfrac{0,4}{1-\pi}\right)$	6,2	Формула (7.22)

Подставив в уравнение (7.31) $q=\alpha\Delta t$, получаем формулу для расчета коэффициента теплоотдачи при заданном температурном напоре $\alpha=B\Delta t^{n_1}$, где $B=A^{1/(1-n)}$; $n_1=n/(1-n)$.

Многократная экспериментальная проверка подтвердила возможность применения полученных здесь зависимостей для определения α при кипении в большом объеме с достаточной для практических расчетов точностью.

7.7. ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ КИПЕНИИ НА ПУЧКАХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТРУБ

В некоторых теплообменных аппаратах, в том числе и в испарителях холодильных машин, кипение осуществляется на пучке горизонтальных труб, погруженных в объем жидкости (см. главу 14). В этом случае образующаяся парожидкостная смесь в зоне пучка поднимается вверх, а жидкость в пространстве между корпусом аппарата и трубами опускается вниз. Возникает своеобразный циркуляционный контур.

При невысоких плотностях теплового потока ($q\leqslant 10\div 15$ кВт/м^2) и низких давлениях ($p\simeq 1\cdot 10^5$ Па) теплоотдача при кипении на пучках горизонтальных труб оказывается более интенсивной, чем при кипении в большом объеме на одиночной трубе, причем коэффициент теплоотдачи возрастает при переходе от ряда к ряду снизу вверх. Механизм этого явления можно представить следующим образом.

Паровые пузырьки, поднимающиеся с нижних рядов на верхние, вносят дополнительные турбулентные возмущения в пограничный слой, причем воздействие этих возмущений увеличивается, так как количество пузырьков возрастает при переходе к каждому последующему ряду снизу вверх. Кроме того, поднимающиеся паровые пузырьки, врываясь в перегретый слой жидкости у поверхности трубы, служат дополнительными центрами парообразования. Размеры этих центров много больше $R_{\min}$, а следовательно, процесс испарения в них жидкости может происходить при меньших перегревах, чем при кипении на одиночной трубе. Таким образом интенсифицируется процесс парообразования на каждой трубе.

Эксперименты, проведенные с холодильными агентами, показывают, что и при кипении их на пучке труб могут быть выделены зоны свободной конвекции, неразвитого и развитого кипения. В первой и второй зонах влияние пучка положительно, т. е. локальные (для данного ряда) коэффициенты теплоотдачи возрастают от ряда к ряду, причем средние α для пучка выше, чем для одиночной трубы. В зоне развитого кипения эффект пучка практически не сказывается, а при высоких q и большом числе рядов возможно даже ухудшение теплоотдачи в верхних рядах («запаривание»).

Наличие того или иного режима кипения в каждом ряду пучка, как и для кипения в большом объеме, определяется теплофизическими свойствами жидкости, давлением, значением q (или Δt), а кроме того, зависит от скорости циркуляции и номера ряда.

Наибольший практический интерес изучение теплоотдачи при кипении в пучках имеет для аппаратов холодильной и криогенной техники, работающих при малых температурных напорах между охлаждаемой средой и кипящим холодильным агентом. Аналитического решения этой задачи в настоящее время не существует.

Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи пучка можно применить зависимость

$$\alpha_{\text{пуч}} = \alpha \varepsilon_{\text{п}}. \tag{7.32}$$

Здесь α рассчитывается по уравнению (7.30); $\varepsilon_{\text{п}}$ — коэффициент, учитывающий влияние пучка.

В общем случае $\varepsilon_{\text{п}}$ зависит от свойств жидкости, давления, геометрических параметров пучка, плотности теплового потока и числа рядов по высоте пучка. Значения $\varepsilon_{\text{п}}$ для кипения некоторых хладонов на гладкотрубных и оребренных пучках приведены в [36] в виде графических зависимостей от числа рядов при разных $q = \text{idem}$ и $t_{\text{н}} = \text{idem}$.

В работе [13] на основании сопоставления и усреднения опытных результатов различных авторов для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при кипении в гладкотрубных пучках с числом рядов $n = 15 \div 20$ при $q = (1 \div 10)$ кВт/м², $t_{\text{н}} = -30 \div 0$°C, $s/d = 1{,}15 \div 1{,}45$ и диаметре труб $d = 16 \div 20$ мм рекомендуются следующие приближенные формулы:

для R12 и R22

$$\alpha_{\text{пуч}} = C q^{0,5} p^{0,25} (s/d)^{-0,45}, \tag{7.33}$$

где $C = 14{,}2$ для R12 и $C = 16{,}4$ для R 22;

для аммиака

$$\alpha_{\text{пуч}} = 13 q^{0,6}. \tag{7.34}$$

7.8. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ ВНУТРИ ТРУБ

При кипении в большом объеме образующаяся паровая фаза свободно отделяется от поверхности нагрева. В случае кипения внутри трубы, представляющей собой ограниченный объем, образующийся пар вместе с жидкостью движется вдоль трубы, причем количество

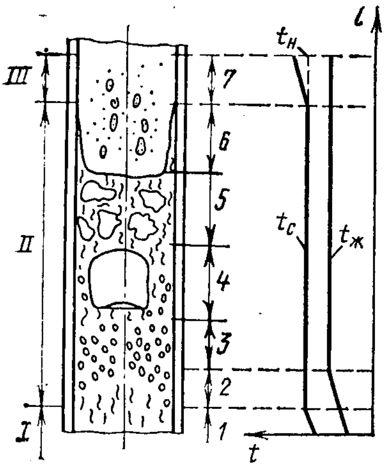


Рис. 7.11. Режимы течения (структура) двухфазного потока при кипении в вертикальной трубе:

I — область подогрева жидкости; *II* — область кипения; *III* — область подсыхания; *1* — однофазная жидкость; *2* — поверхностное кипение; *3—7* — объемное кипение с режимами течения: *3* — пузырьковым; *4* — снарядным; *5* — эмульсионным; *6* — кольцевым и дисперсно-кольцевым; *7* — дисперсным

пара непрерывно увеличивается, а количество жидкости уменьшается. Движущаяся по трубе смесь пара и жидкости называется двухфазным потоком. Форма и количество движущейся паровой фазы определяют режим течения (или структуру) двухфазного потока.

Режимы течения (структура) двухфазного потока. Структура двухфазного потока при кипении в вертикальной трубе изображена на рис. 7.11.

На входе в трубу существует область подогрева жидкости до $t_н$, называемая экономайзерной зоной. Затем начинается кипение, происходящее в области *II*. Начальная зона этой области соответствует поверхностному кипению, основная зона — объемному. При объемном кипении по мере увеличения количества пара режим течения изменяется от пузырькового до дисперсно-кольцевого.

При пузырьковом режиме объем жидкости заполнен равномерно распределенными в ней мелкими пузырьками пара. Такой режим характерен для низких паросодержаний потока. При снарядном течении паровые пузырьки объединяются и образуют крупные паровые пробки — «снаряды», поперечные размеры которых соизмеримы с диаметром трубы. Между «снарядами» возможно существование мелких паровых пузырей. При высоких паросодержаниях потока и скоростях пара паровые «снаряды» дробятся на более мелкие части и парожидкостный поток приобретает вид смеси без четкой границы раздела фаз — этот режим называется эмульсионным (вспененным).

Далее паровая фаза концентрируется в центре трубы в виде стержня, отделенного от стенки трубы слоем жидкости, имеющим форму кольца. Такой режим называется кольцевым. С увеличением скорости пара часть жидкости срывается с поверхности пленки и поступает в паровое ядро. При этом в центральной части трубы движется паровой стержень с распределенными в нем каплями жидкости, а у поверхности трубы — тонкий кольцевой слой жидкости. Этот режим течения называется дисперсно-кольцевым. По мере движения потока по трубе слой жидкости вследствие испарения с ее поверхности постепенно уменьшается. Когда жидкость в пристенной пленке полностью превратится в пар, наступает дисперсный режим течения, при котором паровое ядро контактирует со стенкой

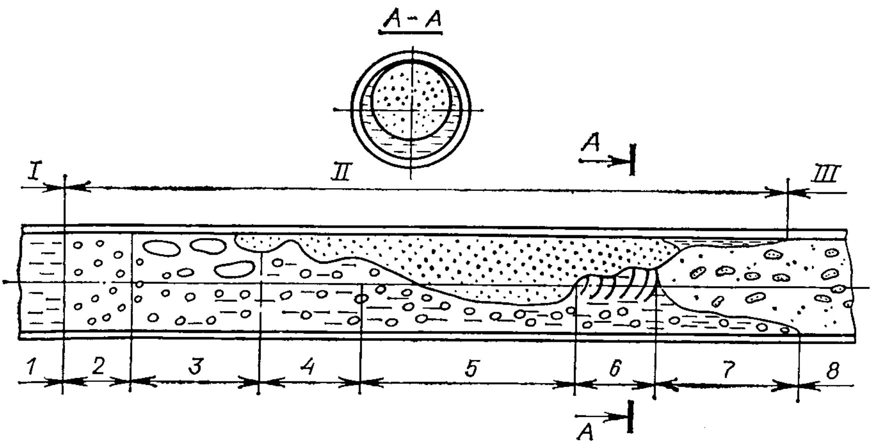


Рис. 7.12. Режимы течения (структура) двухфазного потока при кипении в горизонтальной трубе:

I — область подогрева жидкости; *II* — область кипения; *III* — область подсыхания; *1* — однофазная жидкость; *2* — пузырьковый режим; *3* — снарядный режим; *4* — волновой режим; *5* — расслоенный режим; *6* — волновой-кольцевой режим; *7* — кольцевой и дисперсно-кольцевой режим; *8* — дисперсный режим

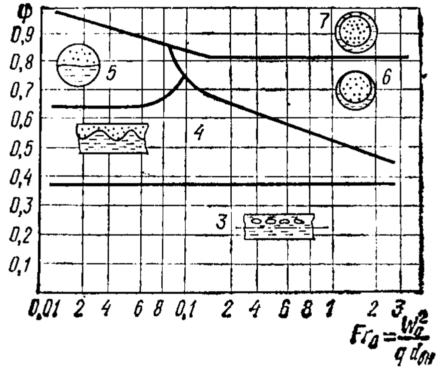


Рис. 7.13. Диаграмма режимов двухфазного потока хладагентов в горизонтальной трубе:

3 — снарядный; *4* — волновой; *5* — расслоенный; *6* — волновой-кольцевой; *7* — кольцевой и дисперсно-кольцевой. Обозначения режимов см. рис. 7.12.

трубы (*III* область на рис. 7.11), а в центральной части ядра вместе с паром движутся капельки жидкости. На рис. 7.11 показан также характер изменения температур стенки $t_с$ и кипения $t_н$ по высоте трубы.

При движении двухфазного потока в горизонтальных (или слегка наклонных) трубах структура потока изменяется не только по длине, но и по сечению трубы (рис. 7.12). На начальном участке горизонтальной трубы происходит подогрев жидкости до температуры насыщения. Затем, если скорость движения велика, а плотность теплового потока мала, развивается пузырьковый режим, который при дальнейшем увеличении количества пара переходит в снарядный. При снарядном режиме в горизонтальной трубе паровая фаза смещена в верхнюю часть потока. С ростом паросодержания «снаряды» объединяются, образуя волновой или расслоенный режимы, которые характеризуются тем, что верхняя часть поверхности трубы омывается паром. При больших паросодержаниях наступает волновой-кольцевой, кольцевой, а затем и дисперсный режим.

Существование того или иного режима течения двухфазного потока определяется совокупностью ряда факторов: свойств и давления жидкости, скорости потока, плотности теплового потока, начального массового паросодержания (x), диаметра трубы и др. Например, с возрастанием скорости жидкости на входе в трубу определенных размеров при заданном q увеличивается протяженность экономайзерной области и уменьшается протяженность испарительной. С увеличением начального паросодержания и скорости потока уже на входе в трубу может существовать снарядный режим течения и т. п.

Для предсказания режимов течения на основании экспериментальных исследований строят диаграммы (карты) режимов. Ряд таких карт имеется в литературе по двухфазным потокам, в том числе в [22]. Диаграмма режимов течения двухфазных потоков хладонов в горизонтальных трубах, полученная в ЛТИХПе А. А. Малышевым, приведена на рис. 7.13. На этой диаграмме сплошными линиями показаны границы режимов. Диаграмма построена в координатах Fr_0—φ, где Fr_0— критерий, определяемый скоростью циркуляции, а φ — истинное объемное паросодержание. Рассмотрим содержание этих понятий.

Параметры двухфазных потоков. При движении двухфазного потока по трубе скорости жидкости и пара, находящихся в каждый момент времени в рассматриваемом сечении, в общем случае неодинаковы. Свойства потока скачкообразно изменяются на границе раздела фаз. Это необходимо учитывать при анализе структур и теплообмена.

Параметры, применяемые для характеристики свойств парожидкостного потока, разделяются на две группы: расходные и истинные. К расходным параметрам двухфазного потока относятся расходные массовое и объемное паросодержания, приведенные скорости жидкости и пара, скорость смеси. К истинным параметрам потока относятся истинные скорости жидкости и пара, истинное объемное паросодержание. Расходные параметры находят из балансовых соотношений; они не учитывают различие скоростей фаз. Истинные параметры построены с учетом различия скоростей паровой и жидкой фаз, проходящих через одно и то же сечение, т. е. отражают истинные скорости пара и жидкости. Подробное описание параметров двухфазных потоков выполнено в [22]. Здесь мы приведем только основные из них.

Расходные параметры. Для пояснения расходных параметров введем понятия массовой скорости и скорости циркуляции.

Величину, численно равную массовому расходу потока через единицу площади поперечного сечения, называют *массовой скоростью*. В отечественной литературе массовую скорость обычно обозначают не отдельным символом, а в виде произведения линейной скорости (w, м/с) на его плотность (ρ, кг/м³): $w\rho = M/f$. Здесь $w\rho$ — массовая скорость, кг/(м²·с); M — массовый расход, кг/с; f — площадь поперечного сечения, м².

При движении кипящей жидкости в трубе постоянного сечения $w\rho = \mathrm{const}$ по всей длине трубы.

Скорость жидкости на входе в трубу (до начала процесса парообразования) называют скоростью циркуляции (w_0). Очевидно, что $w_0 = M/f\rho_ж = w\rho/\rho_ж$.

Важными расходными характеристиками двухфазного потока являются массовое расходное паросодержание $x = M_п/(M_п + M_ж)$ и объемное расходное паросодержание $\beta = V_п/(V_п + V_ж)$. Величина x представляет собой отношение массового расхода пара $M_п$ к массовому расходу смеси $(M_п + M_ж)$; величина β — отношение объемного расхода пара $V_п = M/\rho_п$ к объемному расходу смеси $(V_п + V_ж) = M_п/\rho_п + M_ж/\rho_ж$.

Массовое и объемное паросодержание связаны между собой соотношениями:

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}\frac{\rho_п}{\rho_ж}}; \tag{7.35}$$

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1-\beta}{\beta}\frac{\rho_ж}{\rho_п}}. \tag{7.36}$$

При $x=0$ $\beta=0$ и при $x=1$ $\beta=1$. В остальной области $x<\beta$, так как $\rho_п<\rho_ж$.

Для характеристики двухфазных потоков применяют также понятия приведенных скоростей пара и жидкости. Это некоторые условные величины, представляющие собой отношение объемного расхода данной фазы к площади полного сечения трубы. Приведенная скорость пара $w_{оп} = V_п/f$, приведенная скорость жидкости $w_{ож} = V_ж/f$. По приведенным скоростям можно найти скорость смеси $w_{см} = V/f = w_{оп} + w_{ож}$.

Приведенные скорости и скорость смеси можно выразить через скорость циркуляции и x:

$$w_{оп} = w_0\rho_ж x/\rho_п;\quad w_{ож} = w_0(1-x);\quad w_{см} = w_0\left[1 + x\left(\frac{\rho_ж}{\rho_п} - 1\right)\right]. \tag{7.37}$$

Истинные параметры. В действительности каждая фаза занимает определенную часть сечения трубы, а скорости пара и жидкости в одном и том же сечении различны. Это учитывают истинными параметрами: истинным объемным паросодержанием φ, истинными скоростями пара $w_п$ и жидкости $w_ж$. Истинное объемное паросодержание представляет собой отношение части площади сечения, занятой паром, ко всей площади сечения: $\varphi = f_п/f$. Истинная скорость пара — это отношение объемного расхода пара к занимаемой им площади сечения: $w_п = V_п/f_п$. Истинная скорость жидкости — отношение объемного расхода жидкости к занимаемой ею площади сечения: $w_ж=V_ж/f_ж$. Очевидно, что $w_п=w_{оп}/\varphi$ и $w_ж=w_{о.ж}/(1-\varphi)$.

Относительную скорость фаз характеризуют коэффициентом скольжения $s=w_п/w_ж$ либо скоростью скольжения $w_{отн}=w_п-w_ж$.

Истинные и расходные параметры связаны уравнением

$$\varphi=\frac{1}{1+\frac{1-\beta}{\beta}s}=\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{x}\right)\frac{\rho_п}{\rho_ж}s}. \qquad (7.38)$$

Из уравнения (7.38) следует, что чем больше коэффициент скольжения фаз, тем в большей степени истинные параметры двухфазного потока отличаются от расходных. При $s=1$ $\varphi=\beta$.

Величина s (или φ) зависит от многих факторов: физических свойств вещества, давления насыщения, скорости циркуляции, диаметра трубы и ее ориентации в пространстве, режима течения, расходного паросодержания. Так, с ростом массовой скорости потока $w\rho$ или давления коэффициент скольжения уменьшается и значения φ и β сближаются.

Определение φ или s является предметом специальных исследований. В настоящее время имеются различные уравнения, полученные аналитическим или эмпирическим путем. Подробное рассмотрение этого вопроса можно найти в [22]. Имеющиеся опытные данные относятся в основном к газожидкостным или пароводяным потокам.

Для расчета истинного паросодержания хладонов в горизонтальных трубах диаметром от 6 до 16 мм и в вертикальных — диаметром от 6 до 30 мм могут быть использованы формулы, полученные в ЛТИХПе:

для горизонтальных труб

$$\varphi=\beta-2{,}55\beta(1-\beta)^{0{,}36}(Fr_0Ga_*)^{-0{,}11}; \qquad (7.39)$$

для вертикальных труб

$$\varphi=\beta-2{,}37\beta(1-\beta)^{0{,}36}(Fr_0Ga_*)^{-0{,}123}, \qquad (7.40)$$

где $Fr_0=w_0^2/gd_{вн}$; $Ga_*=g\left(\frac{\sigma}{g(\rho_ж-\rho_п)}\right)^{3/2}\Big/\nu_ж^2$.

Здесь Fr_0 — критерий Фруда, вычисленный по скорости циркуляции; Ga_* — модифицированный критерий Галилея, в котором в качестве характерного размера принята величина капиллярной постоянной.

При определенных условиях значения истинных и расходных параметров близки. Это означает, что $s\to 0$, $\varphi\to\beta$ и двухфазный поток можно рассматривать как гомогенный. Эти условия в большей степени соответствуют пузырьковому и дисперсно-кольцевому режимам течения и в наименьшей — расслоенному и кольцевому.

Теплоотдача при кипении в трубах. Теплообмен между поверхностью трубы и движущейся в ней кипящей жидкостью осуществляется двумя механизмами: механизмом, обусловленным процессом парообразования, и механизмом конвективного переноса теплоты при вынужденном движении однофазной среды. Поэтому значение коэффициента теплоотдачи зависит от интенсивности совокупного действия обоих процессов. Степень влияния каждого из них зависит от турбулентных возмущений, вносимых и вынужденным движением, и парообразованием, иначе говоря, от соотношения значений скорости вынужденного движения w и плотности теплового потока q (или температурного напора Δt).

Кроме того, интенсивность теплоотдачи при кипении внутри труб в большой степени зависит от режима течения двухфазного потока. Так, при расслоенном течении в горизонтальной трубе значение коэффициента теплоотдачи в нижней части трубы, занятой кипящей жидкостью, определяется интенсивностью парообразования и вынужденной конвекции, а в верхней — конвективным теплообменом между паром и стенкой.

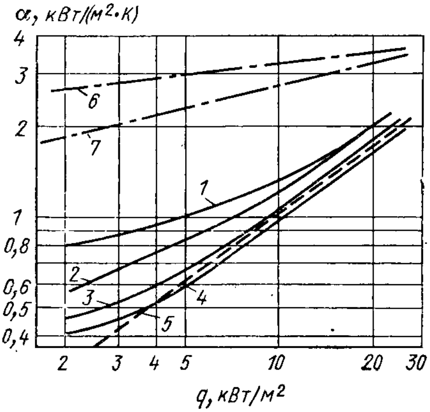
При пузырьковом, вспененном и снарядном режимах механизм парообразования будет реализовываться как путем зарождения, роста и отрыва пузырьков на стенке трубы, как и путем испарения на границе раздела фаз в объеме жидкости.

При кольцевом режиме течения теплота через жидкую пленку, примыкающую к стенке, передается путем теплопроводности и конвекции к границе раздела фаз, где происходит процесс парообразования (испарение жидкости). Основным термическим сопротивлением в этом случае является сопротивление пленки жидкости, а его величина зависит от степени турбулентности и толщины пленки. Термическое сопротивление пленки может иметь весьма малое значение, а разность между температурой стенки и локальной температурой насыщения в паровом ядре может быть даже меньше значения, необходимого для пузырькового кипения. Коэффициент теплоотдачи в этом случае может иметь значения, существенно более высокие, чем при развитом пузырьковом кипении.

При движении кипящей жидкости по длине трубы происходит смена режимов течения, а следовательно, изменяются механизм и интенсивность теплоотдачи. При разных режимах течения на коэффициент теплоотдачи влияют различные факторы. Так, при пузырьковом и снарядном режимах течения α при прочих равных условиях зависит от плотности теплового потока и скорости вынужденного течения и не зависит от паросодержания x. Это же относится и к теплоотдаче при расслоенном режиме течения на части трубы, омываемой кипящей жидкостью. При кольцевом и дисперсно-кольцевом режимах $\alpha=f(w, q, x)$, т. е. к факторам, определяющим α, кроме w и q относятся еще массовое паросодержание x или β (более строго — истинное паросодержание φ). Различный характер влияния q на α при снарядном и дисперсно-кольцевом режиме иллюстрируется рис. 7.14, где приведены данные ЛТИХПа, полученные в опытах с R12, кипящим в горизонтальной трубе ($d_{вн}=10$ мм) при $t_н=-18$°C.

С возрастанием x начинается высыхание пленки жидкости и коэффициент теплоотдачи резко падает; наступает режим ухудшенного теплообмена.

Точное описание теплоотдачи при кипении в трубах может быть осуществлено при рассмотрении каждого из режимов течения в от-



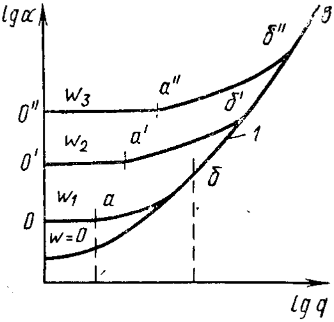


Рис. 7.14. Коэффициенты теплоотдачи при различных режимах двухфазного потока R12 в горизонтальной трубе:

снарядный режим (x=0,01; β=0,62): *1* — w_0=0,3 м/с; *2* — 0,158 м/с; *3* — 0,062 м/с; *4* — 0,035 м/с; *5* — кипение в большом объеме; дисперсно-кольцевой режим (x=0,4; β=0,99): *6* — w_0=0,3 м/с; *7* — 0,158 м/с

Рис. 7.15. Характер совместного влияния плотности теплового потока и скорости циркуляции на кипение внутри трубы (линия *1* — зависимость α от q при кипении в большом объеме)

дельности с учетом истинных параметров двухфазного потока. Для этого необходимо уметь предсказывать режимы течения при заданных условиях работы аппарата и рассчитывать φ или s.

Методика расчета средних коэффициентов теплоотдачи, учитывающая воздействие всех рассмотренных выше факторов, в настоящее время отсутствует. Некоторые подходы разных исследователей к решению этой проблемы в определенных частных случаях и предлагаемые на их основе расчетные соотношения изложены в [21].

Предложения по методике расчета теплоотдачи хладонов, кипящих в горизонтальных трубах, с учетом режимов течения потока приведены в [25].

Для группы режимов, при которых теплоотдача не зависит от паросодержания, качественный характер совместного влияния кипения и вынужденного движения на теплоотдачу можно описать с помощью диаграммы, предложенной С. С. Кутателадзе (рис. 7.15). Линия *1* соответствует кипению в большом объеме при w=0. При скорости циркуляции $w_0=w_1$ и малых q теплоотдача не зависит от процесса парообразования, а полностью определяется вынужденной конвекцией. С ростом q влияние кипения начинает сказываться на теплообмене (участок *аб*) и при некотором определенном $q=q_б$ становится преобладающим (точка *б*). При еще более высоких плотностях теплового потока теплоотдача определяется только парообразованием и описывается теми же закономерностями, что и при кипении в большом объеме (линия *бв*). С возрастанием скорости циркуляции (w_2 и w_3) значения $q_{б'}$ и $q_{б''}$, соответствующие прекращению ее влияния, увеличиваются.

Таблица 7.4. **Значения A в формуле (7.42)**

Холодильный агент	$t_н$, °C				
	—30	—10	0	10	30
R12	0,0536	0,0659	0,0719	0,0776	0,0928
R22	0,0599	0,0738	0,0833	0,0928	0,1170

Для расчета коэффициента теплоотдачи при кипении в условиях вынужденного движения С. С. Кутателадзе предложена простая интерполяционная формула, описывающая все участки кривой *Ов* на рис. 7.15,

$$\alpha/\alpha_w = \sqrt{1+(\alpha_q/\alpha_w)^2}, \tag{7.41}$$

где α — искомый коэффициент теплоотдачи; α_w и α_q — соответственно коэффициенты теплоотдачи при вынужденном движении однофазного потока в трубе и при развитом пузырьковом кипении, когда влияние скорости отсутствует.

Пределы применения формулы (7.41) ограничены $\beta<70\%$ [15].

Из-за недостаточности экспериментальных данных по локальным коэффициентам теплоотдачи в настоящее время нашли широкое применение частные эмпирические уравнения для расчета средних коэффициентов теплоотдачи по всей длине трубы. Использование таких уравнений может дать достаточно точные для практического применения результаты при идентичности режимов течения в проектируемом аппарате и в экспериментах, на основании которых получена расчетная формула.

В частности, ограничения применимости должны включать в себя не только пределы опытных значений q, $w\rho$, $d_{вн}$, но и значения $x_{вх}$ и $x_{вых}$ (либо длину трубы).

Для расчета средних значений коэффициентов теплоотдачи при кипении хладонов R12, R22, R142 в трубе ($d_{вн}=12$ мм; $l=1,5$ м) при $w\rho=50\div600$ кг/(м²·с) и $x_{вх}=0$ может быть использовано уравнение, полученное С. Н. Богдановым,

$$\alpha = Aq^{0,6}(w\rho)^{0,2}\, d_{вн}^{-0,2}. \tag{7.42}$$

Величина $A=f(t_н)$ для R12 и R22 приведена в табл. 7.4. Единицы измерения величин, входящих в уравнение: α — кВт/(м²·К); q — кВт/м²; $w\rho$ — кг/(м²·с); $d_{вн}$— м.

Выходные значения паросодержания лишь при меньших опытных $w\rho$ и больших q составляли 0,7—0,8. В большинстве случаев $x_{вых}=0,1\div0,2$.

Формулы для расчета средних α при кипении хладонов в горизонтальных трубах в случае полного ($x_{вых}=1$) и неполного ($x_{вых}=0,45\div0,9$) испарения можно найти в [13].

Глава 8. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА

8.1. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРОЦЕССЕ КОНДЕНСАЦИИ

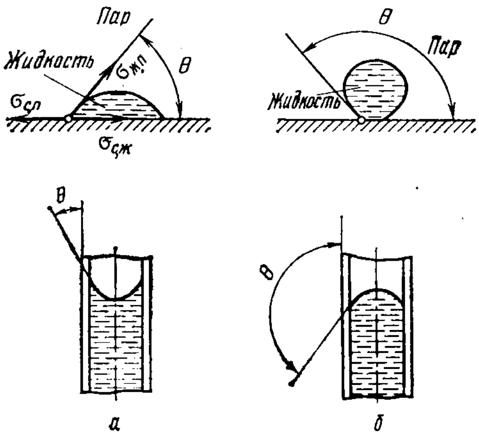
Процесс превращения вещества из парообразного состояния в жидкое называют конденсацией. Конденсация может происходить как в объеме пара, так и на охлаждаемой поверхности теплообмена. Объемная конденсация происходит в паре и парогазовой смеси, когда давление в объеме выше давления насыщенного пара над жидкостью при данной температуре, т. е. в переохлажденном (пересыщенном) паре. Для возникновения объемной конденсации необходимо наличие центров конденсации (мельчайшие пылинки и частички твердого тела, капли жидкости). Примерами такой конденсации могут служить конденсация водяного пара в объеме влажного воздуха, конденсация при расширении пара в последних ступенях паровых турбин.

В холодильной технике, теплоэнергетике, химической, пищевой и других отраслях промышленности имеют дело главным образом с конденсацией на поверхности твердого тела (внутри труб, на трубах, плоских стенках). Для возникновения конденсации температура поверхности теплообмена должна быть ниже температуры насыщения при данном давлении чистого пара или при его парциальном давлении, если пар находится в смеси с неконденсирующимися газами.

Различают два вида конденсации: пленочную и капельную. В начальный момент соприкосновения пара со стенкой на ней образуется мономолекулярный слой, который в процессе конденсации либо увеличивается и уплотняется (пленочная конденсация), либо, достигая толщины порядка микрометра, разрывается на части (капельная конденсация). В первом случае жидкая фаза стекает по поверхности охлаждения в виде сплошной непрерывной пленки, во втором — образуется в виде отдельных капель. Пленочная конденсация осуществляется на поверхностях, смачиваемых данной жидкостью, капельная — на несмачиваемых поверхностях.

Эффект смачивания обусловлен силами поверхностного натяжения, которые, как уже было показано при рассмотрении процессов кипения, определяют угол смачивания — краевой угол θ. Однако в данном случае рассматривается поведение жидкости, образующейся при конденсации пара, омывающего охлаждаемую поверхность (рис. 8.1). При $\theta<90^\circ$ жидкость (конденсат) растекается по стенке, при $\theta>90^\circ$ собирается в каплю.

Как показывает опыт, в случае конденсации водяного пара, паров холодильных агентов и криогенных веществ на чистых поверхностях теплообменных аппаратов происходит пленочная конденсация. Капельная конденсация может наблюдаться при загрязнении поверхности маслом и в некоторых других случаях. Заметим, что при капельной конденсации коэффициент теплоотдачи в 5—10 раз больше, чем при пленочной. Это обусловлено большим термическим сопротивлением конденсата, стекающего по поверхности ох-



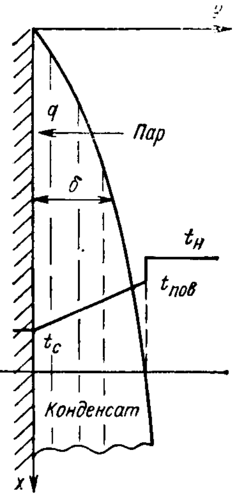


Рис. 8.1. Смачиваемые (*а*) и несмачиваемые (*б*) жидкостью поверхности (плоская стенка и стенка трубы)

Рис. 8.2. Характер распределения температуры при пленочной конденсации чистого насыщенного пара с учетом фазового сопротивления

лаждения в виде сплошной пленки в сравнении с сопротивлением капель конденсата, занимающих только часть этой поверхности. Осуществление капельной конденсации может представлять интерес с позиций интенсификации теплообмена. Капельную конденсацию можно получить искусственно с помощью специальных веществ (лиофобизаторов), наносимых на поверхность или вводимых в пар.

В дальнейшем рассматривается пленочная конденсация, характерная для работы конденсаторов теплоэнергетических, холодильных и криогенных установок.

Теплообмен при конденсации связан с фазовым переходом вещества из пара в жидкость, сопровождающимся одновременным переносом теплоты и массы от пара к поверхности теплообмена. Учитывая, что процесс конденсации обычно протекает при $p=\text{const}$, количество теплоты, переданной 1 кг пара, можно полагать равным разности энтальпии пара и жидкости (при конденсации насыщенного пара — равным теплоте парообразования). Количество перенесенной массы равно количеству сконденсированного пара.

Характер распределения температур при пленочной конденсации чистого насыщенного пара на плоской стенке показан на рис. 8.2. Пар вдали от охлаждающей поверхности имеет температуру насыщения $t_н$, на стенке $t_с$, температурный напор между паром и стенкой $\Delta t = t_н - t_с$. Термическое сопротивление $R=1/\alpha$ между паром и стенкой в общем случае можно представить как сумму двух сопротивлений: $R=R_к+R_ф$. Первое слагаемое $R_к$ представляет собой термическое сопротивление пленки конденсата, ему соответствует температурный напор между поверхностью раздела фаз и стенкой $\Delta t_к = t_{пов} - t_с$. Второе слагаемое $R_ф$ представляет собой межфазное термическое сопротивление, оно учитывает возникающий на границе раздела пар — жидкость скачок температур $\Delta t_ф = t_н - t_{пов}$. Наличие $\Delta t_ф$ связано с тем, что не все молекулы пара, ударяющиеся о поверхность жидкости, захватываются ею, часть молекул с поверхности жидкости испаряется и снова переходит в пар. Отношение числа молекул, захватываемых жидкостью, к общему числу молекул, поступающих из пара на ее поверхность, называется коэффициентом конденсации f. Значение $R_ф$ зависит от коэффициента конденсации и давления. Уравнение для расчета $R_ф$ приведено в [15, 33]. Для неметаллических жидкостей в условиях, исключающих высокий вакуум, можно считать $R_ф = 0$ [21]. В этом случае $t_{пов} = t_н$ и термическое сопротивление $R = R_к$.

Термическое сопротивление пленки конденсата зависит от режима ее течения. При ламинарном течении пленки теплота через пленку в направлении, перпендикулярном течению, передается теплопроводностью и $R_к = \delta/\lambda$, при турбулентном — теплопроводностью и конвекцией. Переход от первого режима ко второму зависит от критерия Рейнольдса для пленки $\mathrm{Re}_{пл} = \bar{w}\delta/\nu$, где $\bar{w}$ — средняя скорость; δ — толщина; ν — кинематический коэффициент вязкости пленки конденсата в данном сечении. Возможно также волновое течение пленки (см. ниже).

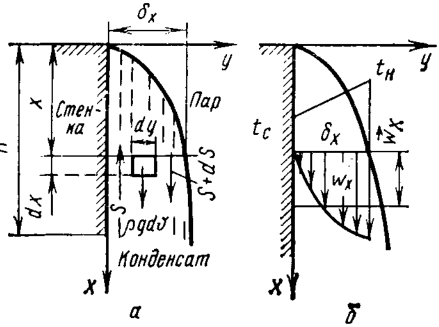
На интенсивность теплоотдачи при конденсации оказывает влияние скорость пара. Так, при его движении вдоль стенки возникает сила трения на границе раздела фаз, которая может подтормаживать либо ускорять течение пленки, изменяя тем самым ее толщину. В аппаратах холодильной и криогенной техники влияние скорости может существенно проявляться при конденсации в трубах и каналах. Влияние других факторов на конденсацию рассмотрено в [15].

8.2. ТЕОРИЯ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ НЕПОДВИЖНОГО ПАРА

Задача о теплоотдаче при пленочной конденсации чистого насыщенного пара была теоретически решена В. Нуссельтом в 1916 г. Рассмотрим основные положения этой теории.

Представим, что пар, имеющий температуру $t_н$, конденсируется на вертикальной стенке, температура которой $t_с < t_н$. Выпадающий конденсат стекает по стенке в виде сплошной пленки, толщина которой растет по мере ее перемещения сверху вниз. Требуется найти коэффициент теплоотдачи от конденсирующегося пара к стенке в стационарном режиме.

При решении этой задачи приняты следующие предпосылки и допущения: 1) движение жидкой пленки по всей поверхности ламинарное; 2) силы поверхностного натяжения на границе пленка — пар не влияют на характер течения пленки; 3) трение и температурный скачок на границе паровой и жидкой фаз пренебрежимо малы; 4) силы инерции, возникающие в пленке, пренебрежимо малы в сравнении с силами тяжести и трения; 5) температура внешней по-



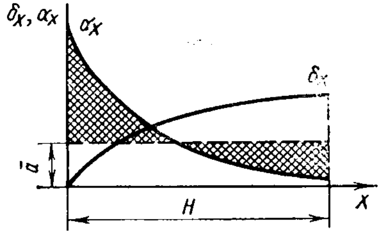


Рис. 8.3. Схема пленочной конденсации на вертикальной стенке при ламинарном течении пленки:

а — силы, действующие в пленке; *б* — распределение температур и скоростей в сечении x

Рис. 8.4. Характер изменения δ_x и α_x по высоте стенки

верхности пленки равна $t_н$ и так же, как и $t_с$, не меняется по высоте стенки; 6) физические параметры конденсата λ, c, ρ не зависят от температуры; 7) плотность пара пренебрежимо мала по сравнению с плотностью жидкости.

При этих предпосылках можно, в частности, считать, что передача теплоты в пленке осуществляется только теплопроводностью в направлении, перпендикулярном стенке.

Схема стекания конденсата показана на рис. 8.3. Расположим ось x вдоль стенки, а ось y — перпендикулярно ей. Изобразим распределение температур в сечении, находящемся на расстоянии x от начала координат (далее для краткости это сечение будем называть сечением x), и обозначим толщину пленки в этом сечении δ_x, а размер, перпендикулярный плоскости чертежа, примем равным 1 м.

В соответствии с законом Фурье плотность теплового потока, который пройдет через пленку от поверхности ее соприкосновения с паром к поверхности соприкосновения со стенкой, в сечении x

$$q_x = (\lambda/\delta_x)(t_н - t_с). \tag{8.1}$$

Та же плотность теплового потока, выраженная с помощью закона Ньютона,

$$q_x = \alpha_x (t_н - t_с). \tag{8.2}$$

Сопоставляя выражения (8.1) и (8.2), получаем

$$\alpha_x = \lambda/\delta_x. \tag{8.3}$$

Каждому сечению x соответствуют определенная (локальная) толщина пленки δ_x и локальный коэффициент теплоотдачи α_x [см. уравнение (8.3)], причем с увеличением x толщина пленки увеличивается, а α_x уменьшается. Характер изменения локальных значений толщины пленки и коэффициента теплоотдачи в зависимости от длины участка конденсации показан на рис. 8.4.

Средний коэффициент теплоотдачи для стенки высотой H можно найти из выражения

$$\alpha = \frac{1}{H}\int_0^H \alpha_x\, dx. \tag{8.4}$$

Графическая интерпретация α дана на рис. 8.4. Заштрихованные площади должны быть равны между собой.

Из уравнения (8.4) следует, что для определения среднего коэффициента теплоотдачи надо найти зависимость $\alpha_x=f(x)$, для чего, учитывая уравнение (8.3), необходимо установить математическую связь между δ_x и x.

Зависимость $\delta_x=f(x)$ определяется на основании следующих соображений. Приращение расхода жидкости в пленке на участке dx может быть найдено двумя путями: по изменению средней скорости жидкости при переходе от сечения x к сечению $(x+dx)$ и по количеству пара, сконденсировавшегося на участке площадью $dx\cdot 1$.

Для определения средней скорости конденсата w_x найдем уравнение, описывающее распределение скорости жидкости в сечении x, т. е. найдем зависимость $w_x=f(y)$. Величина скорости w_x меняется от нуля на стенке до максимального значения на границе пленка — пар (см. рис. 8.3. *б*). Это следует из первой части допущения 3 и закона Ньютона, по которому сила трения S, отнесенная к 1 м² поверхности трения, равна

$$S = \mu\, dw_x/dy, \tag{8.5}$$

при $S=0$ $dw_x/dy=0$.

Выделим в сечении x элементарный объем жидкости, имеющий форму параллелепипеда и размеры dx, dy и 1 м (см. рис. 8.3, *а*). На левую грань параллелепипеда действует сила S, затормаживающая движение жидкости в пленке, на правую — сила $(S+dS)$, увлекающая за собой жидкость. Такие направления сил обусловлены рассмотренным выше характером изменения скорости. Таким образом, на параллелепипед действуют: 1) сила тяжести, равная $\rho g dV=\rho g dx dy$, и 2) сила трения $dSdx$. Силой инерции, как указывалось выше, пренебрегаем. Условие равновесия этих сил описывается уравнением

$$\rho g\, dx\, dy + dS\, dx = 0, \tag{8.6}$$

отсюда

$$dS/dy = -\rho g. \tag{8.7}$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (8.5), получаем

$$dS/dy = \mu (d^2 w_x/dy^2). \tag{8.8}$$

Из сопоставления (8.7) и (8.8) вытекает, что

$$d^2 w_x/dy^2 = -\rho g/\mu. \tag{8.9}$$

Интегрируем уравнение (8.9):

$$\frac{dw_x}{dy} = -\frac{\rho g}{\mu} y + C_1; \tag{8.10}$$

$$w_x = -\frac{\rho g}{\mu}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2. \tag{8.11}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 используем граничные условия: при $y=0$ $w_x=0$; при $y=\delta_x$ $dw_x/dy=0$. Подставив первое в (8.11), а второе в (8.10), получим: $C_2=0$ и $C_1=$ $=g\rho\delta_x/\mu$. С учетом этого выражение (8.11) примет вид

$$w_x = -\frac{g\rho}{\mu}\frac{y^2}{2} + \frac{g\rho\delta_x}{\mu} y. \tag{8.12}$$

Соотношение (8.12) характеризует закон распределения скоростей по толщине пленки. Средняя скорость жидкости в сечении x (см. рис. 8.3, *б*)

$$\overline{w}_x = \frac{1}{\delta_x}\int\limits_0^{\delta_x} w_x\, dy. \tag{8.13}$$

Подставляем (8.12) и (8.13) и интегрируем:

$$w_x = \frac{1}{\delta_x}\int\limits_0^{\delta_x} \frac{g\rho}{\mu}\left(\delta_x y - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{g\rho}{\delta_x\mu}\left[\delta_x\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^{\delta_x} = \frac{g\rho}{\delta_x\mu}\left(\frac{\delta_x^3}{2} - \frac{\delta_x^3}{6}\right);$$

$$\overline{w}_x = g\rho\delta_x^2/3\mu. \tag{8.14}$$

Массовый расход жидкости G_x (кг/с), протекающей через сечение x (площадь составляет $\delta_x\cdot 1$),

$$G_x = \overline{w}_x\delta_x\rho. \tag{8.15}$$

Подставив в (8.15) значение скорости из (8.14), получим

$$G_x = g\rho^2\delta_x^3/3\mu.$$

Массовый расход жидкости, протекающей через сечение $(x+$ $+dx)$, увеличится в сравнении с G_x на величину

$$dG_x = d\left(\frac{g\rho^2\delta_x^3}{3\mu}\right).$$

Дифференцируя, получаем

$$dG_x = \frac{g\rho^2\delta_x^2}{\mu}\, d\delta_x. \tag{8.16}$$

Приращение массового расхода, обусловленное конденсацией пара на участке поверхности площадью $dx\cdot 1$, может быть найдено как

$$dG_x = dQ_x/r. \tag{8.17}$$

Здесь dQ_x — тепловой поток, проходящий от пара к стенке через пленку конденсата.

Очевидно, что $dQ_x=q_x dx$, или с учетом уравнения (8.1)

$$dQ_x=\frac{\lambda(t_н-t_с)}{\delta_x}\,dx.$$

Подставив найденное значение dQ_x в (8.17) и заменив $(t_н-t_с)=\Delta t$, получим

$$dQ_x=(\lambda\Delta t/\delta_x r)\,dx. \qquad (8.18)$$

Из уравнений (8.16) и (8.18) следует, что

$$\delta_x^3\,d\delta_x=(\lambda\mu/r\rho^2 g)\,\Delta t\,dx.$$

Интегрируя последнее выражение, получаем

$$\delta_x^4/4=(\lambda\mu/rg\rho^2)\,\Delta t x+C. \qquad (8.19)$$

Из граничного условия $x=0$, $\delta_x=0$ находим $C=0$. Решаем уравнение (8.19) относительно δ_x:

$$\delta_x=\sqrt[4]{\frac{4\lambda\mu\Delta t x}{rg\rho^2}}=\sqrt[4]{\frac{4\lambda\nu\Delta t x}{rg\rho}}. \qquad (8.20)$$

Подставляя (8.20) в (8.3), находим

$$\alpha_x=\sqrt[4]{\frac{rg\rho^2\lambda^3}{4\mu\Delta t x}}=\sqrt[4]{\frac{rg\rho\lambda^3}{4\nu\Delta t x}}. \qquad (8.21)$$

С помощью выражений (8.4) и (8.21) определяем средний коэффициент теплоотдачи при конденсации пара на стенке высотой H:

$$\alpha=\frac{1}{H}\sqrt[4]{\frac{rg\rho^2\lambda^3}{4\mu\Delta t}}\int_0^H x^{-1/4}\,dx=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{rg\rho^2\lambda^3}{4\mu\Delta t H}};$$

$$\alpha=0{,}943\sqrt[4]{\frac{rg\rho^2\lambda^3}{\mu\Delta t H}}=0{,}943\sqrt[4]{\frac{rg\rho\lambda^3}{\nu\Delta t H}}. \qquad (8.22)$$

На рис. 8.5 показано, как изменяется толщина пленки конденсата по высоте вертикальной стенки при конденсации паров воды, аммиака и R12. Представленные кривые найдены с помощью уравнения (8.20) при $t_н=40$°С и $\Delta t=10$°С. При этих же условиях и высоте стенки 1 м средние значения коэффициентов теплоотдачи α соответственно равны для воды, аммиака и R12: 5070, 3920, 705 Вт/(м²·К).

Несмотря на то что толщина конденсатной пленки R12 примерно в 1,5 раза меньше, чем воды, средний коэффициент теплоотдачи конденсирующего водяного пара примерно в 7 раз больше, чем пара R12. Это вызвано тем, что теплопроводность жидкого R12 примерно в 10 раз меньше, чем теплопроводность воды.

Приведенный выше вывод и соотношения (8.20), (8.21) и (8.22) справедливы для конденсации на вертикальной стенке и вертикальной трубе.

Пленочная конденсация на горизонтальной трубе схематически показана на рис. 8.6. Если условно принять, что поверхность горизонтальной трубы образована рядом небольших плоских эле-

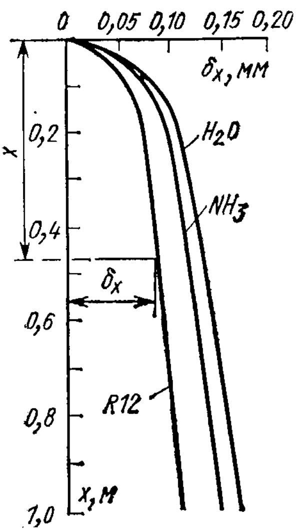


Рис. 8.5. Сравнение толщины пленки конденсата при ламинарном течении для разных веществ

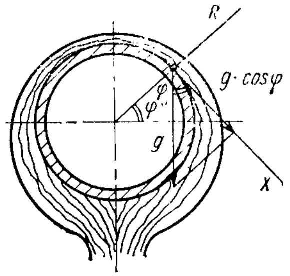


Рис. 8.6. Схема пленочной конденсации на горизонтальной трубе

ментов, имеющих различный угол наклона к горизонту, то для каждого из таких элементов справедливы приведенные выше рассуждения с той разницей, что в уравнение действующих сил надо ввести вместо g проекцию ускорения свободного падения на ось x, равную $g\cos\varphi = g\sin\psi$. При этом уравнение (8.6) примет вид $\rho g \sin\psi dy + ds = 0$. Здесь φ — угол между направлением силы тяжести и осью x (см. рис. 8.6); ψ — угол наклона рассматриваемого плоского элемента к горизонту.

Соответственно коэффициент теплоотдачи для конденсации на наклонной стенке

$$\alpha_\psi = \alpha_{\text{вер}} \sqrt[4]{\sin\psi}\,.$$

Учитывая, что при стекании по трубе ψ изменяется от 0 до 180°, Нуссельт получил формулу для среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации на горизонтальной трубе, которая (с уточненной позже величиной коэффициента перед корнем) выглядит так:

$$\alpha = 0{,}728\sqrt[4]{\frac{rg\rho^2\lambda^3}{\mu\Delta t d}} = 0{,}728\sqrt[4]{\frac{rg\rho\lambda^3}{\nu\Delta t d}}\,. \qquad (8.23)$$

Уравнение (8.23) отличается от (8.22) величиной множителя перед корнем и определяющим размером, который в случае горизонтальной трубы равен ее наружному диаметру.

Единицы измерения величин, входящих в выражения (8.22) и (8.23): α — Вт/(м²·К); r — Дж/кг; ρ — кг/м³; λ — Вт/(м·К); μ — Па·с; Δt — К; H и d — м; ν — м²/с.

Уравнения (8.22) и (8.23) с помощью закона Ньютона — Рихмана можно представить и в виде зависимостей α от q.

Полученные соотношения справедливы для любой жидкости. Входящие в них величины ρ, λ и μ (или ν), характеризуют теплофизические свойства конденсата, и потому их надо находить по средней температуре пленки $t_{ср}=0{,}5\ (t_н+t_с)$, а теплоту парообразования r — по температуре $t_н$.

Уравнения (8.22) и (8.23) могут быть представлены и в безразмерном виде, т. е. в виде уравнения подобия. Получим такое уравнение. Обозначим постоянный множитель перед корнем в уравнениях (8.22) и (8.23) через C и определяющий размер l_0, умножим правую и левую части уравнения на l_0/λ. Тогда получим

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda}=C\left(\frac{rg\rho l_0^3}{\Delta t\nu\lambda}\right)^{1/4}.$$

Заменив $\lambda=ac_p\rho$ и умножив числитель и знаменатель на ν, имеем

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda}=C\left(\frac{r}{c_p\Delta t}\,\frac{gl_0^3}{\nu^2}\,\frac{\nu}{a}\right)^{1/4}.$$

Левая часть полученного соотношения представляет собой критерий Nu, а правая — произведение критерия фазового превращения K на критерии Ga и Pr. Таким образом, уравнение подобия, описывающее теплоотдачу при конденсации неподвижного пара при ламинарном движении пленки имеет вид

$$\mathrm{Nu}=C\,(\mathrm{K\,Ga\,Pr})^{1/4}. \qquad (8.24)$$

Здесь $\mathrm{K}=r/c_p\Delta t$; $\mathrm{Ga}=gl_0^3/\nu^2$; $\mathrm{Pr}=\nu/a$.

Для вертикальной стенки и трубы $C=0{,}943$; $l_0=H$; для горизонтальной трубы $C=0{,}728$; $l_0=d$.

Критерий фазового перехода K был впервые введен С. С. Кутателадзе для описания процессов теплообмена при изменении агрегатного состояния вещества. Он характеризует соотношение между теплотой, идущей на фазовый переход вещества, и теплотой переохлаждения (при кипении — теплотой перегрева) одной из фаз по отношению к температуре насыщения.

Зависимость (8.24) можно получить и обычными методами теории подобия, т. е. рассмотрев дифференциальные уравнения, характеризующие процесс, и использовав опытные данные для получения численных значений C и показателя степени у критериев (см., например, [27]).

8.3. ВЛИЯНИЕ ФАКТОРОВ, НЕ УЧИТЫВАЕМЫХ ТЕОРИЕЙ НУССЕЛЬТА

Теория Нуссельта вследствие принятых допущений является приближенной. Тем не менее общие закономерности процесса теплоотдачи при конденсации, предсказываемые ею, подтверждаются экспериментально. Для условий опытов, приближающихся к принятым в предпосылках Нуссельта, имеется хорошее количественное согласование с теорией. Рассмотрим главные отклонения от теории Нуссельта, которые встречаются при осуществлении процесса конденсации на практике и влияют на величину коэффициента теплоотдачи.

Влияние режима стекания пленки. Режим движения пленки в зависимости от ее толщины и длины участка течения может быть ламинарным или турбулентным. При этом ламинарное течение может сопровождаться волновым движением пленки, возникновение которого связано с силами поверхностного натяжения между поверхностью пленки и паром и случайными возмущениями на поверхности пленки.

Вертикальные стенки и трубы. Опытные значения α при конденсации на вертикальных стенках и трубах оказываются более высокими, чем вычисленное по формуле Нуссельта (8.22). Это можно объяснить тем, что в действительности в этих условиях течение конденсатной пленки имеет волновой характер. Случайные возмущения могут деформировать внешнюю поверхность пленки и отклонять ее от равновесного состояния. Силы поверхностного натяжения стремятся вернуть пленку в равновесное состояние. В результате на поверхности пленки возникают волны.

П. Л. Капица показал, что при установившемся периодическом волновом стекании пленки по вертикальной стенке ее среднее термическое сопротивление несколько меньше, чем при строго ламинарном течении при том же расходе жидкости G. Соответственно средний коэффициент теплоотдачи примерно на 20% выше, чем при ламинарном течении, т. е. $\alpha = 1{,}20\alpha_0$, где α_0 определяется по уравнению (8.22)

В действительности, как показали исследования, волновое течение обычно имеет хаотичный, беспорядочный характер, а амплитуды волн увеличиваются с увеличением расхода жидкости в пленке [27]. Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи с учетом развития волнового течения пленки Д. А. Лабунцовым предложена поправка к формуле Нуссельта в виде множителя

$$\varepsilon_v = (\mathrm{Re})^{0{,}04}. \tag{8.25}$$

При $\mathrm{Re} \leqslant 1$ $\varepsilon_v = 1$, при $\mathrm{Re} = 100$ $\varepsilon_v = 1{,}20$ и при $\mathrm{Re} = 400$ $\varepsilon_v = 1{,}27$.

Здесь Re — критерий Рейнольдса, для пленки, отнесенный к нижнему по ходу течения конденсата сечению и вычисленный при температуре насыщения.

При конденсации на вертикальной трубе

$$\alpha = \alpha_{\mathrm{Nu}}\varepsilon_v = 0{,}943\varepsilon_v \sqrt[4]{\frac{rg\rho\lambda^3}{\nu\Delta tH}}. \tag{8.26}$$

Выражение критерия Рейнольдса жидкостной пленки в произвольном сечении, находящемся на расстоянии x от начала участка конденсации, $\mathrm{Re}_x = \overline{w}_x\delta_x/\nu$ можно преобразовать, выразив произведение $\overline{w}_x\delta_x$ через расход конденсата $G_x = \rho\overline{w}_x\delta_x l_z$ (l_z — размер, перпендикулярный плоскости $x - y$ на рис. 8.3). В свою очередь $G_x = Q_x/r$, а $Q_x = \overline{q}_x x l_z = \overline{\alpha}_x \Delta\overline{t}_x l_z$. В этих соотношениях тепловой поток, переданный паром стенке на участке высотой x; $\overline{q}_x$, $\overline{\alpha}_x$ и $\Delta\overline{t}_x$ — средние значения плотности теплового потока, коэффициента теплоотдачи и температурного напора для этого участка. С учетом приве-

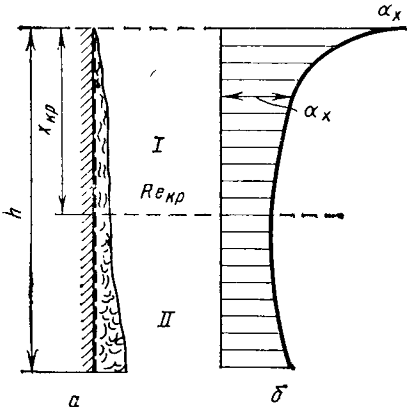


Рис. 8.7. Конденсация на вертикальной стенке большой высоты:

а — режимы течения пленки: *I* — ламинарно-волновое; *II* — турбулентное течение; *б* — изменение коэффициента теплоотдачи по высоте

денных соотношений запишем:

$$\mathrm{Re}_x = \frac{G_x}{\rho l_z \nu} = \frac{\bar{q}_x x}{r\rho\nu} = \frac{\bar{\alpha}_x \Delta t_x x}{r\rho\nu}. \tag{8.27}$$

Для определения коэффициента теплоотдачи среднего для стенки высотой H при ламинарно-волновом течении сначала по уравнению (8.22) определяют α для ламинарного течения, затем $\mathrm{Re}_{x=H}$ по формуле (8.27) и ε_v по уравнению (8.25). После этого рассчитывают α по уравнению (8.26).

Наиболее часто используемое значение $\varepsilon_v = 1{,}22$, тогда

$$\alpha = 1{,}15 \sqrt[4]{\frac{rg\rho\lambda^3}{\nu\Delta t H}}. \tag{8.28}$$

Эту формулу обычно и применяют для расчета α при конденсации пара на вертикальных плоских стенках и трубах.

Верхний предел применения формулы (8.26) ограничен критическим значением критерия Рейнольдса для пленки $\mathrm{Re}_{кр}$.

По данным разных авторов, $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_{кр}$ имеет различные численные значения — от 60 до 500.

При турбулентном режиме течения пленки ламинарное движение сохраняется только в пристенном пограничном слое, в остальной части имеет место вихревое движение (рис. 8.7). Критическому числу Рейнольдса для пленки, которое может быть принято [15] равным $\mathrm{Re}_{кр} = 400$, соответствует определенная высота стенки (или трубы) $x_{кр}$, при которой происходит переход от ламинарного движения в турбулентное.

Заметим, что в некоторых книгах значение Re для пленки определяется по учетверенному значению G, т. е. $\mathrm{Re} = 4G/\rho l_z \nu$. В этом случае $\mathrm{Re}_{кр} = 1600$.

Совместное решение уравнений (8.27), (8.22) позволяет представить $x_{кр}$ в виде

$$x_{кр} = 1{,}08 \frac{\nu^{5/3}\rho r}{g^{1/3}\lambda\Delta t} \mathrm{Re}_{кр}^{4/3} = 0{,}506 \frac{\nu^{5/3}\rho r}{\lambda\Delta t} \mathrm{Re}_{кр}^{4/3}. \tag{8.29}$$

Из сказанного выше следует, что при конденсации неподвижного пара на вертикальных трубе или стенке режим движения может быть либо ламинарно-волновым, либо смешанным: ламинарно-волновым в верхней и турбулентным в нижней части трубы.

При высоте трубы или стенки $H > x_{кр}$ в верхней части на участке от $x = 0$ до $x = x_{кр}$ имеет место ламинарно-волновое, на участке от $x = x_{кр}$ до $x = H$ — турбулентное, а в целом на поверхности высотой H — смешанное течение пленки конденсата. Значение $x_{кр}$ может быть подсчитано по уравнению (8.28) и зависит от температурного напора, теплофизических свойств конденсата и ускорения свободного падения. При $t_н=30°C$ и $\Delta t=5°C$ для аммиака $x_{кр}=3{,}5$ м, для R12—5,2 м, для R22—4,9 м.

Конденсация при турбулентном и смешанном режимах течения пленки исследовалась С. С. Кутателадзе, Д. А. Лабунцовым, Р. Даклером и др. Для смешанного режима движения пленки расчет коэффициента теплоотдачи можно осуществить с помощью следующего уравнения подобия, предложенного Д. А. Лабунцовым [27]:

$$\frac{\alpha l_g}{\lambda}=\frac{400}{Z}\left[1+0{,}625\,\mathrm{Pr}^{0,5}\left(\frac{Z}{Z_{кр}}-1\right)\right]^{4/3}. \qquad (8.30)$$

Здесь определяющими являются критерий Pr и критерий $Z=(\lambda\Delta tH)/(r\mu\, l_g)$, характеризующий приведенную высоту стенки. Индекс g при l указывает на то, что формула относится к случаю, когда пленка конденсата движется под действием силы тяжести (или, иначе,— ускорения свободного падения g).

Определяемым в уравнении является безразмерный параметр $\alpha l_g/\lambda=\mathrm{Re}/Z$ [при Re, соответствующем выражению (8.27)]. Величина $l_g=(\nu^2/g)^{1/3}$ выражена в метрах и играет роль характерного размера. Формулой (8.30) удобно пользоваться, если задан температурный напор Δt. В случае, когда задана плотность теплового потока, определяющим является критерий Re и расчетное уравнение удобно представить в виде [27]

$$\frac{\alpha l_g}{\lambda}=\frac{0{,}173\,\mathrm{Pr}^{0,5}(\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{кр})}{\mathrm{Pr}^{0,5}+1{,}6\,[(\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{кр})^{3/4}-1]}. \qquad (8.31)$$

При $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$, когда на большей части поверхности пленка движется турбулентно, уравнение принимает вид

$$\alpha l_g/\lambda=0{,}017\,\mathrm{Re}^{0,25}\mathrm{Pr}^{0,5}. \qquad (8.32)$$

Заметим, что в процессах конденсации Re для пленки помимо своей обычной роли гидродинамического критерия непосредственно характеризует и интенсивность теплообмена.

В уравнениях (8.30) — (8.32) определяющей температурой служит температура насыщения $t_н$.

Горизонтальные трубы. При конденсации на горизонтальных трубах не слишком большого диаметра волновое течение (и тем более турбулентное) не успевает развиваться, и опытные данные подтверждают справедливость формулы (8.23). По рекомендациям Д. А. Лабунцова, поправку на волновое движение нужно вводить при диаметре трубы $d>(\sigma/\rho g)^{0,5}$. В соответствии с этим при $t_н=30°C$ волновой режим стекающей конденсатной пленки R12 и R22 может наблюдаться на трубах с $d>16{,}5$ мм, аммиака — на трубах с $d>40$ мм.

Влияние сил инерции, конвективного переноса теплоты и изменения теплофизических свойств конденсата. Как показали теоретические исследования, влиянием сил инерции и конвективного переноса теплоты в ламинарной пленке можно пренебречь [15, 27] при $1\leqslant \mathrm{Pr}\leqslant 100$ и $\mathrm{K}=r/c_p\,\Delta t>5$. Таким образом, в обычных условиях конденсации, которые соответствуют этим значениям K и Pr, теория Нуссельта согласуется с опытом.

Изменение теплофизических свойств конденсата (λ и μ) с температурой в общем случае влияет на величину α. В практических расчетах по формулам (8.22) — (8.24) и (8.26) удобнее относить все теплофизические свойства конденсата к температуре $t_н$. В этом случае, как и при использовании формул (8.30), (8.32), по предложению Д. А. Лабунцова, влияние температуры пленки на α можно учитывать, умножая значение α, вычисленное по перечисленным формулам на множитель

$$\varepsilon_t = [(\lambda_с/\lambda_н)^3 (\mu_н/\mu_с)]^{1/8} \cong (Pr_н/Pr_с)^{1/4}. \quad (8.33)$$

Поправка ε_t получена при $0,5 \leqslant \lambda_н/\lambda_с \leqslant 2$; $0,1 \leqslant \mu_н/\mu_с \leqslant 1$. При малых значениях Δt, характерных для условий работы конденсаторов холодильных машин, $\varepsilon_t \simeq 1$.

При конденсации на вертикальных и наклонных плоских стенках влиянием изменения температуры стенки можно пренебречь. При конденсации на горизонтальной трубе в случае переменной $t_с$, отвечающей условию $q_с = \mathrm{const}$, значение коэффициента теплоотдачи ниже рассчитанного по уравнению (8.23) примерно на 5% [15].

Влияние перегрева и влажности пара. Если температура пара $t_п$ выше температуры конденсации, а температура стенки $t_с < t_п$, то, подходя к поверхности теплообмена, пар должен охлаждаться и возле поверхности пленки иметь температуру $t_н$. При этом он передает конденсату, а через него стенке теплоту

$$r' = r + q_п = r + (i_п - i''), \quad (8.34)$$

где $q_п$ — теплота перегрева; $i_п$ и i'' — энтальпии перегретого и сухого насыщенного пара.

Из имеющихся в настоящее время данных следует, что теплоотдача при конденсации перегретого пара подчиняется уравнениям для насыщенного, если вместо r в них подставить r' из уравнения (8.34), а в качестве температурного напора принимать, как для насыщенного пара, $\Delta t = t_н - t_с$.

Влияние влажности пара исследовано недостаточно. Ориентировочно можно считать, что при массовой доле влаги 10—20% ее влиянием на α можно пренебречь. По рекомендациям [34] влияние влажности можно учесть подстановкой в расчетные уравнения вместо r величины rx, где x — паросодержание.

Влияние ориентации трубы. Рассмотрение формул (8.23) и (8.28) позволяет найти следующее соотношение для коэффициентов теплоотдачи горизонтальной и вертикальной труб при прочих равных условиях:

$$\alpha_г/\alpha_{верт} = \frac{0,728}{1,15} \sqrt[4]{H/d} = \sqrt[4]{H/6,23d}.$$

Очевидно, что при $6,23 < H < x_{кр}$ теплоотдача на горизонтальной трубе выше, чем на вертикальной. При $H > x_{кр}$ следует сравнивать коэффициент теплоотдачи горизонтальной трубы $\alpha_г$, рассчитанной по (8.23), с $\alpha_{верт}$, рассчитанным по формулам (8.30) — (8.32).

Влияние состояния поверхности. При конденсации на шероховатых или окисленных поверхностях коэффициент теплоотдачи уменьшается, так как из-за сопротивления течению увеличивается толщина пленки конденсата. Кроме этого, окисные осаждения создают дополнительное термическое сопротивление переносу теплоты от пара к стенке.

Влияние скорости пара. В теории Нуссельта не учитывается скорость движения пара. В действительности он не может быть абсолютно неподвижным, так как место пара, сконденсированного у поверхности пленки, занимает пар, подтекающий из основной массы. Если объем этой массы неограничен, то средняя скорость подтекания пара $w_п = q/r\rho''$. В этом случае даже при высоких q (более 10^5 Вт/м^2) скорость $w_п$ невелика и пар можно рассматривать как неподвижный.

Если же конденсация происходит в аппарате, где пар имеет некоторую начальную скорость и обычно движется в ограниченном пространстве (межтрубном, кольцевом или щелевом), скорость пара оказывает существенное влияние на условия теплоотдачи. Движение пара создает силу трения между поверхностью пленки и паром, которая воздействует на движение пленки.

В случае, если конденсирующийся пар движется вдоль поверхности конденсации к силам тяжести и трения, действующим в пленке, добавляется сила трения на границе раздела пар — конденсат и, как следствие, возникает динамическое воздействие пара на пленку.

При движении пара и конденсата в одном направлении (спутное движение) эта сила будет убыстрять течение жидкости в пленке, вследствие чего толщина последней будет меньше, а коэффициент теплоотдачи выше, чем для неподвижного пара.

Если движение пара противоположно течению конденсата (встречное движение), то при невысоких скоростях пара течение пленки может замедляться, при высоких — ускоряться. В зависимости от соотношения значений сил тяжести и трения могут существовать следующие условия: 1) силы тяжести существенно преобладают над динамическим воздействием пара, и теплоотдача остается такой же, как и в случае неподвижного пара; 2) силы тяжести и динамическое воздействие пара на пленку соизмеримы, пленка может подтормаживаться паром, толщина ее при этом увеличивается, и теплоотдача ухудшается; 3) динамическое воздействие пара на пленку преобладает над силами тяжести, пар увлекает за собой пленку, и теплоотдача улучшается вне зависимости от ориентации канала, в котором происходит конденсация. Рассмотрим эти представления применительно к процессам конденсации на вертикальной стенке и на поверхности горизонтальной трубы.

В е р т и к а л ь н а я с т е н к а. Для случая ламинарного течения пленки решение с учетом скорости пара, т. е. силы межфазного трения, было выполнено Нуссельтом. Остальные условия

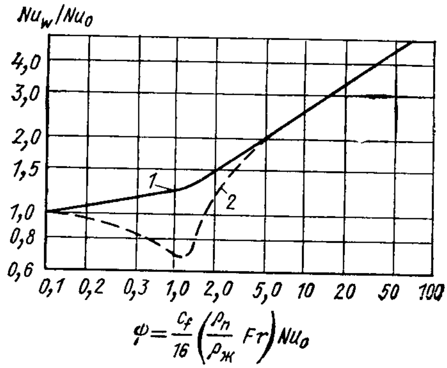


Рис. 8.8. Влияние движения пара на интенсивность теплоотдачи при конденсации пара на вертикальной стенке [к анализу уравнения (8.35)]:

1 — движение пара и пленки сверху вниз; 2 — движение пара вверх

были приняты теми же, что и для неподвижного пара. Согласно этому решению

$$\frac{Nu_w}{Nu_0}=f\left(c_f,\ \frac{\rho_п}{\rho_ж},\ Fr,\ Nu_0\right)=f_1(\psi). \qquad (8.35)$$

Здесь $Nu_w=\alpha_w H/\lambda$ — критерий Нуссельта для быстродвижущегося пара; α_w — коэффициент теплоотдачи для этого случая; $Nu_0=\alpha_0 H/\lambda$ — критерий Нуссельта для неподвижного пара; α_0 — рассчитывается по формуле (8.22); $Fr=w^2_{п.о}/gH$; c_f — коэффициент трения на границе раздела фаз; $w_{п.о}$ — скорость пара на входе в канал.

$$\psi=(c_f/16)(\rho_п Fr Nu_0/\rho_ж).$$

На рис. 8.8 [14] представлено графическое изображение уравнения (8.35), иллюстрирующее рассмотренные выше особенности теплоотдачи при конденсации движущегося пара. Как видно из графика, при значении абсциссы $\psi>4$ направление движения не влияет на теплоотдачу, что соответствует пренебрежимо малому влиянию силы тяжести. При встречном направлении силы тяжести движения пара минимальное значение теплоотдачи соответствует $\psi\simeq1,33$. При $\psi>1,33$ пленка увлекается паром вверх, теплоотдача растет; при изменении от 0,1 до 1,33 пленка движется вниз и утолщается, теплоотдача уменьшается.

При турбулентном режиме движения пленки влияние скорости качественно такое же, как и при ламинарном. Количественное влияние динамического воздействия пара более значительно. Критическое число Рейнольдса при конденсации движущегося пара $Re_{пл}=200$ [15].

Горизонтальная одиночная труба. Средний коэффициент теплоотдачи при конденсации движущегося пара на поверхности поперечно омываемой трубы (в случае спутного движения) может быть рассчитан по уравнению И. Г. Шекриладзе и Г. И. Жоржолиани, полученному расчетно-теоретическим путем [14],

$$Nu_w=0,64Re^{1/2}\left[1+\left(1,69\frac{KPr}{Fr}\right)^{1/2}\right]^{1/2}. \qquad (8.36)$$

Пределы изменения критериев, входящих в уравнение: $Re=1\div10^6$; $KPr/Fr=10^{-5}\div10^5$, где $Re=w_{п.о}d/\nu$; $Fr=w^2_{п.о}/gd$. Здесь $w_{п.о}$ — скорость насыщенного пара вдали от трубы; теплофизические свойства жидкости отнесены к средней температуре пленки.

При конденсации паров хладонов, поперечно обтекающих горизонтальную трубу, коэффициент теплоотдачи может быть рассчитан по формуле, предложенной О. П. Ивановым [35],

$$\frac{\alpha_w}{\alpha_0} = 0{,}43\ \mathrm{Re}_п^{0,12}\mathrm{Pr}_п^{0,33}, \qquad (8.37)$$

здесь $\mathrm{Re}_п = w_{п.\,0} d/\nu_п$; $\mathrm{Pr} = \nu_п/a_п$. Индекс п означает «пар».

Формула получена на основании обработки опытных данных для R12 и R22 при $\mathrm{Re}_п = (0{,}7 \div 18)10^3$; $q = (4 \div 15)$ кВт/м^2; $p = (5{,}2 \div 12{,}1)\ 10^5$ Па. Более подробно вопросы конденсации движущегося пара рассмотрены в [14, 21].

Конденсация смеси паров. При конденсации смеси паров фазовая граница пар — конденсат проницаема для всех компонентов. Вследствие неоднородного распределения концентраций в паровой смеси теплообмен зависит не только от термического сопротивления конденсата, но и от диффузионного сопротивления прилегающего к нему парового слоя.

Конденсация паров неограниченно смешивающихся жидкостей носит пленочный характер. При конденсации паров несмешивающихся жидкостей возникают внепленочные конденсатные образования (капли). Вид конденсации зависит, кроме того, от состава (концентрации смеси) и от плотности теплового потока.

Режим образования и стекания конденсата может быть пленочным, капельным, пленочно-ручьевым и капельно-ручьевым.

Процессы тепло-и массообмена при конденсации даже паров двухкомпонентных смесей изучены слабо. Некоторые теоретические подходы к решению задачи приведены в [14]. И для смешивающихся, и для несмешивающихся жидкостей принята пленочная модель конденсации, только в первом случае пленка однородна, во втором — состоит из двух слоев, соответствующих одному и другому компоненту. Задача решена численными методами, для некоторых бинарных смесей эти решения представлены в [14] графически.

Для конденсации паров несмешивающихся жидкостей на горизонтальной трубе может быть использована приближенная эмпирическая формула

$$\alpha_{см} = \frac{\alpha_{N1} g_1 + \alpha_{N2} g_2}{g_1 + g_2},$$

где α_{N1} и α_{N2} — средние коэффициенты теплоотдачи для первого и второго компонентов, определяемые по формуле Нуссельта (8.23); g_1 и g_2 — массовые концентрации компонентов в смеси.

8.4. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ НА ПУЧКЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТРУБ

Конденсаторы теплоэнергетических и холодильных установок часто выполняют в виде пучка горизонтальных труб, расположенных в шахматном, коридорном или ромбическом порядке. В этом случае условия теплообмена на различных по высоте рядах труб в пучке будут неодинаковыми. Если предположить, что стекание конденсата с верхних рядов на нижние непрерывное, то толщина плен-

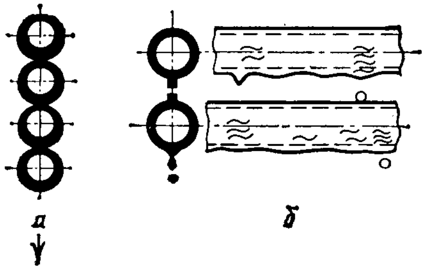


Рис. 8.9. Конденсация на пучке горизонтальных труб:

а — непрерывное ламинарное стекание конденсата; *б* — действительный характер стекания в пучке труб

ки должна увеличиваться, а коэффициент теплоотдачи уменьшаться от ряда к ряду при перемещении сверху вниз (рис. 8.9, *а*, *б*). Исходя из такой модели, Нуссельтом в соответствии с формулой (8.23) получено уравнение для расчета среднего коэффициента теплоотдачи пучка

$$\alpha_{\text{пуч}} = 0{,}728\sqrt[4]{\frac{gr\rho^2\lambda^3}{\mu\Delta t n d}}. \qquad (8.38)$$

Его можно представить в виде

$$\alpha_{\text{пуч}} = \alpha_0\bar{\varepsilon}_n, \qquad (8.39)$$

где α_0 — коэффициент теплоотдачи неподвижного пара, рассчитанный по формуле (8.23); $\bar{\varepsilon}_n = n^{-1/4}$ — коэффициент, учитывающий влияние числа рядов на теплообмен при конденсации в пучке; n — число труб в вертикальном ряду (см. рис. 8.9, *а*).

Как показывают экспериментальные исследования, в действительности стекание конденсата с трубки на трубку происходит не плавно, а в виде отдельных капель и струек (см. рис. 8.9, *б*). Последние, попадая на нижележащую трубку, с одной стороны, утолщают пленку (в момент падения), а затем растекаются по поверхности, а с другой — турбулизируют движение конденсата в пленке. Вследствие этого некоторое увеличение толщины пленки в момент падения в известной степени компенсируется турбулизирующим действием капель и брызг на характер движения конденсата. Следовательно, действительный коэффициент теплоотдачи должен быть выше, чем рассчитанный по уравнению (8.38). До сих пор отсутствуют четкие количественные зависимости для оценки влияния пучка с этой точки зрения.

По данным Д. Керна, это обстоятельство можно учесть введением в уравнение (8.39) величины $\bar{\varepsilon}_n = n^{-1/6}$, где n — среднее число горизонтальных рядов труб в пучке.

По данным С. С. Кутателадзе, можно учитывать гидродинамическое влияние конденсата, натекающего на данную трубу с помощью параметра $\sum_1^n G_i/G_n$, где $\sum^n G_i$ — суммарный расход конденсата, стекающего по трубе n-го ряда, а G_n — расход конденсата, образующегося на той же трубе.

В случае ламинарного течения пленки средний коэффициент теплоотдачи n-го ряда приближенно может быть определен как $\alpha_n = \alpha_0\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = f\left(\sum_1^n G_i/G_n\right)$. Средний коэффициент теплоотдачи

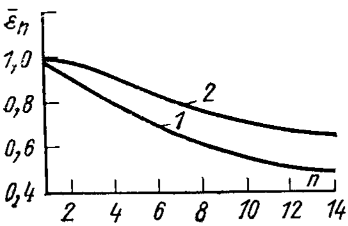


Рис. 8.10. Поправочный коэффициент для $\alpha_{пуч}$ при конденсации на пучке горизонтальных труб по [21]:

1 — коридорный пучок; *2* — шахматный пучок

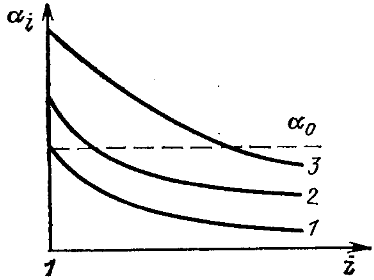


Рис. 8.11. Примерное изменение коэффициента теплоотдачи в пучке горизонтальных труб по рядам (i — номер ряда сверху):

1 — по Нуссельту; *2* — реальные условия при невысокой начальной скорости пара; *3* — то же, при высокой начальной скорости пара

для пучка с числом рядов, равным n, вычисляется по выражению $\alpha_{пуч} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\alpha_1\varepsilon_n = \alpha_1\bar{\varepsilon}_n$. Здесь α_1 — коэффициент теплоотдачи верхнего ряда, который при $w_п = 0$ равен α_0 и определяется по формуле (8.23); $\varepsilon_n = \sum_{1}^{n}\varepsilon_n/n$.

При этом предполагается, что температурный напор для всех рядов одинаков.

Значения ε_n, полученные С. С. Кутателадзе и Ф. П. Минченко в опытах при конденсации водяного пара на свободном (не стесненном) пучке труб, можно определить по рис. 8.10.

При конденсации на больших и тесных трубных пучках пар нельзя рассматривать как неподвижный, так как объем межтрубного пространства, по которому он перемещается, невелик.

При подаче пара сверху он с наибольшей скоростью обтекает верхний ряд труб. Затем по мере конденсации при переходе от одного ряда к другому скорость уменьшается, что влияет на локальные коэффициенты теплоотдачи каждого ряда.

Совместное влияние скорости пара, толщины и характера движения пленки конденсата приводит к существенным отклонениям действительных условий конденсации от принятых в теории Нуссельта. Так, в первых по пути движения пара рядах труб коэффициенты теплоотдачи могут быть большими, чем по теории Нуссельта, для неподвижного пара [формула (8.23)]. При высоких скоростях (численное значение их зависит от свойств вещества) влияние скорости может сказаться на α в большей степени, чем влияние толщины пленки, и средние коэффициенты теплоотдачи для пучка могут оказаться более высокими, чем вычисленные по теории Нуссельта (рис. 8.11).

Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации движущегося насыщенного водяного пара на пучке труб можно использовать уравнение, предложенное Л.Д. Берманом [34]:

$$\alpha_{\text{пуч}\, w} = \alpha_0\, \varepsilon_w \frac{0,84\, \varepsilon}{[1-(1-\varepsilon)^{0,84}]\, n^{0,07}},$$

где $\alpha_{\text{пуч.}\, w}$ — средний коэффициент теплоотдачи пучка с учетом скорости пара; ε_w— поправка на скорость движения пара; $\varepsilon_w = \alpha_w/\alpha_0$; здесь α_0— находится по формуле (8.23); ε — степень конденсации; $\varepsilon=(G_{\text{вх}}-G_{\text{вых}})/G_{\text{вх}}$; здесь $G_{\text{вх}}$ и $G_{\text{вых}}$— массовые расходы пара на входе в пучок и на выходе из него (при полной конденсации $G_{\text{вых}}=0$). Отношение α_w/α_0 определяется по уравнению

$$\varepsilon_w = 25,7\left(\frac{\rho_{\text{п}} w_{\text{п}}^2}{g \rho_{\text{ж}} d}\right)^{0,08}\left(\frac{\alpha_0 d}{\lambda}\right)^{-0,5}.$$

Для аммиака совместное влияние динамического воздействия парового потока и натекания конденсата в многорядном пучке труб не изучено. Ориентировочно его можно учесть с помощью приведенных выше уравнений для водяного пара.

Средний коэффициент теплоотдачи при конденсации движущегося пара хладонов на пучке труб может быть приближенно рассчитан по уравнению $\alpha_{\text{пуч.}\, w}=\alpha_w n^{-1/6}$, в котором α_w определяется по формуле (8.37) при $w_{\text{по}}$— скорости пара над верхним рядом труб.

8.5. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ ВНУТРИ ТРУБ

Теплообмен при конденсации пара внутри трубы является еще более сложным сравнительно с рассмотренными ранее случаями. Здесь имеет место направленное движение пара, скорость которого переменна по длине трубы. Начальная скорость пара может достигать высоких значений. Как и в случае, рассмотренном в предыдущем разделе, режим движения пленки и коэффициент теплоотдачи зависят от соотношения между силой трения на поверхности раздела фаз и силой тяжести в пленке. Направление сил здесь зависит и от положения трубы в пространстве.

Величина силы трения на границе между паром и пленкой будет зависеть от соотношения режимов течения пара и пленки, причем эти режимы могут меняться вдоль трубы. Так, турбулентное движение пара на входе в трубу может перейти в ламинарное в конце при неполной конденсации. В случае полной конденсации осевая скорость пара в конце трубы будет равна нулю. Наоборот, режим движения конденсата по длине трубы может перейти из ламинарного в турбулентный.

В настоящее время нет достаточно полных обобщенных зависимостей, позволяющих рассчитывать теплоотдачу при конденсации в трубах. Наиболее изучен процесс конденсации пара, медленно движущегося внутри горизонтальной трубы при невысоких плотностях теплового потока ($q<20$ кВт/м²). Такие условия встречаются в некоторых типах конденсаторов холодильных машин и, в частно-

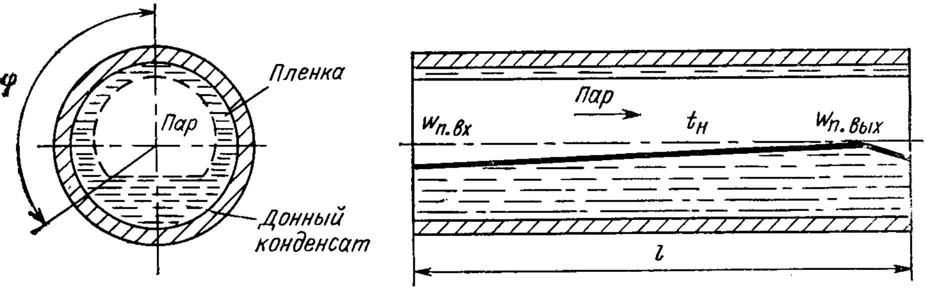


Рис. 8.12. Схема конденсации пара внутри горизонтальной трубы при ламинарном течении пленки

сти, в воздушных конденсаторах. Результаты выполненных исследований сводятся к следующему. При малых q и $w_п$ конденсат, образующийся на верхней части сечения трубы, стекает в виде пленки по ее внутренней поверхности в нижнюю часть сечения, образуя так называемый донный конденсат. Характер движения последнего вдоль прямой трубы аналогичен потоку однофазной жидкости в открытом канале (ручье). Схема пленочной конденсации пара внутри трубы при ламинарном течении пленки представлена на рис. 8.12. Глубина жидкости в ручье по длине трубы увеличивается, на участке вытекания из трубы — падает. Скорость пара уменьшается по мере его конденсации ($w_{п.\,вых}<w_{п.\,вх}$). Рассмотренная структура двухфазного потока называется расслоенной. В этом случае преобладающее влияние на процесс течения оказывают силы тяжести в пленке, а влияние сил трения на границе раздела фаз пренебрежимо мало. На выходе из прямой трубы при полной конденсации пара $w_{п.\,вых}\to 0$. Соотношение между площадью поверхности, на которой происходит конденсация и образуется пленка, и площадью поверхности, занятой донным конденсатом, определяется величиной пленочного угла φ, измеренного от вертикальной оси сечения трубы до пересечения пленки с поверхностью ручья (см. рис. 8.12). Значение пленочного угла зависит от свойств жидкости, температурного напора (или плотности теплового потока), диаметра трубы и выходных условий.

Решение задачи конденсации внутри труб осуществлялось рядом исследователей. Полученные приближенные теоретические решения, выполненные Д. Чэддоком и Д. Чэйто с теми же предпосылками, что и в теории Нуссельта, приводятся к виду

$$\alpha_\varphi = f\left(\frac{gr\rho\lambda^3}{\nu\Delta t d_{вн}}\right)^{1/4} = \varepsilon_\varphi \alpha_0. \tag{8.40}$$

Здесь α_φ — средний коэффициент теплоотдачи в данном поперечном сечении, отнесенный к поверхности, занятой пленкой (соответствующей углу φ); ε_φ — величина, зависящая от пленочного угла (для $\varphi=120°$ $\varepsilon_\varphi=1{,}15$); α_0 — рассчитывают по формуле (8.23), в которую вместо d подставляют $d_{вн}$.

Если пренебречь влиянием теплоотдачи через донный конденсат и считать, что значение Δt постоянно по периметру сечения, то средний коэффициент теплоотдачи для данного сечения трубы

$$\alpha = \alpha_\varphi \varphi / \pi. \qquad (8.41)$$

Чтобы найти средний коэффициент теплоотдачи α_l для трубы длиной l, нужно знать изменение пленочного угла по длине трубы и иметь возможность подсчитать его среднее значение. Подстановка φ_l в (8.41) дает величину α_l.

По данным ряда авторов, величина среднего пленочного угла незначительно меняется по длине трубы, если скорость конденсации по длине постоянна и сток жидкости на выходе свободен. Его значение для жидкостей с $\mathrm{Pr} \geqslant 1$ составляет 110—130°. В соответствии с этим формула для конденсации в трубах с относительным наклоном оси трубы к горизонту 0,002 ($\varphi_l = 120°$ и $\mathrm{Pr} \geqslant 1$) имеет вид

$$\alpha_l = 0{,}56 \sqrt[4]{\frac{r g \rho^2 \lambda^3}{\mu \Delta t\, d_{\text{вн}}}}. \qquad (8.42)$$

Здесь усреднение осуществляется и по сечению, и по длине трубы. Выражение (8.42) соответствует тем же предпосылкам, что и (8.41). При изменении наклона труб в условиях расслоенного течения теплоотдача несколько увеличивается из-за облегчения условий стекания и уменьшения высоты донного конденсата. Оптимальный наклон труб 10—20°, что соответствует увеличению α_l на 10—20%.

Заметим, что описанная модель потока при конденсации в горизонтальных трубах указывает на весьма малую зависимость α_l от длины трубы.

Для случая конденсации холодильных агентов при расслоенном режиме применимы приведенные ниже формулы, полученные в ЛТИХПе.

Для расчета α_l при конденсации R12, R22, R142 в медных трубах Н. Ф. Чопко по данным эксперимента при $(\mathrm{GaPrK}) = 2{,}5 \cdot 10^{10} \div 1{,}2 \cdot 10^{12}$ предложено уравнение

$$\mathrm{Nu} = 0{,}68\,(\mathrm{GaKPr})^{0,25} = 0{,}945\,\alpha_0.$$

В результате экспериментального исследования конденсации R12, R22, R502 и аммиака в горизонтальной стальной трубе с $d_{\text{вн}} = 14$ и 21 мм при $l/d = 50 \div 200$, $q = 1 \div 36$ кВт/м² и $t_{\text{н}} = 30 \div 50$°C Ю. Н. Ширяевым получена формула для расчета среднего коэффициента теплоотдачи на поверхности, занятой пленкой конденсата,

$$\mathrm{Nu} = 0{,}21\,(\mathrm{GaKPr})^{0,25}\,\mathrm{We}^{-0,25}.$$

В ней число Вебера учитывает влияние капиллярных сил, действующих на пленку конденсата ($\mathrm{We} = g\rho / d_{\text{вн}}^2$).

Когда силы взаимодействия между движущимся паром и пленкой превалируют над силами тяжести, наступает кольцевой режим движения двухфазного потока, при котором пленка движется по всей поверхности в виде кольца, а пар — в средней части сечения трубы. В этом случае условия теплоотдачи для горизонтальной и вертикальной труб одинаковы. Расчетные уравнения теплоотдачи для этого случая приведены в [14, 34].

Глава 9. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПЛАВЛЕНИИ И ЗАТВЕРДЕВАНИИ, СУБЛИМАЦИИ И ДЕСУБЛИМАЦИИ

9.1. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРОЦЕССАХ ПЛАВЛЕНИЯ И ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Плавление — это процесс перехода вещества из твердого состояния в жидкое, происходящий с поглощением теплоты. Обратный процесс перехода вещества из жидкого состояния в твердое с выделением теплоты, называют затвердеванием.

Процессы плавления и затвердевания широко применяются в химической и пищевой технологии, литейном производстве, строительной технике и др.; их изучение важно для геофизики и геологии. Производство пищевого водного льда, опреснение морской воды и концентрирование соков вымораживанием, замораживание и оттаивание пищевых продуктов, промораживание грунтов для повышения их несущей способности или оттаивание вечной мерзлоты, осуществление попеременного плавления и затвердевания для аккумуляции холода или для поддержания постоянной температуры в термостатах — таков далеко не полный перечень производственных процессов, физическим содержанием которых является затвердевание или плавление. (Отметим, что в отличие от процесса затвердевания других веществ процесс затвердевания чистой воды или воды, содержащейся во влажных материалах, принято называть замораживанием; соответственно плавление воды называют оттаиванием.)

Наиболее важным вопросом, который возникает при расчете и конструировании теплообменной аппаратуры, реализующей перечисленные процессы, является вопрос об интенсивности процессов и ее изменении во времени. Ответ на этот вопрос может быть получен при решении соответствующей задачи теплообмена.

Особенностью передачи теплоты при плавлении и затвердевании (как и других форм изменения агрегатного состояния) является поглощение (при плавлении) или выделение (при затвердевании) теплоты фазового перехода. Эту теплоту нужно подводить извне к рассматриваемому телу или отводить от него, чтобы соответствующий процесс продолжался в течение длительного времени. Затвердевание и плавление чистых веществ при небольших температурных напорах (точнее, в равновесном процессе) происходят при постоянной для данного давления температуре фазового перехода $t_ф$ в тонком слое вещества — зоне образования или разрушения кристаллов.

При решении задач теплообмена, формулируя математическую модель процесса, обычно считают, что эта зона может быть представлена изотермической поверхностью с температурой $t_ф = \text{const}$. Эту поверхность называют границей раздела фаз. На границе раздела фаз значения физических параметров λ, c, a меняются скачком.

Перемещение границы раздела фаз по направлению нормали к этой поверхности в единицу времени называют соответственно скоростью плавления или затвердевания (при плавлении перемещение направлено в сторону твердой фазы, при затвердевании — в сторону жидкой). По величине скорости процессов плавления и затвердевания можно судить об их интенсивности.

В растворах и веществах, содержащих примеси, температура фазового перехода переменна и зависит от концентрации отдельных компонентов. По мере изменения агрегатного состояния меняется состав обеих фаз, поэтому в таких веществах выделение теплоты фазового перехода происходит в более широком, чем в чистых веществах, слое, ограниченном изотермами начала ($t_{ф1}$) и конца ($t_{ф2}$) фазового перехода. Понятие границы раздела фаз в данном случае более условно, чем для чистого вещества, а иногда вообще неприменимо. В последнем случае применяют модель процесса, основанную на представлении о зоне фазового перехода и спектре температур фазового перехода.

При промораживании влажных пористых материалов понятие границы раздела фаз является также условным в том смысле, что основное вещество по обе стороны от границы раздела фаз находится в твердом состоянии, а изменяется только состояние воды, заполняющей поры. В этом случае граница раздела фаз делит твердое тело на талую и мерзлую зоны.

Фазовое состояние вещества определяет возможный способ переноса теплоты. Так, в твердой фазе и в мерзлой зоне влажного материала передача теплоты происходит только теплопроводностью. В жидкой фазе, кроме того, возможен и конвективный перенос теплоты.

В талой зоне влажного материала теплота передается в основном теплопроводностью, хотя не исключена и конвекция в крупных закрытых порах или в капиллярах так называемых открытых пор. Конвекцию в порах обычно учитывают, вводя понятие эффективной теплопроводности.

При затвердевании теплота фазового перехода обычно отводится через слой твердого материала переменной толщины и соответственно переменного термического сопротивления независимо от того, идет ли процесс затвердевания жидкости или замораживания влажного материала. В связи с этим скорость затвердевания всегда с течением времени убывает. (Исключение составляет затвердевание переохлажденной жидкости при введении в нее центров кристаллизации. Этот специальный случай здесь не рассматривается.)

При плавлении тела с образованием жидкой фазы подвод теплоты фазового перехода может осуществляться в процессе теплоотдачи из жидкой фазы к границе раздела. В этом случае термическое сопротивление передаче теплоты примерно постоянно, что (как будет показано в разделе 9.3) приводит к постоянству скорости плавления.

Во всех случаях граница раздела фаз (или зона фазового перехода) изменяет свое положение во времени, поэтому задачи теплообмена при плавлении и затвердевании относят к классу задач с подвижными границами раздела фаз (или задач Стефана) — одному из наиболее сложных в математической физике. Приведем краткое описание постановки и наиболее распространенных методов решения важных для техники вариантов этих задач.

9.2. ЗАТВЕРДЕВАНИЕ (ПЛАВЛЕНИЕ) ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО МАССИВА ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ТЕПЛОТЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

Математическая модель рассматриваемой задачи более всего соответствует процессу промерзания (оттаивания) влажного грунта через наружную поверхность. Однако и замораживание спокойной воды в водоемах также близко к этому случаю, так как вследствие аномалии воды, имеющей максимальную плотность при температуре 4°C, охлаждение верхней поверхности до 0°C не приводит к возникновению конвективных токов.

Из задач с подвижными границами данная задача была решена первой. Наибольшую известность получило решение Стефана, опубликованное в 1890 г., однако в настоящее время обнаружены и более ранние аналогичные решения. В книге А. В. Лыкова [24] указывается на статью членов Российской Академии наук Ляме и Клапейрона, еще в 1831 г. получивших решение для частного случая рассматриваемой задачи, а в книге Г. Карслоу и Д. Егера [16] — на лекции Неймана 1860 г.

Постановка задачи. Рассмотрим построение модели на примере затвердевания. Рассматривается так называемый полуограниченный массив (рис. 9.1). Это понятие можно уяснить, если представить себе неограниченную пластину, толщина которой достаточно велика, чтобы температурные возмущения на одной ее поверхности не достигала другой поверхности в течение рассматриваемого промежутка времени.

Приведенные выше примеры промерзания грунта или спокойной воды в водоеме как раз соответствуют представлению о полуограниченных массивах.

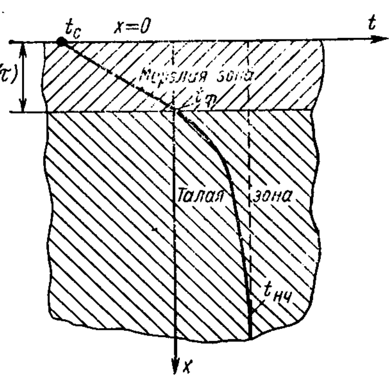


Рис. 9.1. Модель замораживания полуограниченного массива, по Стефану

Массив первоначально находится в талом состоянии при заданной температуре $t_{нч} > t_ф$. В простейшем случае можно считать, что, начиная с некоторого момента времени $\tau=0$, на ограничивающей поверхности устанавливается и в дальнейшем поддерживается постоянная температура $t_c < t_ф$ (граничное условие первого рода), что приводит к образованию мерзлого слоя.

Нижняя поверхность этого слоя с переменной координатой $\xi(\tau)$

является границей раздела фаз и сохраняет постоянную температуру $t_ф$. На этой поверхности выделяется теплота фазового перехода. При затвердевании чистого вещества теплота фазового перехода равна теплоте плавления φ (для воды $\varphi=335$ кДж/кг), а при промерзании влажного материала — φW, где W — массовая доля влаги в материале (доли единицы).

По мере продвижения границы раздела фаз происходит охлаждение талой зоны, но на достаточном удалении (при $x\to\infty$) температура сохраняет начальное значение $t_{нч}$.

Очевидно, что передача теплоты происходит только в направлении оси x.

Обозначим теплофизические параметры в мерзлом слое $\lambda_м$, $c_м$, $a_м$, в талом слое $\lambda_т$, $c_т$, $a_т$. В простейшем случае плотность мерзлого и талого материала принимается одинаковой: $\rho_м=\rho_т=\rho=$ $=\text{const}$.

Требуется найти температурное поле в мерзлой $t_м(x, \tau)$ и в талой $t_т(x, \tau)$ зонах, а также закон перемещения во времени границы раздела $\xi(\tau)$ и скорость перемещения этой границы $d\xi/d\tau$ — скорость затвердевания.

Математическая формулировка задачи. Запишем дифференциальное уравнение теплопроводности:

а) в мерзлой зоне

$$\frac{\partial t_м}{\partial \tau}=a_м\frac{\partial^2 t_м}{\partial x^2} \quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant\xi(\tau);\ \tau>0; \tag{9.1}$$

б) в талой зоне

$$\frac{\partial t_т}{\partial \tau}=\alpha_т\frac{\partial^2 t_т}{\partial x^2} \quad \text{при } \xi(\tau)\leqslant x\leqslant\infty;\ \tau>0. \tag{9.2}$$

Начальное условие

$$\text{при } \tau=0;\ t(x,\ 0)=t_{нч};\ \xi(0)=0. \tag{9.3}$$

Внешние граничные условия:

$$\text{при } x=0;\ \tau>0;\ t(0,\ \tau)=t_с=\text{const}; \tag{9.4}$$

$$\text{при } x\longrightarrow\infty;\ \tau>0;\ t(\infty,\ \tau)=t_{нч}=\text{const}. \tag{9.5}$$

Необходимо также сформулировать условия на внутренней подвижной границе раздела фаз. Таких условий два. Первое условие очевидно — оно состоит в равенстве температур мерзлой и талой зон на границе раздела и математически записывается так:

$$\text{при } x=\xi(\tau);\ t_м(\xi,\ \tau)=t_т(\xi,\ \tau)=t_ф=\text{const}. \tag{9.6}$$

Второе условие состоит в равенстве тепловых потоков со стороны мерзлой и талой зон. Для того чтобы сформулировать его математически, запишем уравнение теплового баланса на границе раздела фаз для элементарного промежутка времени $d\tau$ (вследствие одномерности задачи площадь расчетной поверхности может быть любой; будем вести расчет на 1 м²).

Количество теплоты, отводимой от границы раздела фаз в мерзлую зону, должно быть равно сумме теплоты фазового перехода, выделяемой на границе, и теплоты, поступающей из талой зоны;

$$dQ_{м} = dQ_{т} + dQ_{ф}. \qquad (9.7)$$

В соответствии с законом Фурье:

$$dQ_{м} = -\lambda_{м}\left(\frac{\partial t_{м}}{\partial x}\right)_{-\xi} d\tau; \quad dQ_{т} = -\lambda_{т}\left(\frac{\partial t_{т}}{\partial x}\right)_{+\xi} d\tau.$$

Здесь $(\partial t_{м}/\partial x)_{-\xi}$ и $(\partial t_{т}/\partial x)_{+\xi}$ — градиенты температур на границе раздела соответственно в мерзлой и талой зонах.

За время $d\tau$ граница раздела переместится на величину $d\xi$, значит, в расчете на 1 м^2 поверхности замерзнет объем dV (м^3):

$$dV = 1 d\xi,$$

а количество теплоты фазового перехода составит

$$dQ_{ф} = \varphi W \rho dV = \varphi W \rho d\xi$$

(при замерзании чистого вещества $W=1$).

С учетом записанных выражений для составляющих и при делении на $d\tau$ уравнение теплового баланса (9.7) приобретает вид при $x=\xi(\tau)$

$$-\lambda_{м}\left(\frac{\partial t_{м}}{\partial x}\right)_{-\xi} = -\lambda_{т}\left(\frac{\partial t_{т}}{\partial x}\right)_{+\xi} + \Phi\frac{d\xi}{d\tau}. \qquad (9.8)$$

Здесь введено обозначение $\Phi = \varphi W \rho$. Величину Φ можно трактовать как теплоту фазового перехода единицы объема.

Условие (9.8) является вторым граничным условием на границе раздела фаз. Его обычно называют условием Стефана.

Решение поставленной задачи методом Фурье (разделения переменных) приводит к следующим результирующим выражениям. Распределение температур:

а) в мерзлой зоне

$$\frac{t_{м}(x, \tau) - t_{с}}{t_{ф} - t_{с}} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{м}\tau}}\right)}{\operatorname{erf} p}, \qquad (9.9)$$

где $\operatorname{erf} x$ — функция ошибок Гаусса — табулированная функция;

б) в талой зоне

$$\frac{t_{нч} - t_{т}(x, \tau)}{t_{нч} - t_{ф}} = \frac{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{т}\tau}}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(p\sqrt{a_{м}/a_{т}}\right)}. \qquad (9.10)$$

Закон перемещения границы раздела фаз

$$\xi(\tau) = 2p\sqrt{a_{м}\tau}. \qquad (9.11)$$

Скорость перемещения границы раздела фаз в момент времени τ

$$d\xi/d\tau = p\sqrt{a_м}\,\tau^{-1/2}. \tag{9.12}$$

В выражениях (9.9) — (9.12) p — безразмерная величина, определяемая из трансцендентного уравнения

$$\frac{\exp(-p)^2}{\operatorname{erf} p} - \frac{\sqrt{\lambda_т c_т \rho_т}}{\sqrt{\lambda_м c_м \rho_м}}\,\frac{(t_{нч}-t_ф)}{(t_ф-t_с)}\,\frac{\exp(-p^2 a_м/a_т)}{1-\operatorname{erf}\left(p\sqrt{a_м/a_т}\right)} = p\sqrt{\pi}\,\mathrm{Ko}, \tag{9.13}$$

где Ко — критерий фазового перехода; $\mathrm{Ko} = \dfrac{\Phi}{c_м \rho_м (t_{нч}-t_с)}$.

Задача существенно упрощается, если талая зона первоначально имеет температуру фазового перехода $t_{нч}=t_ф$. При этом переноса теплоты в талой зоне не наблюдается, и в уравнении теплового баланса на границе раздела (9.7) $dQ_т=0$.

Для этого случая результирующие уравнения (9.9) и (9.11), (9.12) остаются в силе, но уравнение (9.13) для определения p упрощается:

$$\frac{\exp(-p^2)}{\operatorname{erf} p} = p\sqrt{\pi}\,\mathrm{Ko}. \tag{9.14}$$

Если при этом предположить, что в мерзлом слое температурное поле в любой момент времени соответствует стационарному (иначе говоря, считать процесс квазистационарным), то для определения p получается еще более простое выражение

$$p = \sqrt{1/(2\,\mathrm{Ko})}. \tag{9.15}$$

Для квазистационарного процесса в любой момент времени характерно линейное распределение температур в затвердевшем слое $\xi(\tau)$ (как и в безграничной пластине толщиной ξ при стационарной теплопроводности), т. е. для определения температуры в любой точке мерзлого слоя вместо уравнения (9.9) можно воспользоваться уравнением

$$\frac{t_м(x,\tau)-t_с}{t_ф-t_с} = \frac{x}{\xi(\tau)} \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \xi(\tau).$$

Если в формуле (9.15) представить Ко через размерные переменные, она приобретает вид

$$p = \sqrt{\frac{c_м \rho_м (t_ф - t_с)}{2\Phi}}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (9.11), получаем

$$\xi(\tau) = \sqrt{\frac{2\lambda_м (t_ф - t_с)\,\tau}{\Phi}}. \tag{9.16}$$

Такой же результат получается, если в выражении (9.14) функции $\exp(-p^2)$ и $\operatorname{erf} p$ разложить в ряд и учесть только первые члены этих рядов.

Подставляя значение p из выражения (9.15) в уравнение (9.12), получаем для скорости перемещения границы раздела фаз

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\sqrt{\frac{\lambda_м(t_ф-t_с)}{2\Phi\tau}}\,. \qquad (9.17)$$

В соответствии с уравнением (9.17) в начальный момент времени $\tau=0$ скорость затвердевания велика $d\xi/d\tau\to\infty$, а затем постепенно убывает: при $\tau\to\infty$ $d\xi/d\tau\to 0$.

Выражения (9.16) и (9.17) справедливы при $t_{нч}=t_ф$ и при линейном распределении температуры в затвердевшем слое они являются важным частным случаем решения Стефана.

Результаты опытов показывают, что в большинстве практических случаев при умеренных скоростях замораживания квазистационарное приближение вполне допустимо. Физически это соответствует предположению о том, что теплота, отводимая от мерзлого слоя при его охлаждении от температуры фазового перехода $t_ф$ до некоторой средней температуры в заданный момент времени, пренебрежимо мала по сравнению с теплотой, пошедшей на фазовый переход этого слоя из талого состояния в мерзлое. Численно соотношение между указанными теплотами оценивается величиной критерия Ко: чем больше величина Ко, тем с большим основанием можно считать процесс квазистационарным. Так, при замораживании воды ошибка, связанная с пренебрежением теплоемкостью мерзлого слоя, составляет не более 5%, если Ко>3. Для уменьшения погрешности иногда в уравнения (9.16), (9.17) вводят понятие эквивалентной теплоты фазового перехода $\Phi'=\Phi+0{,}5\,c_м\rho_м(t_ф-t_с)$.

В описанном классическом решении граничное условие (9.4) на внешней охлаждаемой поверхности $x=0$ записано как граничное условие первого рода. Для инженерной практики более интересен случай, когда заданной является не температура поверхности $t_с$, а температура охлаждающей среды (хладоносителя) $t_{хл}$, т. е. граничное условие третьего рода. При этом в квазистационарном приближении для закона перемещения границы раздела фаз вместо уравнения (9.16) получаем

$$\xi(\tau)\cong\sqrt{\frac{2\lambda_м(t_ф-t_{хл})\,\tau}{\Phi}}-\frac{\lambda_м}{\alpha_{хл}}\,, \qquad (9.18)$$

где $\alpha_{хл}$ — коэффициент теплоотдачи к хладоносителю.

Поскольку толщина замерзшего слоя не может быть меньше нуля, то при $\xi(\tau)=0$ находим время охлаждения

$$\tau_0=\frac{\lambda_м\Phi}{2\alpha_{хл}^2(t_ф-t_{хл})}\,, \qquad (9.19)$$

в течение которого не происходит процесса намораживания. Таким образом, при граничных условиях третьего рода образование мерзлого слоя начинается не сразу, а спустя некоторое время τ_0.

Уравнение (9.18) справедливо только при $\tau\geqslant\tau_0$, причем собственно процесс замораживания происходит в течение времени

$\tau-\tau_0$. Для скорости перемещения границы раздела фаз сохраняет силу выражение (9.17), но оно справедливо также при условии $\tau \geqslant \tau_0$.

Таким образом, при граничных условиях третьего рода (в отличие от граничных условий первого рода) максимальное значение скорости перемещения границы раздела фаз соответствует условию $\tau=\tau_0$ и имеет конечное (а не бесконечно большое) значение, затем с возрастанием τ скорость уменьшается, так что при $\tau \to \infty$ $d\xi/d\tau \to 0$.

Задача Стефана для плавления (оттаивания влажного материала) аналогична рассмотренной выше. Отличие состоит в том, что при плавлении $t_{нч} < t_ф$ и $t_с > t_ф$, при этом к поверхности полуограниченного массива теплота подводится. Для получения решения в формулировке задачи и выводах следует поменять местами индексы зон м и т, в этом случае величины ξ и $d\xi/d\tau$ будут соответствовать толщине талой зоны и скорости плавления.

9.3. ТЕПЛООТДАЧА К ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ФАЗ

Для решения задач плавления и затвердевания при наличии конвекции в жидкой фазе необходимо знать коэффициент теплоотдачи к подвижной границе твердое тело — жидкость. Здесь, как и в процессах теплоотдачи к неподвижной стенке, возможны свободная или вынужденная конвекция жидкости. При малых скоростях перемещения границы раздела для определения коэффициента теплоотдачи применимы обычные для вынужденной или свободной конвекции в однофазной среде зависимости (см. главу 6). Однако при больших скоростях перемещения границы раздела фаз происходит деформация кривых распределения температур и скоростей в пограничном слое и соответственно изменяется коэффициент теплоотдачи α. Впервые эта особенность процессов теплоотдачи у подвижной стенки замечена и изучена А. Г. Ткачевым [32]. При плавлении толщина пограничного слоя увеличивается, а градиент температуры и коэффициент теплоотдачи соответственно уменьшаются по сравнению со случаем теплоотдачи у неподвижной твердой стенки, при затвердевании — наоборот.

Этот факт А. Г. Ткачев объясняет, проводя аналогию плавления и затвердевания соответственно со вдувом жидкости в пограничный слой и отсосом ее из пограничного слоя через пористую стенку. Теоретически и экспериментально доказано, что при вдуве толщина пограничного слоя увеличивается, а при отсосе уменьшается. (Процессы вдува и отсоса применяются для регулирования теплообмена в специальной аппаратуре, например, для предохранения обшивки космического корабля от перегрева при входе в плотные слои атмосферы.)

На основании изложенных представлений коэффициент теплоотдачи можно считать линейной функцией скорости перемещения границы раздела фаз [5].

$$\alpha=\alpha_0 \pm c_т \rho_т \, d\xi/d\tau, \tag{9.20}$$

где α_0 — коэффициент теплоотдачи к неподвижной стенке при тех же условиях теплообмена.

В выражении (9.20) знак «плюс» соответствует затвердеванию, «минус» — плавлению.

Поскольку в рассматриваемых задачах скорость перемещения границы раздела $d\xi/d\tau$ является искомой величиной, зависящей от α, а α в свою очередь зависит от $d\xi/d\tau$, то обе задачи (по определению α и $d\xi/d\tau$) должны решаться совместно, как описано в следующем разделе. Возможен также метод последовательного приближения, где в качестве первого приближения принимают $\alpha=\alpha_0$, затем определяют $d\xi/d\tau$, далее уточняют α по выражению (9.20) и в случае необходимости расчет повторяют.

9.4. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПЛАВЛЕНИЯ И ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ТЕЛ ПРОСТЕЙШЕЙ ФОРМЫ

Затвердевание плоского слоя на поверхности движущейся жидкости. Если талая зона представляет собой движущуюся жидкость, то на подвижной границе раздела фаз $x=\xi(\tau)$ реализуется граничное условие третьего рода. Граничное условие при $x\to\infty$ в этом случае теряет смысл, так как в жидкости температура достигает значения $t_ж=t_{нч}=\mathrm{const}$ сразу же за пределами теплового пограничного слоя. Очевидно, что такая задача существенно отличается от рассмотренной в разделе 9.2.

Для решения подобного рода задач широкое распространение получили приближенные методы, в частности уже упоминавшийся метод квазистационарных состояний и метод интегралов теплового баланса. Одним из первых указанные методы разработал акад. Л. С. Лейбензон, поэтому часто в литературе их также называют первым и вторым методами Лейбензона.

Решение сформулированной задачи методом интегралов теплового баланса и с учетом зависимости α от $d\xi/d\tau$ в соответствии с уравнением (9.20) приводит к следующему уравнению, выражающему связь между временем и толщиной затвердевшего слоя в безразмерной форме [5]:

$$\mathrm{Fo_м}=(\mathrm{Ko_м}+0{,}5+\mathrm{K_c})\left[\left(1+\frac{1}{\mathrm{Bi}}\right)^2\ln\frac{1}{1-\xi(\tau)/\xi_{max}}+\left(1+\frac{1}{\mathrm{Bi}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,\xi(\tau)/\xi_{max}\right]-\frac{1}{2\,\mathrm{Bi}^2}\left[\ln\frac{1}{1-\xi(\tau)/\xi_{max}}+\ln(\mathrm{Bi}\,\xi(\tau)/\xi_{max}+1)\right], \quad (9.21)$$

где $\mathrm{Fo_м}=\dfrac{a_м\tau}{\xi_{max}^2}$; $\mathrm{Ko}=\dfrac{\Phi}{c_м\rho_м(t_ф-t_{хл})}$; $\mathrm{K_c}=\dfrac{c_т\rho_т(t_ж-t_ф)}{c_м\rho_м(t_ф-t_{хл})}$;

$\mathrm{Bi}=\dfrac{\alpha_{хл}\xi_{max}}{\lambda_м}$; $\xi_{max}=\dfrac{\lambda_м(t_ф-t_{хл})}{\alpha(t_ж-t_ф)}-\dfrac{\lambda_м}{\alpha_{хл}}$.

Здесь ξ_{max} — максимальная толщина мерзлого слоя, который может образоваться в данных условиях теплообмена при $\tau\to\infty$. Смысл величины ξ_{max} становится ясным при анализе уравнения теплового баланса (9.7): рост со временем термического сопротивления мерзлого слоя приводит к уменьшению теплового потока $dQ_м$, в то время как $dQ_г$ от жидкости остается примерно постоянным. Это приводит к уменьшению доли теплового потока $dQ_ф$, связанной с фазовым переходом, а при $dQ_м=dQ_г$ замораживание вообще прекращается, передача теплоты через мерзлую стенку становится стационарной (с граничными условиями третьего рода). При этом $\alpha=\alpha_0$, а величину ξ_{max} можно вычислить из уравнения

$$\frac{t_ф - t_{хл}}{\frac{1}{\alpha_{хл}} + \frac{\xi_{max}}{\lambda_м}} = \alpha_0 (t_ж - t_ф). \tag{9.22}$$

В уравнении (9.21) величина $(0{,}5+K_с)$ и вычитаемое в правой части учитывают влияние теплоемкости вещества на скорость затвердевания. В случаях, когда этим влиянием можно пренебречь, зависимость (9.21) упрощается:

$$\mathrm{Fo}_м = \mathrm{Ko}_м \left[\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Bi}}\right)^2 \ln \frac{1}{1 - \xi(\tau)/\xi_{max}} + \left(1 + \frac{1}{\mathrm{Bi}}\right) \xi(\tau)/\xi_{max} \right]. \tag{9.23}$$

Такое упрощение допустимо, если Ко в несколько раз больше, чем $K_с+0{,}5$.

Решение задачи о законе перемещения границы раздела фаз сводится к следующему: определив значение ξ_{max} из уравнения (9.22), задаются несколькими промежуточными значениями $\xi(\tau)$ в пределах от 0 до ξ_{max}, для которых по уравнению (9.21) или (в случаях, когда можно пренебречь теплоемкостью мерзлого слоя) по уравнению (9.23) определяются соответствующие значения $\mathrm{Fo}_м$ и $\tau=\mathrm{Fo}_м\,\xi^2_{max}/a_м$. Построив затем график зависимости $\xi(\tau)$ от τ, можно найти ξ при любом τ, а также приближенно определить скорость перемещения границы раздела фаз, например, методом графического диффенцирования.

Плавление тел, погруженных в жидкость. Допустим, начальная температура тела $t_{нч}=t_ф$ и температура жидкости $t_ж>t_ф$, причем $t_ж=\mathrm{const}$. Тогда для одномерной задачи уравнение теплового баланса (9.7) запишется в форме

$$\alpha (t_ж - t_ф) = \varphi\rho d\xi/d\tau, \tag{9.24}$$

так как при $t_{нч}=t_ф$, в твердой фазе $\mathrm{grad}\, t=0$, т. е. теплообмена нет.

С учетом (9.20) уравнение (9.24) можно переписать так:

$$\alpha_0 (t_ж - t_ф) = [\varphi\rho + c_т\rho_т (t_ж - t_ф)]\, d\xi/d\tau, \tag{9.25}$$

откуда

$$d\xi/d\tau = \frac{\alpha_0 (t_ж - t_ф)}{\varphi\rho + c_т\rho_т (t_ж - t_ф)} = \mathrm{const}. \tag{9.26}$$

Таким образом, в отличие от затвердевания процесс плавления тел в жидкости происходит с постоянной скоростью, которую можно вычислить по уравнению (9.26).

При $t_{нч}<t_ф$ температура твердой фазы переменна, но стремится к температуре фазового перехода. Приближенно и в этом случае

можно считать $d\xi/d\tau=\text{const}$ и вычислять по уравнению (9.26), учитывая начальное переохлаждение путем введения фиктивной величины теплоты плавления $\varphi'=\varphi+c_м\rho_м(t_ф-t_{нч})$.

Затвердевание плоского слоя жидкости толщиной δ. Этому случаю, например, соответствует производство пищевого льда в виде плоских блоков. Допустим, что начальная температура жидкости, залитой в металлическую форму, $t_{нч}=t_ф$, тогда при охлаждении наружных поверхностей формы затвердевание с каждой из сторон происходит, как при промораживании безграничного массива. Толщина промерзших слоев $\xi(\tau)$ может быть определена по уравнениям (9.17) или (9.18) в зависимости от граничных условий на охлаждаемых поверхностях. Термическое сопротивление металлических стенок формы можно учесть, вводя вместо $\alpha_{хл}$ эквивалентный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{хл.\,экв}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\alpha_{хл}}+\dfrac{\delta_с}{\lambda_с}\right)}$.

Полное время промораживания $\tau_{полн}$ соответствует условию $\xi(\tau_{полн})=\delta/2$.

При $t_{нч}>t_ф$ в жидкости возможен конвективный перенос теплоты с постепенным понижением ее температуры. При этом задача существенно усложняется, но, поскольку со временем температура жидкости стремится к $t_ф$, в первом приближении задачу о затвердевании плоского слоя при $t_{нч}>t_ф$ можно решать в предположении $t_{нч}=t_ф=\text{const}$ [т. е. по уравнениям (9.17) и (9.18)], учитывая начальный перегрев фиктивной величиной теплоты затвердевания $\varphi'=\varphi+c_т\rho_т(t_{нч}-t_ф)$.

Плавление неограниченного массива в результате действия линейного источника теплоты постоянной мощности (граничные условия второго рода). Этому случаю соответствует, например, оттаивание грунта электрическими нагревателями, размещенными в трубах малого диаметра (т. е. диаметр труб несоизмеримо мал сравнительно с расстояниями между ними). Тогда нагреватели можно считать линейными источниками теплоты, а соответствующую тепловую задачу классифицировать как осесимметричную задачу теплопроводности с подвижной границей раздела фаз, так как теплота от каждого линейного источника, как от центра, равномерно распространяется по всем радиальным направлениям. Мощность линейного источника теплоты характеризуется известной по условию задачи линейной плотностью теплового потока $q_l=Q/L$, где Q — мощность, Вт; L — длина нагревателя, м. Мощность $Q=JU$. Здесь J — сила тока, А; U — напряжение, В. Талая зона при этом будет иметь форму цилиндра переменного радиуса $r_ф(\tau)$; поверхность этого цилиндра является границей раздела фаз.

Формально можно было бы рассмотреть аналогичную задачу и для затвердевания в результате действия линейных стоков теплоты, однако в реальных условиях трудно найти пример, отвечающий такой математической модели.

Аналитическое решение сформулированной задачи описано в [16]. Оно приводит к той же форме записи закона перемещения границы раздела фаз, что и для затвердевания полуограниченного массива [см. уравнение (9.11)].

$$r_ф(\tau) = 2p_ц \sqrt{\alpha_т \tau}, \qquad (9.27)$$

где индекс ц у параметра p означает, что его численное значение соответствует талой зоне в форме цилиндра.

Соответственно скорость перемещения границы раздела фаз определяется выражением

$$dr_ф/d\tau = p_ц \sqrt{\alpha_т/\tau}. \qquad (9.28)$$

Наиболее простая форма результирующего уравнения для определения $p_ц$ соответствует начальному условию $t_{нч}=t_ф$; в этом случае $p_ц$ определяется из уравнения

$$\frac{4\pi a_т \Phi}{q_l} p_ц^2 = \exp(-p_ц^2), \qquad (9.29)$$

которое легко решается, например, графически. Найдя $p_ц$, определяем $r_ф(\tau)$ и $dr_ф/d\tau$ по уравнениям (9.27) и (9.28).

Выражение для определения $p_ц$ в более общем случае можно найти в [16].

Затвердевание вещества в безграничном объеме, охлаждаемом через цилиндрическую плоскость (граничные условия третьего рода). На практике примером такой задачи может служить расчет процесса замораживания грунтового массива с помощью трубы наружным радиусом r_0, по которой циркулирует хладоноситель с температурой $t_{хл}<t_ф$ при коэффициенте теплоотдачи к хладоносителю $\alpha_{хл}$.

Решение, полученное для произвольного радиуса R в предположении квазистационарного режима (распределение температур внутри мерзлого цилиндра логарифмическое) при условии $t_{нч}=t_ф$, имеет вид

$$\mathrm{Fo_м} = \mathrm{Ko_м}\left[\frac{R^2}{2}\ln R + \left(\frac{1}{2\mathrm{Bi}} - \frac{1}{4}\right)(R^2 - 1)\right], \qquad (9.30)$$

где $\mathrm{Fo_м} = a_м\tau/r_0^2$; $\mathrm{Bi} = \alpha_{хл} r_0/\lambda_м$;

$$R = r_ф(\tau)/r_0.$$

Решение данной задачи в форме уравнения (9.30), как и последующей [уравнения (9.31) и (9.32)], получено А. Лондоном и Б. Себаном. Аналогичные результаты в размерной форме известны как решения Р. Планка.

Закон перемещения границы раздела фаз во времени $r_ф(\tau)$ и скорость затвердевания в этом случае определяются так же, как для процесса перемещения границы раздела фаз плоского слоя на поверхности конвектирующей жидкости (см. начало параграфа).

Затвердевание жидкости, помещенной в цилиндрическую полость (граничные условия третьего рода). Реальным примером, приводящим к данной задаче, может служить процесс производства пищевого льда в цилиндрических формах внутренним радиусом r_0, охлаждаемых снаружи хладоносителем температурой $t_{хл}<t_ф$ при

коэффициенте теплоотдачи $\alpha_{хл}$. Приближенное решение в предположении квазистационарного режима при $t_{нч}=t_ф$ имеет вид

$$\mathrm{Fo}_м=\mathrm{Ko}_м\left[\frac{R^2}{2}\ln R+\left(\frac{1}{2\mathrm{Bi}}+\frac{1}{4}\right)(1-R^2)\right]. \tag{9.31}$$

Здесь обозначения и порядок расчета $r_ф(\tau)$ и $dr_ф/d\tau$ такие же, как в предыдущем примере. Однако в данном случае, как правило, требуется определить время полного промерзания цилиндра. Это время $\tau_{полн}$ может быть определено из выражения

$$\mathrm{Fo}_{max}=\mathrm{Ko}_м\left(\frac{1}{2\mathrm{Bi}}+\frac{1}{4}\right), \tag{9.32}$$

где $\mathrm{Fo}_{max}=a_м\tau_{полн}/r_0^2$.

Решения двух последних задач пригодны и для плавления тел соответствующей формы в случае, если образующаяся жидкая фаза не удаляется, а передача теплоты через расплавленный слой происходит теплопроводностью.

9.5. ТЕПЛОМАССООБМЕН ПРИ СУБЛИМАЦИИ

С у б л и м а ц и я, т. е. непосредственный переход твердого тела в газообразное состояние, минуя жидкую фазу, возможна при параметрах, меньших параметров тройной точки для данного вещества. Для воды, например, тройная точка имеет параметры: $T=273{,}15$ К; $p=610{,}8$ Па (4,58 мм рт. ст.). Общая теория процесса сублимации кристаллов рассматривается в физике.

Основные представления о процессе сводятся к следующему. Вследствие непрерывного теплового движения молекулы, находящиеся на границе раздела твердой фазы и пара, время от времени отрываются от поверхности и переходят в пар. Этому перемещению препятствуют силы межмолекулярного сцепления, которые могут быть преодолены при достаточно большой средней кинетической энергии теплового движения. При подводе теплоты увеличивается амплитуда колебаний, возникает поступательное движение молекул, и они могут покидать свои места. Оторваться от твердой фазы могут те молекулы, у которых составляющая скорости, нормальная к поверхности, достаточно велика, чтобы преодолеть силы межмолекулярного сцепления и сопротивление окружающей среды. Часть молекул может снова возвратиться на поверхность твердой фазы (аккомодация).

Для расчета сублимации чистых (гомогенных) веществ имеются основанные на рассмотрении задачи Стефана теоретические решения, позволяющие найти коэффициенты теплоотдачи и диффузии, однако эти решения весьма сложны; чаще приводятся опытные данные в виде критериальных зависимостей:

при свободной конвекции $\mathrm{Nu}=f_1(\mathrm{Gr})$ и $\mathrm{Nu}_D=f_2(\mathrm{Gr},\ \mathrm{Gu})$

и при вынужденной конвекции окружающей среды

$$\mathrm{Nu}=f_3(\mathrm{Re})\ \text{и}\ \mathrm{Nu}_D=f_4(\mathrm{Re},\ \mathrm{Gu}),$$

где Gu — параметрический критерий Гухмана; $\mathrm{Gu}=(T_ж-T_с)/T_ж$.

Расчетные выражения таких зависимостей получены для процессов сублимации водного льда, кристаллического нафталина, твердого диоксида углерода (сухого льда) и ряда других веществ.

Определив диффузионный критерий Нуссельта $Nu_D = \beta l/D$, где l — характерный размер; β — коэффициент массообмена; D — коэффициент диффузии (см. главу 10), можно рассчитать интенсивность процесса сублимации (массовый поток вещества).

Массовый поток вещества [кг/(м²·с)]

$$j = \beta \Delta p.$$

Здесь Δp — разность парциальных давлений сублимируемого пара над поверхностью тела и в окружающей среде.

Затем можно определить длительность τ (с) перехода в пар заданного количества вещества M (кг):

$$\tau = M/(Fj),$$

где F — площадь поверхности тела.

Принципиальное отличие сублимации из гетерогенных тел состоит в том, что одновременно происходит процесс разделения смеси на компоненты. Сублимируемый компонент удаляется в виде пара из объекта обработки, оставляя неизменным твердый остаток.

Для осуществления процесса сублимации необходимо соблюдение двух условий: подвод энергии в зону сублимации для компенсации затрат энергии на фазовый переход твердое тело — пар и отвод образующегося пара для поддержания парциального давления сублимируемого компонента в этой зоне ниже точки плавления (в противном случае процесс сублимации перейдет в процесс испарения).

В реальных условиях процесс сублимации из гетерогенных тел используется для получения химически чистых веществ, а чаще всего для обезвоживания влажных скоропортящихся пищевых продуктов и биологических материалов. Общепризнано, что высушивание многих продуктов и материалов в замороженном состоянии (сублимационная сушка) является наилучшим методом длительной консервации, так как исходные свойства их (внешний вид, размеры, вкус, питательные свойства) сохраняются при такой обработке в максимальной мере.

Принципиальная схема вакуумной сублимационной сушильной установки представлена на рис. 9.2. Лед из замороженного материала *1*, помещенного в вакуумную камеру — сублиматор *2*, сублимирует под воздействием подводимой теплоты. Образующийся пар перемещается к охлаждаемой поверхности *3* под действием разности парциальных давлений его, соответствующих температуре сублимации (например, —10°С), и температуры десублимации (например, —30°С) и вновь превращается в лед.

Процесс сублимационной сушки может быть организован и при атмосферном давлении, однако в условиях вакуума, когда давление среды становится ниже уровня парциального давления влаги в материале (соответствующего требованиям к температурному режиму сушки), достигается значительная интенсификация массопереноса из сублиматора к десублиматору.

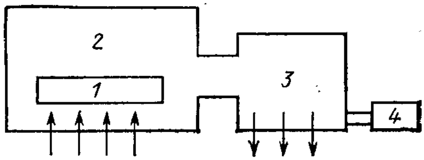


Рис. 9.2. Принципиальная схема сублимационной сушильной установки:
1 — сушимый материал; 2 — сублиматор; 3 — десублиматор; 4 — вакуум-насос; ↑↑ — подвод теплоты; ↓↓ — отвод теплоты

Физическая картина сублимационного обезвоживания достаточно сложна. В ходе сушки зона сублимации углубляется в толщу продукта. Образующийся подсохший слой оказывает сопротивление как выходу пара из зоны парообразования к поверхности материала, так и передаче теплоты в эту зону извне. Интенсивность процесса определяется свойствами высушиваемого материала, различными для обезвоженной и замороженной зон и переменными в ходе процесса, и внешними условиями: методом теплоподвода в зону сублимации, потенциалом и условиями массопереноса в окружающую среду.

Потенциалом массопереноса является перепад парциальных давлений, однако при заданной его величине интенсивность процесса сублимации зависит от соотношений общего и парциальных давлений в паровоздушной среде, сопротивлений переносу пара на тракте продукт — десублиматор, а также от производительности и геометрических характеристик десублиматора. Теплота к продукту подводится чаще всего теплопроводностью и инфракрасным излучением, иногда с помощью токов сверхвысокой частоты. Любой из этих процессов теплоподвода сопровождается конвективным теплообменом поверхности продукта с окружающей разреженной средой.

Общая теория процесса сублимационной сушки еще не разработана, и уравнение (9.32) не может быть применено как расчетное. По результатам экспериментальных исследований предложен ряд частных расчетных зависимостей для определения интенсивности и длительности сушки, с которыми можно познакомиться в специальной литературе (см., например, [9]).

Так, при радиационном инфракрасном теплоподводе для приближенного расчета длительности сублимационного высушивания продукта толщиной h (мм) может быть рекомендовано выражение

$$\tau = \frac{(W_н - W_к)\, h\rho_с}{B\,(p_с - p_д)} + \frac{\ln \dfrac{W_{к1}}{W_к}\, h^{0,75}}{K^{0,5} p^{0,2}}, \tag{9.33}$$

решаемое совместно с формулой

$$W_{кр} = \frac{A t_{кон}^{0,5}\, h^{0,75}}{p^{0,2}}, \tag{9.34}$$

где $W_н$, $W_{кр}$, $W_к$ — соответственно влагосодержания продукта начальное, критическое и конечное, % массы абсолютно сухого образца; $\rho_с$ — плотность абсолютно сухого материала, кг/м^3; B, K, A — численные коэффициенты, определяемые экспериментально для групп сходных по свойствам продуктов, их значения приведены в [9]; $p_с$ и $p_д$ — соответственно давления пара при температурах сублимаций и десублимации, мм рт. ст.; p — общее давление в системе, мм рт. ст.; $t_{кон}$ — допустимая (в соответствии с технологическими требованиями) конечная температура продукта, °С.

9.6. ТЕПЛОМАССООБМЕН ПРИ ДЕСУБЛИМАЦИИ

Процесс десублимации (т. е. фазовый переход пар—лед при параметрах, меньших параметров тройной точки) существенно отличается от процесса конденсации пара в жидкость.

В отличие от пленки конденсата, непрерывно стекающей с поверхности аппарата, слой льда, образующегося на этой поверхности при десублимации, обычно прочно удерживается ею. Толщина и термическое сопротивление этого слоя непрерывно нарастают в ходе процесса. Для создания аппаратов с непрерывно очищаемой поверхностью (скребковых десублиматоров) не найдено приемлемых технических решений.

Десублимация происходит, как правило, в присутствии неконденсирующихся (не изменяющих своего фазового состояния при данной температуре охлаждаемой поверхности) газов, натекающих через неплотности в вакуумную установку и выделяющихся высушиваемым материалом. Вследствие этого толщина образующегося льда переменна вдоль охлаждаемой поверхности: она максимальна на начальном участке и убывает практически до нуля на некотором отрезке по длине поверхности. Происходит своеобразное «стекание» слоя десублимата вдоль поверхности при любом ее расположении и форме. Входной участок десублиматора может быть полностью закрыт образующимся льдом, после чего аппарат регенерируют (освобождают от льда). Обычно переменно во времени и количество пара, поступающего в десублиматор: по мере высыхания материала оно уменьшается.

Отмеченными факторами обусловлена нестационарность процесса десублимации как во времени, так и в пространстве. Значения термического сопротивления образующегося десублимата (льда) и диффузионного сопротивления неконденсирующихся газов существенно зависят от конкретных условий организации процесса и конструкции десублиматора.

Все это исключает возможность использования для расчета процессов десублимации теоретических решений, полученных для конденсации пара в жидкость. Попытки использования в расчетах десублимации уравнения Ньютона — Рихмана и понятия о коэффициенте теплоотдачи α оказались неплодотворными, не соответствующими механизму процесса, так как его интенсивность определяется диффузионным переносом пара к поверхности десублимации через слой неконденсирующихся газов, а не теплообменом.

Надежных обобщенных методов расчета процесса тепломассообмена при десублимации в настоящее время нет. Имеющиеся опытные данные обрабатываются обычно в форме частных расчетных зависимостей, позволяющих определить технические характеристики десублиматоров наиболее рациональных и часто используемых конструкций.

В корпусе десублиматора (см. рис. 9.2 в разделе 9.5) или непосредственно вблизи высушиваемого продукта в сублиматоре располагаются охлаждаемые элементы в виде труб или полых панелей, внутри которых циркулирует холодильный агент, а на наружной поверхности десублимирует удаляемый из продукта пар. Цель расчета — определение площади поверхности десублимации, необходимой для восприятия всего образующегося в сушилке пара и тем самым поддержания в ней заданных параметров (давления и температуры сублимации).

Ниже в качестве примера приведена методика расчета панельного десублиматора с движением пара вдоль поверхности вертикальных панелей (по данным Л. С. Малкова, А. З. Волынца и др.). По заданной общей производительности десублиматора G (расход пара, удаляемого из сушимого продукта) определяется удельный (отнесенный к удвоенной высоте панели) расход пара $j_п$:

$$j_п = G/B,$$

где $j_п$ — удельный расход пара, кг/(с·Н); G — производительность десублиматора, кг/с; B — удвоенная суммарная высота всех панелей десублиматора.

$$B = 2Ah/(H+s),$$

где A — ширина корпуса десублиматора, м; h — принятая высота панели, м; H — расстояние между панелями, м; s — толщина одной панели, м.

Длина панелей $x(\tau)$, необходимая для поддержания заданного режима в сушильной установке в течение времени τ определяется из зависимости

$$x(\tau) = 1{,}3(K^{-1}\sqrt{a\tau}). \qquad (9.35)$$

Здесь $K = \dfrac{\pi a_л \rho_л \beta}{2j_п}$; $a_л$, $\rho_л$ — соответственно температуропроводность и плотность льда;

$$\beta = \sqrt{\frac{c_л(t_л - t_д)}{2r}},$$

где $c_л$ — удельная теплоемкость льда; $t_л$ и $t_д$ — температуры поверхностей льда и десублиматора; r — теплота десублимации.

Зависимость (9.35) получена на основании общепринятого метода решения задач стефановой нелинейности в предположении, что фронт (поверхность) фазового превращения перемещается по закону квадратного корня от времени.

Глава 10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАССООБМЕНА

10.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Процессы массообмена широко распространены в холодильной и криогенной технике, как и в других областях техники. В аппаратах абсорбционных машин, в испарителях и конденсаторах холодильных машин, когда в холодильном агенте присутствуют другие вещества, не претерпевающие фазовых изменений при заданных температурах насыщения, в контактных аппаратах холодильных установок, систем кондиционирования воздуха и разделительных устройств, в установках криогенной техники массообменные процессы в той или иной степени определяют эффективность работы соответствующих аппаратов и устройств.

Массообменные процессы во многих случаях сопровождаются переносом теплоты, а перенос энергии в целом ряде устройств сопровождается переносом вещества. Например, при охлаждении воды в градирнях помимо теплообмена имеет место и перенос образовавшегося пара в паровоздушную смесь.

При изложении материала данной главы основное внимание уделено процессам переноса массы, однако в ряде мест освещены совместно протекающие массотеплообменные процессы.

Массообменом называют процесс, в результате которого вещество переносится из одного места пространства в другое. Поэтому в дальнейшем (как это принято в учебной и научной литературе) при рассмотрении массообменных процессов будем употреблять следующие понятия: перенос массы, количество массы, поток массы, плотность потока массы, концентрация массы, понимая под этим количество вещества, поток вещества, плотность потока вещества, концентрация вещества. Подробные определения каждого понятия будут приведены ниже.

Массообмен наблюдается в системах, состоящих из нескольких компонентов, концентрация которых неодинакова в различных точках системы. Согласно Д. В. Гиббсу компонентами называют вещества, входящие в систему и имеющие массу, достаточную для образования всех фаз, т. е. гомогенных частей данной системы.

Как известно, в термодинамике под фазой понимают равновесное состояние вещества, отличающееся по своим физическим свойствам от других равновесных состояний того же вещества. Переход вещества из одной фазы в другую — фазовый переход — связан с качественным изменением свойств вещества.

Наибольший интерес в холодильной, криогенной технике и кондиционировании воздуха представляют те массообменные процессы, которые протекают в системах, состоящих из нескольких фаз. В этих случаях масса одного компонента (или нескольких компонентов) перемещается внутри одной из фаз, достигает поверхности раздела, пересекает ее и распространяется в другой фазе.

Перенос массы рассматриваемого компонента внутри каждой из фаз может осуществляться двумя способами: молекулярной диффузией и конвективной диффузией.

Молекулярной диффузией называют самопроизвольный процесс переноса массы, обусловленный движением частиц рассматриваемого компонента. Молекулярная диффузия может быть концентрационной, термо- и бародиффузией. Под концентрационной диффузией будем понимать такой вид молекулярной диффузии, в котором перенос массы происходит в системе, имеющей во всех точках одинаковую температуру и одинаковое давление, но различные концентрации масс компонентов. Определение понятий термо- и бародиффузии будет приведено в четвертом и пятом разделах.

Конвективной диффузией называют процесс переноса массы из одной фазы в другую, обусловленный перемещением мольных объемов компонентов, составляющих систему. Перенос массы из одной фазы в другую наблюдается при наличии разных концентраций данного компонента в рассматриваемом и равновесном состояниях.

Под концентрацией массы понимают относительную величину, характеризующую состав системы. Концентрацию можно задать различными способами: массовыми долями, объемными долями, мольными долями, парциальными давлениями, объемной массовой концентрацией, объемной мольной концентрацией, относительной массовой концентрацией, относительной мольной концентрацией и т. д.

Массовой долей называют отношение массы компонента к массе всей системы.

$$g_i = M_i/M,$$

где g_i — массовая доля i-го компонента; M_i — масса i-го компонента; M — масса всей системы.

Объемной долей называют отношение парциального объема компонента к объему всей смеси. Парциальный объем V_i — объем i-го компонента, если последний находился бы при температуре и давлении системы.

$$r_i = V_i/V,$$

где r_i — объемная доля i-го компонента; V_i — парциальный объем i-го компонента; V — объем системы.

Мольной долей называют отношение числа молей компонента к числу молей системы.

$$x_i = N_i/N,$$

где x_i — мольная доля i-го компонента; N_i — число молей его; N — число молей системы.

Если все компоненты системы подчиняются законам идеальных газов, то объемная доля компонента численно равна его мольной доле.

Объемная массовая концентрация c_i выражается отношением массы данного компонента к объему системы: $c_i = M_i/V$.

Объемная мольная концентрация c_i^* представляет собой отношение числа молей данного компонента ко всему объему смеси:
$c_i^* = N_i/V$.

Относительной массовой концентрацией g_i^* называется отношение массы компонента M_i к массе другого компонента, количество которого и концентрация не изменяются в исследуемом процессе:

$g_i^* = M_i/M_0$.

Относительной мольной концентрацией x_i^* называется отношение числа молей i-го компонента N_i к числу молей компонента, концентрация которого не изменяется в рассматриваемом процессе:

$x_i^* = N_i/N_0$.

При дальнейших рассуждениях мы, как правило, будем пользоваться понятием объемной массовой концентрации.

10.2. ПОЛЕ И ГРАДИЕНТ КОНЦЕНТРАЦИИ

Совокупность значений концентрации рассматриваемого компонента в данный момент времени в рассматриваемой системе называется полем концентрации этого компонента. Математическое описание поля концентрации i-го компонента можно представить уравнением

$$c_i = f(x,\ y,\ z,\ \tau), \qquad (10.1)$$

где x, y, z — текущие координаты; τ — время.

Поле концентраций может быть стационарным и нестационарным. Если поле концентраций меняется во времени, то оно нестационарно. Уравнение (10.1) описывает нестационарное поле концентраций. Если поле концентраций не изменяется во времени, то оно стационарно. Уравнение стационарного поля концентраций

$$c_i = f_1(x,\ y,\ z). \qquad (10.2)$$

Поле концентраций скалярно. Оно может быть трехмерным [уравнение (10.2)], двухмерным и одномерным.

В любом концентрационном поле имеются точки, в которых концентрация рассматриваемого компонента одинакова. Их совокупность есть изоконцентрационная поверхность. Уравнение изоконцентрационной поверхности $f(x,\ y,\ z,\ \tau) = 0$.

В нестационарном поле концентраций изоконцентрационные поверхности любого компонента нестабильны. Они изменяют свою ориентацию в пространстве и во времени. В стационарном поле концентраций изоконцентрационные поверхности стабильны. При перемещении в пространстве от одной изоконцентрационной поверхности к другой наблюдается изменение концентрации. Наибольшее изменение концентрации наблюдается в направлении, перпендикулярном к изоконцентрационной поверхности. Для характеристики поля концентрации вводят понятие градиента концентрации.

Градиентом концентрации называется вектор, направленный по нормали к изоконцентрационной поверхности в сторону возрастания концентрации (рис. 10.1) и численно равный частной производной от концентрации по расстоянию, измеренному по нормали к изоконцентрационной поверхности,

$$\operatorname{grad} c = \vec{n}_0 \frac{\partial c}{\partial n},$$

где $\vec{n}_0$ — единичный вектор, направленный по нормали к изоконцентрационной поверхности.

В дальнейшем только для простоты написания в выражении для градиента концентрации не будем писать $\vec{n}_0$, т. е. скалярную величину градиента концентрации тоже будем называть градиентом концентрации.

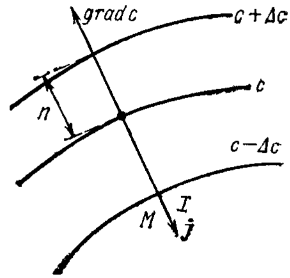


Рис. 10.1. Направление grad C, количества массы M, потока массы I, плотности потока массы j

Для количественной характеристики массопереноса введем понятие количества массы M, потока массы I, плотности потока массы j.

Количеством массы называют массу, проходящую через изоконцентрационную поверхность.

Поток массы — отношение количества перемещающейся массы ко времени:

$$I = dM/d\tau.$$

Плотность потока массы — отношение потока массы, проходящего через изоконцентрационную поверхность, к площади этой поверхности: $j = dI/dF$.

Количество массы, поток массы, плотность потока массы — величины векторные. Они направлены в сторону уменьшения концентрации. На рис. 10.1 показано направление градиента концентрации, количества массы, потока массы, плотности потока массы.

10.3. КОНЦЕНТРАЦИОННАЯ ДИФФУЗИЯ. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ

Первый закон Фика. Как уже говорилось выше, передача вещества осуществляется двумя способами: молекулярной диффузией и конвективной диффузией. В данном разделе будет идти речь о концентрационной молекулярной диффузии.

Частицы, из которых состоит любой компонент, в реальных условиях (при температуре $T > 0$ К) находятся в движении. Эти частицы в процессе движения сталкиваются с другими частицами данного компонента и других компонентов. Результатом движения, столкновения частиц рассматриваемого компонента будет перемещение их в ту сторону, где количество этих частиц, их концентрация меньше. Связь между количеством перемещающегося таким образом вещества и полем его концентрации устанавливается первым законом Фика: количество массы данного компонента, проходящей через изоконцентрационную поверхность, пропорционально градиенту концентрации его, площади изоконцентрационной поверхности и длительности процесса, т. е.

$$M_i = -D_i \frac{\partial c_i}{\partial n} F\tau, \qquad (10.3)$$

где D_i — коэффициент молекулярной диффузии.

Если коэффициент молекулярной диффузии и градиент концентрации изменяются по изоконцентрационной поверхности и по времени, то уравнение (10.3) запишется так:

$$d^2M_i = -D_i \frac{\partial c_i}{\partial n} dF\, d\tau. \qquad (10.4)$$

Уравнения (10.3) и (10.4) являются математической формулировкой первого закона Фика. Знак «минус» в уравнениях (10.3) и (10.4) указывает на то, что количество массы направлено в противоположную сторону от направления градиента концентрации.

Для потока массы и плотности потока массы первый закон Фика запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} J_i &= -D_i \frac{\partial c_i}{\partial n} F; \\ j_i &= -D_i \frac{\partial c_i}{\partial n}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.5)$$

Уравнение (10.5) написано для случая, когда коэффициент молекулярной диффузии и градиент концентрации постоянны по изоконцентрационной поверхности. Если эти условия не соблюдаются, то выражение для потока массы запишется так:

$$J_i = -\int_F D_i \frac{\partial c_i}{\partial n} dF,$$

или в дифференциальной форме

$$dJ_i = -D_i \frac{\partial c_i}{\partial n} dF.$$

Аналитические выкладки, посвященные теоретическому обоснованию первого закона Фика, приведены в работе [17].

Коэффициент молекулярной диффузии. Коэффициент молекулярной диффузии D_i (м²/с) численно равен массе рассматриваемого компонента, проходящего через единичную площадь изоконцентрационной поверхности в единицу времени при единичном градиенте концентрации этого компонента. Значение коэффициента молекулярной диффузии зависит от физических свойств как рассматриваемого компонента, так и других компонентов, входящих в изучаемую систему, от режимных параметров: температуры, давления (для газов), а также от концентрации компонентов. Для бинарных систем (состоящих из двух компонентов) в большинстве случаев принимают одинаковыми коэффициенты диффузии обоих компонентов, составляющих систему. В этом случае коэффициент молекулярной диффузии рассматривается как коэффициент взаимной диф-

Таблица 10.1. **Значения молярных объемов некоторых газов**

Вещество	Молярный объем, м³/кмоль	Вещество	Молярный объем, м³/кмоль
Водород	14,3	Водяной пар	18,8
Кислород	25,6	Воздух	29,9
Аммиак	25,8	Диоксид углерода	34,0
Сернистый газ	44,8	Хлор	48,4

фузии и при его написании индекс опускается. Численные значения коэффициентов молекулярной диффузии для газов колеблются от $9\cdot10^{-6}$ до $70\cdot10^{-6}$ м²/с, а для жидкостных систем (растворов) они в 10^4—10^5 раз меньше [1].

Для малых давлений в [1] предложено уравнение

$$D=1,12\cdot10^{-8}\frac{\sqrt{1/M_A+1/M_B}}{(V_A^{1/3}+V_B^{1/3})^2}\,\frac{T^{5/2}}{p(T+C_{A-B})}, \qquad (10.6)$$

где M_A, M_B — молекулярные массы газов; V_A, V_B — молярные объемы газов (табл. 10.1); T — температура, К; p — давление, Па; C_{A-B} — коэффициент для бинарных систем.

$$C_{A-B}=1,47\,F'(T_A-T_B)^{0,5}.$$

Здесь

$$F'=8\frac{(V_A+V_B)^{0,5}}{V_A+V_B}.$$

При расчете по уравнению (10.6) получается удовлетворительное совпадение с опытными данными.

Значения коэффициентов молекулярной диффузии некоторых газов в воздухе при 0°С и абсолютном давлении $p=0,1$ МПа приведены в табл. 10.2.

Таблица 10.2. **Значения коэффициентов молекулярной диффузии некоторых газов**

Газ	$D\cdot10^6$, м²/с	Газ	$D\cdot10^6$, м²/с
Кислород	17,8	Аммиак	17,0
Азот	13,2	Водяной пар	21,9
Водород	61,1	Метиловый спирт	13,3
Диоксид углерода	13,8	Этиловый спирт	10,2
Диоксид серы	10,3	Серный ангидрид	9,4

Если известно значение коэффициента молекулярной диффузии D_i заданной пары газов при одних режимных параметрах (T_1, p_1), определить коэффициент молекулярной диффузии D_2 для тех же газов при других параметрах (T_2, p_2) можно по приближенной формуле, предложенной в работе [1],

$$D_2=D_1\frac{P_1}{P_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}.$$

По данным той же работы формулу для определения коэффициента молекулярной диффузии жидкостей можно представить в таком виде:

$$D = kT/(6\pi r\mu),$$

где k — константа Больцмана; T — абсолютная температура; r — радиус молекул растворенного вещества; μ — динамический коэффициент вязкости растворителя.

Для слаборазбавленных растворов рекомендуется зависимость для определения значения коэффициента молекулярной диффузии D_2 при любой температуре T_2, если известно его значение при температуре $T_1 (D_1)$:

$$D_2 = D_1 \frac{T_2}{T_1} \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

где μ_1, μ_2 — динамические коэффициенты вязкости раствора при температуре T_1 и T_2.

Для определения коэффициента молекулярной диффузии газа, растворенного в жидкости при $t=20°C$, в [1] рекомендуется следующая формула:

$$D_{20} = \frac{10^{-6}}{AB\sqrt{\mu}\,(V_г^{1/3} + V_ж^{1/3})} \sqrt{\frac{1}{M_г} + \frac{1}{M_ж}}, \qquad (10.6а)$$

где A — поправочный коэффициент для растворенного вещества (табл. 10.3); B — поправочный коэффициент для растворителя (табл. 10.4); μ — динамический коэффициент вязкости жидкости, Па·с; $V_г$, $V_ж$ — молярные объемы газа и жидкости; $M_г$, $M_ж$ — молекулярные массы газа и жидкости.

Таблица 10.3. **Значения коэффициента A в формуле (10.6.а)**

Растворенное вещество	Растворитель		
	Вода	Метанол	Этанол
Амиловый спирт	1,16	1,29	1,81
Метанол	1,19	—	—
Пропанол	1,16	—	—
Этанол	1,24	—	—

Таблица 10.4. **Значения коэффициента B в формуле (10.6.а)**

Растворитель	B	Растворитель	B
Амиловый спирт	1,14	Вода	4,7
Метанол	2,0	Пропанол	1,36
Этанол	2,0		

Таблица 10.5. **Значения коэффициента молекулярной диффузии для некоторых веществ**

Вещество	$D \cdot 10^9$, $м^2/с$	Вещество	$D \cdot 10^9$, $м^2/с$
Азот	1,64	Уксусная кислота	0,88
Аммиак	1,76	Хлор	1,22
Водород	5,15	Хлористый водород	2,64
Глюкоза	0,60	Хлористый натрий	1,35
Диоксид углерода	1,77	Кислород	1,80
Сахароза	0,45		

Для определения коэффициента молекулярной диффузии газа, растворенного в жидкости, при температуре, отличной от $t=20°C$, в работе [1] рекомендуется следующая зависимость:

$$D = D_{20}\left[1 + b\,(t - 20)\right],$$

где $b = \dfrac{0{,}2\sqrt{\mu}}{3\sqrt{\rho}}$.

Здесь μ — динамический коэффициент вязкости жидкости (при $t=20°C$), Па·с; ρ — плотность жидкости, кг/м^3.

По данным работы [1] в табл. 10.5 приведены значения коэффициента молекулярной диффузии для некоторых веществ в слаборазбавленных растворах при температуре $t=20°C$.

Для вычисления коэффициента молекулярной диффузии воды в воздух в работе [42] рекомендуется формула

$$D = 0{,}0231 \cdot 10^{-3}\,\frac{p_0}{p}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1{,}81},$$

где p_0, T_0 — давление и температура при нормальных технических условиях ($p_0 = 9{,}8 \cdot 10^4$ Па; $T_0 = 273$ К); p, T — то же, при данных условиях.

Второй закон Фика. Второй закон Фика устанавливает зависимость между концентрацией, координатами и временем для процесса распространения массы путем молекулярной диффузии. Так как в дальнейших выкладках мы будем рассматривать изменение концентрации только одного компонента, то индексы у соответствующих символов (c, D) будут опущены.

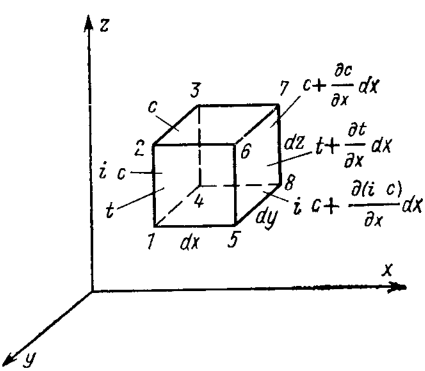


Рис. 10.2. К выводу второго закона Фика и дифференциальных уравнений

Из системы, в которой изменяется концентрация рассматриваемого компонента, выделим элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz (рис. 10.2). В элементарное тело путем молекулярной диффузии поступает масса dM, которую можно представить как сумму трех потоков массы по трем осям координат. Через грань *1—2—3—4* в соответствии с первым законом Фика поступит масса за время $d\tau$

$$\delta M_x = -D\frac{\partial c}{\partial x}\,dy\,dz\,d\tau. \qquad (10.7)$$

Через грань *5—6—7—8* из рассматриваемого параллелепипеда выйдет масса

$$\delta M_{x+dx} = -D\frac{\partial\left(c+\frac{\partial c}{\partial x}dx\right)}{\partial x}\,dy\,dz\,d\tau. \qquad (10.8)$$

При написании уравнения (10.8) предполагалось, что физические свойства в рассматриваемом элементарном теле постоянны. Вычтя из уравнения (10.7) уравнение (10.8), получим поток массы, поступивший в элементарный параллелепипед по направлению оси x:

$$dM_x = \delta M_x - \delta M_{x+dx} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz\,d\tau.$$

Аналогично рассуждая, получим выражения для потока массы, поступившей в элементарный параллелепипед по направлению осей y и z:

$$dM_y = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\,dx\,dy\,dz\,d\tau;$$

$$dM_z = D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\,dx\,dy\,dz\,d\tau.$$

Полное приращение массы компонента во всем элементарном объеме

$$dM = dM_x + dM_y + dM_z = D\nabla^2 c\,dx\,dy\,dz\,d\tau, \qquad (10.9)$$

где $\nabla^2 c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Поступившая путем молекулярной диффузии масса рассматриваемого компонента вызовет изменение концентрации его в элементарном теле, которое можно представить следующей зависимостью:

$$dM = dx\,dy\,dz\frac{\partial c}{\partial \tau}\,d\tau. \qquad (10.10)$$

Из уравнений (10.9) и (10.10) получаем аналитическое выражение второго закона Фика

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D\nabla^2 c.$$

Первый и второй законы Фика, строго говоря, справедливы только для бинарных систем.

10.4. ТЕРМОДИФФУЗИЯ И БАРОДИФФУЗИЯ

Термодиффузия. Рассмотрим систему, в которой в какой-то начальный момент времени концентрация всех компонентов во всех точках ее одинакова, но температура различна. В такой системе возникнет перемещение компонентов. Компоненты, молекулы которых имеют бо́льшую массу, будут увеличивать свою концентрацию в местах, где наиболее низкая температура. В эти же области будут стремиться также компоненты, состоящие из более крупных (по объему) молекул. В ионизированном газе молекулы (или ионы), обладающие большей массой, будут стремиться перейти в области с более высокой температурой. Таким образом, направление движения молекул в неравновесном температурном поле определяется природой компонентов.

Явление изменения концентрации, обусловленное наличием неодинаковости температур в различных точках системы, называется термодиффузией или термической диффузией (эффект Соре).

Количественно рассматриваемое явление обычно оценивают следующей зависимостью:

$$j_i = -\rho \frac{D_{i\text{т}}}{T} \frac{\partial t}{\partial n},$$

где ρ — плотность i-го компонента, $D_{i\text{т}}$ — коэффициент его термодиффузии; $D_{i\text{т}} = k_{i\text{т}} D_i$. Здесь $k_{i\text{т}}$ — термодиффузионное отношение для i-го компонента.

Явление термодиффузии учитывают только при больших градиентах температур, так как $\kappa_{i\text{т}}$ для смесей газов, как правило, меньше 0,1.

Перемещение компонентов, обусловленное неодинаковостью температуры в различных точках системы, вызывает неодинаковость концентрации компонентов в этих точках. Последнее, следовательно, создает появление в рассматриваемой системе градиентов концентрации компонентов. Как уже было сказано выше, при наличии в системе градиента концентрации возникает концентрационная диффузия. Поток массы, обусловленный концентрационной диффузией, противоположен потоку массы, обусловленному термодиффузией.

Бародиффузия. В системах, в разных точках которых общее давление неодинаково, наблюдается перемещение компонентов. При этом компоненты, молекулы которых обладают большей массой, перемещаются в область повышенного давления, а компоненты, молекулы масса которых меньше,— в область пониженного давления.

Выражение для плотности потока массы, обусловленного бародиффузией, можно записать в виде

$$j_i = -\rho \frac{D_{ip}}{p} \frac{\partial p}{\partial n},$$

где ρ — плотность смеси; p — общее давление смеси; D_{ip} — коэффициент бародиффузии; коэффициент D_{ip} находят по величине коэффициента молекулярной диффузии с помощью бародиффузионного соотношения $D_{ip}/D_i = k_{ip}$; $\frac{\partial p}{\partial n}$ — градиент давления.

Для системы, состоящей из двух компонентов, для определения k_{ip} в работе [15] рекомендуется зависимость

$$k_{ip} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2} \frac{M_2 - M_1}{M}, \qquad (10.11)$$

где ρ_1, ρ_2, ρ — плотности компонентов и смеси; M_1, M_2, M — молекулярные массы соответственно компонентов и смеси.

В уравнении (10.11) индекс i опущен, так как считается, что коэффициенты диффузии и, следовательно, бародиффузионные отношения будут одинаковыми для обоих компонентов (в случае бинарной смеси).

Перемещение компонентов, обусловленное градиентом давления, вызывает появление градиента концентрации. Последнее обусловливает концентрационную диффузию. При равенстве молекулярных масс компонентов, составляющих систему, бародиффузия отсутствует.

10.5. КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ. МАССООТДАЧА

Как уже говорилось ранее, конвективной диффузией называется массоперенос, обусловленный перемещением мольных объемов компонентов, составляющих смесь. Конвективная диффузия всегда сопровождается молекулярной диффузией. Совместный перенос массы молекулярной и конвективной диффузией называют *конвективным массообменом*, или *массоотдачей*. Массоотдачу мы наблюдаем в системах, состоящих из газовых и жидких сред.

Процесс массоотдачи описывается уравнением

$$M = \beta (c^{\mathrm{I}} - c^{\mathrm{II}}) F \tau, \qquad (10.12)$$

где β — коэффициент массоотдачи; c^{I}, c^{II} — концентрации рассматриваемого компонента на двух изоконцентрационных поверхностях.

Из формулы (10.12) видно, что количество массы, передаваемой от одной изоконцентрационной поверхности к другой, прямо пропорционально разности концентраций между ними, площади изоконцентрационной поверхности и длительности процесса.

Коэффициент массоотдачи. Коэффициент массоотдачи численно равен количеству массы, передаваемой в единицу времени от единицы площади одной изоконцентрационной поверхности к другой при единичной разности концентраций между ними. Коэффициент массоотдачи измеряется в метрах в секунду. Его значение в большой мере зависит от гидродинамических условий течения среды. Для жидких сред коэффициент массоотдачи пропорционален коэффициенту молекулярной диффузии $\beta = D/n$, где n — расстояние по нормали между изоконцентрационными поверхностями, соответствующими концентрациям c^{I}, c^{II}.

Дифференциальные уравнения конвективной диффузии. Расчет процесса массоотдачи предполагает установление зависимостей между концентрацией рассматриваемого компонента, координатами, временем, скоростью движения среды, температурой ее, давлением и физическими свойствами. Все эти величины в общем случае могут меняться и в пространстве, и во времени. Как известно, при исследовании подобных явлений в большинстве случаев используют общие законы физики и, рассматривая течение процесса на бесконечно малом отрезке времени в элементарном объеме, получают дифференциальные уравнения процесса. Интегрирование уравнений позволяет получить аналитические зависимости между переменными для конечных отрезков времени и всего объема, в котором осуществляется массоотдача. Ниже рассмотрена система дифференциальных уравнений, описывающих этот процесс.

Уравнение массоотдачи. Рассмотрим массообмен между жидкой или газовой средой и поверхностью твердого тела. У самой поверхности перенос массы будет происходить благодаря молекулярной диффузии. В соответствии с первым законом Фика для элементарного количества массы, которым обмениваются тело со средой, можно записать следующее соотношение:

$$d^2M = -D\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0} dF\, d\tau, \tag{10.13}$$

где x — координата в направлении, перпендикулярном поверхности.

С другой стороны, элементарная поверхность dF обменивается со средой той же массой, но определяемой по уравнению массоотдачи, т. е.

$$d^2M = \beta\,(c_с - c_ж)\, dF\, d\tau, \tag{10.14}$$

где $c_с$, $c_ж$ — концентрации рассматриваемого компонента у поверхности твердого тела и в объеме среды.

Сопоставляя уравнения (10.13) и (10.14), получим следующее:

$$\beta\,(c_с - c_ж) = -D\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=0}. \tag{10.15}$$

Уравнение (10.15) называют дифференциальным уравнением массоотдачи.

Уравнение конвективной диффузии. Рассматривается процесс массопереноса в движущейся среде. Выделим из потока элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz. За элементарный отрезок времени $d\tau$ в рассматриваемое тело путем молекулярной диффузии поступит масса компонента

$$dM = D\nabla^2 c\, dx\, dy\, dz\, d\tau. \tag{10.16}$$

☞ Подробные выкладки, используемые при получении уравнения (10.16), приведены в разделе 10.3.

При конвективной диффузии изменение концентрации компонентов в элементарном объеме за время $d\tau$ описывается следующей зависимостью:

$$dM = dx\, dy\, dz\, \frac{Dc}{d\tau}\, d\tau, \tag{10.17}$$

где $\frac{Dc}{d\tau} = \frac{\partial c}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} + w_z \frac{\partial c}{dz}$ — субстанциальная (полная) производная.

Из соотношений (10.16) и (10.17) с учетом выражения для субстанциальной производной получаем дифференциальное уравнение конвективной диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial \tau}+w_x\frac{\partial c}{\partial x}+w_y\frac{\partial c}{\partial y}+w_z\frac{\partial c}{\partial z}=D\nabla^2 c, \qquad (10.18)$$

или в сокращенной записи

$$\frac{Dc}{\partial \tau}=D\nabla^2 c.$$

Для стационарных процессов в уравнении (10.18) не будет члена, содержащего локальную составляющую полной производной, т. е.

$$w_x\frac{\partial c}{\partial x}+w_y\frac{\partial c}{\partial y}+w_z\frac{\partial c}{\partial z}=D\nabla^2 c.$$

Это соотношение и уравнение (10.18) описывают массоперенос в движущейся жидкости при постоянной температуре и давлении во всех точках рассматриваемой системы.

Уравнение массообмена, осложненного термодиффузией. Рассматривается движущаяся система, в которой концентрация и температура компонента изменяются и в пространстве, и во времени, но давление в системе постоянно. Здесь будет наблюдаться и концентрационная, и термическая диффузии; бародиффузия отсутствует.

На рис. 10.2 представлено элементарное тело, через грани которого будет происходить перенос массы, обусловленный концентрационной диффузией и термодиффузией. Через грань *1—2—3—4* в параллелепипед поступит количество массы

$$\delta M_x=-D\frac{\partial c}{\partial x}\,dy\,dz\,d\tau-\rho\frac{D_{\text{т}}}{T}\frac{\partial t}{\partial x}\,dy\,dz\,d\tau. \qquad (10.19)$$

В правой части уравнения (10.19) первый член определяет элементарное количество массы, поступившей в элементарное тело путем концентрационной диффузии, а второй — путем термодиффузии. Через грань *5—6—7—8* из параллелепипеда будет унесено количество массы

$$\delta M_{x+dx}=-D\frac{\partial\left(c+\frac{\partial c}{\partial x}\partial x\right)}{\partial x}\,dy\,dz\,d\tau-\rho\frac{D_{\text{т}}}{T}\cdot\frac{\partial\left(t+\frac{\partial t}{\partial x}dx\right)}{\partial x}\,dy\,dz\,d\tau. \qquad (10.20)$$

При написании уравнения (10.20) предполагалось, что физические свойства системы не изменяются. Вычтя из уравнения (10.19) уравнение (10.20), получим выражение для количества массы, поступившей в рассматриваемое тело по направлению оси x,

$$dM_x=\delta M_x-\delta M_{x+dx}=\left(D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\rho\frac{D_{\text{т}}}{T}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)dx\,dy\,dz\,d\tau.$$

Рассуждая аналогично, получим выражения для элементарных количеств массы, поступивших по направлениям осей y и z:

$$dM_y=\left(D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\rho\frac{D_{\text{т}}}{T}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)dx\,dy\,dz\,d\tau;$$

$$dM_z=\left(D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}+\rho\frac{D_{\text{т}}}{T}\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz\,d\tau.$$

Общее количество массы рассматриваемого компонента, поступившей в элементарный параллелепипед путем концентрационной диффузии и термодиффузии, определится следующим выражением:

$$dM = dM_x + dM_y + dM_z = \left(D\nabla^2 c + \rho \frac{D_т}{T} \nabla^2 t \right) dx\,dy\,dz\,d\tau, \quad (10.21)$$

где $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}.$$

Поступление массы вызовет увеличение концентрации данного компонента в параллелепипеде:

$$dM = dx\,dy\,dz \frac{Dc}{d\tau} d\tau. \quad (10.22)$$

Сопоставление уравнений (10.21) и (10.22) позволяет получить искомую зависимость

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} + w_z \frac{\partial c}{\partial z} = D\nabla^2 c + \rho \frac{D_т}{T} \nabla^2 t,$$

описывающую нестационарные процессы переноса массы, обусловленные концентрационной диффузией и бародиффузией.

Уравнение массопереноса при наличии концентрационной диффузии и бародиффузии. Рассматривается движущаяся система, в которой масса переносится и концентрационной диффузией, и бародиффузией. Температура во всех точках системы постоянна. Следовательно, термодиффузия отсутствует.

Рассуждая аналогично предыдущему и приняв, что физические свойства системы постоянны, будем иметь

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} + w_z \frac{\partial c}{\partial z} = D\nabla^2 c + \rho \frac{D_p}{p} \nabla^2 p,$$

где $$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}.$$

Если в системе наблюдается также и термодиффузия, то уравнение массопереноса запишется так:

$$\frac{Dc}{d\tau} = D\nabla^2 c + \rho \left(\frac{D_т}{T} \nabla^2 t + \frac{D_p}{p} \nabla^2 p \right).$$

Полученное уравнение описывает процессы переноса в наиболее общем виде.

10.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Задача решается для движущейся двухкомпонентной среды при наличии в ней градиентов температур и концентраций, но при постоянстве коэффициентов теплопроводности и молекулярной диффузии. Влиянием термо- и бародиффузии пренебрегаем. Выделим в рассматриваемом потоке элементарный параллелепипед (см. рис. 10.2) со сторонами dx, dy, dz. Через левую грань (*1—2—3—4*) поступит количество теплоты, которое определится зависимостью

$$\delta Q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dy\, dz\, d\tau - D \frac{\partial (ic)}{\partial x} dy\, dz\, d\tau. \qquad (10.23)$$

В данном уравнении i — удельная энтальпия. Первый член правой части равенства учитывает теплоту, переданную теплопроводностью, а второй — теплоту, поступившую с массой компонента.

Через правую грань (*5—6—7—8*) выводится из рассматриваемого параллелепипеда теплота

$$\delta Q_{x+dx} = -\lambda \frac{\partial \left(t + \frac{\partial t}{\partial x} dx \right)}{\partial x} d\tau\, dy\, dz - D \frac{\partial \left(ic + \frac{\partial (ic)}{\partial x} dx \right)}{\partial x} dy\, dz\, d\tau. \quad (10.24)$$

Вычтя из уравнения (10.23) уравнение (10.24), будем иметь

$$dQ_x = \delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = \left[\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 (ic)}{\partial x^2} \right] dx\, dy\, dz\, d\tau.$$

Аналогично рассуждая, получим выражения для количеств теплоты, поступивших в рассматриваемое тело по направлениям осей y и z:

$$dQ_y = \left[\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 (ic)}{\partial y^2} \right] dx\, dy\, dz\, d\tau;$$

$$dQ_z = \left[\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + D \frac{\partial^2 (ic)}{\partial z^2} \right] dx\, dy\, dz\, d\tau.$$

Общее количество теплоты, воспринятой параллелепипедом,

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = [\lambda \nabla^2 t + D \nabla^2 (ic)]\, dx\, dy\, dz\, d\tau. \qquad (10.25)$$

Эта теплота пойдет на увеличение энтальпии.

$$dQ = \rho c_p \frac{Dt}{d\tau} dx\, dy\, dz\, d\tau. \qquad (10.26)$$

Сопоставив уравнения (10.25) и (10.26), получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t + \frac{D}{\rho c_p} \nabla^2 (ic). \qquad (10.27)$$

Зависимость (10.27) является дифференциальным уравнением тепломассообмена, т. е. уравнением энергии, осложненным учетом массопереноса.

Для того чтобы система уравнений была замкнутой, ее необходимо дополнить уравнениями движения и сплошности, явный вид которых приведен в главе 4.

Для решения конкретных задач к системе дифференциальных уравнений необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей, которые, как известно, называются условиями однозначности. Подробно о них было сказано в главе 4.

10.7. ДИФФУЗИОННЫЕ КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Как уже говорилось в главе 5, критерии подобия можно получить или анализом дифференциальных уравнений, описывающих изучаемое явление, или методом теории размерностей. Как правило, первым методом пользуются в тех случаях, когда имеется аналитическое описание изучаемого явления, а вторым — когда такое описание не представляется возможным выполнить. Так как дифференциальные уравнения уже имеются (см. предыдущие разделы), то для получения критериев подобия естественно выбрать первый метод.

Рассмотрим два подобных явления массопереноса, для которых справедливы уравнения:

$$\beta' (c'_с - c'_ж) = - D' \left(\frac{\partial c'}{\partial x'} \right)_{x'=0}; \tag{10.28}$$

$$\beta (c_с - c_ж) = - D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_{x=0}. \tag{10.29}$$

Уравнение (10.28) описывает первое явление, а уравнение (10.29) — второе. Из определения подобия имеем: $i_\beta = \beta/\beta'$; $i_D = D/D'$;

$$i_l = x/x' = y/y' = z/z' = l/l';$$
$$i_с = c_с/c'_с = c_ж/c'_ж = c/c', \tag{10.30}$$

где i_β, i_D, i_l, i_c — множители подобного преобразования.

С учетом уравнения (10.30) перепишем уравнение (10.29):

$$i_\beta \beta' i_c (c'_с - c'_ж) = i_D \frac{i_c}{i_l} D' \left(\frac{\partial c'}{\partial x'} \right)_{x'=0}. \tag{10.31}$$

Поделив уравнение (10.31) на уравнение (10.28), получим

$$i_\beta = i_D/i_l \quad \text{или} \quad i_\beta i_l / i_D = 1. \tag{10.32}$$

Подставив в уравнение (10.32) вместо множителей подобного преобразования величины, из которых они составлены, будем иметь

$$\frac{\beta l D'}{\beta' l' D} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{\beta' l'}{D'} = \frac{\beta l}{D} = \text{idem}.$$

Полученный комплекс называют диффузионным критерием Нуссельта $\mathrm{Nu}_D = \beta l/D$. Он учитывает соотношение между массоотдачей и молекулярной диффузией.

Анализируя уравнение конвективной диффузии, можно получить два оригинальных критерия:

диффузионный критерий Фурье

$$\mathrm{Fo}_D = D\tau/l^2$$

и диффузионный критерий Пекле

$$\mathrm{Pe}_D = wl/D.$$

Диффузионный критерий Фурье характеризует связь между скоростью изменения поля концентраций, физическими характеристиками и размерами тела.

Диффузионный критерий Пекле является мерой отношения молекулярного и конвективного переноса массы в потоке. Как известно из теории подобия, комбинации критериев образуют новые критерии. Так, например, поделив диффузионный критерий Пекле на критерий Рейнольдса, получим новый критерий — диффузионный критерий Прандтля:

$$\mathrm{Pe}_D/\mathrm{Re} = \nu/D = \mathrm{Pr}_D.$$

Диффузионный критерий Прандтля является мерой подобия концентрационных и скоростных полей в потоке движущейся среды.

Если поделить друг на друга конвективный и диффузионный критерии Прандтля, то получим новый критерий — критерий Льюиса — Семенова:

$$\mathrm{Pr}/\mathrm{Pr}_D = D/a = \mathrm{Le}.$$

Критерий Льюиса — Семенова является мерой подобия концентрационного и температурного полей.

Поделив диффузионные критерии Нуссельта на Пекле, получим новый критерий — диффузионный критерий Стантона

$$\mathrm{St}_D = \mathrm{Nu}_D/\mathrm{Pe}_D = \beta/w.$$

Приведенные выше критерии диффузионного подобия являются наиболее распространенными в теории массопереноса.

10.8. ПОНЯТИЕ О ДИФФУЗИОННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ. ТРОЙНАЯ АНАЛОГИЯ

При конденсации пара из парогазовой среды, при кипении растворов, при движении ненасыщенного влажного воздуха у поверхности воды наблюдается неодинаковость концентраций компонентов, составляющих рассматриваемую среду. С подобными процессами мы встречаемся в аппаратах холодильных машин, в системах кондиционирования воздуха, в разделительных вымораживающих установках, в ректификационных колоннах и в ряде других тепло- и массообменных устройств.

Распределение концентрации водяного пара в паровой среде у поверхности воды показано на рис. 10.3. Аналогичную картину мы будем наблюдать у поверхности нагрева генератора абсорбционной холодильной машины, в конденсаторе паровой холодильной машины при наличии воздуха в конденсирующемся холодильном агенте. При этом переменность концентраций компонентов в рекуперативных аппаратах будет наблюдаться у стенки аппарата, а в контактных аппаратах — на границе раздела фаз, которую в дальнейшем мы будем называть стенкой.

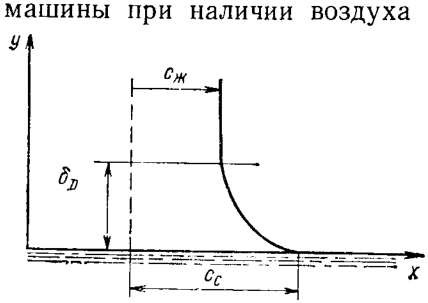


Рис. 10.3. Распределение концентрации компонента у поверхности раздела фаз. $c_ж$, c_c — концентрации компонента соответственно в ядре потока и у поверхности стенки

Тонкий пристенный слой жидкости, в котором концентрация рассматриваемого компонента изменяется от c_c до $c_ж$, называется *диффузионным пограничным слоем*. Здесь c_c —

концентрация возле поверхности нагрева (для случая кипения раствора в рекуперативном испарителе) или возле поверхности раздела фаз (при движении воздуха вдоль поверхности воды) и т. д.; $c_ж$ — концентрация за пределами диффузионного пограничного слоя.

Изменение концентрации рассматриваемого компонента в диффузионном пограничном слое можно представить следующим соотношением: $\partial c/\partial y \neq 0$. Поле концентраций в диффузионном пограничном слое с определенными допущениями описывается следующим уравнением:

$$w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \qquad (10.33)$$

При написании уравнения (10.33) предполагалось, что: а) процесс стационарный; б) изменения концентрации по осям z не происходит; в) вторая производная от концентрации по координате x несопоставимо мала по сравнению со второй производной от концентрации по координате y; г) внутренних источников массы нет.

Диффузионный пограничный слой может быть и ламинарным, и турбулентным. При наличии турбулентного диффузионного пограничного слоя у самой границы раздела фаз будет наблюдаться ламинарный подслой.

Распределение концентраций рассматриваемого компонента в ламинарном диффузионном пограничном слое характеризуется уравнением молекулярной диффузии. Если поле концентраций одномерно, то в соответствии с первым законом Фика уравнение для плотности потока массы запишется следующим образом:

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial y}. \qquad (10.34)$$

При постоянстве коэффициента молекулярной диффузии решение уравнения (10.34) будет иметь вид

$$c = -\frac{j}{D} y + A, \qquad (10.35)$$

где A — постоянная интегрирования, которая определяется из граничных условий. При $y = 0$

$$c = c_с; \quad A = c_с. \qquad (10.36)$$

Совместное рассмотрение зависимостей (10.35) и (10.36) позволяет получить уравнение поля концентраций рассматриваемого компонента в ламинарном диффузионном пограничном слое

$$c = c_с - \frac{j}{D} y. \qquad (10.37)$$

Таким образом, концентрация в рассматриваемом пограничном слое изменяется по линейному закону, если процесс стационарен и физические свойства рассматриваемого компонента постоянны.

Распределение концентраций исследуемого компонента в турбулентном пограничном слое характеризуется уравнением конвективной диффузии. Для установления явного вида уравнения поля концентраций зависимость для плотности потока массы записывают в виде

$$j = -D_{\text{тур}} \frac{\partial c}{\partial y}, \tag{10.38}$$

где $D_{\text{тур}}$ — коэффициент турбулентной диффузии, который характеризует перенос массы, обусловленный неупорядочным турбулентным движением; $D_{\text{тур}}$ в миллионы раз больше D.

Для вычисления коэффициента турбулентной диффузии рекомендуется следующая формула [1]:

$$D_{\text{тур}} = y^2 \frac{\partial w_x}{\partial y}, \tag{10.39}$$

где
$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = A_1 \frac{w_{\text{тур}}}{y}. \tag{10.40}$$

Здесь A_1 — коэффициент пропорциональности; $w_{\text{тур}}$ — скорость турбулентных пульсаций (см. [1]).

Рассмотрев совместно уравнения (10.38), (10.39) и (10.40), получим

$$c = -\frac{j}{A_1 w_{\text{тур}}} \ln y + A_2, \tag{10.41}$$

где A_2 — постоянная интегрирования, которую можно найти, используя граничные условия.

$$\text{При } y = \delta_{D.\,\text{т}};\quad c = c_{\text{ж}};\quad A_2 = c_{\text{ж}} + \frac{j}{A_1 w_{\text{тур}}} \ln \delta_{D.\,\text{т}}. \tag{10.42}$$

С учетом уравнения (10.42) зависимость (10.41) примет вид:

$$c = c_{\text{ж}} + \frac{j}{A_1 w_{\text{тур}}} \ln \frac{\delta_{D.\,\text{т}}}{y}. \tag{10.43}$$

Следовательно, при сделанных допущениях изменение поля концентраций в турбулентном диффузионном пограничном слое подчиняется логарифмическому закону.

При наличии турбулентного диффузионного пограничного слоя, как уже говорилось выше, у самой границы раздела фаз (газ — твердое тело, жидкость — твердое тело, газ — жидкость) наблюдается ламинарный диффузионный подслой. В ламинарном подслое турбулентные пульсации не исчезают внезапно. Они постепенно затухают по мере приближения к стенке. На рис. 10.4 представлены три области турбулентного диффузионного пограничного слоя: I — область только ламинарного диффузионного слоя (толщина его $\delta_{D.\,\text{л}}$); II — область переходного диффузионного пограничного слоя (толщина его $\delta_{D.\,\text{п}}$—$\delta_{D.\,\text{л}}$); III — область только турбулентного диффузионного пограничного слоя (толщина его $\delta_{D.\,\text{т}}$—$\delta_{D.\,\text{п}}$).

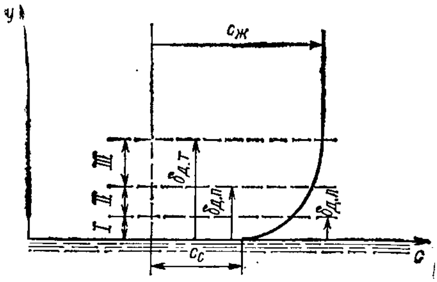


Рис. 10.4. Изменение концентрации в турбулентном диффузионном пограничном слое

Поле концентраций в I области определяется уравнением (10.37), во II области — (10.43). Для вычисления коэффициента турбулентной диффузии в *III* области в работе [1] рекомендуется следующая зависимость:

$$D_{\text{тур}} = A_3 w_{\text{тур}} y^4/\delta^3_{D.\,\text{п}}. \qquad (10.44)$$

В результате совместного решения уравнений (10.37) и (10.44) уравнение поля концентрации для переходной области примет следующий вид:

$$c = c_{\text{ж}} - \frac{j\delta_{D.\,\text{л}}}{D} + \frac{j\delta^3_{D.\,\text{п}}}{3A_3 w_{\text{тур}}}\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{\delta^3_{D.\,\text{л}}}\right),$$

где A_3 — коэффициент пропорциональности, который выбирается таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение (10.43), а это соблюдается при условии

$$A_3 = \frac{j\delta_{D.\,\text{п}}\left(\dfrac{1}{\delta^3_{D.\,\text{п}}} - \dfrac{1}{\delta^3_{D.\,\text{л}}}\right)}{3w_0\left(c_{\text{ж}} - c_{\text{с}} + \dfrac{j}{A_1 w_0}\ln\dfrac{\delta_{D.\,\text{т}}}{\delta_{D.\,\text{п}}} + \dfrac{j}{D}\delta_{D.\,\text{л}}\right)}.$$

При наличии переноса массы в среде, движущейся у неподвижной границы раздела фаз, возникает гидродинамический пограничный слой, уравнение движения в котором можно записать так:

$$w_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \qquad (10.45)$$

При написании уравнения (10.45) были сделаны следующие допущения: а) из-за малости толщины пограничного слоя изменение давления не учитывалось; б) силы гравитации малы в сравнении с силами инерции и вязкости; в) изменения скорости поперек потока (по направлению оси z) не происходит; г) производная от составляющей скорости по оси y (w_y) несопоставимо мала по сравнению с производной от составляющей скорости по оси x (w_x); д) процесс стационарен.

В ряде случаев массоперенос осуществляется в системах, где происходит распространение теплоты, обусловленное наличием градиента температур в движущейся среде. В подобных ситуациях возникает тепловой пограничный слой. Уравнение теплопроводности в нем записывают в виде

$$w_x\frac{\partial t}{\partial x} + w_y\frac{\partial t}{\partial y} = a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \qquad (10.46)$$

При написании уравнения (10.46) предполагалось, что: а) изменения температуры по оси z не происходит; б) внутренних источников теплоты нет; в) физические свойства среды постоянны; г) процесс стационарен; д) $\partial^2 t/\partial x^2 \ll \partial^2 t/dy^2$, так как толщина теплового пограничного слоя несопоставимо мала в сравнении с расстоянием, измеренным по ходу движения системы (по направлению оси x на рис. 10.3).

Уравнения (10.33), (10.45), (10.46) одинаковы по форме. При соблюдении соотношения

$$D = \nu = a$$

будет иметь место тройная аналогия — аналогия между процессами перенсса количества массы, движения и теплоты, т. е. наблюдается аналогия полей концентраций, скоростей и температур. При этом соблюдается следующее соотношение:

$$\mathrm{Pr}=\mathrm{Pr}_D=\mathrm{Le}=1.$$

В ряде случаев, особенно в жидкостных системах, $\mathrm{Pr}\neq\mathrm{Le}$; $\mathrm{Pr}\neq 1$; $\mathrm{Pr}_D\neq 1$; $\mathrm{Le}\neq 1$. В подобных ситуациях аналогии между полями скоростей, температур и концентраций не существует.

Количественная связь между толщиной гидродинамического и диффузионного пограничных слоев может быть определена анализом уравнений (10.36) и (10.45). Для наиболее простого случая — обтекания полубесконечной пластины при ламинарном режиме течения в работе [1] рекомендуется соотношение

$$\delta_D=\left(\frac{D}{\nu}\right)^{1/3}\delta,$$

где δ — толщина гидродинамического пограничного слоя.

Для жидкостных систем $(D/\nu)^{1/3}\approx 0{,}1$. В газовых потоках δ_D и δ соизмеримы, так как D и ν соизмеримы.

10.9. МАССООБМЕН В СИСТЕМАХ С ТВЕРДОЙ ФАЗОЙ И В СИСТЕМАХ БЕЗ ТВЕРДОЙ ФАЗЫ

Вначале рассмотрим перенос массы в системе, включающей в себя твердые и жидкие фазы, в каждой из которых наблюдается неодинаковость концентрации изучаемого компонента. В этом случае кроме массообмена между поверхностью твердого тела и средой наблюдается перемещение компонента внутри твердого тела. Перенос вещества в твердом теле называется массопроводностью (или внутренней диффузией). В качестве зависимости, характеризующей массопроводность, обычно принимают уравнение, напоминающее первый закон Фика [1]:

$$d^2M=-D_{\text{вн}}\frac{\partial c}{\partial n}\,dF\,d\tau, \qquad (10.47)$$

где $D_{\text{вн}}$ — коэффициент внутренней диффузии или коэффициент массопроводности.

При $D_{\text{вн}}=\mathrm{const}$ выражение (10.47) можно записать в таком виде:

$$M=-D_{\text{вн}}\frac{\partial c}{\partial n}F\tau. \qquad (10.48)$$

Из формулы (10.48) следует, что количество массы рассматриваемого компонента, переместившейся в твердой фазе, пропорционально градиенту его концентрации, площади изоконцентрационной поверхности и времени.

Дифференциальное уравнение массопроводности. Вывод дифференциального уравнения массопроводности аналогичен выводу второго закона Фика. При этом предполагаются постоянство физических свойств рассматриваемого компонента и отсутствие внутренних источников массы.

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D_{вн} \nabla^2 c.$$

На границе раздела твердой и жидкой фаз процесс описывается дифференциальным уравнением массоотдачи, т. е.

$$D_{вн} \frac{\partial c}{\partial x} = \beta (c_с - c_ж). \tag{10.49}$$

Уравнение (10.49) получено при совместном рассмотрении уравнений (10.12) и (10.48) с учетом того, что одной изоконцентрационной поверхностью является граница твердой и жидкой фаз, второй — поверхность, находящаяся на достаточном удалении от первой (в том месте, где концентрация рассматриваемого компонента постоянна, т. е. за пределами диффузионного пограничного слоя).

Из формулы (10.49) следует, что интенсивность процесса переноса массы в рассматриваемой системе (твердое тело — среда) определяется как массопроводностью, так и массоотдачей. При соизмеримости их, рассчитывая подобные процессы, следует учитывать и массоотдачу, и массообмен. Если скорость массообмена значительно превосходит скорость массопроводности, то массопередача будет определяться массопроводностью. Если же скорость массопроводности значительно превосходит скорость массоотдачи, то процесс будет определяться массоотдачей.

Массообменные процессы в системах с твердой фазой могут протекать стационарно и нестационарно. К нестационарным процессам массопередачи относятся, например, процессы сушки. Стационарные процессы массопередачи происходят, например, в разделительных установках, в которых движутся потоки сред, разделенных между собой полупроницаемой перегородкой.

Массообменные процессы могут протекать и в системах, состоящих только из твердых тел (диффузионное соединение материалов). В подобных случаях интенсивность массопереноса определяется массопроводностью компонентов, составляющих систему.

Математическое описание и расчет процессов массопереноса в системах, состоящих из жидких и газообразных (парообразных) фаз, характеризуется значительно большей сложностью в сравнении с распространением массы в твердом теле.

При рассмотрении движения подобных систем следует иметь в виду, что в общем случае величина и направление скоростей каждой из фаз могут быть различными. Из-за разнонаправленности векторов скоростей движения фаз образуются пары сил, вращающие слои фаз у поверхности их раздела. Как уже было показано выше, в пределах каждой из фаз перенос массы обусловлен наличием градиента концентрации, следовательно, вблизи поверхности раздела фаз образуется диффузионный пограничный слой. Так как у ряда растворов концентрации паровой и жидкой фаз, находящихся в равновесии, неодинаковы, а массоперенос через границу раздела фаз наблюдается только при отсутствии равновесия между паровой и жидкой фазами, то в этих ситуациях на границе раздела фаз наблюдается скачок концентрации.

Для построения приближенных расчетных зависимостей привлекается ряд гипотез и теорий: двухпленочная теория; теория проницания; теория обновления поверхности и др.; изложение их дано в специальной литературе [1, 17].

10.10. ПОНЯТИЕ О СТЕФАНОВОМ ПОТОКЕ МАССЫ

Рассматривается процесс испарения или сублимации в парогазовую среду. При этом будем полагать, что температура и общее давление по всему объему парогазовой смеси остаются постоянными, следовательно, термо-и бародиффузию можно не учитывать. На рис. 10.5, 10.6, 10.7 представлены эпюры парциальных давлений, объемных массовых концентраций и массовых долей пара и газа. Приняты следующие обозначения: $p_\text{п}$, $p_\text{г}$, $p_\text{п. с}$, $p_\text{г. с}$; $c_\text{п}$, $c_\text{г}$, $c_\text{п. с}$, $c_\text{г. с}$; $g_\text{п}$, $g_\text{г}$, $g_\text{п. с}$, $g_\text{г. с}$ — соответственно парциальные давления, концентрации и массовые доли пара и газа в ядре потока и на границе раздела фаз.

Пар свободно диффундирует от поверхности в парогазовую среду. В любом сечении

$$g_\text{г}+g_\text{п}=1 \tag{10.50}$$

и

$$p_\text{п}+p_\text{г}=p. \tag{10.51}$$

Для соблюдения соотношений (10.50) и (10.51) газ должен диффундировать в обратном направлении, т. е. к поверхности раздела фаз (к поверхности жидкости в случае испарения или к поверхности твердого тела в случае сублимации). Но эта поверхность для газа непроницаема, вследствие чего количество газа у рассматриваемой поверхности непрерывно увеличивается. При стационарном режиме поля концентраций пара и газа не изменяются по времени. Поэтому перемещение газа к поверхности должно компенсироваться потоком парогазовой смеси от нее. Этот поток называют стефановым потоком.

Скорость движения стефанова потока. Продифференцировав уравнение (10.50), получим

$$\frac{\partial g_\text{г}}{\partial y}+\frac{\partial g_\text{п}}{\partial y}=0. \tag{10.52}$$

Для суммарного потока газа у самой поверхности раздела фаз ($y=0$) можно записать следующее соотношение:

$$j_\text{г. с}=-D\left(\frac{\partial c_\text{г}}{\partial y}\right)_{y=0}+c_\text{г. с}w_\text{с. п. с}=0, \tag{10.53}$$

где $w_\text{с. п. с}$ — скорость стефанова потока.

Как известно, между объемной концентрацией и массовой долей существуют следующие соотношения:

$$c_\text{п}=g_\text{п}\rho; \tag{10.54}$$

$$c_\text{г}=g_\text{г}\rho, \tag{10.55}$$

где ρ — плотность парогазовой смеси.

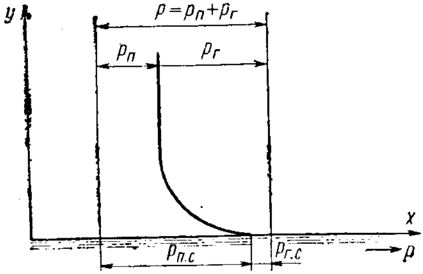


Рис. 10.5. Изменение парциальных давлений пара и газа

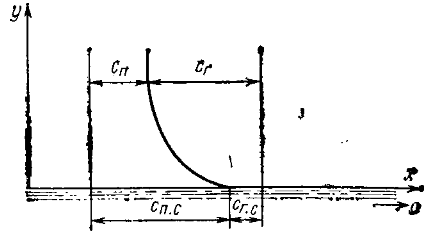


Рис. 10.6. Изменение объемной массовой концентрации пара и газа

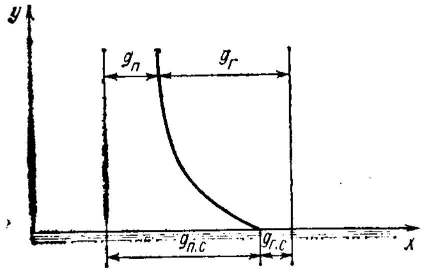


Рис. 10.7. Изменение массовых долей пара и газа

С учетом уравнений (10.54) и (10.55) перепишем уравнение (10.53):

$$D\rho\left(\frac{\partial g_{\text{г}}}{\partial y}\right)_{y=0}=\rho g_{\text{г. с}}w_{\text{с. п. с}}. \tag{10.56}$$

Решив уравнение (10.56) относительно $w_{\text{с. п. с}}$, получим

$$w_{\text{с. п. с}}=\frac{D}{g_{\text{г. с}}}\left(\frac{\partial g_{\text{г}}}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{10.57}$$

С учетом уравнения (10.52) выражение (10.57) можно записать и так:

$$w_{\text{с. п. с}}=-\frac{D}{g_{\text{г. с}}}\left(\frac{\partial g_{\text{п}}}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Таким образом, скорость стефанова потока определяется концентрациями пара и газа у поверхности раздела фаз.

Плотность потока пара. Суммарная плотность потока пара у поверхности раздела фаз определится следующим соотношением:

$$j_{\text{п. с}}=-D\left(\frac{\partial c_{\text{п}}}{\partial y}\right)_{y=0}+c_{\text{п. с}}w_{\text{с. п. с}}. \tag{10.58}$$

С учетом выражения (10.55) уравнение (10.58) перепишется следующим образом:

$$j_{\text{п. с}}=\rho D\left(\frac{\partial g_{\text{п}}}{\partial y}\right)_{y=0}+\rho g_{\text{п. с}}w_{\text{с. п. с}}. \tag{10.59}$$

Подставив в формулу (10.59) выражение для скорости стефанова потока, получим

$$j_{\text{п. с}}=-\rho D\left[\left(\frac{\partial g_{\text{п}}}{\partial y}\right)_{y=0}+\frac{1}{g_{\text{г. с}}}\left(\frac{\partial g_{\text{п}}}{\partial y}\right)_{y=0}g_{\text{п. с}}\right],$$

или

$$j_{\text{п. с}} = -\rho D \left(\frac{\partial g_{\text{п}}}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{1}{g_{\text{г. с}}},$$

или

$$j_{\text{п. с}} = -D \left(\frac{\partial c_{\text{п}}}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{1}{g_{\text{г. с}}}. \qquad (10.60)$$

Таким образом, плотность потока массы пара определяется градиентом его концентрации, а также концентрацией газа у поверхности раздела фаз.

Коэффициент массоотдачи. Плотность потока пара можно определить и по уравнению массоотдачи, т. е.

$$j_{\text{п. с}} = \beta (c_{\text{п. с}} - c_{\text{п}}). \qquad (10.61)$$

Сопоставляя уравнения (10.61) и (10.60), будем иметь

$$\beta = -D \left(\frac{\partial c_{\text{п}}}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{1}{g_{\text{г. с}}} \frac{1}{c_{\text{п. с}} - c_{\text{п}}}.$$

Плотность теплового потока

$$q_{\text{с}} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} + j_{\text{п. с}} i_{\text{п. с}}, \qquad (10.62)$$

где $i_{\text{п. с}}$ — удельная энтальпия пара у поверхности раздела фаз.

Уравнение (10.62) написано при допущении, что энтальпия жидкости при 0°С равна нулю.

С учетом уравнения (10.60) выражение (10.62) перепишется так:

$$q_{\text{с}} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} - D \left(\frac{\partial c_{\text{п}}}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{1}{g_{\text{г. с}}}.$$

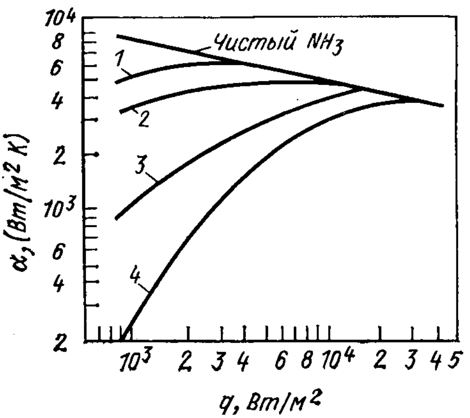
При написании уравнения (10.62) не учитывалось лучеиспускание.

10.11. ТЕПЛО- И МАССООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА ИЗ ПАРОГАЗОВОЙ СМЕСИ

С подобными процессами мы встречаемся в холодильных, криогенных и энергетических установках, в системах кондиционирования воздуха и в ряде других технических устройств.

Физическая картина процесса. В главе 8 проанализирован процесс теплообмена при конденсации чистого пара на поверхности твердого тела (стенка теплообменного аппарата). В рассматриваемом здесь случае рабочая среда состоит из пара и газов. Температура насыщения пара выше температуры поверхности стенки, а температура насыщения газов значительно ниже ее. Вследствие этого пар будет конденсироваться, а газы конденсироваться не будут.

Неконденсирующиеся газы накапливаются около стенки аппарата. Частицам пара приходится диффундировать через слой парогазовой среды. Таким образом, в рассматриваемой ситуации возникает дополнительное термическое сопротивление, которое значительно снижает интенсивность теплообмена. Так, при наличии в



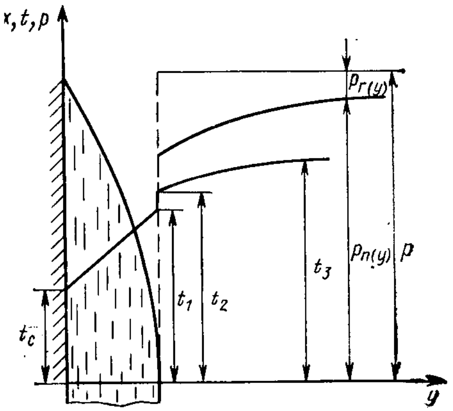


Рис. 10.8. Влияние неконденсирующихся газов на коэффициент теплоотдачи при конденсации NH_3 с концентрацией неконденсатов в смеси: 0,33% (*1*); 0,80% (*2*); 2,28% (*3*); 4,33% (*4*)

Рис. 10.9. Распределение температур и парциальных давлений при пленочной конденсации из парогазовой смеси:

p, $p_{п(у)}$, $p_{г(у)}$ — давление общее, пара и газа; $t_с$, t_1, t_2, $t_з$ — температуры соответственно стенки, поверхности конденсатной пленки, парогазовой смеси у поверхности раздела фаз, в паровой зоне за пределами диффузионного слоя

конденсирующемся водяном паре 2% воздуха значение коэффициента теплоотдачи уменьшается в 3 раза по сравнению со значением коэффициента теплоотдачи при конденсации чистого пара.

Особо сильное влияние неконденсирующихся компонентов смеси на интенсивность теплообмена наблюдается при малых плотностях тепловых потоков (рис. 10.8). При больших плотностях тепловых потоков слой газа оттесняется в конец конденсатора и большая часть поверхности теплообмена освобождается от него. Вместе с тем в конце аппарата образуется зона, в которой процесса конденсации не происходит.

Плотность теплового потока. Коэффициенты теплоотдачи. Термические сопротивления. Рассматривается случай пленочной конденсации пара из парогазовой смеси на вертикальной поверхности (рис. 10.9). Стенка для пара, газа и жидкости непроницаема. Температура ее ниже температуры насыщения и температуры парогазовой смеси. Парогазовая смесь, находясь в контакте со стенкой, отдает ей теплоту. При этом пар конденсируется и конденсат в виде пленки стекает вниз. Поверхность пленки жидкости непроницаема для газа. Газ, накапливаясь у поверхности пленки конденсата, образует диффузионный пограничный слой.

Плотность теплового потока можно определить по закону Ньютона — Рихмана:

$$q = \alpha (t_з - t_с), \tag{10.63}$$

где α — общий коэффициент теплоотдачи; $t_з$ — температура парогазовой смеси, находящейся за пределами диффузионного пограничного слоя; $t_с$ — температура стенки.

Температурный напор $t_з - t_с$ соответствует общему термическому сопротивлению R. В общем случае оно состоит из трех термических сопротивлений:

$$R = R_1 + R_2 + R_3,$$

где R_1 — термическое сопротивление пленки конденсата; R_2 — термическое сопротивление фазового перехода; R_3 — термическое сопротивление теплоотдаче от парогазовой смеси к пленке конденсата, которое называют диффузионным термическим сопротивлением.

Используя эти понятия, уравнение (10.63) можно записать и так:

$$q = \frac{t_з - t_с}{R_1 + R_2 + R_3}. \qquad (10.64)$$

Сопоставление уравнений (10.63) и (10.64) позволяет получить выражение для общего коэффициента теплоотдачи

$$\alpha = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{3} R_i}.$$

Во многих задачах $R_2 \ll R_1$ и $R_2 \ll R_3$, тогда R_2 не учитывается. При этом можно считать, что температура на поверхности пленки конденсата, соприкасающейся с паром, соответствует температуре насыщения. Тогда R_1 можно определить в соответствии с решением Нуссельта, выполненным с учетом сделанных выше допущений (см. главу 8), т. е.

$$R_1 = \delta_ж / \lambda_ж = 1/\alpha_1,$$

где α_1 — коэффициент теплоотдачи, найденный по уравнению (8.22).

Диффузионное термическое сопротивление можно определить, используя следующую зависимость:

$$R_3 = (t_з - t_2)/q.$$

Плотность теплового потока находим из соотношения

$$q = \alpha_з (t_з - t_2) + r j_п, \qquad (10.65)$$

где $\alpha_з$ — коэффициент теплоотдачи между парогазовой смесью и поверхностью пленки конденсата; r — теплота парообразования; $j_п$ — плотность потока массы пара у поверхности конденсата.

Плотность потока массы пара определяется обычной зависимостью

$$j_п = \beta (c_{пз} - c_{п2}), \qquad (10.66)$$

где $c_{пз}$ — концентрация пара за пределами диффузионного пограничного слоя; $c_{п2}$ — концентрация пара у поверхности пленки конденсата.

Коэффициент теплоотдачи $\alpha_з$ определяется по уравнениям подобия для конвективного теплообмена между паром и поверхностью пленки с учетом режима движения пара (см. главу 6) с внесением поправки, учитывающей влияние массообмена. Поправочный коэффициент, предложенный в [15], имеет вид

$$\psi = \frac{\mathrm{St}}{\mathrm{St}_0} = f\left(\frac{j_п}{\rho w_0}\frac{1}{\mathrm{St}_0}\right),$$

где St — критерий Стантона для процессов теплообмена, осложненных массообменом; St_0 — критерий Стантона для процессов конвективного теплообмена, не осложненных массообменом; w_0 — скорость движения потока.

При $$\frac{j_п}{\rho w_0}\frac{1}{\mathrm{St}_0} \leqslant 0{,}1 \quad \psi = 1.$$

При $\frac{j_п}{\rho w_0}\frac{1}{\mathrm{St}_0} > 1 \quad \psi > 1.$

В общем случае, по данным [15], ψ имеет следующие значения:

$\frac{j_п}{\rho w_0}\frac{1}{\mathrm{St}_0}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	6
ψ	1,113	1,292	1,46	1,60	1,76	2,40	4,00	6,00

Таким образом, для определения диффузионного термического сопротивления $R_з$ необходимо знать коэффициент массоотдачи. Он, как правило, определяется по эмпирическим уравнениям подобия.

Уравнения подобия, характеризующие процесс массоотдачи, при конденсации пара из парогазовой среды. Коэффициент массоотдачи при конденсации пара из практически неподвижной смеси водяного пара и воздуха может быть рассчитан из следующего уравнения [15]:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = \frac{f/g_{г.\,с}}{1-\Gamma^{-f}}\varphi, \tag{10.67}$$

где $\overline{\mathrm{Nu}}_D = \frac{\beta R_т}{D}$; $f = \frac{\ln g_{г.\,с}/g_{г.\,ж}}{\ln \Gamma}$; $\Gamma = R_0/R_т$.

Здесь $g_{г.\,с}$ — массовая доля газа у поверхности пленки конденсата; φ — коэффициент; $R_т$ — радиус трубы (поверхности, на которой происходит конденсация); R_0 — радиус, на котором массовая доля газа равна $g_{г.\,ж}$.

Для определения коэффициента φ рекомендуется формула

$$\varphi = 0{,}66\,\mathrm{Gr}^{0,2}, \tag{10.68}$$

где $\mathrm{Gr} = \frac{g\beta(2R_т)^3}{\nu^2}(t_з - t_2)$.

Формула (10.68) справедлива при $\mathrm{Gr} \geqslant 8$, при $\mathrm{Gr} \leqslant 8$ $\varphi = 1$.

В уравнения (10.67) и (10.68) подставляют физические параметры парогазовой смеси, взятые при температуре $t_з$.

Для движущейся смеси водяного пара с воздухом можно рекомендовать следующее уравнение подобия [15]:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = c\,\mathrm{Re}^{0,5}\,\varepsilon_{г.\,ж}^{-0,6}\,\pi_D^{-1/3}, \tag{10.69}$$

где c — коэффициент; $\varepsilon_{г.\,ж} = \frac{p_{г.\,ж}}{p}$; $\pi_D = \frac{p_{п.\,ж} - p_{п.\,с}}{p}$; p — общее давление смеси; $p_{п.\,ж}$ — парциальное давление водяного пара за пределами диффузионного пограничного слоя; $p_{п.\,с}$ — парциальное давление водяного пара у поверхности пленки конденсата.

Множитель c имеет численные значения: для одиночной трубы $c=0{,}47$; для первого ряда пучка труб $c=0{,}53$; для третьего и последующих рядов $c=0{,}82$.

Формула (10.69) применима при $\mathrm{Re}=350\div4800$. Критерий Рейнольдса подсчитывается по скорости парогазовой смеси, омывающей трубу (или ряд труб). Определяющим размером является наружный диаметр труб, определяющей температурой — температура смеси.

Динамический коэффициент вязкости, входящий в критерий Re, подсчитывают по уравнению

$$\mu_{\text{см}}=\frac{(1-\varepsilon_{\text{г. ж}})\,\mu_{\text{п}}+1{,}6\,\varepsilon_{\text{г. ж}}\,\mu_{\text{г}}}{1+0{,}61\,\varepsilon_{\text{г. ж}}},\tag{10.70}$$

где $\mu_{\text{п}}$, $\mu_{\text{г}}$ — соответственно динамические коэффициенты вязкости пара и воздуха.

При выполнении расчетов обычно задаются температуры стенки и парогазовой среды, находящейся за пределами диффузионного пограничного слоя. В ряде расчетных зависимостей, характеризующих интенсивность теплообмена при конденсации из парогазовой среды, входят величины, которые определяются температурой поверхности пленки конденсата, а она неизвестна. В подобных ситуациях можно ее определить, пользуясь методом последовательного приближения. При этом должно соблюдаться следующее условие: количество теплоты, подошедшей к поверхности пленки конденсата, должно быть равно количеству теплоты, воспринятой поверхностью, на которой осуществляется конденсация.

Глава 11. ТЕПЛО- И МАССООБМЕН МЕЖДУ ВОДОЙ И ВЛАЖНЫМ ВОЗДУХОМ

11.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Если поверхность воды соприкасается с воздухом и при этом температуры их различны, а парциальные давления водяного пара у границы раздела фаз и в объеме воздуха также неодинаковы, то между водой и воздухом происходит и тепло-, и массообмен. Молекулы воды, двигаясь хаотично, могут попасть в зону вблизи поверхности раздела фаз. Те из них, которые обладают внутренней энергией, равной внутренней энергии молекул сухого насыщенного или перегретого пара, преодолевают силы поверхностного натяжения и поступают в парогазовую среду. Часть молекул пара, соприкасаясь с поверхностью раздела фаз, возвращается обратно в жидкую фазу. Если число вырвавшихся из жидкости молекул больше числа вновь попавших в нее, то идет процесс испарения. Если число возвратившихся в жидкость молекул больше, чем вырвавшихся из нее, то происходит процесс конденсации. Процесс испарения происходит в том случае, когда температура жидкости выше температуры насыщения, соответствующей парциальному давлению пара, находя-

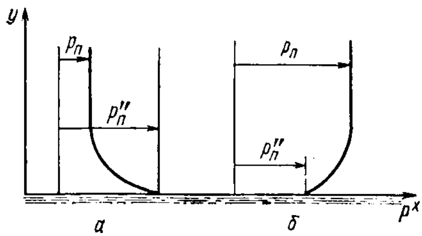


Рис. 11.1. Распределение парциальных давлений:

а — испарение жидкости; *б* — конденсация пара

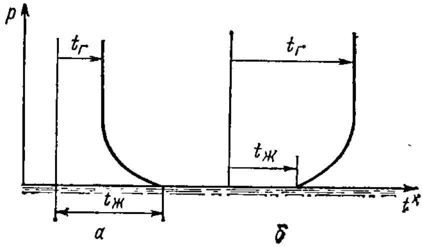


Рис. 11.2. Поле температур:

а — испарение жидкости; *б* — конденсация пара; $t_ж$, $t_г$ — температуры жидкости соответственно на границе раздела фаз и в ядре потока

щегося на достаточном удалении от поверхности раздела (в той зоне, где это давление постоянно). У самой поверхности раздела фаз давление пара $p_п$ равно давлению насыщения $p''_п$, соответствующему температуре поверхности жидкости, а в слоях парогазовой смеси парциальное давление пара будет меньше $p''_п$.

Эпюры распределения парциальных давлений пара в области, прилегающей к поверхности раздела фаз, для случая испарения представлены на рис. 11.1, *а*, а для случая конденсации — на рис. 11.1, *б*. В случае конденсации парциальное давление пара в парогазовой смеси выше давления насыщения пара, соответствующего температуре поверхности жидкости.

Распределение температур в парогазовой смеси, прилегающей к поверхности раздела фаз, представлено на рис. 11.2, *а* для случая испарения и на рис. 11,2, *б* для случая конденсации при $p''_п < p_п$.

Вследствие наличия градиентов температур и концентраций в парогазовой смеси, прилегающей к поверхности жидкости, здесь образуются тепловой и диффузионный пограничные слои. Если рассматривать движущуюся парогазовую смесь, то в этих же слоях будет наблюдаться и гидродинамический пограничный слой. Пограничный слой может быть или турбулентным, или ламинарным. В турбулентном пограничном слое теплота переносится в результате конвективного теплообмена, а масса — путем конвективной диффузии. В ламинарном пограничном слое теплота переносится теплопроводностью, а масса — молекулярной диффузией. Вместе с потоком массы передается внутренняя энергия частиц жидкости. Следовательно, общее количество теплоты определяется зависимостью

$$Q = Q_к + Q_м, \tag{11.1}$$

где $Q_к$ — теплота, передаваемая конвективным теплообменом; $Q_м$ — теплота, передаваемая потоком испарившейся массы.

При написании уравнения (11.1) не учитывался лучистый теплообмен. Из предыдущего известно, что интенсивность теплообмена обычно характеризуется коэффициентом теплоотдачи, а интенсивность массоотдачи характеризуется коэффициентом массоотдачи. В следующем разделе приводится соотношение между ними. Это соотношение называется уравнением Льюиса.

В уравнении (11.1) $Q_к$ и $Q_м$ могут быть и положительными и отрицательными. Так, если $t_ж > t_г$ и $p''_п > p_п$, то и $Q_к$ и $Q_м$ будут положительными, а если $t_ж < t_г$ и $p''_п < p_п$ (см. рис. 11.1, *б* и 11.2, *б*), то оба потока будут отрицательными (относительно парогазовой среды). Возможны и другие сочетания, например: $t_ж < t_г$; $Q_к < 0$, $p''_п > p_п$, $Q_м > 0$.

В подобных условиях работает психрометр.

11.2. УРАВНЕНИЕ ЛЬЮИСА

Рассматривается случай тепло- и массообмена между водой и влажным воздухом, который в турбулентном режиме обдувает поверхность воды. При дальнейших рассуждениях будем считать, что соблюдается тройная аналогия.

Запишем уравнения подобия, характеризующие конвективный теплообмен (11.2) и массообмен (11.3):

$$\mathrm{Nu} = b\,\mathrm{Re}^n\,\mathrm{Pr}^m; \tag{11.2}$$

$$\mathrm{Nu}_D = b\,\mathrm{Re}^n\,\mathrm{Pr}_D^m. \tag{11.3}$$

Поделив уравнение (11.2) на уравнение (11.3), получим

$$\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_D = (\mathrm{Pr}/\mathrm{Pr}_D)^m, \text{ или}$$

$$\alpha/(\beta\rho) = c'_p\,(D/a)^{m-1},$$

где c'_p — изобарная теплоемкость влажного воздуха.

При соблюдении тройной аналогии $D/a = 1$. Следовательно,

$$\alpha/(\beta\rho) = c'_p. \tag{11.4}$$

Из термодинамики влажного воздуха известно, что одним из параметров влажного воздуха является влагосодержание d. Этот параметр также характеризует концентрацию водяного пара в паровоздушной смеси. С учетом сказанного выражение для количества массы иногда записывают в такой форме:

$$M = \sigma\,(d'' - d)\,F\tau, \tag{11.5}$$

где d'' — влагосодержание насыщенного влажного воздуха, кг/кг; d — влагосодержание ненасыщенного влажного воздуха, кг/кг; σ — коэффициент испарения, кг/(м^2·с); коэффициент испарения σ численно равен количеству массы, передаваемой (воспринимаемой) в единицу времени от единичной поверхности воды к парогазовой смеси при единичной разности влагосодержаний $d'' - d$.

Вместе с тем выражение для количества массы можно записать, используя коэффициент массоотдачи:

$$M = \beta\,(l'' - l)\,F\tau, \tag{11.6}$$

где l'' — абсолютная влажность насыщенного влажного воздуха возле поверхности жидкости ($l'' = M''_ж/V$); l — абсолютная влажность ненасыщенного влажного воздуха ($l = M_ж/V$); $M''_ж$ и $M_ж$ — массы соответственно насыщенного и перегретого водяного пара.

Сопоставление уравнений (11.5) и (11.6) позволяет получить

$$\beta(l''-l)=\sigma(d''-d). \tag{11.7}$$

Так как водяной пар в воздухе содержится в небольших количествах (до 15%), то вполне допустимо считать оба компонента паровоздушной смеси находящимися в состоянии идеального газа. С учетом сказанного

$$d''-d=\frac{p''_\text{п}-p_\text{п}}{p}\,\frac{R_\text{г}}{R_\text{п}}; \tag{11.8}$$

$$l''-l=\frac{p''_\text{п}-p_\text{п}}{R_\text{п}T}, \tag{11.9}$$

где $R_\text{г}$, $R_\text{п}$ — газовые постоянные воздуха и водяного пара; p — общее давление смеси; T — температура смеси.

При написании уравнений (11.8) предполагалось, что $p_\text{п}\ll p$, тогда $p_\text{г}\approx p$.

Из уравнений (11.7), (11.8) и (11.9) следует:

$$\beta\frac{1}{T}=\sigma\frac{R_\text{г}}{p};\quad \beta\frac{p}{R_\text{г}T}=\sigma,\qquad \text{или}$$

$$\beta\rho=\sigma. \tag{11.10}$$

Сопоставление уравнений (11.4) и (11.10) позволяет получить выражение

$$\alpha/\sigma=c'_p,$$

которое называют уравнением Льюиса.

Экспериментальная проверка правильности допущений об аналогии между переносом количества движения, энергии и массы показала, что эта аналогия точно соблюдается лишь в немногих частных случаях. Следовательно, и уравнение Льюиса не является универсальным. Вместе с тем следует подчеркнуть и то, что эти частные случаи имеют большое практическое значение. Так, при орошении жидкостью стенки трубы, с поверхности которой происходит испарение, аналогия подтверждается достаточно точно [42]. Правомерны представления тройной аналогии и при испарении с поверхности капли, движущейся в потоке воздуха. Более подробно этот процесс будет освещен в разделе 11.6.

11.3. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОМАССООБМЕНА МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВОДЫ И ВОЗДУХОМ

Рассматривается задача, когда $t_\text{ж}>t_\text{г}$ и $p''_\text{п}>p_\text{п}$ (см. рис. 11.1, *а* и 11.2, *а*). Выделим на поверхности раздела фаз элементарную площадку dF. Через эту площадку энергия в форме теплоты передается и конвективным переносом, и с испаряющейся влагой, т. е.

$$dQ=dQ_\text{к}+dQ_\text{м}, \tag{11.11}$$

где $dQ_\text{к}$ — конвективный тепловой поток; $dQ_\text{м}$ — тепловой поток, обусловленный массообменом.

Их значения могут быть выражены следующими соотношениями:

$$dQ_к = \alpha (t_ж - t_г)\, dF; \qquad (11.12)$$

$$dQ_м = r dM = r\sigma (d'' - d)\, dF. \qquad (11.13)$$

В уравнении (11.13) r — теплота парообразования.

Сопоставление уравнений (11.11), (11.12), (11.13) позволяет получить:

$$dQ = \alpha (t_ж - t_г)\, dF + r\sigma (d'' - d)\, dF;$$

$$dQ = \sigma \left[\frac{\alpha}{\sigma} (t_ж - t_г) + r (d'' - d) \right] dF,$$

или

$$dQ = \sigma [c'_p (t_ж - t_г) + r (d'' - d)]\, dF. \qquad (11.14)$$

Из термодинамики влажного воздуха известно, что

$$c''_p = c_{p_в} + c_{p_п} d; \qquad (11.15)$$

$$r = r_0 - (c_ж - c_{p_п})\, t_ж; \qquad (11.16)$$

$$i = c_{p_в} t_в + r_0 d + c_{p_п} t_в d; \qquad (11.17)$$

$$i'' = c_{p_в} t_ж + r_0 d'' + c_{p_п} t_ж d''. \qquad (11.18)$$

При написании зависимостей (11.15) — (11.18) приняты следующие обозначения: $c_{p_в}$ — изобарная теплоемкость воздуха; $c_{p_п}$ — изобарная теплоемкость пара; $c_ж$ — теплоемкость воды; i, i'' — удельные энтальпии соответственно ненасыщенного и насыщенного влажного воздуха; r_0 — теплота парообразования воды при $t_0 = 0$°C.

При получении выражения (11.16) предполагалось, что в данной области температур изоэнтальпы совпадают с изотермами.

Совместное рассмотрение уравнений (11.14) — (11.18) позволяет получить

$$dQ = \sigma [(i'' - i) - (d'' - d)\, c_ж t_ж]\, dF$$

или

$$dQ = \sigma (i'' - i)\, dF - c_ж t_ж\, dM. \qquad (11.19)$$

Уравнение (11.19) может быть преобразовано к виду

$$dQ = A\sigma (i'' - i)\, dF, \qquad (11.20)$$

где

$$A = 1 - \frac{c_ж t_ж}{i'' - i} \frac{dM}{dF}.$$

Значение коэффициента A изменяется от 0,94 до 1,0. По данным [37], можно считать, что для воздухоохладителей $A = 1$, тогда уравнение (11.20) принимает вид

$$dQ = \sigma (i'' - i)\, dF.$$

Ориентировочные значения A, рекомендуемые для расчета градирен и испарительных конденсаторов по данным [37], приведены ниже.

$t_ж$, °C	10	15	20	25	30	35
A	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94

При постоянстве σ, i'' и i формула для теплового потока запишется так:

$$Q=\sigma(i''-i)F.$$

Полученное выражение справедливо при $dM/dF=0$, т. е. при равномерном влаговыделении со всей поверхности испарения.

11.4. АДИАБАТНОЕ ИСПАРЕНИЕ. КОЭФФИЦИЕНТ ВЛАГОВЫПАДЕНИЯ

Адиабатным испарением называют такой процесс, при котором теплота, передаваемая от парогазовой смеси путем конвективного теплообмена к жидкости, затрачивается на ее испарение. Длительное протекание подобного процесса возможно в том случае, если энтальпия испаряющейся жидкости $J_п$ несопоставимо мала в сравнении с энтальпией парогазовой смеси $J_г$, т. е. $J_г \gg J_п$.

При адиабатном испарении $|Q_к|=|Q_м|$ (без учета лучеиспускания). Подставив в это равенство значения $Q_к$ и $Q_м$ (см. раздел 11.3) и имея в виду, что температура адиабатного испарения воды $t_ж$, называемая температурой мокрого термометра, обычно обозначается $t_м$, получим

$$t_ж=t_м=t_г-\frac{r\sigma(d''-d)}{\alpha}$$

или с учетом уравнения Льюиса

$$t_м=t_г-\frac{r(d''-d)}{c_p'}.$$

Отношение общего теплового потока, которым обмениваются поверхность жидкости и влажный насыщенный воздух, к его конвективной составляющей называют коэффициентом влаговыпадения, т. е.

$$\xi=Q/Q_к. \tag{11.21}$$

При постоянстве σ, i'', i, $c_ж$, $t_ж$, $t_г$, α интегралы уравнений (11.19) и $dQ_к=\alpha(t_ж-t_г)\,dF$ запишутся в таком виде:

$$Q=\sigma(i''-i)F-c_ж t_ж M; \tag{11.22}$$

$$Q_к=\alpha(t_ж-t_г)F. \tag{11.23}$$

Совместное рассмотрение уравнений (11.21), (11.22), (11.23) позволяет получить

$$\xi=\frac{\sigma(i''-i)F-i_ж M}{\alpha(t_ж-t_г)F},$$

или

$$\xi=\frac{i''-i-i_ж(d''-d)}{c_p'(t_ж-t_г)}, \tag{11.24}$$

где $i_ж=c_ж t_ж$.

С учетом выражений для энтальпии насыщенного и ненасыщенного влажного воздуха после некоторых преобразований уравнение (11.24) можно записать в виде

$$\xi=1+\frac{(r_0-i_ж)(d''-d)}{c_p(t_ж-t_г)}. \tag{11.25}$$

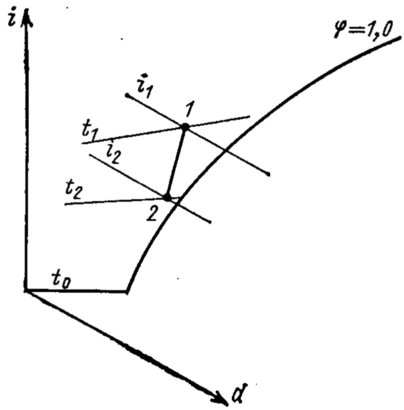


Рис. 11.3. Процесс 1—2 изменения состояния влажного воздуха в воздухоохладителе

При написании уравнения (11.25) предполагалось, что теплоемкости насыщенного и ненасыщенного влажного воздуха отличаются друг от друга на незначительную величину, т. е. их численное различие не учитывалось.

При определении **общего теплового потока** иногда используют выражение

$$Q = \alpha_{об}(t_ж - t_г) F,$$

тогда

$$\alpha_{об} = \alpha\xi. \qquad (11.26)$$

Уравнение (11.26) используется при определении тепловых потоков, отдаваемых воздухом в воздухоохладителе.

В инженерных расчетах коэффициент влаговыпадения можно рассчитать и по упрощенной формуле, рекомендованной в [23],

$$\xi = \frac{i_1 - i_2}{c_p'(t_1 - t_2)},$$

где i_1, i_2 — энтальпии ненасыщенного влажного воздуха, поступающего в воздухоохладитель, выходящего из него; t_1, t_2 — температуры этого воздуха на входе в воздухоохладитель и на выходе из него.

Изменение состояния воздуха в этом процессе показано на рис. 11.3.

В процессе 1—2 ненасыщенный влажный воздух охлаждается, при этом уменьшается его влагосодержание.

11.5. ТЕПЛОМАССООБМЕН ПРИ ИСПАРЕНИИ ВОДЫ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОРИСТОЙ СИСТЕМЫ

При теплообмене поверхности твердого тела с газовой средой значение коэффициента теплоотдачи обычно не превышает 20—80 Вт/(м²·К). Одним из способов интенсификации такого процесса является покрытие поверхности слоем пористого металла, который смачивается водой.

В этом случае теплота передается не только теплопроводностью, конвекцией, радиацией, но и вместе с испаряющейся массой воды. Такие пористые покрытия (металлические, металлокерамические и др.) используются в аппаратах энергетических установок; начинают применяться и в аппаратах холодильных машин для интенсификации процессов кипения холодильных агентов.

В рассматриваемой задаче возле поверхности твердого тела образуются и тепловой, и гидродинамический, и диффузионный пограничные слои. Вследствие этого наиболее интенсивный теплообмен наблюдается при соотносительно небольшом содержании водяного пара в смеси. С ростом содержания пара в смеси коэффициенты тепло- и массоотдачи уменьшаются.

Теоретического решения этой сложной задачи пока нет, имеются лишь экспериментальные данные, обобщенные в виде критериальных уравнений. Для расчета коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи при испарении воды из пористой системы можно использовать следующие уравнения, рекомендуемые в работе [15]:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_l = 4{,}55\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Re}_l^{0,8}\mathrm{K}^{0,4}; \qquad (11.27)$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{Re}_l^{0,8}\,\pi_D \xi^{-0,5}, \qquad (11.28)$$

где K — критерий фазового перехода; $\mathrm{K} = \frac{r}{c_p\,\Delta T}$;

$$\pi_D = \frac{p_п'' - p_п}{p}; \qquad \xi = \frac{p_п}{p}.$$

Здесь $p_п''$ — парциальное давление водяных паров у поверхности испарения; $p_п$ — парциальное давление водяных паров вдали от поверхности испарения (за пределами диффузионного пограничного слоя); p — общее давление смеси.

Зависимости (11.27) и (11.28) получены при обобщении опытов по исследованию процесса тепломассообмена при испарении воды из металлической пористой пластины в продольный паровоздушный поток при условиях, близких к адиабатным. В критерии входят теплофизические параметры смеси. В качестве определяющего размера принята длина пластин вдоль потока, отсчитанная от начального участка испарения, определяющей температурой является температура смеси за пределами диффузионного пограничного слоя.

В уравнения (11.27) и (11.28) входят разные критерии, следовательно, в рассматриваемой задаче аналогии между тепло-и массообменом нет. Ни в один из критериев не входит скорость, значит, отношение α/β от скорости движения потока парогазовой смеси не зависит.

11.6. ТЕПЛОМАССООБМЕН МЕЖДУ ПАРОГАЗОВОЙ СМЕСЬЮ И ТЕЛАМИ, ИМЕЮЩИМИ ФОРМУ КАПЛИ ИЛИ ШАРА

В форсуночных камерах, в увлажнительных устройствах, имеющих широкое распространение в холодильной технике и в системах кондиционирования воздуха, происходит тепло- и массообмен между каплями воды и парогазовой смесью — влажным воздухом. Исследованиями Рэнца и Маршалла [6] установлено, что в этих условиях аналогия между тепло- и массообменом соблюдается. Как показали непосредственные измерения, температура капель точно соответствует температуре мокрого термометра. Для расчета коэффициентов тепло-и массообмена между воздухом и поверхностью капель воды могут быть рекомендованы следующие уравнения подобия:

$$\mathrm{Nu} = 2{,}0 + 0{,}6\,\mathrm{Re}^{0,5}\,\mathrm{Pr}^{1/3};$$

$$\mathrm{Nu}_D = 2{,}0 + 0{,}6\,\mathrm{Re}^{0,5}\,\mathrm{Pr}_D^{1/3}.$$

Эти уравнения применимы для интервала $0<\mathrm{Re}<1000$. Определяющим размером является диаметр капли.

Для определения потока массы J в той же работе рекомендуется уравнение

$$J=\frac{\lambda_{в} v}{r}\pi d\,[2+0{,}303\,(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}_D)^{0,6}\,(\lambda_{в}/\lambda_{п})^{0,5}], \qquad (11.29)$$

где $\lambda_в$, $\lambda_п$ — соответственно теплопроводность воздуха и пара; d — диаметр шара; r — теплота парообразования.

Уравнение (11.29) применимо в интервале $1700<\mathrm{Re}<6000$. Оно получено при обобщении экспериментов, в которых исследовалось испарение на поверхности пробковых шаров, пропитанных водой. При исследовании рассматриваемого процесса установлено, что поверхность шара очень точно принимает температуру мокрого термометра. Выражение $(\lambda_в/\lambda_п)^{0,5}$ в приближенной форме отражает влияние одновременности протекания процессов тепло- и массообмена.

Глава 12. ЛУЧИСТЫЙ И СЛОЖНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

12.1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Тепловое излучение, или радиация, занимает особое положение среди других процессов передачи теплоты, так как физическая природа радиации принципиально отлична от передачи теплоты теплопроводностью и конвекцией.

Лучистая энергия переносится электромагнитными колебаниями и фотонами. Генерация лучистой энергии происходит в результате сложных внутриатомных и молекулярных процессов. Всякое тело, имеющее температуру, отличную от абсолютного нуля, способно излучать лучистую энергию, т. е. наряду с потоком лучистой энергии от более нагретых тел к менее нагретым всегда имеется и обратный поток энергии от менее нагретых тел к более нагретым. Конечный результат такого обмена и представляет собой количество переданной излучением теплоты. Лучистый теплообмен связан с двойным превращением энергии: на поверхности тела-излучателя теплота трансформируется в энергию электромагнитных колебаний, которая распространяется в лучепрозрачной среде (или в вакууме) и при поглощении ее каким-либо другим телом вновь превращается в теплоту. Наиболее наглядным примером лучистого теплообмена является получение Землей теплоты от Солнца (солнечная радиация, инсоляция).

Существуют различные виды электромагнитного излучения: γ-излучение, рентгеновское излучение, радиоволны и др. Однако способностью трансформироваться в теплоту обладает излучение светового диапазона (длина волн 0,4—0,8 мкм) и в наибольшей мере инфракрасного диапазона (длина волн 0,8—400).

Излучение всех тел зависит от температуры. С увеличением температуры излучение увеличивается, так как увеличивается внутренняя энергия тела. Зависимость интенсивности передачи теплоты от температуры при излучении значительно большая, чем при теплопроводности и конвекции. Поэтому при низких температурах главную роль играет конвективный теплообмен, а при высоких — теплообмен излучением.

Отношение количества энергии, излучаемой поверхностью тела во всем интервале длин волн спектра ко времени, называют полным (интегральным) лучистым потоком Q (Вт). Излучение, соответствующее какой-либо определенной длине волны (точнее, узкому интервалу длин волн), называется монохроматическим. Величина, численно равная количеству энергии, излучаемой единичной поверхностью тела в единицу времени, называется излучательной способностью тела E (Вт/м²), или плотностью интегрального излучения. Распределение энергии излучения по длинам волн характеризуется интенсивностью излучения E_λ. Величина E_λ представляет собой излучательную способность тела в интервале длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$, отнесенную к рассматриваемому интервалу длин волн $d\lambda$, т. е. $E_\lambda=dE/d\lambda$ (Вт/м³).

Баланс лучистой энергии. Представим себе, что на какое-то тело падает интегральный лучистый поток Q (рис. 12.1). В общем случае часть этого потока Q_A будет поглощаться телом, часть Q_R — отражаться и часть Q_D — проходить сквозь него:

$$Q=Q_A+Q_R+Q_D.$$

Разделив обе части равенства на Q и обозначив $Q_A/Q=A$, $Q_R/Q=R$, $Q_D/Q=D$, запишем

$$1=A+R+D. \qquad (12.1)$$

В ура нении (12.1) A представляет собой коэффициент поглощения, или поглощательную способность тела; R — коэффициент отражения и D — коэффициент пропускания. Эти коэффициенты могут для различных тел меняться от 0 до 1. Если коэффициент поглощения $A=1$, то два других коэффициента равны нулю ($R=D=0$). Это означает, что тело поглощает всю падающую на него лучистую энергию. Такое тело называется абсолютно черным. Если коэффициент отражения $R=1$ и соответственно $A=D=0$, то тело отражает всю лучистую энергию. Если при этом отражение происходит по законам геометрической оптики, то данное тело называют зеркальным, если же отражение рассеянное — абсолютно белым. Если коэффициент пропускания $D=1$ и $A=R=0$, т. е. тело пропускает всю лучистую энергию, оно называется абсолютно прозрачным. Большинство твердых и жидких тел для тепловых лучей практически непрозрачны, т. е. для них $D=0$ и уравнение (12.1) упрощается до вида

$$A+R=1. \qquad (12.2)$$

Такие тела принято называть атермичными.

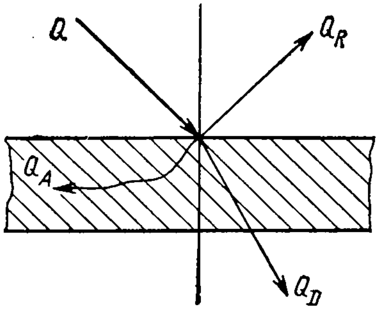


Рис. 12.1. Составляющие интегрального лучистого потока

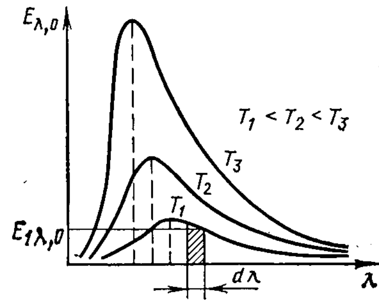


Рис. 12.2. Графическое представление закона Планка

Как известно из оптики, излучательная способность тела в световой части спектра определяется главным образом цветом его поверхности. Для поглощения и отражения тепловых лучей основное значение имеет не цвет, а шероховатость поверхности. Чем больше последняя, тем больше энергии тело поглощает и излучает в инфракрасной части спектра. Поэтому, если необходимо какой-либо аппарат защитить от воздействия излучения, его поверхность делают не только белой, но и предельно гладкой.

12.2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Законы излучения абсолютно черного тела изучаются в физике, здесь мы ограничимся напоминанием их содержания и результирующих формул.

Закон Планка. Законом Планка устанавливается зависимость интенсивности излучения E_λ от температуры и длины волны. В 1901 г. М. Планк на основании разработанной им квантовой теории излучения получил формулу

$$E_{\lambda,\,0}=\frac{c_1\lambda^{-5}}{\exp\left(c_2/\lambda T\right)-1}, \tag{12.3}$$

где c_1 — постоянная, равная $3{,}7\cdot10^{-16}$ Вт·м²; λ — длина волны, м; c_2 — постоянная, равная, 0,0144 м·К; T — абсолютная температура, К.

Этот закон получен применительно к абсолютно черному телу. На это указывает дополнительный индекс 0 у величины E_λ.

Из уравнения (12.3) следует, что интенсивность излучения равна нулю, когда $T=0$ либо когда $\lambda=0$ или $\lambda=\infty$. Графическая интерпретация закона Планка представлена на рис. 12.2. Из приведенных на графике изотерм видно, что интенсивность излучения вначале, в области коротких волн, быстро возрастает до максимума, а затем медленно убывает, не достигая нулевого значения даже при наибольших длинах волн, еще соответствующих тепловому излучению. На графике заштрихованная площадь, ограниченная изотермой, соответствующей длинам волн λ и $\lambda+d\lambda$, определяет количество энергии, излучаемой с единицы поверхности тела в единицу времени при температуре T в интервале длин волн $d\lambda$. Иначе говоря, математическое выражение для заштрихованного элемента площади

$$E_{\lambda,0}\,d\lambda = dE_0, \qquad (12.4)$$

где dE_0 — излучательная способность абсолютно черного тела при рассматриваемой температуре в интервале длин волн $d\lambda$.

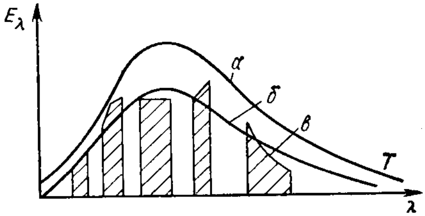


Рис. 12.3. Схематическое сопоставление спектров излучения и поглощения абсолютно черного тела (*а*), серого тела (*б*) и тела с селективным излучением (*в*)

Полное же количество энергии, которую излучает абсолютно черное тело во всем спектре длин волн от $\lambda=0$ до $\lambda=\infty$ (интегральное излучение), будет равно (Вт/м²)

$$E_0 = \int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} E_{\lambda,0}\,d\lambda = \int\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_1\lambda^{-5}}{\exp(c_2/\lambda T)-1}\,d\lambda \qquad (12.5)$$

и может быть графически (в определенном масштабе) изображено в виде площади под соответствующей изотермой.

Абсолютно черное тело является абстракцией, удобной для исследования. Реальные тела не поглощают всей падающей на них лучистой энергии, имеют $A<1$ и являются нечерными. В свою очередь все нечерные тела могут быть разделены по характеру спектра поглощения (излучения) на серые тела и тела с селективным излучением. Серым называется тело, имеющее сплошной спектр излучения, подобный спектру излучения черного тела (рис. 12.3, линия *а*), но при меньших значениях интенсивности излучения (см. рис. 12.3, линия *б*).

Отношение энергии E, излучаемой серым телом, имеющим температуру T, к энергии излучения абсолютно черного тела E_0 при той же температуре называется степенью черноты ε:

$$\varepsilon = E/E_0.$$

К серым телам может быть отнесено большинство твердых тел и капельных жидкостей.

В отличие от серых тела с селективным излучением могут излучать и поглощать энергию лишь в определенных, характерных для каждого тела, областях спектра, имеют полосовой спектр излучения (см. рис. 12.3, линия *b*). Селективными свойствами обладают многие газы и пары.

Закон Вина. Длину волны, которой соответствует максимум теплового излучения, можно определить из условия $dE_{\lambda,0}/d\lambda=0$. При этом получается:

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}9}{T}10^{-3}\ \text{м}, \quad \text{или} \quad \lambda_{\max}T = 2{,}9\cdot 10^{-3}\ \text{м}\cdot\text{К}. \qquad (12.6)$$

Уравнение (12.6) выражает закон смещения В. Вина, формулируемый следующим образом: длина волны $\lambda_{\max}$, которой соответствует максимум кривой распределения энергии по длинам волн в спектре теплового излучения, обратно пропорциональна абсолютной температуре, или, иначе говоря, с повышением температуры максимум излучения смещается в сторону более коротких волн. Эта закономерность отчетливо видна на рис. 12.2 Приближенно закон Вина используют и применительно к серым телам.

Закон Стефана—Больцмана. Этот закон опытным путем был установлен чешским ученым Й. Стефаном в 1879 г. и теоретически обоснован австрийским ученым Л. Больцманом в 1881 г. Он определяет зависимость излучательной способности абсолютно черного тела от температуры. Согласно закону Стефана — Больцмана величина E_0 прямо пропорциональна абсолютной температуре в четвертой степени:

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \tag{12.7}$$

где σ_0 — константа излучения абсолютно черного тела, численно равная $5{,}77 \times \times 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴).

Для практических расчетов уравнение (12.7) обычно используют в другой, более удобной форме, имеющей вид

$$E_0 = C_0 (T/100)^4, \tag{12.8}$$

где $C_0 = 5{,}77$ Вт/(м²·К⁴) — коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Уравнения (12.7) и (12.8) могут быть получены и на основании закона Планка из уравнения (12.5).

Для серого тела количество излучаемой энергии выражается также формулой (12.8), но с другим (меньшим) коэффициентом излучения C, т. е.

$$E = C (T/100)^4. \tag{12.9}$$

Как уже было показано, сопоставление энергий излучения абсолютно черного и произвольного серого тел при одинаковой температуре осуществляется с помощью характеристики, называемой степенью черноты ε:

$$\varepsilon = E/E_0 = C/C_0 \leqslant 1,$$

или $C = \varepsilon C_0$.

Степень черноты показывает, насколько данное тело приближается по своим излучательным свойствам к абсолютно черному; она зависит от состояния поверхности тела (прежде всего шероховатости) и ее температуры. Значения ε для различных тел приводятся в справочной литературе.

Закон Ламберта. С помощью закона Стефана—Больцмана можно определить общее количество энергии, излучаемой телом по всем направлениям. Однако распределение этой энергии по различным направлениям оказывается неодинаковым. Согласно закону Ламберта количество энергии E_φ, излучаемой телом в направлении, составляющем с нормалью к поверхности угол φ, определяется по уравнению

$$E_\varphi = E_n \cos\varphi, \tag{12.10}$$

где E_n — количество энергии, излучаемой в направлении нормали к поверхности тела ($\varphi=0$).

Интегрирование уравнения (12.10) дает соотношение

$$E_n = \frac{1}{\pi} E, \qquad (12.11)$$

т. е. лучеиспускательная способность в направлении нормали в π раз меньше полной лучеиспускательной способности тела. Опыт показывает, что закон Ламберта строго справедлив только для абсолютно черного тела. У серых тел этот закон подтверждается лишь в пределах $\varphi=0\div60°$.

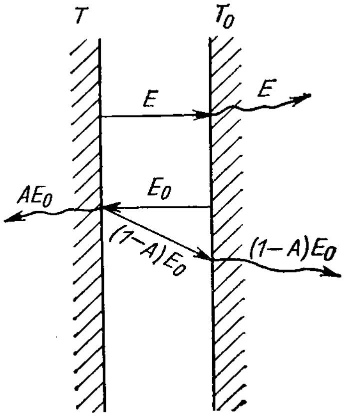


Рис. 12.4. К выводу закона Кирхгофа

Закон Кирхгофа. Закон устанавливает связь между излучательной и поглощательной способностями тела.

Рассмотрим процесс теплообмена излучением между двумя параллельными поверхностями, одна из которых (на рис. 12.4 слева) серая, а другая абсолютно черная. Серая поверхность характеризуется излучательной способностью E, коэффициентом поглощения A и температурой T; соответственно черная — величинами E_0, A_0 и T_0, причем $A_0=1$. Составим энергетический баланс для серой поверхности в случае $T>T_0$. Серое тело излучает с 1 м² поверхности в 1 ч E Дж. Вся эта энергия поглощается абсолютно черным телом. Энергия E_0, излученная за то же время абсолютно черным телом, попадая на серую поверхность, частично поглощается ею в количестве AE_0, частично отражается в количестве $(1-A)\ E_0$. Отраженная энергия попадает на черную поверхность и полностью ею поглощается. В итоге для серой поверхности приход энергии равен AE_0, расход E. При этом баланс лучистого теплообмена будет иметь вид

$$q = AE_0 - E. \qquad (12.12)$$

Лучистый теплообмен между поверхностями имеет место и при $T=T_0$. В этом случае система находится в подвижном тепловом равновесии и $q=0$. Тогда из уравнения (12.12) имеем

$$E = AE_0, \text{ или } E/A = E_0. \qquad (12.13)$$

Полученное соотношение (12.13) справедливо для любых серых тел, и поэтому его можно записать в следующем виде:

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = \ldots = E_0/A_0 = E_0. \qquad (12.14)$$

Уравнение (12.14) представляет собой математическое выражение закона Кирхгофа, который в этом случае формулируется так: отношение лучеиспускательной способности к поглощательной для всех тел одинаково и равно лучеиспускательной способности абсолютно черного тела при той же температуре.

Представив соотношение (12.13) в виде $E/E_0=A$ и вспомнив, что $E/E_0=\varepsilon$, можно сформулировать закон Кирхгофа иначе: поглощательная способность и степень черноты тела численно равны между собой. Из закона Кирхгофа следует, что лучеиспускательная способность тел тем больше, чем больше их поглощательная способность. Тела, которые хорошо отражают лучистую энергию, сами излучают очень мало (в частности, излучательная способность абсолютно белого тела равна нулю). Поэтому в тех случаях, когда хотят уменьшить потери теплоты каким-либо аппаратом, его поверхность обрабатывают так, чтобы она имела наименьшее значение ε.

Законы лучеиспускания газов. Эти законы значительно отличаются от законов лучеиспускания твердых тел. Одно- и двухатомные газы практически являются прозрачными телами; их излучательная и поглощательная способность ничтожна. Спектр излучения и поглощения многоатомных газов (NH_3, CO_2, H_2O и др.) имеет селективный характер; эти газы излучают и поглощают энергию лишь в определенных интервалах длин волн. В отличие от твердых тел излучение и поглощение энергии газами происходит не в поверхностном слое, а во всем объеме. При этом по мере прохождения тепловых лучей через многоатомные газы их энергия уменьшается. Это ослабление зависит от рода газов, температуры и числа находящихся на пути луча молекул. Число молекул пропорционально толщине слоя газа l и плотности газа (парциальному давлению p_i). Излучение газов не подчиняется закону Стефана — Больцмана. Однако для технических расчетов условно принимают, что интегральное излучение газов, как и излучение твердых тел, пропорционально четвертой степени их абсолютной температуры:

$$E_{\text{г}}=\varepsilon_{\text{г}}C_0\,(T/100)^4, \qquad (12.15)$$

где степень черноты газа $\varepsilon_{\text{г}}=f(p_i;\ l;\ T)$.

Солнечная радиация. При определении теплопритоков через строительные ограждения холодильников или помещений, в которых производится кондиционирование воздуха, необходимо учитывать теплопритоки от солнечной радиации. В этом случае источником энергии является Солнце, имеющее температуру на поверхности фотосферы около 6000°С. Длина волн солнечного излучения в инфракрасной (тепловой) части спектра лежит в интервале от 0,75 до 5,0 мкм. Солнечное излучение, достигающее границы земной атмосферы, характеризуется так называемой солнечной постоянной J_0, численно равной тепловому потоку, получаемому поверхностью площадью 1 м², перпендикулярной к солнечным лучам. Актинометрическими измерениями определено, что $J_0=1350$ Вт/м². При прохождении через земную атмосферу солнечное излучение рассеивается и частично поглощается газами, входящими в состав атмосферы. Поверхности Земли достигает около половины солнечной энергии, пришедшей к границам атмосферы. К ней добавляется часть рассеянной солнечной энергии, излучаемой уже атмосферой в направлении земной поверхности. Количественный учет полной радиации, включающей прямое и рассеянное излучение, ведется с помощью такой характеристики, как напряжение солнечной радиации J, т. е. тепловой поток (Вт), приходящийся на 1 м^2 поверхности. Напряжение солнечной радиации зависит от времени года, географического положения пункта, ориентации поверхности по отношению к странам света и от угла наклона поверхности. Так, в пунктах, расположенных на широте Ленинграда, для вертикальных поверхностей, направленных на юг и на восток, для летнего периода $J=465$ Вт/м^2, на запад — $J=558$ Вт/м^2, на север — $J=0$; для горизонтальных — $J=640$ Вт/м^2. Видимый эффект солнечного излучения на поверхность ограждения выражается в повышении температуры поверхности, облучаемой солнцем. При этом может оказаться, что из-за солнечной радиации температура поверхности ограждения станет выше температуры окружающего воздуха и поверхность начнет отдавать с помощью конвективного теплообмена часть теплоты воздуху. Возникает обратный тепловой поток $q_{об}=\alpha(T_с—T_ж)$. В итоге от поверхности внутрь ограждения направится тепловой поток $J\varepsilon—q_{об}$, где ε — степень черноты поверхности ограждения.

В технических расчетах для определения теплового потока от солнечной радиации через ограждение используют уравнение теплопередачи $Q_с=kF\Delta T$. В этом уравнении ΔT — избыточная разность температур, обусловленная действием солнечной радиации. Она может быть найдена из выражения

$$\Delta T = 0{,}75\,(J\varepsilon/23{,}3), \qquad (12.16)$$

где 0,75 — коэффициент проницания, учитывающий, что часть теплоты остается в самом ограждении; 23,3 Вт/(м$^2\cdot$К) — усредненное значение коэффициента теплоотдачи, характеризующего конвективный теплообмен между поверхностью ограждения и наружным воздухом.

12.3. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ТЕЛАМИ

Лучистый теплообмен между двумя параллельными поверхностями. Рассмотрим процесс лучистого теплообмена между двумя параллельными, бесконечно большими пластинами из разнородных серых материалов. Степень черноты и температура левой пластины ε_1 и T_1, правой — ε_2 и T_2 (рис. 12.5). Среда между пластинами диатермична.

Пусть $T_1>T_2$. Найдем количество теплоты, переданной лучеиспусканием от I (левой) пластины ко II (правой). Для этого определим сначала теплоту, переданную пластиной I в результате одностороннего теплообмена, т. е. исключив из рассмотрения энергию, излучаемую собственно пластиной II.

Пластина I излучает в направлении пластины II поток энергии E_1. При попадании на пластину II доля потока $E_1\,A_2$ поглощается ею, а доля $E_1\,R_2$ отражается. Отраженный поток $E_1\,R_2$, попав на пластину I, поглощается ею в количестве $E_1\,R_2\,A_1$ и частично отражается от нее в количестве $E_1\,R_2\,R_1$. Этот отраженный поток, попав на пластину II, вновь частично поглощается и частично от-

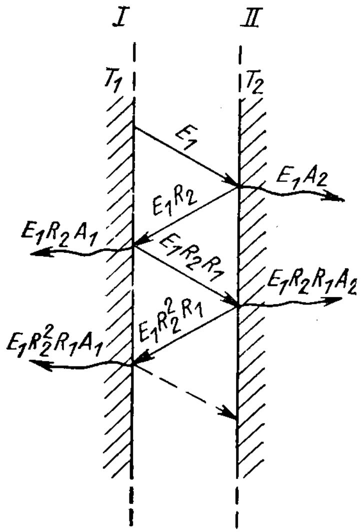


Рис. 12.5. Лучистый теплообмен между двумя параллельными бесконечными поверхностями

ражается и так до бесконечности. Плотность теплового потока, перешедшего к пластине II и поглощенного ею в результате одностороннего теплообмена, можно выразить как сумму

$$q_2 = E_1A_2 + E_1A_2R_1R_2 + E_1A_2R_1^2R_2^2 + + \ldots = E_1A_2(1 + R_1R_2 + R_1^2R_2^2 + \ldots). \tag{12.17}$$

Так как $R_1<1$ и $R_2<1$, то в скобках будет бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Ее сумма определяется из формулы

$$s = a_1/(1-p),$$

где a_1 — первый член ряда (здесь $a_1=1$); p — знаменатель прогрессии (здесь $p=R_1\ R_2$).

Соответственно выражение (12.17) можно записать в виде

$$q_2 = \frac{E_1A_2}{1-R_1R_2}. \tag{12.18}$$

Проведя аналогичные рассуждения, можно показать, что теплота, переданная пластиной II в результате одностороннего теплообмена и поглощенная пластиной I,

$$q_1 = \frac{E_2A_1}{1-R_1R_2}. \tag{12.19}$$

В итоге взаимного теплообмена плотность теплового потока, переданного от пластины I к пластине II, составит

$$q = q_2 - q_1 = \frac{E_1A_2 - E_2A_1}{1-R_1R_2}. \tag{12.20}$$

Учитывая, что $E=C(T/100)^4$ и $R=1-A=1-C/C_0$, выражение (12.20) можно преобразовать следующим образом:

$$q = \frac{C_1\left(\frac{T_1}{100}\right)^4\frac{C_2}{C_0} - C_2\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\frac{C_1}{C_0}}{1-\left(1-\frac{C_1}{C_0}\right)\left(1-\frac{C_2}{C_0}\right)} = \frac{\frac{C_1C_2}{C_0}\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \frac{C_1C_2}{C_0}\left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{\frac{C_1}{C_0}+\frac{C_2}{C_0}-\frac{C_1C_2}{C_0^2}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $C_1\ C_2/C_0$, получим

$$q = \frac{(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4}{1/C_2 + 1/C_1 - 1/C_0}. \tag{12.21}$$

Для системы тел, между которыми происходит лучистый теплообмен, обычно вводится комплексная характеристика — приведенный коэффициент лучеиспускания $C_п$ и соответственно приведенная степень черноты $\varepsilon_п$:

$$C_п = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 - 1/C_0};$$

$$\varepsilon_п = \frac{C_п}{C_0} = \frac{1}{C_0/C_1 + C_0/C_2 - 1} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}.$$

Из выражения $C_п$ следует, что приведенный коэффициент лучеиспускания будет равен коэффициенту лучеиспускания одного из двух тел, если другое тело абсолютно черное, т. е. при $C_1 = C_0$ величина $C_п = C_2$ или при $C_2 = C_0$ $C_п = C_1$. Если одно из тел абсолютно белое, то $C_п = 0$ и теплообмен отсутствует. В том случае, когда оба тела серые, $C_п$ будет меньше, чем наименьший из коэффициентов C_1 и C_2.

С введением величин $C_п$ и $\varepsilon_п$ выражение (12.21) можно записать так:

$$q = C_п \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] = \varepsilon_п C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \qquad (12.22)$$

Если рассматривается лучистый теплообмен на участке площадью F (м^2) в течение τ (с), то уравнение для количества теплоты (Дж) будет иметь вид

$$Q = \varepsilon_п C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] F\tau. \qquad (12.23)$$

Уравнения (12.22) и (12.23) используются с некоторыми поправками и для расчета лучистого теплообмена между параллельными поверхностями конечных размеров.

Лучистый теплообмен между твердыми телами произвольной конфигурации. Рассмотрим прежде всего случай, когда лучистый теплообмен происходит между телом произвольной формы и поверхностью другого, большего тела. При этом поверхность большего тела полностью охватывает меньшее (рис. 12.6).

Такой случай часто называется теплообменом между телом и его оболочкой. Площадь поверхности тела равна F_1, ее температура и степень черноты T_1 и ε_1. Соответственно поверхность оболочки характеризуется величинами F_2, T_2 и ε_2.

Пусть $T_1 > T_2$. Если обозначить через Q_1 и Q_2 общее количество энергии, исходящей соответственно от тела и его оболочки, то количество теплоты, перешедшей от тела к оболочке (так как $T_1 > T_2$), выразится разностью

$$Q_{1-2} = Q_1 - \varphi Q_2, \qquad (12.24)$$

где φ представляет собой долю энергии, излучаемой оболочкой Q_2, попадающей на тело. Остальное

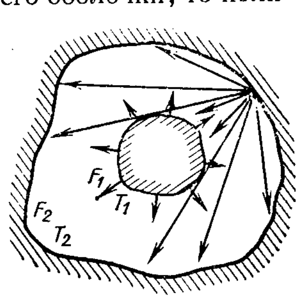


Рис. 12.6. Лучистый теплообмен между телом и его оболочкой

количество лучистой энергии $(1-\varphi)Q_2$, минуя тело, вновь попадает на поверхность оболочки F_2.

Коэффициент φ называется угловым коэффициентом излучения.

Излучение тела складывается из собственного излучения $E_1 F_1$ и той части падающего на него излучения от оболочки, которую тело отражает:

$$Q_1 = E_1F_1 + R_1 \varphi Q_2. \tag{12.25}$$

Излучение оболочки состоит из собственного излучения $E_2 F_2$, отраженной части падающей на него энергии Q_1 и отраженной части энергии $(1-\varphi)$ Q_2 самой оболочки:

$$Q_2 = E_2F_2 + R_2Q_1 + R_2(1-\varphi)Q_2. \tag{12.26}$$

Решая совместно уравнения (12.25) и (12.26), найдем значения Q_1 и Q_2 (учитывая при этом, что $1-R=A=\varepsilon$):

$$Q_1 = \frac{E_1F_1[\varepsilon_2 + (1-\varepsilon_2)\varphi] + \varphi(1-\varepsilon_1)E_2F_2}{\varepsilon_2 + \varphi\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)};$$

$$Q_2 = \frac{E_2F_2 + (1-\varepsilon_2)E_1F_1}{\varepsilon_2 + \varphi\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}.$$

Подставляя найденные значения Q_1 и Q_2 в равенство (12.24), получим

$$Q_{1-2} = \frac{1}{\varepsilon_2 + \varphi\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}(\varepsilon_2 E_1F_1 - \varphi\varepsilon_1 E_2F_2). \tag{12.27}$$

Заменяя E_1 и E_2 по закону Стефана — Больцмана, найдем

$$Q_{1-2} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2C_0}{\varepsilon_2 + \varphi\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}\left[F_1\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \varphi F_2\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] =$$
$$= \frac{C_0}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \varphi\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}\left[F_1\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \varphi F_2\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \tag{12.28}$$

Чтобы воспользоваться уравнением (12.28), необходимо определить предварительно значение коэффициента облученности φ. Это можно сделать, рассмотрев случай, когда $T_1=T_2$. При этом $Q_{1-2}=0$, что выполняется при условии, если выражение в квадратных скобках в уравнении (12.28) равно нулю. Этому соответствует равенство $F_1=\varphi F_2$, или $\varphi=F_1/F_2$. Окончательно уравнение (12.28) перепишется тогда так:

$$Q_{1-2} = C_0\varepsilon_п\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]F_1, \tag{12.29}$$

где $$\varepsilon_п = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}. \tag{12.30}$$

Из последнего уравнения следует, что для случая, когда $F_2 \gg F_1$, $\varepsilon_п \approx \varepsilon_1$. Если необходимо подсчитать потери теплоты телом в окружающую среду, то можно принять $F_2=\infty$, тогда $\varphi=0$ и $\varepsilon_п=\varepsilon_1$.

Уравнение (12.29) можно применять для лучистого теплообмена двух тел любой формы при условии, если меньшее из них является невогнутым. При этом необходимо иметь в виду, что расчетная поверхность теплообмена, которую будем обозначать через H, и коэффициент облученности φ только в рассмотренном случае определяются так просто ($H=F_1$ и $\varphi=F_1/F_2$). В общем случае нахождение H и φ является сложной задачей. Для практически важных вариантов взаимного расположения тел значения H и φ вычисляют заранее и представляют в виде таблиц или графиков. Примеры расчетных формул для нахождения этих величин приводятся ниже.

1. Для двух параллельных цилиндров одинакового диаметра:

$$H=\sqrt{S^2-D^2}+D\arcsin(D/S)-S; \tag{12.31}$$

$$\varphi=\frac{1}{\pi}\left[\arcsin\frac{D}{S}+\sqrt{\left(\frac{S}{D}\right)^2-1}-\frac{S}{D}\right], \tag{12.32}$$

где D — диаметр цилиндров; S — расстояние между их осями.

2. Для двух параллельных пластин одинаковой конечной ширины a и бесконечной длины, удаленных друг от друга на расстояние h:

$$H=\sqrt{a^2+h^2}-h; \tag{12.33}$$

$$\varphi=\sqrt{1+(h/a)^2}-h/a. \tag{12.34}$$

Если предположить в этом примере, что и $a=\infty$, то получим $H=$ $=\infty$ и $\varphi=1$, т. е. случай, рассмотренный выше.

В приведенных примерах расчетная поверхность H отнесена к 1 м длины системы.

При расчетах поверхности охлаждающих батарей, выполненных в виде пучка гладких или оребренных труб, угловой коэффициент излучения определяют в зависимости от шага труб, числа рядов в пучке и от отношения диаметра ребер к наружному диаметру труб. Эти зависимости приводятся в графической форме в справочной литературе.

Лучистый теплообмен при наличии экранов. Для уменьшения лучистого теплообмена между телами применяют экраны. Рассмотрим действие экрана на простейшем примере, когда теплообмен происходит между двумя параллельными бесконечными поверхностями (рис. 12.7). Температуры поверхностей T_1 и T_2, причем $T_1>T_2$. Между стенками установлен экран. Рассмотрим случай, когда коэффициенты лучеиспускания обеих стенок и экрана одинаковы: $C_1=C_2=C_э$.

Если экрана нет, то плотность теплового потока, переданного излучением от стенки I к стенке II, определится из уравнения (12.22):

$$q_{I-II}=C_п\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \tag{12.35}$$

При наличии экрана плотность теплового потока, переданного от стенки I к экрану,

$$q_{I-э}=C_п\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_э}{100}\right)^4\right], \tag{12.36}$$

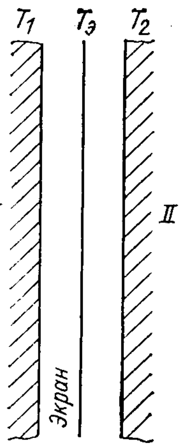


Рис. 12.7. Лучистый теплообмен при наличии одного экрана

от экрана к стенке II —

$$q_{э-II}=C_п\left[\left(\frac{T_э}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \qquad (12.37)$$

Во всех этих выражениях $C_п$ имеет одинаковое численное значение вследствие равенства $C_1=C_2=C_э$.

Для установившегося теплового режима всей системы $q_{I-э}=q_{э-II}$, следовательно, можно записать

$$\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_э}{100}\right)^4=\left(\frac{T_э}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4, \qquad (12.38)$$

откуда может быть определена температура экрана

$$\left(\frac{T_э}{100}\right)^4=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4+\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \qquad (12.39)$$

Подставим значение этой температуры в уравнение (12.36) или (12.37)

$$q_{I-э}=C_п\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]=$$

$$=C_п\left[\frac{1}{2}\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\frac{1}{2}\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]=\frac{1}{2}C_п\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right], \qquad (12.40)$$

или

$$q_{I-э}=\frac{1}{2}q_{I-II}. \qquad (12.41)$$

Выше было отмечено, что при установившемся тепловом режиме теплота, переданная стенкой I экрану, в том же количестве передается экраном стенке II. Из уравнения (12.41) следует, что наличие одного экрана уменьшает количество передаваемой теплоты вдвое. Можно показать, что при установке двух экранов $q_{I-э}=\frac{1}{3}q_{I-II}$; трех экранов $q_{I-э}=\frac{1}{4}q_{I-II}$ и, наконец, при установке n экранов

$$q_{I-э}=\frac{1}{n+1}q_{I-II}. \qquad (12.42)$$

Установка достаточно большого числа экранов позволяет снизить передачу теплоты излучением до сколь угодно малой величины. Эффективность экранирования резко возрастает, если применять экраны из материалов с малыми коэффициентами лучеиспускания.

Для случая, когда $C_1=C_2\gg C_э$, уравнение (12.42) принимает вид

$$q_{I-э}=\frac{1}{n+1}\frac{C_э}{C_1}q_{I-II}. \qquad (12.43)$$

Чтобы отчетливее представить себе, насколько сильно влияет на величину $q_{I-э}$ состояние поверхности экрана, рассмотрим такой пример. Пусть поверхности, обменивающиеся теплотой, выполнены из окисленного железа, для которого $C_1=C_2\approx 4{,}65$ Вт/(м$^2\cdot$К^4). Если поставить между ними экран из того же материала, то тепловой поток уменьшится вдвое. Если же поставить экран из полированного алюминия, поверхность которого характеризуется значением $C_э=0{,}28$ Вт/(м$^2\cdot$К^4), то тепловой поток будет равен $q_{I-э}=\frac{1}{2}\frac{0{,}28}{4{,}65}q_{I-II}=0{,}03q_{I-II}$, т. е. уменьшится в 33 раза.

Экраны широко применяют в тех случаях, когда надо оградить от действия тепловых лучей людей, работающих около поверхностей с высокими температурами, для защиты спаев термопар, когда с их помощью производится измерение температуры газов вблизи горячих или холодных поверхностей и т. д.

12.4. СЛОЖНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Обычно все три процесса передачи теплоты (теплопроводность, конвективный перенос и тепловое излучение) происходят одновременно. Их разделение при изучении курса теплопередачи носит главным образом методический характер. В практических расчетах разделение суммарного процесса переноса теплоты на элементарные составляющие не всегда целесообразно. Чаще результат одновременного действия элементарных процессов приписывается одному из них, который и считается главным. Влияние же остальных (второстепенных) процессов сказывается лишь на величине количественной характеристики основного. Выше (в главе 6) рассматривался случай передачи теплоты через тонкую жидкостную или газовую прослойку. Было показано, что расчет теплоты удобнее вести, считая, что она передается только теплопроводностью, и учитывая участие конвективного переноса с помощью коэффициента конвекции.

Процесс теплообмена между стенкой и омывающей ее средой (жидкость или газ) также является результатом совокупного действия двух процессов: конвективного теплообмена и лучеиспускания. Это так называемый **сложный теплообмен**. Здесь в качестве основного процесса обычно принимается конвективный теплообмен. В этом случае количественной характеристикой процесса является общий (суммарный) коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_{общ}=\alpha_к+\alpha_л, \qquad (12.44)$$

где $\alpha_к$ учитывает действие конвективного теплообмена, а $\alpha_л$ — лучеиспускания.

Обозначив температуру стенки $T_с$ и температуру среды $T_ж$, запишем:

$$q_к=\alpha_к(T_ж-T_с);\quad q_л=\varepsilon C_0\left[\left(\frac{T_ж}{100}\right)^4-\left(\frac{T_с}{100}\right)^4\right]. \qquad (12.45)$$

Просуммировав $q_к$ и $q_л$, получим

$$q_{общ}=q_к+q_л=\alpha_к(T_ж-T_с)+\varepsilon C_0\left[\left(\frac{T_ж}{100}\right)^4-\left(\frac{T_с}{100}\right)^4\right]=$$
$$=\left[\alpha_к+\varepsilon C_0\frac{(T_ж/100)^4-(T_с/100)^4}{T_ж-T_с}\right](T_ж-T_с)=(\alpha_к+\alpha_л)\times$$
$$\times(T_ж-T_с)=\alpha_{общ}(T_ж-T_с). \qquad (12.46)$$

Из уравнения (12.46) следует, что коэффициент теплоотдачи излучением может быть представлен выражением

$$\alpha_л = \varepsilon C_0 \frac{(T_ж/100)^4 - (T_с/100)^4}{T_ж - T_с}. \tag{12.47}$$

Это выражение можно преобразовать:

$$\alpha_л = \varepsilon C_0 \frac{T_ж^4 - T_с^4}{T_ж - T_с} 10^{-8} = \varepsilon C_0 \theta, \tag{12.48}$$

где $\Theta = \frac{T_ж^4 - T_с^4}{T_ж - T_с} 10^{-8}$ — температурный коэффициент, зависящий только от значений $T_ж$ и $T_с$.

Можно показать, что в том случае, когда $T_ж$ и $T_с$ различаются не очень сильно ($0{,}9 \leqslant T_ж/T_с \leqslant 1{,}1$), выражение температурного коэффициента может быть приведено к виду $\theta \approx 0{,}04\,(T_{ср}/100)^3$, где $T_{ср} = \frac{T_ж + T_с}{2}$. Тогда

$$\alpha_л \approx 0{,}04 \varepsilon C_0 (T_{ср}/100)^3. \tag{12.49}$$

Пример. Определить суммарный коэффициент теплоотдачи для случая сложного теплообмена между кирпичной стенкой и движущимся свободно воздухом. Температура стенки 50°С, температура воздуха 10°С. Высота стенки 3,5 м.

Значение $\alpha_к$ можно найти из критериального уравнения (6.41). В результате расчета получаем $\alpha_к = 5{,}6$ Вт/(м²·К). Так как для рассматриваемого случая $T_ж/T_с = 283/323 \approx 0{,}9$, то $\alpha_л$ можно определить из уравнения (12.49), приняв степень черноты кирпича $\varepsilon = 0{,}93$:

$$\alpha_л \approx 0{,}04 \varepsilon C_0 (T_{ср}/100) = 0{,}04 \cdot 0{,}93 \cdot 5{,}77 \cdot (303/100)^3 = 5{,}9 \quad Вт/(м^2 \cdot К),$$

где $T_{ср} = \frac{T_с + T_ж}{2}$.

Суммарный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_{общ} = \alpha_к + \alpha_л = 5{,}6 + 5{,}9 = 11{,}5\ Вт/(м^2 \cdot K).$$

Рассмотренный пример показывает, что коэффициент теплоотдачи излучением для поверхностей с большими значениями ε даже при сравнительно малых разностях $T_с - T_ж$ может быть сопоставим с коэффициентом теплоотдачи конвекцией.

Глава 13. ПЕРЕНОС ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ ОРЕБРЕННЫЕ СТЕНКИ

13.1. ОРЕБРЕНИЕ КАК СРЕДСТВО ИНТЕНСИФИКАЦИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Из уравнения теплопередачи $Q = k\,F\Delta t$ следует, что при заданных размерах стенки и температурном напоре интенсивность процесса определяется значением коэффициента теплопередачи

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Для тонких стенок, имеющих высокую теплопроводность, например металлических стенок теплообменных аппаратов, термическим сопротивлением теплопроводности можно пренебречь ($\delta/\lambda \to 0$), тогда

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + 1} = \frac{\alpha_2}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1}. \tag{13.1}$$

Отсюда видно, что при $\alpha_1 \gg \alpha_2$ значение $k \leqslant \alpha_2$, а при $\alpha_2 \gg \alpha_1$ значение $k \leqslant \alpha_1$, т. е. коэффициент теплопередачи не может быть больше наименьшего α. Соответственно и тепловой поток, передаваемый от среды к среде, лимитируется наименее интенсивным из процессов теплоотдачи, что физически вполне объяснимо.

Наиболее очевидным методом интенсификации теплопередачи является повышение значения наименьшего α каким-либо способом (замена газовой среды на жидкую, переход от свободной конвекции к вынужденной, турбулизация вынужденного потока и т. д.; более подробно методы интенсификации процессов теплоотдачи будут рассмотрены в главе 14).

Однако это не всегда возможно. Так, например, ни один из перечисленных выше способов практически неприменим для увеличения малого коэффициента теплоотдачи от поверхности отопительной к батареи воздуху комнаты.

Тогда прибегают к другому методу — увеличению теплового потока, передаваемого в процессе теплоотдачи с малым значением коэффициента α, путем увеличения площади теплоотдающей поверхности. В главе 1 (при анализе вопросов о выборе тепловой изоляции трубопроводов) уже отмечалось то обстоятельство, что с увеличением площади наружной поверхности цилиндра увеличивается и количество отдаваемой этой поверхностью теплоты при неизменном значении α, ибо в соответствии с законом Ньютона — Рихмана $Q = \alpha \Delta t F$.

Увеличение площади теплоотдающей поверхности как цилиндрической (или сферической), так и плоской стенки может быть достигнуто путем оснащения ее дополнительными теплообменными поверхностями — ребрами различной формы (оребрения поверхности).

Как правило, оребряется та поверхность, со стороны которой α имеет наименьшее значение, и в том случае, если величины α_1 и α_2 существенно различны.

Оребренные (иначе, ребристые) поверхности находят широкое применение в теплообменных аппаратах холодильных машин (испарители, конденсаторы, воздухоохладители и др.), а также в экономайзерах паровых котлов, в отопительных приборах; при изготовлении электротрансформаторов, компрессоров, двигателей внутреннего сгорания с воздушным охлаждением и т. д.

Достигаемая степень возрастания теплового потока со стороны наименьшего α зависит от того, в какой мере увеличена площадь теплообмена путем устройства ребер. Отношение площади оребренной поверхности F_2 к неоребренной (исходной) F_1 называют *коэффициентом оребрения*. Обозначим $(F_2/F_1) = \beta$. Рассмотрим роль этого фактора на основе следующих рассуждений.

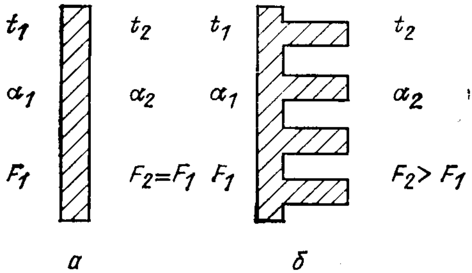


Рис. 13.1. Плоская и оребренная стенки:
$а$ — $F_1=F_2$; $б$ — $F_2>F_1$; $\alpha_2 \ll \alpha_1$

Запишем уравнение теплопередачи через неоребренную (гладкую) стенку (рис. 13.1. $а$) при $\delta/\lambda \to 0$ в следующей форме, отличающейся от обычной тем, что числитель и знаменатель правой части этого уравнения поделены на площадь поверхности теплообмена F_1, одинаковую с обеих сторон стенки ($F_2=F_1$):

$$Q_{гл}=\frac{\Delta t}{\dfrac{1}{\alpha_1 F_1}+\dfrac{1}{\alpha_2 F_1}}. \tag{13.2}$$

Аналогичное уравнение для оребренной стенки (см. рис. 13.1, $б$) при условии, что температура на всей оребренной поверхности F_2 одинакова:

$$Q_{ор}=\frac{\Delta t}{\dfrac{1}{\alpha_1 F_1}+\dfrac{1}{\alpha_2 F_2}}. \tag{13.3}$$

Разделив (13.3) на (13.2) и умножив числитель и знаменатель полученной дроби на F_1 (температурные напоры Δt полагаем в обоих случаях одинаковыми), имеем

$$\frac{Q_{ор}}{Q_{гл}}=\frac{\dfrac{1}{\alpha_1 F_1}+\dfrac{1}{\alpha_2 F_1}}{\dfrac{1}{\alpha_1 F_1}+\dfrac{1}{\alpha_2 F_2}}=\frac{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{F_1}{\alpha_2 F_2}}. \tag{13.4}$$

Из уравнения (13.4) следует, что увеличение теплового потока через ребристую стенку в сравнении с гладкой достигается уменьшением термического сопротивления среды с меньшим коэффициентом теплоотдачи α_2, ибо для ребристой стенки оно равно $1/\alpha_2 F_2$, для гладкой $1/\alpha_2\ F_1$, а $F_2>F_1$.

Если теперь умножить числитель и знаменатель дроби формулы (13.4) на α_2 и учесть, что $(F_2/F_1)=\beta$, получим

$$\frac{Q_{ор}}{Q_{гл}}=\frac{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}+1}{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\beta}}. \tag{13.5}$$

Анализ уравнения (13.5) показывает, что степень увеличения теплового потока в результате оребрения возрастает с увеличением β и уменьшением α_2/α_1. Для условия $(\alpha_2/\alpha_1)=\text{const}$ при $\beta=1$ отношение $Q_{ор}/Q_{гл}=1$; с увеличением β это отношение растет и при $\beta\to\infty$ принимает максимальное значение, равное $(1+\alpha_2/\alpha_1)/(\alpha_2/\alpha_1)$. Проиллюстрируем влияние оребрения на теплопередачу следующим примером. Заданы $\alpha_1=1000$ Вт/(м^2·К) и $\alpha_2=10$ Вт/(м^2·К). Требуется найти увеличение теплового потока $Q_{\text{ор}}/Q_{\text{гл}}$ при $\beta=25$.

При равенстве F_1 и F_2 полное термическое сопротивление $R_{\text{гл}}=$ $=R_1+R_2=1/\alpha_1+1/\alpha_2=1/1000+1/10=0,101=1/\alpha_2=R_{2\text{гл}}$.

Для оребренной стенки при $F_2=\beta F_1=25\ F_1$ $R_{\text{ор}}=1/\alpha_1+1/\alpha_2\beta=$ $=1/1000+1/250=0,005$. Отношение $Q_{\text{ор}}/Q_{\text{гл}}=R_{\text{гл}}/R_{\text{ор}}=0,101/0,005=$ $=20,2$. Аналогичный результат может быть получен и непосредственно из уравнения (13.4): $Q_{\text{ор}}/Q_{\text{гл}}=(1+0,01)/(0,04+0,01)=20,2$.

Таким образом, нанесение на стенку оребрения с коэффициентом $\beta=25$ приводит к двадцатикратному увеличению теплового потока из-за уменьшения термического сопротивления со стороны среды с меньшим α.

В аппаратах холодильных машин в зависимости от условий их работы $\beta=2,5\div30$. В хладоновых конденсаторах и испарителях, где коэффициент теплоотдачи со стороны холодильного агента в 2—3 раза меньше, чем со стороны охлаждающей воды, применяют оребрение с $\beta=2,5\div4$; в воздухоохладителях оребряют сторону воздуха, причем $\beta=6\div30$.

Однако при выборе значения коэффициента оребрения руководствуются не только величиной отношения α_2/α_1, но и практическими возможностями увеличения поверхности, а также рядом других факторов, которые будут рассмотрены в следующих разделах данной главы.

13.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР В ПРЯМОМ РЕБРЕ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Распределение температуры в ребре зависит от его формы, профиля сечения и размеров. В большинстве случаев применяют ребра, высота которых намного больше их толщины, в этом случае температурное поле в ребре можно считать одномерным.

Рассмотрим прямое ребро, расположенное на плоской стенке. Пусть сечение ребра представляет собой прямоугольник (рис. 13.2). Примем, что толщина ребра δ во много раз меньше его высоты h и длины l. Тогда при одинаковой температуре во всех точках поверхности основания ребра температура в ребре будет изменяться лишь вдоль высоты. Обозначим направление изменения температуры через x и примем $x=0$ в основании ребра. Допустим, что температура основания ребра t_0, температура окружающей среды $t_{\text{ж}}$ и коэффициент теплоотдачи от ребра к окружающей среде $\alpha_{\text{р}}$ постоянны во времени, а коэффициент теплопроводности λ и другие теплофизические характеристики материала ребра не зависят от температуры.

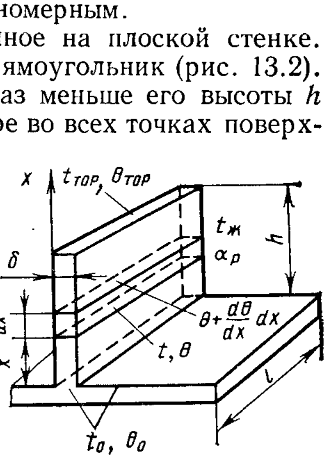


Рис. 13.2. Прямое ребро постоянной толщины

Иначе говоря, рассмотрим стационарный процесс распространения теплоты в ребре постоянной теплопроводности. Температуру ребра будем отсчитывать от температуры жидкости, т. е. будем далее оперировать избыточными температурами.

Обозначим избыточную температуру основания ребра, равную избыточной температуре стенки, через $\theta_0=t_0-t_ж$; избыточную температуру торца ребра — через $\theta_{тор}=t_{тор}-t_ж$; избыточную температуру произвольного сечения ребра, находящегося на расстоянии x от основания,— через $\theta=t-t_ж$; площадь сечения $f=\delta l$ и периметр сечения $u=2l+2\delta$.

Количество теплоты, переданной в единицу времени через сечение ребра, находящееся на расстоянии x от основания, по закону Фурье

$$Q_x=-\lambda\frac{d\Theta}{dx}f$$

(очевидно, что $dt=d\theta$). Количество теплоты, прошедшей через сечение, находящееся на расстоянии dx от предыдущего,

$$Q_{x+dx}=-\lambda\frac{d}{dx}\left(\Theta+\frac{d\Theta}{dx}dx\right). \quad (13.6)$$

Здесь выражение, стоящее в скобках, представляет собой избыточную температуру в рассматриваемом сечении ребра (см. рис. 13.2). Разность Q_x и Q_{x+dx} представляет собой элементарное количество теплоты dQ, которым обменивается со средой параллелепипед размерами $\delta\times l\times dx$. Площадь поверхности теплообмена этого параллелепипеда можно представить как произведение udx. Таким образом, с одной стороны:

$$dQ=dQ_x-dQ_{x+dx}=-\lambda\frac{d\Theta}{dx}f+\lambda\frac{d\Theta}{dx}f+\lambda\frac{d^2\Theta}{dx^2}f\,dx;$$

$$dQ=\lambda\frac{d^2\Theta}{dx^2}fdx, \quad (13.7)$$

с другой — по закону Ньютона

$$dQ=\alpha\,\Theta u\,dx. \quad (13.8)$$

Принимаем, что коэффициент теплоотдачи от поверхности к среде или от среды к поверхности не изменяется по высоте ребра. Приравнивая правые части (13.7) и (13.8) и производя некоторые преобразования, получаем

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2}=\frac{\alpha u}{\lambda f}\Theta=m^2\Theta. \quad (13.9)$$

Это уравнение характеризует закон распределения температуры по высоте ребра. Здесь

$$m=\sqrt{\alpha u/\lambda f}. \quad (13.10)$$

Если α не зависит от x, то для ребра заданных размеров при постоянном λ $m=\mathrm{const}$ и решение уравнения (13.9) имеет вид

$$\Theta=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx}. \quad (13.11)$$

Продифференцируем дважды уравнение (13.11):

$$d\Theta/dx = m\left(C_1 e^{mx} - Ce^{-mx}\right); \tag{13.12}$$

$$d^2\Theta/dx^2 = m^2\left(C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}\right). \tag{13.13}$$

Сравнивая (13.13) и (13.9), видим, что (13.11) есть решение уравнения (13.9).

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся граничными условиями.

1. При $x=0$ $\Theta=\Theta_0$. Подставляя это условие в (13.11), получаем

$$\Theta_0 = C_1 + C_2. \tag{13.14}$$

2. Второе граничное условие сформулируем, исходя из некоторых допущений. Примем, что количеством теплоты, которой обменивается торец ребра со средой, можно пренебречь. Это допущение отвечает реальным условиям, так как для высоких длинных ребер малой толщины $f \ll F_{\text{р}}$, где $F_{\text{р}}=2uh=2(\delta+l)\ h$ — площадь поверхности теплообмена ребра, а $f=\delta l$ — площадь поверхности торца ребра.

Математически второе граничное условие можно записать в виде

$$Q_{x=h} = -\lambda\,(d\Theta/dx)_{x=h}\,f = 0, \text{ или } (d\Theta/dx)_{x=h} = 0.$$

Подставляем последнее условие в (13.12). Учитывая, что $m \neq 0$, получаем

$$C_1 e^{mh} - C_2 e^{-mh} = 0. \tag{13.15}$$

Из уравнений (13.14) и (13.15) находим:

$$C_1 = \Theta_0 \frac{e^{-mh}}{e^{mh}+e^{-mh}};\quad C_2 = \Theta_0 \frac{e^{mh}}{e^{mh}+e^{-mh}}. \tag{13.16}$$

Подставляем выражение (13.16) в (13.11), получаем

$$\Theta = \Theta_0 \frac{e^{-mh}e^{mx}+e^{mh}e^{-mx}}{e^{mh}+e^{-mh}} = \Theta_0 \frac{e^{-m(h-x)}+e^{-m(h-x)}}{e^{mh}+e^{-mh}}.$$

Полученное выражение можно преобразовать, если учесть, что гиперболический косинус величины y равен $\operatorname{ch} y = 0{,}5\,(e^{y}+e^{-y})$.

Отсюда

$$\Theta = \Theta_0 \frac{\operatorname{ch}[m(h-x)]}{\operatorname{ch}(mh)}. \tag{13.17}$$

Из выражения (13.17) следует, что изменение температуры по высоте прямого ребра прямоугольного профиля характеризуется законом гиперболического косинуса.

Для избыточной температуры торца ребра из (13.17) при $x=h$ получаем

$$\Theta_{\text{тор}} = \Theta_0/\operatorname{ch}(mh). \tag{13.18}$$

Распределение температур в стальном ($\lambda=45$) и медном ($\lambda=380$ Вт/(м·К)) ребрах при $\alpha=10$ Вт/(м²·К), толщине ребра 1 мм и высоте 100 мм показано на рис. 13.3. Оно представлено в виде зависи-

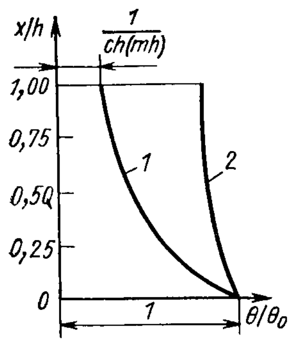


Рис. 13.3. Изменение относительной избыточной температуры стального (1) и медного (2) ребер

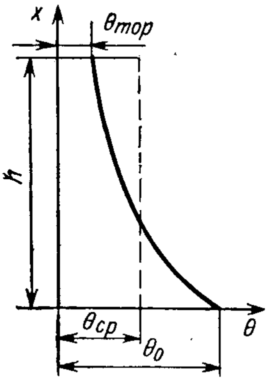


Рис. 13.4. Изменение избыточной температуры по высоте ребра

мости Θ/Θ_0 от x/h и найдено по формуле (13.17). Из рис. 13.3 видно, что изменение температуры по высоте ребра тем больше, чем меньше теплопроводность материала ребра.

13.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ТЕПЛОТЫ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ПРЯМОЕ РЕБРО ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ. ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕБРА

Через каждое сечение ребра вследствие теплообмена со средой проходит разное количество теплоты. Очевидно, полное количество теплоты, которое пройдет через ребро, будет равно теплоте, прошедшей через его основание. Эта теплота может быть выражена уравнением

$$Q = Q_{x=0} = -\lambda\,(d\Theta/dx)_{x=0}\,f. \tag{13.19}$$

С помощью (13.12) и (13.16) находим

$$\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)_{x=0} = m\,(C_1 - C_2) = m\Theta_0\,\frac{e^{-mh} - e^{mh}}{e^{mh} + e^{-mh}}.$$

Подставляя последнее выражение в (13.19), получаем

$$Q = \lambda f m\Theta_0\,\frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}}. \tag{13.20}$$

Учитывая формулы гиперболических функций $\mathrm{ch}\,y$ (приведена выше) и $\mathrm{sh}\,(y) = 0{,}5\,(e^{y} - e^{-y})$, преобразуем уравнение (13.20) к виду

$$Q = \lambda f m\Theta_0\,\mathrm{th}\,(mh). \tag{13.21}$$

Теплообмен через торцевую часть поверхности ребра, которым мы пренебрегли при выводе формул (13.17) и (13.21), можно приближенно учесть, введя в последние вместо высоты h условную высоту $l_{\text{ус}} = h + \delta/2$. Точное решение задачи с учетом теплоотдачи на торцевой поверхности выполнено, например, в [15].

Заметим, что выражение для m можно представить в виде $m=\sqrt{2\alpha/(\lambda\delta)}$. Действительно, $u=2l+2\delta=2l$, так как обычно δ мало в сравнении с l, а $f=\delta l$ и $\alpha u/\lambda f=2\alpha_р/(\lambda\delta)$. Единица измерения m—1/м.

Количество теплоты, которым обменивается ребро со средой, можно найти и с помощью закона Ньютона, а именно:

$$Q=\alpha_р\Theta_{ср}F_р=\alpha_р\Theta_{ср}uh, \qquad (13.22)$$

где $\Theta_{ср}$ — средняя избыточная температура поверхности ребра; $\Theta_{ср}=\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Theta\,dx$; $F_р=uh$ — площадь поверхности теплообмена.

Сравнивая (13.20) и (13.22), получаем $\alpha\Theta_{ср}uh=\lambda fm\Theta_0\,\mathrm{th}\,(mh)$. Заменив $\alpha u=\lambda m^2 f$ и осуществив преобразование, получаем $\Theta_{ср}/\Theta_0=$ $=\mathrm{th}\,(mh)/(mh)$.

Отношение средней избыточной температуры ребра к избыточной температуре основания ребра называется **коэффициентом эффективности ребра** и обозначается буквой E:

$$E=\Theta_{ср}/\Theta_0.$$

Сравнивая два последних соотношения, видим, что для прямого ребра прямоугольного сечения

$$E=\mathrm{th}\,(mh)/(mh). \qquad (13.23)$$

Таким образом, коэффициент эффективности ребра учитывает изменение температуры (а следовательно, и температурного напора Θ) по высоте ребра, вызванное теплообменом между боковой поверхностью ребра и окружающей его средой. Интенсивность этого изменения для ребра заданных размеров и формы зависит от соотношения между теплоотдачей и теплопроводностью ребра [см. уравнения (13.10) и (13.23)]. Чем выше коэффициент теплоотдачи $\alpha_р$ и чем меньше теплопроводность ребра λ, тем в большей степени изменяется температура по высоте ребра и, следовательно, тем меньше его эффективность. При заданных $\alpha_р$ и λ средний температурный напор $\Theta_{ср}$, а следовательно, и величина E будут уменьшаться с увеличением высоты и уменьшением толщины ребра. Для высокотеплопроводных коротких ребер $E\to1$. Для высоких и тонких ребер в верхней части ребра его температура может сравняться с температурой среды и эта часть ребра не будет участвовать в теплообмене, т. е. при $h\to\infty E\to0$.

В практике высоту ребер выбирают обычно такой, чтобы коэффициент эффективности не был меньше 0,6—0,7.

К понятию эффективности ребра можно подойти и по-другому. Можно определить E как отношение теплового потока, переданного среде рассматриваемым реальным ребром, к тепловому потоку, который при тех же условиях передало бы ребро с идеальной теплопроводностью ($\lambda\to\infty$) и одинаковой по всей поверхности температурой, равной температуре основания. Тепловой поток для идеального ребра $Q_0=\alpha_р\,F_р\,\Theta_0$ для реального соответствует уравнению (13.22).

Отношение $Q/Q_0=\Theta_{ср}/\Theta_0$. В некоторых книгах по теплообменным аппаратам коэффициент эффективности называют КПД ребра. Вывод формул для коэффициента эффективности ребер других типов приведен в [18].

Изменение избыточной температуры по высоте и средняя избыточная температура ребра $\Theta_{ср}$ показаны на рис. 13.4. Коэффициент эффективности ребра увеличивается с увеличением теплопроводности материала (сравните *1* и *2* на рис. 13.3) и толщины ребра, а также с уменьшением высоты ребра и коэффициента теплоотдачи.

Произведение mh можно несколько преобразовать, умножив и разделив на δ:

$$mh=\frac{h}{\delta}\sqrt{\frac{2\alpha\delta^2}{\lambda\delta}}=\frac{h}{\delta}\sqrt{\frac{2\alpha\delta}{\lambda}}.$$

Как известно, $\alpha\,\delta/\lambda$ представляет собой критерий Био. С учетом этого

$$mh=\frac{h}{\delta}\sqrt{2\mathrm{Bi}}. \qquad (13.24)$$

Анализ условий распространения теплоты в ребре позволяет полагать, что применение оребрения целесообразно лишь в том случае, если $2\lambda/(\alpha\delta)>5$, или $\mathrm{Bi}<0{,}4$ [41]. Сущность этого условия в том, что применение оребрения приведет к увеличению теплового потока оребренной поверхности по сравнению с гладкой только тогда, когда термическое сопротивление теплоотдаче ($1/\alpha$) станет больше термического сопротивления теплопроводности (δ/λ).

Можно найти также соотношения между размерами ребра, отвечающими требованиям минимальной массы, максимального теплового потока [15, 18].

13.4. ВЛИЯНИЕ ПРОФИЛЯ СЕЧЕНИЯ И ФОРМЫ РЕБРА НА УСЛОВИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОТЫ

Большое практическое значение имеет выбор оптимального профиля сечения ребра, который обеспечивает передачу заданного количества теплоты при наименьшей массе ребра (решение задачи приведено в [15]). В случае использования прямого ребра с плоским основанием такой профиль образуется дугами окружности радиусом $r=qh/\alpha\Theta_0$ (рис. 13.5, *а*). Технологически ребра этого профиля изготовить трудно, поэтому на практике применяют ребра треугольного или трапециевидного сечения (рис. 13.5, *б*, *в*), которые по массе не намного отличаются от ребра оптимального профиля.

Если форма и профиль сечения ребра выбраны, то можно найти его размеры, обеспечивающие максимальный тепловой поток при задан массе. Для прямого ребра пр моугольного сечения (см. рис. 13.2) эти размеры соответствуют уравн ию $\sqrt{2h/\delta}=1{,}42\sqrt{2\lambda/\alpha\delta}$ [15]. Максимальный тепловой поток через ребро треугольного сечения данной массы (см. рис. 13.5, *в*) обеспечивается при условии $2h/\delta_1=1{,}31\sqrt{2\lambda/(\alpha\delta_1)}$.

В трубчатых теплообменниках часто применяют круглые ребра постоянной и переменной толщины, а также квадратные и пластин-

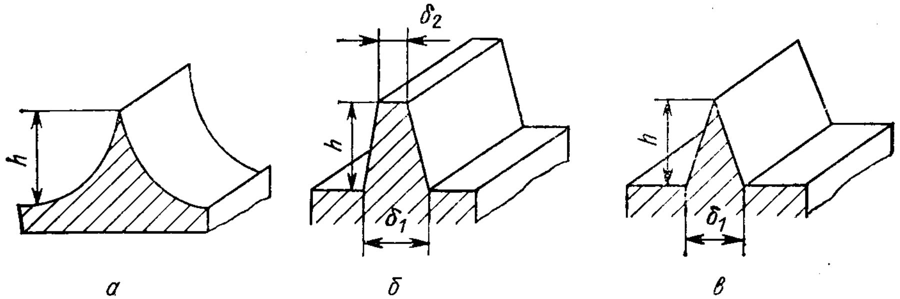


Рис. 13.5. Различные профили сечения прямого ребра на плоском основании:
а — оптимальный профиль; *б* — трапециевидный профиль; *в* — треугольный профиль

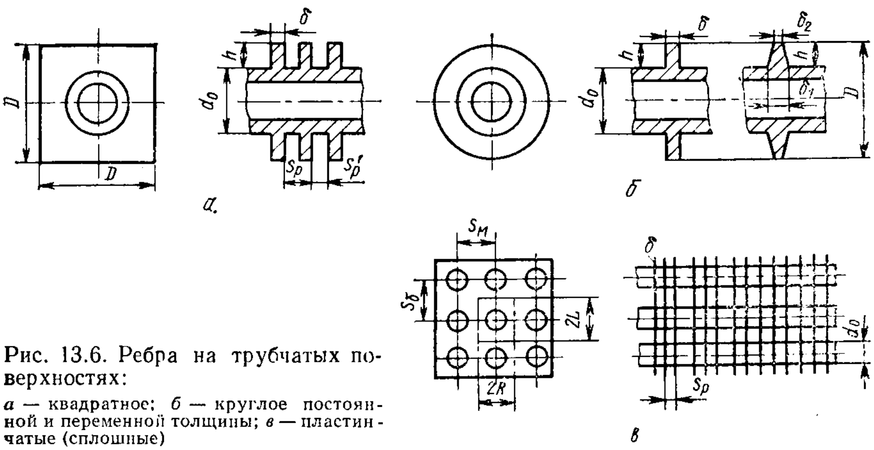


Рис. 13.6. Ребра на трубчатых поверхностях:
а — квадратное; *б* — круглое постоянной и переменной толщины; *в* — пластинчатые (сплошные)

чатые постоянной толщины (рис. 13.6). Эти ребра имеют цилиндрическое основание. Для ребер, изображенных на рис. 13.5 и 13.6, закон распределения температур оказывается более сложным, чем найденный выше для прямого ребра с $\delta=\text{const}$. Так, например, для круглого ребра постоянного сечения температура на любом расстоянии r от оси трубы описывается уравнением

$$\Theta=\Theta_0\frac{I_0(mr)K_1(mR)+I_1(mR)K_0(mr)}{I_0(mr_0)K_1(mR)+I_1(mR)K_0(mr_0)},$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; I_1 и K_1 — то же, первого порядка.

Тепловой поток, проходящий через такое ребро,

$$Q=2\pi r_0\lambda\delta m\Theta_0\Psi, \tag{13.25}$$

где $\Psi=\dfrac{I_1(mR)K_1(mr_0)-I_1(mr_0)K_1(mR)}{I_0(mr_0)K_1(mR)+I_1(mR)K_0(mr_0)}$.

Расчетные уравнения для таких ребер весьма сложны и громоздки, поэтому на практике применяют упрощенные методы расчета. Один из таких методов состоит в использовании уравнения (13.22),

Таблица 13.1. **Формулы для подсчета коэффициента эффективности ребер**

Ребра	№ рисунка	Формула	Обозначения
Прямые	13.2	$E=\dfrac{th\,(mh)}{mh}$	$m=\sqrt{\dfrac{2\alpha}{\lambda\delta}}$; h — высота ребра
Круглые	13.6, *а*	$E=\dfrac{th\,(mh')}{mh'}$	$h'=h\,(1+0{,}35\ \ln\rho)$; $\rho=R/r_0$; $h=R-r_0$
Прямоугольные и квадратные	13.6, *б*	$E=\dfrac{th\,(mh')}{mh'}$	$h'=r_0\,(\rho'-1)\,(1+0{,}35\ln\rho')$; $\rho'=1{,}28\rho\sqrt{L/R-0{,}2}$; $\rho=R/r_0$; $2L$ — большая сторона прямоугольника; $2R$ — меньшая сторона
Пластинчатые коридорный пучок	13.6, *в*	$E=\dfrac{th\,(mh')}{mh'}$	Как для прямоугольного ребра
шахматный пучок	—	$E=\dfrac{th\,(mh')}{mh'}$	То же, но $\rho'=1{,}27\sqrt{L/R-0{,}3}$; $L=s_б/2$; $R=s_м/2$; $s_б$ — большее расстояние между трубами; $s_м$ — меньшее расстояние

которое может быть представлено в виде

$$Q=\alpha F_р\Theta_0 E. \tag{13.26}$$

Для вычисления коэффициента эффективности E ребер различной формы могут быть использованы аналитические зависимости, а в ряде случаев составленные на их основании графики [18]. Формулы для некоторых типов постоянной толщины, полученные Э. Шмидтом, приведены в таблице 13.1, графики, составленные Э. С. Карасиной,— на рис. 13.7. Уравнения и графики для определения коэффициента эффективности ребер различных конфигураций (в том числе в виде игл и шипов), полученные К. Гарднером, приведены в [18]. Там же подробно рассмотрены вопросы оптимизации геометрической формы и размеров оребрения.

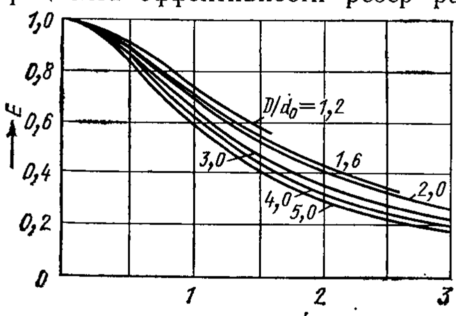


Рис. 13.7. Коэффициент эффективности круглых ребер постоянной толщины при различных D/d_0 (обозначения см. рис. 13.6)

13.5. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛООТДАЧИ ОРЕБРЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для расчетов теплообменных аппаратов холодильных машин необходимы сведения о теплоотдаче труб, оребренных круглыми, квадратными и пластинчатыми ребрами (см. рис. 13.6).

При обтекании пучков оребренных труб газом условия конвективного теплообмена усложняются в сравнении с обтеканием гладкотрубных пучков. Здесь на условия обтекания и теплообмена помимо рассмотренных в главе 6 факторов оказывают влияние форма, геометрические размеры и шаг ребер. Обобщенные формулы могут быть получены только для геометрически подобных оребренных поверхностей. В связи с этим существует большое число зависимостей, описывающих конвективный теплообмен для той или иной системы оребрения.

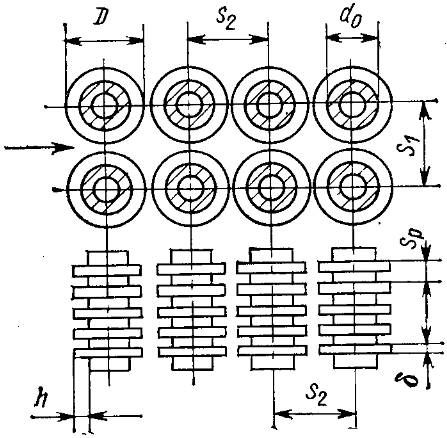


Рис. 13.8. К расчету $\alpha_р$ при поперечном обтекании пучка труб с круглыми ребрами

Для расчета коэффициента теплоотдачи при поперечном обтекании труб с круглыми или квадратными ребрами (см. рис. 13.6, *а*, *б*) может быть использовано критериальное уравнение, предложенное Э. С. Карасиной,

$$\mathrm{Nu}_ж = C\,\mathrm{Re}_ж^n\,(d_0/s_р)^{-0,54}\,(h/s_р)^{-0,14}\,\psi. \qquad (13.27)$$

Величина C зависит от типа пучка и формы ребра, величина n — от формы ребра. Их значения и пределы изменения параметров, для которых получена формула, приведены в табл. 13.2 (обозначения табл. 13.2 соответствуют рис. 13.8).

В уравнении (13.27) определяющим размером является шаг ребер $s_р$. Множитель $\psi=0,85$ учитывает неравномерность теплоотдачи по высоте ребра (см. раздел 14.6).

В критерий Re входит скорость w в узком сечении пучка, площадь которого $f_{уз}$ может быть определена по формуле

$$f_{уз} = \left[1 - \frac{d_0}{s_1}\left(1 + 2\frac{h}{s_р}\frac{\delta}{d_0}\right)\right] f_1, \qquad (13.28)$$

где f_1 — площадь свободного поперечного сечения аппарата (без труб).

Полученные из уравнения (13.27) коэффициенты теплоотдачи отнесены ко всей оребренной поверхности.

Результаты исследований локальной и средней теплоотдачи труб с ребрами различной формы приведены в [11]. Поперечное обтекание пучков труб с круглыми (шайбовыми и спиральными) ребрами в широком интервале геометрических и режимных параметров изучалось В. Ф. Юдиным и Л. С. Тахтаровой. Расчетные формулы для среднего коэффициента теплоотдачи, предложенные В. Ф. Юдиным на основании обобщения многочисленных опытных данных, приведены в [11, 13]. Они могут быть использованы при расчете воздушных конденсаторов и воздухоохладителей холодильных установок.

Таблица 13.2. **Значения C и n в формуле (13.27)**

Пучок	Ребра	C	n
Коридорный	Круглые	0,104	0,72
	Квадратные	0,096	0,72
Шахматный	Круглые	0,223	0,65
	Квадратные	0,205	0,65

Примечания: 1. Пределы изменения параметров: $3000<\mathrm{Re}<25\,000$; $1,5<\frac{s_1}{d_0}=\frac{s_2}{d_0}<2$; $0,635<\delta/d_0<0,08$; $0,21<s_р/d_0<0,33$; $0,17<h/d_0<0,5$; $0,1\leqslant mh\leqslant 1,1$.
2. Число рядов по глубине пучка больше 4.

В аппаратах, распространенных в холодильной технике, часто применяют оребрение в виде пластинчатых ребер, представляющих собой сплошные металлические листы, которые пронизываются пучком труб (см. рис. 13.6, *в*). В этом случае толщина ребра составляет 0,2—0,5 мм, шаг ребер — 3—5 мм, относительный шаг труб $s_1/d=s_2/d=2$.

Условия обтекания таких ребер, как установил А. А. Гоголин, ближе к условиям движения воздуха внутри каналов, образованных плоскостями, чем к поперечному обтеканию труб. На основании этого для расчета коэффициента теплоотдачи при обтекании пучков труб с пластинчатыми ребрами (при указанных выше геометрических параметрах) им получено следующее критериальное уравнение:

$$\mathrm{Nu}_ж=C\,\mathrm{Re}_ж^n=(L/d_{эк})^m. \tag{13.29}$$

Здесь в качестве определяющего размера выбран эквивалентный диаметр канала $d_{эк}=2s'_тs'_р\,(s'_т+s'_р)$, где $s'_т$—расстояние в свету между трубами; $s'_р$—то же, между ребрами; L — длина пластины по ходу воздуха.

Для $\mathrm{Re}_ж=500\div2500$; $L/d_{эк}=4\div50$; $w\rho=2\div6$ кг/(м²·с); $s_р/d_0=0,18\div0,35$; $s_т/d_0=2\div5$ и $t_ж=-40\div40$°C получены следующие зависимости для определения величин n, m и C: $n=0,45+0,0066\,L/d_{эк}$; $m=-0,28+0,08\,\mathrm{Re}_ж/1000$.

Множитель C вычисляют для коридорного пучка по формуле $C=AB$, где $B=1,36-0,24\,\mathrm{Re}_ж/1000$. Значения A приведены ниже.

$L/d_{эк}$	5	10	20	30	40	50
A	0,412	0,326	0,201	0,125	0,080	0,0475

Значения C для шахматного пучка выше на 10—12%.

Заметим, что при малых $L/d_{эк}$ характер влияния Re близок к условиям поперечного обтекания, а при больших — к условиям движения внутри трубы. Для расчета пластинчатого оребрения при $s_р>5$ мм в [13] приведены графики $\mathrm{Nu}=f\,(\mathrm{Re})$ в интервале $\mathrm{Re}=(2\div20)10^3$.

Формулы (13.27)—(13.29) позволяют определить конвективный (без учета излучения) коэффициент теплоотдачи α, отнесенный к температурному напору $\Theta_{ср}$ и поверхности ребра $F_р$.

13.6. ПРИВЕДЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ТЕПЛООТДАЧИ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ОРЕБРЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Приведенный коэффициент теплоотдачи. Оребренная поверхность состоит из поверхности ребер и поверхности участков, не занятых ребрами. Температура этих двух поверхностей и их размеры различны. Контакт между основанием ребра и несущей их стенкой трубы может быть недостаточно плотным. Поэтому должно быть учтено термическое сопротивление контакта и собственное термическое сопротивление ребра, зависящее от его формы, размеров и материала. Кроме того, разность температур оребренной поверхности и среды переменна по высоте ребер.

Чтобы учесть все эти обстоятельства и иметь возможность характеризовать интенсивность конвективного теплообмена в целом для оребренной поверхности, вводят понятие п р и в е д е н н о г о к о э ф ф и ц и е н т а т е п л о о т д а ч и. Это некоторая условная величина, которую можно получить, если теплоту, передаваемую всей оребренной поверхностью, отнести к избыточной температуре наружной поверхности трубы (у основания ребер) и некоторой расчетной поверхности $F_{\text{рас}}$:

$$\alpha_{\text{пр}}=\frac{Q}{F_{\text{рас}}\Theta_{\text{о}}}=\frac{Q}{F_{\text{рас}}\,(t_{\text{о}}-t_{\text{ж}})}\,. \tag{13.30}$$

Рассмотрим методику определения $\alpha_{\text{пр}}$ для оребренной трубы. Введем обозначения: $F_{\text{о}}$ — площадь наружной поверхности трубы, взятая по диаметру основания ребер $d_{\text{о}}$; $F_{\text{р}}$ — площадь поверхности ребер; $F_{\text{м. р}}$ — площадь поверхности межреберных участков трубы; $F_{\text{ор}}=F_{\text{р}}+F_{\text{м. р}}$ — общая площадь наружной поверхности оребренной трубы; $t_{\text{о}}$ и $\alpha_{\text{о}}$ — температура и коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности трубы; $t_{\text{ср}}$ и α — средняя температура и средний коэффициент теплоотдачи ребра; $t_{\text{ж}}$ — температура среды, окружающей поверхность $F_{\text{ор}}$.

При идеальном контакте ребер и трубы температура основания ребер равна $t_{\text{о}}$. Общий тепловой поток Q, которым обменивается оребренная поверхность со средой, будет складываться из потока теплоты, отданного ребрами $Q_{\text{р}}$ и межреберными участками $Q_{\text{м. р}}$. При $t_{\text{о}}>t_{\text{ж}}$ в соответствии с законом Ньютона

$$Q=Q_{\text{р}}+Q_{\text{м.р}}=\alpha\,(t_{\text{ср}}-t_{\text{ж}})\,F_{\text{р}}+\alpha_{\text{о}}\,(t_{\text{о}}-t_{\text{ж}})\,F_{\text{м.р}}.$$

Принимаем $\alpha=\alpha_0$ и заменяем разности температур избыточными температурами. Тогда

$$Q=\alpha\Theta_{\text{ср}}F_{\text{р}}+\alpha_{\text{о}}\Theta_{\text{о}}F_{\text{м.р}}.$$

Вынося $\alpha\Theta_0$ за скобки, получаем

$$Q=\alpha\Theta_{\text{о}}\,(F_{\text{р}}\Theta_{\text{ср}}/\Theta_{\text{о}}+F_{\text{м.р}}).$$

Заменив в полученном выражении $\Theta_{\text{ср}}/\Theta_0=E$, подставляем найденное количество теплоты в уравнение (13.30). Отсюда находим приведенный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_{пр} = \alpha\left(\frac{F_р}{F_{рас}}E + \frac{F_р}{F_{рас}}\right). \tag{13.31}$$

В качестве расчетной площади принимают либо $F_{ор}$, либо F_0. В первом случае приведенный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{пр.\,ор}$, отнесенный к оребренной поверхности,

$$\alpha_{пр.ор} = \alpha\left(\frac{F_р}{F_{ор}}E + \frac{F_{м.р}}{F_{ор}}\right) = \alpha\left[1 + (E-1)\frac{F_р}{F_{ор}}\right]; \tag{13.32}$$

во втором случае приведенный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{пр.\,о}$, отнесенный к основной поверхности,

$$\alpha_{пр.о} = \alpha\left(\frac{F_р}{F_о}E + \frac{F_{м.р}}{F_о}\right). \tag{13.33}$$

Очевидно, численные величины приведенных коэффициентов теплоотдачи, отнесенных к разным поверхностям, различны и

$$\alpha_{пр.о} = \alpha_{пр.ор}F_{ор}/F_о = \alpha_{пр.ор}\varphi_н. \tag{13.34}$$

Площади поверхностей $F_о$, $F_р$, $F_{м.р}$ и $F_{ор}$ при расчете $\alpha_{пр}$ находят либо для трубы длиной 1 м, либо для ребра и прилегающего к нему участка трубы; $\varphi_н = F_{ор}/F_0$ — наружная степень оребрения.

В рассмотренных выше соотношениях для расчета приведенного коэффициента теплоотдачи предложено постоянство конвективного коэффициента теплоотдачи по всей поверхности ребра. В действительности, как показали экспериментальные исследования, теплоотдача изменяется и по периметру, и по высоте ребра [11]. Так, локальные коэффициенты теплоотдачи у вершины ребра выше, чем у его основания. Для учета неравномерности распределения коэффициента теплоотдачи на эффективность ребра теоретическое значение последнего E умножают на поправочный множитель ψ. При этом приведенный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_{пр} = \alpha\left(\frac{F}{F_{рас}}E\psi + \frac{F_{м.р}}{F_{рас}}\right).$$

В экспериментах с оребренными поверхностями чаще всего опытным путем определяются $\alpha_{пр}$, а конвективный коэффициент теплоотдачи α находят расчетом с помощью последнего уравнения. Именно так получены формулы для α в работах А. А. Жукаускаса и В. Ф. Юдина. При этом $\psi = 1 - 0{,}058\,mh$ в диапазоне $mh = 0{,}1 \div 3{,}7$.

Формула (13.27) учитывает неравномерность распределения теплоотдачи непосредственно в величине α, а в уравнении (13.29) при определении α принято $\psi = 1$. Расчет $\alpha_{пр}$ в случае применения этих формул следует производить по соотношению (13.31). При расчете теплоотдачи оребренных воздухоохладителей, работающих при низких температурах кипения, на поверхности ребер вследствие конденсации находящегося в воздухе водяного пара осаждается иней. Это обстоятельство учитывают, вводя в уравнения (13.10), (13.31) — (13.33) вместо α условный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{усл}$, учитывающий термическое сопротивление инея $\delta_{ин}/\lambda_{ин}$ и определяемый из условия $\alpha_{усл}^{-1}=[\alpha^{-1}+\delta_{ин}/\lambda_{ин}]^{-1}$. (Более подробно о влиянии инея см. [13, 36].)

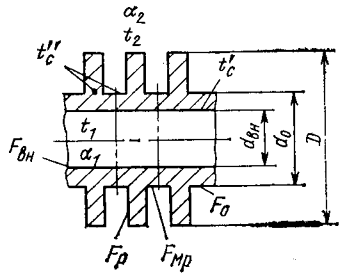


Рис. 13.9. К определению приведенных коэффициентов теплоотдачи и теплопередачи

Приведенный коэффициент теплопередачи. Рассмотрим процесс теплопередачи через оребренную трубу от среды, находящейся внутри трубы и имеющей температуру t_1, к среде, омывающей трубу снаружи и имеющей температуру t_2 (рис. 13.9). Коэффициент теплоотдачи первой среды обозначим α_1. Заметим, что площади поверхностей теплообмена со стороны одной из сред (например, внутренняя поверхность) и со стороны другой среды (наружная, оребренная) заведомо неодинаковы.

Тепловой поток, передаваемый от первой среды к стенке трубы,

$$Q=\alpha_1 F_{вн}(t_1-t_c'). \tag{13.35}$$

Тепловой поток, передаваемый сквозь стенку трубы, если пренебречь влиянием ее кривизны,

$$Q=\frac{\lambda_{тр}}{\delta_{тр}}(t_c'-t_c'')\frac{F_{вн}+F_0}{2}. \tag{13.36}$$

Тепловой поток, который отдаст наружная оребренная поверхность второй среде, на основании соотношений, полученных выше, можно найти по формуле

$$Q=\alpha_{пр.ор}F_{ор}(t_c''-t_2), \tag{13.37}$$

где $\alpha_{пр.ор}$ определяется по уравнению (13.32). Оставляем в правой части каждого из выражений (13.35)—(13.37) только разности температур, складываем и решаем относительно Q:

$$Q=\frac{t_1-t_2}{\dfrac{1}{\alpha_1 F_{вн}}+\dfrac{\delta_{тр}}{\lambda_{тр}}\dfrac{2}{F_{вн}+F_0}+\dfrac{1}{\alpha_{пр.ор}F_{ор}}}.$$

Умножаем числитель и знаменатель на $F_{ор}$:

$$Q=\frac{F_{ор}(t_1-t_2)}{\dfrac{1}{\alpha_1}\dfrac{F_{ор}}{F_{вн}}+\dfrac{\delta_{тр}}{\lambda_{тр}}\dfrac{2F_{ор}}{F_{вн}+F_0}+\dfrac{1}{\alpha_{пр.ор}}}. \tag{13.38}$$

Знаменатель полученного выражения представляет собой приведенное термическое сопротивление оребренной трубы; величина, обратная ему,— **приведенный коэффициент теплопередачи**

$$k_{пр.ор}=\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}\dfrac{F_{ор}}{F_{вн}}+\dfrac{\delta_{тр}}{\lambda_{тр}}\dfrac{2F_{ор}}{F_{вн}+F_0}+\dfrac{1}{\alpha_{пр.ор}}}. \tag{13.39}$$

Если учесть, что для труб, обычно применяемых в аппаратах, различие между диаметрами $d_{вн}$ и $d_о$ невелико, то можно считать $F_{вн} \simeq F_о$. В соответствии с этим и учитывая, что в рассматриваемом случае коэффициент оребрения $\beta = F_{ор}/F_{вн}$, получаем

$$k_{пр.ор} = \frac{1}{\beta\,(1/\alpha_1 + \delta_{тр}/\lambda_{тр}) + 1/\alpha_{пр.ор}}. \tag{13.40}$$

Тепловой поток

$$Q = k_{пр.ор} F_{ор}\,(t_1 - t_2). \tag{13.41}$$

Осуществим аналогичные преобразования для случая, когда коэффициенты теплообмена и тепловой поток приводятся к поверхности $F_о$. Тогда вместо (13.37) получим

$$Q = \alpha_{пр.о} F_о\,(t_1 - t_2),$$

вместо (13.38), (13.39) и (13.40) —

$$Q = \frac{F_о\,(t_1 - t_2)}{(1/\alpha_1 + \delta_{тр}/\lambda_{тр})\,F_о/F_{вн} + 1/\alpha_{пр.о}}; \tag{13.42}$$

$$k_{пр.о} = \frac{1}{(1/\alpha_1 + \delta_{тр}/\lambda_{тр})\,F_о/F_{вн} + 1/\alpha_{пр.о}}; \tag{13.43}$$

$$Q = k_{пр.о} F_о\,(t_1 - t_2). \tag{13.44}$$

Очевидно, что $k_{пр.о} = k_{пр.ор} F_{ор}/F_о$.

Заметим, что подобным образом приведенный коэффициент теплопередачи можно отнести и к внутренней поверхности трубы, причем $k_{пр.вн} = k_{пр.о} F_о/F_{вн} = k_{пр.ор}/\beta$. Если температуры сред изменяются по поверхности аппарата, то в уравнения (13.41) и (13.44) вместо $(t_1 - t_2)$ надо подставить $\Delta t_{ср}$.

Глава 14. ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

14.1. КЛАССИФИКАЦИЯ. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ ТИПЫ АППАРАТОВ

Теплообменным аппаратом называют устройство, предназначенное для передачи теплоты от одной среды к другой. Так, теплообменными аппаратами являются: паровой котел и конденсатор паросиловой установки, испаритель и конденсатор холодильной машины и многие другие устройства, применяемые в теплоэнергетике, холодильной и криогенной технике, химической, пищевой и других отраслях промышленности. Участвующие в теплообмене вещества (рабочие среды, потоки) могут находиться в жидком или газообразном состоянии либо представляют собой смесь жидкости с паром, называемую двухфазным потоком.

По принципу действия теплообменные аппарататы делятся на рекуперативные, регенеративные и смесительные (или контактные) (рис. 14.1).

В **рекуперативных** аппаратах горячая и холодная среды одновременно с разных сторон омывают поверхность теплообмена, например стенку трубы, через которую и происходит теплообмен (рис. 14.1, *а*). Примером такого аппарата может служить отопительная батарея, в которой теплота от горячей воды (или пара) через металлическую стенку передается воздуху в помещении, либо испаритель холодильной машины, в котором теплота от охлаждаемой жидкости или газа передается кипящему хладагенту.

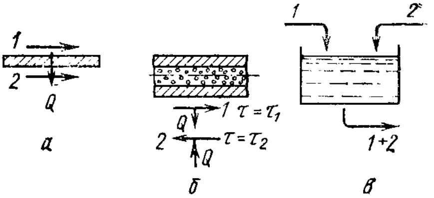


Рис. 14.1. Схемы аппаратов различного принципа действия:

а — рекуперативный; *б* — регенеративный; *в* — смесительный; *1* — горячая среда; *2* — холодная среда

В регенеративных аппаратах горячая и холодная среды омывают одну и ту же поверхность теплообмена попеременно. Сначала горячая жидкость в течение времени τ_1 отдает теплоту Q поверхности теплообмена, которая нагревается, а затем в течение времени τ_2 вдоль той же поверхности протекает холодная жидкость, которая отнимает от нее теплоту Q и нагревается (рис. 14.1, *б*). В этом случае площадь поверхности теплообмена и ее аккумулирующая способность должны быть достаточно велики. Обычно для этой цели используются заполнения (насадки) в виде фарфоровых колец, кусочков каменного угля, камней, гофрированных металлических лент, металлических опилок и др. Примером регенеративного аппарата могут служить воздухоподогреватели доменных печей, регенераторы установок разделения воздуха и др. Учитывая периодичность действия, регенераторы обычно компонуют из двух аппаратов.

Режим работы рекуперативных аппаратов в основном стационарный, регенеративных — нестационарный.

Поскольку в рекуперативных и регенеративных аппаратах в процессе передачи теплоты участвует поверхность твердого тела, эти аппараты называются также поверхностными.

В смесительных аппаратах теплопередача от горячей среды к холодной осуществляется путем их непосредственного соприкосновения и смешения (рис. 14.1, *в*). Эти аппараты называют еще бесповерхностными, или контактными. В контактных аппаратах в качестве сред могут быть использованы разные жидкости, в том числе и несмешивающиеся. Контактный теплообмен сопровождается массообменом. Примером таких аппаратов могут служить охлаждающие градирни, скрубберы газоразделительных установок и др. В градирнях разбрызгиваемая форсунками вода охлаждается атмосферным воздухом. Вода частично испаряется, поэтому теплообмен происходит и за счет разности температур между водой и воздухом, и за счет испарения воды и переноса пара в воздух. В скрубберах аналогичные процессы происходят между поднимающимся потоком газа и каплями или струями жидкости.

Кроме аппаратов перечисленных типов существуют аппараты с внутренними источниками энергии, где используется одна среда, которая отводит теплоту, выделенную в аппарате. Примеры таких

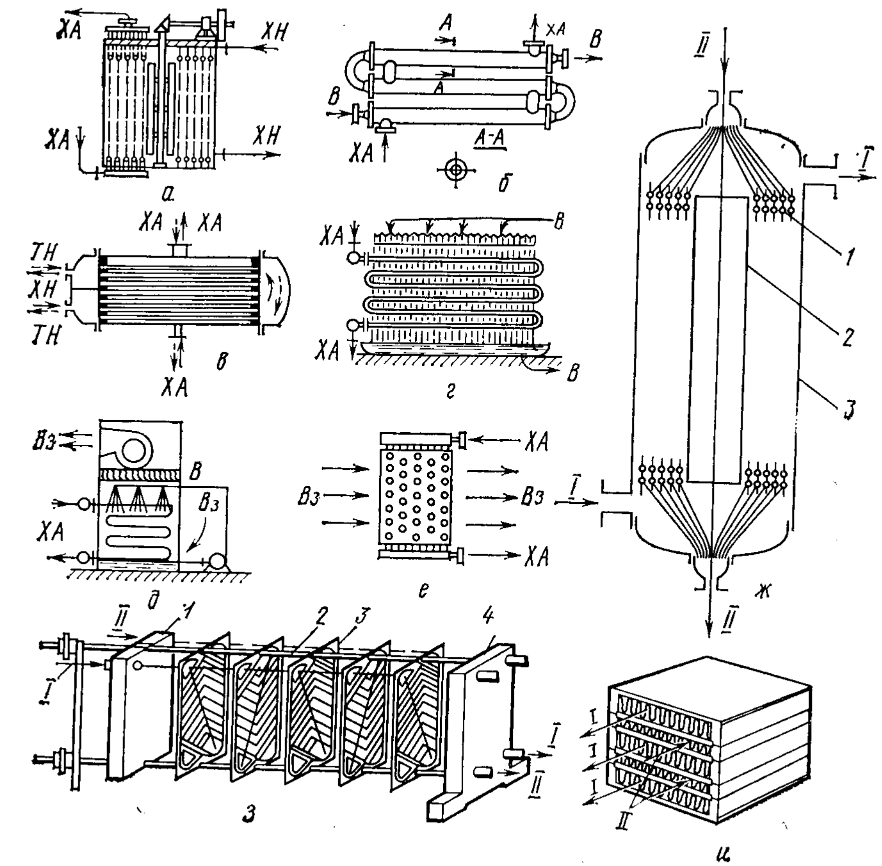


Рис. 14.2. Типы теплообменных аппаратов:

а — погружной; *б* — двухтрубный; *в* — кожухотрубный; *г* — оросительный; *д* — испарительный; *е* — трубчато-ребристый; *ж* — с витыми трубками; *з* — пластинчатый (*1* — теплопередающая пластина; *2* — верхняя штанга; *3* — передняя стойка; *4* — прижимная плита); *и* — пластинчато-ребристый; *I*, *II* — рабочие среды; *ХА* — холодильный агент; *В* — вода; *Вз* — воздух; *ХН* — хладоноситель; *ТН* — теплоноситель

аппаратов: электрические нагреватели воды или воздуха, атомные реакторы и др.

В основу классификации аппаратов могут быть положены и другие признаки: назначение, тип поверхности теплообмена и др. Так, в зависимости от назначения различают подогреватели, охладители, конденсаторы, испарители, сублиматоры, десублиматоры и др. По виду теплообменной поверхности рекуперативные аппараты делятся на: а) трубчатые (прямотрубные и змеевиковые) и листовые (панельные, пластинчатые); б) из гладких труб и пластин и из оребренных труб и волнистых пластин.

В зависимости от конструктивного выполнения аппаратов они имеют свои специальные названия. На рис. 14.2 схематично представлены некоторые типы теплообменных аппаратов, применяемых в холодильной и криогенной технике, химической и пищевой промышленности: погружной, двухтрубный, кожухотрубный, оросительный, испарительный, из оребренных труб, с витыми трубами, пластинчатый, пластинчато-ребристый. В случае использования аппарата как испарителя охлаждаемую в нем среду принято называть хладоносителем (ХН), а среду, отводящую теплоту от холодильного агента в конденсаторе,— теплоносителем (ТН).

В погружном аппарате одна из жидкостей (например, холодильный агент) движется внутри трубы, вторая (например, вода или рассол) находится в баке, откуда с помощью насоса подается в охлаждаемое помещение. Это наиболее простой, но и наименее интенсивный аппарат.

В двухтрубном аппарате одна из жидкостей движется по трубе меньшего диаметра, вторая — в межтрубном кольцевом пространстве между трубами большего и меньшего диаметров. Этот аппарат несколько более сложный по конструкции, но зато и более интенсивный, чем погружной.

Кожухотрубный аппарат состоит из кожуха, к которому приварены решетки (трубные доски), имеющие форму диска с отверстиями малого диаметра. В последних развальцовывают трубы, образующие шахматный или коридорный пучок. Одна из жидкостей движется внутри труб, вторая — в пространстве между трубами. Схема аппарата на рис. 14.2 соответствует кожухотрубному испарителю или конденсатору. При использовании кожухотрубного аппарата для теплообмена между однофазными средами в межтрубном пространстве устанавливаются поперечные перегородки для равномерного распределения и увеличения скорости движения в нем среды. Этот аппарат интенсивнее и компактнее двух первых.

Аппараты с оребренными трубами применяют и как воздухоохладители, и как воздушные конденсаторы. В первом случае внутри труб движется либо кипящий холодильный агент, либо хладоноситель, во втором — конденсирующийся холодильный агент. В обоих случаях оребряется наружная, обдуваемая воздухом, поверхность труб.

В криогенной технике наиболее широко применяют витые теплообменники. В них гладкие или оребренные трубы навиты в несколько слоев на полый заглушенный сердечник. Обечайка выполняется из листового материала, зазор между слоями труб обеспечивается продольными прокладками из латунных полос. Концы труб выводятся в подводящий и отводящий коллекторы. Одна из рабочих сред (обычно высокого давления) движется в трубах, вторая (низкого давления) — в межтрубном пространстве. Витые теплообменники обладают высокой компактностью.

В ряде отраслей промышленности используют пластинчатые и пластинчато-ребристые аппараты, также характеризуемые высокой компактностью. В пластинчатых аппаратах горячая и холодная среды движутся по каналам, образуемым пластинами плоской или более сложной формы. Эти аппараты целесообразно применять для теплообмена сред с близкими по величине коэффициентами теплоотдачи. В частности, они используются в молочной, пищевой и химической промышленности. В пластинчато-ребристых аппаратах между гладкими пластинами размещена насадка в виде ребер различной формы и размеров. По одному из оребренных каналов движется горячая среда, по другому — холодная. Подбором соответствующих форм и размеров оребрения можно интенсифицировать процесс теплообмена и получить высокие коэффициенты теплопередачи и компактность аппарата. Пластинчато-ребристые теплообменники используют в качестве подогревателей и охладителей воздухоразделительных установок.

Рассмотренные аппараты являются рекуперативными.

Аппараты оросительного и испарительного типов применяют в качестве конденсаторов холодильных машин. Холодильный агент в них движется внутри труб, охлаждающая вода стекает по наружной поверхности. В оросительном конденсаторе при определенных условиях, а в испарительном — всегда часть воды испаряется в воздух. При контактировании воды и воздуха между ними происходит тепло- и массообмен, а между холодильным агентом и водой — теплообмен через стенку трубы. Таким образом, здесь получается смешанный принцип действия: рекуперативно-контактный.

Все более широкое распространение в ряде отраслей техники находят теплообменные устройства, называемые тепловыми трубами, предназначенные для переноса теплоты от одного источника к другому, находящемуся от него на некотором расстоянии. Принцип действия тепловых труб основан на том, что отвод теплоты от охлаждаемого источника осуществляется в результате испарения теплоносителя в фитиле, расположенном в одном конце тепловой трубы, а подвод теплоты — в результате конденсации того же теплоносителя в фитиле, находящемся в другом ее конце. Тепловые трубы позволяют передавать большие количества теплоты через малые поверхности. Существуют и другие типы теплообменников, работающих по тому же принципу, например термосифоны.

Несмотря на своеобразие различных типов аппаратов и различие их принципов действия, процессы передачи теплоты в них подчиняются некоторым общим закономерностям, которые рассматриваются ниже.

14.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА В АППАРАТЕ

Процесс теплообмена в аппарате описывается двумя основными соотношениями: уравнением теплового баланса и уравнением теплопередачи. В зависимости от принципа действия аппарата эти уравнения могут различаться некоторыми частностями.

Рассмотрим стационарный процесс теплообмена в рекуперативных аппаратах.

Уравнение теплового баланса. Если процесс теплообмена происходит в условиях постоянного давления, то тепловой поток, отдаваемый (или воспринимаемый) рабочей средой на элементарном участке поверхности аппарата площадью dF, определится соотношением

$$dQ = G di, \tag{14.1}$$

где dQ — тепловой поток, Вт; G — массовый расход среды, кг/с; di — изменение удельной энтальпии среды, Дж/кг.

При отсутствии теплопритоков (или теплопотерь) тепловой поток, отданный горячей средой, полностью воспринимается холодной и уравнение теплового баланса имеет вид

$$dQ = -G_1 di_1 = G_2 di_2. \tag{14.2}$$

При постоянстве массовых расходов сред и конечном изменении энтальпий (на всей поверхности аппарата площадью F)

$$Q = G_1 (i_1' - i_1'') = G_2 (i_2'' - i_2'). \tag{14.3}$$

Индексом 1 обозначена более нагретая (теплая) среда, индексом 2 — менее нагретая (холодная); одним штрихом обозначены величины у входа в аппарат, двумя — у выхода из него.

Для однофазных сред, изменение энтальпии которых $di = c_p dt$, уравнения (14.2) и (14.3) можно представить в виде:

$$dQ = -G_1 c_{p1} dt_1 = G_2 c_{p2} dt_2; \tag{14.4}$$

$$Q = G_1 \bar{c}_{p1} (t_1' - t_1'') = G_2 \bar{c}_{p2} (t_2'' - t_2'), \tag{14.5}$$

где c_p и $\bar{c}_p$ — истинная и средняя массовые теплоемкости среды, Дж/(кг·К).

Произведение Gc_p (Вт/К) является полной теплоемкостью массового расхода. Эту величину называют также водяным эквивалентом и обозначают W.

Для горячей и холодной сред получаем: $W_1 = G_1 c_{p1}$ и $\bar{W}_1 = G_1 \bar{c}_p$; $W_2 = G_2 c_{p2}$ и $\bar{W}_2 = G_2 \bar{c}_{p2}$.

С учетом этого уравнения (14.4) и (14.5) можно записать в виде:

$$dQ = -W_1 dt_1 = W_2 dt_2; \tag{14.6}$$

$$Q = \bar{W}_1 (t_1' - t_2'') = \bar{W}_2 (t_2'' - t_2'). \tag{14.7}$$

В случае, когда изменение температуры рабочей среды в аппарате относительно невелико, изменением ее теплоемкости можно пренебречь и тогда $\bar{c}_p = c_p$; $\bar{W}_1 = W_1$; $\bar{W}_2 = W_2$. Именно в таких условиях работают аппараты холодильных машин.

Из выражения (14.7) следует, что изменения температур однофазных жидкостей обратно пропорциональны их водяным эквивалентам:

$$\frac{\delta t_1}{\delta t_2} = \frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'} = \frac{W_2}{W_1}. \tag{14.8}$$

Соотношение (14.8) справедливо как для всей поверхности теплообмена, так и для бесконечно малых участков ее, т. е. $dt_1 = dt_2 = W_2/W_1$. В случае изменения агрегатного состояния среды ее водяной эквивалент равен $W = \infty$ ($\delta t = 0$), а уравнение теплового баланса принимает вид: для испарителя $Q = W_1(t_1' - t_1'') = G_2 r_2$; для конденсатора $Q=G_1r_1=W_2(t_2''-t_2')$. При этом имеется в виду, что в испарителе происходит только кипение, а в конденсаторе — только конденсация рабочей среды.

Уравнение теплопередачи. Если считать, что температура сред t_1 и t_2, а также коэффициент теплопередачи k постоянны по поверхности площадью F, то процесс теплопередачи в аппарате можно описать соотношением $Q=kF(t_1-t_2)$.

Так как в общем случае температуры сред при перемещении их в аппарате изменяются, то изменяется и разность температур, или, как ее называют, температурный напор между средами. Следовательно, в уравнение теплопередачи аппарата необходимо вводить средний температурный напор $\Delta t_{\text{ср}}$. В ряде случаев приходится учитывать и изменение коэффициента теплопередачи по поверхности аппарата. Таким образом, в общем случае уравнение теплопередачи должно быть записано для элемента поверхности в виде

$$dQ=k\Delta t\,dF. \tag{14.9}$$

Здесь Δt и k — локальные температурный напор и коэффициент теплопередачи на данном участке поверхности.

Общий тепловой поток, перешедший от горячей среды к холодной на всей поверхности, определится выражением

$$Q=\int_0^F k\,\Delta t\,dF.$$

Для решения последнего уравнения необходимо знать закон изменения k и Δt по поверхности. Во многих случаях с большой степенью точности можно считать $k=\text{const}$, тогда

$$Q=k\int_0^F \Delta t\,dF. \tag{14.10}$$

Разделив и умножив последнее выражение на F, получим

$$Q=kF\frac{1}{F}\int_0^F \Delta t\,dF=kF\,\Delta t_{\text{ср}}. \tag{14.11}$$

Здесь $\Delta t_{\text{ср}}$— средний по поверхности температурный напор между рабочими жидкостями, определяемый соотношением

$$\Delta t_{\text{ср}}=\frac{1}{F}\int_0^F \Delta t\,dF. \tag{14.12}$$

Выражением (14.11) описывается процесс теплопередачи во всем аппарате. Из него обычно определяют потребную площадь поверхности теплообмена F.

Величину Q в уравнениях теплового баланса и теплопередачи называют *производительностью*, или *тепловой агрузкой* аппарата.

14.3. СРЕДНИЙ ТЕМПЕРАТУРНЫЙ НАПОР

Характер изменения температур рабочих сред по поверхности аппарата зависит от схемы их движения и водяных эквивалентов. Наиболее простыми схемами движения являются: прямоток, противоток и перекрестный ток (рис. 14.3, *а*, *б*, *в*). При прямотоке горячая и холодная среды движутся вдоль поверхности теплообмена в одном направлении, при противотоке — в противоположных направлениях, при перекрестном токе — в перекрещивающихся направлениях. Существуют аппараты и с более сложными схемами движения: смешанной, многократноперекрестной (рис. 14.3, *г*, *д*) и др.

На рис. 14.4 показаны характерные кривые изменения температур жидкостей в аппарате при различных значениях водяных эквивалентов в случае прямотока и противотока. Для жидкости с меньшим водяным эквивалентом изменение температур δt должно быть бо́льшим [см. формулу (14.8)].

В случае $W=\infty$, т. е. постоянства температуры одной из сред (рис. 14.4, *а*, *б*), направление движения не оказывает влияния на

Рис. 14.3. Схемы движения рабочих сред в аппаратах:
а — прямоток; *б* — противоток; *в* — перекрестный ток; *г* — смешанное движение; *д* — многократноперекрестный ток

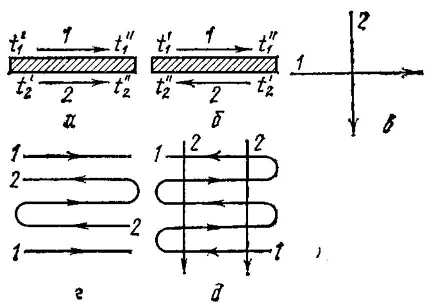
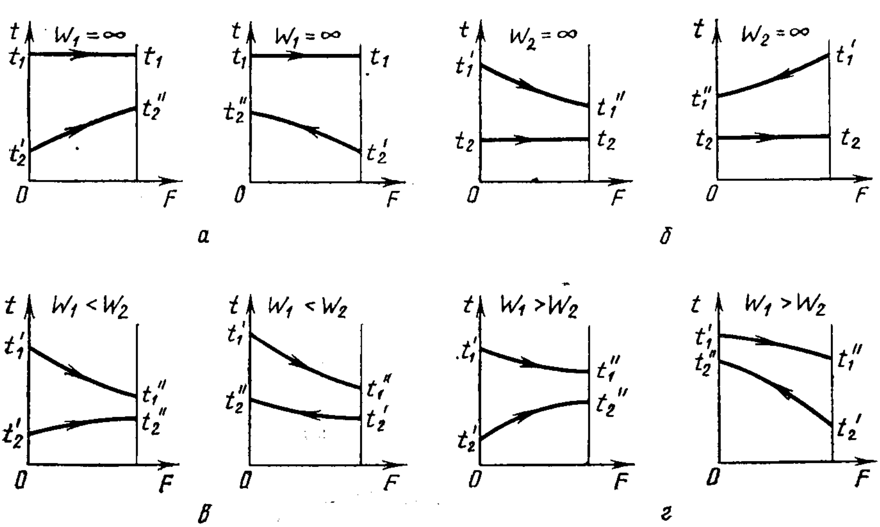


Рис. 14.4. Распределение температур жидкостей по поверхности аппарата при прямотоке и противотоке при различных W_1/W_2



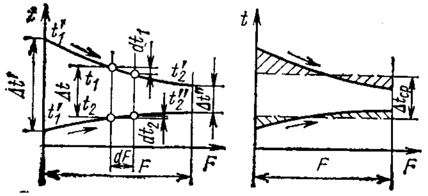


Рис. 14.5. К выводу формулы среднего температурного напора

средний температурный напор. В двух других случаях, т. е. при изменении температур сред (рис. 14.4, *в*, *г*), $\Delta t_{ср}$ зависит от схемы движения. При прямотоке конечная температура холодной среды (t_2'') не может быть выше конечной температуры горячей (t_1''); при противотоке такой случай (т. е. $t_2'' > t_1''$) возможен.

Очевидно также, что распределение температурного напора по поверхности аппарата более равномерно при противотоке в сравнении с прямотоком. Если же начальные и конечные температуры жидкостей при прямотоке и противотоке одинаковы, то, как показывает анализ полученной далее формулы (14.23), $\Delta t_{ср}$ в первом случае меньше, чем во втором. Вследствие этих причин везде, где нет каких-либо особых условий работы аппарата, предпочтительнее применять противоток.

Рассмотрим теперь методы определения среднего температурного напора $\Delta t_{ср}$. Если воспользоваться уравнениями (14.6) и (14.9) и предположить постоянство c_{p1}, c_{p2} и k, то можно аналитически получить формулу для определения $\Delta t_{ср}$.

Пусть жидкости движутся в аппарате прямотоком. Рассмотрим элемент поверхности площадью dF (рис. 14.5), для которого температурный напор между горячей и холодной жидкостями $\Delta t = t_1 - t_2$, изменение температуры горячей жидкости равно dt_1, холодной — dt_2. Для элемента dF уравнения теплового баланса и теплопередачи можно записать так:

$$dQ = -W_1\,dt_1 = W_2\,dt_2; \tag{14.13}$$

$$dQ = k\,\Delta t\,dF. \tag{14.14}$$

Из первого уравнения находим:

$$dt_1 = -dQ/W_1; \tag{14.15}$$

$$dt_2 = dQ/W_2. \tag{14.16}$$

Определим изменение температурного напора на элементе dF:

$$\Delta t = t_1 - t_2;\ d(\Delta t) = dt_1 - dt_2. \tag{14.17}$$

Поставим в выражение (14.17) значения dt_1 и dt_2 из (14.15) и (14.16):

$$d(\Delta t) = -dQ\,(1/W_1 + 1/W_2),\ \text{или}$$

$$d(\Delta t) = m\,dQ, \tag{14.18}$$

где m — некоторая величина, постоянная по поверхности площадью F и равная $m = -(1/W_1 + 1/W_2)$.

Интегрируем уравнение (14.18), учитывая, что Δt изменяется от $\Delta t'$ до $\Delta t''$:

$$\Delta t'' - \Delta t' = mQ;\ Q = (\Delta t'' - \Delta t')/m. \tag{14.19}$$

Для того чтобы исключить m из этого выражения, используем уравнение (14.14), подставив в него dQ из (14.18):

$$dQ = d(\Delta t)/m; \quad d(\Delta t)/m = k\Delta t\, dF. \tag{14.20}$$

Разделяем переменные и интегрируем уравнение (14.20), считая k=const:

$$\int\limits_{\Delta t'}^{\Delta t''} d(\Delta t)/\Delta t = km\int\limits_{0}^{F} dF; \quad \ln(\Delta t''/\Delta t') = mkF. \tag{14.21}$$

Совместное решение (14.19) и (14.21) дает

$$Q = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln(\Delta t''/\Delta t')} kF. \tag{14.22}$$

Сравнивая уравнения (14.11) и (14.22), видим, что

$$\Delta t_{\text{ср}} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln(\Delta t''/\Delta t')} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln(\Delta t'/\Delta t'')}. \tag{14.23}$$

Величина $\Delta t_{\text{ср}}$, определяемая из выражения (14.23), называется средним логарифмическим температурным напором. Это средняя интегральная разность температур жидкостей, найденная при условии постоянства k, c_{p1} и c_{p2}. Общее аналитическое выражение $\Delta t_{\text{ср}}$ соответствует уравнению (14.12) при $\Delta t = \Delta t' e^{mkF}$. Графически она представляет собой высоту прямоугольника, площадь которого равна площади, ограниченной кривыми $t_1 = f(F)$ и $t_2 = f(F)$, а основание равно F (на рис. 14.5 одинаково заштрихованные площади должны быть равны между собой). В приведенных выше уравнениях $\Delta t'$ и $\Delta t''$ — разности температур между двумя теплоносителями соответственно на входе в аппарат и выходе из него.

При прямотоке $\Delta t' = t_1' - t_2'$; $\Delta t'' = t_1'' - t_2''$; при противотоке $\Delta t' = t_1' - t_2''$; $\Delta t'' = t_1'' - t_2'$.

Для того чтобы не иметь дело с отрицательным значением числителя, учитывая структуру формулы (14.23), ее можно записать в виде

$$\Delta t_{\text{ср}} = \frac{\Delta t_{\text{б}} - \Delta t_{\text{м}}}{\ln(\Delta t_{\text{б}}/\Delta t_{\text{м}})}, \tag{14.24}$$

где $\Delta t_{\text{б}}$ — больший из крайних напор температур; $\Delta t_{\text{м}}$ — меньший. (Под крайними понимают напоры на входе в аппарат и на выходе из него.)

Если температуры рабочих сред изменяются по поверхности незначительно, кривые на рис. 14.4 и 14.5 можно заменить прямыми, а средний температурный напор определить как среднее арифметическое из крайних напоров:

$$\Delta t_{\text{ср}} = 0{,}5(\Delta t_{\text{б}} + \Delta t_{\text{м}}) = 0{,}5\Delta t_{\text{б}}(1 + \Delta t_{\text{м}}/\Delta t_{\text{б}}).$$

Средний арифметический температурный напор всегда больше среднего логарифмического. При $\Delta t_{\text{м}}/\Delta t_{\text{б}} > 0{,}6$ средний температурный напор можно рассчитывать как средний арифметический; его отличие от среднего логарифмического не превышает 3%. При сложной схеме движения средний температурный напор $\Delta t_{\text{ср}}$, вычисленный для противотока по формуле (14.24) умножается на поправочный коэффициент $\varepsilon_{\Delta t}$, значения которого для различных схем движения приведены в виде графиков в учебной и справочной литературе по теплообмену [15, 26].

В конденсаторах, где сухой насыщенный пар превращается в насыщенную жидкость, температура горячей среды постоянна; обозначим ее $t_{\text{к}}$. В этом случае формула (14.24) приводится к виду

$$\Delta t_{\text{ср}} = \frac{t_2'' - t_2'}{\ln \dfrac{t_{\text{к}} - t_2'}{t_{\text{к}} - t_2''}}. \qquad (14.25)$$

В испарителе, где насыщенная жидкость превращается в сухой пар, температура холодной среды постоянна. Обозначив ее t_0, из уравнения (14.24), получаем

$$\Delta t_{\text{ср}} = \frac{t_1' - t_1''}{\ln \dfrac{t_1' - t_0}{t_1'' - t_0}}. \qquad (14.26)$$

В теплообменных аппаратах криогенных установок изменение температур, а значит, и теплоемкостей каждой из сред может быть значительным. Аналитическое решение уравнения (14.12) при переменных $c_{\text{р}}$ сложно; в этом случае средний интегральный температурный напор определяется методом графического интегрирования (см., например, [7]).

14.4. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Коэффициент теплопередачи от горячей среды к холодной зависит от коэффициентов теплоотдачи α_1 и α_2 и термического сопротивления стенки аппарата (трубы, пластины). Если условия обтекания поверхности каждой из сред не изменяются, то значения α_1 и α_2 можно считать постоянными для всего аппарата. При этом влияние температуры жидкости на коэффициент теплоотдачи учитывают, относя α_1 и α_2 соответственно к средней температуре $t_{1\text{ср}}$ и $t_{2\text{ср}}$. Если же условия обтекания различны: например, в верхней части аппарата имеет место продольное обтекание, а в нижней — поперечное, или необходимо учитывать влияние изменения температур жидкостей на α, то поверхность аппарата делят на ряд участков с площадями F_1, F_2, F_3 и т. д., для каждого из которых можно считать $k=\text{const}$. Средний для всего аппарата коэффициент теплопередачи при незначительном изменении температурного напора по поверхности находят из уравнения

$$k_{\text{ср}} = \frac{k_1F_1 + k_2F_2 + k_3F_3 + \ldots}{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots}.$$

Если температурные напоры $\Delta \bar{t}_{F_1}$, $\Delta \bar{t}_{F_2}$, ..., на участках поверхности F_1, F_2 ..., существенно различны, то

$$k_{\text{ср}} = \frac{k_1 F_1 \Delta \bar{t}_{F_1} + k_2 F_2 \Delta \bar{t}_{F_2} + k_3 F_3 \Delta \bar{t}_{F_3} + \cdots}{\Delta t_{\text{ср}} (F_1 + F_2 + F_3 + \cdots)}.$$

В пластинчатых аппаратах коэффициент теплопередачи находят по формуле для плоской стенки. В аппаратах с гладкотрубными и оребренными поверхностями численное значение k будет зависеть от того, к какой поверхности его относят.

Формулы для k ребристых труб приведены в главе 13. Для гладких труб:

$$k_{\text{вн}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{\text{вн}}} + \frac{\delta_{\text{тр}}}{\lambda_{\text{тр}}} \frac{d_{\text{вн}}}{d_{\text{ср}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{вн}}} \frac{d_{\text{вн}}}{d_{\text{нр}}}}; \tag{14.27}$$

$$k_{\text{нр}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{\text{вн}}} \frac{d_{\text{нр}}}{d_{\text{вн}}} + \frac{\delta_{\text{тр}}}{\lambda_{\text{тр}}} \frac{d_{\text{нр}}}{d_{\text{ср}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{нр}}}}, \tag{14.28}$$

где индексы вн, нр и ср обозначают внутреннюю, наружную и среднюю поверхность трубы.

В процессе эксплуатации на стенках аппарата могут откладываться загрязнения в виде ржавчины, водяного камня — на стороне жидкого хладоносителя, масла — на стороне холодильного агента. Кроме того, в воздухоохладителях может образовываться слой инея. В этих случаях при определении коэффициента теплопередачи необходимо вводить в знаменатель соответствующих формул для k термические сопротивления загрязнений и инея. Численные значения последних приведены в [2, 13, 36, 37].

14.5. ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ РЕКУПЕРАТИВНЫХ АППАРАТОВ

Задачи и порядок теплового расчета. Задача теплового расчета может быть двоякой и предполагает: 1) определение площади поверхности теплообмена при проектировании нового аппарата [в этом случае заданы производительность (тепловая нагрузка) аппарата и температуры рабочих сред]; 2) определение производительности и конечных температур сред для готового аппарата с известной площадью поверхности. Первый расчет называется конструктивным (проектным), второй — поверочным.

Рассмотрим проектный расчет теплообменного аппарата. Цель расчета — определение площади поверхности аппарата. Для этого должны быть известны: предполагаемый тип аппарата, вид поверхности, некоторые геометрические размеры (например, диаметр труб, тип и размеры оребрения и т. п.), тепловая производительность аппарата, рабочие среды, условия обтекания, скорости движения.

Ниже приводится порядок расчета.

1. Определяют средний логарифмический температурный напор.

2. С помощью соответствующих критериальных уравнений или размерных формул находят коэффициенты теплоотдачи первой и

второй сред. Средняя температура среды с большим водяным эквивалентом вычисляется как средняя арифметическая: $t_{ср.б}=0,5(t'_б+t''_б)$, с меньшим водяным эквивалентом — как $t_{ср.м}=t_{ср.б}\pm\Delta t_{ср}$. По температурам $t_{ср.б}$ и $t_{ср.м}$ находят теплофизические свойства, входящие в формулы для определения α.

3. Определяют коэффициент теплопередачи по формулам (13.40), (13.43) либо (14.27), (14.28).

4. Находят площадь поверхности аппарата по формуле

$$F=Q/k\Delta t_{ср}. \qquad (14.29)$$

В зависимости от того, к какой поверхности относится вычисленное значение коэффициента теплопередачи, получают площадь одной из поверхностей: $F_{вн}$, $F_{нр}$, $F_о$ или $F_{ор}$.

Описанный выше порядок расчета применяют тогда, когда коэффициенты α_1 и α_2 не зависят от температуры поверхности теплообмена. Однако в некоторых процессах такая зависимость существует (при конденсации, кипении, свободном движении и ламинарном режиме вынужденного движения).

В этих случаях температуру стенки и коэффициент теплоотдачи, который от нее зависит, а также коэффициент теплопередачи можно определить методом последовательных приближений. Ориентировочно оценив относительные значения частных термических сопротивлений, задаются примерным значением средней по поверхности температурой стенки $t_с$, вычисляют α и k и затем сопоставляют принятое значение $t_с$ с тем, которое соответствует стационарному режиму работы аппарата. При таком режиме плотность теплового потока от стенки аппарата к омывающей ее среде равна плотности теплового потока от горячей среды к холодной. Математически условие стационарности можно записать в виде:

$$\alpha(t_с-t)=\pm k\Delta t_{ср};$$
$$t_с=t\pm k\Delta t_{ср}/\alpha,$$

где t — средняя по поверхности температура среды.

Расчет считается законченным, когда $t_с$, принятая при определении α и найденная из последнего уравнения, совпадают. Допустимая погрешность $\pm(5\div7)\%$.

При $\alpha=f(t_с-t)$ тепловой расчет аппарата наиболее просто можно выполнить графоаналитическим методом.

Графоаналитический метод теплового расчета. Сущность этого метода изложена ниже. Из уравнения (14.29) следует, что площадь поверхности аппарата $F=Q/q$, где $q=k\Delta t_{ср}$ — средняя плотность теплового потока от горячей среды к холодной. Для определения q находят зависимости средних плотностей теплового потока от горячей среды к стенке (q_1) и от стенки к холодной среде (q_2) от соответствующих средних значений частных температурных напоров $\Delta t_1=t_1-t_с$ и $\Delta t_2=t_с-t_2$ (где t_1, t_2, $t_с$ — средние температуры сред и стенки). В координатах $q-\Delta t$ строят графики этих зависимостей, учитывая, что в сумме Δt_1 и Δt_2 должны равняться $\Delta t_{ср}$. При этом q_1 и q_2

должны быть отнесены к одной и той же поверхности. Точка пересечения графиков $q_1=f(\Delta t_1)$ и $q_2=f(\Delta t_2)$ соответствует стационарности процесса теплопередачи в аппарате и дает искомую величину q. Коэффициент теплопередачи можно найти, разделив q на $\Delta t_{ср}$.

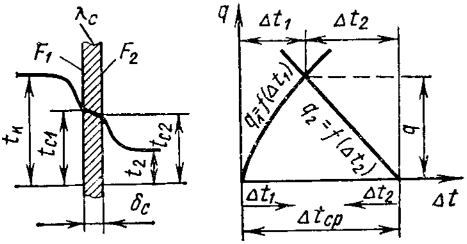


Рис. 14.6. К графоаналитическому расчету конденсатора

Поясним графоаналитический метод на примере расчета конденсатора. Пусть температура конденсации пара равна $t_к=t_1'=t_1''$, коэффициент теплоотдачи α_1 температуры охлаждающей среды t_2' и t_2'', коэффициент теплоотдачи α_2, температуры на поверхности стенки t_{c1} и t_{c2} (рис. 14.6). Определяем $\Delta t_{ср}$.

Записываем выражение для плотности теплового потока от пара к поверхности F_1

$$q_1=\alpha_1(t_к-t_{c1})=\alpha_1\Delta t_1. \tag{14.30}$$

Для случая конденсации пара α_1 вычисляется по уравнению (8.24), которое можно представить в следующей форме:

$$\alpha_1=C\sqrt[4]{\frac{gr\rho^2\lambda^3}{\mu l_0}}\,\Delta t_1^{-0,25}=B\Delta t_1^{-0,25},$$

где $B=C\sqrt[4]{\frac{gr\rho^2\lambda^3}{\mu l_0}}=C\sqrt[4]{\frac{gr\rho\lambda^3}{\nu l_0}}$.

Подставляя выражение для α при конденсации в (14.30) и относя плотность теплового потока от пара к стенке к 1 м² площади поверхности F_2, получим

$$q_1=B(F_1/F_2)\Delta t_1^{0,75}. \tag{14.31}$$

Находим среднюю температуру охлаждающей жидкости $t_2=t_к-\Delta t_{ср}$. Определяем коэффициент теплоотдачи охлаждающей среды и записываем уравнение плотности теплового потока от поверхности стенки, соприкасающейся с паром, к охлаждающей среде

$$q_2=\frac{t_{c1}-t_2}{1/\alpha_2+(\delta_c/\lambda_c)(F_2/F_c)}=\frac{\Delta t_2}{1/\alpha_2+(\delta_c/\lambda_c)(F_2/F_c)}. \tag{14.32}$$

Здесь F_2 — площадь поверхности теплообмена со стороны охлаждающей среды; F_c — средняя площадь поверхности стенки аппарата.

Величина q_2, как видно из структуры уравнения, отнесена к 1 м² площади поверхности F_2.

На оси абсцисс откладываем в масштабе $\Delta t_{ср}$ и из противоположных концов полученного отрезка строим графики уравнений (14.31) и (14.32), учитывая что $(\Delta t_1+\Delta t_2)=\Delta t_{ср}$. Так как уравнение (14.32) изображается прямой, то для ее построения достаточно двух точек. При построении кривой, описываемой уравнением (14.31), задаемся несколькими значениями Δt_1. В обоих случаях учитываем, что Δt_1 и Δt_2 изменяются в пределах от 0 до $\Delta t_{ср}$. Из графика находим q, которое в соответствии с записью уравнений (14.31) и (14.32) относится к поверхности F_2.

Метод последовательных приближений с наименьшими затратами времени может быть реализован на ЭВМ.

14.6. РАСЧЕТ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ АППАРАТА И КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУР РАБОЧИХ СРЕД

Иногда требуется провести поверочный расчет работающего или спроектированного аппарата. Цель такого расчета — определение его производительности и температур t_1'' и t_2''. В этом случае должны быть известны: площадь поверхности аппарата F, водяные эквиваленты W_1 и W_2 и начальные температуры сред t_1' и t_2'. Коэффициент теплопередачи вычисляют обычным способом. Теплофизические характеристики сред выбирают по температурам t_1' и t_2' либо по принятым приближенно средним температурам t_1 и t_2. После определения t_1'' и t_2'' значения средних температур, коэффициентов теплоотдачи и коэффициента теплопередачи могут быть уточнены.

Значения конечных температур жидкостей определяют из уравнения теплового баланса (14.7):

$$t_1''=t_1'-Q/W_1;\quad t_2''=t_2'+Q/W_2. \tag{14.33}$$

Если принять линейным закон изменения температур по поверхности, что достаточно точно отражает действительность при $\Delta t_б/\Delta t_м<2$, то

$$Q=kF\left(\frac{t_1'+t_1''}{2}-\frac{t_2'+t_2''}{2}\right).$$

Подставляя t_1' и t_2' из первых двух выражений в последнее, получаем

$$Q=kF\left(t_1'-\frac{Q}{2W_1}-t_2'-\frac{Q}{2W_2}\right).$$

Из найденного соотношения определяем Q:

$$Q=\frac{t_1'-t_2'}{1/kF+1/2W_1+1/2W_2}. \tag{14.34}$$

Зная Q, по формулам (14.33) вычисляем конечные температуры сред. При существенном изменении температур жидкостей в аппарате ($\Delta t_б/\Delta t_м\geqslant 2$) и постоянных c_{p1}, c_{p2} и k температурный напор изменяется вдоль поверхности аппарата по экспоненциальному закону (см. раздел 14.3, уравнение 14.21). В этом случае $\Delta t''=\Delta t' e^{mkF}$, $m=-(1/W_1+1/W_2)$, а изменение температур сред δt_1 и δt_2 зависит от безразмерных комплексов kF/W_1 и W_1/W_2, причем различно для прямо- и противотока. Вывод таких зависимостей приведен, например, в [15]. Результаты решения этой задачи можно представить в следующем удобном для расчетов виде:

$$t_1''=t_1'-\delta t_1;\quad t_2''=t_2'-\delta t_2;\quad Q=W_1\delta t_1=W_2\delta t_2.$$

При прямотоке:

$$\delta t_1=(t_1'-t_2')\,П;\quad \delta t_2=(t_1'-t_2')\frac{W_1}{W_2}\,П;$$

$$Q=W_1(t_1'-t_2')\,П.$$

Здесь

$$П=\frac{\left[1-e^{-(1+W_1/W_2)(kF/W_1)}\right]}{(1+W_1/W_2)}.$$

При противотоке:

$$\delta t_1=(t_1'-t_2')\,Z;\quad \delta t_2=(t_1'-t_2')\frac{W_1}{W_2}\,Z;$$

$$Q=W_1(t_1'-t_2')\frac{W_1}{W_2}\,Z.$$

Здесь

$$Z=\left[1-e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}\right]/\left[1-(W_1/W_2)\,e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}\right].$$

Графики величин $П$ и Z при разных W_1/W_2 и kF/W_1 представлены в [15, 27].

В условиях, когда температура одной из сред остается постоянной по всей поверхности (передача теплоты в конденсаторах, испарителях, парогенераторах и т. п.), водяной эквивалент этой среды $W=\infty$, прямоточное и противоточное направления движения становятся равноценными. Уравнения для расчета конечной температуры второй среды могут быть получены из выражения

$$\Delta t''=\Delta t' e^{mkF}=\Delta t' e^{-(1/W_1+1/W_2)kF}. \tag{14.35}$$

Для конденсатора:

$$W_1=\infty;\quad t_1'=t_1''=t_к;\quad \Delta t''=t_к-t_2'';\quad \Delta t'=t_к-t_2''.$$

Из уравнения (14.35) получаем конечную температуру охлаждаемой среды

$$t_2''=t_к-(t_к-t_2')\,e^{-kF/W_2}. \tag{14.36}$$

Производительность конденсатора

$$Q=W_2(t_2''-t_2')=W_2(t_к-t_2')(1-e^{-kF/W_2}). \tag{14.37}$$

Для испарителя:

$$W_2=\infty;\quad t_2'=t_2''=t_0;\quad \Delta t''=t_2''-t_0;\quad \Delta t'=t_2'-t_0.$$

Из уравнения (14.35) конечная температура охлаждаемой среды

$$t_1''=t_0+(t_1'-t_0)\,e^{-kF/W_1}. \tag{14.38}$$

Производительность испарителя

$$Q=W_1(t_1''-t_1')=W_1(t_1'-t_0)(1-e^{-kF/W_1}). \tag{14.39}$$

Найденные таким образом значения производительности аппарата и конечных температур сред позволяют решить вопрос о целесообразности использования этого аппарата в тех или иных заданных условиях его работы.

14.7. РЕГЕНЕРАТИВНЫЕ ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

Принцип действия и устройство. Регенеративные теплообменные аппараты (регенераторы) широко применяют в низкотемпературной технике. Основные области их использования: крупные воздухоразделительные установки и газовые холодильные машины [7, 38]. Устройство регенераторов в них различно. Схема регенераторов воздухоразделительной установки представлена на рис. 14.7, *а*. Для непрерывной работы установки нужно иметь два аппарата. Каждый из них представляет собой кожух, обычно цилиндрической формы, внутри которого находится проницаемая для газов аккумулирующая теплоту насадка. Рабочий процесс в регенераторах происходит следующим образом. Горячая среда (прямой поток) проходит через регенератор *I* сверху вниз, где охлаждается в результате отвода теплоты к насадке, при этом последняя нагревается. Время взаимодействия горячей среды с насадкой называется периодом нагрева τ_1.

В это же время холодная среда (обратный поток) движется в регенераторе *II* снизу вверх и нагревается в результате отвода теплоты от насадки и охлаждения последней (период охлаждения τ_2). Затем с помощью клапанов регенераторы переключаются, и горячая среда проходит через регенератор *II*, а холодная — через регенератор *I*.

Таким образом чередуется прохождение сред через каждый аппарат и достигается непрерывный процесс охлаждения горячей и нагревания холодной среды в установке. Весь период работы аппарата, в течение которого через него проходит и горячая, и холодная среда, называют циклом. Длительность цикла $\tau_ц=\tau_1+\tau_2$.

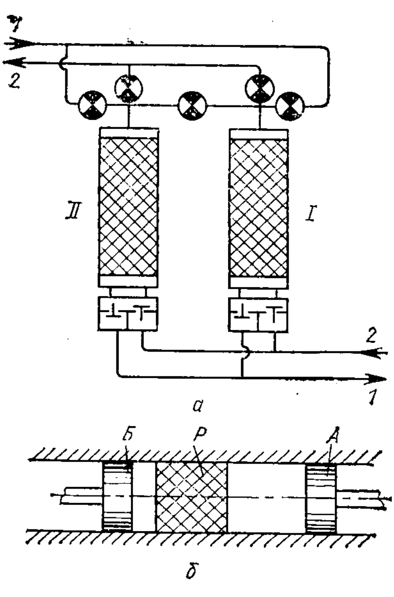
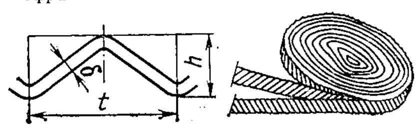


Рис. 14.7. Схемы регенераторов:

а — регенераторы воздухоразделительных установок: *1* — горячая среда; *2* — холодная среда; *б* — регенератор газовой холодильной машины: *А*, *Б* — поршни; *Р* — регенератор

Рис. 14.8. Насадка из гофрированной алюминиевой ленты:

δ — толщина ленты; t — шаг гофра; h — высота гофра



В воздухоразделительных установках горячей средой является воздух (прямой поток), холодной — азот или кислород (обратный поток).

В газовых холодильных машинах регенератор (рис. 14.7, *б*) обычно размещается внутри рабочего объема цилиндра машины, где попеременно омывается одним и тем же газом, давление и скорость которого изменяются в течение каждого полуцикла. Направление потока в регенераторе изменяется в результате возвратно-поступательного движения поршней.

Преимущества регенераторов в сравнении с рекуперативными теплообменными аппаратами — высокая компактность, а также возможность совмещения в одном аппарате процессов теплообмена и очистки рабочей среды от примесей. К недостаткам можно отнести сравнительно более сложные устройство и условия эксплуатации.

Основным элементом, определяющим в большой степени эффективность регенераторов, является насадка.

В регенераторах воздухоразделительных установок в основном применяют два типа насадки: дисковые из алюминиевой гофрированной ленты толщиной $\delta=0{,}45$ мм (рис. 14.8) и насыпные из базальта или кварцита в гранулах размером 4—10 мм.

В регенераторах газовых холодильных машин для обеспечения высокой компактности, необходимость которой диктуется их местоположением, насадки в виде войлокообразной массы или сеток изготовляют из тонкой медной или бронзовой проволоки ($d=0{,}02\div\div0{,}04$ мм). Геометрические характеристики насадок приведены в [7,38].

Температурный режим регенераторов. В отличие от рекуперативных теплообменных аппаратов в регенераторах температуры сред и насадки изменяются не только по длине (высоте) аппарата, но и с течением времени, поэтому точный тепловой расчет регенеративных аппаратов сложен.

После большого числа переключений режим работы регенератора становится установившимся, т. е. наступает квазистационарный периодический режим, при котором в любом сечении аппарата температуры сред и насадки изменяются одинаково в течение каждого цикла. Иначе говоря, в установившемся режиме в каждом сечении регенератора средние температуры рабочих сред и насадки не изменяются с течением времени. В этом режиме для приближенного расчета регенератора применимы те же уравнения теплового баланса, что и для рекуперативных теплообменных аппаратов, только их надо относить к осредненным во времени температурам сред и насадки.

При определении средних температур приходится считаться с влиянием на распределение температур так называемых концевых эффектов. Поясним, что это такое. По характеру изменения температуры рабочих сред и насадки всю длину регенератора можно разбить на четыре зоны. Изменение температур сред и насадки со временем в течение цикла для четырех зон аппарата показано на рис. 14.9 (на нем время охлаждения и время нагревания приняты одинаковыми и равными τ). На теплом конце регенератора (рис. 14.9, *а*) температура горячей среды в период нагрева насадки ($\tau_1=\tau$) постоянна, температура холодной в течение периода охлаждения насадки ($\tau_2=\tau$) понижается, температура насадки за время цикла ($\tau_ц=2\tau$) изменяется по замкнутой кривой, называемой температурной петлей, или петлей гистерезиса. Наличие температурной петли обусловлено сложным характером нестационарного теплообмена между средой и насадкой.

На холодном конце аппарата температура холодной среды в течение периода охлаждения насадки постоянна, температура горячей среды в период нагрева насадки повышается, а температура насадки, следуя за температурами сред, также описывает за время цикла замкнутую кривую (рис. 14.9, *б*). На некотором расстоянии от концов аппарата характер изменения температур соответствует рис. 14.9, *в*, причем чем дальше от концов, тем меньше петля гистерезиса. При равенстве водяных эквивалентов сред, когда длина регенератора и масса насадки достаточно велики, в средней части аппарата условия теплообмена со временем не изменяются, петля гистерезиса отсутствует, температуры сред и насадки изменяются по линейному закону (рис. 14.9, *г*).

В зонах гистерезиса средняя температура насадки за весь цикл ($\bar{t}_н$) ниже, чем за период нагрева ($\bar{t}_{н1}$), и выше, чем за период охлаждения ($\bar{t}_{н2}$) (см. рис. 14.9, *в*). Разность между $\bar{t}_{н1}$ и $\bar{t}_{н2}$ называется высотой петли гистерезиса h.

Распределение средних температур сред и насадки по длине регенератора при бесконечно малой (пунктир) и конечной (сплошные линии) продолжительности цикла показано на рис. 14.10. В первом случае ($\tau\to0$; $h\to0$) средний температурный напор между средой и насадкой равен $\Delta t_{ср}/2$, длина регенератора L_0. Во втором случае, при конечной продолжительности цикла, средний температурный напор между средой и насадкой равен $(\Delta t_{ср}—h_{ср})/2$, длина регенератора L (здесь $\Delta t_{ср}$ — средний по времени и по поверхности теплообмена температурный напор между средами). Очевидно, что чем меньше петля гистерезиса, тем ближе температурный режим регенератора к режиму рекуперативного аппарата.

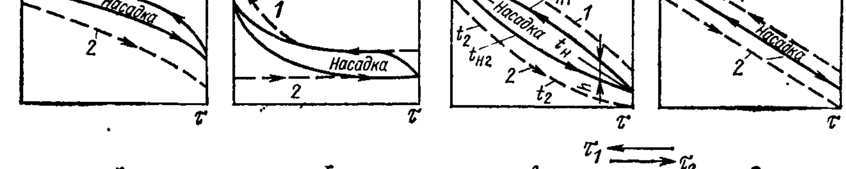
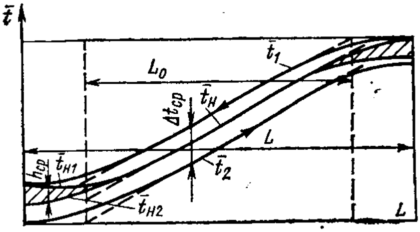


Рис. 14.9. Характер изменения температур газовых потоков и насадки в течение цикла:

а — на теплом конце регенератора; *б* — на холодном конце; *в* — на некотором расстоянии от теплого и холодного концов; *г* — в середине регенератора; *1* — горячий поток; *2* — холодный поток



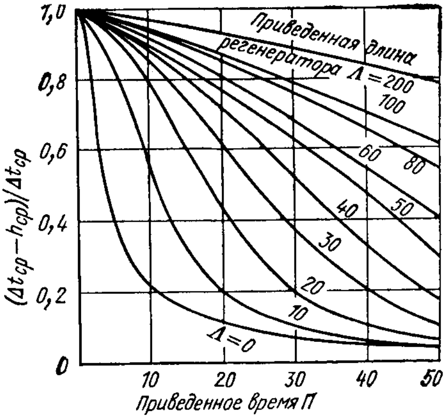


Рис. 14.10. Характер изменения средних температур газовых потоков и насадки по длине идеального (— — —) и реального (———) регенераторов:

$\bar{t}_1$ — средняя за время нагрева температура горячего потока; $\bar{t}_2$ — средняя за время охлаждения температура холодного потока; $\bar{t}_{н1}$ и $\bar{t}_{н2}$ — средние температуры насадки за время нагрева и охлаждения; $h_{ср}$ — высота петли гистерезиса

Рис. 14.11. Зависимость величины гистерезиса от П до Λ

Теплообмен в регенераторах. Рассмотрим процесс теплообмена в регенераторе на участке поверхности площадью dF. Запишем выражение для количества теплоты, которая переходит от горячей среды (индекс 1) к насадке (индекс н) и от насадки к холодной среде (индекс 2) при $\tau_1=\tau_2=\tau$:

$$dQ_\tau=\bar{\alpha}_1 dF\,(\bar{t}_1-\bar{t}_{н1})\,\tau;$$

$$dQ_\tau=\bar{\alpha}_2 dF\,(\bar{t}_{н2}-\bar{t}_2)\,\tau.$$

Здесь $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, $\bar{t}_{н1}$, $\bar{t}_{н2}$ — средние температуры на участке dF за время τ; $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ — средние по времени коэффициенты теплоотдачи.

Преобразуя эти выражения обычным методом (см. главу 2), получаем уравнение теплопередачи в регенераторе для участка поверхности площадью dF

$$dQ_\tau=kdF\,[(\bar{t}_1-\bar{t}_2)-\bar{h}]\,\tau. \qquad (14.40)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} k&=\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}};\\ \bar{h}&=t_{н1}-t_{н2}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.41)$$

Для всей поверхности регенератора

$$Q_\tau=k_{ср}F\,(\Delta t_{ср}-h_{ср})\,\tau. \qquad (14.42)$$

Отсюда

$$F=\frac{Q}{k_{ср}\,(\Delta t_{ср}-h_{ср})}. \qquad (14.43)$$

В уравнении (14.43) $Q=Q_\tau/\tau$ — средний по времени тепловой поток; $k_{ср}=(1/\alpha_{1ср}+1/\alpha_{2ср})^{-1}$ — средний по времени и поверхности коэффициент теплопередачи от горячей среды к холодной; $\alpha_{1ср}$ и $\alpha_{2ср}$ — средние по времени и поверхности коэффициенты теплоотдачи от горячей среды к насадке и от насадки к холодной среде; $\Delta t_{ср}$ — средний температурный напор между средами, определяемый приведенными выше способами с учетом усреднения по времени температур горячего и холодного потоков на границах аппарата.

Величина $h_{ср}$ представляет собой среднюю по времени и поверхности высоту петли гистерезиса для всей поверхности регенератора.

Величину $h_{ср}$ (для случая, когда теплоемкости газов и насадки не зависят от температуры) можно представить в виде функции двух безразмерных параметров: приведенной длины Λ и приведенного времени Π [40]:

$$\Lambda = \alpha_{ср}F/Gc_р; \quad \Pi = \alpha_{ср}F\tau/M_нc_н. \tag{14.44}$$

Здесь $\alpha_{ср}$— средний по поверхности и времни коэффициент теплоотдачи от среды к насадке; F — полная площадь поверхности насади регенератора; G и $c_р$ — массовые расход и теплоемкость среды; $M_н$, $c_н$ — масса и теплоемкость насадки регенератора; τ — продолжительность полуцикла ($\tau=0{,}5\tau_ц$).

Зависимость отношения $(\Delta t_{ср}—h_{ср})/\Delta t_{ср}$ от Π и Λ представлена на рис. 14.11 [40]. Использование приведенных соотношений для определения F предполагает применение метода последовательных приближений. Действительно, при расчете F из уравнения (14.44) необходимо предварительно найти разность $(\Delta t_{ср}—h_{ср})$, которая в свою очередь зависит, причем сложным образом, от F [см. уравнения (14.44) для Λ и Π и рис. 14.11].

Методы теплового расчета регенераторов. При расчете регенераторов часто используют коэффициенты теплоотдачи и теплопередачи, отнесенные к единице объема: $\alpha_V=\alpha s$; $k_V=\kappa s$, где s — площадь поверхности насадки в единице объема регенератора ($м^2/м^3$), т. е. $s=F/V$, где V — объем регенератора.

Отсюда $\alpha F=\alpha_V V$, а приведенные длина и время могут быть выражены соотношениями:

$$\Lambda = \alpha_{V_{ср}}V/Gc_р; \quad \Pi = \alpha_{V_{ср}}V\tau/M_нc_н. \tag{14.45}$$

Величина $k_{V_{ср}} = 1/(1/\alpha_{Vср_1} + 1/\alpha_{Vср_2})$. Объемный коэффициент теплоотдачи находят из выражения модифицированного критерия Нуссельта

$$\mathrm{Nu}_{V_{ср}} = \alpha_{V_{ср}}d_{эк}^2/\lambda,$$

в котором $d_{эк}$ — эквивалентный диаметр насадки; λ — теплопроводность среды.

В литературе, например в [7, 31, 38], приводятся уравнения подобия для определения Nu_V в насадках различного типа, а также геометрические характеристики насадок (s, $d_{эк}$ и др.).

Для насадок из гофрированной ленты с продольными прорезями средний за период τ коэффициент теплоотдачи α_V можно рассчитать из уравнения [31]

$$\mathrm{Nu}_V = 2{,}36\mathrm{Re}^{0{,}76}\left(\frac{b}{d_{эк}}\right)^{-m}\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{-0{,}392}\left(1+\frac{d_{эк}\cos\beta}{t}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{n_{пр}\cos\beta}\right)^{-0{,}187}\frac{t}{t_0},$$

где b — высота диска из гофрированной ленты; β — угол рифления; $t_0=3,14$ мм — шаг рифления, принятый за эталон; $\delta_0=0,44$ мм — толщина ленты, принятая за эталон; $m=0,759+7,05/b$; $n_{пр}$ — число продольных прерывистых прорезей в ленте по высоте диска.

Пределы изменения $Re=60 \div 700$.

Для насыпной насадки

$$Nu_V = 0,3Re^{0,8}\varepsilon_н^{0,75}.$$

Критерий Рейнольдса $Re=w_ф d_{эк}/\nu$ в обоих уравнениях рассчитывается по скорости фильтрации, определяемой как $w_ф = w\varepsilon_н$, где w — скорость потока, отнесенная к полному сечению насадки, $\varepsilon_н$ — удельный свободный объем (пористость), м³/м³.

Скорость фильтрации связана с диаметром аппарата зависимостью $D=1,13\sqrt{G/\rho w_ф \varepsilon_н}$. Эквивалентный диаметр $d_{эк}=4\varepsilon_н/S$

Для насадок из алюминиевой ленты

$\varepsilon_н=1-0,5\ S\delta$,

где

$$S = F/V = 0,83\frac{4(h-\delta)}{ht\sin\varphi}.$$

Здесь 0,83 — эмпирический коэффициент, учитывающий неплотность навивки ленты; h и t — высота и шаг гофра; φ — угол, определяемый соотношением $\mathrm{tg}\,\varphi = 2(h-\delta)/t_0$.

Для насыпных насадок $\varepsilon_н=\mathrm{const}=0,43$.

При использовании объемных коэффициентов теплоотдачи и теплопередачи величины Λ и Π можно вычислить из выражений (14.45), а производительность связана с объемом регенератора уравнением

$$Q = k_{V_{ср}} V(\Delta t_{ср} - h_{ср}).$$

Тепловой расчет регенераторов в большинстве случаев носит поверочный характер: задаются геометрическими размерами насадки и аппарата, а затем проверяют соответствие между заданной и полученной по расчету тепловой производительностью.

Кроме изложенной на практике применяют также методику теплового расчета регенераторов, основанную на введении понятий идеального и реального процессов теплообмена в регенераторе и термического КПД. Рассмотрим сущность этой методики. Максимальное количество теплоты ($Q_{ид}$), которое может быть передано в регенераторе в идеальном процессе, соответствует равенству температур холодного потока на выходе и теплового на входе аппарата ($t_2''=t_1'$):

$$Q_{ид} = G_2 c_{p2}(t_1' - t_2').$$

Количество теплоты, передаваемой в аппарате в реальном процессе,

$$Q = G_2 c_{p2}(t_2'' - t_2').$$

Отношение $Q/Q_{ид}=\eta_т$ называется термическим КПД регенератора, разность температур потоков в реальном процессе $(t_1' - t_2'') = \Delta t_{нед}$ называют недокуперацией.

Тепловую эффективность регенератора можно характеризовать величиной относительной недокуперации $\Delta t^*_{\text{нед}} = \Delta t_{\text{нед}}/(t'_1 - t'_2) = (t'_1 - t''_2)/(t'_1 - t'_2)$. При равенстве водяных эквивалентов потоков

$$\eta_{\text{г}} = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2};$$

$$\Delta t^*_{\text{нед}} = \frac{\Delta t_{\text{нед}}}{t'_1 - t'_2} = \frac{Q_{\text{ид}} - Q}{Q_{\text{ид}}} = 1 - \eta_{\text{г}}.$$

Величина $\Delta t^*_{\text{нед}}$ является функцией безразмерных комплексов Λ и Π. Для приближенного теплового расчета используются уравнения (или графики) зависимости $\Delta t^*_{\text{нед}} = f(\Lambda, \Pi)$. Методика такого расчета регенераторов воздухоразделительных установок, а также уравнения и графики для определения $\Delta t^*_{\text{нед}}$ приведены в [7, 31].

Для регенераторов воздухоразделительных установок без отбора прямого потока из середины аппарата $\Delta t^*_{\text{нед}}$ можно определить из эмпирического уравнения

$$\Delta t^*_{\text{нед}} = \frac{2}{\Lambda + 2} + 0{,}07\frac{\Pi}{\Lambda} - 0{,}0217\frac{\Pi}{\Lambda}(1 - W_2/W_1),$$

где W_2 и W_1 — водяные эквиваленты обратного и прямого потоков.

Тепловой расчет проектируемого регенератора может быть также осуществлен на основе теории подобия с использованием данных о характеристиках реально работающих регенераторов. Если условия работы проектируемого и работающего регенераторов идентичны (материал, форма и размеры элементов насадки, высота ее слоя, скорости и режимные параметры потоков, температурные напоры на концах регенераторов, продолжительность цикла), то расчет сводится к определению диаметра проектируемого аппарата и массы насадки. На основании теории подобия при $\Lambda = \text{idem}$ и $\Pi = \text{idem}$ диаметр проектируемого аппарата $D_{\text{пр}} = D\sqrt{V_{\text{пр}}/V}$, а масса насадки $M_{\text{н. пр}} = M_{\text{н}} D^2_{\text{пр}}/D^2$. Буквами без индексов обозначены соответствующие величины для эксплуатируемого регенератора: диаметр, объем и масса насадки.

14.8. ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

При движении рабочих сред в аппарате возникают гидравлические сопротивления, вследствие чего давление среды на входе в аппарат отличается от давления на выходе из него ($p' - p'' = \Delta p$). На преодоление сопротивлений затрачивается механическая энергия, пропорциональная Δp.

Задача гидродинамического расчета аппаратов — определение гидравлических сопротивлений, или (что то же самое) потерь давления, возникающих при движении горячей и холодной сред. Знание этих величин необходимо для расчета мощности вентиляторов или насосов, а также для выбора рациональной конструкции и оптимального режима работы аппарата. Величина гидравлических сопротивлений зависит от конструкции аппарата, условий движения среды, ее теплофизических свойств. Закономерности, описывающие движение различных сред, рассматриваются в курсах гидравлики и аэродинамики. Здесь будут приведены лишь краткие сведения, необходимые для расчета сопротивлений.

Возникающие сопротивления в зависимости от их природы можно разделить на несколько составляющих: сопротивление трения ($\Delta p_{тр}$); местные сопротивления ($\Delta p_{м}$); сопротивления, связанные с ускорением потока вследствие его неизотермичности ($\Delta p_{ус}$); сопротивления самотяги ($\Delta p_{с}$); обусловленные различным направлением вынужденного и свободного движения.

Гидравлическое сопротивление трения возникает из-за наличия сил вязкости на участке безотрывного течения и для несжимаемой жидкости, движущейся в каналах, рассчитывается по уравнению

$$\Delta p_{тр} = \xi \frac{l}{d_{эк}} \frac{\rho w^2}{2}, \tag{14.46}$$

где $\Delta p_{тр}$ — падение давления, Па; ξ — коэффициент сопротивления трения; l — полная длина канала, м; $d_{эк}$ — гидравлический (эквивалентный) диаметр канала, м; $d_{эк}=4f/u$, f и u — площадь и периметр поперечного сечения канала, ρ и w — плотность и скорость рабочей среды, кг/м^3 и м/с.

Коэффициент сопротивления ξ является безразмерной величиной и характеризует соотношение между силами инерции и силами трения. При $l/d \geqslant 30$, как это имеет место в большинстве аппаратов, $\xi=\mathrm{const}$ при $l/d<30$ надо учитывать влияние начального гидродинамического участка [27, 29]. Значение ξ зависит от режима движения и различно для ламинарного и турбулентного режимов. Кроме того, значение ξ различно для изотермического и неизотермического течений и зависит от направления теплового потока: при охлаждении движущейся среды сопротивление больше, чем при нагревании.

Значение ξ различно для прямых и изогнутых труб, гладких и шероховатых [12].

При ламинарном изотермическом стабилизированном течении однофазного потока

$$\xi_{из} = \frac{64\varphi}{\mathrm{Re}_ж}; \tag{14.47}$$

при турбулентном для $\mathrm{Re}_ж=(3 \div 10^5)\ 10^3$

$$\xi_{из} = \frac{1}{(1{,}82 \lg \mathrm{Re}_ж - 1{,}64)^2}. \tag{14.48}$$

Здесь φ — коэффициент, зависящий от формы канала (для круглой трубы $\varphi=1$, для других каналов см. в [12, 26]); $\mathrm{Re}_ж$ — определяется по средней температуре жидкости.

Коэффициент сопротивления при неизотермическом течении может быть рассчитан как $\xi=\xi_{из}\varepsilon_{\xi}$,

Выражения для поправки на неизотермичность потока (ε_{ξ} при ламинарном течении приведены в [26, 29]. При турбулентном течении, по предложению М. А. Михеева, влияние неизотермичности учитывается выражением

$$\varepsilon_\xi = (\mathrm{Pr}_ж/\mathrm{Pr}_с)^{0,25}.$$

В аппаратах установок умеренного холода вследствие малой разности между температурами стенки и среды можно принимать $\varepsilon_\xi = 1$. Учет влияния шероховатости каналов на ξ рассмотрен в [26, 34, 37].

Местные сопротивления возникают из-за вихреобразования при резком изменении направления движения или формы потока (изменение сечения канала, повороты и т. п.). Местные сопротивления определяются по формуле

$$\Delta p_м = \zeta \frac{\rho w^2}{2}, \qquad (14.49)$$

где $\Delta p_м$ — падение давления, Па; ζ — коэффициент местного сопротивления — безразмерная величина (зависит от характера препятствий, которые приходится преодолевать потоку). Значения ζ приведены в [12], а для случаев, встречающихся в аппаратах холодильной техники,— в [37].

Сопротивления (потери давления), связанные с ускорением потока, называются изменением плотности среды и соответствующим изменением ее скорости по длине канала. При движении в канале постоянного сечения величину этих потерь рассчитывают по формуле

$$\Delta p_{ус} = \rho_2^2 w_2^2 - \rho_1^2 w_1^2. \qquad (14.50)$$

Очевидно, что потери на ускорение возникают только при неизотермическом течении, причем при нагревании $\Delta p_{ус}$ положительно, при охлаждении — отрицательно. Для капельных жидкостей и для газообразных сред в аппаратах холодильной техники величина $\Delta p_{ус}$ мала в сравнении с общими потерями и ею обычно пренебрегают.

Сопротивление самотяги возникает в вертикальных или наклонных каналах при наличии теплообмена между рабочей средой и средой, окружающей канал. Подъемная сила самотяги и равное ей сопротивление определяются по формуле

$$\Delta p_с = \pm g(\rho - \rho_0) h,$$

где g — ускорение свободного падения; ρ и ρ_0 — средние плотности среды внутри канала (например, дымовых газов) и окружающей канал среды (воздух); h — расстояние по вертикали между входом и выходом рабочей среды.

При восходящем потоке $\Delta p_с > 0$, при нисходящем $\Delta p_с < 0$. Большинство аппаратов холодильной и криогенной техники не сообщаются с окружающей средой, и для них $\Delta p_с = 0$.

В общем случае полный перепад давлений рассчитывается как сумма рассмотренных выше гидравлических сопротивлений.

$$\Delta p = \Delta p_{тр} + \Delta p_м + \Delta p_{ус} + \Delta p_с. \qquad (14.51)$$

Общая методика расчета Δp при движении двухфазных потоков приведена в [22], рекомендации по определению Δp для парожидкостных потоков холодильных агентов в конденсаторах и испарителях холодильной техники — в [37], в аппаратах криогенной техники — в [7].

Гидравлическое сопротивление регенераторов определяют по формуле [7, 38]

$$\Delta p = \xi \frac{\rho w^2}{8} \frac{Ls}{\varepsilon_н^3}, \qquad (14.52)$$

где ξ — коэффициент сопротивления, зависящий от типа насадки и числа Re; ρ — средняя плотность рабочей среды; w — скорость движения рабочей среды, отнесенная к полному сечению регенератора; L — длина аппарата; s — площадь поверхности насадки в единице объема; $\varepsilon_н$ — свободный объем (пористость) насадки, м³/м³ (зависит от ее размеров и типа); значения ξ и $\varepsilon_н$ можно найти в [7, 38].

Определив полное гидравлическое сопротивление, рассчитывают мощность на валу насоса или вентилятора, необходимую для перемещения рабочей среды,

$$N = \frac{V\Delta p}{\eta} = \frac{G\Delta p}{\rho\eta}, \qquad (14.53)$$

где V — объемный расход среды, м³/с; G — массовый расход среды, кг/с; Δp — полное гидравлическое сопротивление Па; ρ — плотность среды, кг/м³; η — КПД насоса или вентилятора.

Приведенные соотношения показывают, что с ростом скорости движения рабочей среды увеличиваются гидравлические сопротивления и возрастает расход энергии на ее перемещение в аппарате. С другой стороны, с ростом скорости возрастают коэффициенты теплоотдачи и теплопередачи, а следовательно, уменьшается металлоемкость аппарата. Эти обстоятельства необходимо учитывать при проектировании аппаратов.

Тепловой и гидродинамический расчеты аппаратов и особенно оптимизацию скоростей сред и температурных напоров целесообразно осуществлять на ЭВМ.

14.9. МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

Одной из центральных задач в современном машиностроении и проектировании различных технологических процессов является экономия материальных и энергетических ресурсов. Ее решение в области холодильной и криогенной техники связано с созданием высокоэффективной теплообменной аппаратуры. Дело в том, что доля массы теплообменных аппаратов в общей массе холодильной машины составляет 70—80%, а расход энергии при эксплуатации машины в большой степени зависит от эффективности теплогидравлических процессов, происходящих в теплообменных аппаратах.

При решении этой задачи приходится учитывать, что с уменьшением металлоемкости аппарата путем изменения режимных параметров сред (скорости или температурного напора) возрастают энергетические затраты при эксплуатации установки, в состав которой он входит. Так, например, повышение скорости хладоносителя в испарителе холодильной машины позволяет увеличить коэффициент теплоотдачи рассола и соответственно коэффициент теплопередачи аппарата, а следовательно, уменьшить металлоемкость аппарата. Однако при этом возрастают потери напора и расход мощности на привод насоса. Увеличение температурного напора между хладоносителем и кипящим холодильным агентом приводит к возрастанию коэффициента теплоотдачи последнего, росту коэффициента теплопередачи, уменьшению металлоемкости аппарата. Вместе с тем понижается температура кипения и возрастает расход мощности на привод компрессора.

Методика техноэкономического расчета и оптимизации режимов эксплуатации аппаратов холодильной техники подробно рассмотрена в [13, 36].

Повышение эффективности теплообменного аппарата предполагает: 1) уменьшение поверхности или увеличение производительности аппарата при заданных условиях его работы; 2) уменьшение температурного напора между средами при заданных площади поверхности и производительности.

Рассмотрим общие предпосылки решения поставленных задач. Из уравнения теплопередачи $Q=Fk\Delta t_{ср}=Fq$ следует, что увеличение производительности аппарата Q при неизменных площади поверхности F и температурном напоре $\Delta t_{ср}$ либо уменьшение F или $\Delta t_{ср}$ при заданном Q могут быть достигнуты путем увеличения коэффициента теплопередачи. Кроме того, желаемое соотношение между Q и F можно получить путем увеличения $\Delta t_{ср}$. Этот путь связан, как было показано выше, с ростом энергетических затрат, а следовательно, и стоимости эксплуатации. Поэтому значение $\Delta t_{ср}$ следует выбирать по минимуму приведенных затрат в конкретных условиях [13, 36].

Рассмотрим методы повышения коэффициента теплопередачи. Как уже было показано в главе 13, если можно принять, что $k=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}}$, а коэффициенты теплоотдачи двух сред, разделяемых стенкой рекуперативного аппарата, существенно различаются по величине, то для увеличения коэффициента теплопередачи надо увеличивать меньший из α. Там же рассмотрен способ интенсификации теплопередачи путем увеличения площади поверхности теплообмена со стороны меньшего α (нанесением оребрения).

Здесь кратко рассмотрим методы интенсификации т е п л о о т д а ч и, увеличения α, основанные на физических представлениях об этом процессе и анализе описывающих его закономерностей.

При этом, очевидно, может быть поставлена задача увеличения как наименьшего α, так и коэффициентов теплоотдачи с обеих сторон стенки, ибо при $\alpha_1\approx\alpha_2$ возрастание k можно получить путем увеличения любого из коэффициентов теплоотдачи и тем более обоих α.

Теплоотдача в о д н о ф а з н ы х с р е д а х может быть интенсифицирована путем уменьшения толщины ламинарного пограничного слоя, перевода его в турбулентный, уменьшения толщины турбулентного слоя и турбулизации его пристенной части. На практике такие эффекты достигаются увеличением скорости движения, конструктивными элементами, обеспечивающими разрушение или срыв пограничного слоя, установкой в каналы специальных турбулизаторов и т. п. Некоторое увеличение α можно получить путем уменьшения диаметра труб (при ламинарном течении в трубах $\alpha \sim d^{-0,67}$, при турбулентном — $\alpha \sim d^{-0,2}$).

Интенсификация теплоотдачи к кипящей жидкости наиболее важна в аппаратах, работающих при малых температурных напорах и очень низких температурах кипения. Именно такие условия характерны для испарителей холодильных машин и установок криогенной техники. В соответствии с представлениями, сформулированными в главе 7, увеличение коэффициента теплоотдачи при кипении может быть достигнуто путем увеличения числа действующих центров парообразования и создания условий, способствующих интенсивному испарению жидкости в растущие паровые пузырьки. Реализация этих принципов интенсификации в настоящее время достигается путем применения капиллярных пористых покрытий, мелкого оребрения поверхности теплообмена, организации кипения в тонкой пленке жидкости и др.

При кипении внутри труб наиболее интенсивна теплоотдача при кольцевой структуре двухфазного потока, поэтому создание условий, обеспечивающих такую структуру, приводит к интенсификации теплообменного аппарата. На структуру потока можно влиять изменяя размеры канала, начальное паросодержание и массовую скорость потока. Возможно также применение турбулизаторов [13].

Методы интенсификации теплоотдачи со стороны конденсирующегося пара основаны на уменьшении толщины пленки конденсата, турбулизации либо на разрушении ее возле поверхности теплообмена. Воздействие на пленку может быть осуществлено, например, с помощью движущегося потока пара и сил поверхностного натяжения. В первом случае путем увеличения скорости пара, изменения формы и размеров каналов аппарата достигают турбулизации режима стекания пленки или срыва ее. Во втором случае — под действием капиллярных сил пленка стягивается к определенной части поверхности и в результате этого уменьшается ее средняя толщина на большей части поверхности аппарата (например, трубы с мелким волнистым оребрением [14]). Существуют конструктивные решения, уменьшающие длину непрерывного стекания пленки (т. е. путь конденсата до его схода с поверхности теплообмена): конденсатоотводящие колпачки, прерывистые насадки, перегородки и т. п.

Снижение металлоемкости и увеличение компактности (отношение площади теплообменной поверхности к объему аппаратов) может быть достигнуто и путем разработки оптимальных конструктивных решений. С различными типами конструкций компактных теплообменников можно познакомиться в монографиях [2, 19, 28].

Глава 15. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Изучение тепломассообмена предусматривает проведение определенного количества лабораторных работ, содержание которых рассмотрено в настоящей главе. Сведения из теории, необходимые для выполнения работ, как правило, не входят в описание задачи, поскольку они содержатся в предыдущих главах.

15.1. МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВЕЩЕСТВ

Из большого количества разнообразных методов измерения коэффициента теплопроводности можно выделить две основные группы: 1) методы стационарного теплового потока; 2) методы нестационарного теплового потока.

Методы стационарного теплового потока (или стационарные методы) характеризуются тем, что в процессе определения коэффициента теплопроводности исследуемых веществ температурное поле в них остается неизменным во времени. Эти методы подразделяются в соответствии с формой исследуемого образца на методы плоского, цилиндрического и сферического слоев.

В нестационарных методах (или методах нестационарного теплового потока) температурное поле в исследуемом веществе изменяется со временем, поэтому основным в классификации этих методов является характер изменения температуры во времени.

Среди нестационарных методов можно выделить так называемые методы регулярного теплового режима и методы изучения начальной стадии процесса, или чисто нестационарные методы.

Стационарные и нестационарные методы позволяют исследовать разнообразные теплоизоляционные материалы, неметаллические материалы твердой структуры, газы, жидкости и т. д.

Особым объектом исследований являются пищевые продукты. Это могут быть твердые, пастообразные, сыпучие, жидкие вещества. Исследование теплофизических свойств пищевых продуктов является тем более важным, что сведения, которыми мы располагаем в настоящее время, еще очень ограниченны, а свойства продукта каждого данного наименования нестабильны.

Экспериментальные методы, рассмотренные ниже, принципиально не имеют ограничений, которые препятствовали бы их использованию для изучения свойств пищевых продуктов. Стационарные методы цилиндрического слоя и шара, к примеру, пригодны для изучения сыпучих продуктов: сахарный песок, крупы, зерно, сухие молочные смеси. Метод регулярного теплового режима можно применить для изучения реологических систем, таких, как томатная паста, пюре, фарш, тесто, карамельная масса, мороженое, сырковая масса, творог и др. Образцы твердых пищевых продуктов, которым можно придать форму таблетки, цилиндра, сферы, пригодны также для исследований в широком диапазоне температур как стационарными, так и нестационарными методами измерения, в том числе и двумя последними из рассмотренных в данном разделе. Выбор метода исследования определяется в каждом случае структурными и физико-химическими свойствами конкретного материала, которые не должны претерпевать изменений в ходе опыта.

Методы стационарного теплового потока. Методы стационарного теплового потока (стационарные методы) основаны на использовании решения уравнения Лапласа [уравнение (1.13)] и закона Фурье [уравнение (1.2)].

Частные решения этих уравнений были получены (см. главу 1) применительно к телам определенной геометрической формы (пластина, цилиндр, шар) при конкретно заданных условиях однозначности: именно они и используются при реализации различных экспериментов.

Стационарные методы позволяют определять коэффициент теплопроводности в широком диапазоне температур и давлений. Эти методы являются точными и апробированными.

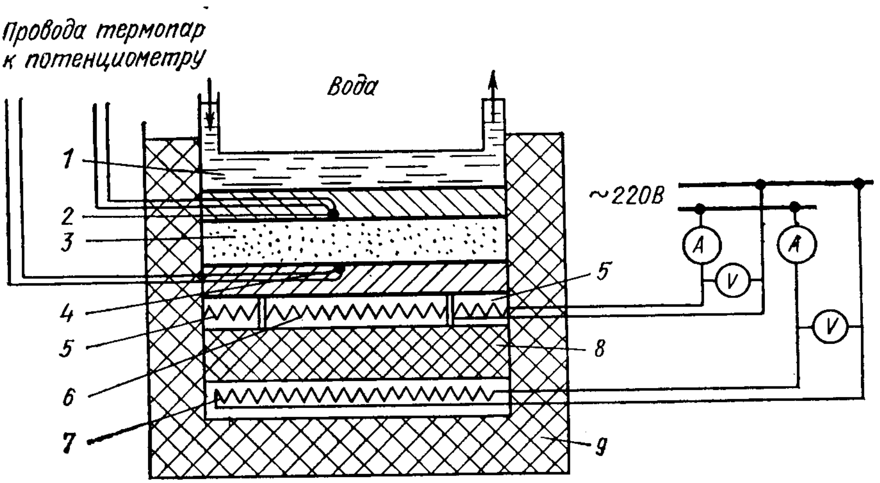


Рис. 15.1. Схема установки для определения коэффициента теплопроводности методом плоского горизонтального слоя

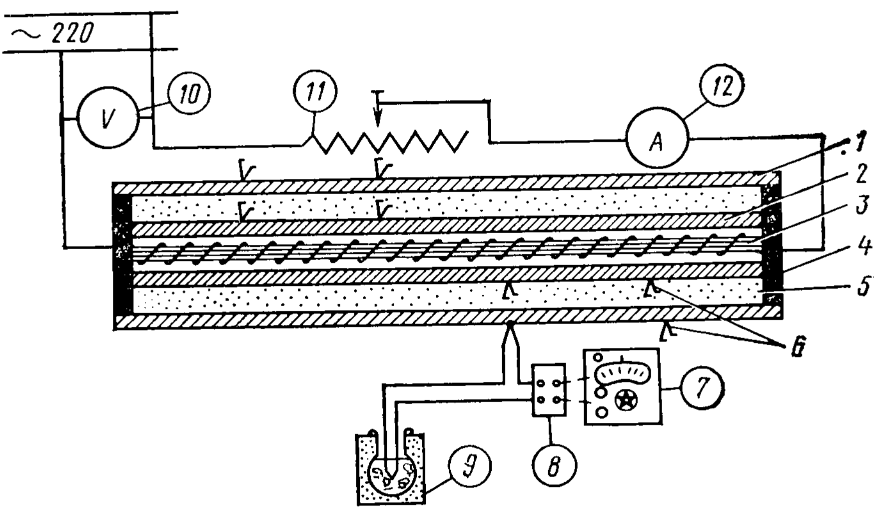


Рис. 15.2. Схема установки для определения коэффициента теплопроводности методом цилиндрического слоя

Метод плоского горизонтального слоя. В этом методе исследуемый образец *3*, изготовленный в форме пластины, толщина которой в 10 и более раз меньше его диаметра, зажат между основным электронагревателем *6* и холодильником *1* (рис. 15.1). Вспомогательный (охранный) электронагреватель *5*, выполненный в виде кольца, служит для предотвращения утечек теплоты от образца в радиальном направлении. Нижний охранный нагреватель обеспечивает одномерный тепловой поток через образец (снизу вверх). В качестве расчетной поверхности принимается поверхность основного нагревателя *6*. Температуры поверхности образца измеряются термопарами *2* и *4*. Имеются также термопары (на рисунке они не показаны), предназначенные для контроля работы кольцевого нагревателя *5* и настройки нижнего охранного нагревателя *7*. Для измерения мощности основного нагревателя в схеме предусмотрены амперметр и вольтметр. Для устранения тепловых потерь от нагревателей служит тепловая изоляция *8* и *9*.

В установившемся стационарном режиме вся теплота, выделяемая в основном нагревателе, проходит через испытуемый материал и воспринимается холодильником. Стационарный режим достигается через 4—5 ч и более после начала опыта. Для точного определения теплопроводности между поверхностью твердого образца и плоскостями нагревателя и холодильника не должно быть воздушных зазоров. В случае исследования теплопроводности жидкостей и газов в целях более надежного исключения влияния свободной конвекции толщина слоя вещества не должна превышать долей миллиметра. В этих же целях нагреватель в конструкции прибора располагают сверху, а холодильник — снизу. Коэффициент теплопроводности рассчитывают по уравнению

$$\lambda = Q\delta/F\,(t_1 - t_2), \tag{15.1}$$

где Q — тепловой поток, Вт; δ — толщина слоя исследуемого вещества, м; F — площадь расчетной поверхности, м^2; t_1, t_2 — температуры на поверхности слоя, °С.

Тепловой поток находят по результатам измерения силы тока I и падения напряжения U на основном нагревателе *6* (см. рис. 15.1); $Q=IU$. Разность температур вычисляют по показаниям термопар. Термопара *2* измеряет температуру t_2, а термопара *4* — температуру t_1.

Метод цилиндрического слоя. Имеются два тонкостенных металлических цилиндра *1* и *2* (рис. 15.2). Между ними в зазоре находится слой испытуемого материала *5* (к примеру, шлаковой или стеклянной ваты). Во внутреннем цилиндре *2* (длина его обычно в 10 и более раз больше диаметра) расположен электрический нагреватель *3*. Пространство между нагревателем и стенкой цилиндра заполнено мелким песком *4*. Температуры на поверхности внутреннего и наружного цилиндров измеряются термопарами *6*. Схема одной из термопар показана на рис. 15.2. Горячий спай термопары (медь — константан) расположен в канавке, выфрезерованной по образующей металлического цилиндра. Канавка заделана специальным цементом. Холодный спай термопары расположен при 0°С в сосуде Дьюара *9*. Термоэдс, пропорциональная разности температур между 0°С и температурой горячего спая, измеряется через переключатель *8* потенциометром *7*. Мощность, выделяемая нагревателем *3*, регулируется реостатом *11*.

В установившемся стационарном режиме теплота, выделяемая нагревателем *3*, проходит через слой исследуемого материала *5* и измеряется по показаниям амперметра *12* и вольтметра *10*. Для достижения стационарного режима требуется 2—3 ч после включения нагревателя. Коэффициент теплопроводности рассчитывается по уравнениям, выведенным в разделе 2.2.

Метод шарового слоя. Полость между двумя тонкостенными металлическими сферами *1* и *2* (рис. 15.3) заполнена исследуемым волокнистым или сыпучим материалом *4*. Материал укладывается равномерно, без пустот. Внутри меньшего шара расположен электрический нагреватель *3*, равномерно размещенный по его сферической поверхности. Тепловой поток, выделяемый нагревателем *3*, проходит через слой материала *4* от внутренней сферы к наружной. Температуры сфер измеряются термопарами T_1 и T_2. Холодные спаи термопар находятся в сосуде Дьюара *5*. Провода термопар через переключатель *6* подключены к потенциометру *7*.

Уравнения для расчета коэффициента теплопроводности в установившемся стационарном режиме приведены в разделе 2.3.

Нестационарные методы. Нестационарные методы измерения основаны на использовании решения уравнения (1.9) с граничными условиями первого-третьего рода. Решения этого уравнения, как и в случае стационарного теплового режима, приобретают простой вид для тел правильной геометрической формы.

Нестационарные методы, связанные с учетом дополнительной переменной — времени, позволяют получить гораздо больше информации об основных тепловых характеристиках тела, чем стационарные. Они допускают большее разнообразие экспериментальных устройств ,позволяют осуществлять комплексные исследования, т. е. получать в одном эксперименте данные по теплопроводности, теплоемкости и температуропроводности веществ, а при исследовании бетонных блоков, грунтов, горных пород опыты могут производиться даже в естественных условиях.

Развитие нестационарных методов в значительной мере приближает решение проблемы массовых теплофизических измерений, стоящей перед современной наукой и техникой.

Наибольшее применение для изучения свойств различных материалов получили методы *регулярного теплового режима*. Рассмотрим наиболее распространенные из них: метод акалориметра и метод бикалориметра.

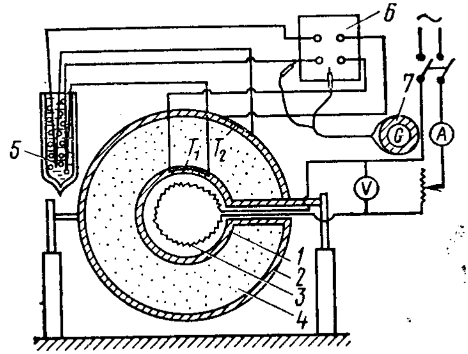


Рис. 15.3. Схема установки для определения коэффициента теплопроводности методом шарового слоя

Разработаны также многочисленные методы, основанные на изучении начальной стадии нестационарного процесса. В качестве примеров таких методов рассмотрим метод теплового компаратора и метод двух температурно-временных точек.

Метод акалориметра. Этот метод позволяет определить коэффициент температуропроводности твердых, волокнистых, сыпучих и пастообразных веществ. Коэффициент температуропроводности обозначается буквой a, что и определило название прибора — акалориметр. Метод разработан Г. М. Кондратьевым и Г. Н. Дульневым.

В экспериментальной установке используются металлические акалориметры различной формы. Шаровой акалориметр *1* (рис. 15.4) изготовлен из тонкостенной меди, диаметр его 40—60 мм. Часто бывает удобно использовать акалориметр цилиндрической формы (высота его 60—100 мм, диаметр — в полтора-два раза меньше).

Акалориметр наполняют исследуемым материалом, помещают в него горячий спай термопары *4*, плотно закрывают и подогревают на 5—10°С выше температуры жидкости в термостате *2* с мешалкой *6*. Акалориметр затем погружают в термостат. По гальванометру *3* наблюдают за изменением температуры охлаждающегося акалориметра. Холодный спай термопары *4* помещается в термостат *2*, где происходит охлаждение прибора. Температуру термостата измеряют термомет-

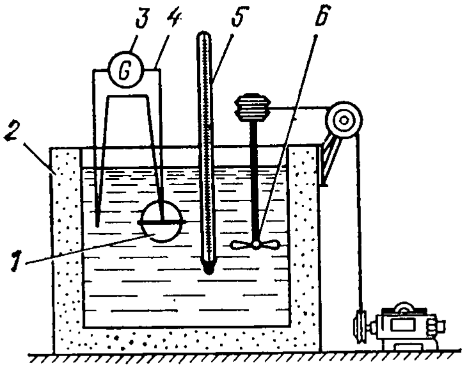


Рис. 15.4. Схема экспериментальной установки для определения коэффициента температуропроводности

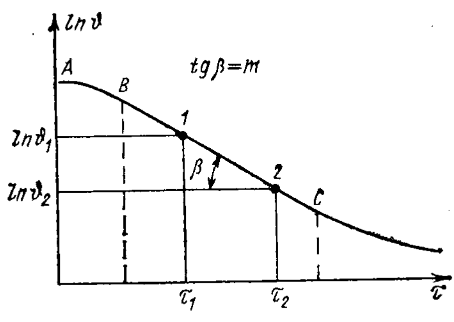


Рис. 15.5. График изменения $\ln\vartheta$ по времени

ром 5. Гальванометр регистрирует изменение разности между изменяющейся температурой исследуемого материала (в нем помещен горячий спай термопары 4) и постоянной температурой термостата (в нем помещен холодный спай термопары 4).

По данным наблюдений строят график процесса охлаждения акалориметра в координатах $\ln\vartheta - \tau$ (рис. 15.5). Здесь $\vartheta = t - t_ж$; t — температура акалориметра 1; $t_ж$ — постоянная температура термостата 2, где охлаждается акалориметр; τ — время.

На графике отчетливо видны две стадии процесса охлаждения: неупорядоченного (иррегулярного) процесса (участок AB) и регулярного режима (участок BC). За точкой C начинается процесс перехода к стационарному состоянию. Теоретические основы метода регулярного теплового режима рассмотрены в главе 3 (раздел 3.1). Здесь же напомним, что в стадии регулярного режима температурное поле во всех точках охлаждающегося тела изменяется по экспоненциальному закону

$$\vartheta_{рег} = t - t_ж = AUe^{-m\tau}. \quad (15.2)$$

Здесь U — функция координат точек охлаждаемого тела; A — функция критерия Bi.

Показатель m, входящий в уравнение (15.2), называют темпом охлаждения тела. На участке регулярного режима темп остается постоянным, не зависящим от времени и координат точек тела. На основании уравнения (15.2)

$$\partial(\ln \vartheta_{рег})/\partial\tau = -m$$

темп охлаждения определяют из опыта как тангенс угла наклона участков регулярного режима в координатах $\ln\vartheta - \tau$ (рис. 15.5).

Темп охлаждения сильно зависит от интенсивности теплоотдачи между охлаждающимся телом и жидкостью в термостате. Однако, если $\alpha \to \infty$, темп охлаждения стремится не к бесконечности, а к постоянной величине m_∞. При интенсивном перемешивании жидкости в термостате 2 [практически при $\alpha \approx 1000$ Вт/(м$^2\cdot$К)] можно считать найденное в эксперименте значение $m = m_\infty$. Согласно теории Г. М. Кондратьева коэффициент температуропроводности исследуемого материала в этом случае прямо пропорционален темпу охлаждения, т. е. $a = Km_\infty$. Здесь K — коэффициент формы. Для шара радиусом R $K = R^2/\pi^2$.

Для цилиндра длиной L и радиусом R:

$$K = 1/[(2{,}405/R)^2 + (\pi/L)^2].$$

Заметим, что существует два принципиально важных условия, при которых возможны проведение этих опытов и использование приведенных выше зависимостей: 1) постоянство температуры среды в термостате $t_ж$ за все время охлаждения акалориметра; 2) интенсивное перемешивание жидкости в термостате, т. е. условие $\alpha \to \infty$ (чему соответствует значение m_∞).

Метод бикалориметра. Бикалориметр (от лат. bi — дважды) состоит из двух тел: металлического сердечника (ядро) и исследуемого вещества, окружающего ядро со всех сторон. Различают шаровые, цилиндрические и плоские бикалориметры.

Шаровой бикалориметр для исследования теплопроводности сыпучих материалов (рис. 15.6) состоит из двух шаров, концентрически расположенных друг в друге. Внутренний шар 1 (ядро) изготовлен из материала с хорошо известными теплофизическими свойствами (например, медь). Пространство между шаровой оболочкой 2 и ядром заполнено испытуемым материалом 3. В центре ядра расположен горячий спай термопары 4. Второй (холодный) спай помещается, как и в случае с акалориметром, в термостатирующей жидкости. Схема опыта аналогична схеме измерения с помощью акалориметра.

Метод базируется на теории регулярного теплового режима. В условиях, когда теплоемкость слоя исследуемого вещества во много раз (10 и более) меньше полной теплоемкости ядра, теплопроводность вещества оказывается пропорциональной темпу охлаждения в регулярной стадии процесса. В опыте записывают показания гальванометра во времени и по данным опыта находят величину темпа охлаждения, как это делалось в методе акалориметра.

Коэффициент теплопроводности рассчитывают по формулам:

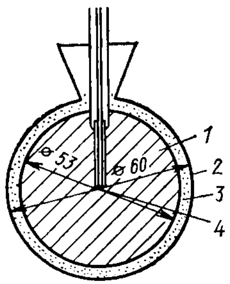


Рис. 15.6. Прибор для определения коэффициента теплопроводности методом шарового бикалориметра

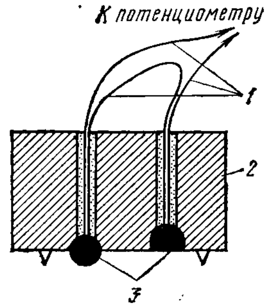


Рис. 15.7. Схема теплового компаратора

для шарового бикалориметра

$$\lambda = \frac{c\rho\delta R_1 \Phi}{Б_ш} m;$$

для цилиндрического бикалориметра

$$\lambda = \frac{c\rho\delta R_1 \Phi}{Б_ц} m;$$

для плоского бикалориметра

$$\lambda = \frac{c\rho\delta L \Phi}{Б_п} m,$$

где c — удельная теплоемкость материала ядра, Дж/(кг·К); ρ — плотность материала ядра, кг/м^3; δ — толщина слоя исследуемого материала, м; R_1 — радиус ядра, м; L — половина толщины ядра плоского дикалориметра, м; $Б$ — критерий $Б\text{-}3Ж/(3Ж+\Phi)$; $Ж=(1+\Phi+\Phi^2)$ $c_я/3\Phi c_в$; $c_я$ — полная теплоемкость ядра, Дж/К; $c_в$ — полная теплоемкость исследуемого вещества, находящегося в зазоре δ, Дж/К; Φ — коэффициент формы.

Критерии Б и Ж введены Г. М. Кондратьевым.

Коэффициент формы плоского бикалориметра равен 1. Для цилиндрического бикалориметра $\Phi = R_1(\ln R_2/R_1)/2(R_2 - R_1)$, для шарового $\Phi = R_1/3R_2$, где $R_2 = R_1 + \delta$.

В случае, когда теплоемкость исследуемого вещества намного меньше теплоемкости ядра (малая толщина слоя вещества, исследуется газ и т. д.), можно считать, что $Б = 1$.

Метод теплового компаратора. Это метод простой и быстрой оценки теплопроводности при температурах, близких к температуре окружающей среды.

Тепловой компаратор изображен на рис. 15.7. Компаратор состоит из двух бронзовых шариков *3* диаметром около 10 мм, помещенных в теплоизоляционный материал (к примеру, в деревянный корпус *2*). Один шарик несколько выступает из теплоизоляционного блока, другой сделан заподлицо с нижней гранью блока. Прибор покоится на двух металлических выступах и одном шарике. Перед опытом прибор нагревают (или охлаждают) так, чтобы его температура отличалась от температуры образца на 20—30°С. Затем прибор ставят на поверхность исследуемого образца и измеряют показания термопары *1*, спаями которой являются два бронзовых шарика. Если построить график зависимости термоэдс термопары в функции времени, то отчетливо обнаруживается участок, где эта зависимость имеет линейный характер. Опыт показывает, что такая зависимость сохраняется в течение первых 10 с от начала отсчета показаний термопары. Скорость изменения разности температур между спаями термопары в этот период пропорциональна корню квадратному из коэффициента теплопроводности образца.

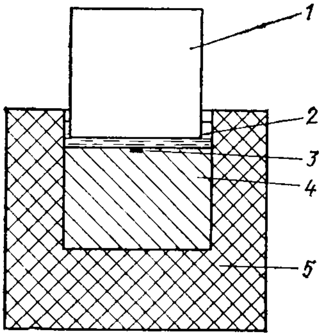


Рис. 15.8. Схема прибора для комплексного определения теплофизических свойств методом двух температурно-временных точек

Опыт проводят следующим образом. Сначала строят градуировочный график. По оси абсцисс откладывают показания термопары в милливольтах за 10 с для различных образцов, теплопроводность которых известна. По оси ординат откладывают корень квадратный из известного коэффициента теплопроводности этих образцов. Получают графическую зависимость близкую к линейной. Далее проводят опыт с образцами, теплопроводность которых необходимо изучить. Зная из опыта термоэдс термопары за 10 с, по графику определяют теплопроводность исследуемого образца. Поверхность контакта образцов твердых материалов тщательно шлифуют. При исследовании свойств жидкостей, фруктов, овощей, мяса и других продуктов плоскую поверхность образца для обеспечения контакта покрывают тонкой прозрачной мембраной толщиной 6—9 мкм. В качестве градуировочных веществ при исследовании жидкостей можно использовать воду, глицерин, толуол, медицинский парафин, свойства которых достоверно известны.

Метод двух температурно-временных точек. Этот комплексный метод разработан В. С. Волькенштейн и предназначен для определения теплофизических характеристик твердых продуктов, жидкостей, порошков и т. д. Схема прибора для измерения теплофизических свойств жидких пищевых продуктов изображена на рис. 15.8. Исследуемая жидкость находится в кювете *2*, которая плотно навинчена на теплоприемник *4*. На торцевой поверхности теплоприемника заделан заподлицо холодный спай термопары *3*. Теплоприемник *4* вместе с кюветой изолирован боковой теплоизоляцией *5*. Нагреватель *1* входит внутрь кюветы и выдавливает избытки жидкости через боковой зазор кюветы *2*.

Второй горячий спай термопары *3* расположен в нагревателе *1*. Температура этого спая, как и самого нагревателя, в ходе опытов должна оставаться постоянной. Температура нагревателя устанавливается на 10—15°С выше температуры теплоприемника. Опыт заключается в следующем. В кювету наливают жидкость, где выдерживают определенное время, с тем, чтобы ее температура не отличалась от температуры теплоприемника *4*. За это же время производят подогрев нагревателя и стабилизацию его температуры, например, в термостате. С помощью подъемного столика поднимают теплоприемник *4* с кюветой *2* так, чтобы нагреватель вошел внутрь кюветы и между ним и теплоприемником оказался слой жидкости требуемой толщины (1—1,5 мм). Требуемая толщина слоя жидкости выбирается из условия исключения свободной конвекции в слое, т. е. для случая, когда $\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr}\leqslant 1000$.

Далее ведут наблюдение за показаниями гальванометра, к которому подключена термопара *3*. Вначале показания гальванометра максимальны. При соприкосновении жидкости с нагревателем показания гальванометра уменьшаются. Фиксируют два промежутка времени: $\Delta\tau_1=\tau_2-\tau_1$ и $\Delta\tau_2=\tau_3-\tau_1$, соответствующие двум заданным изменениям показаний гальванометра: $\Delta N_1=N_1-N_2$ и $\Delta N_2=N_1-N_3$. Значения $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$ позволяют определить:

коэффициент температуропроводности

$$a=\frac{\delta^2}{4P\Delta\tau_1},$$

коэффициент теплопроводности

$$\lambda=b_0\varepsilon\sqrt{a},$$

а также рассчитать:

объемную теплоемкость

$$c\rho=\frac{\lambda}{a}$$

и так называемый коэффициент тепловой активности исследуемой жидкости

$$b=\sqrt{\lambda c\rho}.$$

В этих формулах δ — толщина слоя исследуемого вещества; P и ε — безразмерные параметры; b_0 — постоянная теплоприемника, характеризующая его тепловую активность, $b_0=\sqrt{\lambda_0 C_0 \rho_0}$. Здесь λ_0, C_0, ρ_0 — теплофизические характеристики материала теплоприемника. Безразмерные параметры P и ε находят из справочных таблиц в зависимости от $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$ (см. приложение 2).

В качестве теплоприемника рекомендуется брать цилиндры из оргстекла, мрамора, эбонита, резины, цемента и других материалов. Нагревателем может служить металлический цилиндр, в котором циркулирует вода из термостата. Наиболее удобной в работе является манганин-константановая термопара, изготовленная из тонкой ленты (сечением 0,05×1 мм²).

15.2. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛООТДАЧИ, ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ, МАССООТДАЧИ

Основной величиной, подлежащей экспериментальному изучению в процессах тепло- и массообмена, являются коэффициент теплоотдачи и коэффициент массоотдачи. Полное описание всех методов их определения составляет предмет специальных руководств (см. например, В. А. Осипова. Экспериментальное исследование процессов теплообмена.— М.: Энергия, 1969.— 392 с.) Ниже приводится описание лишь нескольких опытных установок, широко используемых при лабораторном изучении вопросов тепломассообмена.

Определение коэффициента теплоотдачи горизонтальной трубы при свободном движении воздуха. Экспериментальная установка показана на рис. 15.9. Внутри металлической трубы *1* расположен нагреватель из нихромовой проволоки. Длина трубы примерно в 20 раз превышает ее диаметр. Это обеспечивает

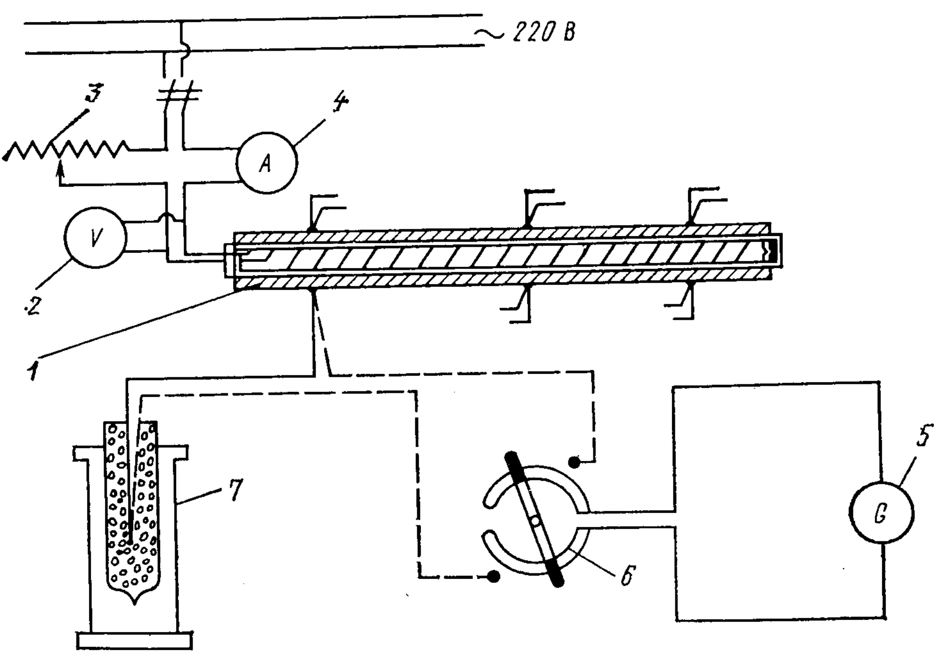


Рис. 15.9. Схема установки для определения коэффициента теплоотдачи от горизонтальной трубы к свободно движущемуся воздуху

равномерность температурного поля трубы как по длине, так и по диаметру, сводит к минимуму влияние охлаждения торцов на распределение температур. Для измерения температуры наружной поверхности трубы служат шесть медь-константановых термопар. Спаи термопар уложены в канавки, выфрезерованные на поверхности, и заделаны заподлицо с поверхностью. Спаи расположены равномерно по длине трубы с равномерным сдвигом по окружности трубы на 180°. Крайние спаи расположены на удалении не менее 30 мм от торцов трубы. Холодные спаи термопар помещены в сосуд Дьюара *7* с тающим льдом. Через переключатель *6* спаи подключены к потенциометру *5*. Питание электронагревателя осуществляется через автотрансформатор *3* от сети переменного тока. По показаниям амперметра *4* и вольтметра *2* определяют мощность нагревателя $Q=IU$. Подведенная к нагревателю энергия отдается поверхностью трубы в окружающую ее среду — воздух. Тепловой поток Q от поверхности трубы передается двумя способами: свободной конвекцией $Q_к$ и лучеиспусканием $Q_л$. Поскольку нас интересует только свободная конвекция, долю теплового потока, передаваемого лучеиспусканием $Q_л$, необходимо вычесть из общего теплового потока, т. е. определить

$$Q_к = Q - Q_л.$$

Значение $Q_л$ получаем из (12.23), где $T_1=T_с$ и $T_2=T_ж$. Тогда для коэффициента теплоотдачи при свободной конвекции имеем

$$\alpha = Q_к/(t_с - t_ж)\,F.$$

Здесь F — площадь теплоотдающей поверхности трубы, м^2; индексы с и ж относятся к стенке и к окружающей стенку среде (воздух).

Результаты экспериментального определения α сравнивают с расчетными значениями, полученными с помощью критериального уравнения (6.42).

Определение коэффициента теплоотдачи при конденсации водяного пара. Принципиальная схема установки изображена на рис. 15.10. В конденсатор *1* из пароперегревателя *5* поступает перегретый водяной пар. Пар конденсируется на наружной поверхности металлической трубки *4*. Для ее охлаждения внутри трубки протекает вода из водопровода. Сконденсировавшийся пар-конденсат (вода) по трубкам *6* и *7* стекает в сборник конденсата *8*. В сборнике имеется мерная шкала, которая позволяет точно определить количество поступившего в сборник конденсата.

Для получения пара в схеме установки предусмотрены паровой котел *10*, сухопарник *9* и пароперегреватель *5*.

Коэффициент теплоотдачи определяют по формуле (4.3).

Тепловой поток, отдаваемый охлаждающей воде при конденсации пара, запишем в виде

$$Q = G\,(i_{пер} - i').$$

Площадь теплоотдающей поверхности трубки *4*

$$F = \pi dH.$$

Здесь G — расход сконденсировавшегося пара (конденсата), определенный по показаниям мерной шкалы сборника конденсата *8*, кг/с; $i_{пер}$, i' — соответственно энтальпии перегретого пара на входе в конденсатор и жидкого конденсата, их определяют по термодинамическим таблицам водяного пара, зная давление в конденсаторе (показания манометра *3*) и температуру перегретого пара (показания термопары T_2), Дж/кг; d — диаметр трубки *4*, м; H — высота трубки *4*, м.

Температуру конденсации определяют с помощью таблиц термодинамических свойств водяного пара, зная давление в конденсаторе *1* (показания манометра *3*). Среднюю температуру наружной стенки трубки *4* определяют с помощью термопар T_3, T_4 и T_5.

На рис. 15.10 показаны сосуд Дьюара *11* для размещения холодных спаев термопар и переключатель термопар *12*.

Результаты эксперимента сопоставляют с расчетами по аналитическому уравнению (8.28) Нуссельта — Капицы (см. раздел 8.2).

Исследование теплопередачи в теплообменном аппарате. Цель исследований — изучение условий работы теплообменного аппарата, определение изме-

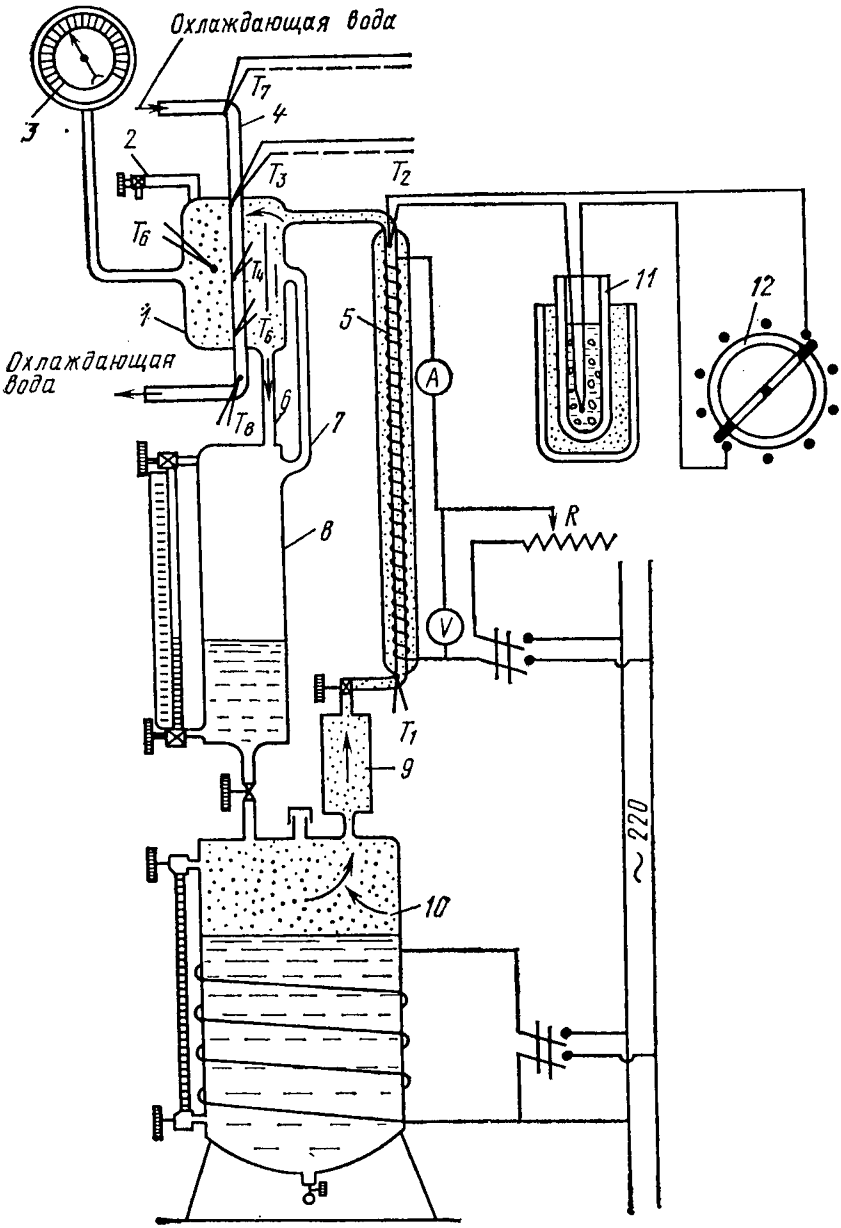


Рис. 15.10. Схема установки для определения коэффициента теплоотдачи при конденсации водяного пара

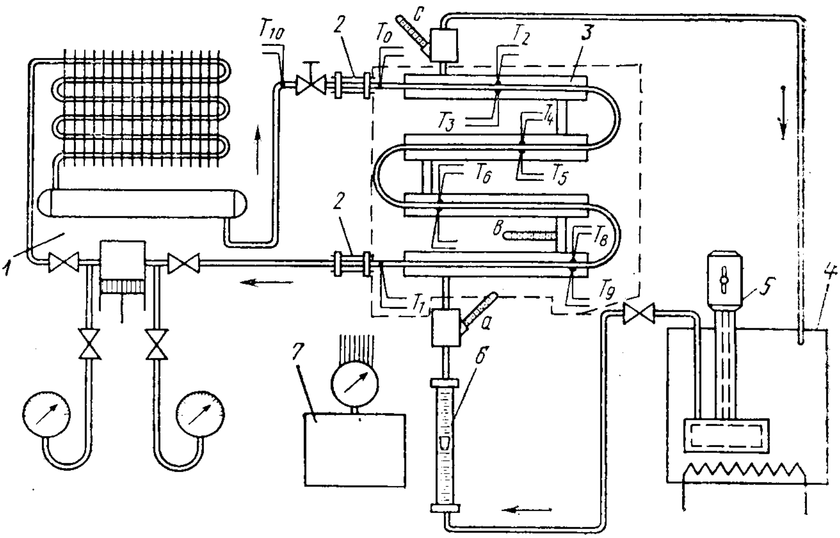


Рис. 15.11. Схема установки для определения коэффициента теплопередачи в двухтрубном испарителе

нений температур горячей и холодной сред, количества переданной теплоты и коэффициента теплопередачи аппарата.

В схеме экспериментальной установки (рис. 15.11) исследуемый аппарат — испаритель *3* представляет собой теплообменник типа «труба в трубе». В межтрубном пространстве испарителя циркулирует охлаждаемая вода. По внутренней трубе протекает жидкий холодильный агент (к примеру, R12 или R22). Испаритель четырехсекционный, каждая секция длиной 0,8 м.

Для наблюдения за потоком холодильного агента служат смотровые стекла *2*. Холодильный агент поступает в испаритель от холодильной машины *1*. Вода подается в испаритель насосом *5* из термостата *4*. Расход воды определяется с помощью ротаметра *6*. Для измерения температуры воды служат ртутные термометры *a*, *b* и *c*; для измерения температуры холодильного агента и стенок испарителя — термопары *T*, подключенные к потенциометру *7*.

Тепловая производительность аппарата

$$Q = Vc\rho\,(t_{в2} - t_{в1}).$$

Коэффициент теплоотдачи со стороны воды, циркулирующей в межтрубном пространстве,

$$\alpha_в = Q/(t_в - t_с)\,F_н.$$

Для определения коэффициента теплоотдачи со стороны кипящего холодильного агента используют аналогичное выражение

$$\alpha_а = Q/(t_с - t_ж)\,F_{вн}.$$

Коэффициент теплопередачи теплообменного аппарата, отнесенный к внутренней поверхности,

$$k = 1/[(1/\alpha_в) + (\delta_с/\lambda_с) + (F_{вн}/\alpha_а F_н)].$$

Здесь V — объемный расход воды, определяемый по имеющемуся графику градуировки ротаметра *6*; $c\rho$ — соответственно удельная теплоемкость (Дж/(кг·К) и плотность воды (кг/м^3); $t_{в1}$, $t_{в2}$ — температуры воды на входе в испаритель и на выходе из него, °С; $t_в$ — средняя температура воды в испарителе; $t_в = 0{,}5\,(t_{в1} + t_{в2})$, °С; $t_с$ — температура поверхности стенки внутренней трубы испарителя по показаниям термопар T_2—T_9, °С; $t_ж$ — температура кипящего холодильного агента по показаниям термопар T_0, T_1, T_{10}, °С; $F_{вн}$ — площадь поверхности внутренних труб испарителя, вычисляемая по их внутреннему диаметру (со стороны холодильного агента), м^2; $F_н$ — площадь наружной поверхности внутренних труб испарителя, вычисляемая по внешнему диаметру (со стороны циркулирующей воды), м^2; $\delta_с$, $\lambda_с$ — соответственно толщина стенки (м) внутренней трубы испарителя и ее теплопроводность, Вт/(м·К).

Полученные в эксперименте значения $\alpha_в$ и $\alpha_а$ необходимо сравнить с данными расчетов по критериальным уравнениям. Напомним, что поскольку в межтрубном пространстве имеет место вынужденное движение охлаждаемой воды, необходимо, зная расход воды, определить ее скорость, вычислить критерий Рейнольдса и в зависимости от режима движения выбрать критериальное уравнение [см. раздел 6.2, формулу (6.28)]. Для вычисления коэффициента теплоотдачи со стороны кипящего внутри труб холодильного агента рекомендуем формулу С. Н. Богданова, приведенную в разделе 7.9 [формула (7.42)].

Определение коэффициентов тепло- и массоотдачи при адиабатном испарении воды в воздух с поверхности зернистого слоя. В работе определяют коэффициенты теплоотдачи α и массоотдачи β, а также параметры тепломассообмена $E_а$ и $B_а$ — для модели аппарата с зернистым слоем. Аппараты с зернистым слоем широко применяют при тепловлажностной обработке наружного воздуха в системах кондиционирования воздуха.

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 15.12. Теплоизолированную снаружи реторту *8* с сетчатым дном заполняют дисперсным материалом (например, увлажненными фарфоровыми шариками). С помощью фланца *9* реторту соединяют с подвижной платформой весов. К реторте подают теплый воздух, который после контакта с увлажненными шариками (зернистым слоем) охлаждается и увлажняется. Количество унесенной воздухом влаги регистрируют по показаниям шкалы весов *6*. Температуру воздуха на входе в реторту и на выходе из нее измеряют термопарами T_1 и T_2. Термопара T_3 служит для измерения температуры «мокрого» термометра, поэтому спай ее обернут слоем ткани, увлажняемой посредством автопоилки *7*. Термопары выведены на цифровой вольтметр *12*, непосредственно измеряющий термоэдс термопар.

В схеме установки предусмотрена система компенсации динамического напора воздуха с помощью гидравлических затворов *3* и *11*, обечайки *10* и колокола *4*.

Для подачи воздуха служит вентилятор *1*. Подогрев воздуха осуществляется нагревателем *2*. Расход воздуха измеряют ротаметром *5*. Имеется также ртутный

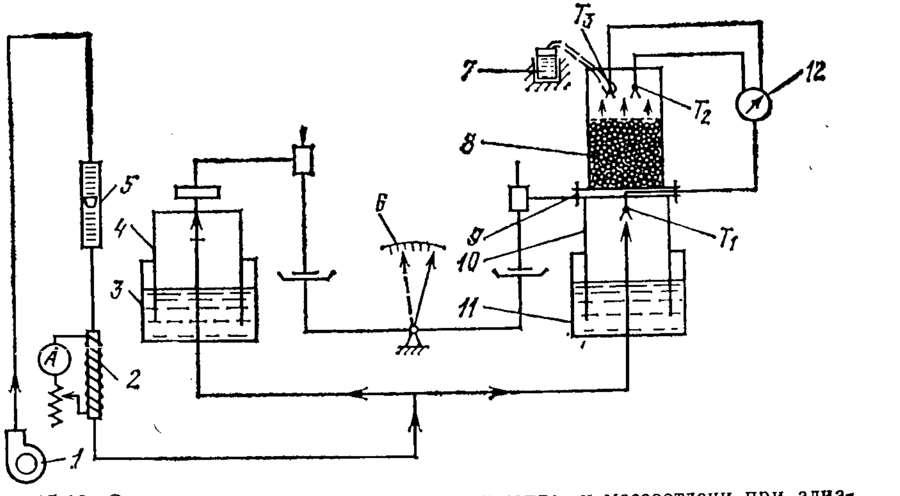


Рис. 15.12. Схема установки для исследования тепло- и массоотдачи при адиабатном испарении воды в воздух с поверхности зернистого слоя

психрометр для измерения влажности воздуха, находящегося в помещении лаборатории (на рис. 15.12 не показан).

По данным опыта определяем коэффициент массоотдачи из соотношений

$$\beta = M/(\rho''_{п} - \rho_{п})F = M/(d'' - d)\rho_{в}F$$

и коэффициент теплоотдачи — по формуле Ньютона — Рихмана

$$\alpha = Q/(t_{в} - t_{м})F.$$

Здесь M — поток массы в аппарате, определяемый по показаниям весов, взятым за некоторый промежуток времени, кг/с; F — площадь тепломассоотдающей поверхности (смоченная поверхность фарфоровых шариков в объеме слоя), м^2; $F = a\pi D^2 H/4$, где $a = 6(1 - П)/d$; D — диаметр аппарата, м; H — высота слоя фарфоровых шариков, м; d — диаметр фарфорового шарика, м; $П$ — пористость слоя; при свободной (насыпной) укладке шарового слоя $П = 37\%$; $t_{в}$ — температура воздуха, °С; $t_{м}$ — температура мокрого термометра, °С; $\rho''_{п}$ — плотность насыщенного водяного пара при температуре $t_{м}$, кг/м^3; $\rho_{п}$ — плотность водяного пара при температуре $t_{в}$, кг/м^3; d'', d — соответственно влагосодержание насыщенного влажного воздуха и ненасыщенного влажного воздуха, кг/кг; $\rho_{в}$ — плотность воздуха, кг/м^3. При вычислениях α и β рекомендуется определять разности температур и влагосодержаний по формулам:

$$t_{в} - t_{м} = \frac{t_{вх} - t_{вых}}{\ln \dfrac{t_{вх} - t_{м}}{t_{вых} - t_{м}}};$$

$$d'' - d = \frac{d_{вых} - d_{вх}}{\ln \dfrac{d_{вых} - d''}{d_{вх} - d''}};$$

$$Q = V\rho_{в}c'_{р}(t_{вх} - t_{вых}),$$

где $t_{вх}$, $t_{вых}$ — соответственно температуры на входе и выходе из реторты; $\alpha_{вх}$, $\alpha_{вых}$ — соответственно на входе в реторту и на выходе из нее влагосодержание влажного воздуха, кг/кг; V — объемный расход воздуха, м^3/с; $\rho_{в}c'_{р}$ — соответственно плотность (кг/м^3) и изобарная теплоемкость влажного воздуха, Дж/(кг·К); Q — тепловой поток, отводимый от влажного воздуха при охлаждении его в аппарате. Значения $d_{вх}$, $d_{вых}$, d'' определяют по i, d-диаграмме влажного воздуха — по измеренным в эксперименте значениям температур $t_{вх}$, $t_{вых}$ и $t_{м}$ в предположении, что процесс увлажнения в реторте адиабатный.

В работе также определяют параметры обмена для процессов:

теплоотдачи

$$E_{а} = \frac{t_{вх} - t_{вых}}{t_{вх} - t_{м}};$$

массоотдачи

$$B_{а} = \frac{d_{вых} - d_{вх}}{d'' - d_{вх}}.$$

В условиях экспериментального стенда высота слоя шариков составляет 30—100 мм, расход воздуха — 0,005—0,01 м^3/с, температура входящего воздуха — 30—50°С.

При выполнении работы целесообразно рассчитать комплекс

$$k = \frac{\alpha/c'_{р}\rho_{в}}{\beta},$$

по величине которого можно судить о существовании или отсутствии аналогии процессов тепло- и массоотдачи в данной модели аппарата.

При соблюдении аналогии между тепло- и массоотдачей, $\beta = \alpha/c'_{р}\rho_{в}$ и $k = 1$ [уравнение (11.4)].

В работе [10] приведены эмпирические уравнения, характеризующие тепломассообмен между парогазовой смесью и телами, имеющими форму капли или шара.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. **Плотность ρ, коэффициент теплопроводности λ и удельная теплоемкость c_p для некоторых пищевых продуктов**

Материал	t, °C	ρ, кг/м³	λ, Вт/(м·К)	c_p, кДж (кг·К)
Пищевые продукты				
Батон из пшеничной муки I сорта (мякиш; $W=41,8\%$)	0—18	402	0,298	3,190
Говядина ($W=75\%$; $Ж=1,6$—$3,4\%$)	2—20	1158	0,48—0,52	3,517
Говяжий фарш ($W=54\%$; $Ж=20\%$)	20	970—990	0,35—0,37	2,750
Картофель ($W=75\%$)	20	986	0,58	3,771
Маргарин сливочный	22	920,4	0,165	2,114
Масло арахисовое	4	930,5	0,169	2,316
Масло сливочное (любительское) ($W=19,2\%$)	17	920	0,176	4,970
Молоко ($Ж=2,9\%$; $n=10,9\%$)	20	1030	0,561	4,020
Морковь ($W=90\%$)	28	1040	0,60	3,820
Поваренная соль, I сорт ($W=0,0\%$)	25	1025	0,45	1,463
Рыба (судак)	1	1070	0,43	3,226
Рыба (треска)	16	992	0,54	3,684
Сахар-песок ($W=0,04\div0,06\%$)	20	845—862	0,123	1,234—1,296
Хлеб из ржаной муки (мякиш; $W=55,9\%$)	0—18	687	0,394	3,056
Яблоки ($W=86,8\%$)	20	880	0,49	3,814

Примечание. W — массовая доля влаги, %; $Ж$ — жирность, %; n — массовая доля сухих веществ, %.

Приложение 2. **Зависимости $p=f(K)$ и $\varepsilon=f(K)$ для расчета теплофизических характеристик методом двух температурно-временных точек (для $N_1/N_0=0,95$; $N_2/N_0=90$ и $N_3/N_0=0,75$)** *

K	ε	p	K	ε	p	K	ε	p
4,00	2,56	6,33	5,30	0,597	3,40	6,70	0,356	2,24
4,10	1,92	5,84	5,40	0,568	3,28	6,80	0,346	2,180
4,20	1,59	5,47	5,50	0,542	3,18	6,90	0,338	2,12
4,30	1,34	5,16	5,60	0,512	3,08	7,00	0,330	2,06
4,40	1,17	4,89	5,70	0,496	2,98	7,10	0,321	1,98
4,50	1,026	4,63	5,80	0,477	2,88	7,20	0,312	1,92
4,60	0,938	4,42	5,90	0,460	2,79	7,30	0,304	1,87
4,70	0,864	4,24	6,00	0,444	2,71	7,40	0,296	1,81
4,80	0,803	4,08	6,10	0,428	2,64	7,50	0,289	1,76
4,90	0,751	3,91	6,20	0,413	2,56	7,60	0,282	1,72
5,00	0,705	3,77	6,30	0,400	2,48	7,70	0,275	1,67
5,10	0,665	3,64	6,40	0,388	2,42	7,80	0,268	1,63
5,20	0,630	3,520	6,50	0,376	2,36	7,90	0,262	1,58
			6,60	0,366	2,30	8,00	0,256	1,54
						8,10	0,250	1,51

* Примечание. $K=\Delta\tau_2/\Delta\tau_1$; $\Delta\tau_1=\tau_2-\tau_1$; $\Delta\tau_2=\tau_3-\tau_1$; N_0 — показание гальванометра, включенного в цепь термопары, в начале измерений; $N_1 N_2$, N_3 — показания гальванометра, соответствующие моментам времени τ_1, τ_2 и τ_3, прошедшего после начала процесса измерений.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аношин И. М.* Теоретические основы массообменных процессов пищевых производств.— М.: Пищевая промышленность, 1970.— 342 с.

2. *Барановский Н. В.* Пластинчатые и спиральные теплообменники.— М.: Машиностроение, 1973.— 288 с.

3. *Беляев Н. М., Рядно Н. А.* Методы теории теплопроводности, ч. 2.— М.: Высшая школа, 1982.— 304 с.

4. *Богданов С. Н., Иванов О. П., Куприянова А. В.* Холодильная техника. Свойства веществ. Справочник.— М.: Легкая и пищевая промышленность, 1985.— 208 с.

5. *Бучко Н. А.* Исследование теплообмена при отвердевании, сопровождающемся конвекцией в жидкой фазе.— Холодильная техника, 1962, № 4, с. 39—43.

6. *Гребер Г., Эрк С., Григулль У.* Основы учения о теплообмене: перевод с немецкого / под ред. А. А. Гухмана.— М.: Иностранная литература, 1958.— 566 с.

7. *Григорьев В. А., Крохин Ю. И.* Тепло- и массообменные аппараты криогенной техники.— М.: Энергоиздат, 1982.— 312 с.

8. *Григорьев В. А., Павлов Ю. М., Аметистов Е. В.* Кипение криогенных жидкостей.— М.: Энергия, 1977.— 288 с.

9. *Гуйго Э. И., Каухчешвили Э. И., Журавская Н. К.* Сублимационная сушка в пищевой промышленности.— М.: Пищевая промышленность, 1972.— 432 с.

10. *Жекамушев М. К.* Некоторые проблемы формирования структуры градин.— М.: Гидрометиздат, 1982.— 172 с.

11. *Жукаускас А. А.* Конвективный перенос в теплообменниках.— М.: Наука, 1982.— 472 с.

12. *Идельчик Н. К.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Машиностроение, 1975.— 559 с.

13. *Интенсификация* теплообмена в испарителях холодильных машин/[А. А. Гоголин, Г. Н. Данилова, В. М. Азарсков и др.]; под ред. А. А. Гоголина.— М.: Легкая и пищевая промышленность, 1982.— 223 с.

14. *Исаченко В. П.* Теплообмен при конденсации.— М.: Энергия, 1977.— 240 с.

15. *Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С.* Теплопередача.— М.: Энергия, 1981.— 417 с.

16. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел: перевод с английского / под ред. А. А. Померанцева, пер. Ю. Н. Петров, В. М. Еременко, М. Г. Морозов.— М.: Наука, 1964.— 487 с.

17. *Кафаров В. В.* Основы массопередачи.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Высшая школа, 1979.— 439 с.

18. *Керн Д., Краус А.* Развитые поверхности теплообмена: перевод с английского / пер. Ю. А. Загарник, В. Я. Сидоров.— М.: Энергия, 1977.— 462 с.

19. *Кейс В. М., Лондон А. Л.* Компактные теплообменники: перевод с английского / под ред. Ю. В. Петровского, пер. В. Я. Сидоров.— М.: Энергия, 1967.— 223 с.

20. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности.— М.: Наука, 1975.— 212 с.

21. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена.— Новосибирск: Наука, 1970.— 660 с.

22. *Кутепов А. М., Стерман Л. С., Стюшин Н. Г.* Гидродинамика и теплообмен при парообразовании.— М.: Высшая школа, 1977.— 352 с.

23. *Ладыженский Р. М.* Кондиционирование воздуха.— М.: Госторгиздат. 1962.— 386 с.

24. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.— М.: Высшая школа, 1967.— 599 с.

25. *Методика* расчета средних коэффициентов теплоотдачи при кипении фреонов внутри горизонтальных труб / [А. А. Малышев, Г. Н. Данилова, В. М. Азарсков, Б. Б. Земсков].— Холодильная техника, 1983, № 11, с. 35—38.

26. *Михеев М. А.* Основы теплопередачи.— 2-е изд., перераб.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1956.— 392 с.

27. *Михеев М. А., Михеева И. М.* Основы теплопередачи.— 2-е изд., стереотип.— М.: Энергия, 1977.— 343 с.

28. *Петровский Ю. В., Фастовский В. Г.* Современные эффективные теплообменники.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1962.— 256 с.

29. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах.— М.: Энергия, 1967.— 411 с.

30. *Пехович А. И., Жидких В. М.* Расчеты теплового режима твердых тел.— Л.: Энергия, 1968.— 303 с.

31. *Разделение* воздуха методом глубокого охлаждения, т. I / под ред. В. И. Епифановой и Л. С. Аксельрода.— М.: Машиностроение, 1973.— 472 с.

32. *Ткачев А. Г.* Конвективный теплообмен в процессах плавления и затвердевания гомогенной среды.— В кн.: Конвекция, теплопередача в двухфазном и однофазном потоках. М.; Л., 1963, с. 308—325.

33. *Теория* тепломассообмена / [С. И. Исаев, И. А. Кожинов, В. И. Кафанов и др.]; под ред. А. И. Леонтьева.— М.: Высшая школа, 1979.— 495 с.

34. *Тепло- и массообмен.* Теплотехнический эксперимент. Справочник / под ред. В. А. Григорьева и В. М. Зорина.— М.: Энергоиздат, 1982.— 510 с.

35. *Теплообмен* и гидродинамика при конденсации холодильных агентов / [О. П. Иванов, В. О. Мамченко, Ю. Н. Ширяев, В. Н. Барило].— В сб.: Холодильная и криогенная техника и технология. М., 1975, с. 127—142.

36. *Теплообменные* аппараты холодильных установок / [Г. Н. Данилова, С. Н. Богданов, О. П. Иванов, Н. М. Медникова].— Л.: Машиностроение, 1973.— 328 с.

37. *Теплофизические* основы получения искусственного холода. Справочник. Холодильная техника / под ред. А. В. Быкова.— М.: Пищевая промышленность, 1980.— 232 с.

38. *Техника* низких температур / под ред. Е. И. Микулина, И. В. Марфениной, А. М. Архарова.— М.: Энергия, 1975.— 511 с.

39. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1972.— 732 с.

40. *Хаузен Х.* Теплопередача при противотоке, прямотоке и перекрестном токе: перевод с немецкого / пер. И. Н. Дулькин.— М.: Энергоиздат, 1981.— 383 с.

41. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя: перевод с немецкого / под ред. Л. Г. Лойцянского, пер. Г. А. Вольперта.— М.: Наука, 1974.— 712 с.

42. *Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М.* Теория тепло- и массообмена: перевод с английского / под ред. А. В. Лыкова, пер. Э. М. Фурманова, Г. Р. Малявский, Л. Б. Шашкова.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961.— 680 с.

43. *Юшков П. П.* Приближенное решение задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей.— Труды Ин-та энергетики АН БССР, 1958, вып. 60, с. 3—158.

44. *Яненко Н. Н.* Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск: Наука, 1967.— 552 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ