

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени М. И. КАЛИНИНА

В. Н. ВИНЧАКОВ, И. П. ИПАТОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОРОВ И МАТРИЦ В ФИЗИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие

Ленинград
1979

В учебном пособии изложены основы феноменологического метода описания различных явлений в твердых телах. Феноменологическая теория строится в основном на соображениях симметрии и соблюдении правильной тензорной размерности, рассмотрены элементы тензорного анализа и общие свойства тензоров, вытекающие из известной симметрии кристаллов, физические свойства которых эти тензоры описывают. Разобрано и поставлено более 70 задач. Оно рассчитано на студентов старших курсов специальностей 0641, 0604, 0620, 0704, изучающих физику твердого тела (физику полупроводников, физическую электронику, квантовую электронику и т. п.), а также может быть полезно инженерам и научным сотрудникам, работающим в соответствующих областях.

© Ленинградский ордена Ленина политехнический институт имени М. И. Калинина, 1979 г.

Ипатова Ия Павловна, Винчаков Виктор Николаевич
Применение тензоров и матриц в физике твердого тела
Учебное пособие

Редактор С. А. Мартынова
Корректор И. В. Тарасова

М-26692.	Сдано в набор 18.09.79.	Подписано к печати 29.12.79.
Формат бум. 60×90 ^{1/16} .	Бумага тип. № 3.	Печ. л. 4,75.
Уч.-изд. л. 4,5.	Тираж 1000.	Заказ 903. Цена 25 коп. —

Темплан 1979 г., поз. 308.

Издание ЛПИ имени М. И. Калинина
195251, Ленинград, Политехническая ул., 29.

Лаборатория полиграфических машин Ленинградского ордена Ленина политехнического института имени М. И. Калинина
195251, Ленинград, Политехническая ул., 29.

Принятые обозначения

- E — напряженность электрического поля
 H — напряженность магнитного поля
 D — электрическая индукция
 B — магнитная индукция
 P — дипольный момент, электрическая поляризация
 M — магнитный момент, намагниченность
 j — плотность тока
 σ_{ik} — электропроводность
 δ_{ik} — единичный симметричный тензор 2-го ранга
 e_{ikl} — совершенно антисимметричный единичный тензор 3-го ранга
 α_{ik} — диэлектрическая восприимчивость
 ε_{ik} — диэлектрическая проницаемость
 χ_{ik} — магнитная восприимчивость
 μ_{ik} — магнитная проницаемость
 m — эффективная масса носителя тока
 u_{ik} — тензор деформаций
 s_{iklm} — тензор упругой податливости
 c_{iklm} — тензор упругой жесткости
 d_{ikl} — пьезоэлектрический тензор
 n — показатель преломления
-

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее важным свойством кристаллических твердых тел является то, что атомы в них совершают лишь малые колебания относительно регулярно расположенных в пространстве положений равновесия, называемых узлами кристаллической решетки. Разнообразные кристаллические твердые тела классифицируют по симметрии расположения атомов в них.

Следствием кристаллической структуры твердых тел является их *анизотропия*, т. е. зависимость физических свойств этих тел от направления. Чтобы представить эту симметрию направлений, физические характеристики твердых тел записывают в виде тензоров нулевого, первого, второго, третьего и т. д. рангов. Такими физическими величинами оказываются, например, эффективная масса носителей тока, электропроводность, упругие константы и т. п. По этой причине даже простейшие представления теории твердых тел основаны на использовании тензорного и векторного анализа.

Как правило, векторный и тензорный анализ изучается на младших курсах вузов как некоторая абстрактная математическая дисциплина, не имеющая никакого отношения к физике твердого тела. Поэтому проведение упражнений по тензорному и векторному анализу на примере задач физики твердого тела является необходимым дополнением к курсам по физике твердых тел.

Однако роль векторного и тензорного анализа в физике твердого тела не сводится к чисто описательной функции. Векторный и тензорный анализ по существу вооружает физику специальным теоретическим методом, известным в теории как феноменологический подход. Феноменологическая теория строится в основном на использовании соображений симметрии и соблюдении правильной тензорной размерности. В ней не применяются какие-либо сложные расчеты микроскопической теории.

Обучение этому теоретическому методу на целом ряде задач физики твердого тела — такова основная задача дан-

ного учебного пособия. При его написании авторы широко использовали методологический подход и задачи из книг Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [2, 3, 5, 7]. Использована также книга Дж. Ная [1].

По-видимому, во введении следует указать, что пособие не ставит своей целью строгое определение математических понятий, доказательство теорем и т. п. Считается, что все это было проделано ранее в курсах математики. Речь идет скорее об установлении связи определенных разделов математики с современными представлениями физики твердого тела. Поэтому понятие о тензоре вводится сначала на примере анизотропии свойств кристалла. Только потом, когда уяснен физический смысл тензора, дается его строгое определение. Математически строгое и подробное изложение тензорного анализа дано, например, в [8, 9]. Авторы благодарят Д. А. Паршина за помощь в подборе задач.

Глава I. ПОНЯТИЕ О ТЕНЗОРАХ И МАТРИЦАХ

§ 1. Тензор как способ описания анизотропных свойств твердых тел

Наиболее важной особенностью твердых тел является то, что атомы в них расположены в пространстве периодически, образуя кристаллическую решетку. Изучая свойства твердых тел, мы сталкиваемся с несколькими типами существенно различных физических характеристик этих тел. Некоторые величины, такие, например, как плотность или температура, не зависят от направления в твердом теле. Их называют *скалярами*, или тензорами нулевого ранга. Значение скаляра определяется всего лишь одним числом, характеризующим его величину.

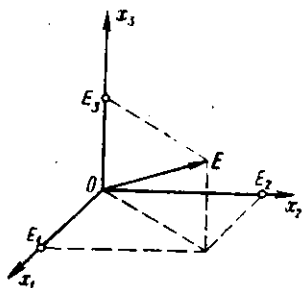


Рис. 1. Способ задания вектора

Физические величины другого типа определяют всегда по отношению к направлению в кристалле. Простейшие величины такого типа являются *векторами*, или тензорами 1-го

ранга. Таковы, например, напряженность электрического поля в точке, сила и т. п. В отличие от скаляра вектор задается не только величиной, но и направлением. Чтобы определить вектор, можно задать его проекции на взаимно перпендикулярные оси координат (рис. 1): $E = (E_1, E_2, E_3)$.

Таким образом, в заданной системе координат вектор определяется заданием *трех* чисел — его проекций. Однако вектором не исчерпывается перечень зависящих от направления характеристик твердого тела. Действительно, пусть электрическое поле E приложено к проводнику, имеющему некоторую кристаллическую структуру. Особенностью кристаллического твердого тела является то, что возникающий в нем ток плотностью j вообще говоря не параллелен полю,

т. е. потечет не только вдоль E , но и по двум, перпендикулярным к E , направлениям. Приложим поле по оси Ox_1 , т. е. $E = (E_1, 0, 0)$, тогда в анизотропном кристалле будут отличными от нуля все три компоненты плотности тела $j = (j_1, j_2, j_3)$:

$$j_1 = \sigma_{11}E_1; \quad j_2 = \sigma_{21}E_1; \quad j_3 = \sigma_{31}E_1. \quad (1)$$

Здесь величины σ_{11} , σ_{21} , σ_{31} являются константами: σ_{11} определяет продольную (направленную по E) компоненту тока, а σ_{21} и σ_{31} — поперечные компоненты тока (при заданном E). Из (1) видно, что вектор j не совпадает по направлению с вектором поля E .

При произвольном направлении поля, когда $E = (E_1, E_2, E_3)$, вместо (1) следует написать более общие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3; \\ j_2 &= \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3; \\ j_3 &= \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Таким образом, для описания электропроводности нам приходится задать девять чисел σ_{ik} ; $i, k = 1, 2, 3$. Принято записывать компактно эти девять чисел в виде таблицы

$$[\sigma_{ik}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где первый значок означает номер строки, а второй — номер столбца.

Физическая величина $[\sigma]$, изображаемая с помощью таблицы (3), является *тензором 2-го ранга*. Тензорами 2-го ранга помимо электропроводности описываются теплопроводность, электрическая и магнитная восприимчивости, обратная эффективная масса свободных носителей тока и т. п. Итак, имеем:

1) Скаляр, или тензор нулевого ранга, определяется числом, которое не зависит от выбранной системы координат. Соответственно скаляр не имеет индексов.

2) Вектор, или тензор 1-го ранга, определяется тремя числами, каждое из которых задано по отношению к одной из осей координат. Поэтому компоненты вектора имеют один индекс.

3) Тензор 2-го ранга определяется девятью числами, заданными по отношению к паре осей координат. Соответственно компоненты тензора 2-го ранга имеют два индекса. Согласно (2) тензор 2-го ранга $[\sigma_{ik}]$ осуществляет связь между двумя векторами j и E .

§ 2. Запись с индексами суммирования

Тензорные формулы, записанные в форме (2), довольно громоздки. В тензорном анализе для упрощения употребляется сокращенная запись с индексами суммирования. Действительно, вводя вместо второго значка в тензоре $[\sigma]$ индекс k , меняющийся от 1 до 3, запишем (2) в виде

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= \sum_{k=1}^3 \sigma_{1k} E_k; \\ j_2 &= \sum_{k=1}^3 \sigma_{2k} E_k; \\ j_3 &= \sum_{k=1}^3 \sigma_{3k} E_k. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Запись (4) можно еще упростить и записать в виде одной строки $j_i = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} E_k$, где $i = 1, 2, 3$. Наконец, в этом выражении можно без ущерба опустить знак суммирования:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k. \quad (5)$$

Однако при этом следует помнить, что по повторяющемуся дважды в одном и том же члене индексу подразумевается суммирование. Повторяющимся индексом в (5) справа является индекс k . Его принято называть *немым индексом*. Стоящий слева и справа в (5) индекс i , по которому суммирования нет, называют *свободным индексом*. Рассмотрим более сложное уравнение:

$$A_{ik} + B_{il} C_{lm} D_{mk} = E_{il} F_{lk}. \quad (6)$$

Здесь i и k — свободные индексы, повторяющиеся в каждом слагаемом. По ним нет суммирования. Индексы l и m — здесь немые индексы суммирования. Подобно замене переменной в интеграле $\int f(x) dx = \int f(t) dt$ немой индекс суммирования всегда можно переобозначить другой буквой. Например, в (6)

$$E_{il} F_{lk} = E_{if} F_{fk} = E_{ip} F_{pk}.$$

Свободные индексы при такой тензорной записи должны быть одинаковы в каждом члене тензорного уравнения. Эти свободные индексы определяют тензорную размерность каждого члена. Например, в (5) свободный индекс слева только один (i), и величина j_i является компонентой вектора. Справа в (5) свободный индекс тот же — i . Поэтому произведение $\sigma_{ik} E_k$ также является i -й компонентой вектора. Наличие немой индекса k в этом выражении не влияет на его тензорную размерность. Таким образом, (5) выражает согласно тензорной размерности равенство двух векторов j и σE . В (6) в каждом слагаемом имеется два свободных индекса i и k . Это равенство означает, что сумма тензоров 2-го ранга A_{ik} и

$B_{ii}C_{lm}D_{mk}$ равна тензору 2-го ранга $E_{ii}F_{ik}$. Следует подчеркнуть, что установление тензорной размерности физических формул является хорошей проверкой их правильности.

§ 3. Преобразования координат

Компоненты тензора так же, как и проекции вектора, задаются обычно в некоторой системе координат. В физических задачах часто приходится производить преобразования компонент векторов и тензоров от одной системы координат к другой, например от косоугольной, построенной на основных векторах кристаллической решетки, к декартовой, и наоборот. Наша задача теперь найти, как изменяются девять компонент тензора 2-го ранга при преобразованиях системы координат. Конечно, при замене осей координат физическая величина не изменяется, а изменяется только наш способ ее представления.

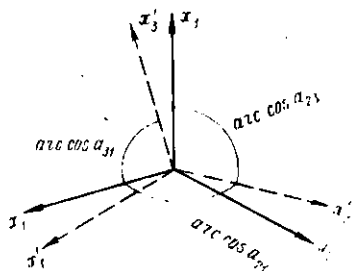


Рис. 2. Ортогональное преобразование координат (поворот осей координат)

Преобразование осей координат. Под преобразованием осей координат мы будем понимать переход от одной системы координат к другой с тем же началом координат. Обозначим первую (старую) систему координат x_1, x_2, x_3 , а вторую (новую) систему через x_1', x_2', x_3' (рис. 2). Углы между новой и старой системами координат определяются таблицей направляющих косинусов:

	x_1	x_2	x_3	
x_1'	a_{11}	a_{12}	a_{13}	(7)
x_2'	a_{21}	a_{22}	a_{23}	
x_3'	a_{31}	a_{32}	a_{33}	

Здесь первый индекс у величин a_{ik} относится к новым осям, а второй — к старым. Например, направляющие косинусы между новой осью Ox_2' и старыми осями Ox_1, Ox_2, Ox_3 равны соответственно a_{21}, a_{22} и a_{23} (см. рис. 2). Таблица направляющих косинусов легко позволяет записать новые координаты через старые:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3; \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из (8) видно, что, например, x_1' является суммой проекций x_1 , x_2 и x_3 на направление x_1' . Проектирование осуществляется направляющими косинусами a_{11} , a_{12} и a_{13} соответственно. Уравнение (8) можно записать, используя индексы суммирования,

$$x_i' = a_{ik} x_k \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Направляющие косинусы a_{ik} образуют таблицу из девяти коэффициентов (7), которую называют *матрицей* данного преобразования. Таблица (7) позволяет записать и старые координаты через новые:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + a_{31}x_3', \\ x_2 &= a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{32}x_3', \\ x_3 &= a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3', \end{aligned}$$

или в записи с индексами суммирования

$$x_i = a_{ik} x_k'. \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), видим, что при переходе от старой системы координат к новой индексы суммирования стоят рядом. При обратном преобразовании индексы суммирования отделены друг от друга. Матрица (a_{ik}) — это таблица из девяти коэффициентов и внешне напоминает определенный нами ранее тензор 2-го ранга. Однако сходство это чисто внешнее. Матрица (a_{ik}) является *таблицей коэффициентов*, связывающих *две системы координат*, тогда как тензор $[\sigma_{ik}]$ является *физической величиной*, которая в *одной заданной системе координат* представляется девятью числами. Далее символы матриц будем заключать в круглые скобки, символы тензоров — в квадратные.

Итак, все тензоры могут быть изображены в виде матриц. Для тензоров 2-го ранга такой способ представления наиболее естествен. Однако не все матрицы обязательно представляют тензоры.

Соотношение между направляющими косинусами. Девять коэффициентов матрицы преобразования не являются независимыми. Это видно из рассмотрения числа степеней свободы преобразования. Если оси Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 заданы, то для определения направления Ox_1' необходимо задать два угла (широту и долготу). Новые оси могут быть повернуты вокруг Ox_1' . Таким образом, для определения преобразования нужны три независимые величины. Следовательно, между девятью коэффициентами должны существовать шесть независимых соотношений. Так как каждая строка (7) содержит направляющие косинусы прямой линии по отношению к ортогональ-

ным осям Ox_1, Ox_2, Ox_3 , то

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1; \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1; \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Так как каждая пара строк таблицы (7) представляет собой направляющие косинусы двух взаимно перпендикулярных прямых, то

$$\left. \begin{aligned} a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0; \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} &= 0; \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Используя индексы суммирования, (11) и (12) можно компактно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{ik}a_{jk} &= 0, \text{ если } i \neq j, \\ a_{ik}a_{jk} &= 1, \text{ если } i = j. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Соотношение ортогональности (13) можно записать в более компактной форме, если ввести символ Кронекера δ_{ik} , определяемый следующим образом:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Тогда (13) запишется в окончательной форме $a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$. Если выписать в виде таблицы значения δ_{ij} , то получится единичная матрица

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наиболее важным является следующее свойство матрицы δ_{ik} :

$$\delta_{ik}A_k = A_i,$$

т. е. умножение A_k на δ_{ik} приводит к замене индекса k на i . Аналогичное действие δ_{ik} оказывает и на тензор 2-го ранга: $\delta_{ik}\sigma_{kl} = \sigma_{il}$. Благодаря этому свойству δ_{ik} иногда называют матрицей замещения.

Определитель ортогональных преобразований. Определитель матрицы (a_{ik}) равен

$$\|a_{ik}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \\ + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \quad (14)$$

Разрешая (12) относительно a_{11} , a_{12} , a_{13} , имеем

$$\frac{a_{11}}{a_{33}a_{23} - a_{33}a_{22}} = \frac{a_{12}}{a_{33}a_{21} - a_{31}a_{23}} = \frac{a_{13}}{a_{31}a_{22} - a_{32}a_{21}} = -\frac{1}{K}, \quad (15)$$

где K — константа. Подставляя знаменатели из (15) в (14), с учетом (11) получим

$$\|a_{ik}\| = K(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) = K.$$

Можно показать [1], что для ортогональных преобразований $K = \pm 1$. Тогда для преобразований, преобразующих правую систему координат в правую, а левую в левую (истинное вращение без инверсии осей), $\|a_{ik}\| = +1$. Для преобразований, при которых правая система координат становится левой, а левая — правой (вращения, сопровождающиеся инверсией), $\|a_{ik}\| = -1$. Положив $K = \pm 1$ в (15), получим три соотношения, которые нам понадобятся ниже:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \pm (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}); \\ a_{12} &= \pm (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}); \\ a_{13} &= \pm (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Преобразование компонент вектора. Пусть в системе координат $x_1x_2x_3$ задан вектор $j = (j_1, j_2, j_3)$. Найдем его компоненты j_1', j_2', j_3' в новой системе координат x_1', x_2', x_3' . Компонента j_1' получается проектированием j_1, j_2, j_3 , направленных соответственно по осям Ox_1, Ox_2, Ox_3 , на новую ось Ox_1' и суммированием этих проекций. Очевидно, что проектирование осуществляется направляющими косинусами, приведенными в (7):

$$j_1' = a_{11}j_1 + a_{12}j_2 + a_{13}j_3.$$

Аналогично находим для двух других компонент

$$j_2' = a_{21}j_1 + a_{22}j_2 + a_{23}j_3,$$

$$j_3' = a_{31}j_1 + a_{32}j_2 + a_{33}j_3,$$

или в сокращенной записи с индексами суммирования:

$$j_i' = a_{ik}j_k. \quad (17)$$

Сравнивая (17) с (9), видим, что компоненты произвольного вектора j преобразуются так же, как и сами координаты. По аналогии с (10) можно записать обратное преобразование для компонент вектора:

$$j_i = a_{ki} j'_k. \quad (18)$$

Преобразование компонент тензора 2-го ранга. Рассмотрим снова ток

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \quad (19)$$

где девять чисел σ_{ik} заданы относительно системы координат Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Возьмем новую систему координат Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 , в которой связь тока j' с полем E' имеет вид

$$j'_i = \sigma'_{ik} E'_k.$$

Нас интересует связь между σ'_{ik} и σ_{ik} . Чтобы найти эту связь, выполним следующую последовательность преобразований. Возьмем соотношение (17) и подставим в него j в виде (19), тогда

$$j'_i = a_{ik} \sigma_{km} E_m. \quad (20)$$

Выразим теперь E_m в (20) через E'_l по правилу (18), тогда

$$j'_i = a_{ik} \sigma_{km} a_{lm} E'_l = \sigma'_{il} E'_l,$$

где

$$\sigma'_{il} = a_{ik} \sigma_{km} a_{lm} = a_{ik} a_{lm} \sigma_{km}. \quad (21)$$

Соотношение (21) дает нужную связь преобразованного σ'_{il} с первоначальным σ_{km} , т. е. правило преобразования тензора 2-го ранга.

Аналогичным способом можно найти преобразование, обратное (21):

$$\sigma_{km} = a_{ik} a_{lm} \sigma'_{il}. \quad (22)$$

Так же, как и в случае преобразования вектора, в прямом преобразовании (21) индексы суммирования стоят как можно ближе друг к другу, а в обратном преобразовании (22), наоборот, они стоят как можно дальше друг от друга.

Соотношение (21) может рассматриваться как определение тензора 2-го ранга. Действительно, если в некоторой системе координат девять величин σ_{ik} линейно связывают компоненты векторов j и E , то при переходе к новой системе координат компоненты σ_{ik} преобразуются по закону (21) и, следовательно, образуют тензор 2-го ранга.

Преобразование произведения координат. Для анализа свойств симметрии тензоров нам полезно установить связь (21) с правилом преобразования произведения координат. Из

(9) имеем для произведения координат

$$x_i' x_k' = a_{im} x_m a_{kn} x_n = a_{im} a_{kn} x_m x_n. \quad (23)$$

Сравнивая (23) с (21), видим, что закон преобразования тензора 2-го ранга совпадает с законом преобразования произведения двух координат. Можно сказать, что тензором 2-го ранга называют совокупность девяти величин σ_{ik} , которые при преобразовании координат (9) преобразуются как произведение двух координат. Аналогия между компонентами тензора и произведениями координат распространяется и на тензоры более высокого ранга. Так, тензором 3-го ранга мы будем называть величину, преобразующуюся как произведение трех координат, тензором 4-го ранга — как произведение четырех координат и т. д.

§ 4. Симметричный и антисимметричный тензоры

Тензор 2-го ранга $[A_{ik}]$ является симметричным, если его компоненты удовлетворяют условию

$$A_{ik} = A_{ki}. \quad (24)$$

Если записать этот тензор в виде таблицы

$$[A_{ik}] = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix},$$

то видно, что он имеет всего шесть независимых компонент, так как недиагональные компоненты попарно равны. Симметричным тензором 2-го ранга является, например, электропроводность кристалла.

Тензор 2-го ранга $[A_{ik}]$ называют антисимметричным, если его компоненты удовлетворяют условию

$$A_{ik} = -A_{ki}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$. Следовательно, в этом случае

$$[A_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Произвольный тензор $[A_{ik}]$ можно разложить на симметричную и антисимметричную части по следующему правилу: $A_{ik} = B_{ik} + C_{ik}$, где симметричная часть

$$B_{ik} = \frac{1}{2} (A_{ik} + A_{ki}) \quad (26)$$

и антисимметричная часть

$$C_{ik} = \frac{1}{2} (A_{ik} - A_{ki}). \quad (27)$$

Прямой проверкой убеждаемся, что (26) удовлетворяет требованию (24), а (27) — требованию (25).

§ 5. Диэлектрическая проницаемость

Рассмотренной в § 1 электропроводностью далеко не исчерпывается перечень тензорных величин, употребляемых в физике твердого тела. В целом можно сказать, что большинство уравнений физики твердого тела из-за анизотропии кристаллов носит тензорный характер. В этой главе мы рассмотрим еще два примера — тензор диэлектрической проницаемости и тензор инерции.

В диэлектрике, внесенном в электрическое поле E , возникает электрическая поляризация P , которая характеризуется дипольным моментом единицы объема. Поскольку внешнее поле E мало по сравнению с внутренним молекулярным полем, P можно разложить в ряд по E и сохранить только линейные по E члены. Используя индексы суммирования, запишем это разложение в виде

$$P_i = P_i^{(0)} + \left(\frac{\partial P_i}{\partial E_k} \right)_0 E_k = P_i^{(0)} + \alpha_{ik} E_k. \quad (28)$$

Здесь $P_i^{(0)}$ — вектор спонтанной поляризации, отличный от нуля только для пьезоэлектрических кристаллов; в дальнейшем считаем $P_i^{(0)} = 0$. Для соблюдения одинаковой тензорной размерности обеих частей равенства (28) нужно считать, что $\alpha_{ik} = \left(\frac{\partial P_i}{\partial E_k} \right)_0$ является тензором 2-го ранга, так как α_{ik} осуществляет связь между двумя векторами P и E . Можно также утверждать, что α_{ik} — тензор 2-го ранга, так как представляет собой производную вектора по вектору (см. задану 9 к главе I). Таким образом, в анизотропных средах векторы P и E не совпадают по направлению подобно j и E в § 1. Сумма векторов E и $4\pi P$ в электродинамике называется вектором электрической индукции

$$D = E + 4\pi P. \quad (29)$$

Подставляя в (29) соотношение (28) и используя индексы суммирования, имеем

$$D_i = E_i + 4\pi \alpha_{ik} E_k. \quad (30)$$

Вводя единичный тензор δ_{ik} , (30) удобно переписать в виде

$$D_i = (\delta_{ik} + 4\pi \alpha_{ik}) E_k.$$

Величину $\varepsilon_{ik} \equiv \delta_{ik} + 4\pi\alpha_{ik}$ называют диэлектрической проницаемостью среды. В анизотропной среде $[\varepsilon_{ik}]$ также является тензором 2-го ранга, который в явном виде записывается так:

$$[\varepsilon_{ik}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 4\pi\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 1 + 4\pi\alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 + 4\pi\alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

На основе обобщенного принципа симметрии кинетических коэффициентов [2] можно показать, что тензоры $[\alpha_{ik}]$ и $[\varepsilon_{ik}]$ симметричны, т. е.

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}; \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}.$$

§ 6. Тензор инерции

Скорость w любой точки твердого тела относительно неподвижной системы координат складывается из скорости центра инерции твердого тела v и слагаемого, выраженного через угловую скорость его вращения Ω [3]:

$$w = v + [\Omega \times r]. \quad (31)$$

Кинетическая энергия твердого тела, если его рассматривать как дискретную систему точек, равна

$$T = \sum \frac{mw^2}{2}, \quad (32)$$

где суммирование идет по всем точкам тела. Подставляя (31) в (32), имеем

$$T = \sum \frac{m}{2} \{v + [\Omega \times r]\}^2 = \sum \frac{m}{2} v^2 + \\ + \sum m (v \cdot [\Omega \times r]) + \sum \frac{m}{2} [\Omega \times r]^2. \quad (33)$$

Второе слагаемое в (33) равно нулю, если начало движущейся системы координат выбрано в центре инерции тела:

$$\sum m (v \cdot [\Omega \times r]) = \sum m (r [v \times \Omega]) = [v \times \Omega] \sum mr \equiv 0.$$

Раскрывая в третьем слагаемом (33) квадрат векторного произведения, получим

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \{\Omega^2 r^2 - (\Omega r)^2\}. \quad (34)$$

В (34) первое слагаемое дает энергию поступательного движения твердого тела, а второе описывает чисто вращательное движение. Рассмотрим далее эту вращательную часть

кинетической энергии и запишем ее, используя индексы суммирования,

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \}. \quad (35)$$

Используя тождество $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$, запишем (35) в виде

$$\begin{aligned} T_{\text{вр}} &= \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \} = \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \end{aligned}$$

или $T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$, где тензор моментов инерции имеет вид

$$I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k).$$

Из определения видно, что I_{ik} — симметричный тензор, т. е. $I_{ik} = I_{ki}$. Выпишем для наглядности его компоненты в явном виде

$$\{I_{ik}\} = \begin{bmatrix} \sum m (x_2^2 + x_3^2) & -\sum m x_1 x_2 & -\sum m x_1 x_3 \\ -\sum m x_2 x_1 & \sum m (x_3^2 + x_1^2) & -\sum m x_2 x_3 \\ -\sum m x_3 x_1 & -\sum m x_3 x_2 & \sum m (x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что компоненты I_{ik} определяют вращательные свойства твердых тел.

ЗАДАЧИ

1. Записать скалярное произведение двух векторов $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, используя индексы суммирования.

2. Используя индексы суммирования, записать равенство $\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$.

3. Найти таблицу направляющих косинусов, определяющих поворот системы координат вокруг оси Ox_3 на угол α . То же вокруг осей Ox_1 и Ox_2 .

4. Прямой подстановкой из (9) найти произведение $x'_1 x'_2$. Показать, что этот же результат получается из (23).

5. Доказать, что основные свойства симметричного (25) и антисимметричного (27) тензоров не зависят от выбора системы координат. (Показать, что если $A_{ik} = \pm A_{ki}$, то в преобразованной системе координат $A'_{ik} = \pm A'_{ki}$).

6. Используя обозначения с индексами суммирования, показать, что квадрат длины вектора не меняется при ортогональном преобразовании координат ($|j|^2$ — инвариант).

7. Тензор электропроводности некоторого кристалла в системе координат x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$[\sigma_{ik}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты σ'_{ik} к новой системе координат, повернутой относительно x_1, x_2, x_3 на 90° вокруг: 1) Ox_3 ; 2) Ox_1 .

8. Показать, что производная от скалярной функции по компонентам вектора является вектором.

9. Показать, что производная от векторной функции по вектору является тензором второго ранга.

10. Показать, что производная от скаляра по двум векторным аргументам — тензор второго ранга.

11. Разложить тензор

$$[A_{ik}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

на симметричную и антисимметричную части.

12. Найти матрицу преобразования величин

$$\xi_1 = x + iy,$$

$$\xi_2 = x - iy,$$

$$\xi_3 = z$$

при повороте системы координат xyz на угол α вокруг оси Oz .

13. Исходя из соображений тензорной размерности, записать феноменологическое выражение для тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ik}(E)$ некоторого кристалла как функции электрического поля с точностью до членов 2-го порядка. Переписать это выражение для кубического кристалла.

Глава II. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕНЗОРА 2-го РАНГА

§ 7. Понятие о характеристической поверхности

Уравнение поверхности второго порядка (эллипсоида или гиперболоида) с центром в начале координат в самом общем виде записывается в форме

$$s_{11}x_1^2 + s_{12}x_1x_2 + s_{13}x_1x_3 + s_{21}x_2x_1 + s_{22}x_2^2 + \\ + s_{23}x_2x_3 + s_{31}x_3x_1 + s_{32}x_3x_2 + s_{33}x_3^2 = 1. \quad (36)$$

Здесь s_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) — постоянные коэффициенты. Используя индексы суммирования, можно записать (36) в виде

$$s_{ik}x_ix_k = 1. \quad (37)$$

Пусть в (37) коэффициенты s_{ik} удовлетворяют соотношениям

$$s_{12} = s_{21}; \quad s_{13} = s_{31}; \quad s_{23} = s_{32},$$

или, используя индексы суммирования,

$$s_{ik} = s_{ki}. \quad (38)$$

Уравнение (37) можно преобразовать к новым координатным осям Ox_1, Ox_2, Ox_3 с помощью (10). Получим

$$s_{ik}a_{mi}a_{nh}x'_m x'_n = 1. \quad (39)$$

Уравнение (39) можно переписать в виде

$$s'_{mn} x'_m x'_n = 1,$$

где

$$s'_{mn} \equiv a_{mi} a_{nj} s_{ik}. \quad (40)$$

Сравнивая (40) с правилом преобразования тензора 2-го ранга (21) и (38) с определением симметричного тензора (24), видим, что коэффициенты s_{ik} преобразуются подобно компонентам симметричного тензора 2-го ранга.

Уравнение (37) такой поверхности содержит столько же независимых коэффициентов, сколько независимых компонент имеет тензор 2-го ранга. Другими словами, такая поверхность полностью характеризует физическую величину, описываемую тензором 2-го ранга. Поэтому поверхность (37) называют *характеристической поверхностью для симметричного тензора*.

§ 8. Главные оси характеристической поверхности

Важным для нас свойством характеристической поверхности является то, что она обладает главными осями — тремя лежащими под прямыми углами друг к другу направлениями, по отношению к которым, если их взять за оси координат, уравнение поверхности 2-го порядка (36) приводится к упрощенной форме

$$s_1 x_1^2 + s_2 x_2^2 + s_3 x_3^2 = 1. \quad (41)$$

Соответственно симметричный тензор

$$[s_{ik}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}$$

в главных осях записывается в форме

$$\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}.$$

Числа s_1, s_2, s_3 называют главными значениями тензора $[s_{ik}]$.

Сравнивая (41) с каноническим уравнением поверхности второго порядка

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1,$$

мы видим, что полуоси a , b , c характеристической поверхности имеют длину $1/\sqrt{s_1}$, $1/\sqrt{s_2}$, $1/\sqrt{s_3}$.

Когда величины s_1 , s_2 , s_3 положительны, то поверхность представляет собой эллипсоид (рис. 3, а). Если два коэффициента положительны, а один отрицателен, то поверхность является однополостным гиперболоидом (рис. 3, б). Если один коэффициент положительен, а два отрицательны, то поверхность является двухполостным гиперболоидом (см. рис. 3, в). Если все три коэффициента отрицательны, то по-

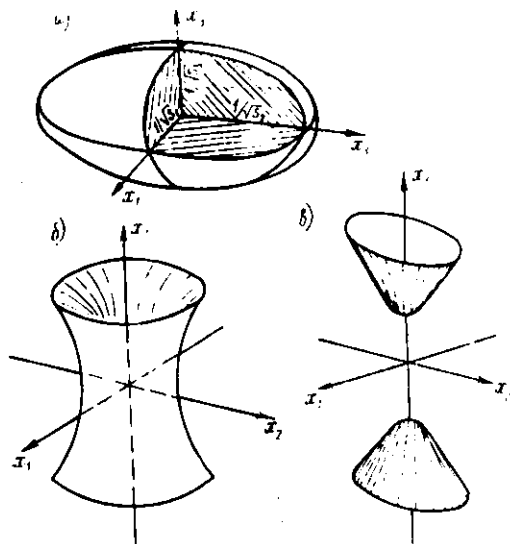


Рис. 3. Характеристические поверхности тензора второго ранга:

а — эллипсоид; б — однополостный гиперболоид; в — двухполостный гиперболоид

верхность представляет собой минимый эллипсоид. Отметим, что у симметричного тензора всего шесть независимых компонент. Если тензор приведен к главным осям, то число компонент уменьшается до трех. Однако полное число параметров по-прежнему равно шести, так как еще три независимые величины нужны для определения направления осей координат.

Аналогично тому, как упрощается уравнение характеристической поверхности при переходе от произвольных осей координат к главным осям, упрощаются также и любые тензорные уравнения. Например, вместо формул (2), выражающих связь электрического тока с полем, имеем

$$j_1 = \sigma_1 E_1; \quad j_2 = \sigma_2 E_2; \quad j_3 = \sigma_3 E_3, \quad (42)$$

где σ_1 , σ_2 , σ_3 — главные значения тензора электропроводности.

Если электрическое поле E направлено по оси Ox_1 , совпадающей с одной из главных осей, т. е. $E = (E_1, 0, 0)$, то $j_2 = j_3 = 0$. Следовательно, j также параллелен Ox_1 . Таким образом, если поле E направлено вдоль любой из главных осей, то вектор тока j при этом $\parallel E$.

§ 9. Геометрические свойства характеристической поверхности

Рассмотрим характеристическую поверхность, соответствующую тензору электропроводности,

$$\sigma_{ij}E_iE_j = \text{const.} \quad (43)$$

Стоящая в (43) слева величина имеет размерность энергии, поэтому (43) — уравнение изоэнергетической поверхности. Радиус-вектор этой поверхности OP для произвольного направления E *направлен под углом* к нормали, проведенной в точке P поверхности (рис. 4). Для произвольной поверхности $\varphi(E_1, E_2, E_3) = \text{const.}$, заданной в декартовой системе координат, вектор нормали к поверхности определяется соотношением

$$n_i = \frac{\partial \varphi}{\partial E_i}.$$

В нашем случае $\varphi = \sigma_{ij}E_iE_j$ и, следовательно,

$$n_i = \frac{\partial \varphi}{\partial E_i} = 2\sigma_{ij}E_j = 2j_i,$$

т. е. направления вектора нормали и тока совпадают.

Таким образом, чтобы найти направление тока при заданном направлении электрического поля E , нужно в точке пересечения вектора E с характеристической поверхностью построить нормаль и провести вектор тока из центра эллипсоида параллельно этой нормали. На рис. 4 хорошо видно, что имеются всего три взаимно перпендикулярных направления, для которых направление радиус-вектора E совпадает с направлением нормали j . Как видно из (42), именно эти на-

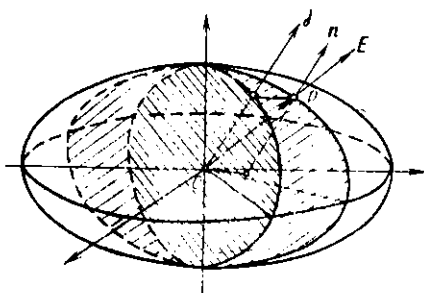


Рис. 4. Определение направления тока по заданному E с помощью эллипсоида $[\sigma_{ik}]$

правления соответствуют главным осям тензора $[\sigma_{ik}]$. Таким образом, определяющим свойством главных осей является то, что в точках их пересечения с характеристической поверх-

ностью нормаль к поверхности параллельна радиус-вектору. Условие параллельности можно записать в виде $\sigma_{ik}E_k = \lambda E_i$, где λ — некоторое число. Это система трех линейных уравнений относительно E_i . Она имеет отличные от нуля решения при равенстве нулю определителя системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (44)$$

Используя индексы суммирования, (44) можно записать в виде $\|\sigma_{ik} - \lambda\delta_{ik}\| = 0$. Это кубическое уравнение для λ называется вековым уравнением. Три решения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ этого уравнения определяют три направления, вдоль которых радиус-вектор характеристической поверхности параллелен нормали, т. е. направлению главных осей. Покажем, что эти три направления действительно взаимно ортогональны. Рассмотрим два таких направления E_i' и E_i'' , определяемых корнями λ_1 и λ_2 :

$$\sigma_{ik}E_k' = \lambda_1 E_i'; \quad (45a)$$

$$\sigma_{ik}E_k'' = \lambda_2 E_i''. \quad (45b)$$

Умножим первое уравнение на E_i'' , а второе — на E_i' и вычтем второе уравнение из первого:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}(E_k'E_i'' - E_k''E_i') &= (\lambda_1 E_i'E_i'' - \lambda_2 E_i''E_i') = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)E_i'E_i''. \end{aligned} \quad (46)$$

Так как $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, то левая сторона (46) равна нулю. Поэтому $(\lambda_1 - \lambda_2)E_i'E_i'' = 0$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то скалярное произведение $E_i'E_i'' = 0$ и эти векторы ортогональны. Направления трех главных осей определяют следующим образом. Подставляя найденные λ_i в исходную линейную систему уравнений, находят два из трех направлений. Третье направление можно найти, построив перпендикуляр к первым двум. Умножая обе части первого уравнения из (45) на E_i' и сравнивая с (43), имеем

$$\sigma_{ik}E_k'E_i' = \lambda_1 E_i'E_i' = \text{const.}$$

Длина радиус-вектора E_i' этой характеристической поверхности, соответствующего корню λ_1 , равна

$$E_i' = \sqrt{(E_i'E_i')} = \text{const}/\sqrt{\lambda_1}.$$

Если обозначить длины главных осей тензора $\{\sigma_{ik}\}$ через $1/\sqrt{\sigma_1}$, $1/\sqrt{\sigma_2}$ и $1/\sqrt{\sigma_3}$, то получим, что $\lambda_1 = \sigma_1$; $\lambda_2 = \sigma_2$; $\lambda_3 = \sigma_3$. Таким

образом, три корня уравнения (44) являются тремя главными значениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Если поверхность 2-го порядка уже приведена к главным осям, то (44) упрощается и принимает вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(\sigma_1 - \lambda)(\sigma_2 - \lambda)(\sigma_3 - \lambda) = 0.$$

При этом равенство корней λ_i главным значениям становится очевидным.

§ 10. Тензор обратной эффективной массы носителей тока

В физике характеристические поверхности чаще всего используют для изображения тензоров с положительными собственными значениями. Рассмотрим для примера тензор обратной эффективной массы носителей тока.

В кристалле зависимость энергии электрона $E(\mathbf{p})$ от его квазиимпульса $\mathbf{p}$ имеет, вообще говоря, довольно сложную форму. В полупроводниках концентрации носителей тока, как правило, не слишком велики, и электроны занимают небольшой объем $\mathbf{p}$ -пространства вблизи минимума $E(\mathbf{p})$. Пусть минимум $E(\mathbf{p})$ расположен в точке $\mathbf{p}_0$ зоны Бриллюэна. Разлагая $E(\mathbf{p})$ в ряд по $\mathbf{p}$ вблизи $\mathbf{p}_0$ и ограничиваясь квадратичным приближением, получим

$$E(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k} \right)_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} (p_{i0} - p_i)(p_{k0} - p_k). \quad (47)$$

Так как разложение произведено вблизи минимума, то линейные члены в разложении равны нулю. Величина

$$m_{ik}^{-1} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_k} \quad (48)$$

является второй производной от скаляра по двум векторным аргументам и преобразуется как тензор 2-го ранга (см. задачу 10 главы I). Из определения (48) следует, что m_{ik}^{-1} — симметричный тензор 2-го ранга. Он имеет размерность обратной массы и его называют тензором обратной эффективной массы.

Вблизи потолка электронной зоны $E(\mathbf{p})$ имеет максимум, и $\partial^2 E / \partial p_i \partial p_k < 0$. Изоэнергетическая поверхность для такого электрона является мнимым эллипсоидом. Однако можно ввести понятие о дырках как о квазичастицах с положитель-

ным зарядом и обратной массой $(m_{ik}^{-1})_p$, равной

$$(m_{ik}^{-1})_p = - (m_{ik}^{-1})_n.$$

Главные значения этого тензора всегда положительны, и изоэнергетические поверхности для дырок оказываются действительными эллипсоидами.

Итак, из (47) видно, что характеристической поверхностью тензора $[m_{ik}^{-1}]$ является изоэнергетическая поверхность $E(p) = \text{const}$, имеющая форму эллипсоида. В главных осях уравнение этой изоэнергетической поверхности имеет вид

$$\frac{p_1^2}{m_1} + \frac{p_2^2}{m_2} + \frac{p_3^2}{m_3} = \text{const}, \quad (49)$$

где m_1^{-1} , m_2^{-1} , m_3^{-1} — главные значения тензора $[m_{ik}^{-1}]$.

Уравнение (49) упрощается при учете симметрии кристалла. Так, в полупроводниках Ge и Si с кубической симметрией изоэнергетические поверхности оказываются эллипсоидами вращения. Если ось вращения направить по оси Ox_3 , то (49) превращается в

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{m_t} + \frac{p_3^2}{m_l} = \text{const},$$

где $m_t = m_1 = m_2$ — поперечная масса, а $m_l = m_3$ — продольная масса.

В полупроводниковых соединениях типа $A^{III}B^V$ (InSb, GaP и т. п.) изоэнергетические поверхности вблизи экстремумов зоны проводимости и валентной зоны близки к сферическим, так что тензор $[m_{ik}^{-1}]$ сводится к скаляру: $m_{ik}^{-1} = m^{-1}\delta_{ik}$, а характеристическая поверхность является сферой

$$\frac{p^2}{m} = \text{const}.$$

§ 11. Электромагнитные волны в прозрачных средах

Распространение электромагнитных волн в прозрачном немагнитном кристалле определяется уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0, & \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{D} &= 0, & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

и материальными уравнениями

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k. \quad (51)$$

Мы рассмотрим случай распространения в кристалле плоских электромагнитных волн, когда

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0 \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t), \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{D}_0 \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Подставляя (52) в (50), видим, что операция $\frac{d}{dt}$ сводится к умножению на $-i\omega$, а операции rot и div сводятся к векторному и скалярному умножению на $i\mathbf{k}$. Поэтому (50) принимает вид

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{H}] + \frac{\omega}{c} \mathbf{D} = 0; \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] - \frac{\omega}{c} \mathbf{H} = 0; \quad (53)$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}) = 0; \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) = 0. \quad (54)$$

Из (53) и (54) следует, что $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ перпендикулярны волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ лежат в плоскости волнового фронта. Кроме того, из (53) видно, что $\mathbf{H} \perp \mathbf{E}$ и $\mathbf{H} \perp \mathbf{D}$. Итак, в анизотропном кристалле, как и в изотропной среде, ортогональны векторы как $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, так и $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$. Но в отличие от изотропной среды $\mathbf{D}$ не параллелен $\mathbf{E}$ (рис. 5).

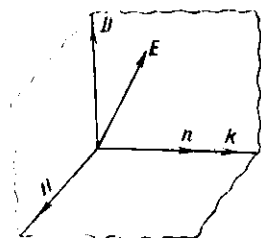


Рис. 5. Взаимное расположение векторов электромагнитной волны в кристалле

Определим безразмерный волновой вектор $\mathbf{n}$ следующим образом:

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}.$$

Абсолютная величина n этого вектора есть просто показатель преломления, который в анизотропной среде зависит от направления, а в изотропной среде $n = \sqrt{\epsilon}$. Вместо (53) получим

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]; \quad \mathbf{D} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]. \quad (55)$$

Подставим первую формулу (55) во вторую:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{n} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{n}]] = n^2 \mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}). \quad (56)$$

Подставляя (51) в (56), получим

$$n^2 E_i - n_i n_k E_k = \epsilon_{ik} E_k,$$

или

$$(n^2 \delta_{ik} - n_i n_k - \epsilon_{ik}) E_k = 0. \quad (57)$$

Система линейных уравнений (57) определяет закономерности распространения электромагнитных волн в анизотроп-

ной среде. Условия существования решения этой системы — это равенство нулю ее определителя

$$\|n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \epsilon_{ik}\| = 0. \quad (58)$$

Соотношение (58) определяет в координатах n_1, n_2, n_3 некоторую поверхность, которую называют поверхностью волновых векторов, или поверхностью Френеля. Геометрия этой поверхности в принципе определяет все закономерности распространения электромагнитных волн. Так, например, при заданном направлении волнового вектора $\mathbf{n}$ (58) дает просто квадратное уравнение для показателя преломления n^2 , имеющее два различных вещественных корня. Отсюда следует, что вдоль каждого направления в анизотропной среде могут распространяться две волны с разными волновыми векторами. Однако нас всегда еще интересует вопрос о характере поляризации волн, распространяющихся в анизотропной среде. Использование уравнений (57) и (58) для этой цели неудобно, так как в (57) входит вектор $\mathbf{E}$, не перпендикулярный волновому вектору $\mathbf{n}$ (см. рис. 5), и нужно решить систему трех уравнений.

Удобнее исходную систему уравнений (56) записать через вектор $\mathbf{D}$, выражая $\mathbf{E}$ через $\mathbf{D}$ с помощью (51): $E_i = \epsilon_{ik}^{-1} D_k$, где ϵ_{ik}^{-1} — компонента тензора 2-го ранга, обратного * тензору диэлектрической проницаемости $[\epsilon_{ik}]$. Получим

$$D_i = n^2 \epsilon_{ik}^{-1} D_k - n_i n_k \epsilon_{km}^{-1} D_m. \quad (59)$$

Уравнение (59) существенно упрощается при учете того, что $\mathbf{D} \perp \mathbf{n}$. Действительно, выберем систему координат так, чтобы ось Ox_3 была направлена по $\mathbf{n}$. Две другие поперечные оси будут расположены в плоскости волнового фронта, перпендикулярной к $\mathbf{n}$. Перпендикулярный к $\mathbf{n}$ вектор $\mathbf{D}$ будет при этом иметь две компоненты D_1 и D_2 , а $D_3 = 0$; напротив, $\mathbf{n} = (0, 0, n_3)$, так что второе слагаемое справа в (59) всегда равно нулю:

$$\frac{1}{n^2} D_i = \epsilon_{ik}^{-1} D_k \quad (i, k = 1, 2),$$

или

$$\left(\frac{1}{n^2} \delta_{ik} - \epsilon_{ik}^{-1} \right) D_k = 0. \quad (60)$$

* Способ нахождения компонент обратного тензора по компонентам данного тензора описан в главе IV.

Условие разрешимости этих двух уравнений заключается в равенстве нулю их определителя

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11}^{-1} - \frac{1}{n^2} & \epsilon_{12}^{-1} \\ \epsilon_{12}^{-1} & \epsilon_{22}^{-1} - \frac{1}{n^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие сводится к квадратному уравнению относительно величины $1/n^2$, определяющей показатель преломления n . Его два решения имеют вид

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{1,2} = \frac{1}{2} + [(\epsilon_{11}^{-1} + \epsilon_{22}^{-1}) \pm \sqrt{(\epsilon_{11}^{-1} + \epsilon_{22}^{-1})^2 + 4(\epsilon_{12}^{-1})^2}].$$

Отсюда следует, что вдоль каждого направления $\mathbf{n}$ в анизотропной среде могут распространяться две волны с разными волновыми векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Соответствующие двум значениям n векторы $\mathbf{D}$ направлены вдоль главных осей двухмерного симметричного тензора 2-го ранга $[\epsilon_{ik}]$ ($i, k = 1, 2$).

Уравнение (60) допускает простую геометрическую интерпретацию в терминах характеристической поверхности тензора $[\epsilon_{ik}^{-1}]$. Возвратимся к главным осям тензора $[\epsilon_{ik}^{-1}]$ и построим характеристическую поверхность тензора $[\epsilon_{ik}^{-1}]$, определяемую уравнением

$$\epsilon_{1k}^{-1} D_1 D_k = \frac{D_1^2}{\epsilon_1} + \frac{D_2^2}{\epsilon_2} + \frac{D_3^2}{\epsilon_3} = \text{const},$$

где ϵ_1^{-1} , ϵ_2^{-1} , ϵ_3^{-1} — главные значения тензора $[\epsilon_{ik}^{-1}]$ (рис. 6).

Зададим направление волнового вектора $\mathbf{n}$ и пересечем эллипсоид плоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной $\mathbf{n}$, т. е. плоскостью волнового фронта. Фигурой сечения в общем случае будет эллипс. Длина его главных осей определяет значения n_1 и n_2 , а их направления — соответствующие направления колебаний D_1 и D_2 . Такой характеристический эллипсоид тензора $[\epsilon_{ik}^{-1}]$ называют *оптической индикатрисой* кристалла.

Таким образом, чтобы выяснить скорость и поляризацию электромагнитных волн, распространяющихся в кристалле в любом заданном направлении, достаточно рассмотреть центральное сечение оптической индикатрисы плоскостью волнового фронта, т. е. плоскостью, нормальной к волновому вектору. Направление главных осей этого сечения совпадает

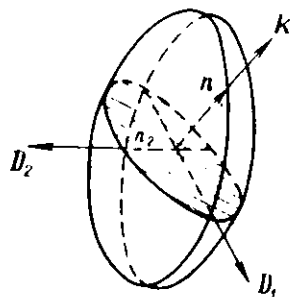


Рис. 6. Оптическая индикатриса

с направлениями электрической индукции заданной волны, а длина этих главных полуосей равна их показателям преломления. Зная форму оптической индикатрисы, мы можем определить скорость, показатели преломлений и плоскости колебаний для волн, распространяющихся в кристалле в любом направлении.

Следует подчеркнуть тот факт, что распространяющиеся в анизотропной среде плоские волны оказываются полностью линейно поляризованными в определенных плоскостях. В этом отношении оптические свойства анизотропных сред *существенно отличаются от свойств изотропных сред*. Распространяющаяся в изотропной среде плоская волна в общем случае поляризована эллиптически, и лишь в частных случаях эллиптическая поляризация сводится к линейной. Это существенное отличие связано с тем, что случай полной изотропии среды является в известном смысле вырожденным: двум направлениям поляризации соответствует здесь один и тот же волновой вектор. При этом две линейно поляризованные волны складываются в эллиптически поляризованную волну. В общем случае анизотропной среды имеются два разных одинаково направленных волновых вектора.

ЗАДАЧИ

1. Записать в индексах суммирования связь радиус-вектора узла кристаллической решетки R_i с базисными векторами a_i , $i = 1, 2, 3$.
2. Записать в компонентах уравнение $\sigma_{ik} E_k = \lambda E_i$.
3. Найти главные значения тензоров 2-го ранга:

$$\begin{bmatrix} -\sigma & -3\sqrt{3} & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -6 & -3\sqrt{3} & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

4. Используя выражение (47) для закона дисперсии электрона в полупроводнике, выразить скорость электрона v через его квазиимпульс p и изобразить оба вектора на изоэнергетической поверхности.

5. На эллипсоиде обратных эффективных масс указать направление ускорения электрона a , зная направление действующей на него силы F .

6. Диэлектрическая проницаемость изотропного диэлектрика меняется под действием электрического поля следующим образом:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_0 \delta_{ik} + \alpha E_i E_k,$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость в отсутствие поля. Найти главные оси и главные значения $[\epsilon_{ik}]$.

Глава III. ПСЕВДОТЕНЗОРЫ

§ 12. Аксиальные векторы и псевдотензоры

Наряду с обычными, точнее полярными векторами ($\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$), изображаемыми стрелкой, в физике применяются векторы другого типа, связанные с вращением ($\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$). Они называются *аксиальными* векторами и изображаются так, как показано на рис. 7.

Углом между двумя аксиальными векторами называют угол, совмещающий векторы так, чтобы направления их вращений совпали (рис. 8).

Основное различие между полярным и аксиальным векторами отражается в правилах преобразования их компонент



Рис. 7. Символы векторов:
а — полярного; б — аксиального

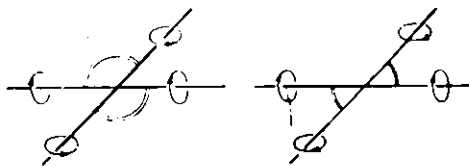


Рис. 8. Угол между двумя аксиальными векторами

от одной системы координат к другой. В отличие от (17), компоненты аксиального вектора преобразуются как

$$\mathring{A}_i' = \parallel a_{ik} \parallel a_{ik} \mathring{A}_k = \pm a_{ik} \mathring{A}_k. \quad (61)$$

Истинным вращениям здесь соответствует знак плюс, инверсионным — минус.

Рассмотрим инверсию системы координат без вращения, описываемую матрицей $(a_{ik}) = -\delta_{ik}$. Из (17) и (61) следует, что при этом компоненты полярного вектора меняют знак, а аксиального — нет:

$$A_i' = a_{ik} A_k = -\delta_{ik} A_k = -A_i, \quad (62)$$

$$\mathring{A}_i' = -a_{ik} \mathring{A}_k = \delta_{ik} \mathring{A}_k = \mathring{A}_i. \quad (63)$$

Очевидно (рис. 9), соотношения (62) и (63), а стало быть и (17) и (61), обеспечивают неизменность полярного и аксиального векторов при инверсии. Аксиальный вектор называют еще псевдовектором, или псевдотензором 1-го ранга.

Аналогично можно ввести понятие о псевдотензоре любого ранга. Псевдоскаляр в отличие от обычного скаляра изменяет знак при отражении. Псевдоскаляром является скалярное произведение полярного и аксиального векторов. Закон преобразования такого произведения следует из (17) и (61)

с учетом (13):

$$A_i' \hat{B}_i' = \pm a_{ik} a_{il} A_k \hat{B}_l = \pm \delta_{kl} A_k \hat{B}_l = \pm A_k \hat{B}_k,$$

т. е. это скалярное произведение ведет себя как обычный скаляр при собственных поворотах и умножается на -1 и при инверсионных поворотах.

Псевдоскаляром является величина удельного вращения плоскости поляризации в оптически изотропных веществах, вращающих плоскость поляризации (например, кубические кристаллы NaClO_3 и NaBrO_3). Эта величина считается положительной, если направление вращения плоскости поляризации совпадает с винтом в правой системе координат, и отрицательной, если оно противоположно. Так как при инверсионном повороте правая система координат переходит в левую,

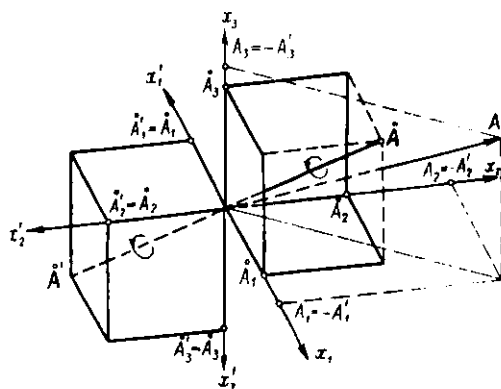


Рис. 9. Преобразование компонент полярного и аксиального векторов при инверсии

то величина удельного вращения относительно новой координатной системы и та же величина относительно старой системы будут иметь противоположные знаки.

§ 13. Векторное произведение

Рассмотрим векторное произведение двух полярных векторов. Это есть некоторый вектор, компоненты которого можно записать в виде

$$V_{ik} = A_i B_k - A_k B_i.$$

Так как A и B — полярные векторы, то их компоненты преобразуются как координаты. Тогда величина V_{ik} должна преобразовываться как произведение двух координат. Следовательно, $[V_{ik}]$ обладает основным (определяющим) свойством тензора 2-го ранга. Так как

$$V_{ik} = A_i B_k - A_k B_i = -(A_k B_i - A_i B_k) = -V_{ki}, \quad (64)$$

то $[V_{ik}]$ — антисимметричный тензор 2-го ранга. Он имеет вид

$$[V_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & A_1B_2 - A_2B_1 & A_1B_3 - A_3B_1 \\ A_2B_1 - A_1B_2 & 0 & A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 & A_3B_2 - A_2B_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Из (65) видно, что число независимых компонент этого тензора равно трем и поэтому (65) можно записать в виде

$$[V_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (66a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= A_2B_3 - A_3B_2 = V_{23}, \\ r_2 &= A_3B_1 - A_1B_3 = -V_{13}, \\ r_3 &= A_1B_2 - A_2B_1 = V_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (66b)$$

Покажем, что величины r_1, r_2, r_3 можно рассматривать как компоненты аксиального вектора. Для этого достаточно показать, что при переходе от x_i к x'_i компоненты r_i преобразуются по правилу (61).

Преобразуем для примера r_1 из (66):

$$\begin{aligned} r'_1 &= A'_2B'_3 - A'_3B'_2 = a_{2i}A_ia_{3k}B_k - a_{3k}A_ka_{2i}B_i = \\ &= a_{2i}a_{3k}(A_iB_k - A_kB_i). \end{aligned}$$

Расписывая это выражение в развернутом виде, получим

$$\begin{aligned} r'_1 &= (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})(-A_3B_2 + A_2B_3) + \\ &+ (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})(-A_1B_3 + A_3B_1) + \\ &+ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(-A_2B_1 + A_1B_2). \end{aligned}$$

Используя соотношения (16) и (66), имеем

$$r'_1 = \pm a_{11}r_1 \pm a_{12}r_2 \pm a_{13}r_3.$$

Здесь знак плюс берется в случае собственного вращения, а знак минус — для инверсионных вращений. Аналогичные уравнения можно написать для r'_2 и r'_3 . Окончательно получим

$$r'_i = \pm a_{ik}r_k. \quad (67)$$

Сравнивая (67) с (61), видим, что величины r_i образуют аксиальный вектор.

Итак, векторное произведение двух полярных векторов является аксиальным вектором. С другой стороны, из (66a) следует, что ему можно сопоставить антисимметричный тен-

зор 2-го ранга. Так как A и B — произвольные полярные векторы, то можно сказать, что всякий антисимметричный тензор 2-го ранга эквивалентен (или, как говорят в тензорном анализе, дуален) некоторому аксиальному вектору. Их компоненты связаны посредством (666). Направление этого аксиального вектора совпадает с направлением вращения, совмещающим первый сомножитель со вторым (рис. 10, а). Аналогично можно показать, что векторное произведение двух аксиальных векторов есть аксиальный вектор. Правило определения направления этого аксиального вектора показано на рис. 10, б.

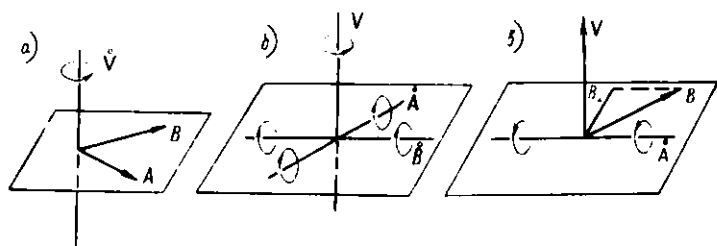


Рис. 10. Направление векторных произведений:

$$a = [A \times B]; \quad b = [\hat{A} \times \hat{B}]; \quad c = [\hat{A} \times B]$$

Векторное произведение аксиального вектора $\hat{A}$ на полярный вектор B дает полярный вектор, перпендикулярный к обоим сомножителям. Он направлен так же, как была бы направлена нормальная к $\hat{A}$ составляющая вектора B после поворота на угол $\pi/2$ вокруг $\hat{A}$ в направлении его вращения (рис. 10, в).

Для записи всех трех вариантов векторного произведения возможна единая форма. Для этого введем совершенно антисимметричный единичный тензор 3-го ранга e_{ikl} , компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов. Все компоненты равны нулю за исключением тех, у которых $i \neq k \neq l$. Что касается этих компонент, то $e_{123} = 1$. Остальные компоненты равны $+1$ или -1 , смотря по тому, четным или нечетным числом перестановок можно привести последовательность чисел i, k, l к последовательности 1, 2, 3. Другими словами, все компоненты e_{ikl} с циклическим порядком неодинаковых значков равны $+1$. Все компоненты, в которых циклический порядок значков нарушен, равны -1 . С помощью тензора e_{ikl} векторное произведение $\gamma = [A \times B]$, где A и B можно считать как полярными, так и аксиальными векторами, а тип вектора γ определяется типом векторов-

сомножителей и записывается в виде

$$r_i = e_{ikl} A_k B_l. \quad (68)$$

Действительно,

$$r_1 = [A \times B]_1 = e_{123} A_2 B_3 + e_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2.$$

Тензор 3-го ранга e_{ikl} позволяет также установить соответствие между компонентами аксиального вектора $\vec{r}$ и антисимметричного тензора 2-го ранга $[V_{ik}]$, т. е. записать компактно соответствия (66):

$$r_i = \frac{1}{2} e_{ikl} V_{kl}; \quad (69a)$$

$$V_{ik} = e_{ikl} r_l. \quad (69b)$$

Например,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2} (e_{123} V_{23} + e_{132} V_{32}) = \frac{1}{2} (V_{23} - V_{32}) = \\ &= \frac{1}{2} (-V_{32} - V_{32}) = -V_{32} = V_{23}. \end{aligned}$$

При решении физических задач важно знать, сколькими независимыми параметрами определяется физическая величина. При этом для подсчета числа независимых компонент полезно свести антисимметричный тензор 2-го ранга к аксиальному вектору.

§ 14. Магнитная восприимчивость диамагнитных и парамагнитных кристаллов

Магнитная восприимчивость диамагнитных и парамагнитных кристаллов также является тензором 2-го ранга. При включении магнитного поля $\mathbf{H}$ в веществе возникает намагниченность $\mathbf{M}$. Намагниченностью называют магнитный момент, рассчитанный на единицу объема. Если магнитное поле слабое по сравнению с внутрикристаллическими полями, то $\mathbf{M}$ можно разложить в ряд по $\mathbf{H}$ и сохранить в разложении только линейные члены. Это разложение имеет вид

$$M_i = M_i^0 + \left(\frac{dM_i}{dH_k} \right)_0 H_k = M_i^0 + \chi_{ik} H_k. \quad (70)$$

Мы не рассматриваем ферромагнитные кристаллы и спонтанную намагниченность M_i^0 будем считать равной нулю. Величину χ_{ik} называют магнитной восприимчивостью. Так как $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}$ являются аксиальными векторами, то связь между ними согласно тензорной размерности осуществляется тензором 2-го ранга.

Сумма векторов $\mathbf{H}$ и $4\pi\mathbf{M}$ называется магнитной индукцией $\mathbf{B}$:

$$B_i = H_i + 4\pi\chi_{ik}H_k = (\delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik})H_k.$$

Так как $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ — здесь аксиальные векторы, то величина $\mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik}$ — тензор магнитной проницаемости 2-го ранга. Тензоры $[\chi_{ik}]$ и $[\mu_{ik}]$ аналогичны диэлектрической восприимчивости $[\alpha_{ik}]$ и являются симметричными тензорами. Однако в отличие от α_{ik} главные значения χ_{ik} могут принимать как положительные (парамагнитные среды), так и отрицательные (диамагнитные среды) значения.

§ 15. Момент сил

Так как в общем случае $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ не параллельны, взаимодействие внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ и магнитного момента $\mathbf{M}$ кристалла (наведенного или спонтанного) приводит к появлению механического момента $\mathbf{G} = [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]$. Этот момент стремится повернуть кристалл так, чтобы $\mathbf{M}$ стал параллелен $\mathbf{H}$.

Как всякое векторное произведение двух аксиальных векторов, вектор $\mathbf{G}$ — тоже аксиальный вектор и, следовательно, может быть представлен в виде антисимметричного тензора 2-го ранга

$$G_{ik} = M_i H_k - M_k H_i$$

или с учетом (70)

$$G_{ik} = \chi_{ij} H_j H_k - \chi_{kj} H_j H_i. \quad (71)$$

В главных осях тензора χ_{ik} (71) принимает вид

$$[G_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & (\chi_1 - \chi_2)H_1H_2 & (\chi_3 - \chi_1)H_3H_1 \\ (\chi_1 - \chi_2)H_1H_2 & 0 & (\chi_2 - \chi_3)H_2H_3 \\ (\chi_3 - \chi_1)H_3H_1 & (\chi_2 - \chi_3)H_2H_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (72)$$

В (72) ясно видно, что механический момент зависит только от разностей главных магнитных восприимчивостей и, следовательно, возникает всегда в анизотропных телах.

§ 16. Эффект Холла *

Если проводник находится во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$, то связь между плотностью тока $\mathbf{j}$ и напряженностью электрического поля по-прежнему дается соотношением $j_i = \sigma_{ik}H_k$. Однако компоненты тензора проводимости σ_{ik} являются функциями H и не симметричны по i, k . Согласно

* Изложение этого параграфа следует [5].

принципу симметрии кинетических коэффициентов [2] в магнитном поле одновременно с перестановкой индексов i, k должно быть изменено на обратное и направление магнитного поля, т. е.

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (73)$$

Величины же $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ и $\sigma_{ki}(\mathbf{H})$ не равны друг другу. Как и всякий общий тензор 2-го ранга, $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ можно разделить на симметричную и антисимметричную части

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik},$$

где

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(\mathbf{H}); \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ki}(\mathbf{H}). \quad (74)$$

Объединим (73) и (74), получим

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(-\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H}),$$

$$a_{ik}(\mathbf{H}) = a_{ki}(-\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}).$$

Таким образом, компоненты симметричного тензора $s_{ik}(\mathbf{H})$ являются четными, а тензора $a_{ik}(\mathbf{H})$ — нечетными функциями магнитного поля. Плотность тока

$$j_i = j_i^{(0)} + j_{i\perp} = s_{ik}E_k + a_{ik}E_k. \quad (75)$$

Как было показано в § 13 данной главы, антисимметричному тензору 2-го ранга $[a_{ik}]$ эквивалентен аксиальный вектор $\mathbf{a}$. Поэтому, учитывая (69б), свойства e_{ikh} и (68), второе слагаемое в (75) можно переписать в виде

$$j_{i\perp} = a_{ik}E_k = e_{ikh}a_lE_k = -e_{ikh}a_lE_k = -[\mathbf{a} \times \mathbf{E}]_i = [\mathbf{E} \times \mathbf{a}]_i.$$

Теперь (75) можно записать следующим образом:

$$j_i = s_{ik}E_k + [\mathbf{E} \times \mathbf{a}]_i.$$

Внешнее магнитное поле является слабым и компоненты тензора проводимости можно разложить по нему. Четные функции магнитного поля $s_{ik}(\mathbf{H})$ разлагаются в ряд из четных степеней $\mathbf{H}$:

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ik}^0 + O(H^2),$$

где σ_{ik}^0 — проводимость в отсутствие магнитного поля; $O(H^2)$ означает члены порядка H^2 . Из-за нечетности функции $\mathbf{a}(\mathbf{H})$ в разложение этого вектора войдут только нечетные степени $\mathbf{H}$. В линейном по магнитному полю приближении

$$a_i = \left(\frac{\partial a_i}{\partial H_k} \right)_0 H_k = \alpha_{ik}H_k.$$

Таким образом, линейный по магнитному полю эффект заключен в члене $[\mathbf{E} \times \mathbf{a}]$. Он состоит в появлении тока, перпендикулярного к электрическому полю, и по величине пропорционален напряженности магнитного поля. Этот эффект называется *эффектом Холла*. Для i -й компоненты плотности тока вместо (75) можно записать

$$j_i = \sigma_{ik}^0 E_k + e_{ikl} a_{lm} H_m E_k. \quad (76)$$

Полученные формулы получают простой и знакомый вид для изотропной среды: так как $\sigma_{ik}^0 = \sigma^0 \delta_{ik}$, то составляющая j^0 параллельна электрическому полю $\mathbf{E}$. Из соображений симметрии вектор $\mathbf{a}$ может быть направлен только по $\mathbf{H}$, т. е.

$$a_{ik} = a \delta_{ik};$$

$$a_i = a H_i.$$

Из (76) получим выражение для тока Холла в изотропной среде в тензорной форме:

$$j_i = \sigma^0 E_i + a e_{ikl} E_k H_l,$$

которое, очевидно, эквивалентно выражению

$$j_i = \sigma^0 E_i + a [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_i$$

или

$$\mathbf{j} = \sigma^0 \mathbf{E} + a [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что векторное произведение аксиального вектора на полярный является полярным вектором.

2. Используя индексы суммирования, записать силу Лоренца

$$\mathbf{F} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}].$$

3. Показать, что поскольку $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ являются аксиальными векторами, то χ_{ik} — тензор 2-го ранга.

4. Для изотропной среды найти связь $\mathbf{E}$ с $\mathbf{j}$ при наличии магнитного поля с точностью до H^2 .

5. Написать феноменологическое выражение для тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ik}(\mathbf{E})$ кубического кристалла как функцию постоянного электрического поля $\mathbf{E}$ (с точностью до членов 2-го порядка по $\mathbf{E}$). Результаты сравнить с задачей 6 главы II.

6. Написать феноменологическое выражение для свободной энергии $F(\mathbf{M}, \mathbf{H})$ изотропного феррита в магнитном поле $\mathbf{H}$ ($\mathbf{M}$ — спонтанный магнитный момент) с точностью до членов 2-го порядка.

Глава IV. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Мы видели, что компоненты тензора 2-го ранга можно трактовать как элементы квадратной матрицы размером (3×3) . Мы назвали также матрицей таблицу направляющих косинусов при преобразовании от одной системы координат к другой. Такая матрица тоже квадратна. Назовем теперь матрицей таблицу коэффициентов в системе линейных уравнений:

$$z_i = a_{ik} y_k; \quad (77)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Величины a_{ik} , выписанные в виде таблицы, образуют матрицу размером $(m \times n)$.

Введем правило умножения матриц. Для этого предположим, что величины y_k в (77) — линейные функции переменных x_l :

$$y_k = \beta_{kl} x_l \quad (k = 1, 2, \dots, m; \quad l = 1, 2, \dots, p). \quad (78)$$

Тогда z_i связаны с x_l уравнениями

$$z_i = a_{ik} \beta_{kl} x_l = \gamma_{il} x_l,$$

где

$$\gamma_{il} \equiv a_{ik} \beta_{kl},$$

или в символической записи

$$\gamma = \alpha \beta. \quad (79)$$

Матрица γ называется произведением матриц α и β . Правильно умножения матриц следует из определения (79) и состоит в том, что элемент произведения γ_{il} получается почленным умножением i -й строки первого сомножителя α на l -й столбец второго сомножителя β и суммированием полученных произведений. Заметим, что $\gamma = \alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$.

Действительно, пусть матрицы A и B задают некоторые операции, производимые над вектором x в системе координат $x_1 O x_2$ (рис. 11). Пусть, например, действие матрицы B на x означает проектирование на ось Ox_1 , а действие A — поворот на $\pi/2$. Тогда из рис. 11 очевидно, что $ABx \neq BAx$.

Рассмотрим снова уравнение

$$z_i = a_{ij} y_j \quad \text{или} \quad z = \alpha y, \quad (80)$$

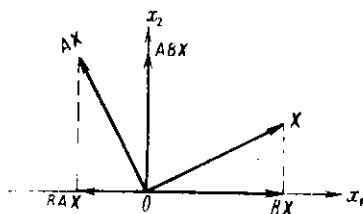


Рис. 11. Некоммутативность произведения матриц

но в отличие от (77) будем считать, что α — квадратная матрица. Очевидно, уравнения (80) можно, вообще говоря, разрешить относительно y_j :

$$y_j = \alpha_{ji}^{-1} z_i \text{ или } y = \alpha^{-1} z. \quad (81)$$

Матрица α^{-1} с элементами α_{ji}^{-1} называется *обратной матрицей* по отношению к α . Нам нужно теперь найти связь α^{-1} с заданной матрицей α . Умножим (80) на алгебраическое дополнение A_{ik} элемента α_{ik} :

$$A_{ik} z_i = A_{ik} \alpha_{ij} y_j. \quad (82)$$

По теореме о разложении детерминанта Δ имеем

$$A_{ik} \alpha_{ij} = \Delta \delta_{kj}. \quad (83)$$

Подстановка (83) в (82) дает $A_{ik} z_i = \Delta \delta_{kj} y_j$, или

$$A_{ik} z_i = \Delta y_k. \quad (84)$$

Разрешая (84) относительно y_k , получим

$$y_k = \frac{A_{ik}}{\Delta} z_i. \quad (85)$$

Очевидно, (85) и все дальнейшее имеет смысл, если только $\Delta = \|\alpha_{ij}\| \neq 0$. Заменяя в (85) k на j , будем иметь

$$y_j = \frac{A_{ij}}{\Delta} z_i. \quad (86)$$

Сравнивая (86) с (81), получим *обратную матрицу*

$$\alpha_{ji}^{-1} = \frac{A_{ij}}{\Delta}. \quad (87)$$

Введем теперь понятие единичной матрицы I , для чего напомним, что i, k -й элемент произведения двух взаимно обратных матриц

$$\alpha_{ij} \alpha_{jk}^{-1} = \alpha_{ij} \frac{A_{kj}}{\Delta} = \frac{\delta_{ik} \Delta}{\Delta} = \delta_{ik}.$$

Матрица, элементами которой являются δ_{ik} , называется *единичной матрицей* I . Таким образом, кроме определения обратной матрицы (87) таким определением может служить равенство $\alpha \alpha^{-1} = I$. Отметим, что обратные матрицы существуют только у квадратных матриц, детерминант которых отличен от нуля.

Примером взаимно обратных матриц являются матрицы электропроводности σ и удельного сопротивления ρ . Это сле-

дует непосредственно из уравнений, связывающих векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}; \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{j}.$$

Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами, и наоборот. Матрица $\mathbf{a}^T$ называется транспонированной по отношению к матрице $\mathbf{a}$, если ее i -й столбец является i -й строкой матрицы $\mathbf{a}$.

Уравнение поворота осей координат, полученное в главе I, также можно записать в матричной форме. Уравнение преобразования координат точки $x_i' = a_{ik}x_k$ записывается в матричной форме следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

или $\mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x}$. Уравнения преобразования компонент произвольного вектора $\mathbf{A}$ записываются аналогично

$$\begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \text{или } \mathbf{A}' = \mathbf{a}\mathbf{A}.$$

Два последовательных поворота $\mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'' = \mathbf{b}\mathbf{x}'$ можно заменить одним, объединив их с помощью матричного умножения: $\mathbf{x}'' = (\mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{x}$. Правило преобразования координат тензора 2-го ранга $\sigma_{ik} = a_{il}a_{km}\sigma_{lm}$ также можно записать в матричном виде. Однако прежде чем применить здесь правило умножения матриц, мы должны расположить повторяющиеся индексы рядом. Это можно сделать, поставив член a_{km} после σ_{lm} и произведя транспонирование:

$$\sigma'_{ik} = a_{il}\sigma_{lm}(a^T)_{mk},$$

или в матричной форме

$$\sigma' = \mathbf{a}\sigma\mathbf{a}^T.$$

ЗАДАЧИ

1. Дана матрица

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $\mathbf{a}^{-1}$.

2. Известно, что в некоторой системе координатных осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 тензор электропроводности $[\sigma_{ik}]$ диагонален. Найти все матрицы преобразования к новым осям, в которых он по-прежнему диагонален. Рас-

смотреть случай изоэнергетической поверхности в форме: а) произвольного эллипсоида; б) эллипсоида вращения вокруг оси Ox_3 ; в) сферы.

3. Тензор электропроводности для кристалла моноклинной системы имеет вид

$$[\sigma_{ik}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Найти компоненты тензора удельного сопротивления $[\rho_{ik}]$. Привести $[\sigma_{ik}]$ и $[\rho_{ik}]$ к главным осям и сопоставить главные значения.

4. Матрица поворота вокруг оси Ox_3 на угол α

$$a = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу и объяснить ее физический смысл.

5. Решить следующие уравнения в матричной форме:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$

б) $Ax = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

6. Вектор R_n некоторого узла кристаллической решетки связан с элементарными векторами a_1, a_2, a_3 соотношением

$$R_n = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3,$$

где n_1, n_2, n_3 — любые целые числа. Записать это уравнение: 1) в проекциях на декартовы оси координат; 2) в матричной форме. Полученная матрица A называется *матрицей решетки*, так как полностью ее характеризует (определяет ее симметрию).

7. Для простой кубической решетки матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

где a — длина ребра куба. Найти обратную матрицу $B = A^{-1}$, характеризующую обратную решетку. Объяснить физический смысл полученного результата.

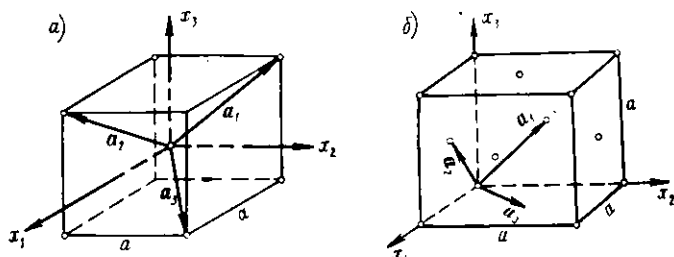


Рис. 12. К выводу матрицы A кубических решеток
а — объемно-центрированной; б — гранецентрированной

8. Проведя элементарные векторы по ребрам примитивной ячейки объемно-центрированной кубической решетки (рис. 12, а), показать, что

матрица этой решетки

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \end{bmatrix}.$$

где a — ребро куба. Найти матрицу $B = A^{-1}$, характеризующую обратную решетку.

9. Тем же способом (рис. 12, б), что и в задаче 8, показать, что матрица A гранецентрированной кубической решетки имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу $B = A^{-1}$. Сравнить результаты задач 8 и 9 и объяснить их.

Глава V. ВЛИЯНИЕ СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ НА ИХ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

§ 17. Элементы симметрии кристаллической решетки

Основу симметрии кристаллической решетки составляет ее *пространственная периодичность* — свойство совмещаться сама с собой при параллельных переносах, или, как говорят, *трансляциях* на определенные расстояния и в определенных направлениях. Наряду с трансляционной симметрией решетка может обладать также и *симметрией по отношению к различным поворотам и отражениям*. Соответствующие элементы симметрии — это оси, плоскости симметрии, зеркально-поворотные оси. Чтобы полностью исключить трансляцию, все оси и плоскости симметрии считаются пересекающимися в одной точке. Это так называемая *точечная симметрия* решетки. Сверх этого кристаллическая решетка может обладать еще и особого рода элементами симметрии, представляющими собой комбинации параллельных переносов с поворотами и отражениями. Поворот на некоторый угол с последующим *переносом вдоль этой же оси* приводит к элементам симметрии нового типа — *винтовым осям*. Аналогично, комбинируя трансляции и плоскости симметрии, мы получаем *плоскости зеркального скольжения*. Полный набор операций симметрии кристалла называется его группой симметрии.

В целом ряде явлений, которые можно назвать макроскопическими, кристалл ведет себя как однородное сплошное

тело. Макроскопические свойства кристалла при этом зависят только от направлений в нем. Так, особенности прохождения света через кристалл зависят только от направления луча света; тепловое расширение кристалла происходит, вообще говоря, различно по разным направлениям; упругие деформации кристалла под влиянием тех или иных внешних сил также зависят от направлений.

С другой стороны, симметрия кристаллов приводит к эквивалентности различных направлений в нем. Вдоль этих эквивалентных направлений все макроскопические свойства кристалла будут совершенно одинаковыми. Мы можем, следовательно, сказать, что макроскопические свойства кристалла определяются симметрией направлений в нем. Если кристалл обладает, например, центром инверсии, то всякому направлению в нем будет эквивалентно прямо противоположное.

Трансляционная симметрия решетки не приводит к эквивалентности каких-либо направлений — параллельные переносы вообще не меняют направлений. По этой же причине для симметрии направлений несущественно различие между винтовыми и простыми осями симметрии или между простыми плоскостями симметрии и плоскостями зеркального скольжения. Таким образом, симметрия направлений, а потому и симметрия макроскопических свойств кристалла определяется совокупностью его осей и плоскостей симметрии, т. е. точечной симметрией кристалла.

Все элементы симметрии кристалла являются элементами симметрии его любого физического макроскопического свойства. Макроскопические физические характеристики кристалла не должны зависеть от поворотов и отражений точечной симметрии кристалла. Поэтому их называют *инвариантами* относительно этих поворотов и отражений. Именно такие физические свойства и представляют интерес для изучения. Задача тензорного анализа при этом — отделить результаты, относящиеся к физическим объектам, от результатов, случайно привнесенных выбором той или иной системы координат.

§ 18. Математическая формулировка операций симметрии

В первой главе было показано, что любое преобразование координат можно записать в виде матрицы этого преобразования (a_{ik}). В частности, все преобразования симметрии кристалла тоже можно записать в виде матриц. Любую операцию симметрии при этом рассматривают как реальный поворот кристалла. Действительно, если мы выберем в кристалле систему координат и совершим поворот этой системы координат вокруг оси Ox_3 на угол $+\alpha$, то эквивалентный

результат можно получить, производя вращение кристалла на угол $-\alpha$ в неподвижной системе координат. В соответствии с этим поворотом преобразуются и физические величины, например тензор электропроводности $[\sigma_{ik}]$.

Рассмотрим для примера кристалл с кубической симметрией. В таком кристалле все вращения и отражения, преобразующие куб в самого себя, отображают и весь кристалл в себя. Выберем оси координат по ребрам куба. Поворот на 90° вокруг оси Ox_3 , переводящий x_2 в x_1 , описывается следующим преобразованием координат:

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_2; \\x_2' &= x_1.\end{aligned}$$

Соответствующая матрица преобразования имеет вид

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Поворот на 90° вокруг оси Ox_2 описывается аналогичной матрицей

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поворот на 180° вокруг оси Ox_3 дает

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Отражение в плоскости x_2Ox_3

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Таким же точно образом любой поворот или отражение можно записать в виде матрицы. Удобство такой записи состоит в том, что последовательности операций симметрии соответствует обычное умножение матриц. Например, поворот на 90° вокруг Ox_3 и последующее отражение в плоскости x_2Ox_3 описывают произведением матриц (88) и (90):

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Выпишем преобразование координат, соответствующее матрице (91):

$$x_1'' = -x_2; \quad x_2'' = -x_1.$$

§ 19. Влияние симметрии кристалла на физические величины, описываемые тензорами 2-го ранга

Многие макроскопические свойства кристаллов описываются тензорами 2-го ранга. К числу таких свойств, как мы уже видели, относится электропроводность, теплопроводность, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость. Все эти величины являются симметричными тензорами 2-го ранга, имеющими шесть независимых компонент. Однако если кристалл обладает некоторой симметрией, то число независимых компонент тензора 2-го ранга может быть уменьшено. Метод, которым это можно сделать, состоит в преобразовании тензора 2-го ранга по установленным в главе I правилам с помощью одного из элементов симметрии кристалла. Требование симметрии при этом состоит в том, что компоненты тензоров 2-го ранга не должны меняться при преобразованиях симметрии. Например, поворот на 180° вокруг Ox_3 — это операция кубической симметрии, описываемая матрицей (89). Применим ее к тензору электропроводности и посмотрим, как уменьшится число компонент симметричного тензора $[\sigma_{ik}]$ при таком преобразовании. Правило преобразования тензора 2-го ранга при преобразовании координат было дано в главе IV. Тогда имеем

$$\begin{aligned} [\sigma'_{ik}] &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Требование симметрии состоит в том, что эта операция не должна изменить тензор электропроводности кубического кристалла. Это возможно лишь в том случае, когда компоненты σ_{13} и σ_{23} равны нулю, т. е. когда тензор электропроводности имеет вид

$$[\sigma_{ik}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, наличие оси поворота на 180° уменьшает число компонент σ_{ik} с шести до четырех.

Аналогично, выполняя поворот на 180° вокруг оси Ox_1 , можно показать, что равны нулю компоненты σ_{12} . Таким образом, матрица σ_{ik} диагональна. Производя поворот на 90° вокруг Ox_3 , можно показать, что $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, а выполняя поворот на 90° вокруг Ox_1 , что $\sigma_{22} = \sigma_{33}$. Таким образом, тензор электропроводности в случае кубической симметрии можно представить в виде

$$[\sigma_{ik}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix},$$

где σ — единственный независимый коэффициент. Следовательно, в кубических кристаллах электропроводность оказывается одинаковой во всех направлениях, т. е. изотропной. В менее симметричных кристаллах электропроводность не изотропна. Но требования симметрии позволяют уменьшить число независимых параметров, необходимых для задания $[\sigma_{ik}]$.

§ 20. Пьезоэлектрический тензор 3-го ранга

У некоторых кристаллов при приложении к ним механических напряжений возникает электрический момент P , величина которого пропорциональна тензору деформации кристалла. Напомним, что состояние деформации кристалла можно охарактеризовать заданием вектора смещения $u(r)$ во всех его точках r . Производные компонент этого вектора по координатам определяют тензор деформации, являющийся тензором 2-го ранга:

$$u_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Вектор поляризации, возникающий в деформированном кристалле, тогда равен

$$P_i = d_{ikl} u_{kl}. \quad (92)$$

Величины d_{ikl} осуществляют связь вектора P_i с тензором 2-го ранга u_{kl} и поэтому являются компонентами тензора 3-го ранга. Его называют пьезоэлектрическим тензором.

Определение тензора 3-го ранга получается обобщением определений тензоров 1-го и 2-го рангов, которые мы дали в главе I. Величина d_{ikl} называется тензором 3-го ранга, если при преобразовании координат она ведет себя как произведение трех координат, т. е.

$$d'_{ikl} = a_{in} a_{km} a_{lp} d_{nmp}. \quad (93)$$

Если выписать все коэффициенты d_{ikl} , то они образуют не квадратную таблицу, как в случае тензора 2-го ранга,

а таблицу в форме куба. Если первый индекс d_{ikl} означает слой, второй — строку, а третий индекс — столбец, то три слоя будут такими:

I слой ($i = 1$)			II слой ($i = 2$)			III слой ($i = 3$)		
d_{111}	d_{112}	d_{113}	d_{211}	d_{212}	d_{213}	d_{311}	d_{312}	d_{313}
(d_{121})	d_{122}	d_{123}	(d_{221})	d_{222}	d_{223}	(d_{321})	d_{322}	d_{323}
(d_{131})	(d_{132})	d_{133}	(d_{231})	(d_{232})	d_{233}	(d_{331})	(d_{332})	d_{333}

Полное число независимых компонент тензора 3-го ранга равно 27. Если учесть симметричность тензора деформации $u_{ik} = u_{ki}$, то согласно (92) и тензор d_{ikl} должен быть симметричен по второму и третьему индексам, т. е. по k, l . При этом из числа независимых компонент можно исключить компоненты, стоящие в окобках. Таким образом, остается 18 независимых компонент. Если кристалл обладает некой симметрией, то можно еще уменьшить число независимых компонент пьезоэлектрического тензора.

Рассмотрим, например, влияние центра инверсии. Матрица, описывающая операцию отражения в начале координат, имеет вид

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\delta_{ik}. \quad (94)$$

Подставляя (94) в (93), найдем

$$d'_{ikl} = (-\delta_{in})(-\delta_{km})(-\delta_{lp})d_{nmp} = -d_{ikl}.$$

Но так как кристалл имеет центр инверсии, то должно быть $d'_{ikl} = d_{ikl}$. Следовательно, $d_{ikl} = 0$. Таким образом, кристалл, обладающий центром инверсии, не может быть пьезоэлектриком.

§ 21. Метод прямой проверки

Значительную помощь при установлении независимых компонент тензоров может оказать метод прямой проверки, разработанный Фуми. Объясним этот метод, взяв разобранный выше пример пьезоэлектрического тензора в кристалле с центром инверсии. Действие центра инверсии на оси координат можно изобразить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\rightarrow -x_1, \\ x_2 &\rightarrow -x_2, \\ x_3 &\rightarrow -x_3, \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

где стрела означает «преобразуется в ».

Соотношение (95) можно интерпретировать как преобразование при инверсии координат произвольной точки (x_1, x_2, x_3) в точку $(-x_1, -x_2, -x_3)$. Так как компоненты тензора 3-го ранга преобразуются как произведения трех координат, то компоненте d_{122} можно сопоставить комбинацию $x_1x_2^2$, имеющую одинаковое с d_{122} правило преобразования. Так как при инверсии $x_1x_2^2 \rightarrow -x_1x_2^2$, то и компонента d_{122} преобразуется так:

$$d_{122} \rightarrow -d_{122}. \quad (96)$$

Но при наличии у кристалла центра инверсии это преобразование не должно изменять компонент тензора, т. е.

$$d_{122} \rightarrow d_{122}. \quad (97)$$

Соотношения (96) и (97) совместимы только, если $d_{122} = 0$. Аналогичное рассуждение оправдливо для любой компоненты тензора d_{ihl} . И мы получаем прежний результат, что в кристалле с центром инверсии нет пьезоэлектрического эффекта.

Использованный выше метод прямой проверки является самым удобным способом определения условий, налагаемых на тензоры во всех классах симметрии, за исключением относящихся к тригональной и гексагональной системам. Это объясняется тем, что во всех классах кроме тригональных и гексагональных элементы симметрии просто изменяют порядок осей координат, т. е. каждая ось преобразуется или в себя, или в одну из других осей (возможно с изменением направления) и не попадает ни в какое промежуточное положение. В тригональных и гексагональных кристаллах имеются оси 3-го и 6-го порядка, и, например, x_1 будет преобразовываться в линейную комбинацию x_1, x_2, x_3 . Поэтому здесь следует использовать аналитический метод. Общий принцип при этом остается тем же самым: действием элемента симметрии кристалла преобразуются оси координат и новые значения компонент тензора приравниваются старым.

ЗАДАЧИ

1. Найти независимые компоненты тензора $[z_{ijk}]$, если кристалл имеет три взаимно перпендикулярные оси 4-го порядка (поворот на 90° вокруг Ox_1, Ox_2, Ox_3).
2. Найти независимые компоненты тензора $[e_{ijk}]$ для кристалла, в котором плоскость x_2Ox_3 является плоскостью симметрии.
3. Найти независимые компоненты пьезоэлектрического тензора d_{ihl} при наличии оси второго порядка относительно Ox_3 .
4. Доказать, что антисимметричный тензор 2-го ранга в кубическом кристалле равен нулю.
5. Найти независимые компоненты тензора электропроводности σ_{ijk} для гексагонального кристалла (одна ось 6-го порядка).

Указание: использовать результаты задачи 12 главы I.

6. Изоэнергетические поверхности в зоне проводимости кремния представляют собой семейство шести эллипсоидов вращения вокруг осей [100], [010], [001]. Выразить электропроводность кристалла σ через главные значения σ_i одного эллипсоида.

Указание: каждый эллипсоид дает аддитивный вклад в σ .

7. Решить такую же задачу для германия.

Указание: изоэнергетические поверхности электронного германия — это семейство восьми эллипсоидов вращения вокруг осей [111] с центрами на границах зоны Бриллюэна.

8. В магнитоупорядоченных кристаллах существует магнитоэлектрический эффект — возникновение магнитного момента $\mathbf{M}$ под действием электрического поля. Написать феноменологическое выражение $\mathbf{M}(\mathbf{E})$ с точностью до членов 2-го порядка по $\mathbf{E}$ и выяснить, какие ограничения на коэффициенты разложения накладывает наличие центра инверсии у кристалла.

Примечание: Задачи 1—5 решать методом преобразования координат и методом прямой проверки.

Глава VI. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ *

§ 22. Вектор площадки. Поток вектора

Определим прежде всего вектор элементарной площадки $d\mathbf{S}$. Так называется вектор, направленный по нормали к площадке, численно равный ее поверхности и связанный с направлением обхода контура площадки так же, как направление перемещения правого винта связано с направлением вращения его головки (рис. 13). Мы будем пользоваться правовинтовой системой координат, в которой вращение идет от Ox_1 к Ox_2 против часовой стрелки, если смотреть со стороны Ox_3 . В этой системе координат вектор площадки разлагается на составляющие:



Рис. 13. Вектор элементарной площадки

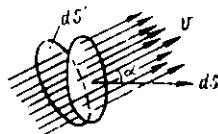


Рис. 14. К вычислению потока

от Ox_1 к Ox_2 против часовой стрелки, если смотреть со стороны Ox_3 . В этой системе координат вектор площадки разлагается на составляющие:

$$dS_1 = dx_2 dx_3; \quad dS_2 = dx_3 dx_1; \quad dS_3 = dx_1 dx_2. \quad (98)$$

Из (98) видно, что это определение $d\mathbf{S}$ совпадает с установленным ранее определением векторного произведения двух векторов, т. е. $d\mathbf{S}$ — аксиальный вектор.

Предположим теперь, что через площадку течет жидкость с плотностью, равной единице. Скорость течения изображается вектором $\mathbf{v}$. Угол между $d\mathbf{S}$ и $\mathbf{v}$ обозначим α . На рис. 14 показаны линии тока, проходящие через $d\mathbf{S}$. Они параллельны $\mathbf{v}$. Вычислим ежесекундный поток жидкости через $d\mathbf{S}$. Он равен $v dS'$, где dS' — показанная на рис. 14 пло-

* Изложение параграфа следует [6].

шадка, поставленная перпендикулярно линиям тока. Действительно, через площадку dS' за единицу времени проходит цилиндр жидкости с основанием dS' и высотой v . Но $dS' = dS \cos \alpha$, откуда искомый поток жидкости равен

$$dI = v \cdot dS' = v \cdot dS \cos \alpha = (v \cdot dS).$$

Аналогичным образом скалярное произведение любого вектора A , взятого в той точке, где находится бесконечно малая площадка, называется потоком вектора A через площадку. Подобно тому, как поток жидкости через конечную площадку S равен интегралу от dS по поверхности $I = \int (v \cdot dS)$, потоком вектора A через любую поверхность называется интеграл

$$I = \int (A \cdot dS). \quad (99)$$

Вектор площадки и был определен нами, чтобы ввести бескоординатную запись (99). Входящие в (99) интегралы двойные. Переходя к проекциям, (99) можно записать так:

$$I = \int \int A_1 dx_2 dx_3 + \int \int A_2 dx_3 dx_1 + \int \int A_3 dx_1 dx_2.$$

Пределы двойных интегралов в (99) определяются соответствующими проекциями контура, ограничивающего поверхность, на координатные плоскости.

§ 23. Теорема Гаусса—Остроградского. Дивергенция вектора

Вычислим поток вектора через замкнутую поверхность. Для этого рассмотрим сначала бесконечно малую замкнутую поверхность параллелепипеда (рис. 15). Условимся проводить нормаль к элементу замкнутой поверхности всегда из объема наружу. Вычислим поток вектора A через площадку $ABCD$ (направление обхода согласовано с направлением нормали). Так как поток равен скалярному произведению A на вектор площадки $ABCD$, направленный в сторону отрицательных значений x_1 и равный $-dx_2 dx_3$, то получим для бесконечно малой площадки

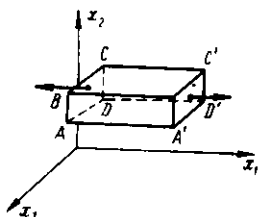


Рис. 15. К вычислению дивергенции вектора

$$dI_{ABCD} = -A_1(x_1) dx_2 dx_3.$$

Для площадки $A'B'C'D'$ проекция $dS_1 = dx_2 dx_3$ и вектор A берется не в точке x_1 , а в точке $x_1 + dx_1$. Тогда

$$dI_{A'B'C'D'} = A_1(x_1 + dx_1) dx_2 dx_3.$$

Результирующий баланс потоков через обе площадки, перпендикулярные оси Ox_1 , равен

$$dI_{ABCD} + dI_{A'B'C'D'} = [A_1(x_1 + dx_1) - A_1(x_1)] dx_2 dx_3.$$

Используя то, что dx_1 — величина бесконечно малая, разложим A_1 в ряд:

$$A_1(x_1 + dx_1) = A_1(x_1) + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} dI_{ABCD} + dI_{A'B'C'D'} &= [A_1(x_1 + dx_1) - A_1(x_1)] dx_2 dx_3 = \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Аналогично составляется баланс потоков через грани, перпендикулярные осям Ox_2 и Ox_3 . Полный поток через всю поверхность параллелепипеда равен

$$dI = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (100)$$

Конечный замкнутый объем можно разбить на малые параллелепипеды. Если просуммировать все потоки, то потоки через смежные грани компенсируются. Останется только поток через внешнюю поверхность выбранного объема. Между тем правые стороны (100) будут при этом просто суммироваться для всех элементарных объемов $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, и получится важнейшая интегральная теорема

$$\int_{(S)} (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}) = \int_{(V)} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dV. \quad (101)$$

Она называется теоремой Гаусса — Остроградского.

Выражение, стоящее в (101) под знаком объемного интеграла, можно записать короче. Заметим, что это скалярное выражение, так как слева стоит скаляр и dV — тоже скаляр. Это выражение называется дивергенцией вектора $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \quad (102)$$

Используя (100), можно определить дивергенцию независимо от какой-либо координатной системы. Действительно,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s})}{V}. \quad (103)$$

Дивергенция вектора в данной точке равна пределу отношения потока вектора через поверхность, окружающую точку, к объему, заключенному внутри поверхности, когда поверх-

ность стягивается в точку. Пусть A задает поле скоростей жидкости. Тогда из (103) видим, что дивергенция вектора A есть мера плотности источников жидкости, или число источников, из которых вытекает единица массы жидкости в единицу времени, приходящаяся на единицу объема.

§ 24. Теорема Стокса. Ротор вектора

Рассмотрим векторный интеграл по замкнутому контуру:

$$C = \int (A \cdot dl) = \int (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3). \quad (104)$$

Этот однократный интеграл называется *циркуляцией вектора* по замкнутому контуру. Если, например, A — сила, действующая на какую-нибудь частицу, то $A \cdot dl \cos \alpha$ — работа силы на элементе контура, $dl \cdot C$ — полная работа при обходе контура. Докажем теперь, что циркуляцию вектора A по контуру можно заменить интегралом по поверхности, натянутой на этот контур. Рассмотрим проекцию бесконечно малого прямоугольного контура на плоскость $x_2 O x_3$. Пусть эта проекция тоже имеет вид прямоугольника, изображенного на рис. 16. Вычислим циркуляцию A по этому прямоугольнику. Сторона AB даст вклад $A_2(x_3) dx_2$, а сторона CD — вклад $[-A_2(x_3 + dx_3) dx_2]$. Здесь знак минус надо писать потому, что направление вектора CD обратно направлению вектора AB . В сумме по сторонам AB и CD получим

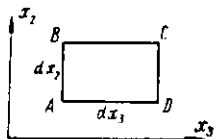


Рис. 16. К вычислению циркуляции вектора

$$[-A_2(x_3 + dx_3) + A_2(x_3)] dx_2 = -\frac{\partial A_2}{\partial x_3} dx_2 dx_3,$$

где проекция $A_2(x_3 + dx_3)$ разложена в ряд по dx_3 . Сумма по сторонам BC и AD дает

$$[A_3(x_2 + dx_2) - A_3(x_2)] dx_3 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} dx_2 dx_3.$$

Результирующая величина циркуляции в плоскости $x_2 O x_3$

$$\begin{aligned} dC_{x_1 x_3} &= \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 = \\ &= \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) dS_1 \equiv B_1 dS_1. \end{aligned} \quad (105)$$

Обозначение B_1 ясно из равенства.

Если контур произвольным образом ориентирован в пространстве, все его бесконечно малые отрезки надо согласно (104) проецировать на координатные оси. Тогда весь

контур будет иметь проекции на три координатные плоскости, и циркуляция разложится на сумму трех выражений вида (105). Циркуляция по выбранному малому контуру равна

$$dC = B_1 dS_1 + B_2 dS_2 + B_3 dS_3, \quad (106)$$

где B_i — сокращенное обозначение для таких разностей частных производных:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; \\ B_2 &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; \\ B_3 &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

По определению (104) циркуляция C — скалярная величина. В (106) dS — аксиальный вектор. Следовательно, B — тоже аксиальный вектор, составляющие которого определяются из (107). Вектор B имеет специальное название: он называется *ротором* вектора A и обозначается так: $B = \text{rot } A$. Величина $\text{rot } A$ разлагается по координатным осям с помощью трех единичных ортов:

$$\begin{aligned} B = n^{(1)} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + n^{(2)} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \\ + n^{(3)} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (108)$$

Сравнивая (108) с (106), видим, что в (106) входит нормальная к площадке составляющая $\text{rot } A$:

$$\int A \cdot dl = \text{rot}_n A \cdot dS. \quad (109)$$

Здесь индекс n у $\text{rot } A$ показывает, что надо брать проекцию $\text{rot } A$ на нормаль к площадке dS .

Формула (109) позволяет определить $\text{rot } A$ бескоординатным способом:

$$\text{rot}_n A = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int A \cdot dl}{S}, \quad (110)$$

так что нормальная составляющая $\text{rot } A$ к любой площадке в данной точке пространства есть предел отношения циркуляции по контуру площадки к ее поверхности, когда контур стягивается в точку.

Если циркуляция вычисляется по конечному контуру, то его можно разбить сеткой на бесконечно малые ячейки. Циркуляция по сторонам смежных ячеек компенсируется, так как каждая сторона проходится дважды в противополож-

ных направлениях. Остается только циркуляция по самому внешнему контуру. Интеграл от правой стороны равенства (110) дает поток ротора $\mathbf{A}$ через поверхность, натянутую на контур. Получается интегральная теорема

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S},$$

называемая теоремой Стокса.

§ 25. Дифференцирование по радиус-вектору. Оператор «набла»

Дивергенция и ротор вектора суть его производные по векторному аргументу. Их можно свести к единой записи, если ввести символический вектор «набла» с составляющими

$$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \nabla_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \nabla_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Тогда умножение слева на набла означает дифференцирование по радиус-вектору. Скалярное произведение вектора «набла» на $\mathbf{A}$ дает при этом $\text{div } \mathbf{A}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &\equiv (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla_1 A_1 + \nabla_2 A_2 + \nabla_3 A_3 = \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \equiv \text{div } \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (111)$$

Используя индексы суммирования, можно записать (111) в виде

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla_i A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}.$$

Векторное произведение ∇ на $\mathbf{A}$ дает $\text{rot } \mathbf{A}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} \equiv [\nabla \times \mathbf{A}] &= n^1 (\nabla_2 A_3 - \nabla_3 A_2) + n^2 (\nabla_3 A_1 - \nabla_1 A_3) + \\ &+ n^3 (\nabla_1 A_2 - \nabla_2 A_1). \end{aligned}$$

Используя индексы суммирования и совершенно антисимметричный тензор e_{ikl} , операцию ротора можно записать в виде

$$\text{rot}_i \mathbf{A} \equiv [\nabla \times \mathbf{A}]_i \equiv e_{ikl} \nabla_k A_l \equiv e_{ikl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k}.$$

Всюду поставлен знак тождества $\equiv$, чтобы подчеркнуть, что речь идет о перемене обозначений. Эта система обозначений очень удобна в векторном анализе благодаря большой наглядности производимых операций и сжатости записи. Если пользоваться наблой, то при доказательстве любых общих соотношений нет нужды прибегать к разложению векторов на составляющие. В алгебраических операциях ∇ во всем по-

добна обыкновенному вектору. Умножением на наблу называется ее применение к данному выражению, если оно дифференцируется. Если применить ∇ к скаляру φ , то получается вектор, называемый *градиентом скаляра*

$$\nabla\varphi \equiv \text{grad } \varphi = n^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + n^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + n^3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}. \quad (112)$$

Приведем теперь правила дифференциальных операций с наблой. При этом следует помнить, что ∇ по отношению к дифференцированию — знак производной, а по отношению к правилам преобразования координат — вектор. Рассмотрим дифференцирование произведений. Градиент от произведения двух скаляров вычисляется как производная произведения

$$\nabla\varphi\psi = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi.$$

Дивергенция от произведения скаляра на вектор строится так:

$$\begin{aligned} \text{div } \varphi\mathbf{A} &= (\nabla_\varphi \cdot \varphi\mathbf{A}) + (\nabla_{\mathbf{A}} \cdot \varphi\mathbf{A}) = \\ &= \mathbf{A}\nabla\varphi + \varphi(\nabla\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \cdot \text{div } \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (113)$$

Здесь индексы φ и $\mathbf{A}$ при ∇ показывают, на что действует ∇ . Аналогично найдем ротор от $\varphi \cdot \mathbf{A}$:

$$\text{rot } \varphi\mathbf{A} = [\nabla_\varphi \times \varphi\mathbf{A}] + [\nabla_{\mathbf{A}} \times \varphi\mathbf{A}] = [\nabla\varphi \times \mathbf{A}] + \varphi \text{rot } \mathbf{A}.$$

Теперь применим ∇ к произведению двух векторов

$$\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (\nabla \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]) = (\nabla_{\mathbf{A}} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]) + (\nabla_{\mathbf{B}} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]).$$

В обоих слагаемых произведем циклическую перестановку, поскольку с ∇ при умножении можно обращаться как с обычным вектором. Во втором слагаемом, кроме того, поставим $\mathbf{B}$ после $\nabla_{\mathbf{B}}$, причем знак векторного произведения изменится на обратный

$$\begin{aligned} \text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= (\mathbf{B} \cdot [\nabla_{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}]) - (\mathbf{A} \cdot [\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}]) = \\ &= \mathbf{B} \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Найдем теперь ротор от векторного произведения. При этом надо пользоваться соотношением $[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$:

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= [\nabla \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]] = \\ &= [\nabla_{\mathbf{A}} \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]] + [\nabla_{\mathbf{B}} \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]] = \\ &= (\nabla_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\nabla_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla_{\mathbf{B}})\mathbf{B} = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Здесь новыми для нас являются символы $(\mathbf{A} \cdot \nabla)$ и $(\mathbf{B} \cdot \nabla)$, применяемые к векторам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Эти символы являются скалярами, по определению ∇ равными

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \nabla) &= A_1 \nabla_1 + A_2 \nabla_2 + A_3 \nabla_3 = \\ &= A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (114)$$

Тогда $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ — есть вектор, который получается из вектора $\mathbf{B}$ путем применения ко всем его компонентам скалярной операции $(\mathbf{A} \cdot \nabla)$ согласно (114). Так как операция $(\mathbf{A} \cdot \nabla)$ скалярная, ее можно вносить под знак скалярного и векторного произведения векторов, помня при этом о ее дифференциальных свойствах.

Нам остается еще вычислить из операций такого рода градиент от скалярного произведения

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \nabla_B(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Применим то же преобразование, что и в предыдущем случае:

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla_A)\mathbf{A} + (\mathbf{B} \times [\nabla_A \times \mathbf{A}]) + \\ &+ (\mathbf{A} \cdot \nabla_B)\mathbf{B} + [\mathbf{A} \times [\nabla_B \times \mathbf{B}]] = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + [\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}] + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + [\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B}]. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь операции с повторным употреблением оператора ∇ . Ротор от градиента некоторого скаляра φ равен нулю:

$$\text{rot grad } \varphi = [\nabla \times \nabla \varphi] = [\nabla \times \nabla] \varphi = 0,$$

так как векторное произведение любого вектора на самого себя дает нуль.

Дивергенция ротора тоже равна нулю:

$$\text{div rot } \mathbf{A} = (\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}]) = ([\nabla \times \nabla] \cdot \mathbf{A}) = 0.$$

Запишем в составляющих дивергенцию градиента φ . По формулам (111) и (112) имеем

$$\text{div grad } \varphi = (\nabla \cdot \nabla)\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \Delta \varphi.$$

Здесь дельта Δ — это оператор Лапласа, или лапласиан:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Наконец, ротор ротора раскрывается как двойное векторное произведение:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{A} &= \\ &= [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Перечисленные векторные операции находят самое широкое применение в физике твердого тела. Укажем некоторые существенные для физики случаи применения ∇ к величинам, зависящим от радиус-вектора точки.

1. Из определения дивергенции (102) и ротора (107) следует

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 1 + 1 + 1 = 3, \quad \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0.$$

2. Согласно (113) имеем

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r^5} = 0.$$

Беря градиент $1/r^3$, мы применили правило дифференцирования сложной функции: сперва дифференцировали $1/r^3$ по r , а затем взяли ∇r . Это делается следующим образом. Зная, что $r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$, находим

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \nabla_1 r = \frac{x_1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} = \frac{x_1}{r}.$$

Переходя от компоненты по Ox_1 к векторной записи, получим

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (115)$$

Согласно (113) имеем

$$\nabla \frac{1}{r^3} = \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \nabla r = -\frac{3}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

3. Возьмем теперь $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r}$. Компонента по Ox_1 дает

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) x_1 = A_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} = A_1,$$

или $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{A}$.

4. Покажем, как применять наблу к вектору, компоненты которого зависят только от абсолютной величины вектора $|\mathbf{r}|$. Как и в случае скаляра, надо применять правило дифференцирования сложной функции, а для ∇r брать (115), тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(r) = \frac{d\mathbf{A}}{dr} \nabla r = \frac{d\mathbf{A}}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\frac{d\mathbf{A}}{dr}$ — вектор, составляющими которого являются производные от трех компонент вектора $\mathbf{A}$ по r .

5. Аналогично рассуждая, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(r) = \left[\nabla r \times \frac{d\mathbf{A}}{dr} \right] = \frac{\left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{A}}{dr} \right]}{r}.$$

ЗАДАЧИ

1. Используя индексы суммирования, записать $\operatorname{div} \mathbf{D}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{H}$.
2. Показать, что $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ является полярным вектором.
3. Показать, что $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ является аксиальным вектором.
4. Вычислить $\Delta(1/r)$.
5. Вычислить $\operatorname{div} (\varphi(r)\mathbf{r})$.
6. Вычислить $\nabla(Ar)$, где $A = \text{const}$.
7. Вычислить $\nabla(A(r) \cdot \mathbf{r})$, где A — функция модуля r .
8. Вычислить диполь-дипольное взаимодействие $\frac{d^2\varphi}{dr_i dr_k}$, где $\varphi = \frac{1}{r}$.
9. Во внешнем электромагнитном поле электрон характеризуется обобщенным импульсом $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{p}$ — кинематический импульс и $\mathbf{A}$ — векторный потенциал электромагнитного поля.
Гамильтониан электрона во внешних полях равен

$$H = \frac{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2}{2m} + e\varphi,$$

где

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi; \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Доказать, что действующая на электрон сила имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}],$$

где $\mathbf{v}$ — скорость электрона.

10. Записать уравнения Максвелла с использованием:
 - а) символа набла;
 - б) индексов суммирования.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Глава VII. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ. ТЕНЗОР 4-го РАНГА

§ 26. Тензор деформации

Механика твердых тел, рассматриваемых как сплошные среды, составляет содержание теории упругости. Под влиянием приложенных сил твердые тела в той или иной мере деформируются, т. е. меняют свою форму и объем. Для математического описания деформации тела положение каждой точки тела характеризуется в некоторой выбранной системе координат ее радиус-вектором $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. При деформировании все точки тела смещаются на вектор $\mathbf{u}$, равный $u_i = x_i' - x_i$, где x_i — компонента радиус-вектора данной точки до деформирования, а x_i' — компонента радиус-вектора

этой же точки после деформации. Координаты x_i' смещенной точки являются функциями от координат x_i той же точки до смещения. Задание вектора смещения u как функции x_i полностью определяет деформацию тела.

При деформировании тела меняется расстояние между любыми двумя бесконечно близкими точками. Если до деформирования радиус-вектор между двумя точками равнялся dx_i , то в деформированном состоянии он равен $dx_i' = dx_i + du_i$. Расстояние между этими точками до деформирования равно

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \sqrt{dx_i^2},$$

а после деформирования

$$dl' = \sqrt{(dx_1')^2 + (dx_2')^2 + (dx_3')^2} = \sqrt{dx_i'^2} = \sqrt{(dx_i + du_i)^2}. \quad (116)$$

Представляя du_i в виде $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$, получим из (116)

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l. \quad (117)$$

Поскольку во втором слагаемом в (117) индексы i и k являются немymi, то можно написать

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k. \quad (118)$$

Практически во всех случаях деформации $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ оказываются малыми, т. е. изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием. Вектор деформации может быть большим и при малых деформациях. Например, в длинном тонком стержне концы сильно перемещаются при изгибе, но растяжения и сжатия внутри стержня будут незначительными. Поэтому третий член в (117) можно отбросить. Тогда с учетом (118) можно переписать (117) в виде

$$dl'^2 = dl^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k.$$

Величину

$$u_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (119)$$

называют *тензором деформации* кристалла. Из (119) видно, что u_{ik} — симметричный тензор 2-го ранга. Рассмотрим свойства тензора u_{ik} . Как и всякий симметричный тензор, его можно привести к главным осям, т. е. в каждой данной точке выбрать систему координат, в которой отличны от нуля только диагональные компоненты u^1, u^2, u^3 . Надо помнить,

что если u_{ik} приведен к главным осям в некоторой точке тела, то он недиагонален во всех других точках.

Если в данной точке тензор u_{ik} приведен к главным осям, то для окружающего ее элемента объема можно написать

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k = \\ &= (1 + 2u^1) dx_1^2 + (1 + 2u^2) dx_2^2 + (1 + 2u^3) dx_3^2. \end{aligned}$$

Выражение для dl'^2 распадается на три независимых члена, т. е. в каждом элементе объема деформацию можно рассматривать как совокупность трех независимых деформаций по трем взаимно перпендикулярным направлениям — главным осям тензора деформации. Каждая из этих деформаций представляет собой простое растяжение вдоль соответствующего направления. Например, длина dx_i вдоль i -й из главных осей превращается в

$$dx_i' = \sqrt{(1 + 2u^i) dx_i^2} \approx (1 + u^i) dx_i. \quad (120)$$

Относительное удлинение

$$\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} = 1 + u^i - 1 = u^i,$$

т. е. непосредственно главным значениям тензора $[u_{ik}]$.

Рассмотрим теперь малый элемент объема dV и определим его величину dV' после деформирования. Выберем в качестве осей координат главные оси в данной точке. Тогда согласно (120)

$$\begin{aligned} dV' &= dx_1' dx_2' dx_3' = (1 + u^1)(1 + u^2)(1 + u^3) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= dV(1 + u^1 + u^2 + u^3). \end{aligned}$$

Сумма главных значений тензора u_{ik} называется его следом. Она не зависит от выбора системы координат и является инвариантом [7], поэтому след тензора u_{ik} можно записать в виде

$$u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33} = u^1 + u^2 + u^3. \quad (121)$$

Напомним, что слева в (121) по повторяющемуся значку идет суммирование. Тогда получим $dV' = dV(1 + u_{ii})$ или для относительного изменения объема

$$\frac{dV' - dV}{dV} = u_{ii}.$$

Таким образом, сумма диагональных компонент тензора деформации является относительным изменением объема.

Деформация тела сводится к чистому изменению объема при всестороннем сжатии, так как каждый элемент тела при

этом остается подобным самому себе. Тензор деформации для всестороннего сжатия при этом равен

$$u_{ik} = \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}. \quad (122)$$

Множитель $1/3$ возникает в (122) из-за того, что в диагональной составляющей u_{ik} величина $\delta_{ii} = 3$. Если сумма диагональных элементов тензора u_{ik} равна нулю, то деформируемый объем остается неизменным. Происходит только изменение формы тела. Деформация, сопровождающаяся изменением формы тела без изменения его объема, называется *сдвигом*. Всякую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия. Для этого достаточно написать тождество

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}. \quad (123)$$

Первый член (123) представляет собой чистый сдвиг, так как сумма его диагональных членов равна нулю.

§ 27. Тензор напряжений

В равновесии равнодействующая всех сил, действующих на выделенный в теле объем, должна равняться нулю. При деформировании тело выводится из состояния равновесия и в нем возникают силы, стремящиеся вернуть его в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называют *внутренними напряжениями*.

Внутренние напряжения обусловлены силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Межмолекулярные силы обладают малым радиусом действия, т. е. они являются короткодействующими силами, передающимися от каждой точки только к ближайшим к ней. Отсюда силы, действующие на какую-нибудь часть тела со стороны окружающих ее частей, действуют только непосредственно через поверхность этой части. Выделим в теле объем V и рассмотрим действующую на него суммарную силу. Если F — сила, действующая на единицу объема, то на элемент объема dV действует сила FdV , а на все тело — $\int FdV$. Но согласно вышесказанному эта сила действует на рассматриваемый объем только через его поверхность. Поэтому она может быть представлена в виде суммы сил, действующих на каждый элемент поверхности объема V , т. е. в виде некоторого интеграла по этой поверхности.

Как известно из векторного анализа, интеграл от скаляра по произвольному объему может быть преобразован в интеграл по поверхности в том случае, если этот скаляр является

дивергенцией некоторого вектора. Чтобы аналогичную процедуру выполнить для интеграла по объему от вектора F_i , этот вектор должен быть дивергенцией некоторого тензора 2-го ранга, т. е.

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

Тогда сила, действующая на некоторый объем, может быть написана в виде интеграла по замкнутой поверхности, охватывающей этот объем:

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \int \sigma_{ik} dS_k. \quad (124)$$

Здесь dS_k — компонента вектора dS элемента поверхности, направленного по внешней нормали к поверхности. Тензор σ_{ik} называется тензором напряжений. Как видно из (124), величина $\sigma_{ik} dS_k$ — это i -я компонента силы, действующей на элемент поверхности dS . Компонента σ_{ik} есть i -я компонента силы, действующая на единицу поверхности, перпендикулярной к оси Ox_k . На рис. 17 показаны компоненты σ_{ik} , взятые в плоскости x_2Ox_3 .

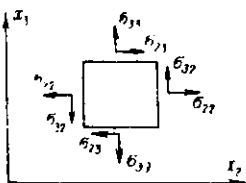


Рис. 17. Компоненты тензора напряжений в плоскости x_2Ox_3

Конкретный вид тензора напряжений σ_{ik} определяется видом внешнего воздействия, оказываемого при деформировании на тело. В теории упругости показано, что в отсутствие объемных моментов тензор напряжений является симметричным [7], т. е.

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (125)$$

Приведем следующие частные формы тензора напряжений.

1. Одноосное напряжение (стержень с подвешенным грузом).

$$[\sigma_{ik}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Плосконапряженное состояние (пластина, нагруженная силами)

$$[\sigma_{ik}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (126)$$

3. Всестороннее сжатие

$$[\sigma_{ik}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}.$$

4. Напряжение чистого сдвига — частный случай двух-осного напряжения (126)

$$[\sigma_{ik}] = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тензор напряжений $[\sigma_{ik}]$ так же, как и тензор деформаций $[u_{ik}]$, отличается от других изучавшихся ранее тензоров 2-го ранга. Тензоры $[e_{ik}]$ и $[\mu_{ik}]$ имеют определенную ориентацию в кристалле и должны согласовываться с симметрией кристалла. Они называются *материальными тензорами*. Тензор напряжений $[\sigma_{ik}]$ и тензор деформаций $[u_{ik}]$ могут иметь любую ориентацию в кристалле. Они имеются даже у изотропных тел. Такие тензоры называют *полевыми тензорами*.

§ 28. Закон Гука. Коэффициенты упругой податливости и жесткости

Под действием приложенных напряжений меняется форма твердого тела. Если приложенное напряжение не слишком велико, то деформация является обратимой — при снятии напряжения тело принимает первоначальную форму. При таких достаточно малых напряжениях возникающая в твердом теле деформация пропорциональна величине приложенного напряжения, т. е. в общем случае тензор деформации должен быть пропорционален тензору напряжений:

$$u_{ik} = S_{iklm} \sigma_{lm}. \quad (127)$$

Это и есть закон Гука.

Из соображений тензорной размерности следует, что коэффициент пропорциональности между двумя тензорами 2-го ранга должен быть тензором 4-го ранга, т. е. величиной, преобразующейся как произведение четырех координат.

Величину $[u_{ik}]$ из (127) называют тензором *упругой податливости* кристалла. Соотношение (127) означает, что любая компонента тензора деформации $[u_{ik}]$ выражается, вообще говоря, через все компоненты тензора напряжений. Например,

$$u_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1112}\sigma_{12} + S_{1113}\sigma_{13} + S_{1121}\sigma_{21} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1123}\sigma_{23} + \\ + S_{1131}\sigma_{31} + S_{1132}\sigma_{32} + S_{1133}\sigma_{33}.$$

Для других восьми компонент тензора $[u_{ik}]$ имеется восемь аналогичных соотношений, содержащихся в сокращенной записи (127). Если приложена только одна компонента напряжения, скажем σ_{11} , то из (127) следует, что отличными от нуля будут все компоненты u_{ik} , а не только u_{11} . Отсюда вытекает, что если прямоугольный стержень подвергнуть одноосному растяжению, параллельно четырем его ребрам, то стержень будет не только удлиняться в направлении растяжения, но и претерпевать сдвиг. При этом все углы между ребрами становятся отличными от прямых углов. Если мы будем изгибать стержень, то стержень не только будет изгибаться, но и закручиваться и т. д.

Можно записать соотношение, обратное (127),

$$\sigma_{ik} = c_{iklm} u_{lm}. \quad (128)$$

Величины c_{iklm} называют *константами упругой жесткости* кристалла. Величины c_{iklm} также являются тензором 4-го ранга. Полное число компонент тензора четвертого ранга равно 81.

Рассмотрим свойства тензора $[s_{iklm}]$. Пусть к кристаллу приложено сдвиговое напряжение σ_{12} . Из (125) следует, что

$$u_{11} = s_{1112} \sigma_{12} + s_{1121} \sigma_{21} = (s_{1112} + s_{1121}) \sigma_{12}. \quad (129)$$

Коэффициенты s_{1112} и s_{1121} появляются всегда вместе, и не существует эксперимента, в котором их можно было бы разделить друг от друга. Поэтому эти две компоненты считают равными: $s_{1112} = s_{1121}$. Аналогичные соотношения можно получить для любой второй пары значков, т. е.

$$s_{iklm} = s_{ikml}. \quad (130)$$

Говорят, что тензор s_{iklm} симметричен по второй паре значков. Если приложить одноосное растягивающее напряжение параллельно оси Ox_3 , то компоненты тензора деформации равны:

$$u_{11} = s_{1133} \sigma_{33}; \quad u_{12} = s_{1233} \sigma_{33}; \quad u_{21} = s_{2133} \sigma_{33} \text{ и т. д.}$$

В § 26 этой главы мы видели, что тензор деформации $[u_{ik}]$ является по определению симметричным, т. е. $u_{12} = u_{21}$. Следовательно, из (127) следует, что $s_{1233} = s_{2133}$. Поэтому тензор симметричен и по первой паре значков:

$$s_{iklm} = s_{kilm}. \quad (131)$$

Соотношения (131) и (130) уменьшают число независимых компонент тензора s_{iklm} с 81 до 36. Аналогичным свойством обладает и матрица c_{iklm} . Благодаря симметричности s_{iklm} по первой и второй паре индексов, можно объединить два пер-

вых индекса в один, пробегающий значения от 1 до 6. Аналогично можно поступить со второй парой индексов. Тогда можно ввести вместо тензорных следующие матричные обозначения:

Тензорные обозначения	11	22	33	23,32	31,13	12,21
Матричные обозначения	1	2	3	4	5	6

При этом имеются следующие соотношения между компонентами тензора s_{iklm} и элементами матрицы s_{pq} , где $p, q = 1 \dots 6$: $s_{iklm} = s_{pq}$, если p и q равны 1, 2, 3; $2s_{iklm} = s_{pq}$, если либо p , либо q равны 4, 5, 6; $4s_{iklm} = s_{pq}$, если и p , и q равны 4, 5, 6.

Матрица коэффициентов s_{pq} имеет вид

$$(s_{pq}) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ (s_{21}) & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ (s_{31}) & (s_{32}) & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ (s_{41}) & (s_{42}) & (s_{43}) & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ (s_{51}) & (s_{52}) & (s_{53}) & (s_{54}) & s_{55} & s_{56} \\ (s_{61}) & (s_{62}) & (s_{63}) & (s_{64}) & (s_{65}) & s_{66} \end{bmatrix}. \quad (132)$$

Величины s_{pq} неомотря на наличие двух индексов не являются компонентами тензора 2-го ранга и не преобразуются как произведения двух координат. Для преобразования их к другим осям, в частности для применения операций симметрии, всегда нужно возвращаться к тензорным обозначениям.

Еще одно общее свойство тензора $[s_{iklm}]$ можно получить, рассматривая энергию деформированного тела. Рассмотрим сначала работу, совершенную при деформировании тела. Аналогично уравнениям для работы намагничивания ($dW = (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B})V$) или работы поляризации ($dW = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D})V$) работа при деформировании записывается в виде $dW = \sigma_{ik} du_{ik}$. Выразим σ_{ik} через u_{ik} по (128), тогда

$$dW = c_{iklm} u_{lm} du_{ik}.$$

Работа по деформированию тела равна изменению свободной энергии тела

$$dF = \sigma_{ik} du_{ik} = c_{iklm} u_{lm} du_{ik},$$

отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = c_{iklm} u_{lm},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial u_{lm}} \frac{\partial}{\partial u_{ik}} F = c_{iklm}. \quad (133)$$

Свободная энергия тела F есть функция только состояния тела, определяемого компонентами тензора деформации. Порядок дифференцирования в (133) не играет роли, и правая сторона этого равенства симметрична при перестановке пар значков i, k и l, m . Таким образом, константы упругой жесткости c_{iklm} , а следовательно, и константы упругой податливости s_{iklm} симметричны при перестановке первой и второй пары значков. В матричных обозначениях это дает $s_{pq} = s_{qp}$. Отсюда следует, что (132) — симметричная матрица, в которой из 36 элементов только 21 независимый. Зависимые компоненты стоят в (132) в скобках.

§ 29. Влияние симметрии кристалла

Дальнейшее уменьшение числа независимых компонент тензора $[s_{iklm}]$ получается при учете симметрии кристалла. С помощью метода прямой проверки, суть которого излагалась в главе V, найдем независимые компоненты тензора $[s_{iklm}]$ для кристалла кубической симметрии.

Рассмотрим сначала тетрагональную симметрию, элементы которой совпадают с элементами симметрии прямой квадратной призмы (рис. 18). Во-первых, имеются три плоскости симметрии, отражение в которых преобразует систему координат так:

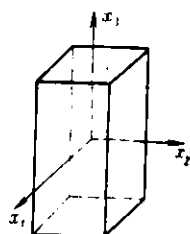


Рис. 18. Симметрия тетрагональной системы

$$\left. \begin{array}{lll} \text{плоскость } x_1 O x_2 & \text{плоскость } x_2 O x_3 & \text{плоскость } x_1 O x_3 \\ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 \\ x_3 \rightarrow -x_3 \end{array} & \begin{array}{l} x_1 \rightarrow -x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 \\ x_3 \rightarrow x_3 \end{array} & \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1 \\ x_2 \rightarrow -x_2 \\ x_3 \rightarrow x_3 \end{array} \end{array} \right\} \quad (134)$$

Из (134) видно, что все компоненты тензора с нечетным числом значков 1, 2, 3 обращаются в нуль. Например,

$$s_{46} \equiv s_{2312} \rightarrow -s_{2312},$$

$$s_{34} \equiv s_{3323} \rightarrow -s_{3323}.$$

Эти компоненты меняют знак и, следовательно, $s_{2312} = 0$ и $s_{3323} = 0$. Перебирая все компоненты матрицы (132), видим, что

$$\begin{aligned} s_{14} &= s_{15} = s_{16} = s_{24} = s_{25} = s_{26} = \\ &= s_{34} = s_{35} = s_{36} = s_{45} = s_{46} = s_{56} = 0. \end{aligned}$$

В матрице (132) при этом остаются следующие члены:

$$(s_{pq}) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}.$$

Мы не выписали элементы ниже диагонали, так как s_{pq} — симметричная матрица. Итак, у нас осталось всего девять независимых компонент.

В тетрагональной системе имеется еще ось четвертого порядка Ox_3 , вращение вокруг которой преобразует координаты на рис. 18 следующим образом:

$$x_1 \rightarrow x_2;$$

$$x_2 \rightarrow -x_1;$$

$$x_3 \rightarrow x_3.$$

Это преобразование устанавливает три соотношения между компонентами:

$$s_{11} \equiv s_{1111} = s_{2222} \equiv s_{22},$$

$$s_{13} \equiv s_{1133} = s_{2233} \equiv s_{23},$$

$$s_{44} \equiv s_{2323} = s_{1313} \equiv s_{55}.$$

Итак, для кристаллов тетрагональной сингонии в матрице s_{pq} остается шесть независимых компонент:

$$(s_{pq}) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix}.$$

В кубической симметрии к указанным элементам симметрии добавляются еще две взаимно перпендикулярные оси четвертого порядка. Имеется ось Ox_1 , вращение вокруг которой дает

$$x_1 \rightarrow x_1; \quad x_2 \rightarrow x_3; \quad x_3 \rightarrow -x_2. \quad (135)$$

Также есть ось Ox_2 , вращение вокруг которой преобразует координаты так:

$$x_1 \rightarrow x_3; \quad x_2 \rightarrow x_2; \quad x_3 \rightarrow -x_1. \quad (136)$$

Из (135) и (136) следуют аналогично предыдущему еще три соотношения

$$s_{12} \equiv s_{1122} = s_{1133} \equiv s_{13},$$

$$s_{11} \equiv s_{1111} = s_{3333} \equiv s_{33},$$

$$s_{44} \equiv s_{2323} = s_{2121} \equiv s_{66}.$$

Таким образом, для кристаллов кубической сингонии матрица s_{pq} имеет всего три независимых компонента s_{1111} , s_{1212} , s_{1122} , через которые она записывается в виде

$$(s_{pq}) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix}.$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что тензор деформации u_{ik} — тензор 2-го ранга.
2. Доказать, что тензор жесткости c_{iklm} — тензор 4-го ранга.
3. Доказать, что единичный тензор δ_{ik} не изменяется при ортогональных преобразованиях координат.
4. Доказать, что след тензора u_{ik} образует скаляр.
5. Найти след тензора $u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}$.

6. Свободная энергия F упруго деформированного тела является функцией тензора деформации u_{ik} . Написать выражение для F в виде ряда по степеням u_{ik} с точностью до членов 2-го порядка: а) в случае кристалла; б) в случае изотропного тела.

7. Пьезоэлектрическим и пьезомагнитным эффектами называют возникновение электрического и магнитного M моментов под действием механического напряжения σ_{ik} . Написать феноменологическое выражение для этих моментов с точностью до членов 1-го порядка по σ_{ik} . Выяснить, какие ограничения на коэффициенты разложения накладывают: а) наличие центра инверсии у кристалла; б) кубическая симметрия. Указать принципиальную разницу между этими эффектами.

8. Написать феноменологическое выражение для тензора деформаций u_{ik} в присутствии градиента температуры ∇T с точностью до членов 1-го порядка по ∇T . Найти вид u_{ik} в случае, когда ∇T направлен по оси 4-го порядка.

9. Эффективная масса электрона в полупроводнике, вообще говоря, зависит от внешнего напряжения σ_{ik} . Найти тензор обратной эффективной массы электрона для тетрагонального кристалла в случае, когда к нему приложено напряжение, перпендикулярное оси 4-го порядка.

10. Найти деформацию μ_{ik} , которая спонтанно возникает в ферромагнетике при переходе в ферромагнитное состояние с магнитным моментом M . Рассмотреть влияние кубической симметрии на коэффициент разложения.

Глава VIII. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МАГНИТООПТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

§ 30. Эффект Фарадея

Магнитооптические эффекты заключаются во влиянии поля H на характер распространения света в среде. В частности, эффект Фарадея — это вращение плоскости поляризации под действием магнитного поля, а эффект Коттона — Мутона — изменение поляризации с линейной на эллиптическую. Проведем сначала общее рассмотрение характера распространения света в произвольной анизотропной среде при наличии постоянного поля H .

В магнитном поле тензор $\{\epsilon_{ik}\}$ так же, как и $\{\sigma_{ik}\}$, перестает быть симметричным. Чтобы сохранить равенство компонент с переставленными значками, надо изменить направление H на противоположное. Подобно (73) для σ_{ik} , для $\epsilon_{ik}(H)$ имеем

$$\epsilon_{ik}(H) = \epsilon_{ki}(-H). \quad (137)$$

Если поглощение в среде отсутствует, то, как показано в [2], диэлектрическая проницаемость не обязательно вещественна, достаточно, чтобы

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}^*, \quad (138)$$

где значком $*$ помечена комплексно-сопряженная величина. Отметим, что тензор, обладающий свойством (138), называется эрмитовым. Разделив ϵ_{ik} на вещественную и мнимую части

$$\epsilon_{ik} = \epsilon'_{ik} + i\epsilon''_{ik},$$

можно, используя (138), показать, что это разделение соответствует разделению ϵ_{ik} на симметричную и антисимметричную части, т. е.

$$\epsilon'_{ik} = \epsilon'_{ki}; \quad \epsilon''_{ik} = -\epsilon''_{ki}.$$

Тогда, учитывая (139), получим для ϵ_{ik} такие же соотношения симметрии, как для σ_{ik} (см. § 16 главы III):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_{ik}(H) &= \epsilon'_{ki}(-H) = \epsilon'_{ik}(-H); \\ \epsilon''_{ik}(H) &= \epsilon''_{ki}(-H) = -\epsilon''_{ik}(-H). \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Антисимметричный тензор 2-го ранга ϵ'_{ik} эквивалентен некоторому аксиальному вектору $\overset{\circ}{g}$, причем их компоненты связаны посредством (696):

$$\epsilon''_{ik} = e_{ikl} \overset{\circ}{g}_l.$$

Теперь связь между D и E можно представить в виде

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k = (\epsilon'_{ik} + i\epsilon''_{ik}) E_k = (\epsilon'_{ik} + ie_{ikl} \overset{\circ}{g}_l) E_k,$$

или

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k + i[E \times \overset{\circ}{g}]_i. \quad (140)$$

Среду с такой формой зависимости D(E) называют *гиротропной*, а вектор $\overset{\circ}{g}$ — вектором *гирации*.

В дальнейшем удобнее рассматривать зависимость, обратную (140), т. е. E(D):

$$E_i = \epsilon^{-1}_{ik} D_k.$$

Обозначим

$$\epsilon^{-1}_{ik} \equiv \eta_{ik}.$$

Тензор $\eta_{ik} = \eta'_{ik} + i\eta''_{ik}$, обратный по отношению к ϵ_{ik} , обладает такими же свойствами симметрии (139), что и ϵ_{ik} , так что вместо (140) получим

$$E_i = \eta_{ik} D_k = \eta'_{ik} D_k + i[D \times \overset{\circ}{G}]_i.$$

Здесь $\overset{\circ}{G}$ — аксиальный вектор, эквивалентный мнимой части η_{ik} :

$$\eta'_{ik} = e_{ikl} \overset{\circ}{G}_l \quad (141)$$

и связанный с вектором $\overset{\circ}{g}$ соотношением

$$\overset{\circ}{G}_i = -\frac{1}{\|\epsilon\|} \epsilon'_{ik} \overset{\circ}{g}_k. \quad (142)$$

Направим волновой вектор n по оси Ox_3 . Тогда для описания распространения света в кристалле можно воспользоваться уравнениями (60):

$$\left(\frac{1}{n^2} \delta_{ik} - \eta_{ik} \right) D_k = 0 \quad (i, k = 1, 2)$$

или с учетом (141)

$$\left(\frac{1}{n^2} \delta_{ik} - \eta'_{ik} - e_{ikl} \overset{\circ}{G}_l \right) D_k = 0. \quad (143)$$

Как показано в главе II, уравнение (143) описывает распространяющиеся в направлении Ox_3 две волны, векторы D_1 и D_2 которых колеблются в плоскостях n_3, n_1 и n_3, n_2 , где n_1 и n_2 — оси эллиптического сечения оптической индикатрисы (см. рис. 6). Совместим оси Ox_1 и Ox_2 с n_1 и n_2 соответственно. Тогда (143) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) D_{x_1} + iG_3 D_{x_2} &= 0, \\ iG_3 D_{x_1} + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) D_{x_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

Приравнявая нулю определитель линейной системы уравнений (144), получим

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = G_3^2. \quad (145)$$

Квадратное уравнение (145) дает два значения n для заданного направления n :

$$\left(\frac{1}{n^2} \right)_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right) \pm \sqrt{\left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)^2 + G_3^2 \right\}}. \quad (146)$$

Подставляя (146) в (144), получим два значения для отношения

$$\frac{D_{x_1}}{D_{x_2}} = iG_3^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)^2 + G_3^2 \right]} \right\}. \quad (147)$$

Как легко видеть из (147), произведение этих двух значений равно единице. Поэтому вместо (147) можно записать для одной волны

$$D_{x_1}^1 = i\rho D_{x_2}^1$$

и для другой

$$D_{x_2}^2 = -\frac{i}{\rho} D_{x_1}^2.$$

Чисто мнимое отношение компонент вектора D в обеих волнах означает, что эти компоненты отличаются множителем $\exp(i\pi/2)$, т. е. сдвинуты по фазе на $\pi/2$.

Таким образом, концы векторов D_1 и D_2 описывают эллипсы с одинаковым отношением осей, равным ρ , но вытянутые в двух взаимно перпендикулярных направлениях (вдоль n_1 и n_2); направление вращения D_1 и D_2 противоположно. Итак, включение N приводит к тому, что вместо двух линейно поляризованных волн в кристалле распространяются две эллиптически поляризованные волны.

Величина этого эффекта (отношение осей ρ) определяется вектором гирации $\vec{g}$ (или вектором $\vec{G}$), зависящим от N .

Опыт показывает, что при произвольном направлении $\mathbf{n}$ эффект мал (эллипсы сильно вытянуты), тем более, что обычно магнитные поля сравнительно слабые. В силу малости $\mathbf{H}$ величины $\eta(\mathbf{H})$, $\eta'(\mathbf{H})$, $\mathring{g}(\mathbf{H})$ и т. п. можно разложить в ряд по степеням $\mathbf{H}$. При этом в соответствии со (139) $\eta'(\mathbf{H})$ содержит только четные степени $\mathbf{H}$, а $\eta''(\mathbf{H})$, $\mathring{g}(\mathbf{H})$ — только нечетные:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{ik}(\mathbf{H}) &= \eta_{ik}^0 + h_{iklm} H_l H_m + \dots; \\ \eta''_{ik}(\mathbf{H}) &= p_{ikm} H_m + \dots; \\ g_i(\mathbf{H}) &= f_{ik} H_k + \dots \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Характер магнитооптического эффекта меняется, если $\mathbf{n}$ совпадает с направлением оптической оси*. Этот случай аналогичен случаю изотропной среды, для которой соотношения (142) и (148) упрощаются:

$$\mathring{G} = -\frac{1}{g^2} \mathring{g}; \quad (149)$$

$$\eta'(\mathbf{H}) = \eta^0 + hH^2; \quad g = fH; \quad \eta''(H) = pH. \quad (150)$$

В уравнении (146) коэффициенты преломления в отсутствие поля $n_1 = n_2 \equiv n_0 = \sqrt{\epsilon}$. Отсюда $n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm n_0^4 G_3$, или с учетом (149)

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 \mp g_3. \quad (151)$$

Так как ось Ox_3 направлена вдоль $\mathbf{n}$, то с точностью до членов $O(H^2)$ можно переписать (151) в векторном виде

$$\left(n \pm \frac{1}{2n_0} g \right)^2 = n_0^2. \quad (152)$$

Отсюда видно, что поверхность волновых векторов (оптическая индикатриса) теперь представляет собой совокупность двух сфер, центры которых смещены от начала координат на расстояния $\pm \frac{g}{2n_0}$, а радиус каждой — по-прежнему n_0 . Каждому значению n в (152) соответствует своя поляризация:

$$D_{x_1} = \mp i D_{x_2}.$$

Равенство абсолютных значений D_{x_1} и D_{x_2} при сдвиге фаз между ними на $\pi/2$ означает круговую поляризацию двух волн с противоположными направлениями вращения вектора

* Напомним, что оптической осью называется такое направление, при распространении света вдоль которого значения n_1 и n_2 совпадают (сечение эллипсоида ϵ_{ik} плоскостью волнового фронта является круговым).

D (право- и левополяризованные волны), как показано на рис. 19, а.

Пусть линейно поляризованная волна падает нормально в направлении Ox_3 на плоскопараллельный слой вещества толщиной l . Линейное колебание можно представить в виде суммы двух круговых колебаний с противоположными направлениями вращения. Эти колебания в вакууме распространяются с одной и той же скоростью, а в среде — с разными, соответствующими волновым векторам $k_{\pm} = \frac{\omega}{c} n_{\pm}$. В направ-

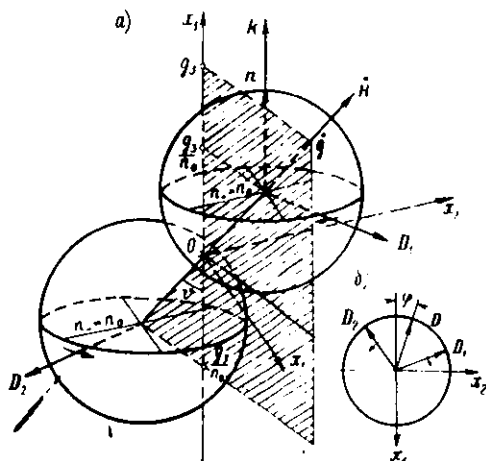


Рис. 19. Эффект Фарадея

лении распространения волна D_2 отстает от волны D_1 (см. рис. 19, а) на величину

$$\Delta n = n_+ - n_- = \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})}{n_0} = \frac{g_3}{n_0} = \frac{g}{n_0} \cos \theta,$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{n}$. Разность фаз после прохождения слоя l

$$\Delta \varphi = \Delta k \cdot \Delta x_3 = \Delta n \frac{\omega}{c} l = \frac{g \cos \theta}{n_0} \frac{\omega}{c} l.$$

На выходе из слоя волна, естественно, становится вновь линейно поляризованной, но с повернутым относительно первоначального направлением (плоскостью) поляризации. Этот эффект называется *эффектом Фарадея*.

Угол поворота плоскости поляризации (как это видно из рис. 19, б)

$$\varphi = \frac{1}{2} \Delta\varphi = l \frac{\omega g}{2cn_0} \cos \vartheta,$$

или с учетом (150)

$$\varphi = l \frac{\omega f}{2cn_0} H \cos \vartheta. \quad (153)$$

§ 31. Эффект Коттона—Мутона

При $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ($\mathbf{H} \perp \mathbf{n}$) из (153) видно, что линейный по полю эффект исчезает и нужно учитывать квадратичный член в разложении (150), т. е. в этом случае эффект связан с за- висимостью вещественной части η_{ik} от $\mathbf{H}$.

Пусть на пластинку падает линейно поляризованный свет, причем $\mathbf{n} \parallel O x_3$, ось $O x_1$ совмещена с $\mathbf{H}$. В силу аксиальной симметрии вокруг направления поля в тензоре $\{\eta_{ik}\}$ изменится только одно главное значение $\eta'_{11} = \eta'_{\parallel}$. Компоненты $\eta'_{22} = \eta'_{33} = \eta'_{\perp}$ останутся без изменений. Разность $\eta'_{\parallel} - \eta'_{\perp} = hH^2$, как это следует из (150). При этом в уравнениях (144) и (145) $G_3 = 0$; $n_1^{-2} = \eta'_{\perp}$; $n_2^{-2} = \eta'_{\perp}$. Таким образом, в одной из волн $\eta_1^{-2} = \eta_{\perp}$ и $D_{x_1}^1 = 0$, в другой — $n_2^{-2} = \eta_{\perp}$ и $D_{x_1}^2 = 0$. Это две линейно поляризованные волны, распространяющиеся с разными скоростями. После выхода из пластинки они создадут эллиптически поляризованную волну. Этот эффект называется *эффектом Коттона—Мутона*.

ЗАДАЧИ

1. Тензор электропроводности в магнитном поле можно разделить на симметричную и антисимметричную части

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik};$$

выразить компоненты тензора удельного сопротивления через s_{ik} и a_{ik} .

2. Вектор гирации $\mathbf{g}$ и вектор $\mathbf{G}$ определены следующим образом:

$$\epsilon''_{ik} = e_{ikl} g_l, \quad G_l = \frac{1}{2} e_{ikl} \eta''_{ki},$$

где ϵ''_{ik} и η''_{ik} — антисимметричные части тензора диэлектрической проницаемости и обратного ему тензора.

Доказать, что векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{G}$ связаны друг с другом посредством соотношения

$$\mathbf{G} = - \frac{\epsilon_{ik}}{\|\epsilon_{ik}\|} \mathbf{g}_k.$$

Заключение

Итак, методы векторного и тензорного анализа нами были использованы для построения феноменологической теории некоторых явлений в твердом теле. Физические свойства твердого тела описывались заданными материальными тензорами, такими, как σ_{ik} , ϵ_{ik} ; внешние воздействия — полевыми тензорами (например μ_{ik}) или векторами ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$). Мы пользовались только самыми общими свойствами тензоров, следующими из соображений симметрии. Эти соображения позволяют установить при известной симметрии кристалла структуру тензора, т. е. число его независимых компонент. Сами же тензоры введены нами как коэффициенты в формулах, связывающих «реакцию» кристалла ($\mathbf{j}$, $\mathbf{P}$) на внешние воздействия ($\mathbf{E}$) с величиной этих воздействий.

Таким образом, феноменологическая теория является мощным оружием физики твердого тела. Она позволяет предсказать наблюдаемые на опыте эффекты. Кроме того благодаря этой теории мы можем судить о характере зависимостей реакции кристалла от внешнего воздействия. Например, мы видели, что эффект Фарадея линеен по $\mathbf{H}$ и исчезает при $\mathbf{H} \perp \mathbf{n}$, когда максимальным становится квадратичный по $\mathbf{H}$ эффект Коттона — Мутона.

Однако феноменологическая теория не в состоянии вычислить значения тензорных величин. Они зависят от микроскопической природы тензоров, т. е. определяются элементарными процессами в кристалле. Поэтому такое вычисление — задача микроскопического рассмотрения, как правило, квантовомеханического. Тем не менее тензоры σ_{ik} , ϵ_{ik} и т. д., рассчитанные по законам квантовой механики, все равно должны удовлетворять тем требованиям симметрии, которые накладывает на них феноменологическая теория. Поэтому значение феноменологического рассмотрения состоит еще и в том, что сопоставление с ним является хорошим критерием правильности сложных квантовомеханических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Най Дж. Физические свойства кристаллов. — М.: Мир, 1967. — 388 с.
 2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 532 с.
 3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 208 с.
 4. Сиротин Ю. И., Шаскольская И. П. Основы кристаллофизики. — М.: Наука ФМ, 1975. — 680 с.
 5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: ГИФМЛ, 1973. — 460 с.
 6. Компанеев А. С. Курс теоретической физики. — М.: Просвещение, 1975. — 479 с.
 7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1965. — 203 с.
 8. Схоутен О. А. Тензорный анализ для физиков. — М.: Наука ФМ, 1965. — 456 с.
 9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. I. — М.: Наука, 1974. — 323 с.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Принятые обозначения	3
Введение	4
Глава I. Понятие о тензорах и матрицах	6
§ 1. Тензор как способ описания анизотропных свойств твердых тел	6
§ 2. Запись с индексами суммирования	8
§ 3. Преобразования координат	9
§ 4. Симметричный и антисимметричный тензоры	14
§ 5. Диэлектрическая проницаемость	15
§ 6. Тензор инерции	16
Задачи	17
Глава II. Геометрическая интерпретация тензора 2-го ранга	18
§ 7. Понятие о характеристической поверхности	18
§ 8. Главные оси характеристической поверхности	19
§ 9. Геометрические свойства характеристической поверхности	21
§ 10. Тензор обратной эффективной массы носителей тока	23
§ 11. Электромагнитные волны в прозрачных средах	24
Задачи	28
Глава III. Псевдотензоры	29
§ 12. Аксиальные векторы и псевдотензоры	29
§ 13. Векторное произведение	30
§ 14. Магнитная восприимчивость диамагнитных и парамагнитных кристаллов	33
§ 15. Момент сил	34
§ 16. Эффект Холла	34
Задачи	36
Глава IV. Элементы матричной алгебры	37
Задачи	39
Глава V. Влияние симметрии кристаллов на их физические свойства	41
§ 17. Элементы симметрии кристаллической решетки	41
§ 18. Математическая формулировка операций симметрии	42
§ 19. Влияние симметрии кристалла на физические величины, описываемые тензорами 2-го ранга	44
§ 20. Пьезоэлектрический тензор 3-го ранга	45
§ 21. Метод прямой проверки	46
Задачи	47
Глава VI. Векторный анализ	48
§ 22. Вектор площадки. Поток вектора	48
§ 23. Теорема Гаусса—Остроградского. Дивергенция вектора	49
§ 24. Теорема Стокса. Ротор вектора	51
§ 25. Дифференцирование по радиус-вектору. Оператор «набла»	53
Задачи	57
Глава VII. Теория упругости. Тензор 4-го ранга	57
§ 26. Тензор деформации	57
§ 27. Тензор напряжений	60
§ 28. Закон Гука. Коэффициенты упругой податливости и жесткости	62
§ 29. Влияние симметрии кристалла	65
Задачи	67
Глава VIII. Феноменологическая теория магнитооптических явлений	68
§ 30. Эффект Фарадея	68
§ 31. Эффект Коттона—Мутона	73
Задачи	73
Заключение	74
Литература	75