

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОТЛИВКИ

Часть II

ФОРМИРОВАНИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ ОТЛИВКИ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов, обучающихся
по специальности «Машины и технология
литейного производства»*



ББК 34.61

Б20

УДК 621.746.62 : 001.1 (075.8)

Рецензенты: Кафедра «Машины и технология литейного производства» Ворошиловградского машиностроительного института
и д-р техн. наук проф. Н. Г. Тиршович

Баландин Г. Ф.

Б20 Основы теории формирования отливки. В 2-х частях. Ч. II. Формирование макроскопического строения отливки. Учебное пособие для машиностроительных вузов по специальности «Машины и технология литейного производства» — М.: Машиностроение, 1979. — 335 с., с ил.
1 р.

В части II изложены основы теории формирования макростроения тела отливки. Рассмотрены процессы формирования кристаллического строения тела отливки, образование в нем газосадочных пор, химической неоднородности, горячих трещин. Для анализа этих процессов помимо математических моделей затвердевания отливки, изложенных в части I данного учебного пособия, использованы методы и модели теорий кристаллизации, молекулярной и конвективной диффузии, фильтрации, реологии, а также системотехники. Главное внимание уделено способам устранения или уменьшения макронеоднородности строения тела отливок и управления (в том числе автоматизированного) процессом формирования с целью улучшения качества отливок и повышения эффективности литейных технологий.

Б 31204-073
038(01)-79 — 73-79 2704020000

ББК 34.61
6П4.1

© Издательство «Машиностроение», 1979 г.

Улучшение качества отливок и получение их с заданными служебными и технологическими свойствами — фундаментальная научно-техническая проблема литейного производства.

По своему значению эта проблема должна быть поставлена в ряд тех, успешное решение которых обуславливает *эффективность технологии литья* как основной в производстве заготовок для различных отраслей машиностроения и приборостроения.

Главное направление в разработке этой фундаментальной научно-технической проблемы — создание и применение способов *управления* процессом формирования свойств отливки в конкретных условиях литейной технологии.

Однако для создания эффективных способов управления и оптимального их применения на практике необходимо точно знать связи между условиями литья и ходом формирования тела отливки и, следовательно, ее свойств. Выявление таких связей — задача теории формирования отливки.

В рамках тепловой теории формирования отливки, изложенной в части I учебного пособия [1], удалось построить непротиворечивую систему инженерных расчетов режимов технологии литья и найти комплексную характеристику режимов литья — скорость затвердевания отливки.

Требуемые связи между режимами литья и процессом формирования свойств отливки в рамках тепловой теории можно установить только, и только, *эмпирически*. Но эмпирическим путем в зависимости от скорости затвердевания отливки удается фиксировать лишь отдельные характеристики ее качества как конечный результат процесса формирования. Сейчас таких зависимостей известно мало; со временем их будет получено больше, ибо они совершенно необходимы для инженерных расчетов режимов литья и для реализации этих расчетов при автоматизированном проектировании технологии производства отливок с заданными в технических условиях свойствами. Однако такие эмпирические зависимости не могут служить основой для оптимального использова-

ния известных и тем более для создания новых более эффективных способов управления процессом формирования отливки с целью *повышения* ее качества.

Очевидно, что требуется раздвинуть рамки тепловой теории формирования отливки. Процесс формирования свойств отливки следует рассматривать в целом.

Во введении (см. часть I данного учебного пособия) такая постановка вопроса уже обсуждена. Заключение однозначно: для дальнейшего развития тепловой теории формирования прежде всего необходимо учесть кинетику процессов зарождения и роста кристаллов в расплаве, охлаждающемся в литейной форме, развитие усадки затвердевающей части отливки, а также перераспределение растворимых компонентов сплава между твердой фазой и незатвердевшим расплавом. Именно от этих процессов зависит строение тела отливки и, следовательно, ее свойства. И именно этими процессами необходимо управлять для улучшения качества отливок. Анализ этих процессов посвящена часть II данного учебного пособия.

В разделе I изложены основы теории формирования макростроения тела отливки; в разделе II рассмотрены процессы формирования кристаллического строения; в остальных разделах — образование химической неоднородности, газоусадочной пористости и горячих трещин. Главное внимание уделено выяснению причин возникновения перечисленных дефектов и разработке эффективных способов их предотвращения или уменьшения в конкретных условиях литья.

В части II, так же как и в части I, широко использованы математические модели изучаемых процессов. Здесь читатель, помимо уже известных ему из части I математических моделей затвердевания, познакомится с математическими моделями кристаллизации, фильтрации, молекулярной и конвективной диффузии, реологии, а также системотехники.

Разумеется, что здесь рассмотрены не все процессы формирования свойств отливки; выбраны лишь те, которые охватывает современная теория формирования макроскопического строения тела отливки. Горячие трещины включены потому, что они образуются, как правило, во время формирования строения отливки. Для анализа других процессов требуется переход теории к более точным представлениям. И, как мы полагаем, дальнейшее развитие теории будет сделано уже при творческом участии читателя, если он пожелает посвятить себя еще нерешенным проблемам бурно развивающейся и увлекательной технической науки — *формированию отливки*.

Раздел I | ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ ТЕЛА ОТЛИВКИ

Глава 1. ГЛАВНЫЙ АСПЕКТ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОТЛИВКИ

Исследование процесса затвердевания расплава литейных сплавов в конкретных условиях литейной технологии в гл. 7.1 мы назвали *центральной проблемой* теории формирования отливки¹. Цель исследования — разработка эффективных способов *управления* формированием свойств литых заготовок для улучшения их *качества*.

С этих позиций ниже еще раз рассмотрим центральную проблему теории.

1. ГРАНИЦЫ ТЕПЛОВОЙ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОТЛИВКИ

Теперь, когда читатель изучил тепловую теорию формирования и знает методы исследования и расчета затвердевания отливки, подчеркнем следующее.

Во-первых, тепловая теория исходит из самого общего принципа физики — закона сохранения энергии. Для анализа процессов теплопереноса в затвердевающей отливке и в нагревающейся форме он конкретизирован с помощью законов теплопроводности Фурье, теплоотдачи Ньютона, теплового излучения Стефана-Больцмана. Особенности процесса затвердевания отливки, а если быть точным, то особенности выделения теплоты кристаллизации при затвердевании расплава литейных сплавов в литейной форме, учтены в уравнении затвердевания (23-II.1), которое является результатом обобщения тщательно поставленных специальных опытов.

Во-вторых, тепловая теория получила непосредственное экспериментальное подтверждение для двух основных видов литья: в песчаные формы и в кокиль.

¹ Условимся ссылки на главы текста из части I учебного пособия записывать в виде: гл. 7.1, т. е. глава 7 из части I. Аналогично станем записывать ссылки на параграфы, страницы и рисунки. На формулы будем ссылаться так (31-II.1), т. е. формула (31) из раздела II части I.

Таким образом, *тепловая теория формирования отливки построена на основе общих принципов физики и получила однозначное подтверждение в эксперименте.*

В этом смысле она отвечает эйнштейновым критериям научных теорий, т. е. обладает «внутренним совершенством» и «внешним оправданием» и, *следовательно*, подлежит дальнейшему радикальному уточнению.

Здесь нет ничего необычного. Любая, но непременно научная теория должна указывать *новые проблемы*, для решения которых неизбежно требуется переход к более точным представлениям.

Важнейшая проблема в теории формирования отливки, имеющая смысл и значение *центральной*, — управление процессом формирования для улучшения качества отливок и получения их с заданными свойствами. Для успешного решения этой проблемы необходимы полные знания зависимости между скоростью затвердевания отливки, как комплексной характеристики режимов литья, и показателями строения тела отливки, неоднородности его строения и, следовательно, свойств литой заготовки.

Такие зависимости давно фиксируют *экспериментально*, и они уже известны для ряда сплавов. Например, для углеродистой стали 40Л, ваграночных и синтетических чугунов построены диаграммы (см. рис. 13.1—18.1). Некоторые из них успешно использованы в расчетах технологических режимов литья в песчаные формы и в кокиль (см. гл. 15.1 и 19.1). По мере разработки методов машинного проектирования технологии, особенно методов автоматического управления технологическими процессами литья, число таких *эмпирических* зависимостей увеличивается. Их требуется установить для всех сплавов, используемых в промышленности. А так как число сплавов велико, характеристики строения тела отливки, показатели неоднородности его строения и требования, предъявляемые к свойствам литых заготовок, весьма разнообразны, то необходимость *обобщить* эти эмпирические зависимости очевидна¹. Согласно же тепловой теории невозможно сделать какие бы то ни было обобщения эмпирических зависимостей типа приведенных на рис. 13.1—17.1, ибо с ее позиций они необъяснимы.

Однако в науке не может быть чисто эмпирических констатаций. Все они требуют рационального обобщения. Точно так же в науке нет и быть не может чисто априорных понятий, не требующих эмпирического обоснования.

Следовательно, теория формирования отливки, разработанная только на *тепловом* уровне, подлежит дальнейшему уточнению и развитию.

¹ В первом приближении речь может идти, например, о том обобщении, какое сделано Г. Ф. Баландиным при построении структурной диаграммы для ваграночных чугунов (рис. 18.1). Однако это потребовало учесть в тепловой теории кинетические особенности кристаллизации аустенита, цементита и графита в чугунах.

2. ЧАСТНЫЕ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОТЛИВКИ

Развитие тепловой теории должно быть радикальным, ибо, как известно читателю, затвердевание отливки обусловлено лишь отводом теплоты от расплава в форму. Происходит же оно в результате зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве. Более того, затвердевание сопровождается, во-первых, перераспределением растворимых компонентов и примесей сплава между твердой и жидкой фазами; во-вторых, усадкой затвердевшей части отливки. В основном эти процессы в совокупности, их взаимодействие и взаимообусловленность определяют начало, ход и итог формирования кристаллического строения тела отливки, развития неоднородности его химического состава и пораженности газоусадочной пористостью и горячими трещинами. Читатель, конечно, согласится, что именно этими процессами в совокупности необходимо управлять для получения требуемых свойств отливки.

Согласно сложившейся структуре теории формирования отливки (см. с. 19.1—20.1) перечисленные процессы рассматривают, как правило, отдельно друг от друга. В этой связи создан ряд *частных* теорий, каждая из которых, явно или неявно, — вариант уточнения и развития тепловой теории формирования, необходимый для анализа способов эффективного управления кристаллизацией отливок, уменьшения их химической неоднородности и предупреждения возникновения в них пористости и горячих трещин.

Ниже даны перечень и краткая характеристика наиболее разработанных частных теорий.

Теория формирования кристаллического строения отливки. Первый наиболее важный путь развития тепловой теории — это переход ее на *теплокинетический* уровень изучения процесса формирования свойств литой заготовки. Другими словами, это разработка *теории формирования кристаллического строения отливки* (см. с. 104.1).

Современная теория формирования кристаллического строения машиностроительных отливок [2] создана в 1955—1962 гг. на основе математической модели распространения теплоты в затвердевающем расплаве (17.II.1)—(20.II.1), в которую включены математические модели *общей теории кристаллизации* металлов и сплавов для функции Ψ . С помощью этой теории удастся найти ряд обобщенных зависимостей между скоростью затвердевания отливки и основными характеристиками ее макроскопического строения и зависящих от него свойств (см., например, рис. 18.1).

Теория формирования химической неоднородности отливки. Известен и другой путь развития тепловой теории — переход на *диффузионный* уровень изучения процесса формирования отливки. Иными словами, это разработка *теории формирования неоднородности химического состава тела отливки*.

Современная теория формирования неоднородности химического состава тела отливки создана В. Т. Борисовым в 1960—1962 гг. на основе математической модели распространения теплоты в затвердевающем сплаве (17-II.1), которая дополнена математическими моделями *молекулярной диффузии* растворимых компонентов в расплаве двухфазной зоны (см. рис. 22.1) фронта кристаллизации отливки. Этот вариант теории формирования отливки, основанный на концепции квазистационарной двухфазной зоны фронта кристаллизации сплавов, дополнен В. А. Журавлевым в 1974—1975 гг. В нем учтено движение расплава в двухфазной зоне и, следовательно, переноса растворимых компонентов в результате развития молекулярной и *конвективной диффузии*.

По-существу, это переход тепловой теории на два уровня рассмотрения процесса формирования отливки одновременно: на *диффузионный* и *гидродинамический*. В этой связи при дальнейшей разработке теории можно выявить влияние скорости затвердевания отливки, термической и концентрационной конвекции расплава в незатвердевшей части тела отливки, а также внешнего давления на возникновение и подавление в отливке *ликвации*.

Теория формирования усадочной пористости в отливке. Греть путь развития тепловой теории — это переход ее на *фильтрационный* уровень изучения процесса формирования отливки. Другими словами, это разработка *теории формирования усадочной пористости в теле отливки*.

Современная теория формирования усадочной пористости в теле отливки создана И. Б. Куманиным и А. И. Вейником в 1957—1964 гг. на основе математической модели (17-II.1), которая дополнена моделью *фильтрации* расплава между растущими кристаллами. Этот вариант теории позволяет анализировать влияние скорости затвердевания отливки на величину той части ее тела, где сосредоточивается *макропористость*.

Теория образования горячих трещин в отливках. Кроме перечисленных теорий формирования строения тела отливки и его неоднородностей, так или иначе связанных с тепловой теорией и, следовательно, уточняющих и развивающих ее, есть и другие теории формирования отливки, с тепловой теорией непосредственно не связанные. Это литейная гидравлика (Б. В. Рабинович), теории графитизации чугуна (Н. Г. Гиршович), образования пригара (В. А. Васильев), горячеломкости сплавов (Н. Н. Прохоров) и др. Из них остановимся на последней, так как горячие трещины чаще всего образуются во время формирования строения тела отливки, а в современной теории горячеломкости рассмотрена эта проблема для отливок из любых сплавов.¹

¹ В отличие от нее теория графитизации, теория образования химического пригара, литейная гидравлика разработаны для определенного типа сплавов и являются в этом смысле частными теориями, которые изучают в соответствующих технологических дисциплинах: Стальное литье, Чугунное литье и т. п.

Теория горячеломкости сплавов разработана Н. Н. Прохоровым и И. И. Новиковым в 1952—1964 гг. на основе идей А. А. Бочвара о развитии линейной усадки отливки в эффективном интервале кристаллизации сплавов. Она, хотя и не учитывает особенности затвердевания реальной отливки, все же позволяет анализировать склонность различных сплавов к образованию горячих трещин в отливках из них.

Дальнейшие исследования Л. П. Каширцева в 1975—1977 гг., выполненные на основе тепловой теории формирования отливки, уточненной *реологическими* моделями поведения сплавов при их растяжении в интервале кристаллизации, убедительно показали, что все сплавы (без исключения!) не склонны к горячим трещинам даже при абсолютно полном торможении усадки отливки. Горячие трещины в отливке образуются только при наличии в ее теле отдельных участков, затвердевающих позже остальных, где из-за этого происходит локализация деформации растяжения в результате торможения линейной усадки.

3. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ В ЦЕЛОМ

Очевидно, что каждый из перечисленных путей и вариантов уточнения и развития тепловой теории способствует решению важных практических задач совершенствования технологии литья. Например, теория формирования кристаллического строения отливки оказала важное влияние на разработку виброметодов литья, литья с использованием микрохолодильников и т. п.; реологическая теория трещиностойчивости отливок, по сути дела, закрыла проблему предупреждения горячих трещин при литье, дав технологам средства гарантированного предохранения отливок от растрескивания во время их затвердевания. Однако для решения центральной проблемы в целом *фрагментарное* построение теории формирования отливки, когда она является лишь *набором* частных теорий, часто недостаточно согласованных одна с другой, не может устроить технолога. Для создания эффективных способов управления процессом формирования строения тела отливки требуется уточнение тепловой теории одновременно на *четырех*, по крайней мере, уровнях: на теплокINETическом, физико-химическом, гидродинамическом и деформационном. Целесообразность именно такого пути дальнейшего развития теории уже отмечена выше (см. с. 18.1). Сейчас важно подчеркнуть, что, как следует из приведенного анализа, такой путь — *неизбежность*, строго отвечающая логике развития научной теории.

Здесь уместно напомнить читателю, что построение *общей* теории на основе аналитического представления всех физических и физико-химических процессов, обуславливающих приобретение отливкой требуемых свойств, — дело пока невыполнимое (см.

с. 28.1). Причина заключается в недостатке наших знаний о *всей* совокупности процессов, составляющих формирование свойств отливки.

Не менее трудным является и построение теории, в которой процесс формирования отливки рассматривается одновременно на указанных четырех уровнях. По сути дела, причина та же: недостаток наших знаний о совокупности процессов кристаллизации, перераспределения примесей и развития усадки во время затвердевания расплава литейных сплавов в форме. Об этом свидетельствуют трудности, которые возникают, например, в теории химической неоднородности отливки (см. с. 8). В силу этого была разработана сначала *только* тепловая теория. С ее помощью сделано немало. Найдены математические модели затвердевания и охлаждения отливки. Создана система инженерных расчетов режимов технологии литья в песчаные формы и в кокиль, использование которой на практике требует знания зависимостей между комплексной характеристикой режимов литья — скоростью затвердевания и свойствами литейных сплавов в отливках. И главное, экспериментально удалось установить *существование* этих зависимостей.

Теперь, зная математические модели затвердевания расплава в литейной форме, можно приступить к дальнейшему развитию теории формирования с учетом одновременного протекания процессов кристаллизации, перераспределения примесей и развития усадки в затвердевающем расплаве, если условиться на первом этапе этого развития теории принимать во внимание только те стороны перечисленных процессов, которые обуславливают формирование *макростроения* тела отливки и его *макронеоднородности*, связь характеристик которых со скоростью затвердевания удастся установить экспериментально. Следовательно, дальнейшее развитие теории формирования, имея в виду решение ее центральной проблемы, целесообразно направить по пути *макроскопического* описания строения тела отливки.

Другими словами, следует приступить к разработке *теории формирования макроскопического строения отливки*.

Г л а в а 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРОЕНИЯ ТЕЛА ОТЛИВКИ, ЕГО НЕОДНОРОДНОСТИ И ДЕФЕКТОВ

Наиболее ответственная задача теории формирования отливки — выявление тех важнейших характеристик макростроения тела литой детали, знание обобщенных зависимостей которых от скорости затвердевания необходимо для разработки эффективных способов управления качеством литых заготовок с целью его улучшения.

4. КРИСТАЛЛИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ОТЛИВКИ

Впервые описание кристаллического строения стального слитка дано Д. К. Черновым в 1878 г. В курсе лекций, прочитанных в 1898 г. в Михайловской артиллерийской академии, он сказал: «...кристаллы в наружном слое более мелки и чрезвычайно перепутаны, затем переходят в параллельные между собою и нормальные к общему протяжению наружной поверхности призматическое расположение; наконец, в центральных слоях встречаются более развитые и разросшиеся кристаллические группы, расположенные в произвольных друг к другу направлениях» [17, с. 414].

Общепринято считать типичным кристаллическое строение тела отливки, состоящее из трех макроструктурных зон: периферийной мелкозернистой, столбчатых кристаллов и центральной равноосных кристаллов (рис. 1).

Основными характеристиками кристаллического строения являются протяженность $l_{ст}$ зоны столбчатых кристаллов, их поперечный размер $d_{ст}$, средний диаметр (размер) d кристаллов (макрозерна) в центральной зоне отливки. Помимо этого для нахождения связи между кристаллическим макростроением тела отливки и ее свойствами важно знать дисперсность строения кристаллов, которые в условиях литья, как установил в 1868 г. Д. К. Чернов, представляют собою дендриты. Дисперсность дендритов оценивают средним расстоянием d_m между их вторичными осями роста (d_m рассматривают иногда как средний размер микрозерна).

Экспериментально установлено, что перечисленные характеристики находятся одна с другой в определенном соответствии. На рис. 2, в качестве примера, приведены кривые, отражающие зависимости $l_{ст}$, $d_{ст}$ и d_m от d для слитков из углеродистых сталей по данным Б. Б. Гуляева [28] и Н. И. Хворина [16]. Существование отмеченного соответствия не является неожиданным, так как каждая из выбранных характеристик касается лишь отдельной стороны конечного результата процесса кристаллизации расплава конкретного сплава в литейной форме. Поэтому все они так или иначе, но однозначно, должны быть связаны со скоростью затвердевания отливки.

Действительно, например, из экспериментов Б. Б. Гуляева следует, что с увеличением скорости затвердевания U ,

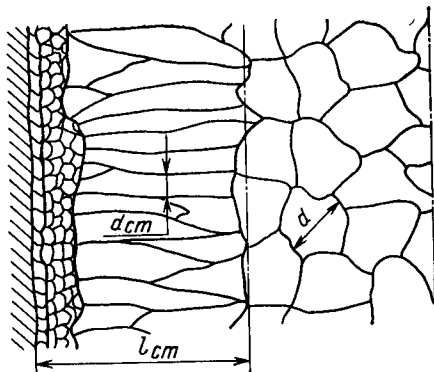


Рис. 1. Схема кристаллического строения тела отливки

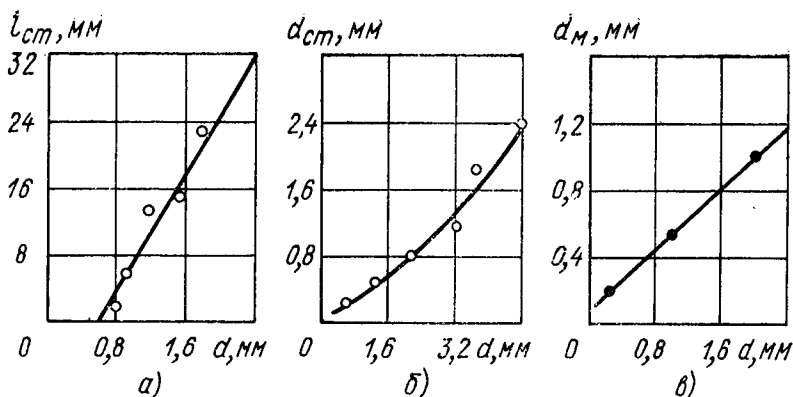


Рис. 2. Зависимость между характеристиками кристаллического строения:
а и б — по данным Н. И. Хворинова; в — по данным Б. Б. Гуляева

размер макрозерна d уменьшается (рис. 3). Учитывая соответствие между d и l_{ct} , d_{ct} , d_m (см. рис. 2) неизбежен следующий вывод: с увеличением скорости затвердевания U_z протяженность l_{ct} зоны столчатых кристаллов, их поперечный размер d_{ct} и дисперсность дендритов d_m должны уменьшаться. Этот вывод точно согласуется с тем, что известно читателю из технологических дисциплин [28].

Следовательно, если теория формирования макроскопического строения тела отливки даст возможность установить связь между l_{ct} , d_{ct} , d_m и d , то достаточно найти даже эмпирическую зависимость любой из этих характеристик со скоростью затвердевания, для того чтобы прогнозировать кристаллическое строение отливки при тех или иных режимах литья, и значит и управлять формированием ее кристаллического строения.

Примем в качестве количественных показателей однородности кристаллического строения тела отливки относительную протяженность зоны столчатых кристаллов¹

$$\Lambda = \frac{l_{ct}}{l_0},$$

относительный размер макрозерна

$$\Delta_{ct} = \frac{d_{ct}}{d_0} \quad \text{или} \quad \Lambda = \frac{d}{d_0},$$

если в отливке $\Lambda = 0$, и относительную дисперсность дендритов

$$R_{ct} = \frac{d_m}{d_{ct}} \quad \text{или} \quad R = \frac{d_m}{d},$$

где d_0 — размер макрозерна у поверхности отливки.

¹ Зону мелкозернистых кристаллов у поверхности отливки учитывать не будем, так как ее протяженность, как правило, невелика, либо она вообще отсутствует.

Условимся: кристаллическое макростроение отливки *однородно*, если $\Lambda = 1$ и $\Delta_{\text{ст}} \approx 1$ или $\Lambda = 0$ и $\Delta \approx 1$.

В первом случае ($\Lambda = 1$, $\Delta_{\text{ст}} \approx 1$) тело отливки состоит только из столбчатых кристаллов. Это достигается способами односторонне направленного затвердевания. Например, для повышения жаропрочности лопаток газовых турбин их изготавливают так, чтобы столбчатые кристаллы были расположены вдоль оси действия главных растягивающих напряжений, возникающих в лопатках при их эксплуатации. Точно так же для повышения магнитной энергии постоянных магнитов их получают состоящими только из столбчатых кристаллов, направленных вдоль оси магнита. В результате, если дополнительно удастся увеличить $d_{\text{ст}}$, ресурс работы лопаток увеличивается в 4—5 раз, а максимальная магнитная энергия магнитов из сплава «алнико» — в 4 раза.

Перспективными могут оказаться отливки с $\Lambda = 1$ и $\Delta \approx 1$ из эвтектических сплавов. Если вторая фаза эвтектики — высокопрочный интерметаллид, то она, выстраиваясь вдоль направления роста столбчатых кристаллов, дает эффект упрочнения отливок, аналогичный искусственным композиционным материалам.

Во втором случае ($\Lambda = 0$, $\Delta \approx 1$) тело отливки имеет зернистое строение, состоящее из равноосных кристаллов приблизительно одинакового размера. Если удастся существенно уменьшить d , а R приблизить к нулю, то механические свойства, коррозионная стойкость, акустическая проводимость, плотность в вакууме и другие служебные свойства отливок с таким сверхмелким зерном резко повышаются. Показатели $R_{\text{ст}}$ или R в этих случаях наиболее полно характеризуют микростроение отливок из сплавов, однофазных при кристаллизации (из углеродистых сталей, латуней, бронз, из сплавов на основе никеля, кобальта и т. п.).

Для сплавов, содержащих эвтектику, помимо $R_{\text{ст}}$ или R необходимы и другие показатели. Например, в серых чугунах показатель R удачно характеризует средний относительный размер эвтектических колоний. Однако читателю известно, что важными являются размер и форма графита в этих колониях. Обычно их характеризуют отношением R_g средней длины к средней ширине графитовых включений, измеренных под микроскопом на нетравленном шлифе при оптическом увеличении в 100 раз. На рис. 4 приведена зависимость R_g от U_3 , установленная Б. Б. Гуляевым для чугуна с 3,45% С и 4,0% Si.

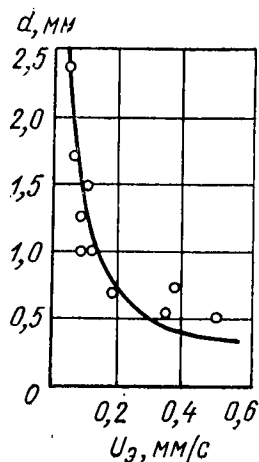


Рис. 3. Зависимость среднего диаметра макростерна в стальном слитке от скорости его затвердевания

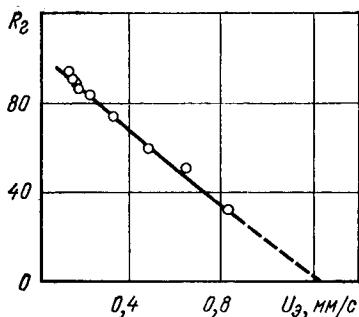


Рис. 4. Зависимость компактности R_{Γ} графита в чугуновых отливках от скорости U_z их затвердевания

Полезность этой характеристики и ее связи со скоростью затвердевания отливки можно иллюстрировать следующим: с увеличением U_z графит в чугуне становится более компактным, что ведет к улучшению пластических и прочностных свойств отливок. Обращает внимание, что при определенной скорости U_z величина $R_{\Gamma} \approx 1$, т. е. шаровидную форму графита можно получить и без модифицирования чугуна церием или магнием с кремнием.¹

Для других типов сплавов, естественно, выбирают иные дополнительные характеристики микростроения тела отливки. Например, в сплавах с пластинчатой эвтектикой это может быть отношение толщины пластинок к расстоянию между ними и т. д.

В теории формирования макростроения тела отливки целесообразно ограничиться показателем $R_{ст}$ или R , отражающим важную особенность реальной кристаллизации — дендритную форму роста кристаллов твердых растворов, которые составляют основу большинства металлических литейных сплавов.

Из изложенного читателю ясно, что во всех случаях, когда $0 < \Delta < 1$, $\Delta_{ст} > 1$ и $\Delta > 1$, кристаллическое макростроение отливки *неоднородно*, что приводит к появлению и развитию других видов неоднородности строения отливки и, следовательно, ее свойств.

5. НЕОДНОРОДНОСТЬ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА ОТЛИВКИ

Неоднородность химического состава тела отливки возникает при ее затвердевании вследствие перераспределения растворимых компонентов сплава и имеющихся в нем растворимых примесей между твердой фазой и незакристаллизовавшимся расплавом.

В стальных слитках неоднородность химического состава впервые была выявлена и исследована А. С. Лавровым в 1866 г. и Н. В. Калауцким в 1867 г. О причинах ее возникновения А. С. Лавров писал [27, с. 166]: «...сталь есть сплав, раствор углерода в железе, а следовательно, при медленном остывании мы вправе ожидать распадение этого сплава. Непосредственным результатом должно быть группирование более тугоплавких сплавов около стенок изложницы и выпадение легкоплавких

¹ Это явление впервые было обнаружено Г. Ф. Баландиным в 1952 г. при выполнении экспериментов, необходимых для построения структурной диаграммы чугуновых отливок (рис. 18.1). Позже, в 1954 г., оно было детально изучено Д. П. Ивановым.

углеродистых сплавов в центральной части слитка, но так как с увеличением содержания углерода удельный вес стали уменьшается, то наиболее углеродистые сплавы должны всплывать. В больших массах стали ... распадение совершается гораздо полнее, и в них должна обнаруживаться ликвация».

Сейчас *ликвацией* принято называть превышение содержания C_i каждого i -го из числа n компонентов сплава над средней концентрацией C_{0i} в любой макроскопической зоне тела отливки и в любом микроскопическом его элементе.

Примем в качестве *количественных показателей неоднородности химического состава отливки* относительную концентрацию каждого компонента сплава и каждой его примеси:

$$C_i = \frac{C_i}{C_{0i}}; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

относительный размер части тела или его элемента, где образуется ликвация, т. е. где $C_i > 1$:

$$\Lambda_n = \frac{l_n}{l_0}$$

в случае макроскопической *зональной* ликвации, если l_n — протяженность этой зоны тела отливки, и

$$R_n = \frac{d_n}{d} \quad \text{или} \quad R_n = \frac{d_n}{d_{ст}}$$

в случае микроскопической *дендритной* ликвации, если d_n — протяженность области между ветвями дендритов, где $C_i > 1$.

В этой связи, отливка будет иметь *однородный* химический состав в макрizonaх при условии

$$C_i = 1 \quad \text{и} \quad \Lambda_n = 0;$$

отливка будет иметь *однородный* химический состав в микроэлементах ее тела при условии

$$C_i = 1 \quad \text{и} \quad R_n = 0.$$

Во всех остальных случаях химический состав тела отливки будет *неоднородным*¹.

Прямая зональная ликвация

Условимся, что *прямая* зональная ликвация та, при которой l_n — протяженность *центральной зоны* тела отливки, где $C_i > 1$.

В эксперименте это явление отчетливо наблюдают при односторонне направленном снизу вверх затвердевании слитка. На

¹ Очевидно, что реально в отливках всегда $0 \leq \Lambda_n < 1$ и $0 \leq R_n < 1$ (продумать!).

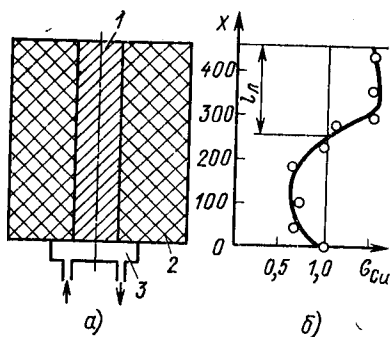


Рис. 5. Прямая зональная ликвация Cu при односторонне направленном затвердевании слитка сплава Al с 3% Cu :

a — схема эксперимента; b — распределение концентрации Cu по высоте слитка: 1 — слиток; 2 — форма; 3 — водоохлаждаемый холодильник

(осевой) ликвацией, и внеосевую часть, где располагаются дефекты, называемые Λ -образной (внеосевой) ликвацией, или «усами». Единого мнения о механизме возникновения дефектов в зоне прямой ликвации нет. Особенно много споров о механизме образования «усов».

Читателю известно также, что относительная концентрация C в местах Λ - и V -образных дефектов и протяженность частей зоны их залегания уменьшаются с увеличением скорости затвердевания сплава в литейной форме. Так, по данным П. Ф. Василевского, при литье конструкционных углеродистых сталей в сухие песчаные формы осевая часть зоны прямой ликвации начинает проявляться при толщине тела отливки >100 мм, а внеосевая часть — при толщине >200 мм. При толщине стенки 80 мм и меньше в машиностроительных отливках из сталей 25Л, 35Л и т. п. Λ - и V -образных ликвационных дефектов нет. Если по формуле (116-III.1) рассчитать скорость U_s затвердевания отливки из стали 35Л толщиной 80 мм в сухой песчаной форме, то получим, что при $U_s \geq 0,045$ мм/с Λ - и V -образных ликвационных дефектов не должно быть. Полученный результат согласуется с данными В. В. Назаратина: в отливках из стали 35Л при $U_s = 0,042 \div 0,05$ не появляется Λ -образная ликвация [8, с. 416].

Этот вывод позволяет сделать интересное и перспективное предложение: увеличить скорость затвердевания толстостенных (>80 мм) отливок из конструкционных углеродистых сталей до 0,06 мм/с, тогда они должны получаться без Λ - и V -образных дефектов. Такое предложение сделано М. В. Фроловой в 1963 г. Его реализация при использовании хромитовых и хромагнетитовых формовочных смесей дала возможность изготавливать фасонные отливки из стали 35Л с толщиной стенки до 200 мм. В дальнейшем применение принудительного охлаждения отливок,

рис. 5, a изображена схема такого эксперимента И. Б. Куманина со сплавом Al и 3% Cu . Направленный отвод теплоты осуществлен водоохлаждаемым холодильником [37]. Результаты измерения относительной концентрации C_{Cu} по высоте слитка приведены на рис. 5, b . В верхней части слитка, которая имитирует центральную зону тела отливки, отчетливо видна прямая зональная ликвация с $C_{Cu} = 1,55$ и $l_L \approx 200$ мм.

Читатель, конечно, знает, что в теле реальных отливок в зоне l_L прямой ликвацией выделяют осевую часть, где располагаются дефекты, называемые V -образной

наружных и внутренних холодильников, а также микрохолодильников позволило увеличить толщину стенки до 330 мм.

Однако отсутствие Λ - и V-образных ликвационных дефектов в теле отливки не означает исчезновение прямой ликвации как превышение концентрации C_i компонентов сплава и имеющихся в нем примесей в центральной части l_n этого тела, т. е. картины, аналогичной рис. 5, б.

В машиностроительных отливках чаще всего фиксируют среднюю относительную концентрацию C_i того или иного компонента или примеси сплава в пределах l_n их тела, где $C_i > 1$. Интенсивность развития прямой зональной ликвации (т. е. C_i и Λ_n) также зависит от скорости U_s затвердевания отливки. В качестве примера на рис. 6 приведена такая зависимость для серы в стали 20К. Кривая построена по результатам исследований ИПЛ АН УССР [8]. Очевидно, что при $U_s \geq 0,11$ мм/с прямая ликвация серы в этой стали не образуется: $C_s \approx 1$. По тем же данным, для подавления прямой ликвации фосфора требуется скорость $U_s \geq 0,047$ мм/с.

Таким образом, существует связь между выбранными характеристиками C_i , Λ_n макроскопической неоднородности химического состава тела отливки и линейной скоростью U_s ее затвердевания. Более того, для каждого сплава *существует такая U_s , при превышении которой подавляется прямая зональная ликвация и, следовательно, достигается макроскопическая однородность химического состава тела отливки.*

Обратная зональная ликвация

Условимся: *обратная зональная ликвация* та, при которой l_n — протяженность *пристеночной* (периферийной) зоны тела отливки, где $C_i > 1$.

В эксперименте это явление, как и прямую ликвацию, наблюдают при односторонне направленном затвердевании вертикального слитка по схеме, аналогичной рис. 5, а. Например, Д. Киркальди и У. Юделис нашли, что в нижней части слитка сплава Al с 9,1% Cu, которая имитирует пристеночную зону тела отливки, на протяжении $l_n \approx 35$ мм $C_{Cu} = 1,06 \div 1,0$. При этом наибольшая величина $C_{Cu} = 1,06$ зафиксирована у нижнего торца слитка, имитирующего поверхность тела отливки [51, с. 178] (рис. 7).

Читатель, конечно помнит, что обратная зональная ликвация наиболее четко выявляется в отливках из цветных сплавов; например, из сплавов Al с Zn, Al с Cu, Al с Fe, Cu с Zn, Cu с Sn и др. Обратная ликвация наблюдается и в сталях, и в чугунах. Более того, различные компоненты и примеси в них могут ликви-

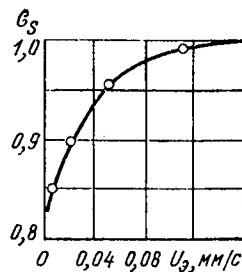


Рис. 6. Зависимость прямой ликвации серы в слитке стали 20К от скорости его затвердевания

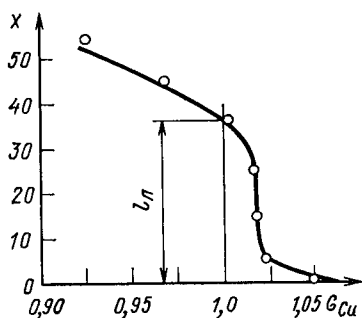


Рис. 7. Обратная зональная ликвация Си при одностороннем направленном затвердевании слитка сплава Al с 9,1%Cu.

ровать по-разному. Но наиболее заметна ликвация при литье цветных сплавов.

Причины образования обратной ликвации не вызывают споров. Наиболее раннее наблюдение обратной ликвации и ее объяснение сделал Г. Мазинг в 1922 г. По его мнению, увеличение концентрации компонентов сплава в пристеночной зоне тела отливки происходит в результате всасывания расплава, обогащенного этими компонентами, в уже затвердевшую часть тела, в которой при медленном ее охлаждении образуется

вакуум. Аналогичная мысль высказана А. А. Бочваром и В. И. Добаткиным в 1948 г. для объяснения обратной ликвации меди в слитках дуралюмина.

При непрерывном литье алюминиевых сплавов, в том числе дуралюминов, иногда наблюдают «выпотевание» ликвата на поверхность слитков. Образуются наплывы ликвата на поверхности в виде полос затвердевшего расплава, вытекшего наружу через корку после выхода слитка из кристаллизатора. Здесь, видимо, корка после выхода из кристаллизатора снова нагревается и становится проницаемой для расплава под действием гидростатического напора расплава в лунке. «Выпотевание» ликвата порою наблюдают и при литье слитков бронз, латуней в изложницы. Образующиеся наплывы имеют форму шаровидных или расплюснутых капель, которые появляются при вытекании расплава через корку при разогреве ее в результате появления зазора между слитком и изложницей.

К сожалению, нет количественных данных о связи появления и развития обратной зональной ликвации со скоростью затвердевания отливки. Однако и приведенные сведения позволяют сделать вывод, что при увеличении скорости затвердевания обратная ликвация уменьшается.

Таким образом, и в случае обратной ликвации существует связь между выбранными характеристиками C_i , $\Delta\eta$ макроскопической неоднородности химического состава тела отливки и скоростью ее затвердевания. По-видимому, и в этом случае для каждого сплава *существует такая скорость затвердевания, при превышении которой обратная зональная ликвация подавляется и, следовательно, достигается макроскопическая однородность химического состава тела отливки.*

Более того, в дальнейшем есть основания рассматривать механизм образования и прямой и обратной зональной ликваций в отливках с единых позиций.

Дендритная ликвация

Неоднородность химического состава в пределах дендритного кристаллического зерна называют *дендритной ликвацией*.

Различают концентрацию $C_{i, \text{ос}}$ компонентов или примесей сплава в осях дендритов и $C_{i, \text{м}}$ в межосных элементах кристаллического зерна.

Дендритную ликвацию принято характеризовать коэффициентом дендритной ликвации i -го компонента сплава или имеющейся в нем примеси:

$$C_{i, \text{д}} = \frac{C_{i, \text{м}}}{C_{i, \text{ос}}}.$$

В прилож. II приведены величины $C_{i, \text{д}}$ для некоторых элементов в углеродистых и легированных сталях, а также в никеле и алюминии по результатам измерений различных исследователей дендритной ликвации. Обращает внимание, что $C_{i, \text{д}}$ зависит от содержания углерода в сталях, от числа легирующих элементов и их сочетания в сплавах. Существуют такие элементы, такое их сочетание и содержание, при которых дендритная ликвация не наблюдается. Однако, как правило, $C_{i, \text{д}} > 1$ и порою весьма значительно.

По данным И. Н. Голикова, $C_{i, \text{д}}$ в сталях зависит от коэффициента k_0 распределения элементов в железе (см. табл. 1 и 7, прилож. I и II). Это подтверждают более поздние измерения Г. Экштайна и Г. Шписа микрозондированием (табл. 6, прилож. II).

Коэффициент $C_{i, \text{д}}$ дендритной ликвации отличается от того коэффициента C_i , которым мы пользовались для характеристики зональной ликвации: $C_{i, \text{д}} = C_{i, \text{м}}/C_{i, \text{ос}}$ и $C_i = C_i/C_{0i}$. Но между ними можно установить соответствие.

Действительно, анализ коэффициентов D_1 диффузии различных элементов, например, в жидком железе и D_3 в твердом (см. прилож. V), показывает, что D_3 меньше D_1 на два порядка, т. е. $D_3 \ll D_1$. Этот факт позволяет утверждать, что при реальных скоростях затвердевания отливки перераспределение компонентов или примесей сплава в твердой фазе практически не совершается. Следовательно, $C_{i, \text{ос}} = k_{0i}C_{0i}$ и $C_{i, \text{д}} = C_i/k_{0i}$, т. е. дендритная ликвация должна проявляться даже при отсутствии зональной ликвации в теле отливки.

По мнению А. А. Бочвара, дендритная ликвация с повышением скорости затвердевания отливки сначала увеличивается, достигает максимума и затем уменьшается. Как показал позднее И. Н. Голиков, для реальных скоростей затвердевания отливки дендритная ликвация имеет тенденцию к уменьшению.

В части I на с. 97.1—99.1 приведены результаты исследований Б. Б. Гуляева, доказывающие решающее значение скорости U , затвердевания отливок в процессе формирования их свойств. Напомним, что по оси ординат графика на рис. 14.1, б отложена

в процентах относительная концентрация серы в сульфидах для отливок из стали 40Л: $C_s = 100C_{s,m}/C_{0,s}$.

Как известно, сера растворима и в жидкой, и в твердой стали. Коэффициент распределения серы в сталях $k_0 = 0,002$ (см. прилож. I). Во время кристаллизации, т. е. во время роста дендритов аустенита, расплав между их осями обогащается серой. Особенно насыщаются слои расплава, непосредственно прилегающие к поверхности роста дендритов. Если концентрация серы в этих слоях достигает предельной для сульфидной фазы, то после затвердевания отливки между осями дендритов образуются сульфидные включения FeS , MnS и т. п.

Величину C_s на рис. 14.1, б можно рассматривать как характеристику дендритной ликвации серы в отливках из стали 40Л. В этой связи следует вывод: с увеличением скорости затвердевания отливок из стали 40Л дендритная ликвация уменьшается.

Однако воспользуемся случаем и напомним читателю, что, по данным ИПЛ АН УССР (см. рис. 6), прямая зональная ликвация серы в отливках из углеродистых сталей не проявляется при скоростях их затвердевания, больших 0,11 мм/с. Согласно Б. Б. Гуляеву (см. рис. 14.1, б), дендритная ликвация серы при этой скорости затвердевания может достигать 30—100%.

Таким образом, при *реальных скоростях затвердевания отливок дендритная ликвация* — неизбежность. Особенно заметна она в отливках из сплавов, содержащих элементы с небольшим коэффициентом распределения. Как правило, это «вредные» примеси в сплавах. Располагаясь в межосных областях дендритных кристаллов, они снижают механические свойства и, главное, пластичность отливок. Поэтому для технолога-литейщика основной путь уменьшения дендритной ликвации — предельное, т. е. технологически достижимое в данных условиях плавки, снижение содержания «вредных» примесей в литейных сплавах.

Если читатель еще раз вдумается в суть изложенного в этом параграфе, то он обязательно придет к известному выводу: *главная задача литейщиков — устранение зональной ликвации в отливках*.

Именно эту задачу следует поставить перед теорией формирования макроскопического строения тела отливки.

6. ПОРИСТОСТЬ ТЕЛА ОТЛИВКИ

«Главнейшим недостатком стальных отливок является раковистость как от пузырей, так и от усадочных пустот» — это слова Д. К. Чернова из его знаменитого труда, написанного в 1878 г. [17, с. 165].

Газовая пористость

Условимся: технология изготовления формы и ее заполнения расплавом спроектирована и осуществлена оптимально, т. е. газовые пузыри, приводящие к газовой пористости отливок, не

попадают в расплав во время его течения в литниковой чаше, по каналам литниковой системы и в полости формы, а также не появляются при взаимодействии расплава с материалом формы и стержней или с покрытиями и красками металлических форм и стержней.

Другими словами, условимся, что газовая пористость отливок образуется в результате выделения в виде мелких пузырей газов, растворившихся в расплаве при плавке.

Растворимость газов в расплавленных металлах и сплавах больше, чем в твердых. Например, в большинстве литейных сплавов коэффициент распределения водорода $k_0 = 0,5 \div 0,7$; исключение составляют алюминий и его сплавы, у которых $k_0 = 0,052$. Поэтому образование газовой пористости отливки — процесс, похожий на процесс образования ликвации.

Однако газовую пористость отливок не оценивают характеристиками, принятыми нами для ликвации. Из технологических дисциплин читатель знает, что обычно определяют газосодержание сплава в см^3 на 100 г сплава и состав газов, растворенных в этом сплаве. Для технологических нужд используют пробу: небольшой слиток затвердевает в вакууме, его разрезают вдоль и на разрезе обнаруживают газовую пористость, которую после сравнения с эталонами оценивают в баллах (например, по шкале стандартных образцов).

Водород — пожалуй, единственный газ, вызывающий образование газовой пористости в отливках.

Особенно часто возникает газовая пористость в отливках из алюминиевых сплавов. С позиции наших знаний об образовании ликвации это понятно: коэффициент k_0 распределения водорода в алюминии минимален.

В сталях еще одной причиной образования газовой пористости может быть СО в случаях, когда при плавке раскисление железа выполнено недостаточно полно. Это также ясно: при кристаллизации углерод ($k_0 = 0,25$) и кислород ($k_0 = 0,1$) насыщают расплав у поверхности роста дендритов аустенита, образуется FeO и протекает реакция $\text{FeO} + \text{C} = \text{Fe} + \text{CO}\uparrow$.

Усадочная пористость

В уже упоминавшемся труде Д. К. Чернова дано следующее описание продольного разреза стального слитка [17, с. 166]: «В верхней части болванки располагается большая пустота в виде неправильной воронки, спускающейся вниз по оси; пустота эта окружена рыхлостью ... Рыхлость ... опускается по оси болванки далеко ниже конца воронки, образуя в некоторых местах раковины значительной величины. По мере удаления от центральных частей болванки рыхлость уменьшается и, наконец, становится незаметною для глаза, так что некоторая толщина металла, заключающаяся между коркой и рыхлою сердцевиной, представляется в плотном виде».

Читатель, конечно, понял, что Д. К. Чернов описал *осевую усадочную пористость* тела отливки. Именно она снижает механические свойства литых деталей и уменьшает их герметичность, особенно после обработки резанием.

Однако тот металл, который представляется в плотном виде, к сожалению, не лишен усадочной пористости. Ее принято называть *рассеянной усадочной пористостью*. Она не уменьшает существенно механические свойства отливок и их герметичность.

По данным Б. Б. Гуляева, испытание плоских образцов стали 35Л, вырезанных из стенки отливки толщиной 30 мм, показало, что при снятии припуска 6 мм только с одной стороны стенки предел прочности образцов на разрыв уменьшается на 15%, а при двусторонней обработке — на 35% [28].

В том же труде Д. К. Чернова [17, с. 177—178] дано блистательное описание процесса образования рассеянной и осевой усадочной пористости в стальном слитке: «Обращаясь к очертанию кристаллов, мы видим, что в росте нет строгой правильности — иногда рост одной стороны опережает другую, ростки второго порядка развиваются быстрее некоторых ростков первого порядка, отнимают от них материал и, в свою очередь, пускают от себя ростки третьего порядка и т. д.; ростки встречаются, срастаются и замыкают между собою пространства, наполненные жидкой сталью ... И это только при рассмотрении одного кристалла в отдельности, — сколько же должно образовываться таких замкнутых пространств, когда рядом растут соседние кристаллы, бросающие от себя ростки по всем направлениям. Что же происходит в этих замкнутых пространствах при дальнейшем остывании стали? Жидкий металл замкнутых пространств продолжает служить материалом для дальнейшего роста замыкающих его кристаллических ростков, но так как при этом происходит сжатие объема металла, то в каждом таком замкнутом пространстве остается усадочная пустота, которую назовем местною или частною усадкой.

Очевидно, что недостаток материала для правильного развития ростков кристаллов не может быстро пополняться, если окружающий металл загустевает и теряет быструю подвижность, что и имеет место при затвердевании центральных частей болванки. Вот причина, почему по мере приближения к центру болванки мы встречаемся с более и более рыхлым металлом. Таким образом, рыхлость центральных частей болванки есть не что иное, как скопление более или менее развитых частных усадок».

Из изложенного ясно, что в качестве *количественных показателей пораженности тела отливки усадочными порами* следует принять отношение суммарного объема V_n пор к объему отливки без прибылей и литниковой системы, т. е. *пористость*

$$П = \frac{V_n}{V_0},$$

и относительный размер той части центральной зоны тела отливки, где сосредотачивается осевая усадочная пористость,

$$\Lambda_{\Pi} = \frac{l_{\Pi}}{l_0},$$

здесь l_{Π} — протяженность зоны залегания осевой усадочной пористости в теле отливки.

На рис. 8 приведена зависимость относительного предела прочности на разрыв образцов стали 35Л, вырезанных из стенки плоских отливок, от величины их пористости. Эта зависимость получена Б. Б. Гуляевым.

Отливки представляют собой плиты длиной 1100 мм. Материал — сталь 35Л. Температура заливки 1830 К. Форма — песчаная, сухая. Пористость определяли гидровзвешиванием образцов, вырезанных в восьми местах по длине плиты. Относительный предел прочности Б. Б. Гуляев рассчитывал как отношение предела прочности образца, вырезанного из исследуемой отливки, к пределу прочности образца, вырезанного из пробного бруска, отлитого в тех же условиях, но при хорошо организованном питании [28].

Влияние пористости на механические свойства отливок очевидно.

Газоусадочная пористость

Величину Π , как правило, определяют гидровзвешиванием образцов, вырезанных из тела отливки. Протяженность l_{Π} определяют с помощью просвечивания отливки проникающими лучами. Это означает, что Π включает не только усадочные поры, но и газовые, и в пределах l_{Π} располагаются и та и другая пористости. Иными словами, и Π и l_{Π} количественно определяют *газоусадочную* пористость в отливке.

На первый взгляд такое положение не должно нас устраивать. Однако, согласно Д. К. Чернову, усадочные поры образуются в *замкнутых* пространствах между осями дендритов или между дендритными кристаллами. Следовательно, в порах должен быть вакуум. Если в сплаве растворены газы, то вследствие развития «газовой» ликвации концентрация их будет увеличиваться именно в расплаве, находящемся между осями дендритов или между дендритными кристаллами. Естественно, что растворенные газы должны выделяться в свободном виде именно в полости развивающихся усадочных пор. Более того, эти газы, повышая давление в полости развивающихся усадочных пор, будут служить

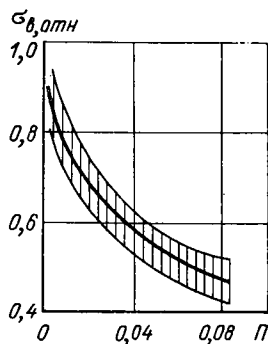


Рис. 8. Относительный предел прочности литой стали 35Л в зависимости от пористости Π отливки

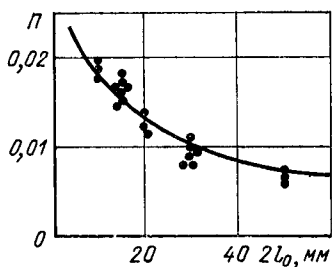


Рис. 9. Пористость отливок из стали 35Л в зависимости от их толщины

препятствием для проникновения в них расплава и тем самым увеличат объем пор в теле отливки.

Таким образом, усадочная пористость отливок носит *газоусадочный* характер.

Разумеется, что все это так только в случаях, когда газонасыщенность расплава при плавке невелика, т. е. когда во время плавки соблюдены все правила предохранения расплава от растворения в нем газов,

расплав раскислен и хорошо дегазирован и технологическая проба дает низкий балл по газонасыщенности (см. с. 21).

В дальнейшем мы вернемся к механизму образования газоусадочной пористости неоднократно и уточним его по мере разработки теории формирования макроскопического строения отливки. Теперь обсудим связь газоусадочной пористости отливки со скоростью ее затвердевания. Условимся для краткости газоусадочную пористость называть просто *пористость*. На рис. 9 приведены результаты той же серии экспериментов Б. Б. Гуляева (см. рис. 8), но уже по исследованию зависимости пористости стальных отливок от их толщины; по оси ординат на графике отложена средняя пористость отливки.

Обращает внимание, что с уменьшением толщины отливки пористость возрастает. Согласно формулам (116-III.1), (42-III.1) и (130-III.1), с уменьшением толщины отливки скорость ее затвердевания увеличивается. Следовательно, можно сделать вывод, что *увеличение скорости затвердевания приводит к увеличению пористости*.

Читателю этот вывод может показаться странным, ибо из технологических дисциплин известно, например, что установка наружных холодильников у мест образования пористости уменьшает ее. На самом деле, так и есть, если речь идет об утолщениях тела отливки в сопряжениях (см. с. 225.1—226.1). Однако, если иметь в виду пористость однородного по толщине тела отливки, то все получается иначе. Например (и это читатель должен помнить), для одной и той же отливки при переходе от песчаной формы к кокилю, т. е. при увеличении скорости затвердевания, пористость отливки увеличивается, особенно, когда отливка из алюминиевых сплавов или оловянных бронз.

Что касается относительного размера Λ_n зоны тела отливки, пораженной пористостью, то в литературе нет прямых данных о связи его со скоростью затвердевания. Правда, на основе знаний тепловой теории формирования отливки можно сказать, что увеличение скорости затвердевания должно сокращать Λ_n , ибо с увеличением скорости возрастает градиент температурного поля в двухфазной зоне фронта кристаллизации, а следовательно,

улучшаются условия проникновения расплава в изолированные области между дендритными кристаллами. Однако это заключение нуждается в тщательной проверке при разработке теории формирования макростроения отливки.

7. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТЛИВКИ

Для количественной характеристики механических свойств тела отливки при нормальной температуре примем традиционные показатели: временное сопротивление разрыву σ_b , относительное удлинение δ образца, относительное сужение ψ его поперечного сечения и ударную вязкость a_n . Связь этих показателей стандартных образцов, вырезанных из тела отливок из стали 40Л, со скоростью их затвердевания однозначно иллюстрируется графиками на рис. 13.1. Более того, характер связи, т. е. повышение механических свойств с увеличением скорости затвердевания, сохраняется независимо от наличия и количества неметаллических включений.

На рис. 10 приведены интересные графики Н. И. Хворинова [16]. Он измерял относительное сужение ψ образцов хромомolibденовой стали, вырезанных из разных мест по сечению отливки, толщиной 370 мм. Кривые 1 и 2 построены по результатам измерения ψ на стандартных образцах диаметром 10 и 1,7 мм.

Кривая 1 отражает широко известную картину изменения механических, особенно пластических, свойств по сечению тела отливки: с уменьшением скорости затвердевания — а она, согласно (97-III.1) при $k = 0$ уменьшается от поверхности тела отливки к центру — величина ψ , в частности, падает (см. например, рис. 13.1, в, а также рис. 84 и 85 в книге [27]). Кривая 2 показывает, что ψ микрообразцов той же стали из той же отливки не зависит от скорости ее затвердевания.

Замечательно, что и в том, и в другом случаях временное сопротивление разрыву осталось в пределах 65—70 кгс/мм².

Если предположить, что на пластические свойства, в том числе и на ψ , литого металла влияют макроскопические газоусадочные поры, а также несплошности ликвационного происхождения, действуя как концентраторы напряжения, то это влияние должно быть более заметным на образцах большого диаметра, так как с уменьшением диаметра вероятность

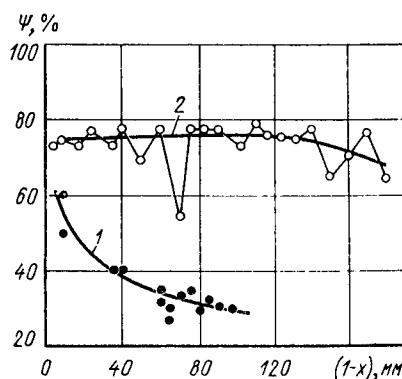


Рис. 10. Распределение относительного сужения в теле слитка:
1 — измерено на образцах диаметром 10 мм, вырезанных на разном расстоянии $(1-x)$ от поверхности слитка; 2 — на образцах, диаметром 1,7 мм

попадания указанных дефектов в тело образца уменьшается. Следовательно, кривая 2 (см. рис. 10) должна более точно отражать свойства литого металла, связанные с его кристаллическим строением. Но она не выявляет существенной разницы свойств у поверхности тела отливки и в его середине, т. е. в зонах тела, где кристаллическое строение должно быть разным.

Таким образом, получается, что связь механических свойств отливки со скоростью затвердевания по сечению ее тела обусловлена не столько кристаллическим строением тела, сколько его дефектами, появляющимися вследствие развития процессов, сопутствующих кристаллизации отливки и приводящих к пористости и зональной ликвации. Естественно поэтому стремление литейщиков устранить такие дефекты в отливках, управляя скоростью затвердевания отливки. А так как с увеличением скорости затвердевания кристаллическое зерно измельчается, зональная ликвация уменьшается, а пористость увеличивается, необходимы количественные зависимости между характеристиками кристаллического строения тела отливки, неоднородности его химического состава, пористости и механических свойств. Установить их возможно только на основе теории, способной рассмотреть процесс формирования тела отливки в целом.

8. ГОРЯЧЕЛОМКОСТЬ ЛИТЕЙНЫХ СПЛАВОВ

Из технологических дисциплин читатель знает, что половина всего брака отливок — это брак по горячим трещинам (исключение составляют отливки из серого чугуна!). Причина горячих трещин известна: торможение формой или стержнями свободной линейной усадки отливок во время их затвердевания. И несмотря на простоту и полное ее понимание литейщиками, предохранение отливок от горячих трещин остается проблемой. Ее значение чрезвычайно возросло в связи с использованием неподатливых форм и стержней и уменьшением толщины тела отливки.

Решение этой проблемы идет по пути создания сплавов, минимально склонных к образованию горячих трещин при литье. Естественно, что в качестве характеристик, количественно оценивающих вероятность появления горячих трещин в отливках, выбирают те, которые определяют горячеломкость сплавов, или, как иногда говорят, склонность сплавов к горячим трещинам при литье.

Горячеломкость сплавов определяют с помощью специальных технологических проб — отливок, у которых специально создается полное или частичное торможение свободной линейной усадки во время их затвердевания. Известно ~40 таких технологических проб и несколько методик определения горячеломкости сплавов с их помощью [12, с. 196—211]. К сожалению, нет общепринятых пробы и характеристики для количественной оценки трещино-

устойчивости отливок из того или иного литейного сплава. Установление такой характеристики — задача теории формирования отливки.

9. СВЯЗЬ ХАРАКТЕРИСТИК СТРОЕНИЯ ОТЛИВКИ С ДИАГРАММОЙ СОСТОЯНИЯ СПЛАВОВ

Читателю хорошо известно, что наиболее полное исследование связи литейных свойств сплавов и характеристик строения отливок из этих сплавов с диаграммой их состояния выполнено А. А. Бочваром, его сотрудниками и учениками в 30—40-х годах. Результаты этого исследования оказали революционное влияние не только на развитие металловедения и технологии литейных сплавов, но главное — на мировоззрение металловедов и литейщиков. С тех пор существует четкое представление о технологичности сплавов для отливок. Оно определяется совокупностью характеристик, отражающих *склонность* сплавов к образованию того или иного кристаллического строения, его неоднородности и дефектов в отливках.

На рис. 11 приведены схемы из работ А. А. Бочвара с сотрудниками и учениками, обобщающие принципиальные представления об особенностях протекания литейных процессов в сплавах различного состава. На схемах представлена связь характеристик, перечисленных в предыдущих параграфах, с диаграммой состояния бинарных сплавов с ограниченным твердым раствором и эвтектикой.

Сопоставление кривых показывает соответствие между большинством характеристик макростроения отливки, ее неоднородностью и дефектами. Например, уменьшение склонности сплавов к транскристаллизации (кривая 1), т. е. расширение центральной зоны равноосных кристаллов в отливках, сопровождается увеличением доли объемной усадки сплава, которая проявляется в отливках в виде усадочной пористости (кривая 3). Усадочная пористость уменьшает герметичность тела отливки (кривая 4). Сужение зоны столбчатых кристаллов в отливках (кривая 1) сопровождается увеличением прямой зональной ликвации в них (кривая 7). Склонность сплавов к образованию обратной зональной ликвации в отливках описывается кривой 9, которая похожа на кривую 5 склонности этих же сплавов к образованию в отливках горячих трещин.

Этот вывод довольно четко отражает мысль, высказанную в п. 3 о необходимости рассматривать процессы, соответствующие формированию отливки, как взаимосвязанные и взаимообусловленные. В п. 3 мы пришли к заключению, что пока наши знания о взаимосвязи и взаимообусловленности процессов во всем многообразии их протекания в конкретных условиях технологии литья недостаточны для построения общей теории формирования отливки. Поэтому поставлена более скромная цель: построение

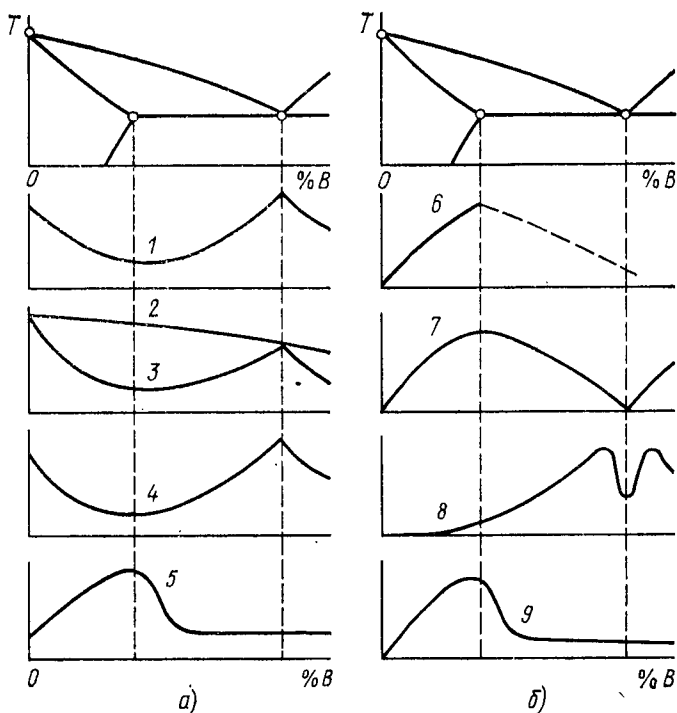


Рис. 11. Характеристики макростроения тела отливки, различных неоднородностей его строения и склонности к образованию дефектов строения для системы сплавов по А. А. Бочвару: а — усадочных; б — ликвационных;

1 — протяженность зоны столбчатых кристаллов; 2 — относительная объемная усадка; 3 — относительный объем усадочной раковины; 4 — герметичность отливок; 5 — склонность к образованию горячих трещин; 6 — склонность к дендритной ликвации; 7 — склонность к прямой зональной ликвации; 8 — склонность к гравитационной ликвации; 9 — склонность к обратной ликвации

теории формирования макростроения тела отливки. Цель достижима, если условиться описывать макростроение с помощью выявленных в данной главе характеристик.

Однако возникает задача выявления *характеристик условий литья*, необходимых для построения теории формирования макростроения тела отливки.

Глава 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ УСЛОВИЙ ЛИТЬЯ

В тепловой теории формирования отливки единственной количественной характеристикой комплекса условий литья является *скорость U_z затвердевания отливки, эквивалентной плоской* (см. п. 58.1, 60.1 и 81.1). Однако читателю из технологических дисциплин хорошо известно, что помимо теплофизических режимов технологии на формирование строения тела отливки и ее свойств

оказывают влияние *режимы плавки, внепечной обработки расплава и его заливки*, не учитываемые тепловой теорией. Другими словами, необходимо рассмотреть те характеристики условий литья, которые определяются этапами технологии P — плавки и $З$ — заливки (см. рис. 1.1) и не учитываются скоростью U_3 затвердевания отливки.

10. СКОРОСТЬ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ

Расчет скорости U_3 затвердевания отливки как комплексной количественной характеристики теплофизических режимов литья в конкретной технологии — важное достижение тепловой теории. В зависимости от этой скорости чаще всего находят эмпирические связи между режимами литья и характеристиками строения отливки и ее свойствами (см., например, рис. 13.1—18.1, 3, 4 и др.).

Однако в технологической литературе можно встретить утверждения, и порою категорические, что скорость затвердевания не является такой характеристикой. Взамен предлагают *скорость S охлаждения затвердевающей отливки* или приведенную толщину $\mathfrak{R}_0$ (чаще среднюю толщину l_0) ее тела как отражающую скорость S .

В качестве примера напомним читателю о структурных диаграммах для чугунных отливок. В них, начиная с Клингенштейна, использовали толщину стенки отливки. По этому пути шли Н. Г. Гиршович, А. Ф. Ланда, П. И. Степин. В последней диаграмме А. А. Жукова выбрана обратная величина приведенного размера $\mathfrak{R}_0$ отливки, как наиболее полно характеризующая скорость ее охлаждения. Только Н. П. Дубинин в своей структурной диаграмме для чугунного литья в кокиль использовал скорость S в явном виде [31].

С помощью формул (116-III.1) и (70-IV.1) определим, что

$$S \equiv U_3 \frac{T_L - T_S}{\mathfrak{R}_0}; \quad t \geq t_1, \quad (1)$$

где для литья в песчаные формы, согласно (42-III.1) и (130-III.1),

$$U_3 = \frac{b_4 (T_L - T_\Phi)}{s_{эф} \rho_2 \sqrt{\pi t}}; \quad t \geq t_1, \quad (2)$$

$$t_1 = \left[\frac{c_1 \rho_1 \mathfrak{R}_0 (T_{зал} - T_L)}{1,13 b_4 (T_{зал} - T_\Phi)} \right]^2 \quad (3)$$

и для литья в кокиль, согласно (46-IV.1) * и (67-IV.1),

$$U_3 = \frac{\tilde{\beta} (T_L - \tilde{T})}{s_{эф} \rho_2}; \quad t \geq t_1, \quad (4)$$

$$t_1 = \frac{c_1 \rho_1 \mathfrak{R}_0 (T_{зал} - T_L)}{\tilde{\beta} (T_{зал} - \tilde{T})}. \quad (5)$$

* Здесь в формуле (46-IV.1) экспонента представлена степенным рядом, в котором сохранены первые два члена.

Из формулы (1) следует, что S обратно пропорциональна $\mathfrak{R}_0$. Однако эта связь однозначна, если теплофизические режимы литья (b_4 , T_Φ , $\tilde{\beta}$ и $\tilde{T}$), перегрев расплава при заливке ($T_{\text{зал}} - T_L$) и свойства сплава ($s_{\text{эф}}$, ρ_2 , c_1 , ρ_1 , T_L , T_S) неизменны. Следовательно, замена S на $\mathfrak{R}_0$ возможна далеко не всегда и недопустима для структурных диаграмм, объединяющих гамму различных чугунов и условий литья из них отливок.

Теперь о связи между S и U_3 . Из формулы (1) ясно, что S прямо пропорциональна U_3 . Для данной отливки из заданного сплава S и U_3 отличаются только масштабом. Однако читатель, по-видимому, уже обратил внимание на то, что S теряет смысл для эвтектических сплавов, так как у них $T_L = T_S = T_E$, и, следовательно, $S = 0$ при $U_3 > 0$.

Один из самых распространенных и сильных аргументов против скорости затвердевания отливки как комплексной количественной характеристики режимов литья заключается в том, что U_3 не учитывает влияние толщины отливки. Согласно, например, формуле (2), будто бы и тонкостенная, и толстостенная отливки вначале затвердевают с одинаковыми скоростями, а следовательно, в соответствии с диаграммами (рис. 16.1 и 18.1) их структура у поверхности должна быть одинаковой. Практика, как известно, не подтверждает этого.

Однако анализ формулы (2) показывает иное. Дело в том, что формулу (2) часто записывают так:

$$U_3 = \frac{b_4 (T_L - T_\Phi)}{s_{\text{эф}} \rho_2 \sqrt{\pi t}},$$

т. е. не указывая область определения времени t затвердевания отливки. Тогда получается, что для отливки любой толщины в начале процесса скорость U_3 одинакова и равна бесконечности. На самом деле, затвердевание начинается только после отвода от расплава теплоты перегрева, т. е. в момент времени $t = t_1$, а t_1 из формулы (3) прямо пропорционально квадрату приведенного размера $\mathfrak{R}_0$ отливки. Поэтому при одинаковом перегреве расплава в момент начала заливки тонкостенные отливки начинают затвердевать с большей скоростью, чем толстостенные.

И раньше, в формуле (130-III.1), и сейчас в (2) начало отсчета времени затвердевания отливки указано условием $t \geq t_1$. Но если быть точным, то требуется еще указать и конец отсчета времени. Так как, согласно формуле (114-III.1), отливка затвердевает к моменту времени $t = t_2$, то формулу (2) следует записать в виде

$$U_3 = \frac{b_4 (T_L - T_\Phi)}{s_{\text{эф}} \rho_2 \sqrt{\pi t}}; \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (6)$$

где t_1 — начало затвердевания,

$$t_1 = \left[\frac{c_1 \rho_1 \mathfrak{M}_0 (T_{\text{зал}} - T_\Phi)}{1,13 b_4 (T_{\text{зал}} - T_\Phi)} \right]^2;$$

t_2 — конец затвердевания отливки,

$$t_2 = \left[\frac{s_{\text{эф}} \rho_2 \mathfrak{R}_0}{1,13b_4 (T_L - T_{\text{ф}})} + \sqrt{t_1} \right]^2.$$

Таким образом, скорость U_3 затвердевания отливки отражает влияние ее толщины¹: в соответствии с (6) U_3 *обратно пропорциональна* $\mathfrak{R}_0$.

Естественно возникает вопрос: не по этой ли причине перечисленные выше структурные диаграммы, в которых используется толщина отливки или ее приведенный размер как характеристика скорости охлаждения, все же применяли и сейчас иногда применяют на практике? Ответ может быть положительным, если предположить, что теплофизические режимы литья (b_4 , $T_{\text{ф}}$, β , $\tilde{T}$), перегрев расплава при заливке ($T_{\text{зал}} - T_L$) и свойства чугунов ($s_{\text{эф}}$, ρ_2 , c_1 , ρ_1 , T_L , T_S) в реальной технологии либо изменяются несущественно, либо все это изменение не влияет заметно на структуру чугунных отливок, либо все это можно было не учитывать из-за низких требований, предъявлявшихся тогда к качеству отливок. Необходимость же учета всего этого для высококачественных отливок, в том числе из синтетических чугунов, иллюстрируется данными на рис. 16.1, 18.1 и 4. Что же касается стального литья, то рис. 13.1—15.1 свидетельствуют об этом однозначно.

11. ПЕРЕГРЕВ РАСПЛАВА ПРИ ПЛАВКЕ

«Плавь горячо, а лей холодно» — старое правило литейщиков.

В этой связи величину перегрева расплава при плавке и температуру расплава в момент начала заливки его в форму необходимо рассмотреть как возможные характеристики условий литья на этапах технологии P — плавки и $З$ — заливки (рис. 1.1).

Начнем с анализа влияния величины перегрева расплава при плавке на характеристики макростроения отливки и ее свойства.

На рис. 12 представлены результаты исследования влияния перегрева расплава при плавке АМц с 0,02% Ti на протяженность $l_{\text{ст}}$ зоны столбчатых кристаллов и размер d зерна в центральной зоне тела отливок, залитых при разных температурах.

Кривые 1 и 2 на рис. 12, a отражают широко и давно известную закономерность: увеличение перегрева $T_{\text{зал}} - T_L$ при заливке укрупняет зерно и расширяет зону столбчатых кристаллов. Эта закономерность считается классической, и ее, как правило, приводят во всех пособиях по технологическим дисциплинам.

¹ К такому же выводу нетрудно придти и в отношении U_3 для литья в кокиль, проделав аналогичный анализ формулы (4). Этот анализ поручаем читателю. Для его выполнения необходимо с помощью формул (28-IV.1), (60-IV.1), (61-IV.1) и (69-IV.1) определить связь $\tilde{T}$ и β с $\mathfrak{R}_0$.

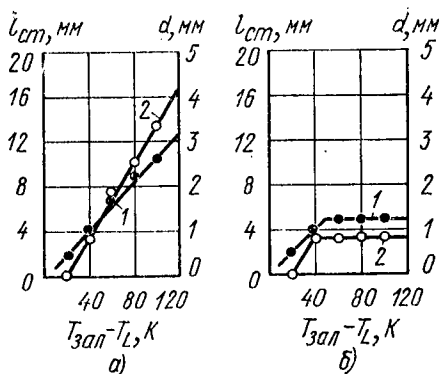


Рис. 12. Протяженность зоны столбчатых кристаллов (2) и размер зерна в центральной зоне (1) слитков АМц в зависимости от перегрева расплава в момент начала заливки:

a — расплав при плавке перегрет до 1220 К и затем охлажден в печи до температуры заливки; *б* — расплав при плавке не перегревался выше температуры заливки

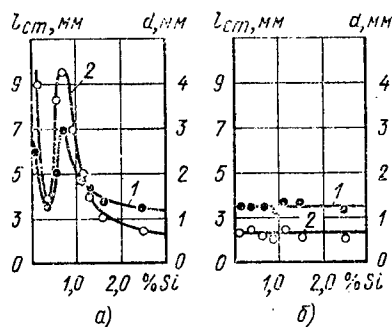


Рис. 13. Протяженность зоны столбчатых кристаллов (2) и размер зерна в центральной зоне (1) слитков сплавов системы алюминий—кремний в зависимости от содержания в них кремния:

a — расплав при плавке перегрет до 1220 К и затем охлажден в печи до температуры заливки $T_{зал} = T_L + 60$ К; *б* — расплав при плавке не перегревался выше температуры заливки

Кривые 1 и 2 на рис. 12, *б* известны не столь широко. Но они свидетельствуют о том, что для того же сплава, тех же температур заливки и условий охлаждения во время затвердевания отливок классическая закономерность нарушается: начиная с перегрева при заливке на 40 К выше T_L , и d , и $l_{ст}$ сохраняют постоянные значения. Аналогичные результаты для ряда других сплавов приведены в книге [2].

Отмеченное нарушение закономерности вызвано лишь изменением условий плавки. В первом случае (рис. 12, *a*) расплав при плавке был перегрет до 1220 К и затем охлажден в печи до температуры заливки. Во втором случае (рис. 12, *б*) при плавке расплав не перегревался выше температуры заливки.

Приведем еще один пример влияния перегрева при плавке на формирование макростроения тела отливки.

Из предыдущего известно, что характеристики макростроения тела отливки, его неоднородности и дефектов связаны с диаграммой состояния сплавов, из которых эти отливки изготовлены (см. рис. 11). Определенным образом связаны с диаграммой состояния протяженность $l_{ст}$ зоны столбчатых кристаллов (рис. 11, кривая 1).

Однако кривая 1 — лишь схема, созданная А. А. Бочваром как обобщение многих экспериментов его сотрудников и учеников. Рассмотрим данные измерений $l_{ст}$ и, заодно, d в отливках из сплавов системы Al—Si с 0,02% Ti (рис. 13).

Кривые 1 и 2 на рис. 13, *a* построены для случая, когда при плавке расплав перегревали до 1220 К, затем охлаждали до температуры заливки $T_L + 60$ К и после этого заливали в форму.

Они отражают основные черты схемы на рис. 11. Кривые 1 и 2 на рис. 13, б никакой связи кристаллического макростроения отливок с диаграммой состояния сплавов алюминия с кремнием не показывают. Эти кривые построены для случая, когда при плавке расплав не перегревали выше $T_L + 60\text{K}$. Аналогичные данные для ряда сплавов других систем приведены в книге [2].

Заметим, что в приведенных примерах классические закономерности, связывающие характеристики макрокристаллического строения отливок с температурой заливки (рис. 12, а) и диаграммой состояния системы сплавов (рис. 13, а), проявляются только в классических условиях плавки и заливки, которые определяются старым правилом литейщиков, с формулировки которого начат данный параграф. Если плавку вести иначе, то и эти закономерности существенно нарушаются. Правда, иначе плавку ведут значительно реже, чем по указанному правилу. Это касается сплавов на основе титана, молибдена, вольфрама, когда значительный перегрев их расплавов при плавке еще недостижим.

Но именно эти случаи и доказывают, что *перегрев расплава во время плавки влияет на формирование макростроения отливки*.

Здесь читатель наверняка вспомнил о благотворном действии высокого перегрева при плавке синтетического чугуна в индукционных электропечах. Как известно, после расплавления синтетической шихты и доводки чугуна по химическому составу расплав перегревают до 1800—1830 К и выдерживают в печи 10—12 мин. Такой прием получил название *термовременной* обработки чугуна. Ее цель — *гомогенизация* всего объема расплава по химическому составу и температуре.

Термовременную обработку используют не только для синтетических чугунов при индукционной плавке, ее применяют и при плавке в вагранке, но для гомогенизации рядом с вагранкой устанавливают индукционную канальную печь или индукционный миксер.

Читатель, по-видимому, также помнит, что влияние перегрева расплава при плавке и времени выдержки при данном перегреве различно: действие перегрева на жидкое состояние металлических сплавов на порядок сильнее, чем времени.

Таким образом, *перегрев расплава при плавке является важнейшей характеристикой процесса литья*.

Кроме скорости протекания и степени завершенности металлургических процессов при приготовлении литейных сплавов, их раскислении, рафинировании и дегазации, т. е. всего того, что обеспечивает получение сплава заданной кондиции по химическому составу, чистоте от газов, окислов и неметаллических включений, перегрев при плавке оказывает решающее воздействие на условия зарождения и роста кристаллов в расплаве, затвердевающим в форме.

12. ТЕМПЕРАТУРА РАСПЛАВА, ЗАЛИВАЕМОГО В ФОРМУ

Согласно формуле (6), скорость U_z затвердевания отливки, помимо теплофизических параметров режимов технологии, определяется еще и температурой $T_{\text{зал}}$ расплава, заливаемого в форму. Поэтому зависимости характеристик макростроения тела отливки от скорости U_z должны отражать и влияние перегрева $T_{\text{зал}} - T_L$ расплава в момент начала заливки. Другими словами, температура $T_{\text{зал}}$, как характеристика этапа технологии З — заливки (рис. 1.1), уже учтена тепловой теорией формирования отливки.

Действительно, из формулы (6) следует, что с повышением температуры заливки скорость затвердевания отливки снижается. В соответствии с графиком на рис. 3 уменьшение U_z ведет к укрупнению макрозерна в центральной зоне тела отливки. Следовательно, увеличение перегрева $T_{\text{зал}} - T_L$ при заливке должно приводить к увеличению d . Кривая 1 на рис. 12, а, по крайней мере качественно, подтверждает этот вывод.

Из предыдущего известно, что выбранные в п. 4 характеристики кристаллического макростроения тела отливки взаимосвязаны. В частности, увеличение размера d кристаллического зерна в центральной части тела отливки соответствует увеличению протяженности $l_{\text{ст}}$ зоны столбчатых кристаллов в этой отливке (см. рис. 2). Так как повышение температуры заливаемого расплава приводит к росту зерна, то с увеличением $T_{\text{зал}} - T_L$ должна возрастать и протяженность $l_{\text{ст}}$ зоны столбчатых кристаллов. Кривая 2 на рис. 12, а качественно подтверждает и такой вывод.

Но эти выводы не подтверждают кривые 1 и 2 на рис. 12, б. Получается, что уменьшение U_z , согласно формуле (6), вызванное увеличением $T_{\text{зал}}$, может влиять и может не оказывать влияния на кристаллическое строение отливки из одного и того же сплава, но выплавленного в различных условиях.

Образуется своеобразный парадокс. Всюду мы доказывали, что большинство характеристик строения тела отливки и его неоднородности однозначно связано со скоростью затвердевания расплава в форме. А здесь возникла ситуация, в которой мы приходим к неоднозначному выводу. Однако этот парадокс мнимый. Если читатель осмыслит формулу (6), то без труда установит, что U_z от $T_{\text{зал}}$ зависит существенно лишь при малых $T_{\text{зал}} - T_L$, затем влияние $T_{\text{зал}}$ становится практически незаметным. Получается, что формула (6) количественно согласуется¹ с ходом кривых 1 и 2 на рис. 12, б.

¹ Проверку этого поручаем читателю.

Заметим, что выше дважды указано на качественное соответствие результатов анализа формулы (6), с учетом рис. 2, и хода кривых 1 и 2 на рис. 12, а. Пусть читатель примет этот пример как иллюстрацию того, что даже качественный анализ функции требует досконального знания ее поведения в области изменения рассматриваемого параметра или аргумента.

Эта иллюстрация приведена потому, что уж слишком часто встречаются такие ошибки анализа различных формул в руководствах по литейной технологии.

Таким образом, *температура расплава, залитого в форму, не оказывает решающего влияния на тепловую обстановку зарождения и роста кристаллов во время затвердевания.*

По-видимому, в тех случаях, когда расплав при плавке перегревают значительно выше $T_{\text{зал}}$, ее влияние на кристаллическое макростроение отливки обусловлено воздействием перегрева в плазменной печи на условия зарождения и роста кристаллов в каждом конкретном сплаве. Поэтому, с точки зрения результатов анализа процесса формирования кристаллического макростроения отливки температура заливки — характеристика, зависящая от величины перегрева расплава во время плавки.

Из технологических дисциплин известно, что эта характеристика условий литья является обязательной. Ее с высокой точностью указывают в технологической документации и даже в справочниках по литейным сплавам.

Возникшее противоречие легко разрешимо, если вспомнить, что температуру заливки назначают (или выбирают), исходя из многих соображений. Главные из них:

1° — заполнение полости формы без дефектов типа неспаев, шлаковых включений и газовых раковин;

2° — уменьшение усадочной рыхлоты, пористости, химической неоднородности и пригара;

3° — предохранение отливок от образования горячих трещин, а также уменьшение остаточных напряжений.

При этом назначение (или выбор) температуры заливки основано на решении технологического компромисса, так как соображение 1° требует увеличения $T_{\text{зал}}$, а 2° и 3° — уменьшения ее. До сих пор основным правилом решения указанного компромисса является то, что приведено в начале предыдущего параграфа.

Одна из задач теории формирования отливки заключается в разработке научно обоснованного способа определения $T_{\text{зал}}$. В отношении заполнения формы расчет $T_{\text{зал}}$ приведен в п. 55.1 и 79.1. В других отношениях необходимые расчеты еще предстоит сделать.

Итак, *температура заливки — важная и самостоятельная характеристика условий литья.*

13. ВНЕПЕЧНАЯ ОБРАБОТКА РАСПЛАВА

Выводы из изложенного в предыдущих параграфах сводятся к следующему: перегрев расплава при плавке и скорость затвердевания расплава в форме определяют условия формирования строения отливки из данного сплава; температура заливки расплава в форму определяет условия образования неоднородности и дефектов строения этой отливки из того же сплава.

Однако в связи с непрерывным развитием техники уровень неоднородности и дефектов строения тела отливки, обусловленный склонностью *данного* сплава к образованию столбчатых

кристаллов, ликвации, усадочной пористости, горячих трещин и т. п. (см. рис. 11), как правило, не устраивает конструкторов деталей новых машин и приборов. И если данный сплав нельзя заменить другим, то технологи-литейщики вынуждены применять различные способы управления процессом формирования отливки для повышения ее качества. Среди них наиболее эффективны те, какие используют между этапами P и $З$ и во время этапа $З$ технологии литья — это способы *внепечной обработки* расплава: 1) фильтрование расплава при разливке в ковш, 2) вакуумирование расплава в ковше, 3) модифицирование расплава в ковше или в литейной системе, 4) введение микрохолодильников и частиц тугоплавких соединений в струю расплава во время его заливки в форму и 5) вибрирование формы, наложение электромагнитного или других полей при ее заполнении.

Первый способ позволяет уменьшить в отливке количество неметаллических включений в виде окислов и частиц шлака; его применяют при литье алюминиевых и магниевых сплавов. Второй способ предназначен для уменьшения количества растворенных в расплаве газов (для дегазации расплава) и, следовательно, уменьшения пористости в отливках; он разработан в СССР. Этот способ применяют при литье стали, медных и других сплавов в тех случаях, когда вакуумная плавка их технически сложна или неосуществима. Остальные способы используют для воздействия на процесс формирования строения отливки изменением условий зарождения и роста кристаллов в затвердевающем расплаве (модифицирование, вибрирование, наложение электромагнитных и других полей) и уменьшением перегрева расплава после его заливки в форму (введение плавящихся микрохолодильников и частиц тугоплавких соединений).

Последний способ применяют также для улучшения заполнения формы, уменьшения в отливках усадочной пористости и предохранения отливок от горячих трещин.

Введение в расплав частиц тугоплавких соединений (например, окислов, нитридов и карбидов титана, бора, тантала, циркония и других элементов при литье жаропрочных сталей и сплавов на основе никеля) помимо их воздействия как модификаторов, как неплавящихся холодильников, повышает прочность и пластичность отливок в результате образования композитных структур в твердых растворах.

Таким образом, перечисленные способы внепечной обработки расплава в своей основе являются способами изменения условий формирования строения отливки с целью его улучшения, уменьшения его неоднородности и дефектов.

В этой связи традиционные характеристики условий литья (перегрев при плавке, температуру $T_{\text{зал}}$ и скорость U_3) необходимо дополнить, отразив влияние фильтрования, вакуумирование, модифицирование, введение микрохолодильников, воздействие вибрации, электромагнитного поля, поля центробежного

ускорения и т. п. Требуемое дополнение характеристик условий литья в количественном выражении возможно только в понятиях и терминах теории формирования макростроения отливки и будет сделано в процессе ее построения.

Пока, учитывая технологические знания читателя и его знания тепловой теории формирования отливки, можно сказать, что влияние фильтрования расплава целесообразно учитывать количеством неметаллических включений в единице объема литого металла, влиянием вакуумирования — величиной газосодержания расплава перед заливкой, влияние микрохолодильников — объемной долей, размерами частиц и теплофизическими параметрами их материала.

Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЕ ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОТЛИВКИ

Прежде всего обратим внимание читателя на то, что изложенное в гл. 2 и 3 является итогом анализа громадного экспериментального материала, накопленного различными исследователями при изучении процесса формирования макростроения тела отливки. В результате найдена система взаимосвязанных характеристик этого строения и условий литья, от которых зависит исход процесса его формирования. Для установления количественных связей между найденными характеристиками необходимо дать математическое описание основным физическим процессам, обуславливающим и сопутствующим формированию макростроения отливки.

14. ДВУХФАЗНАЯ (ПЕРЕХОДНАЯ) ЗОНА ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОТЛИВКИ

Согласно тепловой теории формирования отливки, при затвердевании сплава в интервале $T_L - T_S$ перед фронтом кристаллизации возникает зона, в которой появляются и растут кристаллы (см. рис. 22.1). Это — *двухфазная зона*; иногда ее называют *переходной*.

Протяженность двухфазной зоны зависит от линейной скорости затвердевания, температурного градиента в затвердевающем расплаве, эффективной теплоты кристаллизации и интервала $T_L - T_S$ сплава. В самом упрощенном случае можно считать, что в одинаковых условиях литья протяженность двухфазной зоны фронта определяется преимущественно шириной интервала кристаллизации. Именно для такого случая А. А. Бочвар, его сотрудники и ученики сопоставили кривые на рис. 11 с интервалами $T_L - T_S$ и $T_L - T_E$ сплавов.

При таком подходе получается (см. рис. 11), что с увеличением интервала кристаллизации сплава, а следовательно, протяженности двухфазной зоны фронта кристаллизации уменьшается часть тела отливки, состоящая из столбчатых кристаллов (или, что очевидно, расширяется центральная часть, состоящая из равноосных кристаллов), но одновременно увеличивается прямая зональная и дендритная ликвация, растут усадочная пористость и склонность отливки к образованию горячих трещин. Этот вывод сделан А. А. Бочваром еще в 40-х годах.

Как было отмечено, работы А. А. Бочвара, его сотрудников и учеников по экспериментальному исследованию связи характеристик макростроения отливок, ее неоднородности и дефектов с диаграммой состояния сплавов определили мировоззрение металловедов и литейщиков.

Только что сформулированный вывод нацелил металловедов на создание литейных сплавов с наименьшим интервалом кристаллизации. В этом направлении удалось сделать много. Однако рост требований к служебным, и в первую очередь к механическим свойствам сплавов для литых деталей новой техники привел к обратному результату: новые сплавы — как правило, широкоинтервальные.

Литейщики стремились разрабатывать способы управления процессом формирования отливки, которые позволили бы либо уменьшить протяженность двухфазной зоны в затвердевающей отливке, либо подавить процессы, приводящие к развитию транс-кристаллизации, ликвации, усадочной пористости, горячих трещин и т. п. Читателю известно, что и на этом пути удалось сделать много. Помимо способов, перечисленных в п. 13, это — односторонне направленная кристаллизация отливок, а также ультразвуковая обработка, воздействие скрещенных постоянных электрического и магнитного полей при затвердевании отливок и др.

Мы напомнили о работах А. А. Бочвара и его школы еще раз для того, чтобы подчеркнуть важное следствие из изложенного в предыдущих главах. Простой анализ схемы экспериментально найденных кривых, изображенных на рис. 11, с использованием результатов тепловой теории формирования отливки приводит к заключению, что *процессы, совокупность которых составляет процесс формирования строения тела отливки, совершаются в основном в двухфазной зоне фронта кристаллизации.*

В гл. I уже выделены основные процессы. Действительно, формирование строения тела отливки обусловлено отводом теплоты от расплава в форму (*теплообмен*); происходит оно в результате зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве (*кристаллизация*); сопровождается перераспределением растворимых компонентов и примесей сплава между твердой и жидкой фазами (*диффузия*) и изменением плотности сплава при этом фазовом переходе (*усадка*).

Так как перечисленные процессы совершаются в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки одновременно, их протекание существенно осложняется.

В виде грубой схемы это можно представить себе так. Усадка твердой фазы с неизбежностью приведет к всестороннему растяжению расплава, находящегося между кристаллами в двухфазной зоне. Очевидно, что оно, т. е. всестороннее растяжение (вакуум), будет тем больше, чем больше в зоне твердой фазы. Поэтому в пределах двухфазной зоны в расплаве всегда должен быть перепад давления, который, даже без участия гравитации, вызывает течение расплава между растущими кристаллами (*филтрацию*) в сторону фронта кристаллизации (рис. 22.1).

Филтрация расплава окажет влияние на процессы теплопередачи в двухфазной зоне: помимо *молекулярной теплопроводности* должен развиваться *конвективный перенос теплоты* (см. с. 36.1—40.1). Одновременно филтрация расплава окажет влияние на процесс переноса содержащихся в сплаве растворимых компонентов и примесей в двухфазной зоне: в расплаве помимо *молекулярной диффузии* должен развиваться *конвективный перенос растворенных элементов*.

Кроме того, если количество фильтрующегося расплава недостаточно для компенсации убыли расплава вследствие его кристаллизации и увеличения плотности твердой фазы, т. е. вследствие скачка плотности при фазовом переходе (*усадка*), то напряжение всестороннего растяжения должно возрастать. В момент, когда оно достигнет предела объемной прочности расплава на разрыв, между кристаллами или их элементами (например, ветвями дендритов) возникнет полость, в которой должна быть «торричелева пустота». Эта полость — *усадочная пора*.

Если в расплаве растворен газ, то, во-первых, в образующуюся полость выделяется газ и пористость становится *газоусадочной*, а во-вторых, предел прочности газонасыщенного расплава гораздо меньше, чем чистого, и, следовательно, пористость должна возникать при меньшем *дефиците* питания.

Если в расплаве есть частицы нерастворенных примесей (окислы, шлак и т. п.), разрыв расплава под действием растягивающих напряжений должен происходить у поверхности таких частиц и тем легче, чем меньше смачиваемость их расплавом. Легче всего расплав разорвется в тех местах, где находятся пузырьки свободного газа, выделившегося из расплава или захваченного расплавом во время заполнения формы.

Протекание всех процессов в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки осложняется еще более развитием гидродинамических процессов в расплаве *перед* двухфазной зоной.

Действительно, распределение температуры T_1 в незатвердевшем расплаве неоднородно (рис. 22.1). Следовательно, этот расплав должен находиться в состоянии *термической конвекции*, которая будет оказывать влияние на процессы тепло- и массопереноса

в двухфазной зоне. Очевидно, что будет смываться часть двухфазной зоны, называемая *жидко-твердой*, т. е. та часть, в которой твердой фазы значительно меньше, чем жидкой. Расплав из этой части зоны, обогащенный растворимыми компонентами и примесями сплава, будет смешиваться с расплавом, находящимся перед двухфазной зоной. В нем возникнет концентрационная неоднородность, и следовательно, *концентрационная конвекция*.

Термоконцентрационная конвекция расплава перед двухфазной зоной фронта кристаллизации отливки определяет гидродинамическую обстановку формирования ее макростроения. От интенсивности конвекции зависит неоднородность химического состава отливки и возможность возникновения в ней ликвационных дефектов. Смывание жидко-твердой части двухфазной зоны облегчает фильтрацию расплава в оставшейся *твердо-жидкой* ее части и, следовательно, уменьшает пористость отливки. И т. д.

Несмотря на весьма упрощенное описание процессов, происходящих в двухфазной зоне и перед ней, становится понятным воздействие на формирование отливки таких способов *принудительного* перемешивания затвердевающего расплава, как вибрация, наложение электромагнитных полей, ультразвуковых колебаний и т. п. Ряд способов внепечной обработки и способов литья следует рассматривать и с иных, чем это принято в технологических дисциплинах, позиций. Например, становится понятным внимание к фильтрованию расплава, вакуумированию его — и то, и другое важно не только для увеличения прочностных и пластических характеристик литых деталей, не только для уменьшения их коррозии и т. п., но и для уменьшения пористости в отливках, т. е. для повышения их гидроплотности, пневмоплотности, герметичности в вакууме и т. д.

Становятся понятными также те трудности, которые сопровождают использование микрохолодильников, ибо после расплавления плавящихся микрохолодильников в расплаве остаются окислы, облегчающие образование газовой пористости в отливках.

Становится ясным смысл применения внешнего давления, создаваемого любыми путями и средствами при затвердевании расплава: оно ускоряет фильтрацию расплава в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки и, следовательно, уменьшает пористость в ее теле.

Одновременно отметим, что в свете изложенной схемы процессов, происходящих в двухфазной зоне, остается неясным эффект от увеличения числа растущих кристаллов в результате модифицирования сплава, введения микрохолодильников, воздействия вибрации, ультразвука, электромагнитных полей и т. п. Получается, что при увеличении числа совместно растущих кристаллов и, следовательно, при уменьшении их размеров, проницаемость двухфазной зоны должна снизиться. Вместе с ней неиз-

бежно уменьшится скорость фильтрации, а это должно привести к увеличению пористости в теле отливки. Однако известно, что именно модифицирование, вибрирование, ультразвуковая обработка расплава, наложение электромагнитных полей повышают качество отливок, в том числе их гидро- и вакуумноплотность.

С этим вопросом еще предстоит разбираться, но уже с помощью количественных оценок на основе макроскопической теории формирования строения тела отливки. Для ее построения необходимо дать математическое описание каждому из названных выше физических и физико-химических процессов и найти способ учета их совместного протекания в двухфазной зоне фронта кристаллизации.

15. ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЕ

В этом параграфе и далее мы используем известные читателю математические модели из тепловой теории формирования отливки, а также сведения, которые, конечно, усвоены читателем при изучении физической химии, химической термодинамики, гидродинамики и сопротивления материалов.

На рис. 14 приведена схема двухфазной зоны фронта кристаллизации плоской отливки в форме. Она в основных чертах повторяет схему, изображенную на рис. 22.1. Но здесь мы постарались отразить те главные процессы, какие совершаются в двухфазной зоне.

Согласно математической модели затвердевающей отливки в виде неограниченной плиты (17-II.1—20-II.1, 5-II.1), наиболее существенным является выделение теплоты кристаллизации в двухфазной зоне, т. е. между κ_1 и κ_3 , и на границе зоны с фронтом кристаллизации, т. е. при $x = \kappa_3$. В модели (17-II.1—20-II.1, 5-II.1) эти особенности мы отразили дифференциальным уравнением теплопроводности с объемным источником теплоты в двухфазной зоне

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) + L_2 \rho_3 \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \quad \kappa_1 < x < \kappa_3, \quad t > 0 \quad (7)$$

и дифференциальным уравнением теплообмена фронта кристаллизации с зоной

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3(\kappa_3, t)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(\kappa_3, t)}{\partial x} + [1 - \Psi(\kappa_3, t)] L_2 \rho_3 U, \quad (8)$$

где $\Psi = \Psi(x, t)$ и $T_3 = T_3(x, t)$ — известные функции.

В математической модели (17-II.1—20-II.1, 5-II.1) $\Psi(x, t)$ в виде $\Psi(T_2)$ задается по диаграмме состояния для $T_2 \in [T_S, T_L]$ конкретного сплава с помощью, например, приближенной формулы (126-III.1), а $T_3(x, t)$ находится из решения системы (17-II.1—20-II.1, 5-II.1) с учетом $\Psi(T_2)$.

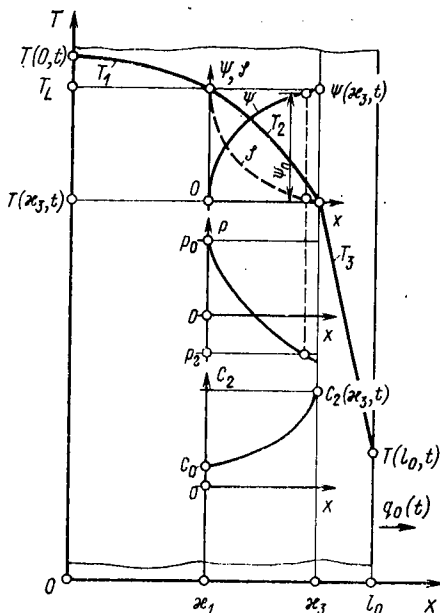


Рис. 14. Схема к анализу процессов в двух-фазной зоне фронта кристаллизации отливки

Функция $\Psi(T_2)$, заданная приближенной формулой (126-III.1), отражает изменение темпа *равновесной* кристаллизации сплава, т. е. такой кристаллизации, при которой диффузионные процессы в расплаве и в твердой фазе успевают завершиться полностью. Реально эти процессы не успевают за появлением и ростом кристаллов в интервале $T_L - T_S$. Такая кристаллизация является *неравновесной*, и ее темп зависит от скорости отвода теплоты от затвердевающего расплава в форму, т. е. от величины, например, плотности $q_0(t)$ теплового потока в первом граничном условии из (5-II.1):

$$-\lambda_i \frac{\partial T_i(l_0, t)}{\partial x} = q_0(t); \quad (9)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Конечно, с помощью формулы (126-III.1), варьируя показателем степени m и температурой T_S солидуса сплава, можно задать функцию $\Psi(T_2)$ для неравновесной кристаллизации. Это потребует определение m и T_S для каждого литейного сплава¹ при всех используемых на практике скоростях отвода теплоты от отливки в форму.

Однако этот уже известный, простой и удобный способ задания $\Psi(T_2)$ не может удовлетворить целям макроскопической теории формирования строения тела отливки. Он не отражает и не может отражать элементарные акты кристаллизации: *зарождение кристаллов и их совместный рост* в интервале $T_L - T_S$ сплава. Для макроскопической теории формирования строения отливки необходимы именно такие параметры реальной кристаллизации, ибо от них зависит кристаллическое строение тела литой детали.

Здесь обратим внимание читателя на граничное условие (9), в правой части которого записана $q_0(t)$ — плотность теплового потока от поверхности отливки в форму. В таком же виде записано граничное условие в моделях и задачах, сформулированных в части I; см., например, (5-II.1) и т. д.

¹ Читатель, видимо, встречал в литературе неравновесные диаграммы состояния ряда сплавов, в том числе и литейных, поэтому указанное требование вполне реально.

Аналитическое выражение для $q_0(t)$, согласно современной теории теплообмена, может быть задано по одному из законов: теплоотдачи Ньютона (7-1.1), теплового излучения Стефана-Больцмана (8-1.1) либо полной теплоотдачи (9-1.1), который объединяет оба предыдущих, или теплопроводности Фурье (4-1.1). То или иное выражение для $q_0(t)$, как и раньше, будем выбирать в зависимости от того, какой из этих законов лучше всего отражает рассматриваемые условия теплового взаимодействия отливки с формой и формы с окружающей средой (см. п. 41.1).

16. ЗАРОЖДЕНИЕ И СОВМЕСТНЫЙ РОСТ КРИСТАЛЛОВ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ПЕРЕОХЛАЖДЕННОГО РАСПЛАВА. УРАВНЕНИЕ А. Н. КОЛМОГОРОВА

Известно несколько способов определения функции $\Psi(T_2)$ в зависимости от указанных выше параметров кристаллизации. Все они разработаны для условий *объемной* кристаллизации переохлажденного расплава. Первый и наиболее изящный способ предложил А. Н. Колмогоров в 1937 г.

Пусть $n(\Delta T)$ — скорость зарождения центров кристаллизации в единице объема переохлажденного расплава данного металла или сплава; $v(\Delta T)$ — линейная скорость роста кристаллов в этом расплаве. Так как при объемной кристаллизации температура расплава во всем объеме V_0 должна быть распределенной *однородно* и, следовательно, является функцией только времени, то скорость зарождения кристаллов и линейную скорость их роста можно представить в виде $n(t)$ и $v(t)$ соответственно, а относительное количество твердой фазы в этом объеме — в виде $\Psi(t)$.

Пусть, далее, от каждого центра кристаллизации, возникшего в некоторый момент времени t' , растет кристалл сферической формы. Тогда, к любому моменту времени $t > t'$ радиус кристалла должен быть

$$r = \int_{t'}^t v(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Очевидно, что центры кристаллизации могут зарождаться в любой момент времени t' в интервале $0 \leq t' \leq t$. Но появляться они могут только в незатвердевшей к t' части $1 - \Psi(t')$ объема V_0 . Место их возникновения, конечно, случайно.

Согласно А. Н. Колмогорову [11], выберем любую точку расплава в пределах объема $[1 - \Psi(t')] V_0$. Она окажется в твердой фазе к моменту времени t , если раньше, в момент времени t' , в окружающем эту точку расплаве, мысленно ограниченном сферой с радиусом, меньшим или равным r из (10), появится *один* зародыш. Так как t' неизвестно, то будем рассчитывать *вероятность* зарождения центра кристаллизации в пределах объема расплава, выделенного сферой, последовательно за каждый весьма

малый интервал времени $\Delta t' = \frac{1}{k} t$, полагая $t'_i = i \Delta t'$, $i = 1, 2, \dots, k$:

$$P_i(\Delta t') = n(t'_i) V(t'_i) \Delta t', \quad (11)$$

где $V(t'_i)$ — объем расплава, ограниченный сферой с радиусом r :

$$V(t'_i) = \frac{4\pi}{3} \left(\int_{t'_i}^t v(\tau) d\tau \right)^3;$$

P_i — вероятности независимых друг от друга событий — появление зародыша в последовательные промежутки времени $\Delta t'$.

Согласно теореме умножения вероятностей, вероятность зарождения центра кристаллизации в объеме $V(t'_i)$ в течение времени до t равна

$$P(t) = \prod_{i=1}^k P_i(\Delta t').$$

Выше мы выбрали $\Delta t'$ весьма малой величиной, поэтому P_i также является величиной малой. Следовательно, $P(t)$ при таком ее определении оказывается близкой к нулю.

Будем искать $P(t)$ в виде

$$q(t) = 1 - P(t). \quad (12)$$

Тогда ¹

$$q_i(\Delta t') = 1 - P_i(\Delta t');$$

$$q(t) = \prod_{i=1}^k q_i(\Delta t')$$

и

$$q(t) = \prod_{i=1}^k [1 - P_i(\Delta t')].$$

С допустимой точностью ²,

$$\ln q(t) = - \sum_{i=1}^k P_i(\Delta t').$$

Учитывая (11) и (12),

$$P(t) = 1 - \exp \left[- \sum_{i=1}^k n(t'_i) \frac{4\pi}{3} \left(\int_{t'_i}^t v(\tau) d\tau \right)^3 \Delta t' \right],$$

¹ $q_i(\Delta t')$ — вероятность того, что к t'_i в объеме $V(t'_i)$ зародыш не появится.

² Ясно, что $\ln q = \sum_{i=1}^k \ln(1 - P_i)$; так как P_i — весьма малая величина, то $\ln(1 - P_i) \approx -P_i$.

или, осуществляя предельный переход для $k \rightarrow \infty$, получим

$$P(t) = 1 - \exp \left[-\varphi \int_0^t n(t') \left(\int_{t'}^t v(\tau) d\tau \right)^3 dt' \right], \quad (13)$$

где φ — коэффициент формы кристаллитов: $\varphi = \frac{4}{3}\pi$ для сферических; $\varphi = 8$ для кубических (проверить!).

В случае, когда все зародыши появляются в начале кристаллизации, например при $t' = 0$, в расплав вводят затравки (модификаторы) по N_1 штук в единице объема,

$$\ln q(t) = -\varphi N_1 \left(\int_0^t v(\tau) d\tau \right)^3,$$

и, следовательно,

$$P(t) = 1 - \exp \left[-\varphi N_1 \left(\int_0^t v(\tau) d\tau \right)^3 \right] \quad (14)$$

(проверить!).

Если допустить, что вероятность $P(t)$ не зависит от распределения центров кристаллизации или затравок в объеме V_0 , а размер кристаллов всегда существенно меньше этого объема, то $P(t) \approx \Psi(t)$, т. е.

$$\Psi = 1 - e^{-\omega}, \quad (15)$$

где для кристаллизации от затравок

$$\omega = \varphi N_1 \left(\int_0^t v(\tau) d\tau \right)^3, \quad (16)$$

и для кристаллизации вследствие зарождения кристаллов

$$\omega = \varphi \int_0^t n(t') \left(\int_{t'}^t v(\tau) d\tau \right)^3 dt'. \quad (17)$$

Уравнение (15) при ω из (16) или (17) называют кинетическим уравнением А. Н. Колмогорова.

В литературе, посвященной теоретическим проблемам металловедения и литейных процессов, уравнением А. Н. Колмогорова чаще называют (15) при

$$\omega = \varphi N_1 v^3 t^3 \quad (18)$$

для роста кристаллов от затворок и

$$\omega = \frac{1}{4} \varphi n v^3 t^4 \quad (19)$$

для роста кристаллов от зарождающихся центров кристаллизации.

Формулы (18) и (19) получаются из (16) и (17) соответственно при $n = \text{const}$ и $v = \text{const}$ (проверить!). Поэтому уравнение (15) при ω из (18) и (19) описывает частные случаи *изотермической* объемной кристаллизации.

Строго подходу, перечисленные выше допущения, которые сделали возможным переход от $P(t)$ к $\Psi(t)$, требуют, чтобы число растущих в объеме V_0 кристаллов было очень большим. В. Н. Радигин показал, что уравнением (15) при ω из (16) и (17) с ошибкой менее одного процента можно пользоваться, если соответственно

$$n \left. \begin{aligned} V_0 N_1 &> 200 \\ V_0 \left(\frac{n}{v} \right)^{3/4} &> 200, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где $\left(\frac{n}{v} \right)^{3/4}$ — величина, пропорциональная числу кристаллов, вырастающих к концу кристаллизации в единице объема расплава от зародышей¹.

Реально кристаллизация может происходить в результате одновременного роста кристаллов как от затравок, так и от зарождающихся центров. И. Л. Воробьев предложил способ обобщить уравнения А. Н. Колмогорова на этот случай. Представим себе, что в переохлажденном расплаве центры кристаллизации появляются с некоторой эффективной скоростью

$$n_{\text{эф}}(t) = n(t) + N_1 \delta(t_n, t),$$

где $\delta(t_n, t)$ есть δ -функция, определяемая так, что

$$\int_{t_1}^{t_0} \delta(t_n, t) f(t) dt = \begin{cases} f(t_n), & \text{если } t_n \in [t_1, t_0], \\ 0, & \text{если } t_n \notin [t_1, t_0]; \end{cases}$$

¹ Очевидно, что для изотермической кристаллизации число кристаллов, выросших и появившихся к моменту t ,

$$N = nV_0 \int_0^t (1 - \Psi) dt;$$

с учетом (15) при ω из (19)

$$N = nV_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{4} \varphi n v^3 t^4\right) dt = V_0 \left[4 \frac{1}{\varphi} \left(\frac{n}{v} \right)^3 \right]^{1/4} \int_0^x e^{-\eta^4} d\eta,$$

если $x = t \left(\frac{1}{4} \varphi n v^3 \right)^{1/4}$. При $t \rightarrow \infty$ интеграл $\int_0^\infty e^{-\eta^4} d\eta = 1$ и, следовательно,

по, к концу кристаллизации

$$N = \left(\frac{4}{\varphi} \right)^{1/4} V_0 \left(\frac{n}{v} \right)^{3/4}.$$

здесь t_n — время начала кристаллизации; t_1 — время начала зарождения центров кристаллизации со скоростью $n(t)$; t_0 — время окончания процесса кристаллизации.

Подставив $n_{эф}$ вместо n в (17), получим

$$\omega = \varphi \left[N_1 \left(\int_0^t v(\tau) d\tau \right)^3 + \int_{t_1}^t n(t') \left(\int_{t'}^t v(\tau) d\tau \right)^3 dt' \right]; \quad t_1 \leq t' < t, \quad (21)$$

так как $t_n = 0$. Условия (20), естественно, совместятся:

$$V_0 \left[N_1 + \left(\frac{n}{v} \right)^{3/4} \right] > 200. \quad (22)$$

Учитывая, что в общей теории кристаллизации функции n и v определяют как $n(\Delta T)$ и $v(\Delta T)$, формулу (21) для ω можно записать иначе:

$$\omega = \varphi \left[N_1 \left(\int_0^t v(\Delta T) d\tau \right)^3 + \int_{t_1}^t n(\Delta T) \left(\int_{t'}^t v(\Delta T) d\tau \right)^3 dt' \right]; \quad (23)$$

$$t_1 \leq t' < t.$$

Подстановка в (15) значения ω из (23) придает уравнению А. Н. Колмогорова смысл *обобщенного* кинетического уравнения объемной кристаллизации. Более того, уравнение А. Н. Колмогорова в виде (15) при ω из (23) позволяет, при соблюдении условия (22), определить функцию $\Psi(T_2)$ и для неоднородного температурного поля в объеме кристаллизующегося расплава. Это важно потому, что в пределах двухфазной зоны фронта кристаллизации отливки температурное поле *всегда* неоднородно (см. рис. 14).

В прежних расчетах (см. часть I) температурное поле в отливке мы принимали однородным. Однако, как помнит читатель, это всего лишь допущение, приемлемое для анализа *затвердевания и охлаждения* отливок в песчаной форме и кокиле (см. с. 158.1 и с. 267.1).

В расчетах *кристаллизации* расплава в литейной форме такое допущение возможно далеко не всегда. Дело в том, что при неоднородном температурном поле неоднородно и распределение переохлаждения расплава ниже температуры ликвидуса сплава в пределах двухфазной зоны. Следовательно, зарождение и рост кристаллов на различных участках двухфазной зоны фронта кристаллизации будут происходить с различными скоростями. Эту особенность и отражает уравнение А. Н. Колмогорова в виде (15) при ω из (23), так как T_2 и ΔT — функции $T_2(x, t)$ и $\Delta T(x, t)$. Однако приемлемую точность определения $\Psi(x, t)$ следует ожидать в случаях, когда в пределах $\frac{1}{2}$ объемов расплава, в которых растут кристаллы, т. е. в пределах объемов, равных

$\varphi \left(\int_{t'}^t v(\Delta T) d\tau \right)^3$, переохлаждение можно будет принять распе-

деленным однородно. А это требование будет выполняться тем лучше, чем большее число кристаллов растет в двухфазной зоне, т. е. чем точнее выполняется условие (22). Заметим, что условие (22) выполнить нетрудно: нужно лишь, чтобы по глубине двухфазной зоны, т. е. вдоль координаты x от x_1 до x_3 росли более шести кристаллов, расположенных друг за другом. Реально их значительно больше!

Гораздо сложнее другой аспект реальной кристаллизации. Как ясно из рассуждений, которые привели к уравнению (15) при ω из (23), речь шла о выпуклых компактных кристаллах (сферических, кубических и т. п.), одинаково ориентированных в объеме V_0 , которые растут так, что ограничивающая их поверхность остается параллельной сама себе. На самом деле, кристаллы, растущие в расплаве при его затвердевании в литейной форме, являются *дендритами*, т. е. разветвленными кристаллами, ориентированными произвольно.

Но и здесь нам, читатель, повезло! При соблюдении условия (22) уравнение А. Н. Колмогорова с вполне допустимой ошибкой пригодно для определения $\Psi(T_2)$ для дендритного роста кристаллов. Доказательство этого принадлежит И. Л. Воробьеву.

17. ОБЪЕМНАЯ УСАДКА ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЫ

! Из технологических дисциплин читателю известно, что *усадкой* называется уменьшение объема сплава при его затвердевании и охлаждении в литейной форме.

Н. Г. Гиршович в 1948 г. впервые расчленил объемную усадку на четыре составляющие: усадку расплава, усадку во время его затвердевания, усадку твердой отливки и предусадочное расширение, если сплав им обладает.

В двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки наблюдают все четыре составляющие объемной усадки. Однако наиболее выражены усадка при затвердевании и предусадочное расширение, так как литейные сплавы, как правило, имеют небольшой интервал кристаллизации, и уменьшение объема расплава и твердой фазы при их охлаждении в этом интервале незначительно.

Обозначим: ρ_1 — плотность расплава в интервале кристаллизации; ρ_3 — плотность твердой фазы в этом же интервале. Тогда, полная *относительная объемная усадка*, вызванная фазовым переходом, т. е. кристаллизацией сплава,

$$\epsilon_V = \frac{1}{\rho_1} (\rho_3 - \rho_1); \quad (24)$$

это выражение учитывает и предусадочное расширение.

Если плотность ρ_2 двухфазной зоны фронта кристаллизации отливки представить аддитивно для любого ее сечения $x \in [x_1, x_3]$ (см. рис. 14):

$$\rho_2 = (1 - \Psi) \rho_1 + \Psi \rho_3, \quad (25)$$

то относительная объемная усадка в пределах зоны от κ_1 до κ_3

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\rho_1} (\rho_2 - \rho_1) \quad (26)$$

будет пропорциональна относительному количеству твердой фазы Ψ в этом сечении (продумать!):

$$\varepsilon_2 = \Psi \varepsilon_V, \quad (27)$$

где ε_V — полная объемная усадка фазового перехода сплава; вычисляется по формуле (24); Ψ — функция, задаваемая уравнением А. Н. Колмогорова.

Значения ε_V для различных сплавов приведены в прилож. III.

18. ДВИЖЕНИЕ РАСПЛАВА В ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЕ. УРАВНЕНИЕ ДАРСИ

Мы уже отметили выше, что развитие объемной усадки двухфазной зоны, т. е. сокращение объема твердой фазы по сравнению с объемом расплава, из которого она образовалась, приводит к растяжению оставшегося в пределах этой зоны незатвердевшего расплава. Это отрицательное давление будет тем больше, чем больше $\Psi (T_2)$ в двухфазной зоне. Следовательно, в пределах двухфазной зоны должно происходить движение расплава между растущими кристаллами в направлении от изотермической поверхности T_L к фронту кристаллизации в результате «подсасывания» расплава из еще незатвердевшей части тела отливки. Этому, как ясно читателю, будет способствовать гидростатический напор расплава в незатвердевшей части отливки, а также избыточное давление, создаваемое при литье в автоклавах (предложение А. Г. Спасского, 1938 г.), при подпрессовке во время литья под давлением, при использовании прибылей под газовым давлением и в других случаях.

Впервые факт *фильтрации* расплава между растущими кристаллами зафиксировал А. И. Вейник в 1960 г. Он воспользовался простой схемой эксперимента (рис. 15) [4]. Тигель 1 имеет насадок 2, закрываемый пробкой. Тигель с расплавом термостатировали в печи сопротивления при любой заданной T_2 внутри интервала $T_L - T_S$ с точностью $\pm 2\text{K}$ с помощью автоматического регулятора типа ЭПД. Температуру T_2 контролировали нуль-гальванометром ППТВ-1. Для изучения выбраны два сплава: Zn с 1% Al и Pb с 15% Sn,

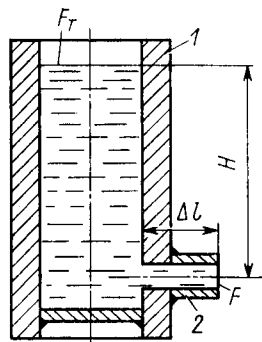


Рис. 15. Схема эксперимента для изучения фильтрации расплава в двухфазной зоне затвердевающей отливки

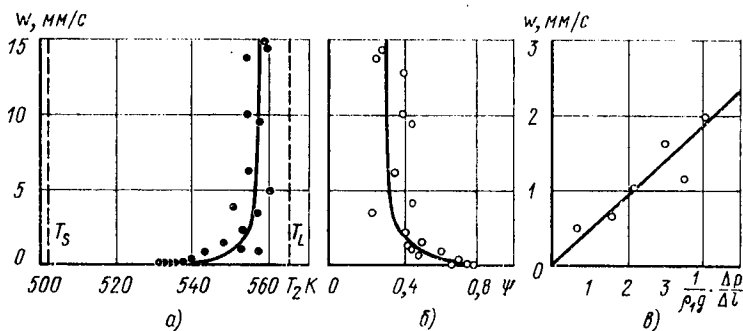


Рис. 16. Зависимости скорости фильтрации расплава в затвердевающем сплаве Pb с 15% Sn: а — от температуры T_2 внутри интервала кристаллизации; б — от относительного количества ψ твердой фазы; в — от потери напора в насадке (см. рис. 15)

Эксперимент осуществляли так: при заданной T_2 расплав выдерживали ~ 40 мин, затем открывали пробку и собирали расплав, вытекающий из насадки в течение времени $t = 5 \div 10$ с; затем измеряли массу G_1 вытекшего расплава и рассчитывали скорость фильтрации

$$w = \frac{G_1}{\rho_1 F t},$$

где F — площадь сечения насадки (рис. 15).

На рис. 16, а и б приведены полученные А. И. Вейником кривые скорости w течения расплава из насадки в зависимости от температуры T_2 внутри $T_L - T_S$ и количества твердой фазы ψ (T_2), рассчитанной по диаграмме состояния Pb — Sn для сплава Pb с 15% Sn с помощью «правила рычага». Из рис. 16, б ясно, что вначале, когда твердой фазы мало и она разбита, скорость течения очень большая, затем, с увеличением ψ , она резко падает и, начиная с $\psi = 0,4$, плавно стремится к нулю до $\psi \approx 0,8$. Повидимому, в интервале $0,4 \leq \psi \leq 0,8$ следует ожидать *фильтрацию* расплава между дендритными кристаллами.

Для математического описания фильтрации выберем закон Дарси ламинарного течения расплава через пористую среду:

$$w = - \frac{1}{\eta} k \text{ grad } p, \quad (28)$$

где k — коэффициент проницаемости пористой среды; η — коэффициент динамической вязкости жидкости, $\eta = \nu \rho$.

Напомним, что закон Дарси справедлив при $k = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$.

Согласно исследованиям М. Д. Миллионщикова, фильтрация через пористую среду является *ламинарной*, если

$$\text{Re}_\phi = 1,5,$$

где $Re_{\phi} \equiv \omega d_{\phi}/\nu$; d_{ϕ} — эффективный диаметр порового канала в пористой среде.

Для экспериментальной проверки применимости закона Дарси при описании фильтрации расплава между кристаллами в двухфазной зоне, его удобно представить в виде

$$\omega = \frac{1}{\eta} k \frac{\Delta p}{\Delta l},$$

где, как следует из схемы на рис. 15,

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{\rho_1 g H}{\Delta l + HF/F_T};$$

$\frac{1}{\rho_1 g} \frac{\Delta p}{\Delta l}$ — потеря напора при течении расплава вдоль насадка с пористой средой.

На рис. 16, в приведена зависимость ω от $\frac{\Delta p}{\Delta l}$ для двух исследованных сплавов при T_2 , равной 549 и 683 К соответственно. Очевидно, что для течения расплава между кристаллами при $0,4 \leq \Psi < 1$, в первом приближении, можно принять закон Дарси, несмотря на то, что коэффициент k проницаемости двухфазной зоны — величина переменная, уменьшающаяся по направлению к фронту кристаллизации. По данным М. Флемингса,

$$k = \gamma (1 - \Psi)^2; \Psi_b \leq \Psi \leq \Psi_n, \quad (29)$$

где γ — постоянная, зависящая от дисперсности дендритов и их размеров; Ψ_b и Ψ_n — относительное количество твердой фазы начала и конца фильтрации расплава в двухфазной зоне; согласно данным на рис. 16, в, $\Psi_b \approx 0,4$ и $\Psi_n \approx 0,8$.

Для полного описания течения расплава в двухфазной зоне к уравнению (28) необходимо добавить уравнение неразрывности. В прилож. II.1 оно приведено для жидкости с постоянной плотностью. Для фильтрационного потока уравнение неразрывности следует записать так:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \text{div} (\rho_1 \omega) = 0,$$

если, конечно, кристаллы в двухфазной зоне при $\Psi > \Psi_0$ остаются неподвижными.

Принимая во внимание (25) и (26), а также то, что $\rho_1 \equiv \text{const}$ и $\rho_2 \equiv \text{const}$,

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = - \text{div} \omega \quad (30)$$

или, с учетом (27),

$$\varepsilon_V \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \text{div} \omega. \quad (31)$$

Уравнение (30), найденное здесь впервые, четко определяет связь между объемной усадкой и фильтрацией расплава в двухфазной зоне.

19. УСЛОВИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ПОРИСТОСТИ В ТЕЛЕ ОТЛИВКИ ПО В. А. ЖУРАВЛЕВУ И М. К. ФЛЕМИНГСУ

В 1975 г. В. А. Журавлев предложил довольно простой и правдоподобный механизм образования усадочной пористости в отливке. О нем уже было упомянуто выше. Суть механизма заключается в следующем. В расплаве, перемещающемся между растущими кристаллами двухфазной зоны, возникают растягивающие напряжения. Если они достигнут *предела прочности* этого расплава, то в нем образуется разрыв, в месте которого вследствие прекращения фильтрации разовьется полость — *усадочная пора* (рис. 17).

Из кинетической теории жидкостей Я. И. Френкеля известно, что разрыв жидкости происходит при

$$p_{\text{п}} - p > 0, \quad (32)$$

где $p_{\text{п}}$ — давление насыщенного пара данной жидкости или упругость пара (см. прилож. IV); p — давление в этой жидкости, равное пределу ее прочности:

$$p = \sigma_p. \quad (33)$$

σ_p увеличивается со снижением температуры и ростом поверхностного натяжения [50].

Равенство (33) следует рассматривать как условие образования усадочной пористости в отливке. И так как, начиная с момента разрыва расплава, в этом месте должна прекратиться его фильтрация в двухфазной зоне, то закон Дарси, с учетом изложенного механизма образования усадочной пористости, требуется уточнить. По предложению В. А. Журавлева,

$$\text{grad } p = -\delta(p) \frac{1}{k} \eta w, \quad (34)$$

где

$$\delta(p) = \begin{cases} 1, & \text{при } p < \sigma_p, \\ 0, & \text{при } p \geq \sigma_p. \end{cases}$$

Совмещая уравнения (31) и (34), нетрудно установить, что условию (33) должно соответствовать вполне определенное количество твердой фазы $\Psi = \Psi_{\text{п}}$ в двухфазной зоне. Поэтому усадочная пористость в теле отливки

$$P = (1 - \Psi_{\text{п}}) \varepsilon_V. \quad (35)$$

К сожалению, имеющиеся сведения о σ_p весьма скудны. Согласно теоретическим оценкам, для металлических расплавов

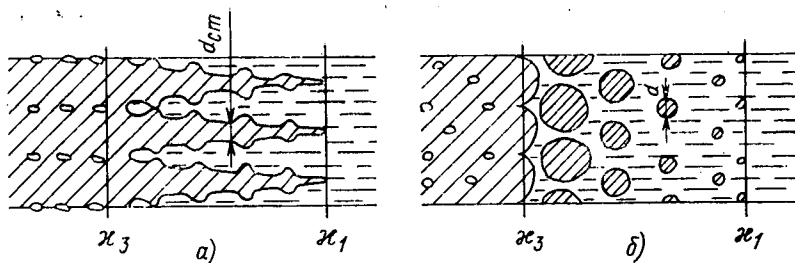


Рис. 17. Схемы строения двухфазной зоны фронт_а кристаллизации отливки:
 а — рост столбчатых кристаллов (танскристаллизация); б — рост свободных кристаллов

σ_p находится в пределах $5 \cdot 10^3$ — $5 \cdot 10^4$ кгс/см². Однако реальная прочность на несколько порядков меньше. Дело в том, что реальные расплавы литейных сплавов *всегда* содержат растворенные газы и пузырьки свободного газа. Кроме того, в них *всегда* имеются включения окислов и шлаков, на поверхности которых, как правило, адсорбированы пузырьки свободного газа. Наконец, в пределах двухфазной зоны у поверхности растущих в ней кристаллов также образуются газовые пузырьки из-за разной растворимости газов в твердой и жидкой фазах. Все эти газовые пузырьки являются готовыми «ядрами» или центрами разрыва расплава, и чем их больше, тем меньше его реальная пористость.

И последнее, уже известное нам соображение. Если разрыв расплава происходит по газовым пузырькам, то дальнейшее развитие полости вследствие объемной усадки понизит давление газа в этой полости и вызовет выделение растворенного в расплаве газа в эту полость. Следовательно, реально усадочная пористость является *газоусадочной*, ибо и причина ее образования и дальнейшее развитие связано с выделением из расплава растворенных газов (см. с. 23—25).

Таким образом, условие (32) требуется записать иначе:

$$p_r - p > 0, \quad (36)$$

где p_r — упругость насыщающих данный расплав газов.

Это условие предложено М. К. Флеминсом в 1974 г.

20. ПЕРЕНОС РАСТВОРЕННОГО КОМПОНЕНТА И ПРИМЕСЕЙ СПЛАВА В ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЕ

Читатель, конечно, помнит, что плотность диффузионного потока растворенного компонента в сплаве

$$q_D = -D \operatorname{grad}_n C. \quad (37)$$

Это — закон Фика (иногда его называют 1-м законом Фика).

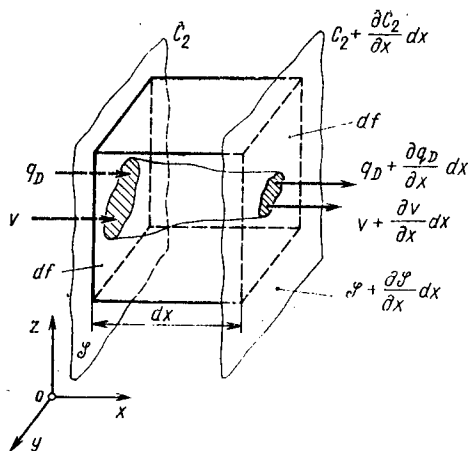


Рис. 18. Схема к выводу дифференциального уравнения (46) переноса растворимого в расплаве компонента сплава в пределах двухфазной зоны фронта кристаллизации отливки

Пространственно - временное изменение концентрации растворенного компонента в сплаве описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dC}{dt} = \text{div} (D \text{ grad } C), \quad (38)$$

аналогичным дифференциальному уравнению переноса теплоты в вещественной среде (см. с. 39.1).

В формуле (37) и уравнении (38) D — коэффициент диффузии.

В прилож. V приведены значения D для ряда компонентов и примесей некоторых сплавов. Анализ этих данных позволяет заключить, что коэффициент диффузии D_3 компонентов в твердой фазе сплавов на основе, например, железа на порядок меньше, чем D_1 в расплаве. Вводя множитель подобного преобразования

$$K_{D_1} = \frac{D_1}{D_3}$$

нетрудно установить, что

$$K_{D_1} \gg 1. \quad (39)$$

Следовательно, возможно известное уже допущение: диффузионный перенос растворенного компонента в пределах двухфазной зоны фронта кристаллизации отливки происходит только в расплаве.

Однако для описания процесса переноса компонента, растворенного в расплаве двухфазной зоны, мы не сможем воспользоваться дифференциальным уравнением (38), так как количество расплава в пределах зоны изменяется от 1 у границы x_1 зоны до 0 у границы x_3 фронта (см. рис. 14).

Условимся: $\mathcal{S}$ — относительное количество расплава в двухфазной зоне. Очевидно, что

$$\mathcal{S} = 1 - \Psi, \quad (40)$$

где $\Psi = \Psi(x, t)$, определяемая, например, уравнением А. Н. Колмогорова.

Вырежем мысленно элементарный прямоугольный параллелепипед из среды двухфазной зоны (рис. 18). Пусть у его левой грани относительное количество расплава равно $\mathcal{S}$; у правой

границы, отстоящей от левой на dx , оно равно $\mathcal{S} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} dx$. Представим себе, что расплав в результате усадки при его затвердевании перемещается в направлении x по некоторому каналу, в общем случае, произвольной конфигурации с переменным сечением, площадь которого у левой грани $\mathcal{S} df$ и у правой $\mathcal{S} df + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} dx df$, где df — площадь каждой грани параллелепипеда. Пусть на левой грани заданы средняя по сечению канала концентрация C_2 растворенного компонента или примеси, плотность диффузионного потока q_D и средняя по сечению канала скорость v_1 течения расплава. Пусть, далее, на правой грани перечисленные параметры соответственно получили приращение: $dC_2 = \frac{\partial C_2}{\partial x} dx$, $dq_D = \frac{\partial q_D}{\partial x} dx$ и $dv = \frac{\partial v_1}{\partial x} dx$.

Тогда изменение диффузионного потока растворенного компонента в расплаве за время dt равно

$$q_D \mathcal{S} df - \left(q_D + \frac{\partial q_D}{\partial x} dx \right) \left(\mathcal{S} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} dx \right) df = - \frac{\partial}{\partial x} (q_D \mathcal{S}) dx df$$

или

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \mathcal{S} \frac{\partial C_2}{\partial x} \right) dx df,$$

так как, согласно (37), $q_D = -D_1 \frac{\partial C_2}{\partial x}$.

Изменение конвективного потока растворенного компонента в расплаве за то же время равно

$$v_1 C_2 \mathcal{S} df - \left(v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x} dx \right) \left(C_2 + \frac{\partial C_2}{\partial x} dx \right) \left(\mathcal{S} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} dx \right)$$

или

$$- \frac{\partial}{\partial x} (v_1 C_2 \mathcal{S}) dx df.$$

Суммарное изменение диффузионного и конвективного потоков

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \mathcal{S} \frac{\partial C_2}{\partial x} - v_1 C_2 \mathcal{S} \right) dx df \quad (41)$$

должно вызвать изменение концентрации растворенного компонента в объеме $dx df$ рассматриваемого элементарного параллелепипеда:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{S} C_2 + k_0 (1 + \epsilon_v) \Psi C_2] dx df,$$

где k_0 — равновесный коэффициент распределения (см. в прилож. I).

Напомним, что k_0 является отношением концентрации компонента в твердой и жидкой фазах сплава. Так как в приведен-

ных выше выражениях C_2 — объемная концентрация расплава в двухфазной зоне, то по предложению И. Л. Воробьева объемную концентрацию C_3 в твердой фазе этой зоны необходимо определять как $C_3 = k_0 (1 + \epsilon_V) C_2$. Напомним также что мы, в соответствии с (38), считаем концентрацию C_3 в твердой фазе неизменной во времени. Следовательно, изменение концентрации растворенного компонента во всем объеме $dxdf$ рассматриваемого параллелепипеда с учетом (40) равно

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{S} C_2) - k_0 (1 + \epsilon_V) C_2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right] dxdf. \quad (42)$$

Очевидно, что выражения (41) и (42) равны друг другу. При $D_1 \equiv \text{const}$ получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{S} C_2) - k_0 (1 + \epsilon_V) C_2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{S} \frac{\partial C_2}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (C_2 v_1 \mathcal{S}). \quad (43)$$

Следовательно, для трехмерного потока

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \frac{dC_2}{dt} &= \text{div } D_1 (\mathcal{S} \text{ grad } C_2) - C_2 \text{div } (v_1 \mathcal{S}) - \\ &- [1 - k_0 (1 + \epsilon_V)] C_2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (44)$$

Сравнивая дифференциальные уравнения (38) и (44), легко заметить, что с (38) совпадает левая часть (44) и первый член правой части, если $\frac{dC_2}{dt}$ и $\text{grad } C_2$ умножить на относительное количество расплава $\mathcal{S}$ в данной точке двухфазной зоны. Если $\mathcal{S} = 1$ и $v_1 = 0$, то оба уравнения превращаются в *дифференциальное уравнение диффузии Фика*:

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = D_1 \text{div } (\text{grad } C_2), \quad (45)$$

которое иногда называют *2-м законом Фика*¹.

Выше установлено, что движение расплава в пределах двухфазной зоны целесообразно рассматривать, как его фильтрацию сквозь твердую фазу в этой зоне. Согласно закону Дарси, скорость

¹ Здесь читатель может поставить вопрос о точности принятого нами для двухфазной зоны уравнения теплопроводности (7), так как оно не учитывает движение расплава в двухфазной зоне. Действительно, более точно это уравнение следует записать так:

$$\begin{aligned} (c_1 \rho_1 \mathcal{S} + c_3 \rho_3 \Psi) \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \mathcal{S} \frac{\partial T_2}{\partial x} + \lambda_3 \Psi \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) - \\ &- c_1 \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (v \mathcal{S} T_2) + [L_2 \rho_3 + c_1 (\rho_3 - \rho_1) T_2] \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Но так как (см. с. 154.1) $K \lambda_1 \approx K c_1 \approx K \rho_1 \approx 1$ и скорость течения мала по сравнению со скоростью теплового потока, то получается уравнение (7).

фильтрации $w = v_1 \mathcal{S}$. Поэтому для одномерного потока уравнение (43) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S} \frac{\partial C_2}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{S} \frac{\partial C_2}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (w C_2) - \\ &- [1 - k_0 (1 + \varepsilon_V)] C_2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}; \quad \kappa_1 < x < \kappa_3 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

или, учитывая (40),

$$\left. \begin{aligned} (1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} (w C_2) + \\ &+ [1 - k_0 (1 + \varepsilon_V)] C_2 \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \quad \kappa_1 < x < \kappa_3. \end{aligned} \right\}$$

Это уравнение справедливо при $D_1 \equiv \text{const}$ и $D_3 \equiv 0$, если неоднородность концентрации C_2 в расплаве по сечению фильтрационного потока несущественна, т. е. диффузия в расплаве по направлениям y и z протекает полностью.

На границе двухфазной зоны с фронтом кристаллизации отливки (см. рис. 14) должно реализоваться очевидное равенство (продумать!):

$$-D_1 \frac{\partial C_2(\kappa_3, t)}{\partial x} = (1 - k_0) (1 + \varepsilon_V) C_2(\kappa_3, t) U. \quad (47)$$

Назовем это равенство *уравнением обмена растворенным компонентом* между фронтом кристаллизации и его двухфазной зоной.

21. ДЕФОРМАЦИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЫ ПРИ ЗАТРУДНЕНИИ СВОБОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ УСАДКИ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ ОТЛИВКИ

Возникновение напряжений и деформаций в двухфазной зоне фронта кристаллизации и в затвердевшей части отливки — явление вынужденное. Оно обусловлено *затруднением* свободной усадки отливки: *механическим* — в результате торможения линейной усадки отливки формой или стержнями, и *термическим* — вследствие неоднородности температурного поля в отливке во время и после ее затвердевания.

Читатель, конечно, знает, что напряжения 1-го рода и соответствующие им деформации могут вызвать появление дефектов: дислокаций, двойников, блочных границ в кристаллах, а также горячих трещин и остаточных напряжений в теле отливки.

Учитывая задачи теории формирования отливки, в этой теории целесообразно рассматривать только образование горячих трещин и остаточных напряжений.

Однако, согласно существующим представлениям, горячие трещины возникают в результате торможения свободной линейной усадки затвердевающей отливки формой или стержнями. Поэтому

в теории формирования макроскопического строения тела отливки следует рассмотреть лишь образование горячих трещин, так как они появляются чаще всего во время затвердевания и, следовательно, могут сопутствовать процессам, происходящим в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки.

Остаточные напряжения образуются вследствие термического торможения линейной усадки элементами затвердевшей фасонной отливки, охлаждающимися с разными скоростями. Поэтому возникновение остаточных напряжений и последствия их релаксации (коробление, холодные трещины и т. п.) целесообразно, вопреки установившейся традиции (см. с. 19.1), рассматривать в четвертом разделе теории литейных процессов — в термической обработке отливки (см. с. 13.1). В противном случае нам кажется невозможным установить необходимость, вид и оптимальные режимы термической обработки для стабилизации размеров каждой отливки. Конечно, при таком анализе необходимо учитывать процесс формирования строения и свойств отливки, так как он определяет уровень остаточных напряжений, а также модуль упругости и предел текучести ее материала.

К сожалению, до сих пор не дано математического описания процесса образования горячих трещин в отливках. Наиболее популярные теории Н. Н. Прохорова (1952 г.) и И. И. Новикова (1963 г.) касаются лишь оценок *горячеломкости* сплавов. Эти оценки основаны на сравнении деформации $\epsilon_y(T)$ растяжения затвердевающей отливки при полном торможении ее линейной усадки с деформационной способностью $\epsilon_0(T)$ сплава внутри его эффективного интервала кристаллизации (ЭИК); по А. А. Бочвару:

$$\text{ЭИК} = T_y - T_s,$$

где T_y — температура начала развития линейной усадки затвердевающей отливки.

Согласно указанным теориям, трещины в отливках не образуются, если

$$\epsilon_0 > \epsilon_y; \quad (48)$$

при этом и в теории Н. Н. Прохорова, и в теории И. И. Новикова ϵ_0 — предельная относительная *пластическая* деформация двухфазной зоны отливки.

По Н. Н. Прохорову, $\epsilon_0 = \epsilon_0(T_s)$ и $\epsilon_y = \epsilon_y(T_s)$, т. е. обе величины измеряют у нижней границы ЭИК.

По И. И. Новикову,

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\text{ЭИК}} \int_{T_s}^{T_L} \epsilon_0(T) dT \quad \text{и} \quad \epsilon_y = \frac{1}{\text{ЭИК}} \int_{T_s}^{T_L} \epsilon_y(T) dT,$$

т. е. обе величины вычисляют как средние интегральные в ЭИК.

Однако для подавляющего большинства литейных сплавов условие (48) соблюдается, и в то же время многие фасонные отливки из этих сплавов бывают поражены горячими трещинами даже при литье в песчаные, т. е. податливые, формы.

Л. П. Каширцев (1977 г.), учитывая такую ситуацию, предложил следующие условия соответственно возникновения и отсутствия горячих трещин в отливках:

$$m\varepsilon_y = \begin{cases} \varepsilon_0^*, & \text{если } m \geq \sigma_0^*/\sigma_y, \\ \varepsilon < \varepsilon_0^*, & \text{если } m < \sigma_0^*/\sigma_y, \end{cases} \quad (49)$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Psi)$ — полная предельная деформация сплава в ЭИК; $\sigma_y = \sigma_y(\Psi)$ — напряжение растяжения, возникающее в отливке вследствие торможения ее усадки $\varepsilon_y(\Psi)$ формой или стержнями; $\sigma_0 = \sigma_0(\Psi)$ — предел прочности сплава в ЭИК; индекс * относит свойства сплава σ_0 и ε_0 к «горячему», затвердевающему в последнюю очередь месту отливки, в котором локализуется его деформация ε ; m — степень локализации деформации, определяемая конструкцией отливки и литейной формы.

Подробно теории А. А. Бочвара, Н. Н. Прохорова и И. И. Новикова, а также теория Л. П. Каширцева изложены в разделе IV.

Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ МАКРОСТРОЕНИЯ ТЕЛА ОТЛИВКИ

Математическое описание процессов в двухфазной зоне кристаллизации отливки задумано и изложено в гл. 4 как основа математической модели формирования макростроения тела отливки. Однако, учитывая исключительную сложность этого процесса, вряд ли можно рассчитывать на достаточность такой модели. С уверенностью можно утверждать, что система характеристик, уравнений и условий, выявленная в гл. 2—4, содержит лишь *схему* (эскиз) теории формирования макростроения тела отливки.

22. АНАЛИЗ ДОПУЩЕНИЙ

Уместно начать этот параграф словами Н. Бора: «Сейчас точность определяется не количеством математических формул на одной странице, а степенью строгости определения тех элементарных структур и явлений, которые характеризуют данную область исследования».

Несмотря на обилие формул и подробные выкладки в предыдущих параграфах, математическое описание процессов в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки во многом неполно и нестрогое.

Прежде всего, мы приняли, что рассматриваемый литейный сплав является двухкомпонентным (бинарным) твердым раствором и в интервале его кристаллизации коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c_1, c_2, c_3, \rho_1, \rho_3, D_1$ не зависят от температуры, а $D_3 = 0$. Далее, условились, что уравнение А. Н. Колмогорова допустимо использовать для описания кинетики кристаллизации сплавов при дендритном росте кристаллов в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки. Условились также, что уравнение Дарси допустимо использовать для описания процесса фильтрации расплава в двухфазной зоне, т. е. в пористой среде с переменным коэффициентом ее проницаемости $k(\Psi)$. И в то же время, пока не можем сделать правдоподобных прогнозов в отношении очень важных функций $n(\Delta T)$, $v(\Delta T)$ и $k(\Psi)$, определяющих кристаллическое строение отливки, развитие в нем химической неоднородности и газоусадочной пористости.

Кроме того, мы не учли поверхностные явления в капиллярах двухфазной зоны, которые при больших значениях Ψ , конечно, должны оказывать влияние на перемещение расплава в ней, и, следовательно, на развитие как ликвационных, так и газоусадочных дефектов в отливках.

Наконец, приняв, что кристаллы в двухфазной зоне кристаллизующейся отливки неподвижны.

Все перечисленное — существенные допущения, которые не позволяют утверждать, что на основе математического описания, приведенного в гл. 4, возможно сформулировать математическую модель формирования макростроения тела отливки как модель процесса в целом. С учетом этих допущений возможно говорить лишь о создании *общей математической схемы*, отражающей *основные*, по нашим представлениям, процессы, протекающие во время формирования макростроения отливки, его неоднородностей и дефектов.

Здесь нет ничего неожиданного. Мы уже неоднократно обращали внимание читателя на пока еще существующий недостаток знаний о всей совокупности взаимосвязанных и взаимообусловленных процессов, составляющих процесс формирования отливки. Например, мы, по сути дела, не сделали даже попытку отразить влияние термоконцентрационной конвекции расплава перед двухфазной зоной на процессы в этой зоне. Дело в том, что такая попытка потребовала бы рассмотреть напряженно-деформационное состояние затвердевающей отливки с учетом ее реальной конфигурации. Знание напряженно-деформированного состояния необходимо для того, чтобы оценить смываемую часть двухфазной зоны фронта кристаллизации фасонной отливки. Однако пока это невозможно, ибо механические свойства двухфазной зоны, т. е. сложной среды, состоящей из взаимодействующих между собою жидкой и твердой фаз, неизвестны, а реологические свойства известны лишь на макроуровне, т. е. без учета строения двухфазной зоны. Что же касается математического описания процес-

сов термоконцентрационной конвекции при кристаллизации фасонных отливок реальной конфигурации, то это — проблема чрезвычайной сложности: пока мы не умеем описать конфигурацию реальной фасонной машиностроительной отливки в виде, пригодном для математической модели, представленной дифференциальными уравнениями, которые приведены в предыдущей главе.

Таким образом, естественно, что из всей совокупности взаимосвязанных и взаимообусловленных процессов, составляющих процесс формирования отливки, выбрана та минимальная часть, для которой известны количественные феноменологические законы физики и от которой в основном зависит ход и конечный результат формирования только макростроения тела фасонной отливки, если эту отливку допустимо рассматривать как плоскую и представить бесконечной плитой (см. с. 147.1—149.1).

23. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА

Будем рассматривать тело плоской отливки, представив его бесконечной плитой, симметрично охлаждающейся в литейной форме (рис. 14).

Математическая схема для двухфазной зоны, т. е. для $\kappa_1(t) < x < \kappa_3(t)$ и $t > t_{\text{зал}}$ выражается следующей системой уравнений:

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + L_2 \rho_3 \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \quad (50)$$

$$(1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial x} \right] - \left(w \frac{\partial C_2}{\partial x} + C_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + [1 - k_0 (1 + \varepsilon_V)] C_2 \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \quad (51)$$

$$\varepsilon_V \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad (52)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \delta(p) \frac{1}{k} \eta_1 w; \quad \delta(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p > p_r, \\ 0, & \text{если } p \leq p_r; \end{cases} \quad (53)$$

$$\Psi = 1 - \exp \left\{ - \varphi \left[N_1 \left(\int_0^{\vartheta} v d\zeta \right)^3 + \int_0^{\vartheta} n \left(\int_0^{\vartheta'} v d\zeta \right)^3 d\vartheta' \right] \right\}; \quad (54)$$

$$n = n(\Delta T); v = v(\Delta T); k = k(\Psi); \vartheta = t - t_{\text{зал}}; \vartheta' = t' - t_{\text{зал}}, \quad (55)$$

где $\Delta T = T_l - T_2$ — переохлаждение расплава в двухфазной зоне относительно температуры T_l равновесного ликвидуса:

$$T_l = T_A - m_L C_2; \quad (56)$$

T_A — температура кристаллизации первого компонента A бинарного сплава; m_L — тангенс угла наклона линии ¹ ликвидуса сплава к оси абсцисс (см. рис. 23.1).

Взаимосвязь процессов, происходящих в двухфазной зоне, определяется условиями их взаимодействия на границах зоны.

На границе расплава в незатвердевшей части тела отливки с двухфазной зоной, т. е. при $x = \kappa_1(t)$ (см. рис. 14):

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial T_1(\kappa_1, t)}{\partial x} &= -\lambda_2 \frac{\partial T_2(\kappa_1, t)}{\partial x}; \\ T_1(\kappa_1, t) &= T_2(\kappa_1, t) = T_l(\kappa_1, t); \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 \frac{\partial C_1(\kappa_1, t)}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial C_2(\kappa_1, t)}{\partial x}; \\ C_1(\kappa_1, t) &= C_2(\kappa_1, t); \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$p(\kappa_1, t) = p_0 \equiv \text{const}; \quad (59)$$

$$\Psi(\kappa_1, t) = 0, \quad (60)$$

где p_0 — внешнее давление на расплав в незатвердевшей части отливки.

На фронте кристаллизации отливки, т. е. на границе $x = \kappa_3(t)$ двухфазной зоны с твердой коркой (см. рис. 14):

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_3 \frac{\partial T_3(\kappa_3, t)}{\partial x} &= -\lambda_2 \frac{\partial T_2(\kappa_3, t)}{\partial x} - \\ &- L_2 \rho_3 [1 - \Psi(\kappa_3, t)] \frac{d\kappa_3}{dt}; \\ T_2(\kappa_3, t) &= T_3(\kappa_3, t) = T(\kappa_3, t); \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$-D_1 \frac{\partial C_2(\kappa_3, t)}{\partial x} = -(1 - k_0)(1 + \varepsilon_V) C_2(\kappa_3, t) \frac{d\kappa_3}{dt}; \quad (62)$$

$$C_3(\kappa_3, t) = k_0(1 + \varepsilon_V) C_2(\kappa_3, t); \quad (63)$$

$$w(\kappa_3, t) = \varepsilon_V [1 - \Psi(\kappa_3, t)] \frac{d\kappa_3}{dt}. \quad (64)$$

Функции $T_1(x, t)$ и $T_3(x, t)$ в условиях (57) и (61) должны быть найдены в результате совместного решения системы (50)—(54) с уравнениями теплопроводности:

для расплава в незатвердевшей части отливки, т. е. для $0 < x < \kappa_1(t)$ и $t > t_{\text{зал}}$

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \quad (65)$$

¹ Предполагается, что линия ликвидуса является прямой. В общем случае линию ликвидуса можно представить полиномом:

$$T_l = T_A + \gamma_1 C_2 + \gamma_2 C_2^2 + \gamma_3 C_2^3 + \dots$$

и для твердой корки, т. е. для $\kappa_3(t) < x < l_0$ и $t > t_{\text{зал}}$

$$c_3 \rho_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \quad (66)$$

при следующих условиях: *начальных*

$$T_1(x, t_{\text{зал}}) = T_{\text{зал}}; \quad C_1(x, t_{\text{зал}}) = C_0; \quad w(x, t_{\text{зал}}) = 0,$$

$$\kappa_1(t_{\text{зал}}) = \kappa_3(t_{\text{зал}}) = l_0; \quad \rho(x, t_{\text{зал}}) = \rho_0; \quad \Psi(x, t_{\text{зал}}) = 0$$

и *граничных*

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_i(t_0, t)}{\partial x} = q_0(t) \quad \text{или} \quad T_i(t_0, t) = T_0(t); \quad (67)$$

$$\frac{\partial T_i(0, t)}{\partial x} = 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad (68)$$

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (69)$$

Мы уже подчеркивали, что реально процесс формирования отливки сопровождается движением расплава в незатвердевшей части ее тела. К сожалению, в схему (50)—(69) математическое описание термоконцентрационной конвекции расплава пока нельзя включить по причинам, которые перечислили на с. 60. Конечно, можно условиться, что расплав не смывает часть двухфазной зоны (например, потому, что она имеет строение, представленное схемой на рис. 17, а). Тогда вместо уравнения (65) допустимо использовать уравнение Фурье — Кирхгоффа (см. с. 39.1), дополнив его уравнением диффузии (38) и системой уравнений гидродинамики (см. прилож. II.1). Однако главная трудность математического описания термоконцентрационной конвекции расплава, затвердевающего в литейной форме фасонной отливки, остается: мы не умеем математически описать конфигурацию фасонной отливки.

Именно по этой причине схема (50)—(69) составлена для случаев, когда фасонную отливку в тепловом смысле можно рассматривать как плоскую (см. с. 147.1—149.1) и представить ее для исследования процесса формирования в виде бесконечной плиты (см. с. 61).

В этой связи, ограничиваясь для незатвердевшей части отливки уравнением (65), влияние движения расплава на процесс формирования учтено приближенно в величине λ_1 (см. с. 109.1—111.1). Что же касается концентрационной неоднородности расплава, то из-за конвекции она не существенна, т. е. примем $C_1(x, t) \approx C_2(\kappa_1, t)$ для $0 < x < \kappa_1(t)$.

Теперь представим систему уравнений и условий (50)—(69) в обобщенных переменных.

Система уравнений:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} = K_{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial X^2}; \quad 0 < X < \chi_1(\tau); \quad \tau > Fo_0; \quad (70)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = K_{a_2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial X^2} + \mathcal{L}_2 \frac{1}{K_{c_2} K_{\rho_2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}; \quad \chi_1(\tau) < X < \chi_3(\tau); \quad \tau > Fo_0 \quad (71)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 - \Psi) \frac{\partial c_2}{\partial \tau} &= K_{a_1} Pr_D \frac{\partial}{\partial X} \left[(1 - \Psi) \frac{\partial c_2}{\partial X} \right] - \\ &- K_{a_2} \left(W \frac{\partial c_2}{\partial X} + c_2 \frac{\partial W}{\partial X} \right) + [1 - k_0(1 + \varepsilon_V)] c_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}; \\ \varepsilon_V \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} &= - K_{a_2} \frac{\partial W}{\partial X}; \\ \frac{\partial P}{\partial X} &= - \delta(P) W; \quad \delta(P) = \begin{cases} 1, & \text{если } P > P_r, \\ 0, & \text{если } P \leq P_r; \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

$$\Psi = \Psi(\Delta\Theta) \quad (73)$$

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial X^2}; \quad \chi_3(\tau) < X < 1; \quad \tau > Fo_0, \quad (74)$$

где $\Delta\Theta = \Theta_l - \Theta_2$ — относительное переохлаждение расплава в двухфазной зоне,

$$\Delta\Theta \equiv \Theta_A - \Theta_2 - M_L c_2; \quad (75)$$

M_L — относительная разность температуры T_A кристаллизации первого компонента сплава и температуры T_L его ликвидуса,

$$M_L \equiv \frac{m_L C_0}{T_L - T_c};$$

W — относительная скорость фильтрационного потока,

$$W \equiv \frac{w l_0}{a_2};$$

этот комплекс аналогичен числу Пекле и является мерой отношения молекулярного и фильтрационного переноса теплоты в двухфазной зоне; очевидно, что выражение

$$W_D \equiv W \frac{K_{a_2}}{Pr_D K_{a_1}}$$

характеризует отношение молекулярного и фильтрационного переноса в двухфазной зоне второго компонента сплава, если

$$Pr_D \equiv \frac{D_1}{a_1}$$

является мерой подобия температурного и концентрационного полей в расплаве двухфазной зоны, т. е. P_{rD} — «диффузионный» критерий Прандтля;

$$P \equiv \frac{p - p_0}{\eta_1 a_2} k l_0,$$

т. е. P — относительное давление в расплаве, фильтрующемся в двухфазной зоне фронта кристаллизации; $k = k(\Psi)$.

Начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1(X, Fo_0) = \Theta_{3ал}; \quad C_1(X, Fo_0) = 1; \quad W(X, Fo_0) = 0; \\ \chi_1(Fo_0) = \chi_3(Fo_0) = 1; \quad P(X, Fo_0) = 0; \quad \Psi(X, Fo_0) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Граничные условия

$$\left. \begin{aligned} -K_{\lambda_i} \frac{\partial \Theta_i(1, \tau)}{\partial X} &= q_0(\tau) \quad \text{или} \quad \Theta_i(1, \tau) = \Theta_0(\tau); \\ \frac{\partial \Theta_i(0, \tau)}{\partial X} &= 0; \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{\partial W}{\partial X} &= 0; \quad \frac{\partial P}{\partial X} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Условия на границах двухфазной зоны:

$$\left. \begin{aligned} -K_{\lambda_1} \frac{\partial \Theta_1(\chi_1, \tau)}{\partial X} &= -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_1, \tau)}{\partial X}; \\ \Theta_1(\chi_1, \tau) &= \Theta_2(\chi_1, \tau) = \Theta_l(\chi_1, \tau); \\ \chi_1 \frac{\partial C_1(\chi_1, \tau)}{\partial \tau} &= P_{rD} K_{a_1} \frac{\partial C_2(\chi_1, \tau)}{\partial X}; \\ C_1(\chi_1, \tau) &= C_2(\chi_1, \tau); \\ P(\chi_1, \tau) &= 0; \quad \Psi(\chi_1, \tau) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \Theta_3(\chi_3, \tau)}{\partial X} &= -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_3, \tau)}{\partial X} - \mathcal{L}_2[1 - \Psi(\chi_3, \tau)] \frac{d\chi_3}{d\tau}; \\ \Theta_2(\chi_3, \tau) &= \Theta_3(\chi_3, \tau) = \Theta(\chi_3, \tau); \\ P_{rD} K_{a_1} \frac{\partial C_2(\chi_3, \tau)}{\partial X} &= \\ &= -(1 - k_0)(1 + \varepsilon_V) C_2(\chi_3, \tau) \frac{d\chi_3}{d\tau}; \\ C_3(\chi_3, \tau) &= k_0(1 + \varepsilon_V) C_2(\chi_3, \tau); \\ K_{a_2} W(\chi_3, \tau) &= \varepsilon_V [1 - \Psi(\chi_3, \tau)] \frac{d\chi_3}{d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Остальные относительные переменные Θ , X , τ , χ , q , C , коэффициенты подобного преобразования K_{λ} , K_c , K_p и K_a , а также критерии Fo_0 и $\mathcal{L}_2$ читателю известны из части I учебного пособия.

24. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЧАСТНЫХ ТЕОРИЙ

Система уравнений и условий (70)—(79) содержит теорию формирования макростроения отливки, разработанную на четырех уровнях: тепловом, теплокинетическом, диффузионном и гидродинамическом (фильтрационном). Это означает, что она охватывает большинство частных теорий формирования отливки, о которых шла речь в п. 2, уточняя и, порою, исправляя их.

Затвердевание отливки. Модель А. И. Вейника

Математическая схема (70)—(79) содержит *математическую модель затвердевания отливки* как *основу* любой частной теории формирования. Эта модель, разумеется, известна читателю из части I учебного пособия, ибо с ее помощью построена вся система изложенных там инженерных расчетов режимов затвердевания отливки.

Математическая модель затвердевания отливки в литейной форме предложена А. И. Вейником. Ее основой являются формулировки известных читателю задач Лямэ и Клапейрона (1831 г.), Стефана (1889 г.) и Шварца (1931 г.). А. И. Вейник главное внимание уделил анализу условий теплового взаимодействия отливки с различными типами литейных форм. Из части I учебного пособия читатель знает, что А. И. Вейник разрабатывал свою модель по частям, применительно к затвердеванию металлов и сплавов с $T_L - T_s > 0$. Мы же сформулировали ее в общем виде. Условимся называть ее *моделью А. И. Вейника*.

Если в схеме (70)—(79) принять, что $\epsilon_V = 0$, диффузия в расплаве и в твердой фазе протекает беспрепятственно, а число N_3 готовых затравок кристаллов настолько велико, что самопроизвольно центры кристаллизации не зарождаются, и, следовательно, рост кристаллов происходит при весьма малом переохлаждении¹, т. е. при

$$\Delta\Theta \ll 1, \quad (80)$$

то система (72) вместе с уравнением (73) заменяется одним уравнением из правила «рычага», т. е. из (13-11.1):

$$C_L = \frac{1}{1 - (1 - k_0)\Psi}, \quad (81)$$

где $C_L \equiv C_2$, так как при $\Delta\Theta = 0$ температура $\Theta_l = \Theta_s$. С учетом (75),

$$\Psi = \frac{1}{1 - k_0} \left\{ 1 - \left[\frac{k_0}{1 - k_0} \left(\frac{1 - \Theta_2}{1 - \Theta_s} \right) \right]^{-1} \right\} \quad (82)$$

¹ Согласно (54) можно сделать и другое предположение: $\Delta\Theta \ll 1$ при весьма высоких скоростях зарождения $n = n(\Delta T)$ и роста $v = v(\Delta T)$ кристаллов.

или в случае, когда ликвидус и солидус сплава нелинейны,

$$\Psi = \Psi(1 - \Theta_2) \quad (83)$$

является эмпирической функцией, построенной с помощью правила «рычага» по конкретной диаграмме состояния. При этом в случае, когда компоненты образуют эвтектику при $C_0 = C_E$ и C_B — предельное насыщение твердого раствора A в B (рис. 23.1, а),

$$\Psi = \begin{cases} \Psi(1 - \Theta_2), & \text{если } 0 < C_0 < C_E, \\ 0, & \text{если } C_0 = 0 \text{ и } C_0 = C_E. \end{cases} \quad (84)$$

Таким образом, для модели А. И. Вейника сохраняются уравнения (70) и (71), дополненные функцией (84), и уравнение (74) с соответствующими им краевыми условиями:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} = K_{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial X^2}; \quad 0 < X < \chi_1(\tau); \quad \tau > Fo_0;$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = K_{a_2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial X^2} + \mathcal{L}_2 \frac{1}{K_{c_2} K_{\rho_2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}; \quad \chi_1(\tau) < X < \chi_3(\tau); \quad \tau > Fo_0;$$

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial X^2}; \quad \chi_3(t) < X < 1; \quad \tau > Fo_0;$$

$$\Psi = \begin{cases} \Psi(1 - \Theta_2), & \text{если } 0 < C_0 < C_E, \\ 0, & \text{если } C_0 = 0 \text{ или } C_0 = C_E; \end{cases}$$

$$\Theta_1(X, Fo_0) = \Theta_{\text{зал}}; \quad \Psi(X, Fo_0) = 0; \quad \chi_1(Fo_0) = \chi_3(Fo_0) = 1;$$

$$K_{\lambda_i} = \frac{\partial \Theta_i(1, \tau)}{\partial X} = q_0(\tau) \quad \text{или} \quad \Theta_i(1, \tau) = \Theta_0(\tau);$$

$$\frac{\partial \Theta_i(0, \tau)}{\partial X} = 0; \quad i = 1, 2, 3;$$

$$-K_{\lambda_1} \frac{\partial \Theta_1(\chi_1, \tau)}{\partial X} = -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_1, \tau)}{\partial X};$$

$$\Theta_1(\chi_1, \tau) = \Theta_2(\chi_1, \tau) = 1;$$

$$-\frac{\partial \Theta_3(\chi_3, \tau)}{\partial X} = -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_3, \tau)}{\partial X} - \mathcal{L}_2 [1 - \Psi(\chi_3, \tau)] \frac{d\chi_3}{d\tau};$$

$$\Theta_2(\chi_2, \tau) = \Theta_3(\chi_3, \tau) = \begin{cases} \Theta_S, & \text{если } 0 \leq C_0 < C_B, \\ \Theta_E, & \text{если } C_B \leq C_0 \leq C_E; \end{cases}$$

$$\Psi(\chi_3, \tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < C_0 \leq C_B, \\ 1 - \Psi_E, & \text{если } C_B < C_0 < C_E, \\ 0, & \text{если } C_0 = 0 \text{ или } C_0 = C_E. \end{cases}$$

Читатель может убедиться, что эта модель с точностью до конкретного выражения для $q_0(\tau)$ совпадает с моделью (37-II.1) — (43-II.1), которой мы пользовались в части I учебного пособия для расчетов затвердевания отливки.

Формирование кристаллического строения отливки. Модель процесса

Если в модели А. И. Вейника для твердых растворов $\Psi = \Psi(1 - \Theta_2)$ заменить $\Psi = \Psi(\Delta\Theta)$ из уравнения А. Н. Колмогорова при $\Delta\Theta$ из (75) и в соответствии с этим изменить условия на границе $\chi_3(\tau)$ двухфазной зоны с фронтом кристаллизации, то получим:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} = K_{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial X^2}; \quad 0 < X < \chi_1(\tau); \quad \tau > F_{O_0};$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = K_{a_2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial X^2} + \mathcal{L}_2 \frac{1}{K_{c_2} K_{\rho_2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}; \quad \chi_1(\tau) < X < \chi_3(\tau); \quad \tau > F_{O_0};$$

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial X^2}; \quad \chi_3(\tau) < X < 1; \quad \tau > F_{O_0};$$

$$\Psi = 1 - \exp \left\{ -\varphi \left[N_1 \left(\int_0^\theta v(\Delta\Theta) d\xi \right)^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^\theta n(\Delta\Theta) \left(\int_{\theta'}^\theta v(\Delta\Theta) d\xi \right)^3 d\theta' \right] \right\};$$

$$n = n(\Delta\Theta); \quad v = v(\Delta\Theta); \quad \theta = \tau - F_{O_0}; \quad \theta' = \tau' - F_{O_0};$$

$$\Delta\Theta = \Theta_A - \Theta_2 - \frac{M_L}{1 - (1 - k_0)\Psi};$$

$$\Theta_1(X, F_{O_0}) = \Theta_{\text{зал}}; \quad \Psi(X, F_{O_0}) = 0; \quad \chi_1(F_{O_0}) = \chi_3(F_{O_0}) = 1;$$

$$-K_{\lambda_i} \frac{\partial \Theta_i(1, \tau)}{\partial X} = q_0(\tau) \quad \text{или} \quad \Theta_i(1, \tau) = \Theta_0(\tau);$$

$$\frac{\partial \Theta_i(0, \tau)}{\partial X} = 0; \quad i = 1, 2, 3;$$

$$-K_{\lambda_1} \frac{\partial \Theta_1(\chi_1, \tau)}{\partial X} = -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_1, \tau)}{\partial X}; \quad \Theta_1(\chi_1, \tau) = \Theta_2(\chi_1, \tau) = 1;$$

$$-\frac{\partial \Theta_3(\chi_3, \tau)}{\partial X} = -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_2, \tau)}{\partial X} - \mathcal{L}_2 [1 - \Psi(\chi_3, \tau)] v(\Delta\Theta(\chi_3, \tau));$$

$$\Theta_2(\chi_3, \tau) = \Theta_3(\chi_3, \tau) = \Theta(\chi_3, \tau);$$

$$\Delta\Theta(\chi_3, \tau) = \Theta_A - \Theta(\chi_3, \tau) - \frac{M_L}{1 - (1 - k_0)\Psi(\chi_3, \tau)}.$$

Эта модель является частным случаем схемы (70)—(79) и адекватно описывает процесс формирования кристаллического строения отливки при следующих технологически очевидных допущениях:

1° — *макроскопическое строение* определяется числом (размерами) кристаллов, формой их роста и их преимущественной ориентировкой в теле отливки и

2° — каждому типу кристаллического строения отливки соответствует свой, ему присущий *набор и степень развития неоднородности* этого строения, дефектов в виде ликвации растворимых компонентов и примесей сплава, газоусадочных пор, а также *склонность* отливки к образованию в ее теле горячих трещин.

В монографии [2] эта модель приведена для частного случая кристаллизации отливки из чистого металла, т. е. для $M_L = 0$. На основе сопоставления результатов расчетов с данными экспериментов и практики оказалось возможным распространить ее на слабые твердые растворы, близэвтектические сплавы и эвтектики. Здесь модель дана в общем виде.

Образование неоднородности химического состава отливки. Модели В. Т. Борисова и В. А. Журавлева

Образование химической неоднородности в теле отливки является наиболее трудным объектом теории формирования отливки. Известно несколько попыток рассмотреть этот процесс вне связи его с процессом затвердевания расплава в форме. Одновременно и затвердевание расплава, и перенос легирующего компонента в двухфазной зоне фронта кристаллизации учитывают модели В. Т. Борисова и В. А. Журавлева.

Модель В. Т. Борисова. Если в схеме (70)—(79) принять $\varepsilon_V = 0$, то уравнения фильтрации и неразрывности в системе (72) становятся ненужными, а уравнение переноса растворенного компонента в расплаве двухфазной зоны превращается в уравнение диффузии, аналогичное уравнению Фика (45). Если, как и в модели А. И. Вейника, принять $\Delta\Theta \ll 1$, то получается модель В. Т. Борисова:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} = K_{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial X^2}; \quad 0 < X < \chi_1(\tau); \quad \tau > Fo_0;$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = K_{a_2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial X^2} + \mathcal{L}_2 \frac{1}{K_{c_2} K_{p_2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}; \quad \chi_1(\tau) < X < \chi_3(\tau); \quad \tau > Fo_0;$$

$$(1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial \tau} = K_{a_1} P_{rD} \frac{\partial}{\partial X} \left[(1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial X} \right] + (1 - k_0) C_2 \frac{\partial \Psi}{\partial \tau};$$

$$\Theta_2 = \Theta_A - M_L C_2;$$

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial X^2}; \quad \chi_3(\tau) < X < 1; \quad \tau > Fo_0;$$

$$\begin{aligned}
& \Theta_1(X, F_{00}) = \Theta_{\text{ззл}}; \quad C_2(X, F_{00}) = 1; \\
& \chi_1(F_{00}) = \chi_3(F_{00}) = 1; \quad \Psi(X, F_{00}) = 0; \\
& -K_{\lambda_i} \frac{\partial \Theta_i(1, \tau)}{\partial X} = q_0(\tau) \text{ или } \Theta_i(1, \tau) = \Theta_0(\tau); \\
& \frac{\partial \Theta_i(0, \tau)}{\partial X} = 0; \quad i = 1, 2, 3; \\
& -K_{\lambda_1} \frac{\partial \Theta_1(\chi_1, \tau)}{\partial X} = -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_1, \tau)}{\partial X}; \\
& \Theta_1(\chi_1, \tau) = \Theta_2(\chi_1, \tau) = \Theta_A - M_L C_2(\chi_1, \tau); \\
& \frac{\partial \Theta_2(\chi_1, \tau)}{\partial X} = -M_L \frac{\partial C_2(\chi_1, \tau)}{\partial X}; \quad C_1(\chi_1, \tau) = C_2(\chi_1, \tau); \\
& -\frac{\partial \Theta_3(\chi_3, \tau)}{\partial X} = -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_3, \tau)}{\partial X} - \mathcal{E}_2 [1 - \Psi(\chi_3, \tau)] \frac{\partial \chi_3}{\partial \tau}; \\
& \Theta_3(\chi_3, \tau) = \Theta_2(\chi_3, \tau) = \Theta_A - M_L C_2(\chi_3, \tau); \\
& -K_{a_1} \text{Pr}_D \frac{\partial C_2(\chi_3, \tau)}{\partial X} = -(1 - k_0) C_2(\chi_3, \tau) \frac{d\chi_3}{d\tau}; \\
& C_3(\chi_3, \tau) = k_0 C_2(\chi_3, \tau).
\end{aligned}$$

Сравнивая эту модель с моделью А. И. Вейника, легко установить, что она может быть получена добавлением к модели А. И. Вейника уравнения молекулярной диффузии в расплаве двухфазной зоны и соответствующих ему краевых условий [18]. В этой связи модель В. Т. Борисова должна исходить из следующих допущений:

1° — между поверхностью растущих дендритов и расплавом в пределах двухфазной зоны устанавливается равновесный перепад $(1 - k_0) C_2(X, \tau)$ концентрации растворимого компонента; другими словами, температура расплава в пределах двухфазной зоны

$$\Theta_2 \approx \Theta_A - M_L C_2,$$

что равносильно $\Delta\Theta \ll 1$; именно это допущение В. Т. Борисова называют *концепцией квазиравновесной двухфазной зоны*;

2° — в этой связи, кристаллическое строение тела отливки может быть любым, но в любом случае оно — результат роста дендритов в двухфазной зоне фронта последовательной кристаллизации;

3° — перемещение расплава в двухфазной зоне не учитывается.

Модель В. А. Журавлева. Эта модель исходит из тех же допущений, что и модель В. Т. Борисова. Однако пункт 3° заменен другим: изменение плотности сплава при фазовом переходе вызывает фильтрацию расплава в двухфазной зоне в сторону фронта кристаллизации, которая происходит под действием внешнего давления в соответствии с законом Дарси.

Следовательно, модель В. А. Журавлева содержится в схеме (70)—(79). Если принять $\Delta\Theta \approx 0$, то с некоторыми уточнениями в системах (72) и (79) получается модель В. Т. Борисова, в которой учтен конвективный перенос легирующего компонента в результате фильтрации расплава в двухфазной зоне (ср. с [9]).

Наиболее сложным в этой модели является выбор коэффициента проницаемости k двухфазной зоны. Он входит в состав обобщенной переменной P (см. с. 65) и, согласно изложенному в п. 18, является функцией относительного количества твердой фазы в двухфазной зоне, которая должна рассматриваться как пористая среда. Это означает, что k должен зависеть от числа и величины дендритных кристаллов, растущих в двухфазной зоне, а также от того, как они растут (см. рис. 17). По-видимому, при одном и том же Ψ функция $k = k(\Psi)$ будет разной в случае транскристаллизации фронта (см. рис. 17, а) и в случае свободного роста кристаллов перед фронтом (см. рис. 17, б).

Модель А. И. Вейника для затвердевания отливки, а также модели В. Т. Борисова и В. А. Журавлева для образования неоднородности химического состава отливки, построенные исходя из представления о квазистационарности двухфазной зоны, игнорируют процессы зарождения и роста в ней кристаллов. Если в моделях А. И. Вейника и В. Т. Борисова — это допущение, то в модели В. А. Журавлева — это чрезвычайное затруднение, не позволяющее воспользоваться ею для количественного анализа процесса образования химической неоднородности отливки.

В. А. Журавлев предлагает

$$k = \frac{d_m^2}{8\Psi} (1 - \Psi)^3, \quad (85)$$

где d_m — размер микрзерна: т. е. расстояние между вторичными осями дендритов (см. с. 11).

Однако такое предложение заставляет сделать вывод, что двухфазная зона представляет собою оконечности столбчатых дендритов, растущих во время транскристаллизации отливки (рис. 17, а), поэтому необходимо знать правило назначения d_m для различных сплавов и условий их затвердевания (см. например, рис. 15.1, б). Более того, остается неясным, как изменится функция (85) в случае, если тот же сплав, для которого $d_m = d_m(U)$ будет найдена, подвергнуть модифицированию с целью подавления транскристаллизации и измельчения зерна; в этом случае двухфазная зона будет отвечать схеме на рис. 17, б.

Усадочная и газоусадочная пористость в теле отливки. Модели процесса

Известно несколько моделей процесса образования усадочной пористости в отливках. Наиболее популярны те, которые предназначены для определения протяженности части тела отливки,

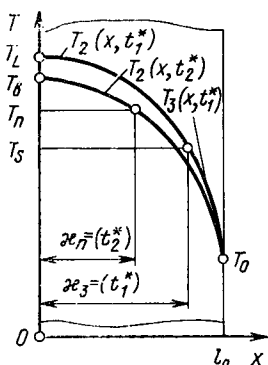


Рис. 19. Схема, иллюстрирующая начало образования осевой пористости для различных моделей процесса

где сосредотачивается *осевая пористость*, вызывающая, как известно, снижение и механических свойств, и герметичности литых деталей.

Эти модели построены исходя из того предположения, что осевая пористость развивается после соприкосновения двухфазных зон фронтов кристаллизации в центре тела отливки (рис. 19). Такое предположение обосновывается возникновением в центральной части тела условий, затрудняющих фильтрацию расплава и, следовательно, компенсацию объемной усадки во время дальнейшей кристаллизации отливки.

Модель И. Б. Куманина. Простейшая модель предложена И. Б. Куманиным в 1957 г. Она представляет собою модель затвердевания отливки, дополненную следующим условием (рис. 19):

$$\Theta_2(0, \tau) = 1; \Theta_2(\Lambda_n, \tau_1^*) = \Theta_S,$$

где Λ_n — протяженность центральной части тела отливки, где может образоваться усадочная пористость, $\Lambda_n = \chi_3(\tau_1^*)$.

Тогда, осевая пористость

$$P_0 = \gamma_1 \chi_3(\tau_1^*),$$

γ_1 — множитель пропорциональности в модели И. Б. Куманина.

Условия И. Б. Куманина, с учетом (83), преобразуются к виду

$$\chi_1(\tau_1^*) = 0; \Psi(0, \tau_1^*) = 0; \Psi(\Lambda_n, \tau_1^*) = 1.$$

Следовательно, если в системе (72) первое уравнение исключить, уравнение (73) заменить (82) или (83) и $\delta(P)$ в уравнении фильтрации принять равной нулю при $\chi_1(\tau_1^*) = 0$ (т. е. фильтрацию запретить в момент времени $\tau = \tau_1^*$), то уравнение неразрывности теряет смысл и остается модель затвердевания отливки для $\tau > \tau_1^*$, дополненная условием И. Б. Куманина.

Модель Куманина — Вейника. Читатель, конечно, понял, что $\Lambda_n = \chi_3(\tau_1^*)$ — оценка *наибольшей* протяженности центральной части тела отливки, где может образоваться осевая пористость. На самом деле, зона осевой пористости будет заметно уже. На это обратил внимание А. И. Вейник в 1964 г. и предложил усовершенствованную модель. Она, естественно, учитывает условия образования пористости:

$$\Psi(0, \tau_2^*) = \Psi_B; \Psi(\Lambda_n, \tau_2^*) = \Psi_n,$$

где Ψ_v и Ψ_n — относительное количество твердой фазы в двухфазной зоне, когда соответственно начинается и заканчивается фильтрация расплава к фронту кристаллизации (см. стр. 51).

Если следовать терминологии Б. Б. Гуляева, то Ψ_v определяет границу χ_v выливаемости, а Ψ_n — границу питания χ_n в двухфазной зоне фронта кристаллизации [6, с. 105]. Очевидно, что в момент времени τ_2^* условия питания в центральной части тела отливки существенно ухудшаются. Поэтому

$$\Lambda_n = \chi_n(\tau_2^*)$$

определяет протяженность области залегания осевой пористости.

Следовательно, осевая пористость

$$P_0 = \gamma_2 \Lambda_n;$$

γ_2 — множитель пропорциональности в модели Куманина — Вейника.

Заметим, что рассмотренная модель позволяет оценить и величину рассеянной пористости, ибо, согласно (35),

$$P = \varepsilon_v (1 - \Psi_n).$$

Модель Флемингса — Журавлева. В случаях, когда величины Ψ_v и Ψ_n определены экспериментально, для расчета $\chi_n(\tau_2^*)$ достаточно воспользоваться моделью затвердевания отливки (см. с. 66—67). Если же эти величины неизвестны, то необходимо воспользоваться более общей моделью кристаллизации отливки (см. с. 68), дополнив ее из системы (72) уравнениями фильтрации, неразрывности и соответствующими краевыми условиями:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = -\delta(P)W; \quad \delta(P) = \begin{cases} 1, & \text{если } P > P_r, \\ 0, & \text{если } P \leq P_r; \end{cases}$$

$$\varepsilon_v \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -K_{a_2} \frac{\partial W}{\partial X};$$

$$P(X, F_{00}) = 0; \quad \Psi(X, F_{00}) = 0; \quad W(X, F_{00}) = 0;$$

$$\frac{\partial W(0, \tau)}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial P(0, \tau)}{\partial X} = 0;$$

$$P(\chi_1, \tau) = 0; \quad \Psi(\chi_1, \tau) = 0; \quad W(\chi_3, \tau) = \varepsilon_v \frac{1}{K_{a_2}} [1 - \Psi(\chi_3, \tau)] \frac{d\chi_3}{d\tau}.$$

В этой модели использованы предложения М. К. Флемингса и В. А. Журавлева о толковании механизма образования пористости (см. с. 52—53). Условимся в дальнейшем называть ее *моделью Флемингса — Журавлева*.

Она позволяет оценить величину *рассеянной* Π и *осевой* Π_0 *пористости*, а также протяженность Λ_{Π} зоны тела отливки с осевой пористостью:

$$W(0, \tau_3^*) = \varepsilon_V \frac{1}{K_{a_2}} \int_{x_1}^{x_3} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} dX = 0; \quad P(\Lambda_{\Pi}, \tau_3^*) \leq P_r.$$

Тогда

$$\Lambda_{\Pi} = \chi_{\Pi}(\tau_3^*) \text{ и } \Pi_0 = \varepsilon_V [1 - \Psi(\chi_{\Pi}, \tau_3^*)],$$

где γ_3 — множитель пропорциональности в модели Флемингса — Журавлева.

Эта модель отражает ход кристаллизации (N_1, n, v) расплава и условия образования пористости (k, p, p_r). Поэтому с ее помощью можно оценить влияние газонасыщенности расплава, внешнего давления на него, модифицирования, воздействия микрохолодильников и, наконец, скорости затвердевания на величину Π и Λ_{Π} отливок не только из сплавов, кристаллизующихся в интервале температуры $T_L - T_S$, но и из эвтектик и чистых металлов.

Необходимо лишь найти способ определения k как функции от Ψ и числа N кристаллов, растущих в двухфазной зоне фронта кристаллизации. Для этого потребуются создать модель проницаемости двухфазной зоны как пористой среды, характеризуемой не только количеством, но и числом частиц твердой фазы.

25. ФРАГМЕНТАРНОСТЬ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ МАКРОСТРОЕНИЯ ОТЛИВКИ

Современная теория формирования отливки представляет собою *сумму* частных теорий.

Ряд частных теорий, касающихся *формирования отдельных сторон макроскопического строения отливки*, образования в нем макронеоднородностей и дефектов, представлен в п. 2. В п. 24 для них определены математические модели. Все они оказались частными случаями математической схемы (70)—(79).

Если теперь читатель возьмет на себя труд сопоставить найденные математические модели с теми, какими пользовались авторы соответствующих частных теорий, то он обнаружит различие между ними: наши модели полнее и точнее. Они полнее и точнее не столько в описании того или иного процесса, сколько в количественных оценках допущений и ограничений, при которых *корректна* каждая модель. Указанное различие — результат разного подхода к описанию процессов, протекающих в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки. Мы рассмотрели их *совокупность в целом*, авторы же исследовали, как правило, *каждый процесс независимо от других*.

В части I учебного пособия было отмечено, что реальный технологический процесс во всех аспектах его проявления редко удается изучить с необходимой полнотой на каком-то одном уровне.

Выше мы убедились, что реальный процесс формирования отливки *только* на тепловом уровне не удалось изучить с той полнотой, какая необходима для *управления формированием макростроения отливки* и предохранения ее от макродефектов. Потребовалось рассмотреть этот процесс на четырех уровнях одновременно. Помимо теплообмена затвердевающей отливки с формой учтены зарождение и рост кристаллов, массоперенос и усадка в двухфазной зоне фронта кристаллизации. Но в результате удалось получить лишь *математическую схему* процесса формирования макростроения отливки. Ее пока нельзя использовать для количественного исследования процесса в целом по причинам, изложенным в п. 22. Поэтому путь поиска необходимых способов и средств управления формированием макростроения отливки — изучение частных случаев, для которых математическую схему (70)—(79) удастся представить в виде математических моделей, пригодных для количественного исследования.

Здесь у читателя может сложиться впечатление, что речь идет о возврате к *сумме* частных теорий, т. е. к фрагментарности теории формирования. Читатель, конечно, прав, но теперь следует говорить уже не о сумме, а о *системе* частных теорий в виде *фрагментов* теории формирования, ибо предложен принципиально новый подход к построению таких теорий.

Дело в том, что математическая схема (70)—(79) содержит теорию формирования макростроения отливки в целом. Сама математическая схема подлежит дальнейшему уточнению. И это совершенно неизбежно. В дальнейшем будут внесены поправки и дополнения в предложенное описание хотя бы для устранения тех допущений и неопределенностей, о которых шла речь в п. 22. В математическую схему (70)—(79) потребуется внести описание неучтенных, в том числе и неизвестных сейчас процессов, протекающих в двухфазной зоне. Но на современном уровне мы сделали главное: в математической схеме (70)—(79) отражено то, что известно и, по нашему мнению, достоверно оказывает решающее влияние на формирование макростроения отливки. Это означает, что теперь выделение фрагментов теории формирования макростроения отливки и, следовательно, построение частных теорий — процедура, в которой субъективный подход к выбору объекта, к определению допущений и границ для каждой теории сведен до минимума. Более того, теперь объект, допущения и границы для каждой частной теории взаимосвязаны и взаимообусловлены в пределах математической схемы (70)—(79).

Таким образом, если сейчас пока невозможно построить *количественную* теорию формирования макростроения отливки в целом, то следует идти по пути выделения из нее частных количественных теорий с помощью математической схемы (70)—(79). При таком подходе образуется *система взаимосвязанных частных теорий*, полнота и практическая плодотворность которых обусловлена теми допущениями и ограничениями, какие были при-

няты при составлении математической схемы теории формирования макростроения отливки. Следовательно, такой подход неизбежно поставит вопросы о дальнейшем развитии теорий формирования, об уточнении и дополнении ее математической схемы.

Одну частную теорию как фрагмент теории формирования — *теорию затвердевания отливки*, сформулированную в математической модели А. И. Вейника, мы уже изучали в части I. Ее практическая плодотворность не вызывает сомнения, так как затвердевание в песчаных формах и в кокиле оказалось возможным изучить на примерах неограниченной плиты, неограниченного цилиндра и шара, а сложную фасонную отливку рассматривать как составленную из элементов в виде этих классических тел, в первом приближении, без учета их взаимного влияния (см. с. 214.1).

Вторую частную теорию, также в виде фрагмента, рассмотрим в следующем разделе. Это — *теория формирования кристаллического строения отливки*. Она сформулирована в математической модели, приведенной на с.68. Ее практическая плодотворность подтверждена исследованиями, в которых доказано, что для изучения способов управления процессом кристаллизации машиностроительных отливок их возможно представлять как бесконечные плиты [2].

К сожалению, остальные частные теории, сформулированные в математических моделях образования неоднородности химического состава (модель Борисова—Журавлева) и газоусадочной пористости (модель Куманина—Вейника) в фасонной отливке, для изучения способов уменьшения или устранения этих дефектов использовать нельзя. Этот вывод следует непосредственно из анализа допущений и ограничений, с учетом которых построена математическая схема (70)—(79) теории в целом (см. п. 22).

Напомним основное ограничение. Математические модели сформулированы для *неограниченной плиты*. Поэтому, например, модели образования пористости в том виде, в каком они получились у нас, и в том виде, в каком они предложены авторами (см. с. 7—8), пригодны для количественного изучения действия учетных в них факторов (интервал кристаллизации сплава, его усадки при затвердевании, газонасыщенность расплава, скорость затвердевания отливки и внешнее давление во время затвердевания) только при условии *идеального питания плоской отливки*.

Аналогичные модели можно записать для случая идеального питания неограниченного цилиндра. Однако из технологических дисциплин читатель знает, что величина пористости, ее расположение в теле отливок из одного и того же сплава при неизменных условиях литья (перегрев расплава при плавке, способ его выпечной обработки, температура заливки, скорость затвердевания) целиком определяются *конфигурацией* отливок, их положением в форме во время ее затвердевания, конфигурацией, размерами, числом и местом расположения прибылей и холодильников. Учесть все это в математических моделях образования пористости

пока невозможно. К сожалению, здесь нельзя поступить и так, как мы сделали в теории затвердевания отливки, т. е. реальную отливку нельзя рассмотреть состоящей из элементов в виде классических тел без учета их взаимодействия, ибо именно взаимодействие между ними является здесь определяющим¹.

В этой связи в разделе III рассмотрим проблему учета реальной конфигурации фасонной отливки в частных теориях образования неоднородности химического состава и пористости. Там мы используем метод системотехники, на основе которого А. С. Чеботареву, Ю. М. Чикунову и С. Н. Полякову удалось создать алгоритмы *автоматизированного проектирования* прибылей фасонных отливок из углеродистых сталей для заданного их качества.

В разделе IV рассмотрим проблему гарантированного предохранения отливок от возникновения в них горячих трещин. В результате мы построим самостоятельную, не входящую в указанную систему частную теорию трещиностойчивости отливки при торможении ее свободной линейной усадки. Эта частная теория не будет частным случаем математической схемы (70)—(79), так как процессы, вызывающие образование горячих трещин в отливках, не обуславливают формирование их макростроения, хотя характеристики макростроения оказывают заметное влияние на их трещиностойчивость.

В то же время наши знания о процессах образования горячих трещин в отливках еще не достигли того уровня, на котором было бы возможно включить описание этих процессов в математическую схему (70)—(79), расширив, конечно, ее границы за пределы процессов, обуславливающих *только* формирование макростроения тела отливки.

Эта ситуация неединичная. С нею мы столкнулись бы при анализе, например, пригара, остаточных напряжений и т. п. процессов. Но, имея в виду иной пример — математическую схему, содержащую теорию формирования макростроения отливки, можем выразить уверенность в возможности создания теории формирования отливки в целом. Потребуется, однако, целеустремленное изучение процессов формирования и разработка необходимых математических средств как для их описания, так и для их количественного исследования с учетом конфигурации конкретной фасонной отливки.

26. УПРАЖНЕНИЯ

В конце каждого раздела мы будем предлагать читателю задачи и упражнения.

В этом разделе предлагаем семь упражнений. Читатель, используя знания по физике и физической химии, должен уточнить и дополнить описание процессов, происходящих в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки.

¹ Все то же следует повторить и по отношению к математической модели образования неоднородности химического состава отливки. Кроме того, необходимо добавить, что в этой модели следует учесть еще и гидродинамические процессы, происходящие в затвердевающей отливке (см. с. 39—40).

1. Выполнить анализ процессов образования неоднородности химического состава в отливке, полученной способом односторонне направленной кристаллизации расплава в форме. Для анализа использовать схему процессов, протекающих в двухфазной зоне по материалам гл. 4.
2. Найти способ учета капиллярных сил при анализе фильтрации расплава в двухфазной зоне (см. п. 18).
3. В описании переноса растворимых легирующих элементов сплава в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки (п. 20) учесть диффузию в твердой фазе ($D_3 \neq 0$).
4. В том же описании учесть конвекцию в капиллярах двухфазной зоны по схеме И. Б. Куманина [37, с. 119—124]. Для изучения этого вопроса использовать книгу А. И. Вейника [23].
5. Построить математическую модель объемного затвердевания отливки с учетом условий (48) образования в ней горячих трещин.
6. Составить математическую схему формирования макростроения тела отливки из многокомпонентного сплава.
7. Составить математическую схему формирования макростроения тела отливки с учетом результатов, полученных при выполнении упражнений 2—4.

Раздел II | ФОРМИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАКРОСТРОЕНИЯ ОТЛИВКИ

Глава 6. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

Общая теория кристаллизации создана М. Фольмером на основании термодинамических работ И. Гиббса и получила дальнейшее развитие в трудах Я. И. Френкеля. Эта теория нашла подтверждение в работах В. И. Данилова и его последователей, а также в работах других советских и зарубежных ученых.

27. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Твердые металлы и сплавы имеют кристаллическое строение. Для кристаллов характерно наличие так называемого *дальнего порядка* в расположении атомов, т. е. в кристаллах существует строго определенное геометрически правильное расположение атомов, которое наблюдается на любом расстоянии от произвольно выбранного атома кристаллической решетки вплоть до границы кристаллов. При плавлении кристаллов дальний порядок нарушается и сохраняется так называемый *ближний порядок* в расположении атомов, т. е. в расплаве сохраняется некоторая упорядоченность в расположении атомов лишь вблизи произвольно выбранного атома; по мере удаления от данного атома степень упорядоченности быстро падает.

Характер упорядоченности атомов (в пределах ближнего порядка) в расплаве, не слишком перегретом над температурой плавления, у большинства веществ близок к упаковке атомов в кристаллической решетке. Поэтому переход кристаллического вещества из жидкого состояния в твердое заключается в установлении дальнего порядка в расположении атомов вещества.

Система, состоящая из большого числа атомов, молекул или ионов, стремится к такому состоянию, которому в данных условиях соответствует *минимальное значение свободной энергии* (при постоянном объеме системы) или *термодинамического потенциала* (при постоянном давлении). Такое состояние будет *стабильным* (устойчивым). Если вещество может существовать в жидком и твердом кристаллическом видах, то устойчивость в данных условиях жидкой или твердой фазы определяется *относительной ве-*

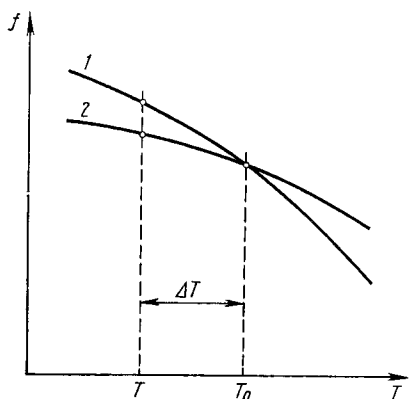


Рис. 20. Схема зависимости свободной энергии f жидкой (1) и твердой (2) фаз от температуры системы

личной свободной энергии или термодинамического потенциала обеих фаз.

На рис. 20 приведена зависимость свободной энергии f жидкой и твердой кристаллической фаз от температуры T . При температуре T_0 система фаз находится в *динамическом равновесии*, так как свободная энергия обеих фаз одинакова. С изменением температуры T относительно T_0 равновесие нарушается и начинается превращение, в результате которого система придет в стабильное состояние.

При любой температуре T , меньшей T_0 (температуру T_0 можно принять приблизительно равной температуре плавления вещества), расплав должен кристаллизироваться, так как устойчивой будет твердая кристаллическая фаза. Однако для начала кристаллизации в *переохлажденном* расплаве, т. е. охлажденном ниже T_0 данного металла или сплава, должны появиться *зародыши кристаллов* (*центры кристаллизации*). Если они не появятся, то переохлажденный расплав окажется в *метастабильном* состоянии, т. е. в относительно устойчивом состоянии, которое не соответствует минимальной для данных условий свободной энергии системы.

28. ЗАРОЖДЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ

Центры кристаллизации (зародыши кристаллов) могут возникать в переохлажденном расплаве вследствие наличия в нем фазовых (или гетерофазных) флуктуаций.

Фазовые флуктуации — процесс, в результате которого в расплаве периодически образуются участки с таким же расположением атомов, как и в кристалле, т. е. участки, в которых устанавливается дальний порядок в расположении атомов и, следовательно, создается поверхность, отделяющая эти участки от остального расплава.

Такие участки расплава называют *субтаксическими группами* или *кластерами*.

Фазовые флуктуации в переохлажденном расплаве возможны вследствие *флуктуации энергии* расплава, так как для образования в переохлажденном расплаве участков, обладающих свойствами кристаллов, необходимо затратить работу, равную разности энергии, требующейся на создание поверхности раздела, и энергии, выделяющейся при переходе данных участков расплава из метастабильного состояния в стабильное.

Если размеры таких участков (по существу кристалликов) очень малы, то дальнейший рост будет невозможен, так как затрата энергии на создание *поверхности раздела фаз* будет превышать ту энергию, которая выделяется при переходе участков переохлажденного расплава в стабильное состояние. Это приведет к увеличению свободной энергии кристалликов, и они, возникнув, сразу же распадутся. Если размер кристалликов равен или больше *критического*, то при их росте выигрыш энергии будет превышать затрату — такие кристаллики станут зародышами кристаллов (центрами кристаллизации).

Расчеты¹ показывают, что для образования зародыша критического размера необходимо затратить работу A_k , равную одной трети свободной энергии поверхности кристаллика:

$$A_k = \frac{1}{3} \sum_i s_i \sigma_i,$$

где s_i — поверхность i -й грани зародышевого кристаллика; σ_i — поверхностное натяжение расплава на этой грани.

Если равновесной формой кристаллика является куб, то

$$A_k = 8\sigma r_k^2, \quad (1)$$

где r_k — радиус сферы, вписанной в куб критического размера,

$$r_k = \frac{2\sigma M T_0}{\rho L (T_0 - T)}, \quad (2)$$

здесь M — молекулярная масса вещества кристаллика; ρ — плотность вещества; L — теплота плавления одной моли вещества.

Очевидно, что с увеличением *переохлаждения* $T_0 - T$ расплава критический размер зародыша уменьшается и, следовательно, повышается вероятность его возникновения, так как с увеличением переохлаждения расплава существенно уменьшается работа образования зародыша; из (1) и (2)

$$A_k = 32\sigma^3 \left[\frac{M T_0}{\rho L (T_0 - T)} \right]^2. \quad (3)$$

Для любого данного переохлаждения в силу хаотичности теплового движения атомов в расплаве число фазовых флуктуаций критического размера пропорционально вероятности энергетической флуктуации A_k :

$$I = K \exp \left(-\frac{A_k}{kT} \right), \quad (4)$$

где k — постоянная Больцмана; K — кинетический коэффициент, величина которого определяется скоростью обмена атомами между зародышем и расплавом.

¹ Эти расчеты читатель должен помнить из физической химии. В наиболее простом виде они приведены в учебных пособиях Б. Б. Гуляева [6, с. 57—60] и И. Б. Куманина [37, с. 7—12].

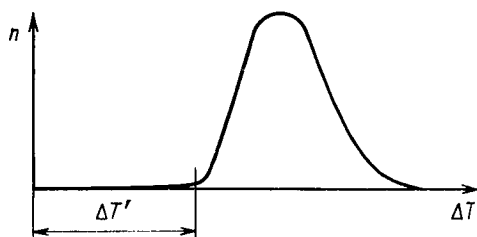


Рис. 21. Схема зависимости скорости n зарождения центров кристаллизации от переохлаждения ΔT расплава

Если в соответствии с предложением Я. И. Френкеля принять, что вероятность перехода атомов из расплава в зародыш пропорциональна подвижности их в расплаве при температуре T , то

$$K = K_1 \exp \left(-\frac{U}{RT} \right), \quad (5)$$

так как U — энергия активации атомов в расплаве и R —

газовая постоянная; K_1 — множитель пропорциональности, равный приблизительно числу атомов в рассматриваемом объеме расплава (для одной моли $K_1 \approx 10^{23}$) [50].

Из формулы (4) с учетом формул (3) и (5) получается зависимость скорости n зарождения центров кристаллизации ¹ от переохлаждения $\Delta T = T_0 - T$ расплава:

$$n = K_1 \exp \left(-\frac{U}{RT} \right) \exp \left[-\frac{B\sigma^3}{T(\Delta T)^2} \right], \quad (6)$$

где $B = \frac{2}{k} \left(\frac{4MT_0}{\rho L} \right)^2$ — постоянная вещества.

На рис. 21 приведена зависимость $n(\Delta T)$ скорости зарождения центров кристаллизации от переохлаждения; с ростом переохлаждения скорость зарождения увеличивается, достигает максимума и с дальнейшим ростом переохлаждения уменьшается до нуля. Непосредственно вблизи температуры плавления вещества имеется область переохлаждения, в которой скорость зарождения практически равна нулю; заметное увеличение скорости начинается

¹ В начале XX века Г. Тамман впервые ввел понятие скорости зарождения (возникновения) центров кристаллизации. Он экспериментально установил зависимость n от ΔT : при $\Delta T = 0$ скорость $n = 0$, затем, с ростом ΔT , скорость n увеличивается, достигает максимума и снова уменьшается до нуля.

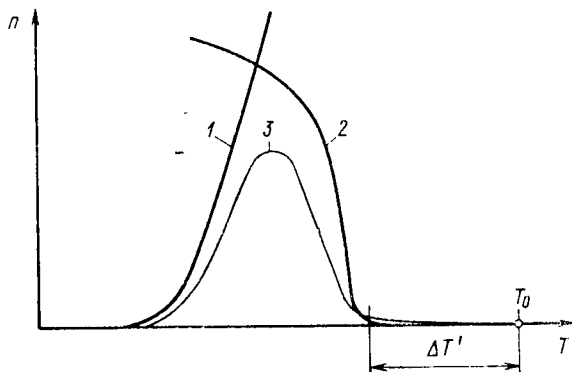


Рис. 22. Зависимость экспоненциальных множителей, входящих в формулу (6), от температуры:
1 — $n = \exp(-U/RT)$; 2 — $n = K_1 \exp \left\{ -\frac{B\sigma^3}{T(T_0 - T)^2} \right\}$; 3 — результирующая кривая, соответствующая (6)

только по достижении определенного переохлаждения. Интервал температуры $\Delta T'$, в котором центры кристаллизации практически не возникают, является *интервалом метастабильности* расплава вещества в данных условиях. Кривая на рис. 21 обладает всеми свойствами так называемой *тамановской кривой*.

На рис. 22 дана зависимость экспоненциальных множителей, входящих в формулу (6), от температуры.

Очевидно, что увеличение скорости n зарождения с уменьшением температуры расплава при малых переохлаждениях вызывается действием второго множителя $\exp \{ -B\sigma^3/[T(T_0 - T)^2] \}$; физически это отвечает повышению вероятности зарождения с понижением температуры и соответственно — уменьшению критического размера зародыша с удалением от температуры равновесия.

Первый экспоненциальный множитель $\exp (-U/RT)$ отражает действие факторов, тормозящих процесс зарождения: при более глубоких переохлаждениях скорость зарождения уменьшается, так как с понижением температуры уменьшается скорость обмена атомами между зародышами и расплавом.

В этой связи *интервал метастабильности расплава есть переохлаждение $\Delta T'$, при достижении которого вероятность зарождения резко повышается от исчезающе малой величины до такой, когда скорость зарождения центров кристаллизации становится практически измеримой*.

Интервал метастабильности и четкость границы его определяются значениями $B\sigma^3$, U и K_1 в соответствии с формулой (6).

Для металлов, в том числе технических, фактор U/RT , тормозящий процесс зарождения кристаллов, имеет весьма малое значение, так как атомы металлов достаточно подвижны (U достаточно мала, а температура плавления большинства металлов сравнительно высока). В соответствии с этим в формуле (6) первый экспоненциальный множитель можно принять приблизительно равным единице. Тогда

$$n = K_1 \exp [-B\sigma^3/T (\Delta T)^2], \quad (7)$$

т. е. зависимость скорости самопроизвольного зарождения центров кристаллизации от переохлаждения выразится кривой, имеющей только восходящую ветвь (рис. 23). Такие зависимости n

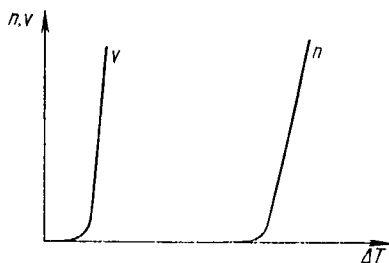


Рис. 23. Схема зависимостей скорости n зарождения и линейной скорости v роста кристаллов от переохлаждения ΔT для металлов

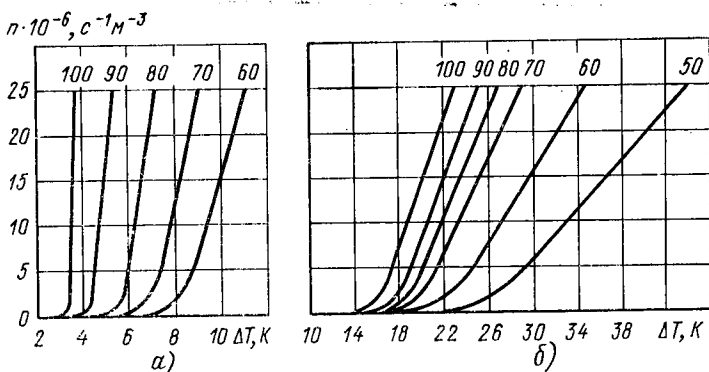


Рис. 24. Зависимость скорости и зарождения центров кристаллизации от переохлаждения ΔT для сплавов системы камфоры—нафталин; цифры на кривых соответствуют молярным процентам камфоры (а) и нафталина (б) в сплавах

от переохлаждения установлены экспериментально для ряда легкоплавких металлов и органических веществ, кристаллизующихся аналогично металлам и не переходящим в стеклообразное состояние.

Я. В. Гречный установил, что такие же зависимости n от переохлаждения наблюдаются и для бинарных сплавов. *Переохлаждение в этом случае отсчитывается от температуры ликвидуса.*

На рис. 24 дана зависимость скорости зарождения центров кристаллизации для сплавов камфоры с нафталином от переохлаждения ΔT . Оба вещества, как известно, металлоподобны и дают сплавы с эвтектикой без заметной растворимости друг в друге в твердом состоянии. На рис. 25 приведены аналогичные зависимости для сплавов камфоры с борнеолом. Эти вещества образуют непрерывный ряд твердых растворов [25].

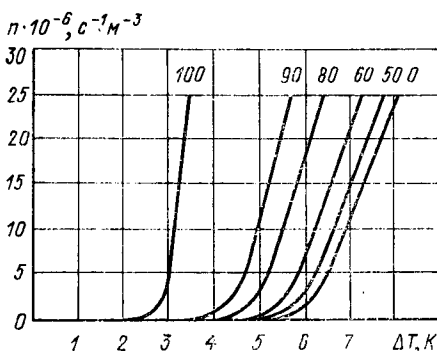


Рис. 25. Зависимость скорости и зарождения центров кристаллизации от переохлаждения ΔT для сплавов системы камфоры-борнеол; цифры на кривых соответствуют молярным процентам камфоры в сплавах

29. РОСТ КРИСТАЛЛОВ

Согласно современной теории кристаллизации, кристаллы растут по-разному в зависимости от состояния поверхности их граней.

Для *атомарно-гладких* поверхностей характерен послойный рост путем образования на гранях *двухмерных* зародышей, которые затем разрастаются вдоль этих гра-

ней. Разрастание происходит в результате присоединения атомов расплава на ступенях, возникших между гранью кристалла и образовавшимися на ней двухмерными зародышами. В этом случае *линейная скорость v роста кристаллов* будет определяться вероятностью образования двухмерных зародышей и выразится формулой, аналогичной формуле (6):

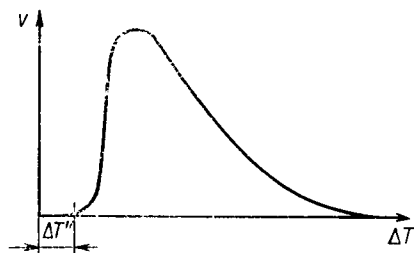


Рис. 26. Схема зависимости линейной скорости v роста кристаллов от переохлаждения ΔT расплава

$$v = K_2 \exp(-U'/RT) \exp(-E\kappa^2/T \Delta T), \quad (8)$$

где K_2 — множитель пропорциональности, равный приблизительно числу атомов на поверхности рассматриваемого объема (для одной моли $K_2 \approx 10^{16}$); U' — некоторая энергия активации, аналогичная U в формуле (6), определяющая скорость обмена атомами между двухмерными зародышем и расплавом ($U' \approx \frac{1}{4} U$); E — постоянная вещества, аналогичная по смыслу величине B в формуле (6) ($E\kappa^2 \approx 10^{-3} \text{ Во}^3$); κ — «граничное» натяжение расплава на периферии двухмерного зародыша.

Кривая зависимости линейной скорости v роста кристаллов от переохлаждения ΔT (рис. 26) аналогична кривой скорости зарождения (см. рис. 21). Восходящий участок кривой определяется вероятностью зарождения, нисходящий — замедлением перехода атомов из расплава в кристалл при увеличении переохлаждения.

Рост кристалла начинается только при определенном переохлаждении $\Delta T''$, однако оно значительно меньше интервала метастабильности расплава при зарождении центров кристаллизации, так как величины K_2 , U' и $E\kappa^2$, определяющие переохлаждение $\Delta T''$, значительно меньше величин K_1 , U и Во^3 в формуле (6).

Учитывая, что атомы металлов в расплаве достаточно подвижны (U' — достаточно мала, а температура их плавления сравнительно высока), первый экспоненциальный множитель в формуле (8), так же как и в формуле (6), можно принять приблизительно равным единице. Тогда для металлов

$$v = K_2 \exp(-E\kappa^2/T \Delta T), \quad (9)$$

т. е. зависимость линейной скорости послойного роста кристаллов металлов с атомарно-гладкими поверхностями граней от переохлаждения выразится кривой, имеющей только восходящую ветвь (см. рис. 23). Такая зависимость установлена и экспериментально для ряда металлов и органических веществ; для чистого галлия она приведена на рис. 27.

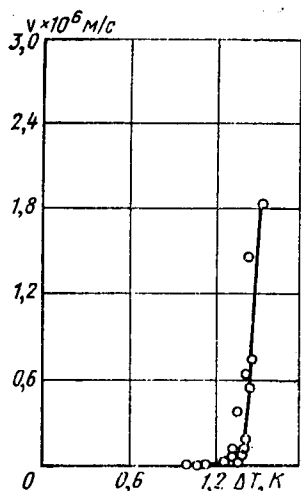


Рис. 27. Зависимость линейной скорости v роста кристаллов чистого галлия от переохлаждения ΔT

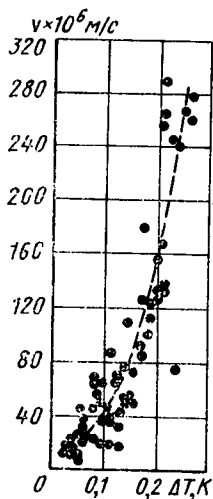


Рис. 28. Зависимость линейной скорости роста v деформированных кристаллов чистого галлия от переохлаждения ΔT

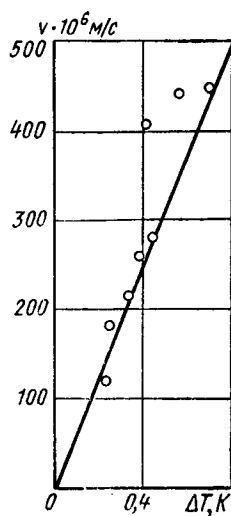


Рис. 29. Зависимость линейной скорости роста v кристаллов In_2Bi от переохлаждения ΔT

Кристаллы, на гранях которых имеются *готовые ступеньки*, возникшие в результате выхода винтовых дислокаций, растут также послойно в результате присоединения атомов расплава к этим ступенькам. В этом случае зависимость линейной скорости роста от переохлаждения выражается формулой

$$v = K_3 (\Delta T)^2 \exp(-U'/RT), \quad (10)$$

где K_3 — кинетический коэффициент, характеризующий свойства вещества; при малых переохлаждениях он принимается постоянным.

Исходя из соображений, высказанных по отношению к формуле (8), для металлов формулу (10) можно представить в виде

$$v = K_3 (\Delta T)^2. \quad (11)$$

На рис. 28 приведена зависимость v от T для кристаллов чистого галлия, в которых в результате их деформирования создавались дислокации [2]. Сравнение кривых на рис. 27 и 28 показывает, что *дислокационный послойный рост кристаллов происходит при значительно меньших переохлаждениях, чем послойный рост в результате образования двухмерных зародышей*; на кривой для случая дислокационного роста нет порогового переохлаждения $\Delta T''$, как в предыдущем случае (см. рис. 27).

Для *атомарно-шероховатых* поверхностей граней кристаллов характерен так называемый *нормальный* рост в результате беспорядочного присоединения атомов расплава к любым точкам таких

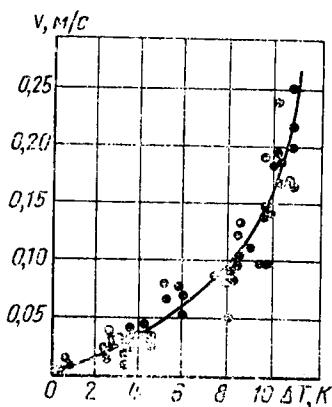


Рис. 30. Скорость дендритного роста кристаллов олова в зависимости от переохлаждения

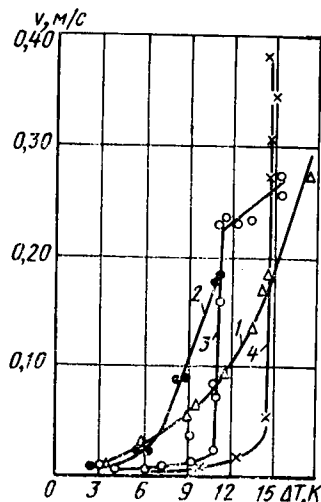


Рис. 31. Зависимость скорости роста дендритов олова от переохлаждения расплава олова с висмутом:

1) Sn + 0,5% Bi; 2) Sn + 2% Bi; 3) Sn + 4% Bi; 4) Sn + 8% Bi

поверхностей. В результате грань растущего кристалла перемещается однородно, нормально к самой себе. В этом случае зависимость линейной скорости роста от переохлаждения выражается формулой

$$v = K_4 \Delta T, \quad (12)$$

где K_4 — кинетический коэффициент, аналогичный по смыслу K_3 .

На рис. 29 приведены данные опытов В. Т. Борисова и Ю. Е. Матвеева с интерметаллидом In_2Bi . Можно принять, что здесь происходил нормальный рост кристаллов.

Предполагается, что нормальный рост кристаллов происходит при малых переохлаждениях.

На рис. 30 приведена зависимость v от ΔT для дендритов олова, которая более всего соответствует формуле типа (11). Такие же кривые получены в опытах со свинцом, кобальтом, никелем и другими металлами. В то же время, по данным В. В. Никонова и Д. Е. Темкина, зависимости линейной скорости роста дендритов от переохлаждения для сплавов имеют самый разнообразный вид (рис. 31).

30. ВОЗДЕЙСТВИЕ ПРИМЕСЕЙ

Различают две группы примесей, которые могут оказать влияние на процесс кристаллизации: растворимые в расплаве и нерастворимые (механические).

Если исходить из изложенной только что теории зарождения и роста кристаллов, то увеличение скорости зарождения центров кристаллизации и, следовательно, сокращение интервала метастабильности под воздействием растворимых и нерастворимых примесей возможно только тогда, когда эти примеси будут способствовать уменьшению работы образования критических зародышей.

Согласно формуле (3), работа A_k самопроизвольного зарождения может быть уменьшена в результате снижения поверхностного натяжения σ на границе переохлажденного расплава с кристаллом.

Растворимые примеси. Модификаторы 1-го рода

Уменьшение величины σ достигают введением в расплав растворимых в нем веществ, *поверхностно-активных к кристаллизующейся фазе*. Малые добавки этих веществ вызывают резкое уменьшение переохлаждения, при котором самопроизвольно начинают возникать центры кристаллизации, и, следовательно, измельчают зерно в отливках и слитках. Например, по данным В. И. Данилова, растворение 0,05% К в чистой ртути приводит к уменьшению поверхностного натяжения на границе кристалл—расплав с 7,7 до 3,6 МДж/м² и к сокращению интервала метастабильности ртути с 21 до 9 К [6]. Аналогичное действие оказывает бор. В стали 08X15H24B4TP он вызывает резкое измельчение зерна в слитке. По данным В. К. Семенченко, введение 0,12% В понижает поверхностное натяжение этой стали с 1380 до 1200 МДж/м² при температуре 1770 К [7].

Однако согласно формуле (6), скорость зарождения (интервал метастабильности) зависит не только от работы A_k образования центров кристаллизации, но и от энергии U активации атомов в расплаве. Увеличение U приводит к уменьшению скорости зарождения и, следовательно, к расширению интервала метастабильности. Увеличение энергии активации возможно в результате действия растворимых примесей.

Очевидно, если *любая примесь* растворима в жидкой фазе и не растворима в твердой, то рост кристаллов будет сопровождаться вытеснением примеси в жидкую фазу и образованием у границ кристаллов слоя расплава с повышенной концентрацией атомов примеси. Это в любом случае должно увеличивать энергию активации, так как слой расплава с повышенной концентрацией атомов, не принимающих участие в построении кристаллической решетки твердой фазы, будет затруднять поступление атомов кристаллизующегося вещества из жидкой фазы в твердую. Например, по данным В. И. Данилова, введение в азобензол 0,7% атомной концентрации пиперонала (пиперонал растворим в жидком азобензоле и практически нерастворим в твердом) повышает энергию активации с 84 000 до 92 000 кДж/моль и увеличивает интервал метастабильности с 31 до 36 К (рис. 32). Поверхностное натяжение

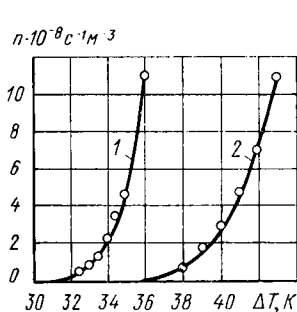


Рис. 32. Зависимость скорости n зарождения центров кристаллизации от переохлаждения ΔT для азобензола:

1 — чистый азобензол; 2 — азобензол с 0,7% атомной концентрации пиперонала

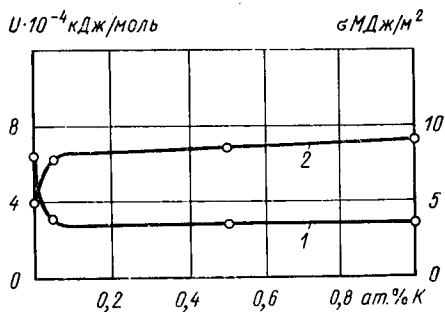


Рис. 33. Поверхностное натяжение σ на границе кристалл—расплав (1) и энергия U активации (2) ртути в зависимости от содержания калия (по данным Д. С. Каменецкой)

на границе кристалл—расплав остается при этом неизменным: $\sigma = 10,7 \text{ МДж/м}^2$ [7].

Увеличение энергии активации происходит и в том случае, если растворимая примесь поверхностно-активна к кристаллизующемуся веществу, т. е. понижает поверхностное натяжение на границе кристалл—расплав. Такая примесь вследствие поверхностной активации будет адсорбироваться на поверхности растущих кристаллов и, естественно, затруднять переход атомов кристаллизующегося вещества из жидкой фазы в твердую.

Например, по данным Д. С. Каменецкой, 0,05% К одновременно с понижением поверхностного натяжения ртути на границе кристалл—расплав (с 7,7 до 3,6 МДж/м²) повышает энергию активации ртути с 40 000 до 62 800 кДж/моль. Однако в результате совместного действия калия на поверхностное натяжение и энергию активации ртути интервал метастабильности уменьшается с 21 до 9 К. При этом (рис. 33) увеличение количества калия с 0,05 до 1,0% практически не изменяет поверхностного натяжения ($\sigma = 3,6 \div 3,7 \text{ МДж/м}^2$), но приводит к дальнейшему росту энергии активации (с 62 800 до 72 800 кДж/моль) и в этой связи к некоторому расширению интервала метастабильности (с 9 до 12 К).

Таким образом, эффект действия малых количеств растворимой примеси на процесс кристаллизации определяется наложением ее влияния на поверхностное натяжение и энергию активации. При этом поверхностно-активными примесями можно сократить интервал метастабильности вещества, т. е. повысить скорость самопроизвольного зарождения центров кристаллизации в области малых переохлаждений. Одновременно вследствие повышения энергии активации из-за адсорбции примеси на гранях кристаллов можно уменьшить скорость роста этих кристаллов.

Поверхностно-активные вещества, способные оказывать комплексное воздействие на процесс кристаллизации, являются модификаторами 1-го рода.

Их специально вводят в расплав для измельчения кристаллического зерна в отливках и слитках. Например, натрий, калий, литий, висмут являются модификаторами 1-го рода для алюминия и некоторых сплавов алюминия с кремнием; олово, сурьма — модификаторы 1-го рода для меди; бор — для сталей и т. д.

Нерастворимые (механические) примеси. Модификаторы 2-го рода

Частицы нерастворимых примесей могут оказывать так называемое *контактное действие* на процесс зарождения центров кристаллизации, так как зародыши будут возникать не в объеме переохлажденного расплава, а на *готовой поверхности раздела фаз*, т. е. на поверхности частиц примеси.

О. Д. Козачковский [35] нашел, что работа зарождения кубического кристалла на поверхности примеси

$$A_k = 16 [MT_0\sigma_{12}/\rho L (T_0 - T)]^2 (\sigma_{12} - \sigma_{13} + \sigma_{23}),$$

где σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} — соответственно поверхностные натяжения на границах переохлажденный расплав—кристалл, переохлажденный расплав—примесь, кристалл—примесь; значения σ_{12} для ряда металлов приведены в прилож. VI.

Если механизм зарождения принять флуктуационным, то для металлов скорость зарождения центров кристаллизации на поверхности частиц примеси, т. е. на твердых подложках,

$$n = K'_2 \exp [-B\sigma_{12}^2 (\sigma_{12} - \sigma_{13} + \sigma_{23})/2T (\Delta T)^2], \quad (13)$$

где K'_2 — множитель, аналогичный по смыслу K_2 в формуле (8).

В отличие от самопроизвольного зарождения образование центров кристаллизации на поверхности частиц примеси называют *гетерогенным зарождением*.

Согласно формуле (13), контактное действие нерастворимой примеси возможно при

$$\sigma_{23} \ll \sigma_{13}, \quad (14)$$

т. е. в случае, когда поверхностное натяжение σ_{23} между возникающим зародышем и примесью намного меньше поверхностного натяжения σ_{13} между переохлажденным расплавом и примесью.

Действительно, если для кубического зародыша висмута принять $\sigma_{12} = 20$ МДж/м², то при расчете по формуле (7) при $\sigma = \sigma_{12}$ получим кривую 1 зависимости скорости зарождения от переохлаждения (рис. 34). Если предположить, что зародыш возникает на примеси, для которой $\sigma_{13} = 21$ МДж/м² и $\sigma_{23} = 5$ МДж/м², то при расчете по формуле (13) получим кривую 2 (рис. 34). При сопоставлении этих кривых видно, что граница метастабильности висмута резко сокращается (с 28 до 10 К) в присутствии нерастворимой примеси, для которой выполняется условие (14), т. е. $\sigma_{23} \ll \sigma_{13}$.

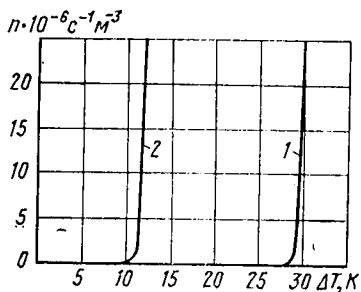


Рис. 34. Зависимости скорости n зарождения центров кристаллизации от переохлаждения ΔT для висмута: 1 — по формуле (7); 2 — по формуле (13)

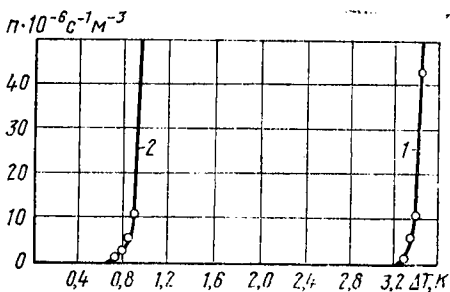


Рис. 35. Зависимости скорости n зарождения центров кристаллизации от переохлаждения ΔT для чистого натрия:

1 — неокисленного; 2 — окисленного

Согласно формуле (13) интервал метастабильности будет равным нулю, если $\sigma_{23} = 0$, т. е. если в расплав данного вещества в виде примеси введены твердые частицы того же вещества, так как в этом случае $\sigma_{12} = \sigma_{13}$. Это означает, что, вводя в расплав нерастворимые примеси со свойствами, близкими к свойствам кристаллизующегося вещества, т. е. примеси, у которых величина σ_{13} близка к σ_{12} , возможно существенно снизить интервал метастабильности расплава.

По данным П. Д. Данкова, гетерогенное зарождение вызывают примеси, обладающие *структурным сходством* с кристаллизующимся веществом, т. е. примеси, *изоморфные с кристаллизующимся веществом* и имеющие параметры кристаллической решетки, близкие к параметрам решетки этого вещества [30].

Нерастворимые примеси, изоморфные с кристаллами расплава, являются модификаторами 2-го рода. Их специально вводят в расплав для измельчения зерна в отливках и слитках. Например, хлористый натрий — модификатор 2-го рода для алюминия; титан — для меди, а также для алюминия и большинства его сплавов.

Следует ожидать, что окислы некоторых металлов могут быть изоморфными с кристаллами этих металлов. По измерениям В. И. Данилова и А. Г. Помогайбо, окислы натрия резко сокращают интервал метастабильности расплава натрия — с 3,20 до 0,65 K [7].

На рис. 35 показана зависимость скорости зарождения центров кристаллизации от переохлаждения для чистого неокисленного (1) и окисленного (2) натрия. Расчеты по формулам (7) и (13) показывают, что в первом случае $\sigma = \sigma_{12} = 2,0$ МДж/м², а во втором $[\sigma_{12}^2 (\sigma_{12} - \sigma_{13} + \sigma_{23})]^2 = 0,4$ МДж/м². Это должно означать, что окислы натрия воздействуют на процесс кристаллизации расплава натрия как изоморфные примеси, так как $\sigma_{13} - \sigma_{23} = 1,984$ МДж/м², т. е. $\sigma_{23} \ll \sigma_{13}$ и $\sigma_{13} \approx \sigma_{12}$, если предположить, что $\sigma_{13} = 2,1$ МДж/м², то $\sigma_{23} = 0,116$ МДж/м².

Активированные (активные) нерастворимые примеси

Исследования В. И. Данилова и его сотрудников показали, что контактное действие нерастворимых примесей на процесс зарождения центров кристаллизации наблюдается и в том случае, когда нерастворимые примеси не обладают структурным сходством с данным веществом [7]. Такие примеси получили название *активных*, или *активированных*. В дальнейшем было установлено, что частицы примесей становятся активными для данного вещества только после того, как они некоторое время находились в твердой фазе, вращая в нее при кристаллизации расплава этого вещества. Например, введение окислов свинца в висмут и олово, очищенное от «естественных» примесей и собственных окислов, не оказывает влияния на процесс кристаллизации, так как эти окислы не являются изоморфными с висмутом и оловом. Однако после повторного расплавления и затем кристаллизации интервал метастабильности висмута и олова уменьшился в десятки раз.

Согласно формуле (13), контактное действие нерастворимой примеси возможно только в том случае, если выполняется условие (14). В этой связи контактное действие активных примесей удается объяснить, предположив, что между частицами примеси и твердой фазой закристаллизовавшегося вещества возникает *молекулярный* контакт и, следовательно, образуется *пограничный слой*, который, естественно, будет обладать определенным для каждого сорта примеси структурным сходством с кристаллами данного вещества. Если температура плавления такого слоя выше температуры плавления кристаллов, то после их расплавления частицы примеси сохраняют переходный слой, т. е. станут *активными*. При кристаллизации они могут оказывать влияние на процесс зарождения в той степени, в какой свойства активированной поверхности частиц примеси удовлетворяют условию (14). Влияние активных примесей на кристаллизацию отливок и слитков должно быть распространенным, так как реально в технических металлах и сплавах механические примеси присутствуют всегда.

По мнению В. И. Данилова, *активные примеси, всегда имеющиеся в технических металлах и сплавах, определяют характер кристаллизации отливок и слитков.*

Прежде всего это касается известной читателю из практики литья зависимости кристаллического строения отливок и слитков от величины предварительного перегрева расплава при плавке: зерно в отливках и слитках с увеличением перегрева расплава укрупняется. С точки зрения изложенного, это явление можно объяснить *деактивацией* активных примесей, т. е. исчезновением при увеличении температуры расплава во время плавки того *активированного слоя* на поверхности частиц примеси, который образовался в результате развития молекулярного контакта примесей с твердой фазой данного металла или сплава.

Температура дезактивации поверхности частиц для каждого вида примесей различна. Поэтому с увеличением перегрева расплава в печи количество примесей, потерявших активность, увеличивается. При определенной температуре дезактивируются все, или почти все, примеси — строение слитка или отливки получается весьма крупнозернистым. Например, в висмуте практически полная дезактивация примесей наблюдается при перегреве на 80—90 К, в олове — на 40—50 К, в стали 15Х28 — при перегреве на 100 К, в стали 12Х18Н9Т — при перегреве на 5—10 К [2].

На рис. 36 приведена зависимость величины макрокристаллического зерна от перегрева расплава при плавке ряда сплавов алюминия. В сплаве АМц, по-видимому, присутствовали два вида примеси с разной температурой их дезактивации.

С эффектом дезактивации активных примесей связано также другое известное из практики литья явление «воспоминаний» при кристаллизации (*наследственность*). Из технологических дисциплин читателю должно быть известным, что технический металл или сплав, затвердевший в изложнице в виде слитка с мелкозернистым строением, после вторичного расплавления и, затем, затвердевания в прежних условиях получает такое же или почти такое же строение. Это *наследование* прежнего строения слитка, т. е. связь между строением слитков, расплавленных и закристаллизованных в одних и тех же условиях, наблюдается при перегревах, не превышающих определенного для каждого металла и сплава. Например, связь между начальным и конечным строением алюминиевых слитков исчезает при перегреве на 8—10 К, в висмуте — на 20—25 К, в олове — на 10—15 К, в стали 15Х28 — на 30—40 К [7]. По-видимому, в перечисленных случаях исчезновение связи между начальным и конечным строением слитков происходит в результате того, что при указанных перегревах дезактивируется большая часть активных примесей.

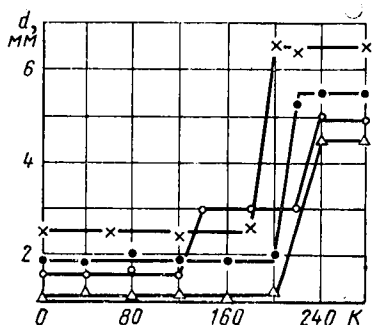


Рис. 36. Зависимость величины макрокристаллического зерна от перегрева расплава при плавке:

○ — АМц; △ — Al с 1,2% Si; ● — Al с 1% Ni; × — Al с 2,5% Sb

31. ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Общая теория кристаллизации дает следующие представления о процессах зарождения и роста кристаллов.

Возможно самопроизвольное зарождение центров кристаллизации в переохлажденном расплаве. Скорость зарождения зависит от величины переохлаждения расплава, поверхностного натяже-

ния расплава на границе с зародышем и подвижности атомов вещества при переходе их из расплава в твердую фазу.

Скорость самопроизвольного зарождения может быть увеличена введением в расплав небольших количеств растворимых в нем поверхностно-активных к кристаллизующемуся веществу примесей. Поэтому реально самопроизвольное зарождение в металлах удается наблюдать только в присутствии поверхностно-активных веществ (модификаторов 1-го рода).

В подавляющем большинстве случаев кристаллизации металлов и сплавов зарождение кристаллов происходит на нерастворимых в расплаве примесях. Скорость гетерогенного зарождения также зависит от величины переохлаждения расплава, но зарождение на примесях начинается при гораздо меньшем переохлаждении, чем самопроизвольное.

Различают два вида нерастворимых в расплаве примесей: изоморфные с кристаллизующимся веществом (модификаторы 2-го рода) и активные или активирующие в данном веществе (практически всегда имеющиеся в технических металлах и сплавах).

Активные нерастворимые примеси определяют характер кристаллизации отливок и слитков в реальных условиях литья. Активность примесей исчезает при определенном для каждого их вида перегреве расплава.

Рост кристаллов может быть послынным и нормальным. Зависимость скорости роста от переохлаждения в этих случаях будет различной. Но во всех случаях скорость роста уменьшается при наличии в расплаве растворимых примесей.

Количественно скорость самопроизвольного зарождения центров кристаллизации выражается формулой (6); скорость гетерогенного зарождения — (13). Линейная скорость послынного роста кристаллов определяется формулами (8) и (10) в зависимости от механизма появления ступенек роста; линейная скорость нормального роста — (12).

Глава 7. ОПИСАТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОТЛИВОК. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАКРОСТРОЕНИЯ ТЕЛА ОТЛИВКИ

Управление формированием кристаллического строения отливки — научно-техническая проблема, решение которой прежде всего обуславливает повышение качества литых деталей машин и приборов и получение их с заданными служебными свойствами.

Эта проблема привлекала активное внимание металлургов и литейщиков в середине прошлого века. Напомним, что уже

в 1868 г. Д. К. Чернов пришел к заключению: «... прочность литой непрокованной стали несколько не меньше прочности прокованной, если обе имеют одинаковое сложение ...».

Классические труды П. П. Аносова, Н. В. Калакуцкого, Д. К. Чернова, А. С. Лаврова и фундаментальные исследования А. А. Байкова, Н. Т. Гудцова, А. А. Бочвара, В. О. Гаген-Торна, Г. П. Иванцова, В. И. Данилова, Д. И. Саратовкина, В. И. Добаткина, Н. И. Хворинова и других ученых определили главное научное направление решения указанной проблемы — создание теории кристаллизации отливок и слитков.

Более того, труды этих ученых содержат систему основных положений описательной теории кристаллизации отливок.

Ниже изложена теория Д. К. Чернова, приведены основные представления современной описательной теории кристаллизации отливок. Кроме того, перечислены затруднения этой теории при попытках решения проблемы управления формированием кристаллического строения отливки.

32. ТЕОРИЯ Д. К. ЧЕРНОВА

Как известно, Д. К. Чернов дал первое наиболее четкое описание кристаллического строения стального слитка. Мы его уже привели на с. 11. Здесь следует лишь упомянуть, что это описание Д. К. Чернов иллюстрировал схемой, изображенной на рис. 37.

Для объяснения причин образования этих зон кристаллического строения Д. К. Чернов тщательно изучал процессы затвердевания и кристаллизации стали в форме. Результаты наблюдений он изложил в 1878 г. («Исследования, относящиеся до структуры литых стальных болванок»). Позднее, обобщая свои наблюдения, Д. К. Чернов разработал основные положения теории формирования кристаллической структуры отливок и изложил их сначала в 1886 г. («О влиянии механической и термической обработки на свойства стали») и затем в 1898 г. («Сталелитейное дело»). Он писал: «... вылитый в форму расплавленный металл отвердевает вследствие потери теплоты, поддерживавшей его в расплавленном состоянии. Потеря теплоты, первым делом, обуславливается передачею теплоты стенкам того сосуда, в который выливается расплавленный металл, стало быть и затвердевание металла всегда будет идти от стенок к внутренним его

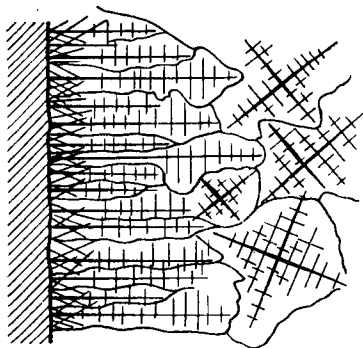


Рис. 37. Схема кристаллического строения стального слитка по Д. К. Чернову [17]

частям. Металл нарастает, затвердевая непосредственно около стенок. Как же он затвердевает?.. Наблюдения показывают, что затвердевание происходит отбрасыванием остроконечных кристаллов, идущих от места соприкосновения жидкого металла к стенкам формы ...» [17, с. 245—246].

«... главные оси образующихся кристаллов будут располагаться нормально к поверхности охлаждения, и бросание или рост их будет происходить из весьма большого числа точек этой поверхности; от главных осей отбрасываются боковые оси, которые встречаются с ветвями соседних осей и срastaются друг с другом... Рост главных осей при быстром охлаждении несравненно быстрее роста боковых ветвей...

Далее, с увеличением толщины застывающего слоя от поверхности охлаждения скорость передачи теплоты до того уменьшается, что, наконец, температура застывающего внутри металла успевает почти совершенно уравниваться в различных точках и жидкость обращается как бы в кашеобразное состояние вследствие образования в различных точках ее зачатков кристаллизации.

Далее, зачатки разрастаются осями и ветвями по различным направлениям, встречаются друг с другом и, срastаясь, представляют весьма перепутанные кристаллические группы затвердевшей массы.

Разрастание отдельных, плавающих в металле, скелетов идет свободно и медленно, а потому в центральных слоях получается сравнительно крупнокристаллическое сложение». [17, с. 412—414].

Из приведенного описания процесса кристаллизации отливки не ясно, что Д. К. Чернов считал главной причиной прекращения роста столбчатых кристаллов: выравнивание температуры в незатвердевшем расплаве в связи с замедлением отвода теплоты от расплава благодаря нарастанию на поверхности формы твердого металла или появление свободных кристаллов в незатвердевшем расплаве, которые, разрастаясь, мешают росту столбчатых кристаллов. Однако следующее высказывание Д. К. Чернова (1878 г.) показывает, что главной причиной он считал вторую [17, с. 175]: «По всей вероятности, существует тесная связь между способностью правильного развития разрывного кристалла и свойствами металла переходить из совершенно жидкого состояния в твердое без более или менее продолжительного перехода через кашеобразное... Это видно ... по чугуну, где белые сорта его или способные к отбеливанию при быстром охлаждении принимают лучистое сложение, указывающее на быстрый рост кристаллов; серые же, в которых выделение графита мешает начальному ходу кристаллизации и которые способны переходить перед отвердеванием в кашеобразное состояние, принимают зернистое сложение ...».

Таким образом, основные положения теории Д. К. Чернова можно сформулировать следующим образом. Расплав, залитый в форму, затвердевает последовательно, начиная от стенок формы.

Затвердевание начинается в результате одновременного роста большого числа кристаллов, возникших на поверхности (или у поверхности?) формы. Так как эти кристаллы могут расти только в глубь расплава, то они превращаются в столбчатые, ориентированные нормально к поверхности охлаждения. По мере развития процесса затвердевания скорость роста столбчатых кристаллов замедляется и температура еще незатвердевшего расплава выравнивается (достигает температуры кристаллизации?). В результате в незатвердевшем расплаве появляются центры кристаллизации, которые, разрастаясь, останавливают рост столбчатых кристаллов и образуют крупные кристаллы центральной части слитка.

Здесь, естественно, недостает объяснения причин появления центров кристаллизации в охлаждающемся расплаве. Однако Д. К. Чернов не оставил без внимания и эту проблему теории кристаллизации. В «Афоризмах» ... (1915 г.) он пишет [17, с. 366]: «Что происходит при охлаждении, как начинается кристаллизация? Как только начинается понижение температуры, молекулы станут сближаться. Если тело по природе своей аморфное, тогда все частицы его слепятся одинаково. Если же тело кристаллическое, то частицы сближаются, соблюдая известный закон ориентировки и направления осей, соответствующий кристаллической форме данного вещества.

Однако для образования кристаллов необходим известный импульс. Этот импульс бывает от сосуда, в котором происходит кристаллизация, им может быть, как в растворе соли, какое-нибудь постороннее тело. Импульс дает зародыш кристаллу ... Как только начинается охлаждение, в различных точках массы появляются центры кристаллизации, число которых находится в зависимости от быстроты действия причины, вызывающей кристаллизацию, в данном случае — охлаждения ...».

Большое значение Д. К. Чернов придавал влиянию механического перемешивания расплава во время его затвердевания на процесс формирования кристаллической структуры слитков. В своей работе «Исследования, относящиеся до структуры литых стальных болванок» он писал [17, с. 191]: «В самом деле, если при отливке стали в изложницу эту последнюю приводить в быстрое вращательное движение, тогда растущие нормально к поверхности изложницы разрывные кристаллы не в состоянии будут так сильно развиваться, как это имеет место при спокойном росте, и сталь будет нарастать гладкими, аморфного сложения слоями. Если вращение изложницы, а с нею застывающих слоев стали продолжить до тех пор пока не застынет самая сердцевина болванки, тогда затвердевание всей массы болванки будет идти такими же гладкими слоями, как и непосредственно около стенок изложницы ... Так как в начале отливки от сильного охлаждающего действия стенок изложницы рост кристаллов идет очень быстро, то и скорость вращения формы должна быть возможно большая. Вследствие же трения жидкости о стенки сама жидкость станет тоже вра-

щаться, а потому следует попеременно изменять направление вращения, т. е. приводить форму в круговое возвратное движение, с быстрым порывистым изменением направления».

В другом месте Д. К. Чернов указывает [17, с. 58]: «Если расплавленную в тигле сталь вы будете при охлаждении приводить постоянно в сильное сотрясение, достаточное, чтобы все ее частицы приходили в движение, тогда охлажденный слиток будет иметь чрезвычайно мелкие кристаллы; если же эту сталь оставить без всякого сотрясения и дать массе спокойно и медленно остыться, тогда у нас эта самая сталь получится в крупных, хорошо развитых кристаллах».

К таким практически очень важным выводам и рекомендациям Д. К. Чернов пришел на основе анализа и обобщения результатов весьма простых наблюдений [17, с. 190]: «Рассматривая полость пузырей, запутывающихся в средних частях стальных болванок, мы видим, что в большинстве случаев нижняя часть пузыря имеет более или менее гладкое полусферическое очертание, а боковые стенки, в особенности верхняя часть, усеяны древовидными ростками, дендритами самых разнообразных очертаний ... При внимательном сличении этих ростков с разрывными кристаллами усадочных пустот легко заметить, что между теми и другими, в большинстве случаев, существует сходство и что дендриты в пузырях происходят из разрывных кристаллов, встречаемых пузырем при его движении вверх, когда сталь уже настолько загустела, т. е. настолько наполнилась образующимися в ней разрывными кристаллами, что для пузырей нет свободного прохода. При подъеме пузыря происходит движение окружающей его жидкости, вращение и раздвигание плавающих в ней разрывных кристаллов, а так как кристаллы, имея ту же температуру, что и окружающая их жидкость, весьма нежны ..., то, при движении между ними пузыря кристаллы частью размываются сталью, частью искривляются и разрушаются ...

Отсюда видно, что для уничтожения образовавшихся разрывных кристаллов ... достаточно произвести сравнительно небольшое движение, так как всплывание газового пузыря и движение его между этими кристаллами уже достаточно для того, чтобы почти совершенно размыть их».

33. ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОПИСАТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОТЛИВКИ

Общая теория кристаллизации, основные понятия, законы и представления которой изложены в предыдущей главе, несмотря на кажущуюся законченность и количественный характер, позволяет лишь приближенно и только *качественно* предсказывать ход кристаллизации и, следовательно, кристаллическое строение, какое приобретает отливка в реальных условиях литья. Главная причина состоит в том, что общая теория *количественно не учитывает*

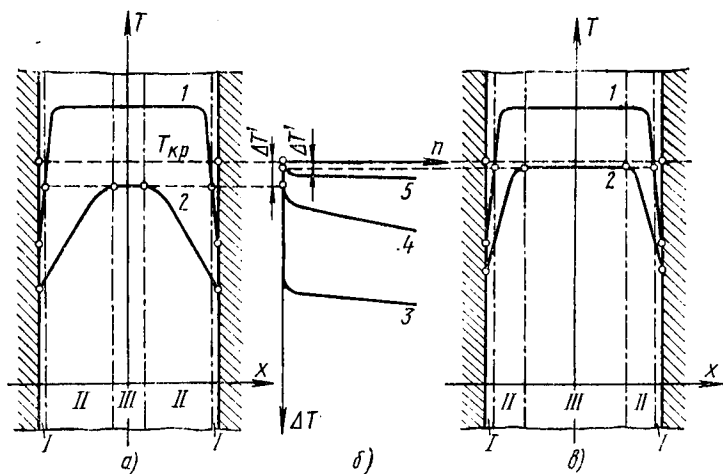


Рис. 38. Схемы кристаллизации слитка по теории В. И. Данилова [29] при малой (а) и большой (б) скорости зарождения кристаллов (б): 1, 2 — кривые температурных полей в слитке; 3, 4, 5 — кривые n от ΔT

вает именно реальные условия литья и, в первую очередь тепловое взаимодействие кристаллизующегося расплава данного литейного сплава с литейной формой.

В этой связи процесс кристаллизации отливки и, следовательно, формирования кристаллического строения, как правило, описывают качественно на основе представлений общей теории кристаллизации металлов и сплавов (см. п. 31) и теории затвердевания отливки в той или иной литейной форме (см. гл. 8.1, 9.1 и разделы III.1 и IV.1). Очень часто привлекают также сведения из гидродинамики, теории массопереноса и металловедения.

Из технологических дисциплин читателю известны такие описания. В литературе они получили название *теорий кристаллизации отливок* (слитков). Обзор теорий изложен в книге [2, с. 28—51].

Цель таких *описательных теорий* — объяснить ход процесса кристаллизации, который привел к данному кристаллическому строению отливки из того или иного сплава для различных условий литья. Анализ таких теорий в сопоставлении друг с другом весьма поучителен и полезен, ибо он позволяет составить *физический образ* процесса формирования кристаллического строения отливки и выявить основные представления современной теории кристаллизации отливок. Эти представления сводятся к следующим.

Самопроизвольное зарождение кристаллов в реальных условиях литья технических металлов и сплавов невозможно. Происходит зарождение на активных нерастворимых примесях.

Кристаллизация отливок начинается у поверхности стенок формы в результате зарождения кристаллов в пристеночном объеме термически переохлажденного расплава (рис. 38). В этом объ-

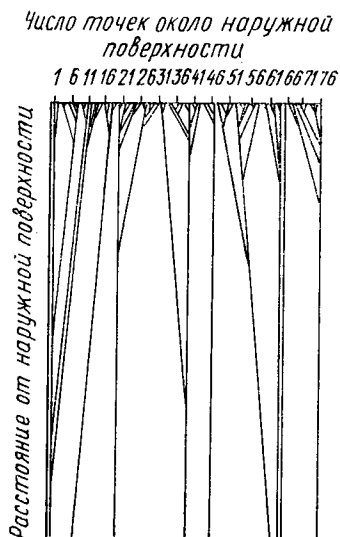


Рис. 39. Схема выклинивания столбчатых кристаллов по теории Н. И. Хворина [16]



Рис. 40. Дендритная структура у поверхности стальной отливки по теории Н. И. Хворина [16]

еме при большой скорости возникновения центров кристаллизации на активных нерастворимых примесях возможно образование обособленной зоны мелких кристаллов (зоны I — «замороженных» кристаллов, рис. 38, а и в).

Обособленная зона мелких кристаллов у поверхности тела отливки не образуется, если в расплаве имеется небольшое количество активированных примесей (кривая 3 на рис. 38, б). В этом случае число кристаллов, зарождающихся в пристеночном объеме переохлажденного расплава, будет недостаточно, чтобы помешать росту тех кристаллов, которые появляются на самой поверхности стенки изложницы (рис. 39 и 40). Такие кристаллы получают возможность беспрепятственно расти в глубь расплава, образуя фронт транскристаллизации.

Если переохлаждение расплава, при котором начинается зарождение кристаллов на активных нерастворимых примесях, больше, чем величина переохлаждения расплава перед фронтом транскристаллизации, то столбчатые кристаллы будут расти до середины тела отливки (рис. 41, а), а если меньше, — то впереди столбчатых кристаллов будут зарождаться и расти так называемые свободные кристаллы — образуется двухфазная зона (рис. 41, б, в).

Переохлаждение расплава перед фронтом транскристаллизации чистого металла обусловлено скоростью отвода теплоты кристаллизации, выделяющейся при росте столбчатых кристаллов. Это

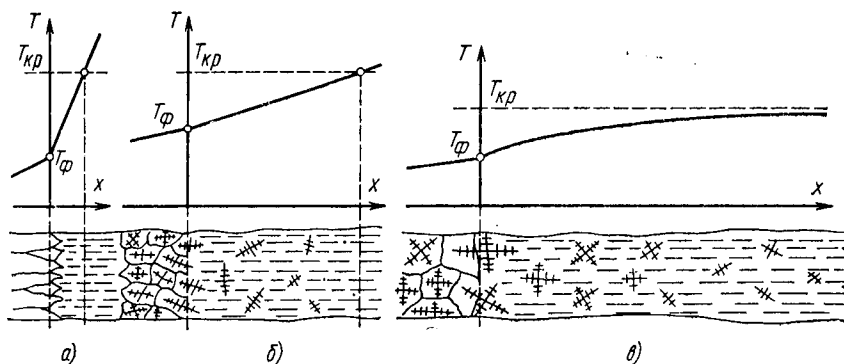


Рис. 41. Схемы кристаллизации отливки по теории Г. П. Иванова [32]

термическое переохлаждение перед фронтом транскристаллизации тем больше, чем больше скорость охлаждения расплава в форме, а протяженность объема расплава, переохлажденного перед фронтом, тем больше, чем меньше перегрев расплава в момент заливки его в форму и чем больше скорость его охлаждения в этой форме.

Переохлаждение расплава перед фронтом транскристаллизации сплавов обусловлено повышением концентрации растворенного компонента, который во время роста столбчатых кристаллов выталкивается в расплав. Величина этого *концентрационного* переохлаждения, а также протяженность области переохлажденного расплава перед фронтом транскристаллизации тем больше, чем больше концентрация растворенного компонента и шире интервал кристаллизации сплава. Уменьшение перегрева расплава в момент заливки и увеличение скорости охлаждения расплава в форме расширяет область концентрационного переохлаждения (рис. 42).

Свободные кристаллы, зарождающиеся и растущие в объеме расплава, переохлажденного перед фронтом транскристаллизации, начнут принимать участие в формировании фронта и этим остановят транскристаллизацию в момент, когда число и размеры свободных кристаллов станут сравнимыми с числом и поперечными размерами столбчатых кристаллов на границе фронта с расплавом (рис. 43). Для того чтобы свободные кристаллы достигли требуемого размера, необходимо определенное время их роста, а следовательно, и определенная протяженность двухфазной зоны фронта транскристаллизации. Число кристаллов будет зависеть от количества активных примесей, сохранивших активность при плавке. Поэтому, если во время плавки общее количество активных примесей в расплаве остается неизменным, то с увеличением перегрева расплава в момент заливки, а также с уменьшением скорости охлаждения расплава в форме протяженность зоны

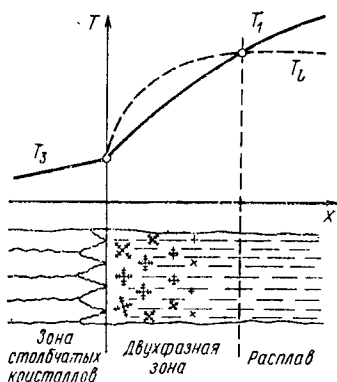


Рис. 42. Схема образования двухфазной зоны фронта кристаллизации сплавов по теории У. Вайнгарда, Б. Чалмерса, В. А. Тиллера [49]

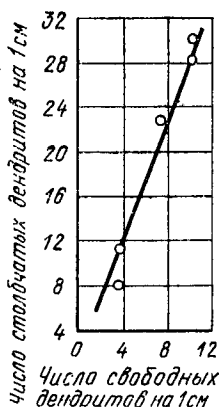


Рис. 43. Зависимость между числом столбчатых и свободных кристаллов на границе центральной зоны стальных отливок и слитков по теории Н. И. Хворинаова [16]

столбчатых кристаллов в отливке возрастает. При литье сплавов протяженность зоны столбчатых кристаллов возрастает также с уменьшением растворенного компонента и сужением интервала кристаллизации сплава (рис. 44).

Увеличение количества активных нерастворимых примесей приводит к сокращению зоны столбчатых кристаллов (ср. зоны II на рис. 38, а и в). Для конкретных условий литья (перегрев расплава в момент заливки и скорость охлаждения расплава в форме после заливки) при определенном количестве активных примесей зона столбчатых кристаллов исчезает вовсе. Все изложенное справедливо и для случая кристаллизации модифицированного расплава.

Движение расплава во время затвердевания отливки приводит к частичному оплавлению и разрушению фронта кристаллов, растущих от стенок формы. Это ускоряет охлаждение незатвердевшего расплава и расширяет область расплава, переохлажденного перед фронтом транскристаллизации. Если движение расплава продолжается и после исчезновения перегрева в незатвердевшей части слитка, то образующиеся обломки кристаллов становятся затравками для роста кристаллов перед фронтом транскристаллизации. То и другое приводит к сокращению зоны столбчатых кристаллов в отливках тем большому, чем интенсивнее движение расплава, независимо от того, является ли это

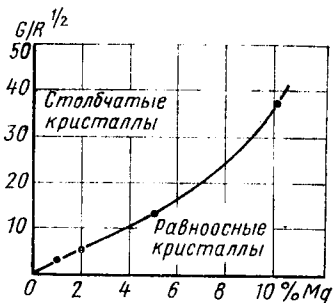


Рис. 44. Зависимость кристаллического строения слитков сплавов системы Al-Mg от параметра $G/R^{1/2}$ по У. Вайнгарду [22]

движение естественной или вынужденной конвекцией, или вызвано специальными способами перемешивания (вибрацией, ультразвуковыми колебаниями и т. п.).

При обработке затвердевающего расплава вибрацией и ультразвуком, кроме указанных явлений, следует ожидать и другие, специфические для условий распространения в расплаве упругих колебаний.

Во время затвердевания расплава без принудительного перемешивания его после окончания заполнения формы происходит перемещение кристаллов, растущих перед фронтом транскристаллизации в нижнюю часть объема отливки. Перемещение свободных кристаллов обусловлено естественной конвекцией расплава незатвердевшего во время отвода теплоты перегрева и осаждением этих кристаллов под действием силы тяжести после снятия перегрева (рис. 45).

В результате, в слитках, в придонной их части, образуется слой мелких кристаллов — конус осаждения.

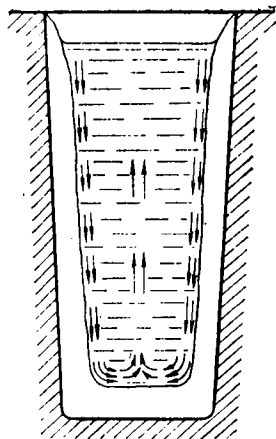


Рис. 45. Схема перемещения расплава при естественной конвекции его в кристаллизующемся слитке по теории Г. П. Иванцова [32]

В заключение поясним новое для нас понятие о концентрационном переослаждении.

Если в сплаве растворенный компонент понижает температуру начала кристаллизации, то твердая фаза, находящаяся в равновесии с жидкой, содержит его меньше, чем сама жидкая фаза (рис. 23.1, а). Следовательно, по мере протекания процесса кристаллизации, растворенный компонент выталкивается в расплав.

В результате расплав у фронта кристаллизации обогащен растворенным компонентом больше, чем расплав вдали от фронта (см. рис. 46). В соответствии с этим изменяется температура T_l начала кристаллизации расплава: у фронта она будет ниже (рис. 42).

Это соображение можно иллюстрировать следующим простым расчетом. Пусть линия ликвидуса на диаграмме состояния — прямая. Если перед фронтом кристаллизации двухфазной зоны нет, то для бинарного сплава при $k_0 < 1$, согласно (56-1)

$$T_l = T_A - m_L C_1, \quad (15)$$

где C_1 — концентрация растворимого компонента B в расплаве перед фронтом; $C_1 = C_1(x, t)$.

Определим $C_1(x, t)$. Пусть в расплаве протекает только молекулярная диффузия B , а фронт кристаллизации перемещается с постоянной линейной скоростью R . Тогда из второго уравнения Фика (45-1) для подвижной системы коор-

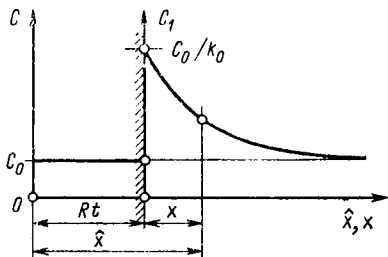


Рис. 46. Схема к расчету диффузии растворимого в расплаве компонента сплава перед фронтом кристаллизации

динат $(\hat{C}_1, 0, x)$, перемещающейся вместе с фронтом со скоростью $\hat{R}$ (рис. 46), найдем

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} - R \frac{\partial C_1}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}.$$

Рассмотрим установившийся процесс диффузии: так как $\frac{\partial C_1}{\partial t} = 0$, то

$$D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + R \frac{\partial C_1}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

На фронте кристаллизации должно быть справедливым условие (47-1):

$$D_1 \frac{\partial C_1(0, t)}{\partial x} = (1 - k_0) C_1(0, t) R \quad (17)$$

(продумать!). Второе граничное условие очевидно:

$$\frac{\partial C_1(\infty, t)}{\partial x} = 0; \quad C_1(\infty, t) = C_0. \quad (18)$$

Решение задачи (16)–(18) не представляет труда; получим

$$C_1 = C_0 \{1 - [(1 - k_0)/k_0] \exp(-Rx/D_1)\}. \quad (19)$$

Таким образом, изменение температуры T_l ликвидуса расплава перед фронтом кристаллизации можно приближенно определить по формуле (15) при C_1 из (19):

$$T_l = T_A - m_L C_0 \{1 - [(1 - k_0)/k_0] \exp(-Rx/D_1)\}. \quad (20)$$

Этот расчет впервые выполнил В. А. Тиллер в 1953 г.

Если градиент распределения температуры T_1 охлаждающегося расплава меньше градиента распределения температуры T_l ликвидуса, то перед фронтом кристаллизации возникает область так называемого концентрационного переохлаждения² (см. рис. 42).

34. ЗАТРУДНЕНИЯ ОПИСАТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ

При обсуждении характеристик условий литья (см. гл. 3) мы уже обратили внимание на неоднозначность влияния перегрева расплава при плавке и при заливке на кристаллическое строение отливки (см. пп. 11 и 12). Сейчас еще раз вернемся к этому вопросу.

¹ Напомним читателю, что для неподвижной системы координат $(C_1, 0, \hat{x})$ уравнение (45-1) имеет вид

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial \hat{x}^2}.$$

Так как, согласно рис. 46, $x = \hat{x} - Rt$, то при переходе к подвижной системе координат $(C_1, 0, x)$ получим

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{\partial C_1}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial C_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial C_1}{\partial t} - R \frac{\partial C_1}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 C_1}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}.$$

² Причины возникновения концентрационного переохлаждения при кристаллизации сплавов впервые установил Г. П. Иванцов в 1951 г. [33].

Термин «концентрационное переохлаждение» принадлежит Б. Чалмерсу. Он ввел его в 1953 г.

Итак, широко известно что увеличение температуры заливки расплава в форму, т. е. увеличение перегрева расплава в момент начала заливки, приводит к расширению зоны столбчатых кристаллов в теле отливки из металлов и однофазных сплавов (см., например, рис. 12, а; кривая 1).

В соответствии с описательной теорией кристаллизации отливок это находит удовлетворительное объяснение.

Действительно, столбчатые кристаллы перестают расти в момент, когда число и размеры свободных кристаллов, растущих перед фронтом транскристаллизации, станут сравнимыми с числом и поперечными размерами столбчатых кристаллов на границе фронта их с расплавом. Число свободных кристаллов будет тем меньше, чем меньше переохлаждение и уже слой расплава, переохлажденного перед фронтом. Увеличение перегрева расплава в момент заливки сокращает протяженность слоя расплава, переохлажденного перед фронтом, и уменьшает переохлаждение. Поэтому с увеличением перегрева заливаемого расплава момент остановки столбчатых кристаллов будет отдаляться от начала кристаллизации отливки. Следовательно, с увеличением температуры заливки будут увеличиваться протяженность зоны столбчатых кристаллов и размер зерна в центральной зоне тела отливки.

Однако на с. 34—35 уже указаны условия, когда эта связь между перегревом заливаемого расплава и кристаллическим строением отливок не наблюдается (см. рис. 12, б).

Напомним, что в первом случае (см. рис. 12, а) расплав во время плавки перегревали до 1220 К, а затем охлаждали в печи до заданной температуры заливки. Во втором случае (см. рис. 12, б) расплав заливали сразу же после достижения им во время плавки заданной температуры заливки. Условия заливки расплава в изложницу и охлаждения его в изложнице после окончания заливки были практически одинаковыми.

С точки зрения основных представлений описательной теории кристаллизации отливок, склонность однофазных сплавов к транскристаллизации тем меньше, чем шире интервал кристаллизации или чем больше концентрация растворимого компонента в этих сплавах. Эта тенденция однофазных сплавов известна и из практики литья слитков (см. рис. 11, кривая 1).

Однако на с. 33—34 указаны случаи, когда этой тенденции не наблюдается (см. рис. 13, б).

И здесь получается, что для одних условий литья (см. рис. 13, а) размер зерна и протяженность зоны столбчатых кристаллов зависят от содержания кремния, хотя и не так, как предсказывает теория; для других (см. рис. 13, б) такая зависимость не фиксируется.

Напомним, что разница условий литья слитков состоит по-прежнему в следующем. В первом случае (см. рис. 13, а) расплав при плавке перегревали до 1220 К и затем охлаждали в печи до заданной температуры заливки. Во втором случае (см. рис. 13, б)

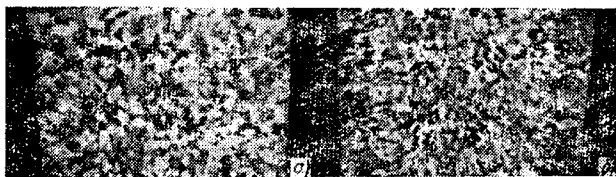


Рис. 47. Макроструктуры слитков алюминия А7 с 0,02% Ti; расплав залит в графитовую изложницу:

а — нагретую до 920 К; **б** — в холодную

расплав заливали сразу же после достижения им при плавке заданного перегрева над ликвидусом. Прочие условия литья во всех случаях сохранились практически одинаковыми.

Согласно основным представлениям описательной теории кристаллизации отливок, увеличение скорости охлаждения затвердевающего расплава приводит к сокращению зоны столбчатых кристаллов, так как увеличение скорости охлаждения расширяет область расплава, переохлажденного перед фронтом транскристаллизации, что увеличивает число растущих перед фронтом свободных кристаллов, которые поэтому раньше останавливают рост столбчатых кристаллов.

Выше, анализируя данные, приведенные на рис. 2 и 3, мы пришли к тому же выводу: увеличение скорости охлаждения затвердевающего расплава и, следовательно, скорости затвердевания отливки (см. п. 10) должно сокращать протяженность зоны столбчатых кристаллов в ее теле (см. с. 11 и 29—31). К такому же выводу приводит анализ данных на рис. 44.

Напомним читателю, что этот вывод сделан на основе анализа связи размера кристаллического зерна в слитке диаметром 250 мм из стали 30Л со скоростью его затвердевания по данным Б. Б. Гуляева (см. рис. 3). Однако так бывает не всегда. На рис. 47 представлены макроструктуры темплетов слитков алюминия А7, модифицированного 0,02% Ti. Слитки залиты в графитовую изложницу, нагретую до 920 К (рис. 47, а), и в холодную изложницу (рис. 47, б). Температура заливки 990 К; при плавке расплав не перегревали выше температуры заливки. Очевидно: скорость охлаждения во время затвердевания расплава практически не влияет на величину зерна в центральной части слитка.

С точки зрения основных представлений описательной теории кристаллизации перемешивание затвердевшего расплава любым способом вызывает ускорение отвода перегрева в незатвердевшей части тела отливки и, следовательно, расширение слоя расплава, переохлажденного перед фронтом кристаллизации; последнее приводит к сокращению зоны столбчатых кристаллов и измельчению зерна в центральной зоне тела отливки. Учитывая эту точку зрения, можно предположить, что с помощью способа принудительного перемешивания кристаллическое строение отливки, залитой

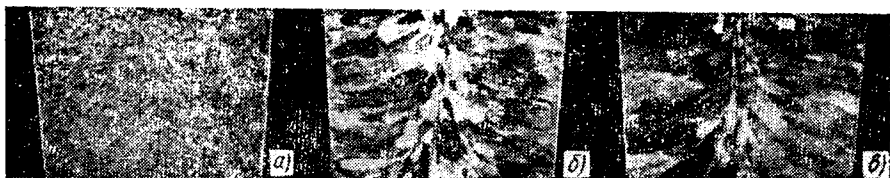


Рис. 48. Макроструктура слитков алюминия А7; расплав залит:
а — без перегрева; б — с перегревом на 20 К; в — с перегревом на 300 К

с большим перегревом, приближается к кристаллическому строению такой же отливки, залитой с гораздо меньшим перегревом и без перемешивания.

На рис. 48 приведены макроструктуры темплетов слитков немодифицированного алюминия А7, залитых сверху в холодную графитовую изложницу (высотой 100 мм, диаметром 45 мм). Первый слиток залит без перегрева, второй при перегреве на 20 К, третий — при перегреве на 300 К. На рис. 49 приведены макроструктуры поперечных темплетов слитков того же алюминия, залитых в те же изложницы, но с вибрацией во время их заполнения (частота вибрирования 230 Гц, амплитуда $\sim 0,1$ мм, мощность привода вибратора 1 кВт, время вибрирования ~ 2 с). Первый слиток залит при перегреве на 20 К, второй — при перегреве на 60 К.

Сопоставляя результаты этих опытов, можно найти подтверждение высказанному предположению. Действительно, вибрирование (если, естественно, рассматривать его как способ перемешивания) отливки, залитой с перегревом на 20 К, приводит к измельчению зерна (рис. 49, а). При этом кристаллическое строение ее в целом сопоставимо с кристаллическим строением отливки, залитой без перегрева и без вибрации (рис. 48, а).

Высказанное предположение не подтверждается при анализе других отливок. Например, вибрирование отливки, залитой с перегревом на 60 К (рис. 49, б), не приводит к измельчению зерна и строение ее в целом такое же, как и у отливки, залитой без виб-



Рис. 49. Макроструктуры слитков А7, залитых с вибрацией:
а — перегрев на 20 К, вибрация во время заполнения изложницы ~ 2 с; б — перегрев на 60 К, вибрация ~ 2 с; в — перегрев на 200 К, вибрация изложницы 15:



Рис. 50. Излом цинка Ц1, залитого без перегрева в вибрируемую изложницу: вибрирование до конца затвердевания

рирования, но при перегреве на 20 К (см. рис. 48, б): в том и другом случаях наблюдается сквозная транскристаллизация.

На основании приведенных опытов можно заключить, что вибрирование вызывает измельчение кристаллического зерна в отливках при литье с весьма низким перегревом (см. рис. 48, а и 49, а). Этот вывод согласуется с указанием описательной теории

кристаллизации отливок на то, что принудительное перемешивание затвердевающего расплава приводит не только к ускорению отвода теплоты перегрева от незатвердевшей части отливки. При вынужденном движении расплав оплавляет и разрушает фронт дендритных кристаллов, растущих от стенок полости формы. Образующиеся обломки кристаллов, если они попадают в неперегретый расплав, служат затравками кристаллизации и вызывают измельчение зерна.

По-видимому, при литье алюминия с вибрацией (рис. 49, а) обломки кристаллов, образующиеся только во время заполнения изложницы (время вибрирования ~ 2 с), не успевают расплавиться при перегреве на 20 К. Это означает, что при вибрировании расплава с большим перегревом в течение времени, достаточного для полного отвода теплоты перегрева, кристаллическое зерно будет измельчаться. На рис. 49, в приведена макроструктура слитка алюминия А7, залитого с перегревом на 200 К, при вибрировании изложницы в течение 15 с (время отвода перегрева ~ 10 с). В этом случае произошло измельчение зерна приблизительно такое же, как и при кратковременном вибрировании (только во время заполнения слабо перегретого расплава).

Однако можно привести результаты опытов, не подтверждающие такого вывода. На рис. 50 представлен поперечный излом слитка цинка Ц1, залитого без перегрева в графитовую изложницу при вибрировании расплава в течение всего времени затвердевания слитка (частота 230 Гц, амплитуда $\sim 0,1$ мм, мощность привода вибратора 1 кВт). Кристаллическое строение слитка не изменилось.

Таким образом, в описательной теории кристаллизации отливок пока нет удовлетворительного объяснения воздействию на процесс формирования кристаллического строения отливок таких важных технологических факторов, как температура заливки расплава в форму, скорость охлаждения расплава в форме, и воздействию способов принудительного перемешивания расплава во время затвердевания его в форме. Иначе говоря, пока мы не можем однозначно использовать эти факторы и способы для эффективного управления процессом кристаллизации отливок в реальных условиях литья.

35. СХЕМА ПРОЦЕССА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОТЛИВКИ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Описательная теория кристаллизации отливки недостаточна для уверенного выбора способов управления формированием кристаллического строения ее тела. Требуется создание *количественной теории*. Для этого в первую очередь необходимо тщательное исследование процесса формирования кристаллического строения тела отливки в реальных условиях литья.

В соответствии с постановкой центральной проблемы теории формирования отливки такое исследование должно быть *макрофизическим* (см. п. 3).

Задача исследования — установление связи характеристик $I_{ст}$, $d_{ст}$, d кристаллического строения тела отливки с характеристиками $T_{зал}$, U_z условий литья и плавки литейных сплавов (см. пп. 4 и 10—13).

Установить требуемые зависимости можно только с учетом реальных условий зарождения и совместного роста кристаллов в расплаве, охлаждающемся в литейной форме и, конечно, с учетом условий *плавки* литейных сплавов и *заливки* их расплава в форму. Однако именно эти условия в общей теории кристаллизации количественно пока не учитываются (см. пп. 28—30).

Например, можно судить о влиянии перегрева расплава во время плавки, учитывая дезактивацию активных примесей, но выразить его количественно пока невозможно. Далее можно предсказать влияние температуры заливки расплава, учитывая расплавление или сохранение тех обломков ветвей дендритов, которые образуются во время заполнения формы, но выразить это влияние количественно также пока невозможно. Мы просто не знаем число активных примесей, не утративших активность в различных условиях плавки, число и размеры обломков кристаллов, образующихся в различных условиях заливки, и т. д.

В этой связи исследование процесса формирования кристаллического строения тела отливки, необходимое для создания *количественной теории*, следует выполнить на математической модели процесса кристаллизации отливки. Само собою разумеется, что в такой модели должны быть учтены только те представления о появлении в расплаве затравок или о зарождении кристаллов, а также о механизме их роста, которые являются наиболее общими, существенными и достоверными для реальных условий литья и которые на данном уровне наших знаний удобно представить количественно.

Уровень наших знаний о появлении и совместном росте кристаллов в расплаве, охлаждающемся в литейной форме, определяется общей теорией кристаллизации металлов и сплавов и теорией кристаллизации отливок (см. гл. 6 и 7).

Схема процесса

Описание главных черт процесса кристаллизации отливки приведено в п. 40. К этому описанию необходимо добавить, что реально процесс сопровождается движением расплава в незатвердевшей части отливки.

В начале — это вынужденная конвекция, возникающая в результате заполнения формы. С течением времени вынужденная конвекция затухает. Остается только естественная, которая будет существовать до тех пор, пока в незатвердевшем расплаве сохраняется разница концентрации растворимых компонентов сплава и разница температуры у фронта кристаллизации и в центральной части незатвердевшего объема этого расплава, ибо и то, и другое вызывает разницу плотности расплава и, следовательно, его движение.

Вынужденное и свободное движение расплава будет вызывать не только перемещение кристаллов, растущих в двухфазной зоне фронта кристаллизации, как это указывается в теории Г. П. Иванцова, не только будет способствовать оплавлению и разрушению ветвей дендритов фронта кристаллизации, как это предполагает теория Н. И. Хворинова, но и существенно повлияет на процессы тепло- и массопереноса перед фронтом кристаллизации и в особенности в его двухфазной зоне.

Для математического описания процесса кристаллизации отливки на макрофизическом уровне в общем случае достаточно использовать систему уравнений тепло- и массопереноса, гидродинамики и фильтрации. Однако для количественного исследования требуются упрощения, не искажающие главные черты реального процесса кристаллизации расплава в литейной форме.

Мы уже знаем, что решающее влияние на свойства отливок оказывают размер и форма кристаллических зерен, их преимущественная ориентировка, а также ликвация, величина и распределение пористости (см. с. 11—28). Экспериментальные исследования структурных особенностей строения литых металлов и сплавов, выполненные советскими и зарубежными учеными, убедительно показали, что степень развития ликвации в макро- и микрообластях, газоусадочной пористости и других дефектов строения тела отливок в общем случае определяется формой роста кристаллов и структурой фронта кристаллизации отливки.

В реальных условиях литья для всех технических металлов и сплавов характерны ячеисто-дендритная и дендритная формы роста кристаллов. Поэтому в реальных условиях литья степень развития дефектов строения отливок определяется структурой фронта кристаллизации и, следовательно, теми процессами, которые обуславливают формирование кристаллического строения отливки из данного металла или сплава. Другими словами, *каждому типу кристаллического строения отливки из данного металла*

или сплава соответствует свой набор и своя степень развития дефектов.

В этой связи можно пренебречь молекулярным и конвективным переносом компонентов и примесей, растворенных в расплаве и в твердой фазе.

Таким образом, для описания процесса кристаллизации отливки достаточно четырех уравнений. Три уравнения теплопроводности: первое уравнение — для незатвердевшего расплава; второе — для двухфазной зоны фронта кристаллизации, оно должно учитывать выделение теплоты кристаллизации в объеме двухфазной зоны в соответствии с уравнением А. Н. Колмогорова (15-I) и (23-I), и третье — для уже затвердевшей части тела отливки. Четвертое уравнение является уравнением линии ликвидуса диаграммы состояния компонентов данного сплава; например, (56-I).

Однако, если читатель еще раз внимательно прочтет п. 33, то убедится, что согласно описанию процесса формирования кристаллического макростроения отливок принципиального различия между макростроением отливок из сплавов и металлов нет. В этой связи литейные сплавы, большинство из которых узкоинтервальные (т. е. с малой разницей T_L и T_S), можно, в первом приближении, рассматривать как однокомпонентные системы; другие компоненты в них являются растворимыми примесями, оказывающими влияние на интервал метастабильности $\Delta T'$, скорость n (ΔT) зарождения кристаллов и скорость v (ΔT) их роста. Тогда математическая модель процесса кристаллизации отливки еще более упрощается, ибо четвертое уравнение, например (56-I), в системе уравнений теплопроводности, можно не учитывать¹.

Определенным основанием для такого упрощения модели являются данные Я. В. Гречного по измерению скорости n зарождения кристаллов в сплавах (см. рис. 24 и 25). Очевидно, что увеличение концентрации второго компонента изменяет как $\Delta T'$, так и скорость n (ΔT).

Упрощение зависимости скорости зарождения и роста кристаллов от переохлаждения

Общая теория кристаллизации определяет скорость n зарождения кристаллов для металлических систем формулами (7) и (13). Эти формулы сложны для использования в общем кинетическом уравнении А. Н. Колмогорова.

На рис. 34 приведена кривая 1, рассчитанная по формуле (7) для самопроизвольного зарождения кристаллов висмута. С допустимой погрешностью эту кривую можно описать формулой

$$n = K_n (\Delta T - \Delta T')^v, \quad (21)$$

¹ Математическая модель процесса кристаллизации отливок из чистого металла впервые найдена И. Л. Воробьевым в 1972 г.

где K_n — кинетический коэффициент, равный скорости зарождения центров кристаллизации при переохлаждении расплава, на один градус превышающем интервал $\Delta T'$ метастабильности.

Для рассматриваемого случая $\Delta T' = 28$ К, $\nu = 3,0$ и $K_n = 2 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-3}$.

На рис. 34 кривая 2 рассчитана по формуле (13) для зарождения кристаллов висмута на частицах нерастворимой изоморфной примеси. Сопоставление кривых 1 и 2 показывает, что изменение скорости зарождения с увеличением переохлаждения ΔT сверх $\Delta T'$ происходит одинаково. В этой связи кривую 2 можно удовлетворительно описать формулой (21) при тех же значениях K_n и ν , но при $\Delta T' = 10$ К.

Формула (21) вполне удовлетворительно согласуется с данными опытов.

На рис. 35 приведены опыты В. И. Данилова с натрием разной окисленности (окислы натрия изоморфны с кристаллами натрия). Кривые рассчитаны по формуле (21) при $\nu = 2,5$, $K_n = 3,5 \times 10^8 \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-2,5}$, $\Delta T' = 3,2$ К (кривая 1) и $\Delta T' = 0,65$ К (кривая 2). Результаты измерения скорости зарождения центров кристаллизации чистого азобензола и азобензола с пипероналом в зависимости от переохлаждения (см. рис. 32) также удовлетворительно аппроксимируются формулой (21) при $\nu = 2,5$, $K_n = 1,78 \cdot 10^7 \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-2,5}$ и $\Delta T' = 31$ К (кривая 1) и $\Delta T' = 36$ К (кривая 2).

Таким образом, скорость зарождения центров кристаллизации можно рассчитать по формуле (21). Анализ данных различных опытов показывает, что величины K_n , $\Delta T'$ и ν в формуле (21) характеризуют род вещества. При этом $\Delta T'$ изменяется в зависимости от количества примесей, влияющих на скорость зарождения. Величина ν для чистых веществ колеблется от 1,0 до 3,0. В расчетах скорости зарождения центров кристаллизации сплавов величины K_n , $\Delta T'$ и ν потребуются знать в зависимости от состава сплава (см. рис. 24 и 25).

Общая теория роста кристаллов определяет линейную скорость v роста для металлов формулами (9), (11) и (12). Учитывая идентичность формул (7) и (9), последнюю можно упростить, представив ее в виде, аналогичном формуле (21). Так как интервал $\Delta T'$ метастабильности расплава при зарождении двумерных зародышей (рис. 26) весьма мал (см., например, рис. 27), то для приближенных расчетов вместо формулы (9) можно пользоваться более простой:

$$v = K_v (\Delta T)^\mu, \quad (22)$$

где K_v — кинетический коэффициент, равный линейной скорости роста кристалла при переохлаждении расплава на один градус.

К формуле вида (22) приводятся (11) и (12).

Таким образом, линейную скорость роста кристаллов можно рассчитывать по формуле (22). Величина K_v характеризует ве-

щество и влияние примесей, μ — механизм роста. При этом для дендритного роста $\mu = 2,0$ (см. рис. 30), для нормального роста $\mu = 1,0$ (см. рис. 29), для послойного дислокационного роста $\mu = 2,0$ (см. рис. 28) и для послойного роста в случае возникновения на гранях кристаллов двумерных зародышей можно принять $\mu \approx 1$ (см. рис. 27).

Математическая модель И. Л. Воробьева

Рассмотрим плоскую стенку отливки, представив ее бесконечной плитой, симметрично охлаждающейся в литейной форме (рис. 51).

Пусть $\kappa_3(t)$ — как и прежде, закон продвижения фронта кристаллизации; $\kappa_1(t)$ — закон перемещения изотермы $T_{кр} \equiv \text{const}$. Тогда в координатах x, t кривые $\kappa_1(t)$ и $\kappa_3(t)$ ограничивают положение двухфазной зоны D фронта (рис. 52).

Мысленно выделим элемент объема $\Delta x F_0$ двухфазной зоны на расстоянии x от оси плиты при условии, что $\kappa_1 \leq x \leq \kappa_3$. Относительный объем твердой фазы в этом элементе можно выразить функцией $\psi(x, \Delta x, t)$. Тогда относительный объем твердой фазы во всей двухфазной зоне

$$\Psi(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \Psi(x, \Delta x, t).$$

При этом, если $x = \kappa_1(t)$, то на границе двухфазной зоны с незатвердевшим расплавом $\Psi(\kappa_1, t) \equiv 0$. Если $x = \kappa_3(t)$, то на границе двухфазной зоны с фронтом кристаллизации $0 \leq \Psi(\kappa_3, t) \leq 1$, так как следует допустить возможность роста кристаллов и самого фронта.

Пусть теплота кристаллизации, выделяющаяся в двухфазной зоне, пропорциональна $\Psi(x, t)$ и «размазана» в малой окрестности точки ее выделения. Тогда, предполагая, что

$$\Psi(x, t) = \Psi(\Delta T), \quad (23)$$

эту функцию можно выразить уравнением А. Н. Колмогорова (15-1) при ω из (23-1), n и ν соответственно из (21) и (22), если переохлаждение расплава в двухфазной зоне определять как

$$\Delta T = T_{кр} - T_2(x, t). \quad (24)$$

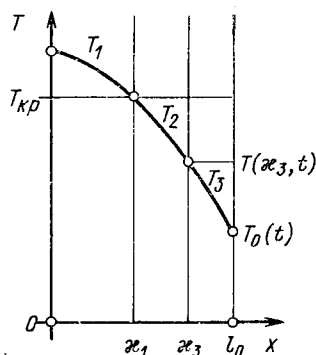


Рис. 51. Схема к математической модели И. Л. Воробьева

С учетом принятых допущений, математическую модель процесса кристал-

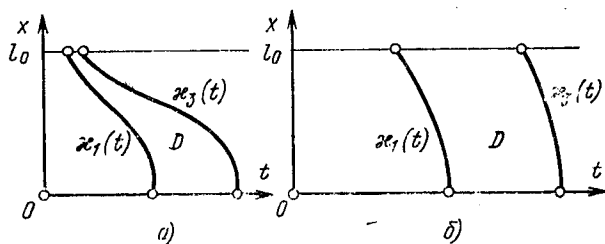


Рис. 52. Схема зависимости положения границ двухфазной зоны фронта кристаллизации отливки от времени при интенсивности охлаждения:

а — большой; б — весьма малой

лизации отливки можно представить следующей системой уравнений и условий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \kappa_1; \quad t > t_{\text{зал}}; \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{L\rho_3}{c_2\rho_2} \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \quad \kappa_1 < x < \kappa_3; \quad t > t_{\text{зал}}; \\ \frac{\partial T_3}{\partial t} &= a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}; \quad \kappa_3 < x < l_0; \quad t > t_{\text{зал}}; \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\Psi = 1 - \exp \left\{ -\eta \left[N_3 \left(\int_0^{\vartheta} K_v \Delta T^\mu d\zeta \right)^3 + \int_0^{\vartheta} K_n (\Delta T - \Delta T')^\nu \left(\int_{\vartheta'}^{\vartheta} K_v (\Delta T)^\mu d\zeta \right)^3 d\vartheta' \right] \right\}; \quad (26)$$

$$T_1(x, t_{\text{зал}}) = T_{\text{зал}} \equiv \text{const}; \quad (27)$$

$$\Psi(x, t_{\text{зал}}) = 0; \quad \kappa_1(t_{\text{зал}}) = \kappa_3(t_{\text{зал}}) = 0 \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_i(0, t)}{\partial x} &= 0; \quad i = 1, 2, 3; \\ -\lambda_i \frac{\partial T_i(l_0, t)}{\partial x} &= q_0(t) \quad \text{или} \quad T_i(l_0, t) = T_0(t); \quad i = 1, 2, 3; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} T_2(\kappa_1, t) &= T_1(\kappa_1, t) = T_{\text{кр}} \equiv \text{const}; \\ -\lambda_2 \frac{\partial T(\kappa_1, t)}{\partial x} &= -\lambda_1 \frac{\partial T_3(\kappa_1, t)}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} T_3(\kappa_3, t) &= T_2(\kappa_3, t) = T(\kappa_3, t); \\ -\lambda_3 \frac{\partial T_3(\kappa_3, t)}{\partial x} &= -\lambda_2 \frac{\partial T_2(\kappa_3, t)}{\partial x} + L\rho_2 [1 - \\ &\quad - \Psi(\kappa_3, t)] K_v [T_{\text{кр}} - T(\kappa_3, t)]^\mu, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

где $\vartheta = t - t_{\text{зал}}$; $\vartheta' = t' - t_{\text{зал}}$; t' — начало зарождения кристаллов, т. е. при $t \geq t'$ переохлаждение $T_{\text{кр}} - T(\kappa_1, t) \geq \Delta T'$.

Математическая модель (25)—(31) отражает *главные черты* реального процесса кристаллизации отливки в литейной форме.

Во-первых, в ней с помощью уравнения (26) учтена *кинетика совместного роста кристаллов в двухфазной зоне фронта кристаллизации* как от затравок, так и от зародышей, возникающих самопроизвольно или на поверхности частиц нерастворимых примесей-катализаторов кристаллизации (активные примеси, модификаторы 2-го рода).

Во-вторых, в модели (25)—(31) учтена возможность *роста кристаллов фронта кристаллизации*, находящихся в контакте с переохлажденным расплавом в его двухфазной зоне, со скоростью $K_v [T_{\text{кр}} - T(\kappa_3, t)]^n$. Эта возможность определяется значением функции $\Psi(\kappa_3, t)$ во втором условии (31) и реализуется в случаях, когда $0 \leq \Psi(\kappa_3, t) < 1$. Очевидно, что пока $\Psi(\kappa_3, t) = 1$, фронт кристаллизации будет перемещаться в результате присоединения к нему кристаллов, появившихся и выросших только в двухфазной зоне. Как только $\Psi(\kappa_3, t)$ станет равной нулю, фронт кристаллизации будет перемещаться в результате только роста кристаллов самого фронта — возникнет транскристаллизация.

36. ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическую модель (25)—(31) удобно использовать для количественного исследования процесса формирования кристаллического макростроения тела отливки.

Действительно, значение функции $\Psi(\kappa_3, t)$ зависит от характеристик условий литья и плавки и от кинетических параметров кристаллизации (скорости зарождения и роста кристаллов) данного сплава. Поэтому в общем случае $\Psi(\kappa_3, t)$ за время затвердевания отливки может изменяться от единицы до нуля в начале процесса (что вызывает образование зоны замороженных кристаллов и возникновение транскристаллизации) и, затем, от нуля до единицы в конце процесса (что приведет к прекращению транскристаллизации и образованию центральной зоны равноосных кристаллов).

Очевидно, если в момент времени $t = t_{\text{ст}}$ функция $\Psi(\kappa_3, t_{\text{ст}}) = 1$, то $\kappa_3(t_{\text{ст}})$ — протяженность зоны столбчатых кристаллов.¹

$$l_{\text{ст}} = \kappa_3(t_{\text{ст}}). \quad (32)$$

¹ Если при $t_k < t_{\text{ст}}$ функция $\Psi(\kappa_3, t_k)$ тоже равна единице, то транскристаллизации предшествовало образование замороженных кристаллов. Протяженность этой зоны $l_k = \kappa_3(t_k)$.

Если в центральной зоне $l_{\text{ц}} = l_0 - l_{\text{ст}}$ тела отливки вырастут N кристаллов на единицу ее объема, то средний размер кристаллического зерна в этой зоне

$$d = \frac{2}{(\varphi N)^{1/3}}, \quad (33)$$

где $N = N_s + \bar{N}_n$, а

$$\bar{N}_n = \frac{1}{l_{\text{ц}}} \int_0^{l_{\text{ц}}} \int_0^{\infty} [1 - \Psi(x, t)] K_n (\Delta T - \Delta T')^{\nu} dt dx.$$

Для вычисления относительных характеристик кристаллического макростроения тела отливки представим математическую модель (25)–(31) в обобщенных переменных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} &= K_{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial X^2}; \quad 0 < X < \chi_1(\tau); \quad \tau > F_{00}; \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} &= K_{a_2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial X^2} + \mathcal{L}_2 \frac{1}{K_{\rho_2} K_{c_2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}; \quad \chi_1(\tau) < X < \chi_3(\tau); \\ \frac{\partial \Theta_3}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial X^2}; \quad \chi_3(\tau) < X < 1; \quad \tau > F_{00}; \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\Psi = 1 - \exp \left\{ - \left[\Omega_1^3 \int_0^{\Theta'} (\Theta' - \Theta_2)^{\nu} \left(\int_{\Theta'}^{\Theta} (1 - \Theta_2)^{\mu} d\xi \right)^3 d\Theta' + \Omega_2^3 \left(\int_0^{\Theta} (1 - \Theta_2)^{\mu} d\xi \right)^3 \right] \right\}; \quad (35)$$

$$\Theta = \tau - F_{00}; \quad \Theta' = \tau' - F_{00}; \quad (36)$$

$$\Theta(X, F_{00}) = \Theta_{\text{зал}}; \quad \Psi(X, F_{00}) = 0; \quad \chi_1(F_{00}) = \chi_3(F_{00}) = 1; \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} -K_{\lambda_i} \frac{\partial \Theta_i(1, \tau)}{\partial X} &= q_0(\tau) \quad \text{или} \quad \Theta_i(1, \tau) = \Theta_0(\tau); \\ \frac{\partial \Theta_i(0, \tau)}{\partial X} &= 0; \quad i = 1, 2, 3; \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$-K_{\lambda_1} \frac{\partial \Theta_1(\chi_1, \tau)}{\partial X} = -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_1, \tau)}{\partial X}; \quad \Theta_1(\chi_1, \tau) = \Theta_2(\chi_1, \tau) = 1; \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} -K_{\lambda_2} \frac{\partial \Theta_2(\chi_3, \tau)}{\partial X} + \mathcal{L}_2 [1 - \Psi(\chi_3, \tau)] \Omega_{\nu} [1 - \\ - \Theta(\chi_3, \tau)]^{\nu} &= - \frac{\partial \Theta_3(\chi_3, \tau)}{\partial X}; \\ \Theta_2(\chi_3, \tau) &= \Theta_3(\chi_3, \tau) = \Theta(\chi_3, \tau), \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где Ω_1 и Ω_2 — обобщенные параметры кристаллизации сплава в литейной форме,

$$\Omega_1 = \Omega_n \Omega_v; \quad (41)$$

$$\Omega_2 = \Omega_N \Omega_v; \quad (42)$$

$$\Omega_n = [\varphi K_n (T_{кр} - T_c)^{\nu} \mathfrak{R}^2/a_3]^{1/\nu} \mathfrak{R}; \quad (43)$$

$$\Omega_N = (\varphi N_3)^{1/\nu} \mathfrak{R}; \quad (44)$$

$$\Omega_v = K_v (T_{кр} - T_c)^{\mu} \mathfrak{R}/a_3. \quad (45)$$

Относительные переменные Θ , X , χ , τ и q_0 , коэффициенты подобного преобразования K_λ , K_c , K_p , и K_a , а также критерии Fo_0 и $\mathcal{L}_2$ читателю известны из части I учебного пособия.

Теперь можно определить относительные характеристики Λ и Δ кристаллического макростроения тела отливки (см. п. 4):

$$\Lambda = \chi_3 (\tau_{ст}); \quad (46)$$

$$\Delta = \left(\frac{N_0}{N} \right)^{1/3}, \quad (47)$$

где $N_0 = N_3 + N_{n0}$; $N = N_3 + N_{nc}$; N_{n0} и N_{nc} — число кристаллов, выросших только от зародышей соответственно у поверхности тела отливки и в центре,

$$N_{n0} = \frac{1}{\varphi l_0^3} \Omega_n^3 \int_0^\infty [1 - \Psi(1, \tau)] [\Theta' - \Theta_2(1, \tau)]^\nu d\tau;$$

$$N_{nc} = \frac{1}{\varphi l_0^3} \Omega_n^3 \int_0^\infty [1 - \Psi(0, \tau)] [\Theta' - \Theta_2(0, \tau)]^\nu d\tau.$$

К сожалению, использование модели (34)—(40) для расчета характеристик Λ и Δ существенно затруднено из-за незнания соотношения между Ω_1 и Ω_2 , т. е. незнания числа N_3 затравок и N_n зародышей, которые появляются в кристаллизующемся расплаве в реальных условиях. Более того, без этих знаний модель (34)—(40) пока нельзя использовать для исследования процесса формирования кристаллического макростроения тела отливки в зависимости от условий литья, характеристику которых мы дали в гл. 3.

Однако можно исследовать *объемную кристаллизацию отливки* с затравками и без них, ибо это сразу позволит выявить специфику влияния затравок на ход процесса.

Правда, такое исследование легко выполнить на математической модели. Реально объемную кристаллизацию осуществить нельзя. Можно только приблизиться с той или иной точностью к условиям объемной кристаллизации. Путь такого приближения — уменьшение интенсивности охлаждения кристаллизующегося расплава, так как в результате положение кривых $\kappa_1(t)$ и $\kappa_3(t)$

в координатах x, t (см. рис. 52, а), будет приближаться к прямым, параллельным оси x (см. рис. 52, б).

Это исследование объемной кристаллизации на математической модели (34)—(40) и в эксперименте целесообразно еще и потому, что при его выполнении полностью (в эксперименте — практически полностью) исключается тепловое влияние перегрева на процесс кристаллизации. Возможно, следовательно, очень четко выявить воздействие перегрева при плавке и заливке на жидкое состояние металлов и сплавов, а также на величины n, v и $\Delta T'$, так как зарождение и рост кристаллов в реальных металлах происходит при решающем влиянии различных примесей.

37. УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что математическая модель И. Л. Воробьева является частным случаем модели, приведенной на с. 68.

2. Найти количественное выражение тем допущениям, при соблюдении которых математическую модель И. Л. Воробьева можно использовать для исследования процесса формирования кристаллического макростроения отливок из сплавов.

3. Преобразовать математическую модель (34)—(40) к виду, удобному для исследования объемной неизотермической кристаллизации отливок.

Г л а в а 8. ОБЪЕМНАЯ КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

Общая математическая теория объемной кристаллизации однокомпонентных систем разработана А. Н. Колмогоровым в 1937 г. (см. п. 16). Здесь мы используем ее для исследования кинетики кристаллизации расплава металлов и сплавов в условиях охлаждения, характерных для литейной формы. Это исследование необходимо для выявления особенностей кинетики кристаллизации при воздействии примесей на зарождение и рост кристаллов, а также при появлении в расплаве затравок кристаллов.

38. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕМНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В ЛИТЕЙНОЙ ФОРМЕ. УРАВНЕНИЕ Н. Г. ГИРШОВИЧА

Объемная кристаллизация возможна в однородном температурном поле во всем объеме расплава, залитого в литейную форму.

Исходя из этого очевидного положения, математическую модель объемной кристаллизации следует найти из модели И. Л. Воробьева как ее частный случай.

Действительно, предположим, что неоднородность температурного поля $T_2(x, t)$ весьма мала и двухфазная зона охватывает все сечение отливки, т. е. $\kappa_1(t) = 0$ и $\kappa_3(t) = l_0$ (см. рис. 51). Тогда второе дифференциальное уравнение в системе (25) можно

распространить на все сечение отливки и, следовательно, представить в виде

$$-c_2\rho_2 \int_0^{l_0} \frac{\partial T_2}{\partial t} dx = \int_0^{l_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) dx - L_2\rho_3 \int_0^{l_0} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx.$$

Так как $-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = q(x, t)$, то

$$q_0(t) = L_2\rho_3 \int_0^{l_0} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx - c_2\rho_2 \int_0^{l_0} \frac{\partial T_2}{\partial t} dx,$$

ибо, граничным условиям (29),

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(l_0, t)}{\partial x} = q_0(t) \text{ и } -\lambda_2 \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial x} = 0.$$

Пусть неоднородность температурного поля $T_2(x, t)$ настолько мала, что из (26) $\Psi(0, t) \approx \Psi(l_0, t)$, т. е. количество твердой фазы, растущей в центре тела отливки, приблизительно равно количеству твердой фазы, растущей у ее поверхности. Это означает, что $\Psi \approx \Psi(t)$ и, естественно, $T_2 \approx T_2(t)$, т. е. и Ψ , и T_2 — функции только времени. Следовательно,

$$q_0(t) = \left(L_2\rho_3 \frac{d\Psi}{dt} - c_2\rho_2 \frac{dT_2}{dt} \right) l_0.$$

Далее, так как T_2 не зависит от координат пространства, занятого расплавом, то полученное уравнение можно распространить на отливку любой конфигурации заменой l_0 на ее приведенный размер $\mathfrak{R}$ (см. с. 61.1—62.1):

$$q_0(t) = L_2\rho_3\mathfrak{R} \frac{d\Psi}{dt} - c_2\rho_2\mathfrak{R} \frac{dT_2}{dt}. \quad (48)$$

Уравнение (48) впервые нашел Н. Г. Гиршович и в 1957 г. предложил его для анализа объемной неизотермической кристаллизации отливок.

Условимся называть уравнение (48) *уравнением Н. Г. Гиршовича*.

Пользуясь тем же методом, нетрудно преобразовать¹ остальные уравнения системы (25). Получим совокупность из трех уравнений в обыкновенных производных:

$$\left. \begin{aligned} -c_1\rho_1\mathfrak{R} \frac{dT_1}{dt} &= q_0(t); \quad t > t_{\text{зал}}; \\ -c_2\rho_2\mathfrak{R} \frac{dT_2}{dt} &= q_0(t) - L_2\rho_3\mathfrak{R} \frac{d\Psi}{dt}; \quad t > t_1; \\ -c_3\rho_3\mathfrak{R} \frac{dT_3}{dt} &= q_0(t); \quad t > t_2, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

¹ Преобразование дифференциальных уравнений теплопроводности для случаев малой интенсивности охлаждения отливки читателю известны из части I учебного пособия (см. с. 158.1—165.1).

где, как и раньше, t_1 — продолжительность охлаждения перегретого расплава до $T_{кр}$; t_2 — время полного затвердевания отливки.

Из этих уравнений первое и третье хорошо известны из части I учебного пособия. Для математической модели объемной кристаллизации отливки нам необходимо второе уравнение вместе с (26), т. е. уравнение Н. Г. Гиршовича вместе с уравнением А. Н. Колмогорова:

$$\left. \begin{aligned} -c_2 \rho_2 \Re \frac{dT_2}{dt} &= \beta (T_2 - T_c) - L_2 \rho_3 \Im \frac{d\Psi}{dt}; \quad t > t_1; \\ \Psi &= 1 - \exp(-\omega); \\ T_2(t_1) &= T_{кр}; \quad \Psi(t_1) = 1, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где, согласно (26),

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi K_n K_v^3 \int_0^{\vartheta} (T' - T_2)^v \left(\int_{\delta'}^{\vartheta} (T_{кр} - T_2)^\mu d\xi \right)^3 d\vartheta' + \\ &+ \varphi N_s K_v^3 \left(\int_0^{\vartheta} (T_{кр} - T_2)^\mu d\xi \right)^3; \\ \vartheta &= t - t_1; \quad \vartheta' = t' - t_1. \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь, в уравнении Н. Г. Гиршовича, для определенности дальнейшего исследования принято

$$q_0(t) = \beta (T_2 - T_c), \quad (52)$$

т. е. предполагается, что расплав затвердевает в тонкостенном кокиле с $l_\phi/l_0 \ll 1$ (см. с. 271.1—272.1).

Представим математическую модель объемной кристаллизации отливки в обобщенных переменных:

$$\left. \begin{aligned} K_{c_2} K_{\rho_2} \frac{d\Theta}{d\tau} &= -\text{Bi}_0 \Theta + \mathcal{L}_2 \frac{d\Psi}{d\tau}; \quad \tau > \text{Fo}_1; \\ \Psi &= 1 - \exp(-\omega); \\ \Theta(\text{Fo}_1) &= 1; \quad \Psi(\text{Fo}_1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где, согласно (35),

$$\omega = \Omega_1^3 \int_0^{\theta} (\Theta' - \Theta)^v \left(\int_{\theta'}^{\theta} (1 - \Theta)^\mu d\xi \right)^3 d\theta' + \Omega_2^3 \left(\int_0^{\theta} (1 - \Theta)^\mu d\xi \right)^3. \quad (54)$$

Здесь принято: $\text{Bi}_0 = \beta \Re / \lambda_3$; $\tau = a_3 t / \Re^2$; $\text{Fo}_1 = a_3 t_1 / \Re^2$; $\Omega_N = (\varphi N_s)^{1/3} \Re$; $\Omega_n = [\varphi K_n (T_{кр} - T_c)^v \Re^2 / a_3]^{1/3} \Re$; $\Omega_v = K_v \times (T_{кр} - T_c)^\mu \Re / a_3$; $\theta = \tau - \text{Fo}_1$; $\theta' = \tau' - \text{Fo}_1$.

Полученная математическая модель ¹ имеет исключительное значение для теории кристаллизации. Дело в том, что теория кристаллизации должна дать ответы на следующие три вопроса: как зарождаются кристаллы и сколько их появляется в единицу времени, т. е. какова скорость их зарождения; как растут эти кристаллы и какова линейная скорость их роста; и, наконец, какое количество твердой фазы появится в любой момент времени, кристаллизации ограниченного объема расплава в конкретных условиях течения процесса, т. е. какова $\Psi(x, t)$.

На первые два вопроса общая теория кристаллизации дает ответ количественно в виде формул (6), (8), (10), (12)—(14), которые мы условились представить в виде (21) и (22). На третий теория дает однозначный ответ лишь для *объемной изотермической кристаллизации*, т. е. при $(1 - \Theta) \equiv \text{const}$, — это кинетическое уравнение (15-1) при ω из (18-1) или (19-1). Для *объемной неизотермической кристаллизации* в качестве такого ответа является общее уравнение А. Н. Колмогорова (15-1) при ω из (23-1). Однако в нем до сих пор оставался неизвестным закон изменения переохлаждения расплава в процессе его затвердевания. Теперь этот закон определяет уравнение Н. Г. Гиршовича (48) в зависимости от условий теплообмена рассматриваемого расплава с формой.

39. КИНЕТИКА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Математическая модель (53) позволяет исследовать кинетику объемной кристаллизации при самопроизвольном и гетерогенном зарождении кристаллов. Для этого достаточно принять $\Omega_2 = 0$. Влияние модификаторов 1-го или 2-го рода, активных примесей, а также состава сплава найдет отражение в величинах Θ' , Ω_1 и ν , которые, конечно, должны быть известными.

Точно таким же путем можно исследовать кристаллизацию при росте кристаллов только от затравок. Для этого необходимо принять, что число N_z затравок таково, что переохлаждение расплава $T_{кр} - T_2$ во все время кристаллизации меньше интервала метастабильности $T_{кр} - T'$ рассматриваемого металла или сплава с учетом влияния модификаторов и примесей, т. е. необходимо принять Ω_2 таким, при котором $\Theta' < \Theta$.

Наиболее ценным в этих исследованиях является то, что перегрев расплава не будет оказывать влияние на тепловую обстановку зарождения и роста кристаллов. Действительно, перегрев при заливке может сказаться лишь на количестве частиц затравок, не успевших расплавиться, если их вводят в расплав во время заполнения формы. Перегрев при плавке скажется только на количестве частиц активных примесей, не потерявших свою активность.

¹ Математическую модель (53) читатель должен был найти самостоятельно при выполнении упражнения 3 к предыдущей главе.

**Кристаллизация от зародышей и затравок.
1-я задача И. Л. Воробьева**

Исследование кинетики объемной кристаллизации на математической модели (53) в случае роста кристаллов от зародышей и затравок возможно только с использованием ЭВМ.

Представим (53) в виде краевой задачи, удобной для численного решения. Прежде всего преобразуем выражение (54), для чего воспользуемся предложением И. Л. Воробьева записать его в виде

$$\omega = \Omega_1^3 \int_0^{\theta} (\Theta' - \Theta)^{\nu} (I - I_1)^3 d\theta' + \Omega_2^3 I^3,$$

где $I = \int_0^{\theta} (1 - \Theta)^{\mu} d\xi$ и $I_1 = \int_0^{\theta'} (1 - \Theta)^{\mu} d\xi$.

Возведем разность $I - I_1$ в куб и обозначим: $\omega = (\Theta' - \Theta)^{\nu}$,

$$A_0 = \int_0^{\theta} \omega d\theta'; \quad A_1 = \int_0^{\theta} I_1 \omega d\theta'; \quad A_2 = \int_0^{\theta} I_1^2 \omega d\theta' \quad \text{и} \quad A_3 = \int_0^{\theta} I_1^3 \omega d\theta'.$$

Далее, примем $K_{c_2} \approx 1$ и $K_{\rho_2} \approx 1$ (см. прилож. IV.1). Тогда $\mathcal{L}_2 \approx \mathcal{L} = L_2/c_3 (T_{кр} - T_c)$, и

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Theta} + \text{Bi}_0 \Theta - \mathcal{L} \omega e^{-\omega} &= 0; \quad \tau > F_{O1}; \\ \Theta(F_{O1}) &= 1; \quad \omega(F_{O1}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где $\omega = \Omega_1^3 (I^3 A_0 - 3I^2 A_1 + 3I A_2 - A_3) + \Omega_2^3 I^3$ (56)

и

$$\dot{\omega} = 3 [\Omega_1^3 (I^2 A_0 - 2I A_1 + A_2) + \Omega_2^3 I^2] (1 - \Theta)^{\mu}, \quad (57)$$

если принять, что $I = I_1$, а

$$\omega = \gamma(\Theta) (\Theta' - \Theta)^{\nu}; \quad \gamma(\Theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \Theta \leq \Theta', \\ 0 & \text{при } \Theta > \Theta'. \end{cases} \quad (58)$$

Задача (55)–(58) сформулирована и решена И. Л. Воробьевым в 1975 г. Условимся называть задачу (55)–(58) *1-й задачей И. Л. Воробьева*¹.

Задача (55)–(58) очень удобна для численного решения на малых ЭЦВМ.

¹ И. Л. Воробьев сформулировал и решил несколько важных задач теории кристаллизации отливок, которые являются частными случаями его модели (см. с. 113–118). Мы изучим две задачи (см. п. 39 и 44).

Действительно, так как

$$\left. \begin{aligned} I_{i+1} &= I_i + (1 - \Theta_i)^\mu \Delta\tau; \quad A_{0, i+1} = A_{0, i} + \omega_i \Delta\tau; \quad A_{1, i+1} = \\ &= A_{1, i} + \omega_i I_i \Delta\tau; \\ A_{2, i+1} &= A_{2, i} + \omega_i I_i^2 \Delta\tau; \quad A_{3, i+1} = A_{3, i} + \omega_i I_i^3 \Delta\tau; \\ \omega_i &= \gamma_i (\Theta' - \Theta_i); \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{при } \theta_i \leq \theta'; \\ \omega & \text{при } \theta_i > \theta', \end{cases} \quad (60)$$

где $\tau_i = i\Delta\tau$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $n = \tau/\Delta\tau$, то¹, зная значения $I, A_0, A_1, A_2, A_3, \omega, \Theta$ для τ_i момента времени, несложно вычислить их для τ_{i+1} , по ним рассчитать ω_{i+1} и затем Ψ_{i+1} .

На рис. 53 представлена блок-схема программы для решения 1-й задачи И. Л. Воробьева на «Наири-К». Программа приведена в прилож. VIII.

На рис. 54 приведен график для Ψ , построенный по результатам решения задачи при $Bi_0 = 0,01$; $\mathcal{L} = 0,2$; $1 - \Theta' = 0,01$; $\mu = \nu = 1$; $\Omega_1 = 100$ и $\Omega_2 = 10$. Здесь же приведен график затвердевания отливки в соответствии с формулой (72-IV.1), которая в обобщенных переменных для тонкостенного кокиля при $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}$ и $\tilde{Bi} = Bi_0$ имеет вид

$$\Psi = \frac{1}{\mathcal{L}} Bi_0 (\tau - Fo_1). \quad (61)$$

Различия кинетики кристаллизации и затвердевания очевидны (рис. 54). Но в эксперименте на реальных отливках, например, при записи кривых охлаждения мы их не фиксируем из-за незначительной величины переохлаждения.

На рис. 55 приведен график I охлаждения расплава, кинетика кристаллизации которого представлена на рис. 54. Наибольшее относительное переохлаждение $(1 - \Theta)_{\max} = 0,016$. Например, для алюминия ($T_{кр} = 933$ К) при $T_c = 293$ К это переохлаждение должно составить ~ 10 К. На самом деле, в эксперименте на алюминии А7 при $Bi_0 \approx 0,01$ удается фиксировать $\Delta T_{\max} \leq 2$ К (рис. 56).

Значительно ближе (конечно, качественно) к экспериментальной кривой подходит кривая 2 на рис. 55. Она рассчитана при

¹ Формулы (59) читатель может легко проверить. Например, $I = \int_0^\theta (1 - \theta)^\mu d\xi$. Следовательно, $\dot{I} = (1 - \Theta)^\mu$. Так как $\dot{I} \approx \frac{1}{\Delta\tau} (I_{i+1} - I_i)$, то $(1 - \theta_i)^\mu \approx \frac{1}{\Delta\tau} (I_{i+1} - I_i)$, поэтому $I_{i+1} = I_i + (1 - \Theta_i)^\mu \Delta\tau$. И т. д.

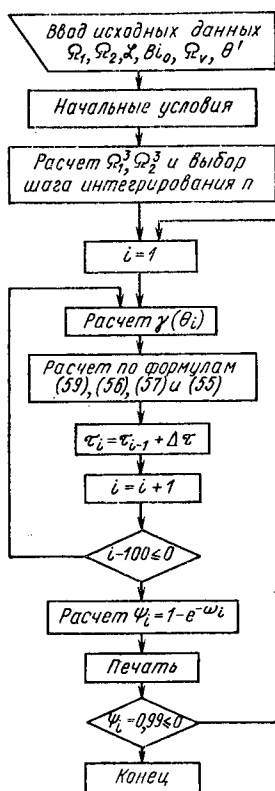
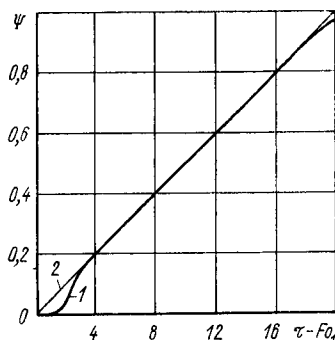


Рис. 53. Блок-схема программы для решения 1-й задачи И. Л. Воробьева на ЭЦВМ

Рис. 54. Кинетика объемной кристаллизации отливки:

1 — расчет на ЭЦВМ с учетом зарождения и роста кристаллов; 2 — по формуле (61)



$\Omega_1 = 100$ и $\Omega_2 = 200$. Величина $(1 - \Theta)_{\max} = 0,0033$, т. е. для алюминия $\Delta T_{\max} \approx 2,0$ К. В эксперименте (рис. 56) $\Delta T_{\max} \approx 1$ К.

Эксперимент выполнен на слитке массой 87 г при $Bi_0 = 0,007$.

Скорость охлаждения $0,025$ К/с. Температура измерена термопарой ХА; диаметр электрода $0,3$ мм; спай незащищен. Сигнал термопары записан на ЭПП-09 с чувствительностью $0,07$ К (точность $0,13$ К).

Заметим, что $(1 - \Theta)_{\max}$ при $\Omega_1 = 100$ и $\Omega_2 = 200$ значительно меньше интервала метастабильности $(1 - \Theta')$, который в расчетах принят равным $0,01$. Это означает, что при $\Omega_2 = 200$ кристаллы в расплаве не зарождались, кристаллизация происходила в результате роста кристаллов от за-

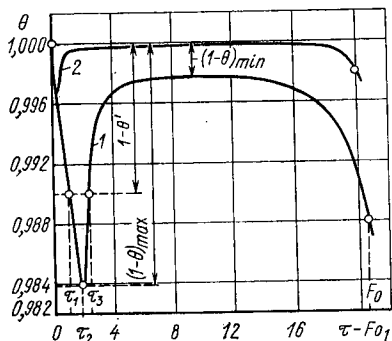


Рис. 55. Охлаждение расплава, кристаллизующегося объемно (расчет на ЭЦВМ):

1 — при $\Omega_1 = 100$ и $\Omega_2 = 10$; 2 — при $\Omega_1 = 100$ и $\Omega_2 = 200$

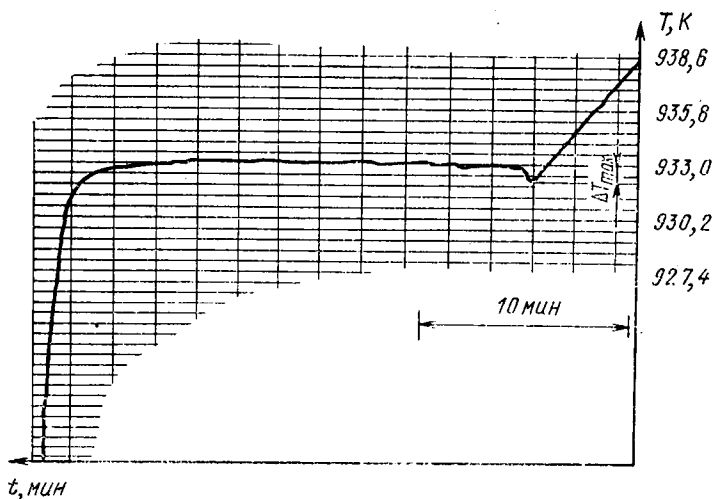


Рис. 56. Кривая охлаждения расплава алюминия А7 (эксперимент)

травок. Сопоставляя кривую 2 на рис. 55 с экспериментальной кривой на рис. 56 можно сделать вывод, что *воздействие затравок на процесс кристаллизации в реальных условиях литья должно быть регулярным.*

Заметим далее, что начальное переохлаждение $(1 - \Theta)_{\max}$, фиксируемое в эксперименте при измерении температуры затвердевающего расплава чувствительными приборами, вовсе необязательно связано с зарождением кристаллов (сравни кривые 1 и 2 на рис. 55).

Начальное переохлаждение вызвано только особенностями кинетики кристаллизации, которая обусловлена одновременным ростом равноосных кристаллов.

Кристаллизация от затравок. Приближенное аналитическое решение 1-й задачи И. Л. Воробьева

Если при воздействии затравок на процесс кристаллизации переохлаждение $1 - \Theta$ всегда меньше интервала $1 - \Theta'$ метастабильности данного металла или сплава, то $\gamma(\Theta) = 0$, и задача (55)—(58) существенно упрощается:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Theta} + \text{Bi}_0 \Theta - \mathcal{L} e^{-\omega} \dot{\omega} &= 0; \quad \tau > \text{Fo}_1, \\ \Theta(\text{Fo}_1) &= 1; \quad \omega(\text{Fo}_1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

где $\omega = (\Omega_2 I)^3$ или $\omega = p^3$, а $p = \Omega_2 I$.

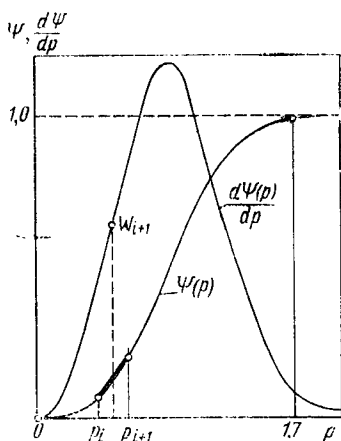


Рис. 57. Схема к решению уравнения (65) численным методом

Удобно использовать следующий прием [2]. На рис. 57 приведены графики Ψ и $\frac{d\Psi}{dp}$ от p ; первый построен по формуле (63), второй — по формуле

$$\frac{d\Psi}{dp} = 3p^2 e^{-p^3}, \quad (66)$$

которая является результатом дифференцирования уравнения (63) по p .

Из графика Ψ от p следует, что процесс кристаллизации можно считать законченным с погрешностью в 1% в точке $p = 1,7$ (при $p = 1,7$ $\Psi = 0,99$). Если интервал $[0; 1,7]$ оси p разбить на n частей и внутри каждой кривую Ψ заменить отрезком прямой, то для каждого отрезка от p_i до p_{i+1}

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = W_{i+1} \frac{dp}{d\tau}, \quad (67)$$

где W_{i+1} — тангенс угла наклона $i + 1$ -го отрезка к оси p (см. рис. 57).

Из формулы (63)

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = 3p^2 e^{-p^3} \frac{dp}{d\tau}, \quad (68)$$

следовательно, уравнение (65) для любого $i + 1$ -го отрезка внутри интервала $[0; 1, 7]$ можно записать в более простом виде, заменив выражение $3p^2 e^{-p^3} \dot{p}$ правой частью формулы (67):

$$\frac{d\Theta}{d\tau} + (Bi_0 + W_{i+1} \mathcal{L}\Omega_2) \Theta = \mathcal{L}W_{i+1}\Omega_2; \quad \tau \geq \tau_i, \quad (69)$$

так как из формулы (64)

$$\frac{dp}{d\tau} = \Omega_2(1 - \Theta). \quad (70)$$

Следовательно,

$$\Psi = 1 - e^{-p^3}, \quad (63)$$

а параметр

$$p = \Omega_2 \int_0^\Theta (1 - \Theta) d\xi, \quad (64)$$

если принять, что $\mu = 1$, т. е. что кристаллы от затравок растут согласно нормальному механизму роста (см. с. 86—87). В этой связи математическая формулировка задачи примет вид

$$\dot{\Theta} + Bi_0 \Theta - 3\mathcal{L}p^2 e^{-p^3} \dot{p} = 0; \quad (65)$$

$$\tau \geq \tau_0; \quad \Theta(\tau_0) = 1; \quad p(\tau_0) = 0.$$

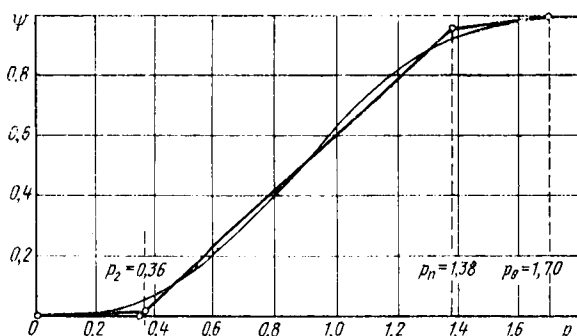


Рис. 58. Линеаризация уравнения (63)

Решение уравнения (69) имеет вид

$$\Theta = \frac{W_{i+1} \mathcal{L} \Omega_2}{Bi_0 + W_{i+1} \mathcal{L} \Omega_2} + \left(\Theta(\tau_i) - \frac{W_{i+1} \mathcal{L} \Omega_2}{Bi_0 + W_{i+1} \mathcal{L} \Omega_2} \right) \times \exp [-(Bi_0 + W_{i+1} \mathcal{L} \Omega_2)(\tau - \tau_i)], \quad (71)$$

где $\Theta(\tau_i)$ получена в результате последовательного решения уравнения (69) для отрезка от p_{i-1} до p_i ; величина τ_i определена по формуле

$$p_i - p_{i-1} = \Omega_2 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (1 - \Theta) d\xi.$$

Резобьем интервал $[0; 1,7]$ оси p только на три части и внутри каждой заменим кривую $\Psi(p)$ отрезками прямых так, как показано на рис. 58. Тогда, кинетическое уравнение (63) заменяется линейным:

$$\Psi = \begin{cases} W_2 p, & \text{если } p \in [0, p_2]; \\ W_n (p - 0,35), & \text{если } p \in [p_2, p_n]; \\ W_0 (p + 0,78), & \text{если } p \in [p_n, p_0], \end{cases} \quad (72)$$

где W_2 , W_n , W_0 — тангенсы углов наклона первого, второго и третьего отрезков к оси абсцисс (рис. 58).

Дифференциальное уравнение (65), в этом случае приобретает вид

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = \begin{cases} -(Bi_0 + W_2 \mathcal{L} \Omega_2) \left(\Theta - \frac{W_2 \mathcal{L} \Omega_2}{Bi_0 + W_2 \mathcal{L} \Omega_2} \right); & Fo_1 \leq \tau \leq \tau_2; \\ -(Bi_0 + W_n \mathcal{L} \Omega_2) \left(\Theta - \frac{W_n \mathcal{L} \Omega_2}{Bi_0 + W_n \mathcal{L} \Omega_2} \right); & \tau_2 \leq \tau \leq \tau_n; \\ -(Bi_0 + W_0 \mathcal{L} \Omega_2) \left(\Theta - \frac{W_0 \mathcal{L} \Omega_2}{Bi_0 + W_0 \mathcal{L} \Omega_2} \right); & \tau_n \leq \tau \leq Fo. \end{cases} \quad (73)$$

Решение уравнения (73) выражается формулой типа (71):

$$\Theta = \begin{cases} \frac{1}{1+B_2} + \left(1 - \frac{1}{1+B_2}\right) \exp[-W_2 \mathcal{L}\Omega_2 (1+B_2) (\tau - Fo_1)]; \\ \frac{1}{1+B_n} + \left(1 - \frac{1}{1+B_n}\right) \exp[-W_n \mathcal{L}\Omega_2 (1+B_n) (\tau - \tau_2)]; \\ \frac{1}{1+B_0} + \left(1 - \frac{1}{1+B_0}\right) \exp[-W_0 \mathcal{L}\Omega_2 (1+B_0) (\tau - \tau_n)], \end{cases} \quad (74)$$

в которой

$$B_2 = \frac{Bi_0}{W_2 \mathcal{L}\Omega_2}; \quad B_n = \frac{Bi_0}{W_n \mathcal{L}\Omega_2}; \quad B_0 = \frac{Bi_0}{W_0 \mathcal{L}\Omega_2}.$$

Значения τ_2 , τ_n и Fo следует определить из соотношений

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \Omega_2 \int_{Fo_1}^{\tau_2} (1 - \Theta) d\xi; \\ p_n - p_2 &= \Omega_2 \int_{\tau_2}^{\tau_n} (1 - \Theta) d\xi; \\ p_0 - p_n &= \Omega_2 \int_{\tau_n}^{Fo} (1 - \Theta) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Формула (74) является *приближенным аналитическим решением задачи* (65); впервые оно найдено И. Л. Воробьевым в 1972 г.

На рис. 59 кривая 1, полученная численным решением задачи (55)–(58) по программе на рис. 53 для $\mathcal{L} = 0,2$; $Bi_0 = 0,01$; $(1 - \Theta') = 0,01$; $\Omega_1 = 100$; $\Omega_2 = 40$; $\mu = \nu = 1$; кривая 2 построена по формуле (74) для тех же $\mathcal{L}$, Ω_2 и Bi_0 при $W_2 = 0,03$; $W_n = 0,93$; $W_0 = 0,13$; $p_2 = 0,36$; $p_n = 1,38$; $p_0 = 1,7$ (численные значения параметров W и p взяты из графика на рис. 58).

Сопоставление этих кривых показывает, что приближенное решение достаточно четко отражает особенности поведения кривой

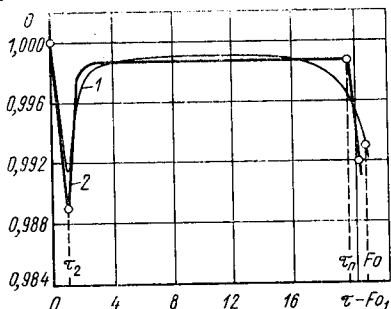


Рис. 59. Охлаждение расплава, кристаллизующегося объемно; расчет при $\Omega_2 = 40$:

1 — на ЭЦВМ; 2 — по формуле (74)

изменения температуры кристаллизующегося расплава, выявленные численным решением задачи (55)–(58) и в эксперименте с алюминием А7 (см. рис. 56).

40. УСЛОВИЯ ОБЪЕМНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В ЛИТЕЙНОЙ ФОРМЕ

Строго говоря, объемная кристаллизация в литейной форме невозможна. Расплав у поверх-

ности формы всегда охлаждается быстрее, чем в центре кристаллизующегося объема. Поэтому у поверхности формы процесс кристаллизации всегда начинается и заканчивается раньше, чем в центре.

Однако в тех случаях, когда отставание процесса кристаллизации в центре незначительно по сравнению с его ходом у поверхности формы, можно принять, что процесс близок к объемному.

Если в эксперименте удастся осуществить условия, при которых $\Psi(0, t)$ в центре объема расплава будет на 5—10% отличаться от $\Psi(l_0, t)$ у его поверхности контакта с формой, то, сопоставляя эмпирические кривые $T_2(t)$ для различных N_3 с кривыми, рассчитанными с помощью модели (53), можно выяснить роль затравок в формировании кристаллического строения отливок.

Из тепловой теории формирования мы знаем, что при весьма малых значениях критерия Био перепадом температуры между центром и поверхностью охлаждающейся отливки можно пренебречь (см. с. 266.1—269.1). Это положение позволило нам выполнить простое преобразование второго уравнения системы (28) в уравнение Н. Г. Гиришовича (см. с. 118—119). Такое преобразование возможно, если допустить, что при $Bi_0 < 0,1$ функция $\Psi(l_0, t) \approx \Psi(0, t)$. Функция Ψ зависит от кинетических параметров кристаллизации (n, v, N_3, K_v и K_n). Поэтому условия, при которых реальный процесс кристаллизации с указанным выше приближением можно рассматривать как объемный, помимо требования $Bi_0 < 0,1$ должно включать также ограничения критериев Ω_1 и Ω_2 .

Рост кристаллов от затравок

Для выяснения допустимых величин критерия Ω_2 необходимо решить задачу (34)—(40), предположив, что кристаллизация начинается после полного отвода теплоты перегрева от расплава и происходит в результате нормального роста кристаллов только от затравок, т. е. $\tau \geq Fo_1$; $\Theta > \Theta'$; $v = 1$, а двухфазная зона охватывает все сечение отливки, т. е. $\chi_1(\tau) = 0$, $\chi_3(\tau) = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \mathcal{L} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}; \quad 0 < X < 1; \quad \tau > Fo_1; \\ \Psi &= \begin{cases} W_2 p, & \text{если } p \in [0, p_2]; \\ W_n (p - 0,35), & \text{если } p \in [p_2, p_n]; \\ W_0 (p + 0,78), & \text{если } p \in [p_n, p_0]; \end{cases} \\ \Theta(X, Fo_1) &= 1; \quad \Psi(X, Fo_1) = 0; \\ -\frac{\partial \Theta(1, \tau)}{\partial X} &= Bi_2 \Theta(1, \tau); \quad \frac{\partial \Theta(0, \tau)}{\partial X} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Здесь мы дополнительно приняли, что затвердевание отливки происходит в тонкостенном кокиле, и уравнение (35) заменили на приближенное (72).

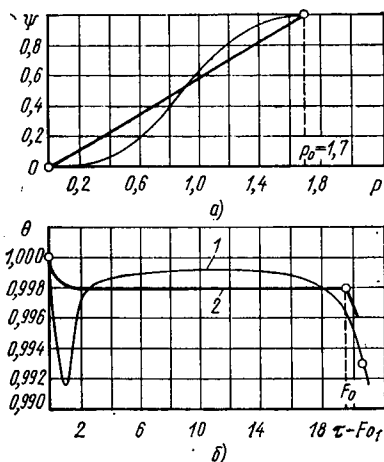


Рис. 60. Схема (а) линеаризации уравнения (63) и кривые охлаждения кристаллизующегося расплава (б): расчет при $\Omega_2 = 40$: 1 — на ЭЦВМ; 2 — по формуле (78)

Это существенно упрощает решение задачи (76), так как оценку условий реализации объемной кристаллизации можно выразить в виде разности в моментах окончания процесса кристаллизации расплава у поверхности формы и в центре объема. Для определения момента окончания процесса кристаллизации кривую Ψ от ρ в интервале $[0, \rho_0]$ можно заменить отрезком прямой, проходящей (рис. 60, а) через точки $(0, 0)$ и $(1,7; 1,0)$. Тогда функцию Ψ в задаче (76) допустимо представить в виде

$$\Psi \approx W\rho \text{ при } \rho \in [0, \rho_0]. \quad (77)$$

Проверим это предложение.

Если (77) сопоставить с (72), то при $W_2 = W$ и $\rho_2 = \rho_0$ от (72)

остается только первая строка. Следовательно, при $Fo_1 \leq \tau \leq Fo$ остается только первая строка в уравнении (73) и соответственно в его решении (74)

$$\Theta = \frac{1}{1+B} + \left(1 - \frac{1}{1+B}\right) \exp[-W\mathcal{L}\Omega_2(1+B)(\tau - Fo_1)], \quad (78)$$

где $B = \frac{Bi_0}{W\mathcal{L}\Omega_2}$.

Момент времени окончания процесса $\tau = Fo$ (рис. 60, б), вычисленный по формуле

$$\rho_0 = \Omega_2 \int_{Fo_1}^{Fo} (1 - \Theta) d\tau, \quad (79)$$

практически совпадает с моментом окончания процесса, найденным в результате численного решения задачи (55)—(58). Кривая 1 перенесена с рис. 59, кривая 2 построена по формуле (78) при $\rho_0 = 1,7$, $W = 0,59$, $\mathcal{L} = 0,2$ и $\Omega_2 = 40$.

Теперь вернемся к задаче (76).

Подставим в дифференциальное уравнение переноса теплоты в двухфазной зоне Ψ из (77). Получим предельно упрощенную формулировку задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + W\mathcal{L}\Omega_2(1 - \Theta); \quad 0 < X < 1; \quad \tau > Fo_1 \\ \Theta(X, Fo_1) &= 1; \quad -\frac{\partial \Theta(1, \tau)}{\partial X} = Bi_0 \Theta(1, \tau); \quad \frac{\partial \Theta(0, \tau)}{\partial X} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Применим интегральное преобразование Лапласа (см. с. 83.1—85.1) к математической формулировке задачи (79):

$$\frac{d\mathcal{T}}{dX^2} - (W\mathcal{L}\Omega_2 + s) \left(\mathcal{T} - \frac{1}{s} \right) = 0; \quad 0 < X < 1;$$

$$-\frac{d\mathcal{T}(1, s)}{dX} = \text{Bi}_0 \mathcal{T}(1, s); \quad \frac{d\mathcal{T}(0, s)}{dX} = 1.$$

Решение полученного дифференциального уравнения второго порядка в обыкновенных производных несложно:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\text{Bi}_0 \text{ch}(A+s)^{1/2} X}{(A+s)^{1/2} \text{sh}(A+s) + \text{Bi}_0 \text{ch}(A+s)^{1/2}} \right],$$

где $A = W\mathcal{L}\Omega_2$.

Так как правая часть этого выражения является отношением двух обобщенных полиномов относительно s , то для нахождения оригинала функции $\Theta(X, \tau)$ следует воспользоваться теоремой Ваченко-Захарченко [40]. С учетом граничных условий получим

$$\Theta = 1 - C \text{Bi}_0 A^{1/2} X + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \mu_n X \cdot \exp [-(A + \mu_n)(\tau - \text{Fo}_1)], \quad (81)$$

где

$$C = (A^{1/2} \text{sh} A^{1/2} + \text{Bi}_0 \text{ch} A^{1/2})^{-1};$$

$$D_n = \frac{2\mu_n^2 \sin \mu_n}{(A + \mu_n^2)(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)}.$$

Значения μ_n — корни трансцендентного уравнения

$$\mu_n \text{tg} \mu_n = \text{Bi}_0, \quad (82)$$

приведены в табл. 1.1.

С помощью формулы (81) можно вычислить момент Fo времени окончания процесса кристаллизации у поверхности и в центре отливки¹. Так, у поверхности $\Theta = \Theta(1, \tau)$, поэтому из (79)

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \Omega_2 \int_{\text{Fo}_1}^{\text{Fo}} [1 - \Theta(1, \tau)] d\tau; \\ \text{в центре } \Theta &= \Theta(0, \tau), \text{ поэтому} \\ p_0 &= \Omega_2 \int_{\text{Fo}_1}^{\text{Fo}} [1 - \Theta(0, \tau)] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Напомним, что при $p = p_0$ (см. рис. 60, а) функция $\Psi = 1$. Следовательно, чем меньше $\Psi(0, \text{Fo})$ будет отличаться от единицы,

¹ Решение (81) впервые было найдено И. Л. Воробьевым в 1972 г.

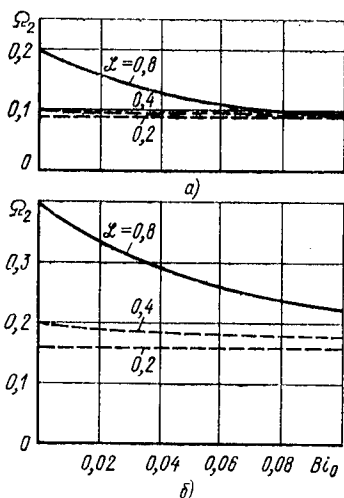


Рис. 61. Области значений Ω_2 , Bi_0 и $\mathcal{L}$, при которых кристаллизацию отливки можно рассматривать как объемную, если:

$a - \Psi(0, Fo) = 0,95$; $b - \Psi(0, Fo) = 0,90$

двух членов ряда в правой ее части, учитывая, что для реальных значений Ω_2 и $\mathcal{L}$ функция $\Psi(1, Fo) \approx \Psi(0, Fo)$ при $Bi_0 < 0,1$.

Значения $\mathcal{L}$ для металлов и сплавов

Металл или сплав	$\mathcal{L}$	Металл или сплав	$\mathcal{L}$
Железо	0,255	Цинк	0,589
Чугун серый	0,213	Сплавы Zn + Al	0,386
Сталь углеродистая	0,228	Алюминий	0,542
Медь	0,449	Сплавы Al + Si	0,270
Бронза (10% Sn)	0,516	Сплавы Al + Cu	0,265
Латунь (10% Zn)	0,767	Сплавы Al + Mg	0,577

Область, расположенная на графике (рис. 61, б) ниже сплошной кривой, образует множество значений Ω_2 , $\mathcal{L}$ и Bi_0 , для которых реальный процесс кристаллизации допустимо рассматривать как объемный с завершенностью не хуже 0,9. С увеличением степени завершенности процесса кристаллизации в середине объема отливки к моменту его окончания у поверхности формы область значений критериев Ω_2 , Bi_0 и $\mathcal{L}$ сокращается. Например, при $\Psi(0, Fo) = 0,95$ область под сплошной кривой (рис. 61, а) сокращается приблизительно вдвое.

Отношение значений функций Ψ в момент Fo для $X = 0$ и $X = 1$ можно рассматривать как критерий, оценивающий характер реальной кристаллизации:

$$K_1 = \frac{\Psi(0, Fo)}{\Psi(1, Fo)}. \quad (84)$$

Для целей экспериментального исследования процессов зарождения и роста кристаллов в реальных условиях плавки, заливки и охлаждения расплава, но близких к объемной кристаллизации, величины Ω_2 , $\mathcal{L}$ и Bi_0 необходимо выбирать такими, чтобы

$$0,9 \leq K_1 < 1. \quad (85)$$

Рост кристаллов от зародышей

Для выяснения допустимых величин критерия Ω_1 необходимо решить задачу (34)—(40), предположив, что $\Omega_2 = 0$; $\tau \geq Fo_1$; $\chi_1(\tau) = 0$; $\chi_3(\tau) = 1$, $v = 1$ и $\mu = 1$, а также то, что затвердевание отливки происходит в тонкостенном кокиле. Другими словами, необходимо решить задачу (76) при Ψ из (54) при $\Omega_2 = 0$.

Можно поступить иначе. Так как мы должны найти Ω_1 для объемной кристаллизации, т. е. для $0,9 \leq K_1 < 1$, то при $Bi_0 < 0,1$ и искомым значениям Ω_1 должна быть справедливой модель объемной кристаллизации (55)—(58) при $\Omega_2 = 0$, $\mu = 1$ и $v = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \Theta + Bi_0 \Theta - \mathcal{L} e^{-\omega} \dot{\omega} &= 0; \quad \tau > Fo_1; \\ \Theta(Fo_1) &= 1; \quad \omega(Fo_1) = 0; \\ \omega &= \Omega_1^3 (I^3 A_0 - 3I^2 A_1 + 3I A_2 - A_3); \\ \omega &= \gamma(\Theta) (\Theta' - \Theta); \quad \gamma(\Theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \Theta \leq \Theta'; \\ 0 & \text{при } \Theta > \Theta'. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

В областях значений Ω_2 , указанных на рис. 61, справедлива модель (61):

$$\left. \begin{aligned} \Theta + Bi_0 \Theta - \mathcal{L} e^{-\omega} \dot{\omega} &= 0; \quad \tau > Fo_1; \\ \Theta(Fo_1) &= 1; \quad \omega(Fo_1) = 0; \\ \omega &= \Omega_2^3 I^3. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Если функции $\Theta(\tau)$, найденные с помощью моделей (86) и (87), будут описывать одну и ту же кривую охлаждения, то по известным Ω_2 (см. рис. 61) удастся определить значения Ω_1 , которые удовлетворяют требованию (85). Эта идея оценки Ω_1 по Ω_2 для $0,9 \leq K_1 \leq 1$ предложена С. Н. Поляковым и В. А. Попковым в 1978 г. Реализуем эту идею. По-видимому, $\Theta(\tau)$ будет описывать одну и ту же кривую охлаждения, если в моделях (86) и (87) функции ω будут одинаковыми, т. е. если

$$\Omega_2^3 I^3 = \Omega_1^3 (I^3 A_0 - 3I^2 A_1 + 3I A_2 - A_3).$$

Преобразуем это выражение

$$\Omega = A_0 - 3A_1/I + 3A_2/I^2 - A_3/I^3, \quad (88)$$

где

$$\Omega = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^3. \quad (89)$$

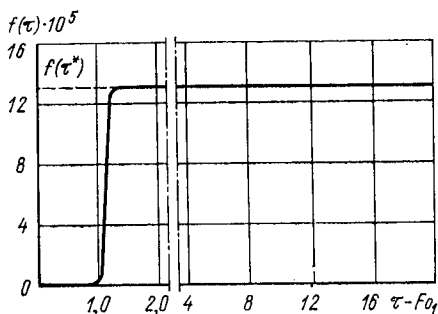


Рис. 62. График функции $f(\tau)$

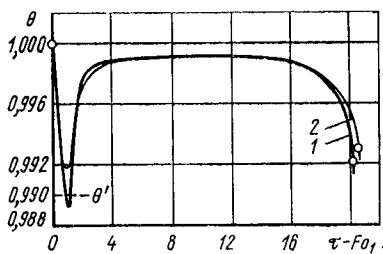


Рис. 63. Охлаждение расплава, кристаллизующегося объемно (расчет на ЭЦВМ);
1 — при $\Omega_1 = 800$; 2 — при $\Omega_2 = 40$

Правая часть выражения (88) является функцией τ , левая часть постоянная. Поэтому, строго говоря, равенство ω в моделях (86) и (87) возможно лишь в какой-то определенный момент времени.

Исследуем функцию в правой части (88), обозначив ее $f(\tau)$:

$$f(\tau) = A_0 - 3A_1/I + 3A_2/I^2 - A_3/I^3. \quad (90)$$

На рис. 62 приведен график $f(\tau)$, рассчитанный на ЭЦВМ «Наири—2» при $(1 - \Theta') = 0,01$ и $\Omega_1 = 800$. Для расчета использованы соотношения (59).

Очевидно, что для данного Ω_1 , начиная с $\tau^* = 1,3$, функцию $f(\tau)$ можно считать приблизительно постоянной. Тогда, начиная с этого момента времени, $\Omega \approx f(\tau^*)$.

Для $\Omega_1 = 800$ величина $f_1(\tau^*) = 1,3 \cdot 10^{-4}$, поэтому из (89) $\Omega_2 \approx 40$. На рис. 63 приведены две кривые охлаждения. Кривая 1 рассчитана с помощью модели (86) для $\Omega_1 = 800$, кривая 2 — по модели (87) для $\Omega_2 = 40$. Совпадение кривых вполне приемлемо.

На рис. 64 приведен итоговый график кривых, связывающих Ω_1 и Ω_2 для трех интервалов метастабильности: $(1 - \Theta') = 0,005$;

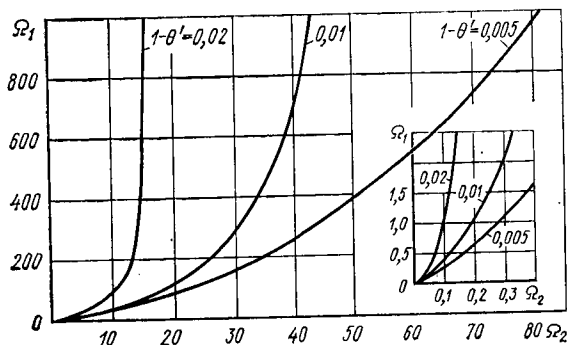


Рис. 64. Соотношение между Ω_1 и Ω_2 при $\Omega = f(\tau^*)$ для различных значений интервала метастабильности $(1 - \Theta')$ расплавов

0,01 и 0,02. На графике отмечена область Ω_1 и Ω_2 , отвечающая условию (85) реализации объемной кристаллизации в эксперименте при $Bi_0 < 0,1$.

Таким образом, для определения условий объемной кристаллизации от зародышей или затравок в эксперименте можно пользоваться формулами (81)—(85) с учетом графика на рис. 64 или графиками на рис. 61 и 64. Судя по этим графикам, при $Bi_0 < 0,1$, $\mathcal{L} = 0,2—0,8$ кристаллизацию можно рассматривать как объемную, если $\Omega_1 < 2,5$ и $\Omega_2 < 0,4$, т. е. если $\Omega > 10^{-2}$.

В заключение заметим, что из (89) с учетом (41)—(45)

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{\Omega_N}{\Omega_n} \right)^3 \\ \text{или при } \mu &= 1 \\ \Omega &= \frac{N_3 a_3}{K_n (T_{кр} - T_c) \mathfrak{R}^2} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Так как эти соотношения найдены с помощью уравнения А. Н. Колмогорова, то, имея в виду условие (20-1), необходимо, чтобы

$$\Omega > \frac{200 a_3}{K_n (T_{кр} - T_c) \mathfrak{R}^2 V_0} \quad (92)$$

Так как процесс кристаллизации можно рассматривать как объемный при $\Omega > 10^{-2}$, то *средства* приближения процесса к объемному следующие:

- 1° — уменьшение приведенного размера $\mathfrak{R}$ и объема V_0 отливки;
- 2° — увеличение температуры T_c среды, окружающей форму, в которой отливка затвердевает.

41. АНАЛИЗ КИНЕТИКИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Особенности кинетики объемной кристаллизации нетрудно определить по кривой охлаждения затвердевающего расплава (см. например, рис. 55, 56, 59, 63). Их две: *наибольшее переохлаждение* $(1 - \Theta)_{\max}$ расплава, которое наблюдается в начале процесса кристаллизации, и *минимальное переохлаждение* $(1 - \Theta)_{\min}$, которое остается практически неизменным до конца процесса.

Условимся: *переохлаждаемость* расплава — наибольшее переохлаждение $(1 - \Theta)_{\max}$.

Переход от $(1 - \Theta)_{\max}$ к $(1 - \Theta)_{\min}$ обусловлен повышением скорости кристаллизации $\dot{\Psi}$ ограниченного объема расплава (см. рис. 54). Это приводит к прогреву переохлажденного расплава выделяющейся теплотой кристаллизации, которая пропорциональна $\dot{\Psi}$.

Явление повторного нагрева переохлажденного расплава называют *рекалесценцией*.

Условимся: температура *рекалесценции* — температура, при которой на кривой охлаждения наблюдается так называемая температурная остановка.

К характеристикам кинетики кристаллизации, которые без труда обнаруживаются на экспериментально зафиксированной кривой охлаждения расплава, необходимо добавить те, которые следуют из теории объемной кристаллизации. Их тоже две: интервал метастабильности $(1 - \Theta')$ расплава и продолжительность $\Delta\tau_2 = \tau_1 - \tau_3$ зарождения центров кристаллизации в нем, если $\Theta < \Theta'$ (см. рис. 55).

Процесс объемной кристаллизации в общем случае можно рассматривать как протекающий в два следующие друг за другом этапа. В *первом* этапе возможно зарождение центров кристаллизации, если $\Theta < \Theta'$; во втором происходит только рост кристаллов¹, если $\Theta > \Theta'$.

Выполним анализ выявленных этапов кристаллизации.

Переохлаждаемость расплава

Первый этап процесса кристаллизации завершается очень быстро по сравнению со временем процесса в целом (см. рис. 55, 56, 59, 63). Можно принять, что для первого этапа $\tau \ll Fo_0$.

Этот вывод очень важен для дальнейшего анализа, так как позволяет исследовать первый этап на основе приближенного аналитического решения задачи (53)—(54).

Действительно, уравнение А. Н. Колмогорова для $\tau \ll Fo_0$ можно представить в виде $\Psi \approx \omega$, так как для малых τ вместо $\exp(-\omega)$ можно воспользоваться двумя членами степенного ряда, в который она разлагается (см. прилож. III.1). Тогда, математическая формулировка задачи (53)—(54) при $K_c \approx 1$, $K_{p_2} \approx 1$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$ (см. с. 122) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\Theta + Bi_0\tau - \mathcal{L}\omega) &= 0; \quad \tau > Fo_1; \\ \Theta(Fo_1) &= 1; \quad \omega(Fo_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Рост кристаллов от зародышей. Пусть $\Omega_2 = 0$; тогда в (93)

$$\begin{aligned} \omega &= \Omega_1^3 \int_0^\Theta (\Theta' - \Theta)^\nu \left(\int_{\Theta'}^\Theta (1 - \Theta)^\mu d\xi \right)^3 d\Theta'; \\ \Theta &= \tau - Fo_1; \quad \Theta' = \tau' - Fo_1. \end{aligned} \quad (94)$$

¹ Естественно, что в частных случаях это деление теряет смысл. Например, при $(1 - \Theta') > (1 - \Theta)_{\max}$ всегда будет только рост кристаллов от затравок; при $(1 - \Theta') < (1 - \Theta)_{\max}$ будет одновременный рост зародившихся кристаллов и зарождение новых. Но и в том, и в другом случаях на кривой охлаждения будут отмечены переохлаждаемость расплава и температура рекалесценции.

Решение задачи (93) при ω из (94) будем искать методом *осреднения функциональных поправок*.

Если

$$z = \frac{1}{\tau - \tau_1} \int_0^{\tau - \tau_1} \Theta d\tau,$$

то искомое решение:

$$\Theta = \Theta' - \text{Bi}_0 (\tau - \tau_1) + \frac{1}{4} \mathcal{L}\Omega_1^3 (\Theta' - z)^\nu (1 - z)^{3\mu} (\tau - \tau_1)^4;$$

τ_1 — момент начала зарождения центров кристаллизации (см. рис. 55).

Так как τ_1 — величина малая, то $(\tau - \tau_1)^4$ можно не учитывать. Следовательно,

$$z \approx \Theta' - \frac{1}{2} \text{Bi}_0 (\tau - \tau_1),$$

и для $(1 - \Theta') < 0,02$

$$\Theta = \Theta' - \text{Bi}_0 (\tau - \tau_1) + 2^{-(\alpha+2)} \mathcal{L}\Omega_1^3 \text{Bi}_0^\alpha (\tau - \tau_1)^{\alpha+4}, \quad (95)$$

где $\alpha = 3\mu + \nu$.

Обозначим через τ_2 время достижения максимального переохлаждения $(1 - \Theta)_{\max}$. Очевидно, что $\dot{\Theta}(\tau_2) = 0$. Поэтому из (95)

$$\tau_2 = 2^{\frac{\alpha+2}{\alpha+3}} [(\alpha+4) \mathcal{L}\Omega_1^3 \text{Bi}_0^{\alpha-1}]^{-1/(\alpha+3)} + \tau_1. \quad (96)$$

Следовательно,

$$(1 - \Theta)_{\max} = 2^{\frac{\alpha+2}{\alpha+3}} \frac{\alpha+3}{\alpha+4} [(\alpha+4) \mathcal{L}\Omega_1^3]^{-1/(\alpha+3)} \text{Bi}_0^{4/(\alpha+3)} + (1 + \Theta'). \quad (97)$$

Рассчитаем $(1 - \Theta)_{\max}$ и τ_2 по формулам (96) и (97) для $\Omega_1 = 800$; $\Omega_2 = 0$; $\text{Bi}_0 = 0,01$; $\mathcal{L} = 0,2$; $\mu = 1$; $\nu = 1$; $(1 - \Theta') = 0,01$. Получим, что $(1 - \Theta)_{\max} = 0,014$ и $\tau_2 - \text{Fo}_1 = 1,013$. При численном решении задачи (53)–(54) мы нашли, что $(1 - \Theta)_{\max} = 0,011$ и $\tau_2 - \text{Fo}_1 = 1,018$ (см. рис. 63, кривая 1). Совпадение приближенного аналитического и численного решений удовлетворительное.

Рост кристаллов от затравок. Пусть $\Theta > \Theta'$, тогда в (93)

$$\omega = \Omega_2^3 \left(\int_0^\theta (1 - \Theta)^\mu d\xi \right)^3; \quad (98)$$

$$\theta = \tau - \text{Fo}_1.$$

Пользуясь методом осреднения функциональных поправок, найдем, что при

$$z = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \Theta d\tau$$

решение задачи (93), если ω из (98), можно представить в виде

$$\Theta = 1 - \text{Bi}_0(\tau - \text{Fo}_1) + \Omega_2^3(1 - z)^{3\mu}(\tau - \text{Fo}_1)^3.$$

Если, как и прежде, θ — величина малая, то θ^3 допустимо не учитывать. Следовательно,

$$z \approx 1 - \frac{1}{2} \text{Bi}_0(\tau - \text{Fo}_1)$$

и

$$\Theta = 1 - \text{Bi}_0(\tau - \text{Fo}_1) + 2^{-\alpha^*} \mathcal{L} \Omega_2^3 \text{Bi}_0^{\alpha^*} (\tau - \text{Fo}_1)^{\alpha^*+3}, \quad (99)$$

где $\alpha^* = 3\mu$.

Время достижения максимального переохлаждения

$$\tau_2 = 2^{\frac{\alpha^*}{\alpha^*+2}} [(\alpha^* + 3) \mathcal{L} \Omega_2^3 \text{Bi}_0^{\alpha^*-1}]^{-1/(\alpha^*+2)} + \text{Fo}_1. \quad (100)$$

Максимальное переохлаждение

$$(1 - \Theta)_{\max} = 2^{\frac{\alpha^*}{\alpha^*+2}} \frac{\alpha^* + 2}{\alpha^* + 3} [(\alpha^* + 3) \mathcal{L} \Omega_2^3]^{-1/(\alpha^*+2)} \text{Bi}_0^{3/(\alpha^*+2)}. \quad (101)$$

Сравним результаты расчета $(1 - \Theta)_{\max}$ и τ_2 по формулам (100) и (101) с численным решением задачи (53)–(54) для $\Omega_1 = 0$; $\Omega_2 = 40$; $\text{Bi}_0 = 0,01$; $\mathcal{L} = 0,2$; $\mu = 1$; $(1 - \Theta') = 0,01$. По формулам (100) и (101) получим $\tau_2 - \text{Fo}_1 = 1,0$; $(1 - \Theta)_{\max} = 0,008$. Численное решение дает $\tau_2 - \text{Fo}_1 = 0,98$ и $(1 - \Theta)_{\max} = 0,0084$ (см. рис. 63, кривая 2). И в этом случае совпадение результатов удовлетворительное.

Заметим, что при приближенной формуле (74), найденной для случая кристаллизации только от затравок при $\mu = 1$, величина $(1 - \Theta)_{\max} = 0,011$ и $\tau_2 = 1,05$ (см. рис. 59, кривая 2).

Рекалесценция переохлажденного расплава

Вычислим максимальную температуру, которую приобретает расплав после его рекалесценции.

Воспользуемся формулой (74) для $\tau > \tau_2$ и представим ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} (1 - \Theta) &= \frac{B_n}{1 + B_n} + [(1 - \Theta)_{\max} - \frac{B_n}{1 + B_n}] \times \\ &\quad \times \exp [W_n \mathcal{L} \text{Bi}_0 (1 + B_n) (\tau - \tau_k)], \\ \tau_k &= \begin{cases} \tau_2, & \text{если } (1 - \Theta)_{\max} \leq (1 - \Theta'); \\ \tau_3, & \text{если } (1 - \Theta)_{\max} > (1 - \Theta'); \end{cases} \end{aligned} \quad (102)$$

τ_3 — конец зарождения центров кристаллизации, если оно происходило в данном расплаве, т. е. если $(1 - \Theta)_{\max} > (1 - \Theta')$.

Дело в том, что в общем случае, как мы уже знаем, *зарождение возможно лишь на первом этапе процесса кристаллизации расплава*, когда возникает начальное переохлаждение. Зарождение начинается при $\tau = \tau_1$ и заканчивается при $\tau = \tau_3$ (см. рис. 55). В дальнейшем происходит *только* рост кристаллов. Поэтому, если предположить, что реализуется нормальный механизм их роста, то допустимо и в случае роста кристаллов от зародышей воспользоваться формулой (74), но для $\tau > \tau_3$.

Устремим τ в бесконечность, так как $\tau_3 \ll \tau_0$ (см. рис. 55, 56 и 59). Тогда из формулы (102) следует, что

$$(1 - \Theta)_{\min} = Bi_0 (Bi_0 + W_n \mathcal{L} \Omega_2)^{-1}, \quad (103)$$

где $\Omega_2 = (\varphi N)^{1/3} K_v (T_{кр} - T_c) \mathcal{R}^2/a_3$.

Очевидно, что с увеличением Ω_2 переохлаждение после рекалесценции $(1 - \Theta)_{\min}$ уменьшается, а с увеличением Bi_0 , наоборот, растет.

Это обстоятельство для нас очень важно, ибо в эксперименте переохлаждение расплава часто измеряют, отсчитывая его величину от температуры, называемой температурой остановки. На самом деле, она на $\Delta T_{\min}$ меньше действительной температуры начала кристаллизации. Из (103)

$$\Delta T_{\min} = (1 + H_3 \mathcal{R})^{-1} (T_{кр} - T_c), \quad (104)$$

где $H_3 = W_n L \rho_3 (\varphi N)^{1/3} K_v \beta^{-1}$.

Однако, реально, $\Delta T_{\min}$ не очень велика. Например, при $Bi_0 = 0,01$, $\mathcal{L} = 0,2$, $W_n = 0,93$ и $\Omega_2 = 40$ или, с учетом рис. 64, $\Omega_1 = 800$, рассчитанное по формуле (103) минимальное переохлаждение $(1 - \Theta)_{\min} = 0,0013$, а максимальное $(1 - \Theta)_{\max} = 0,0084$ (см. рис. 59, кривая 1). Следовательно, измерение $\Delta T_{\max}$ от температурной остановки кривой охлаждения даст ошибку меньше 15%. При больших Ω_2 , т. е. при больших $\mathcal{R}$, N и T_c ошибка такого измерения будет значительно меньше. При необходимости эту ошибку можно учесть с помощью формулы (104), если $N = N_3 + N_n$ будет известно.

Результаты экспериментов

На рис. 65 приведены результаты экспериментов Б. Б. Гуляева, выполненных в условиях, близких к тем, какие мы определили в п. 40.

Переохлаждаемость $\Delta T_{\max}$ расплавов углеродистой стали (рис. 65, в), алюминия (65, г) и сурьмы (рис. 65, а и б) Б. Б. Гуляев исследовал в зависимости от приведенного размера $\mathcal{R}$ слитка и скорости S охлаждения расплава [28].

Представим формулы (97) и (101) в виде, удобном для расчета $\Delta T_{\max}$ в зависимости от $\mathcal{R}$ и S .

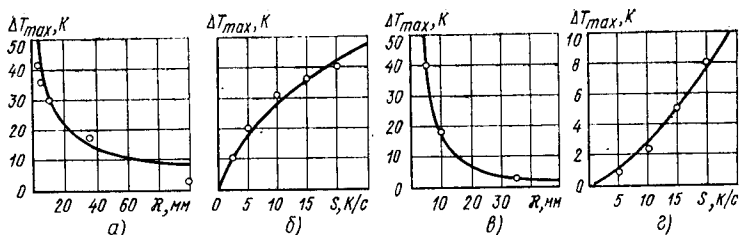


Рис. 65. Зависимость переохлаждаемости $\Delta T_{\max}$ кристаллизующегося расплава от скорости S его охлаждения в форме и приведенного размера $\mathfrak{R}$ отливки;

а, б — сурьма; в — углеродистая сталь; г — технический алюминий. Кривые рассчитаны по формулам (105) и (106) соответственно; опытные данные Б. Б. Гуляева

Из (97) получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_{\max} &= H_1 \mathfrak{R}^{-4/(\alpha+3)} + \Delta T' \\ \Delta T_{\max} &= H_2 S^{4/(\alpha+3)} + \Delta T'', \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

где $H_1 = H_2 (S\mathfrak{R})^{4/(\alpha+3)}$;

$$H_2 = 2^{\frac{\alpha+2}{\alpha+3}} \frac{\alpha+3}{\alpha+4} c_3^{1/(\alpha+3)} [\varphi(\alpha+4) LK_n K_v^3]^{-1/(\alpha+3)};$$

$$S = \beta (T_{\text{кр}} - T_c) / c_3 \rho_3 \mathfrak{R}.$$

Из формулы (101) следует

$$\left. \begin{aligned} \Delta T_{\max} &= H_1^* \mathfrak{R}^{-3/(\alpha^*+2)} \\ \Delta T_{\max} &= H_2^* S^{3/(\alpha^*+2)}; \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

где $H_1^* = H_2^* (S\mathfrak{R})^{3/(\alpha^*+2)}$;

$$H_2^* = 2^{\frac{\alpha^*}{\alpha^*+2}} \frac{\alpha^*+2}{\alpha^*+3} c^{1/(\alpha^*+2)} [\varphi(\alpha^*+3) N_3 LK_v^3]^{-1/(\alpha^*+2)}.$$

Зависимость $\Delta T_{\max}$ от $\mathfrak{R}$ для углеродистой стали (рис. 65, в) хорошо описывается (105) при $\mu = \nu = 0$, $\Delta T' = 0$ и $H_1 = 350$:

$$\Delta T_{\max} = 350 \mathfrak{R}^{-4/3}.$$

Это, по-видимому, означает, что кристаллизация стали происходила в результате роста кристаллов от зародышей. Зарождение и рост протекали с практически постоянными скоростями, так как согласно (21) и (22) при $\nu = 0$ скорость зарождения $n = K_n$ и при $\mu = 0$ скорость роста $v = K_v$.

Полученный вывод является неожиданным, но он подтверждается опытами с алюминием (рис. 65, г).

Для алюминия наиболее подходит формула (106) при $\mu = 0$ и $H_2^* = 0,112$:

$$\Delta T_{\max} = 0,112 S^{3/4}.$$

Это, по-видимому, означает, что кристаллизация алюминия, с которым работал Б. Б. Гуляев, происходила в результате роста кристаллов от затравок с постоянной скоростью.

Менее определенные выводы получаются для сурьмы. Кривые на рис. 65, а и б можно рассчитать по формулам (105) при $\mu = \nu = 1$, $\Delta T' = 0$, $H_1 = 125$ и $H_2 = 7,0$;

$$\Delta T_{\max} = 125\mathfrak{R}^{-4/7} \text{ и } \Delta T_{\max} = 7S^{4/7}.$$

С меньшим успехом эти кривые можно рассчитать по формулам (106) при $\mu = 1$, $H_1^* = 110$ и $H_2^* = 7$, так как показатели степени при $\mathfrak{R}$ и S близки:

$$\Delta T_{\max} = 110\mathfrak{R}^{-3/5} \text{ и } \Delta T_{\max} = 7S^{3/5}.$$

Действительно, $4/7 = 0,5714$; $3/5 = 0,6$.

Следовательно, в данном случае судить о механизме появления кристаллов трудно: одинаково возможно и воздействие затравок и зарождение при $\Delta T' \approx 0$ и $\nu = 1$. Однозначно можно сказать только то, что зарождение не могло протекать с постоянной скоростью, так как при $\nu = 0$ показатель степени в (105) равен $2/3 = 0,667$. Так же однозначно то, что кристаллы сурьмы росли со скоростью, зависимость которой от переохлаждения близка к $\nu = K_v \Delta T$, т. е. рост кристаллов близок к механизму нормального роста (см. с. 86—87).

Заметим, что для различных сочетаний значений μ и ν показатели степени в формулах (105) и (106) могут изменяться от 0,334 до 0,6, если $\mu > 0$ и $\nu > 0$ и от 1,0 до 1,5, если $\mu = 0$ и $\nu \geq 0$.

Иными словами, если формулы (105) и (106) при $\Delta T' \approx 0$ представить в виде

$$\Delta T_{\max} = H/\mathfrak{R}^a \text{ или } \Delta T_{\max} = \hat{H}S^a,$$

то $a < 1$ в случаях, когда скорость роста кристаллов зависит от переохлаждения, и $a \geq 1$ в случаях, когда она постоянна.

На рис. 66 приведены зависимости $\Delta T_{\max}$ от S , установленные Б. Б. Гуляевым в опытах с различными металлами и сплавами. Очевидно, для сурьмы, чугуна, сплавов АЛ2 и АЛ8 показатель степени $a < 1$; для армко-железа, стали 40Л и алюминия А995 $a > 1$. Следовательно, случаи, когда при объемной неизотермической кристаллизации скорость роста кристаллов постоянна, не очень редкие. В подтверждение этого вывода напомним о результатах непосредственного измерения скорости роста дендритов

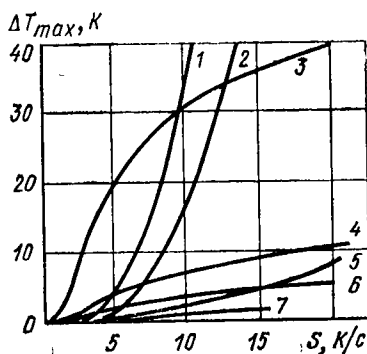


Рис. 66. Зависимость максимального переохлаждения кристаллизующегося расплава от скорости охлаждения:

1 — железо Армко; 2 — сталь 40Л; 3 — сурьма; 4 — чугун; 5 — алюминий А995; 6 — сплав АЛ2; 7 — сплав АЛ8

в сплавах. Например, из графиков на рис. 31 ясно, что при кристаллизации сплавов Sn с 4% Bi и Sn с 8% Bi скорость роста практически не зависит от переохлаждения, если оно не превышает 10 К.

42. ЧИСЛО И РАЗМЕР КРИСТАЛЛОВ

В общем случае в единице объема расплава растут $N = N_s + N_n$ кристаллов; N_n — число кристаллов, зародившихся в единице объема расплава в первом этапе кристаллизации, т. е. в течение времени $\Delta t = \tau_s - \tau_1$, пока $\Theta \leq \Theta'$ (см. рис. 55).

В обобщенных переменных

$$(\Omega_N)_n = \Omega_n \left(\int_{\tau_1}^{\tau_s} (1 - \Omega)(\Theta' - \Theta)^v d\tau \right)^{1/3}, \quad (107)$$

где

$$(\Omega_N)_n = (\varphi N_n)^{1/3} \mathfrak{R}. \quad (108)$$

Если принять, что

$$\Omega_N = (\varphi N)^{1/3} \mathfrak{R}, \quad (109)$$

то средний размер кристаллического зерна

$$d = \frac{\mathfrak{R}}{\Omega_N}. \quad (110)$$

Для расчета N и d необходимо воспользоваться моделью (53) и решить 1-ю задачу И. Л. Воробьева с учетом формул (107)—(110). Однако для приближенных оценок можно поступить иначе.

Воспользуемся кривыми на рис. 64. Они связывают Ω_1 с Ω_2 или, согласно (91), Ω_n с Ω_N и, следовательно, N_s с K_n , $\mathfrak{R}$ и T_c для различных интервалов метастабильности $(1 - \Theta')$ при условии, что кривые охлаждения кристаллизующегося расплава и в случае роста кристаллов от зародышей, и в случае роста кристаллов от затравок близки (см. с. 133—135). Поэтому можно принять, что Ω_2 на рис. 64 приблизительно равно

$$(\Omega_2)_n = (\Omega_N)_n \Omega_v. \quad (111)$$

Тогда из (89) $\Omega \approx (\Omega_2)_n / \Omega_1^3$. С учетом (111),

$$(\Omega_N)_n \approx \Omega^{1/3} \Omega_n. \quad (112)$$

Следовательно, из (110) при $N_s = 0$

$$d = \frac{\mathfrak{R}}{(\Omega_N)_n} \quad \text{или} \quad d = \frac{\mathfrak{R}}{\Omega^{1/3} \Omega_n}, \quad (113)$$

где, с учетом (107), $\Omega \approx \int_{\tau_1}^{\tau_s} (1 - \Psi)(\Theta' - \Theta) d\tau$, если $v = 1$.

Теперь с помощью графика на рис. 64 и формулы (113) исследуем *влияние примесей* на число и размеры кристаллического зерна, образовавшегося в отливках при их объемной кристаллизации.

Влияние примесей

В теории кристаллизации различают две группы примесей, могущих оказать влияние на процесс кристаллизации расплава: растворимые и нерастворимые в расплаве (см. п. 30).

Большинство примесей хорошо растворимы в расплаве, плохо или вовсе не растворимы в твердой фазе. Рост кристаллов будет сопровождаться вытеснением примеси в расплав и образованием у границ кристаллов слоя расплава с повышенной концентрацией примеси. Это затрудняет переход атомов кристаллизующегося металла или сплава из расплава и, следовательно, повышает энергию активации атомов кристаллизующегося металла или сплава.

Описанное явление, хотя и в меньшей мере, наблюдается и при зарождении кристаллов, так как с повышением энергии активации вероятность фазовых флуктуаций в расплаве уменьшается. Это, естественно, приводит к уменьшению скорости зарождения центров кристаллизации в области малых переохлаждений, т. е. к расширению интервала $\Delta T'$ метастабильности (см., например, рис. 32).

Если растворимая примесь *поверхностно-активна* к кристаллизующемуся металлу или сплаву, то она, уменьшая поверхностное натяжение на границе расплав—кристалл, будет одновременно адсорбироваться на поверхности кристаллов и этим увеличивать энергию активации атомов кристаллизующегося металла или сплава. Вследствие понижения поверхностного натяжения увеличится вероятность фазовых флуктуаций, а вследствие повышения энергии активации — уменьшится. Поэтому по мере увеличения количества примеси поверхностно-активного вещества скорость зарождения в области малых переохлаждений сначала увеличивается, а затем уменьшается, т. е. сначала уменьшается, а затем увеличивается интервал $\Delta T'$ метастабильности расплава (см. например, рис. 33). Одновременно воздействие примеси должно отразиться на коэффициенте K_n , если скорость зарождения рассчитывать по формуле (21).

Если нерастворимые примеси *изоморфны* с кристаллизующейся фазой или *активны*, то зародыши будут возникать не в объеме переохлажденного расплава, а на поверхности частиц таких примесей. Поэтому с увеличением количества активных и изоморфных примесей будет уменьшаться интервал метастабильности расплава (см., например, рис. 35).

Изменение интервала метастабильности и величины K_n в связи с воздействием примесей приводит к соответствующему изменению

среднего размера кристаллического зерна в отливках. Эта связь между $\Omega_2 \approx (\Omega_2)_n$ и Ω_1 выражена кривыми для различных $(1 - \Theta')$ на рис. 64. Действительно, уменьшение $\Delta T'$, т. е. $(1 - \Theta')$, и увеличение Ω_1 , т. е. K_n , так как $\Omega_1 = \Omega_n \Omega_v$, приводит к росту $\Omega_2 \approx (\Omega_2)_n$, т. е. N_n , так как, согласно (111), $(\Omega_2)_n = (\Omega_N)_n \Omega_v$, и, следовательно, к уменьшению среднего размера d зерна, так как, согласно (113), $d = \mathfrak{R}/(\Omega_N)_n$. Увеличение $(1 - \Theta')$ и уменьшение Ω_1 приводит к обратному результату.

Аналогично можно исследовать и другие варианты воздействия разных сортов и количеств растворимых и нерастворимых примесей, если для них будут известны K_n и $\Delta T'$. Принципиальных различий между растворимыми и нерастворимыми примесями-катализаторами кристаллизации, а также затравками, обнаружить не удастся. Доказательством этого утверждения может служить график на рис. 64, который показывает соответствие в эффектах кристаллизации в результате роста кристаллов от затравок Ω_2 и зародышей Ω_1 . Этот график мы использовали для определения числа кристаллов, выросших от зародышей, найдя связь между Ω_2 и $(\Omega_2)_n$ в виде формулы (111).

Однако это утверждение справедливо тогда, и только тогда, когда число N_{np} частиц *нерастворимой* примеси будет больше или равно N_n , рассчитанному, например, по графику на рис. 64 для тех $\Delta T'$ и K_n , которые соответствуют данному сорту и количеству нерастворимой примеси.

Иначе говоря, это утверждение справедливо, если $N_n \leq N_{np}$. В случае $N_n > N_{np}$ число кристаллов будет равно числу N_{np} .



Рис. 67. Макроструктуры слитков алюминия А7 с разным содержанием титана: а — 0,005%; б — 0,01%; в — 0,02%; г — 0,04%

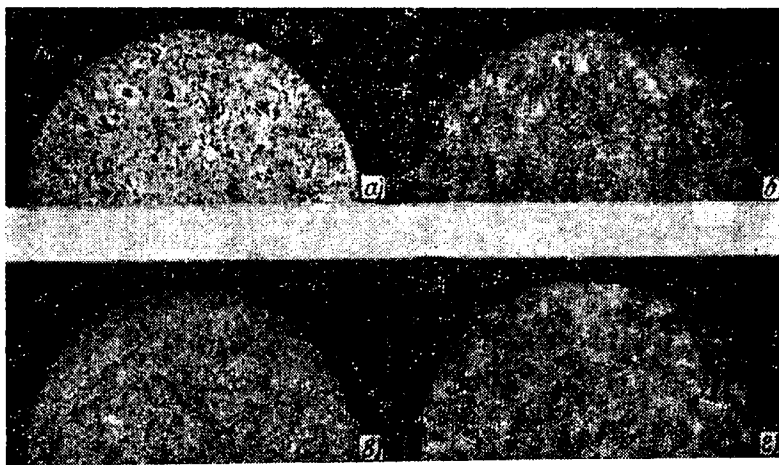


Рис. 68. Изломы слитков цинка Ц1 с разным содержанием магния:
 а — 0,012%; б — 0,025%; в — 0,5%; г — 0,6%

частиц нерастворимой примеси. При воздействии затравок на процесс кристаллизации число кристаллов всегда будет равно N_3 , так как для затравок $\Delta T' = 0$.

Таким образом, число кристаллов в единице объема

$$\left. \begin{aligned} &N = N_3 + N_n, \text{ если } N_n \leq N_{\text{пр}}, \\ &N = N_3 + N_{\text{пр}}, \text{ если } N_n > N_{\text{пр}}. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

На рис. 67 приведены макроструктуры темплетов, вырезанных из слитков алюминия А7 с разным содержанием титана. Расплав заливали при 1000 К в графитовые изложницы, нагретые до 970 К; диаметр изложницы 45 мм, высота 100 мм. Расплав при плавке не перегревали выше 1000 К; титан в расплав вводили лигатурой АТ5. Очевидно, что титан в алюминии, т. е. интерметаллид TiAl_3 обладает свойствами нерастворимой примеси: измельчение зерна наблюдается до 0,02% Ti, дальнейшее увеличение его заметно не уменьшает среднего размера зерна. Согласно (114), при $N_3 = 0$ и $N_n > N_{\text{пр}}$ число кристаллов $N = N_{\text{пр}}$, а при $N_3 = 0$ и $N_n < N_{\text{пр}}$ число кристаллов $N = N_n$. В одних и тех же условиях охлаждения (β и T_c) величина $N = \text{const}$.

На рис. 68 показаны поперечные изломы слитков цинка Ц1 с разным содержанием магния. Расплав заливали при 800 К в графитовые изложницы, нагретые до 770 К; диаметр изложницы 45 мм, высота 100 мм. Очевидно, что магний обладает свойствами растворимой поверхностно-активной примеси: измельчение зерна наблюдается при увеличении магния до 0,4%, дальнейшее увеличение его приводит к укрупнению зерна (см. с. 143).

Влияние перегрева

При анализе кинетики объемной кристаллизации влияние перегрева расплава как характеристики условий литья учтено только при определении момента времени (t_1 или F_{01}) начала кристаллизации отливки. Это естественно, так как рассматривался процесс теплообмена при весьма малых значениях критерия Био, когда перегрев от расплава отводился еще до начала



Рис. 69. Макроструктура слитков алюминия А7; расплав залит: а — без перегрева; б — при перегреве на 100 К; в — при перегреве на 250 К

процесса зарождения и роста кристаллов и, следовательно, не должен был влиять на процесс объемной кристаллизации.

На рис. 69 приведены макроструктура темплетов, вырезанных из слитков А7, содержащих 0,02% Ti, расплав заливали при перегреве на 0; 100 и 200 К выше $T_{кр}$ в графитовые изложницы, нагретые до 870 К. Ясно, что перегрев на 100 К выше $T_{кр}$ не изменяет величины зерна. Однако перегрев на 200 К приводит к резкому укрупнению кристаллического зерна в слитке.

На рис. 70 даны поперечные изломы слитков цинка Ц1 с 0,025% Mg; расплав заливали при перегреве на 0 и 200 К выше $T_{кр}$ в графитовые изложницы, нагретые до 670 К. В этом случае размер зерна не зависит от перегрева.



Рис. 70. Изломы слитков цинка Ц1 с 0,025% Mg; расплав залит: а — без перегрева; б — при перегреве на 200 К



Рис. 71. Изломы слитков сурьмы Sn ; расплав залит:
 а — без перегрева; б — при перегреве на 100 К

Можно предположить, что титан в алюминии, образуя кристаллы TiAl_3 , является примесью, обладающей свойствами активной примеси, которая теряет свою активность при определенном перегреве.

Таким образом, при объемной кристаллизации размер зерна зависит от перегрева только в случае, когда расплав содержит активные примеси, которые изменяют свою активность под действием перегрева при плавке. Если примесь при определенном для каждого ее сорта перегреве теряет активность, то происходит резкое укрупнение кристаллического зерна. Это явление часто встречается при исследовании технических металлов и сплавов (см. рис. 36).

С увеличением перегрева возможно и измельчение зерна в случае, если перегрев повышает активность примеси. На рис. 71 приведен пример такого явления в слитках сурьмы Sn , залитой в графитовые изложницы, нагретые до 870 К. Первый слиток залит без перегрева, второй — при перегреве на 100 К.

Выше, используя полученные формулы для анализа экспериментов, мы не делали различия между металлами и сплавами. Совпадение результатов расчетов и экспериментов — хорошая иллюстрация реальности допущений, с учетом которых построена математическая модель И. Л. Воробьева (см. с. 113—115). Однако целесообразно выявить причины этого совпадения.

Очевидно, что для объемной кристаллизации отливки в тонкостенном кокиле модель формирования кристаллического строения (см. с. 68) примет вид, аналогичный (53)—(54):

$$K_c K_p \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi_0 \theta + \mathcal{L} \frac{d\Psi}{d\tau}; \quad \tau > Fo_1;$$

$$\Psi = 1 - \exp(-\omega);$$

$$\Theta(Fo_1) = 1; \quad \Psi(Fo_1) = 0;$$

где

$$\omega = \Omega_1^3 \int_0^\theta (\theta' - \Theta)^\nu \left(\int_{\theta'}^\theta (\Theta_l - \Theta)^\mu d\xi \right)^3 d\theta' + \Omega_2^3 \left(\int_0^\theta (\Theta_l - \Theta)^\mu d\xi \right)^3;$$

$$\Theta_l = \Theta_A - \frac{M_L}{1 - (1 - k_0) \Psi}.$$

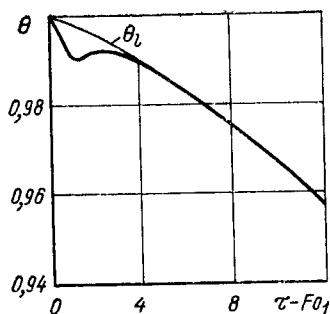


Рис. 72. Кривая охлаждения сплава, кристаллизующегося объемно (расчет на ЭЦВМ)

Приводя эту модель к виду, аналогичному (55)—(58), можно найти численное решение для Θ . На рис. 72 приведен график кривой Θ от τ , рассчитанной на «Наири-2» при $\Omega_1=0,1$; $\Omega_2=40$; $Bi_0=0,01$; $\mathcal{L}=0,2$; $k_0=0,5$; $1-\Theta_s=0,1$. Эта кривая очень похожа на экспериментальную (рис. 73), полученную при кристаллизации слитка сплава Al с 5,7% Ni. Эксперимент выполнен при $Bi_0=0,08$; скорость охлаждения 0,4 K/с. Температура записана так же, как и для кривой на рис. 56.

Ясно, что первый этап кристаллизации совершается при малом изменении Θ_1 , поэтому можно принять $\Theta_1 \approx 1$. Следовательно, расчеты $(1-\Theta)_{\max}$ и N_n можно выполнять на модели И. Л. Воробьева.

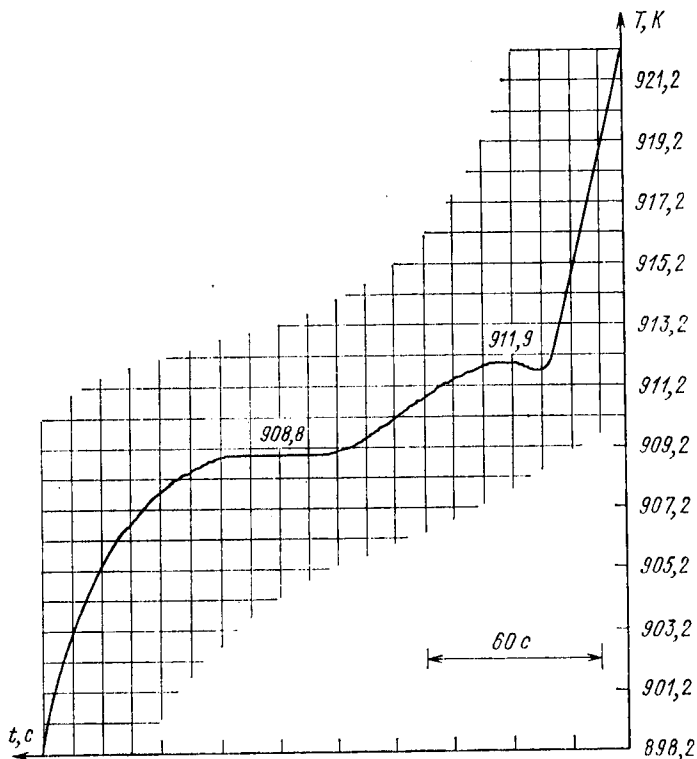


Рис. 73. Кривая охлаждения сплава Al с 5,7% Ni (эксперимент).

43. УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что правая часть выражения

$$\mathcal{T} = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{Bi_0 \operatorname{ch} (A+s)^{1/2} X}{(A+s)^{1/2} \operatorname{sh} (A+s)^{1/2} + Bi_0 \operatorname{ch} (A+s)^{1/2}} \right],$$

которое является решением задачи (80) в изображениях функции Θ преобразованием Лапласа (см. с. 131), есть отношение двух обобщенных полиномов.

2. Сформулировать задачу (80) для цилиндрической и сферической отливки. Найти решение этих задач с помощью интегрального преобразования Лапласа.

3. Решить задачу (93) для ω из (54) при $\Omega_2 > 0$ и $\Theta < \Theta'$. Найти $(1 - \Theta)_{\max}$, пользуясь методом усреднения функциональных поправок.

4. Составить программу для численного решения задачи об объемной кристаллизации бинарного сплава (см. с. 147).

Указание: целесообразно использовать программу, приведенную в прилож. VIII.

Глава 9. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

Реально расплав, залитый в литейную форму, охлаждается по объему неоднородно: периферийная часть охлаждается быстрее, центральная — медленнее. Это обуславливает последовательное развитие процесса кристаллизации отливки.

Для анализа последовательной кристаллизации перегретого расплава в литейной форме используем математическую модель И. Л. Воробьева и полученные в предыдущей главе результаты исследования кинетики объемной кристаллизации для различных случаев зарождения и роста кристаллов.

44. 2-я ЗАДАЧА И. Л. ВОРОБЬЕВА

В подавляющем большинстве случаев получение отливок с кристаллическим макростроением, для которого характерно наличие ограниченной зоны столбчатых кристаллов, не требуется. Литейщики различными технологическими приемами (изменением перегрева при плавке и заливке, регулированием скорости отвода теплоты от отливки и т. п.) и рядом методом воздействия на кристаллизующийся расплав (модифицированием, вибрированием, электромагнитным перемешиванием и др.) решают, по существу, две проблемы *управления* формированием кристаллического строения отливки. Первая проблема — не допустить образование зоны столбчатых кристаллов и получить мелкозернистое кристаллическое строение отливки. Вторая — вызвать сквозную транскристаллизацию расплава и получить отливку, состоящую только из столбчатых кристаллов.

В обобщенной математической модели (34)–(47) последовательной кристаллизации отливок эти проблемы отражены в (40).

Очевидно, если $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$ до конца процесса кристаллизации отливки, то столбчатые кристаллы в ее теле не возник-

нут.* При $\Psi(\chi_3, \tau) = 0$ в отливке будут расти только столбчатые кристаллы.

Поведение функции $\Psi(\chi_3, \tau)$ зависит от многих обстоятельств последовательной кристаллизации отливки в литейной форме. Среди них — перегрев при заливке, интенсивность охлаждения расплава в форме, скорость зарождения и скорость роста кристаллов, воздействие примесей, наличие в расплаве затравок и т. п. Исследование этой функции возможно только на математической модели (34)—(47). Однако с учетом перечисленных факторов такое исследование сопряжено с чрезвычайными трудностями. Главная причина — отсутствие данных о скорости зарождения и роста кристаллов того или иного металла или сплава в присутствии различных примесей, особенно активных. Не менее важной причиной является отсутствие данных об источниках появления и поведении затравок в перегретом расплаве.

В этой связи И. Л. Воробьев предложил исследовать последовательную кристаллизацию отливки при $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$, т. е. заранее предполагая, что столбчатые кристаллы в теле отливки возникать не будут. Тогда, отклонение от условий, при которых $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$, должно вызывать транскристаллизацию расплава. На этом пути будет уже нетрудно прийти к таким условиям, при которых $\Psi(\chi_3, \tau) = 0$.

Предложение И. Л. Воробьева позволяет существенно упростить математическую модель (34)—(47).

Если, как и при исследовании объемной кристаллизации, принять, что теплофизические свойства твердой фазы и расплава одинаковы, т. е. $K_{a1} \approx K_{a2} \approx 1$, $K_{c2} \approx 1$, $K_{p2} \approx 1$, и, следовательно, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$, то систему (34) удастся представить одним уравнением, учитывающим условия (39) и (40) при $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \delta(X, \tau) \mathcal{L} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}, \quad (115)$$

где $\delta(X, \tau)$ — характеристическая функция множества D (см. рис. 52, а), определенная так, что

$$\delta(X, \tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } (X, \tau) \notin D; \\ 1, & \text{если } (X, \tau) \in D. \end{cases}$$

Далее, если $(X, \tau) \in D$ и в пределах D соблюдаются условия (20-I), то уравнение (35) для $\Psi = \Psi(X, \tau)$ можно сохранить в прежнем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= 1 - e^{-\omega}, \\ \text{где} \\ \omega &= \Omega_2^3 \left(\int_0^{\Theta} (2 - \Theta)^{\mu} d\xi \right)^3 + \Omega_1^3 \int_0^{\Theta} (\Theta' - \Theta)^{\nu} \left(\int_{\Theta'}^{\Theta} (1 - \Theta)^{\mu} d\xi \right)^3 d\Theta'. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Примем, что отливка затвердевает в тонкостенном кокиле, т. е. $q(\tau) = Bi_0 \Theta(1, \tau)$. Тогда, кривые условия (37) и (38) для случая $\Psi(\chi_s, \tau) = 1$ упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(X, Fo_0) &= \Theta_{\text{зал}}; \Psi(X, Fo_0) = 0; \\ -\frac{\partial \Theta(1, \tau)}{\partial X} &= Bi_0 \Theta(1, \tau); \frac{\partial \Theta(0, \tau)}{\partial X} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Задача (115)—(117) сформулирована и для случая $\Omega_1 = 0$ решена И. Л. Воробьевым в 1972 г.

Условимся задачу (115)—(117) называть 2-й задачей И. Л. Воробьева.

45. КИНЕТИКА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ОТ ЗАТРАВОК

Анализ кинетики объемной кристаллизации (см. п. 42) показал, что рост кристаллов от затравок, а также от зародышей, появляющихся на частицах активных или изоморфных примесей, если их число удовлетворяет второму условию (114), т. е. когда они ведут себя как затравки, — явление нередкое для реального процесса плавки и литья металлов и сплавов. Поэтому решение задачи (115)—(117) для последовательного затвердевания расплава в результате роста кристаллов в двухфазной зоне фронта кристаллизации от числа N_z затравок (см. рис. 51) представляет практический интерес. А так как с помощью формулы (89) и графиков на рис. 64 можно по Ω_2 определить Ω_1 , то решение 2-й задачи И. Л. Воробьева только для Ω_2 является обоснованным путем упрощения исследования кинетики последовательной кристаллизации отливки на модели (115)—(117).

Анализ кинетики объемной кристаллизации (см. п. 39) дает еще один обоснованный путь упрощения 2-й задачи И. Л. Воробьева: функцию Ψ при $\Omega_1 = 0$ допустимо линеаризировать и представить в виде (72). Более того, учитывая, что в интервалах $[0, p_2]$ и $[p_n, p_0]$ параметр p изменяется незначительно (см. рис. 58) и это не оказывает существенного влияния на ход процесса охлаждения кристаллизующегося расплава (см. рис. 59), функцию Ψ целесообразно представить еще проще: в (72) принять, что $p_2 = 0,35$ и $W_1 = 0$; $p_n = 1,45$ и $W_n = 0,91$; $p_0 = \infty$ и $W_0 = 0$, т. е.

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{если } p \in [0; 0,35]; \\ 0,91(p - 0,35), & \text{если } p \in [0,35; 1,45]; \\ 1, & \text{если } p \in [1,45; \infty]; \end{cases} \quad (118)$$

согласно выражению (65)

$$p = \Omega_2 \int_{\tau'}^{\tau} [1 - \Theta(X, \tau)] d\tau, \quad (119)$$

где τ' — момент начала кристаллизации в точке $X = \chi_1(\tau)$ двухфазной зоны отливки.

Теперь уравнение (115) примет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + 0,91 \delta \mathcal{L} \Omega_2 (1 - \Theta); \quad (120)$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } (X, \tau) \notin [\chi_2, \chi_3]; \\ 1, & \text{если } (X, \tau) \in [\chi_2, \chi_3], \end{cases} \quad (121)$$

где $\chi_2(\tau)$ — закон продвижения фронта температуры, при которой в соответствии с (118) начинается выделение теплоты кристаллизации; $\chi_3(\tau)$ — закон продвижения фронта кристаллизации.

Очевидно, что $\chi_1(\tau)$ — закон продвижения фронта $T_{кр}$ начала кристаллизации следует из соотношения

$$\Theta(\chi_1, y_1) = 1; \quad (122)$$

$\chi_2(\tau)$ и $\chi_3(\tau)$ — из уравнений (118) и (119):

$$\Omega_2 \int_{y_1}^{y_2} [1 - \Theta(X, \tau)] d\tau = 0,35; \quad (123)$$

$$\Omega_2 \int_{y_2}^{y_3} [1 - \Theta(X, \tau)] d\tau = 1,10, \quad (124)$$

где $y_1(X)$; $y_2(X)$; $y_3(X)$ — обратные соответственно $\chi_1(\tau)$, $\chi_2(\tau)$ и $\chi_3(\tau)$ функции.

Для решения сформулированной задачи методом прямых (см. с. 63.1) используем прием, предложенный И. Л. Воробьевым.

Разделим плоскую отливку на 2 k одинаковых слоев, параллельных поверхности ее охлаждения. Плоскости, отделяющие слои друг от друга, будут отстоять от середины отливки на расстояние $X_i = i/k$, где $i = 1, 2, \dots, k-1$. Следы пересечения этих плоскостей с плоскостью $(\Theta, 0, X)$ образуют семейство параллельных прямых $X = X_i$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$).

На каждой такой прямой уравнение (120) в частных производных можно заменить обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $\Theta(X, \tau)$ с помощью известной подстановки

$$\frac{\partial^2 \Theta(X_i, \tau)}{\partial X^2} = k^2 [\Theta(X_{i+1}, \tau) - 2\Theta(X_i, \tau) + \Theta(X_{i-1}, \tau)].$$

В результате получаем систему $k-1$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Theta_1}{d\tau} &= k^2 \left[- \left(1 + 0,91 \frac{1}{k^2} \delta_1 \mathcal{L} \Omega_2 \right) \Theta_1 + \Theta_2 \right] + 0,91 \delta_1 \mathcal{L} \Omega_2; \\ \frac{d\Theta_i}{d\tau} &= k^2 \left[\Theta_{i-1} - \left(2 + 0,91 \frac{1}{k^2} \delta_i \mathcal{L} \Omega_2 \right) \Theta_i + \Theta_{i+1} \right] + 0,91 \delta_i \mathcal{L} \Omega_2; \\ &\quad i = 2, 3, \dots, k-2; \\ \frac{d\Theta_{k-1}}{d\tau} &= k^2 \left[\Theta_{k-2} - \left(\frac{k+2B_{i0}}{k+B_{i0}} + 0,91 \frac{1}{k^2} \delta_{k-1} \mathcal{L} \Omega_2 \right) \Theta_{k-1} \right] + 0,91 \delta_{k-1} \mathcal{L} \Omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

где $\Theta_i = \Theta(X_i, \tau)$ и $\delta_i = \delta(X_i, \tau)$.

При составлении системы (125) учтены граничные условия из (117) в виде

$$k(\Theta_1 - \Theta_{\text{зал}}) = 0 \text{ и } k(\Theta_k - \Theta_{k-1}) = -\text{Bi}_0 \Theta_k.$$

Начальным условием для системы (125), согласно (117), является

$$\Theta_1(0) = \Theta_2(0) = \dots = \Theta_{k-1}(0) = \Theta_k(0) = \Theta_{\text{зал}}, \quad (126)$$

если считать, что время Fo_0 заливки близко к нулю.

Значение характеристической функции δ_i для уравнений (124) определяется из условия (121):

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau \notin [\tau_{i,2}, \tau_{i,3}]; \\ 1, & \text{если } \tau \in [\tau_{i,2}, \tau_{i,3}], \end{cases} \quad (127)$$

где $\tau_{i,1}$, $\tau_{i,2}$, $\tau_{i,3}$ — моменты достижения расплавом температуры кристаллизации, начала и конца выделения теплоты кристаллизации соответственно при $X = X_i$.

Эти величины следует вычислять с помощью уравнений (122)—(124):

$$\left. \begin{aligned} \Theta_i(\tau_{i,1}) &= 1; \\ \Omega_2 \int_{\tau_{i,1}}^{\tau_{i,2}} (1 - \Theta_i) d\tau &= 0,35; \\ \Omega_2 \int_{\tau_{i,2}}^{\tau_{i,3}} (1 - \Theta_i) d\tau &= 1,10; \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Система уравнений (125) при начальном условии (126) и дополнительных условиях (127) и (128) решена на ЭВМ методом Рунге—Кутты для $k = 11$ и различных величин $\Theta_{\text{зал}}$, Bi_0 , $\mathcal{L}$ и Ω_2 . Этот метод в данном случае удобен тем, что позволяет применить «переменный шаг» при определении с помощью (128) законов χ_1 , χ_2 и χ_3 продвижения фронтов процесса кристаллизации.

На рис. 74 в качестве примера представлены графики температурных полей кристаллизующегося расплава для двух значений критерия Bi_0 . Здесь можно наблюдать необычное явление: при $\text{Bi}_0 = 0,05$ изменяется знак градиента температуры внутри двухфазной зоны фронта кристаллизации (рис. 74, а). Анализ температурных полей в широком диапазоне величин критерия Bi_0 показал, что это явление наблюдается только для $\text{Bi}_0 < 0,1$. С увеличением Bi_0 оно исчезает полностью (рис. 74, в).

На рис. 75 приведены примеры графиков законов $\chi_1(\tau)$ и $\chi_3(\tau)$ продвижения фронта процесса кристаллизации для двух значений критерия Bi_0 и двух значений относительной температуры заливки $\Theta_{\text{зал}}$.

И здесь неожиданность: во всех случаях процесс завершается при весьма большой скорости продвижения фронта кристаллизации. Эту особенность процесса затвердевания до сих пор считали характерной лишь для цилиндрической и шаровой отливок (см. рис. 43.1 и 44.1).

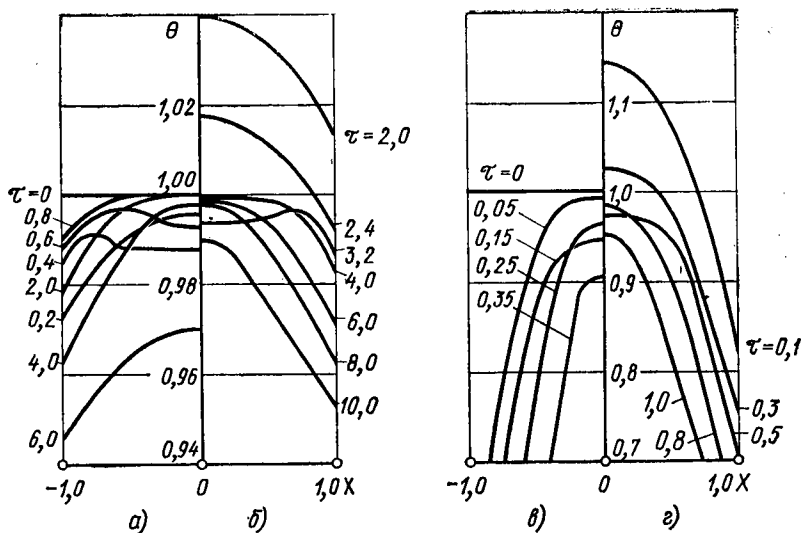


Рис. 74. Температурные поля кристаллизующейся отливки, рассчитанные при $\mathcal{L}=0,4$, $\Omega_2=80$ для:
 а — $Bi_0=0,05$; $\Theta_{\text{зал}}=1,0$; б — $Bi_0=0,05$; $\Theta_{\text{зал}}=1,15$; в — $Bi_0=1,0$; $\Theta_{\text{зал}}=1,0$;
 г — $Bi_0=1,0$; $\Theta_{\text{зал}}=1,15$

На рис. 75, а и б тонкими линиями нанесены графики закона затвердевания отливки в тонкостенном кокиле. Графики рассчитаны по формулам (72-IV.1) и (51-IV.1). Если обозначить $\chi = \xi/l_0$, то при $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}$, $Bi_0 < 0,1$ и $l_\phi/l_0 \ll 1$

$$\chi = \mathcal{L}^{-1}(Bi_0\tau + \Theta_{\text{зал}}^{-1} - 1). \quad (129)$$

Здесь мы находим подтверждение ранее сделанному предположению для модели А. И. Вейника (см. с. 66—67). Удовлетворительное совпадение кривых χ и χ_3 наблюдается только для $\Omega_2 > 50$ и при перегреве $\Theta_{\text{зал}} - 1 > 0,1$. Теперь очевидно, что определение продолжительности затвердевания отливки по (129), а также другие расчеты по формулам, найденным в части I учебного посо-

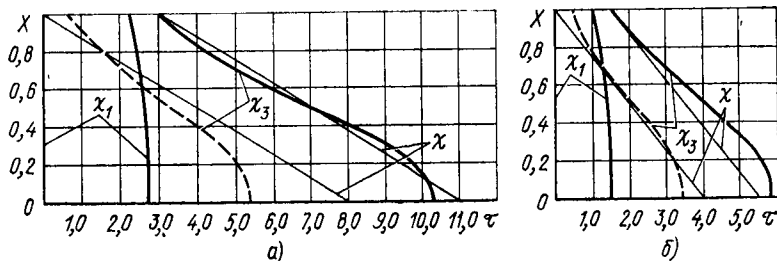


Рис. 75. Кинетические кривые кристаллизации отливок, рассчитанные при $\mathcal{L}=0,4$, $\Omega_2=80$ для:
 а — $Bi_0=0,05$; б — $Bi_0=0,1$

бия, возможны только при соблюдении указанных условий. Однако реально для технических металлов и сплавов всегда $\Omega_2 > 50$, поэтому решающее значение имеет величина перегрева расплава при заливке, так как при больших $\Theta_{\text{зал}}$ в расплаве к началу его затвердевания успевает установиться регулярный режим охлаждения. В этом случае, как известно, связь между температурой и временем в любой точке охлаждающегося тела описывается экспонентой.

Задачу (115)–(117) можно решить на ЭЦВМ более точно, если использовать метод сеток (см. с. 67.1–68.1).

Согласно явной трехточечной схеме, конечно-разностное представление уравнения (115) имеет вид

$$\frac{1}{\sigma h^2} (\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j}) = \frac{1}{h^2} (\Theta_{i+1,j} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i-1,j}) + H_{i,j},$$

где $H_{i,j}$ — численное значение $\delta(X_i, \tau_j) \mathcal{L} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right)_{i,j}$; $h = \frac{1}{k^2}$ — шаг по оси X ; k — число шагов на отрезке $(0, 1)$; следовательно, $X_i = ih$; $i = 1, 2, \dots, k$; $\sigma = k^2 \Delta \tau$ — критерий устойчивости конечно-разностного уравнения; $\Delta \tau$ — шаг по оси τ ; $\Delta \tau = \sigma/2k^2$; следовательно, $\tau_j = j\Delta \tau$; $j = 1, 2, \dots$

Полученное конечно-разностное уравнение устойчиво, если $0 < \sigma < 0,5$ (см. с. 68.1). При $\sigma = 0,5$ оно упрощается:

$$2\Theta_{i,j+1} = \Theta_{i+1,j} + \Theta_{i-1,j} + h^2 H_{i,j}.$$

Представим краевые условия (117) в конечно-разностном виде. Начальное условие

$$\Theta(X_i, 0) = \Theta_{\text{зал}} \text{ или } \Theta_{1,0} = \Theta_{2,0} = \dots = \Theta_{k,0} = \Theta_{\text{зал}}.$$

Граничные условия

$$\Theta_{0,j+1} = \Theta_{1,j} + \Delta \tau H_{1,j};$$

$$\Theta_{k,j+1} = \Theta_{k-1,j} + \text{Bi}_0 \Theta_{k,j} + \Delta \tau H_{k,j};$$

точность такой аппроксимации равна $\Theta(h^2)$.

Для вычисления $H_{i,j}$ производную $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right)_{i,j}$ представим в виде

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right)_{i,j} = \dot{\omega}_{i,j} \exp(-\omega_{i,j}),$$

где, согласно (56)–(59),

$$\omega_{i,j} = \Omega_2^3 I_{i,j}^3 + \Omega_1^3 (I_{i,j}^3 A_{0,i,j} - 3I_{i,j}^2 A_{1,i,j} + 3I_{i,j} A_{2,i,j} - A_{3,i,j});$$

$$\dot{\omega}_{i,j} = 3[\Omega_2^3 I_{i,j}^2 + \Omega_1^3 (I_{i,j}^2 A_{0,i,j} - 2I_{i,j} A_{1,i,j} + A_{2,i,j})] (1 - \Theta_{i,j})^\mu;$$

$$I_{i+1,j} = I_{i,j} + (1 - \Theta_{i,j})^\mu \Delta \tau;$$

$$A_{0,i+1,j} = A_{0,i,j} + \omega_{i,j} \Delta \tau;$$

$$A_{1,i+1,j} = A_{1,i,j} + \omega_{i,j} \Delta \tau;$$

$$A_{2,i+1,j} = A_{2,i,j} + \omega_{i,j} \Delta \tau;$$

$$A_{3,i+1,j} = A_{3,i,j} + \omega_{i,j} \Delta \tau;$$

$$\omega_{i,j} = \gamma_{i,j} (\Theta' - \Theta)^\nu;$$

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{при } \Theta_{i,j} \leq \Theta'; \\ 0, & \text{при } \Theta_{i,j} > \Theta'. \end{cases}$$

Тогда

$$H_{l,j} = \delta_{l,j} \mathcal{L} \dot{\omega}_{l,j} \exp(-\omega_{l,j})$$

и, следовательно,

$$\Psi_{l,j} = 1 - \exp(-\omega_{l,j}).$$

В прилож. IX приведена программа для решения этой задачи на «Наири». Результаты решения задачи (115)—(117) методом сеток при $\Omega_2 > 50$ и $\Omega_1 \approx 0$ практически не отличаются от приведенных на рис. 74 и 75. Проверить это мы представляем читателю.

46. АНАЛИЗ КИНЕТИКИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Из анализа кинетических кривых χ_1 и χ_3 последовательной кристаллизации типа тех, которые приведены на рис. 75, следует, что на протяженность $(\chi_3 - \chi_1)$ двухфазной зоны фронта кристаллизации существенное влияние оказывают величины критериев Ω_2 и Bi_0 , в меньшей степени — температура $\Theta_{зал}$ заливки расплава в форму. Увеличение Bi_0 и Ω_2 сокращает двухфазную зону. Влияние $\Theta_{зал}$ становится мало заметным, начиная с $\Theta_{зал} = 1,05$.

При формулировке задачи (115)—(117) для исследования кинетики последовательной кристаллизации от затравок было принято, что $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$, т. е., что фронт кристаллизации перемещается от поверхности формы только в результате присоединения к нему кристаллов, растущих в двухфазной зоне. Однако такой ход процесса формирования кристаллического строения отливки возможен при вполне определенных условиях процесса кристаллизации, т. е. при вполне определенных значениях Bi_0 , Ω_2 , $\mathcal{L}$ и $\Theta_{зал}$.

Найдем эти условия.

Условия формирования зернистого кристаллического строения отливки

Очевидно, что $\mathfrak{W} = \Omega_v [1 - \Theta(X, \tau)]$, если $\chi_3 \leq X \leq \chi_1$, является относительной линейной скоростью роста кристаллов в *двухфазной зоне* фронта кристаллизации. Так как кристаллы *фронта* находятся в контакте с переохлажденным расплавом, их относительная линейная скорость $\mathfrak{W}_R$ роста будет равна $\mathfrak{W}$ при $X = \chi_3$, т. е.

$$\mathfrak{W}_R = \Omega_v [1 - \Theta(\chi_3, \tau)]. \quad (130)$$

Очевидно также, что $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$ только, и только, в случае, когда относительная линейная скорость $\mathfrak{U}$ продвижения фронта кристаллизации в течение всего процесса затвердевания отливки будет больше относительной скорости $\mathfrak{W}_R$ роста кристаллов фронта.

На рис. 76 представлены графики зависимости относительной линейной скорости $\mathfrak{U} = \dot{\chi}_3$ продвижения фронта кристаллизации от безразмерной координаты X . При фиксированных значениях

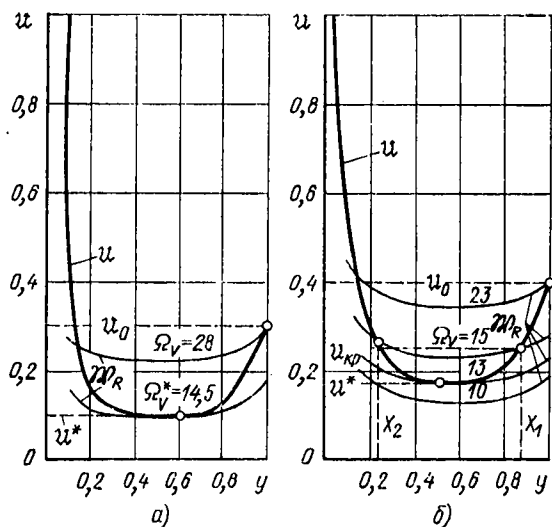


Рис. 76. Скорость продвижения фронта кристаллизации, рассчитанная при $\mathcal{L} = 0,4$; $\Omega_2 = 80$, для:
 а — $Bi_0 = 0,05$; б — $Bi_0 = 0,1$

критериев Ω_2 , Bi_0 , $\mathcal{L}$ и величины $\Theta_{\text{зал}}$ эти зависимости определяются однозначно в результате дифференцирования кривых χ_3 на рис. 75 по τ . Так же однозначно по температурным полям и кинетической кривой χ_3 от τ находится относительное переохлаждение $1 - \Theta(\chi_3, \tau)$ расплава у фронта кристаллизации. Относительная же линейная скорость роста кристаллов фронта, в соответствии с формулой (130), определяется Ω_v , которая при $\Omega_2 = \text{const}$ может принимать различные значения в зависимости от Ω_N , так как согласно (42)

$$\Omega_v = \Omega_2 / \Omega_N. \quad (131)$$

Например, для $Bi_0 = 0,10$, $\mathcal{L} = 0,4$, $\Theta_{\text{зал}} = 1,15$ и $\Omega_2 = 80$ (рис. 76, б) относительная скорость Ω_R роста кристаллов фронта будет всегда меньше относительной скорости Ω продвижения фронта в результате присоединения к нему кристаллов, растущих в двухфазной зоне, если $\Omega_N > 6,25$, т. е. $\Omega_v < 13$.

Из графиков на рис. 76 ясно, что при фиксированном значении Ω_2 функция $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$ для любого Ω_v , меньшего некоторой величины Ω_v^* этого критерия. На рис. 76, а величина $\Omega_v^* = 14,5$; на рис. 76, б величина $\Omega_v^* = 13$. В общем случае Ω_v^* может быть определена из равенства

$$\Omega_R^* = u^*, \quad (132)$$

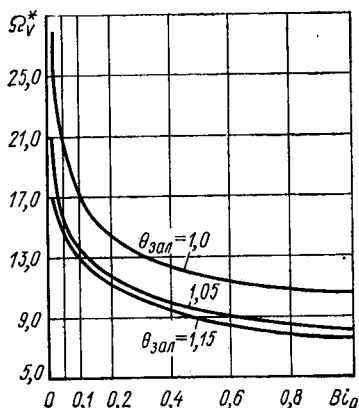


Рис. 77. Зависимость критического значения критерия Ω_v^* от Bi_0 для различных $\theta_{зал}$

Для кривых на рис. 77 при $\Omega_2 = 80$ и $\theta_{зал} = 1,0$ множитель $M_1 = 12,5$, показатель степени $m_1 = 0,25$ (m_1 зависит только от Ω_2 ; в общем случае $0 \leq m_1 \leq 1$).

С помощью соотношения (131) нетрудно установить минимальную величину Ω_N^* критерия Ω_N , при которой $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$:

$$\Omega_N^* = M_1^{-1} \Omega_2 (\mathcal{L}^{-1} Bi_0)^{m_1}. \quad (134)$$

Если принять, что $\mathcal{U}^*$ пропорциональна средней скорости $\dot{\chi}$ продвижения фронта кристаллизации, вычисленной по формуле (129), т. е. $\mathcal{U}^* = M_2 Bi_0 \mathcal{L}^{-1}$, то

$$\left. \begin{aligned} \Omega_N^* &= M_1^{-1} M_2^{-1} \Omega_2 (\mathcal{U}^*)^{m_1} \\ \text{или} \quad N_3^* &= H_6 (U^*)^m, \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

где H_6 — множитель пропорциональности; для конкретного металла или сплава при неизменной геометрии отливки, H_6 является постоянной величиной; $m = 3m_1$, в общем случае $0 < m \leq 3$.

Напомним, что по формуле (89) с помощью графиков на рис. 64 можно рассчитать относительное число $(\Omega_N)_n$ кристаллов, выросших от центров кристаллизации, зарождающихся с относительной скоростью Ω_n . Следовательно, формулы (134)–(135) допустимо представить в виде

$$(\Omega_N)_n = M^{-1} \Omega^{1/3} \Omega_1 (\mathcal{L}^{-1} Bi_0)^{m_1}; \quad (136)$$

$$\left. \begin{aligned} (\Omega_N)_n^* &= M_1^{-1} M_2^{-1} \Omega^{1/3} \Omega_1 (\mathcal{U}^*)^{m_1} \\ \text{или} \quad N_n^* &= H_7 (U^*)^m, \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

где $\mathcal{U}$ — относительная скорость продвижения фронта кристаллизации, вычисленная в точке касания кривых $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}_R$ на рис. 76;

$$\mathcal{W}_R^* = \Omega_v^* [1 - \Theta(\chi_3, \tau)].$$

В результате такого анализа кривых $\mathcal{U}$, аналогичных приведенным на рис. 76, получены графики Ω_v^* в зависимости от Ω_2 , $\mathcal{L}$, Bi_0 и $\theta_{зал}$. На рис. 77 в качестве примера даны эти графики для трех значений $\theta_{зал}$ при $\Omega_2 = 80$ и $\mathcal{L} = 0,4$. Они удовлетворительно аппроксимируются формулой

$$\Omega_v^* = M_1 (\mathcal{L} Bi_0^{-1})^{m_1}, \quad (133)$$

в которой M_1 — множитель пропорциональности, зависящий от Ω_2 и $\theta_{зал}$.

где H_7 — множитель пропорциональности, аналогичный H_6 в формуле (135).

Так как $N = N_3 + N_n$, то $N^* = N_3^* + N_n^*$ и

$$N^* \approx H_8 (U^*)^m. \quad (138)$$

Таким образом, формулы (134) и (136) выражают искомую связь между параметрами Ω_1 , Ω_2 , $\mathcal{L}$, Bi_0 и $\Theta_{зал}$, при которых функция $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$.

В самом деле, согласно условию (132), величина U^* определяет ту максимальную скорость $\mathfrak{W}_R^*$ роста кристаллов фронта кристаллизации, при которой фронт продвигается только в результате присоединения к нему кристаллов, растущих в двухфазной зоне. Следовательно, Ω_N^* и $(\Omega_N^*)_n$, в свою очередь, определяет то минимальное число N^* кристаллов, при росте которых в двухфазной зоне функция $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$.

Условия транскристаллизации в отливке

Таким образом, *транскристаллизация расплава в литейной форме невозможна*, если функция $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$, т. е. если

$$\left. \begin{aligned} U &= \mathfrak{W}_R^* \\ \text{или, если} \quad \Omega_v &\leq \Omega_v^* \text{ и } \Omega_N \geq \Omega_N^* \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

На рис. 78 сплошной линией проведены кривые, являющиеся геометрическим местом значений Ω_v^* и Ω_N^* , для $\mathcal{L} = 0,4$ и $Bi_0 = 0,05$ при литье без перегрева ($\Theta_{зал} = 1$) и с перегревом на 15% ($\Theta_{зал} = 1,15$). Такие кривые можно построить по результатам расчетов, выполненных в п. 45, и для других величин $\mathcal{L}$ и Bi_0 . График на рис. 78 дан в качестве примера, с помощью которого легко показать, что область значений Ω_v и Ω_N , удовлетворяющих неравенствам (139), довольно узкая — область графика под сплошными кривыми.

Здесь необходимо напомнить, что значения Ω_v^* и Ω_N^* получены из условия (132), т. е. из равенства относительной скорости $\mathfrak{W}_R$ роста кристаллов фронта кристаллизации *наименьшей* величине U^* относительной скорости U продвижения этого фронта во время затвердевания отливки.

Возможно *другое* условие:

$$(\mathfrak{W}_R)_0 = U_0,$$

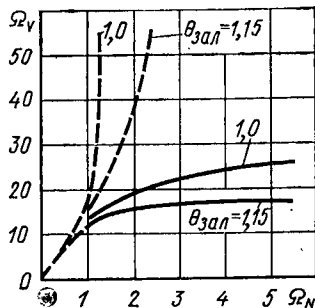


Рис. 78. Зависимость между критериями Ω_v и Ω_N для различного кристаллического строения отливок

т. е. равенство относительной скорости $(\mathfrak{W}_R)_0$ роста кристаллов фронта относительной скорости $\mathfrak{U}_0$ продвижения фронта у поверхности формы (см. рис. 76). Реализация этого условия приведет к транскристаллизации с самого начала процесса затвердевания отливки, так как кристаллы фронта будут расти быстрее, чем кристаллы в его двухфазной зоне, т. е. функция $\Psi(\chi_3, \tau) = 0$.

Согласно соотношениям (130) и (131), с учетом (89),

$$(\mathfrak{W}_R)_0 = (\Omega_v)_0 [1 - \Theta(1, \tau)]$$

и

$$(\Omega_N)_0 = \Omega_2/(\Omega_v)_0 \text{ или } (\Omega_N)_{n0} = \Omega^{1/3}\Omega_1/(\Omega_v)_0.$$

Поэтому во всех случаях, когда

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{U} \leq (\mathfrak{W}_R)_0 \text{ или } \Omega_v \geq (\Omega_v)_0 \\ \text{и} \\ (\Omega_N)_n \leq (\Omega_N)_{n0} \text{ или } \Omega_N \leq (\Omega_N)_0, \end{array} \right\} \quad (140)$$

транскристаллизация расплава начинается от поверхности формы.

На рис. 78 штриховой линией проведены кривые, являющиеся геометрическим местом значений $(\Omega_v)_0$ и $(\Omega_N)_0$, для $\mathcal{L} = 0,4$ и $Bi_0 = 0,05$ при литье без перегрева и с перегревом на 15%. Область графика над штриховыми кривыми образует множество значений Ω_v и Ω_N , удовлетворяющих неравенствам (140).

47. НЕОДНОРОДНОСТЬ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАКРОСТРОЕНИЯ ОТЛИВКИ

Область графика на рис. 76 между сплошной и штриховой кривыми является областью значений Ω_v и Ω_N , при которых также возникает транскристаллизация. Действительно, согласно условию (139), транскристаллизация возможна при $\Omega_v > \Omega_v^*$ и, следовательно, при $\Omega_N < \Omega_N^*$. Поэтому в интервале значений

$$(\Omega_v)_0 \geq \Omega_v \geq \Omega_v^* \text{ и } (\Omega_N)_0 \leq \Omega_N \leq \Omega_N^*$$

транскристаллизация должна начаться в тот момент, когда скорость затвердевания станет равной скорости роста кристаллов фронта, т. е. при $\mathfrak{U} = \mathfrak{W}_R$, если

$$\mathfrak{U}_0 \geq \mathfrak{U} \geq \mathfrak{U}^* \text{ и } (\mathfrak{W}_R)_0 \geq \mathfrak{W}_R \geq \mathfrak{W}_R^*.$$

Например (см. рис. 76, б), для $Bi_0 = 0,1$, $\mathcal{L} = 0,4$, $\Omega_2 = 80$ и $\Theta_{\text{зал}} = 1,15$ при $\Omega_v = 15$ относительная скорость $\mathfrak{U}$ продвижения фронта кристаллизации становится равной $\mathfrak{W}_R$ на расстоянии от поверхности формы, равно $1 - X_1$. С этого момента затвердевания в отливке возникает транскристаллизация, так как в дальнейшем, при $X < X_1$, величина $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{W}_R$, т. е. кристаллы фронта будут расти быстрее, чем кристаллы в его двухфазной зоне и

$\Psi(\chi_3, \tau) = 0$. На участке тела отливки $1 < X \leq X_1$, величина $\mathcal{U} \geq \mathfrak{W}_R$, следовательно, $\Psi(\chi_3, \tau) = 1$, т. е. фронт кристаллизации продвигался в результате присоединения к нему кристаллов, растущих в двухфазной зоне.

В этой связи в области графика на рис. 78, заключенной между сплошной и штриховой кривыми, находятся значения Ω_v и Ω_N , при которых началу транскристаллизации предшествует образование зоны «замороженных» кристаллов. Определенное подтверждение такому выводу дает рис. 17.1, на котором приведен график скорости U перемещения фронта, измеренной во время затвердевания слитка алюминия с 3,0% Si при одностороннем направленном теплоотводе в медный водоохлаждаемый холодильник. Как и должно быть, скорость U монотонно убывает по длине слитка. При $U_{кр} = 0,31$ мм/с произошел переход от зоны «замороженных» кристаллов к столбчатым кристаллам. Из предыдущего следует, что $U_{кр}$ — скорость затвердевания, которая в конкретных условиях литья данного сплава численно равна скорости R роста столбчатых кристаллов этого сплава. Назовем ее *критической*. Относительная критическая скорость на рис. 76, б обозначена $\mathcal{U}_{кр}$.

На рис. 76, б обращает внимание то, что при $\Omega_v = 15$ относительная скорость продвижения фронта кристаллов $\mathcal{U} \geq \mathfrak{W}_R$ еще на одном участке тела отливки: $0 < X \leq X_2$. Здесь должна образоваться центральная зона равноосных кристаллов.

Таким образом, при

$$\mathcal{U} \leq \mathfrak{W}_R, \text{ если } \mathfrak{W}_R \geq (\mathfrak{W}_R)_0 \quad (141)$$

возникает и развивается транскристаллизация; при

$$\mathcal{U} \geq \mathfrak{W}_R, \text{ если } \mathfrak{W}_R \geq (\mathfrak{W}_R)_0 \quad (142)$$

транскристаллизация прекращается.

Следовательно, кристаллическое строение отливки, затвердевшей в условиях, близких к тем, для которых выполнен расчет кинетики кристаллизации (см. рис. 76, б), должно характеризоваться тремя классическими зонами: часть тела, прилегающая к ее поверхности, — зона замороженных кристаллов, протяженность которой равна $1 - X_1$; центральная часть, протяженность которой равна $2X_2 = \Lambda_{ц}$, — зона равноосных кристаллов; между ними зона столбчатых кристаллов, ее относительная протяженность равна $X_1 - X_2 = \Lambda$ (см. п. 4, с. 12).

Протяженность зоны столбчатых кристаллов

В соответствии с рис. 1 протяженность зоны столбчатых кристаллов будем отсчитывать от поверхности отливки. Тогда $\Lambda = 1 - X_2$ и с помощью графиков, аналогичных приведенным

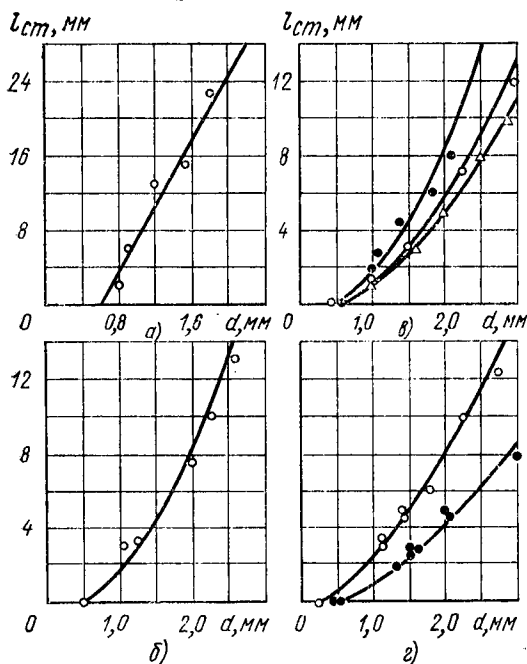


Рис. 79. Зависимость протяженности зоны столбчатых кристаллов от среднего диаметра кристаллов в центральной зоне отливки:

а — углеродистая сталь (данные Б. Б. Гуляева); б — алюминий А6; в — однофазные сплавы алюминия (● — Al с Cu; ○ — Al с Mg; △ — Al с Si); г — двухфазные сплавы алюминия (● — Al с Sb; ○ — Al с Ni). Кривые рассчитаны по формуле (144)

на рис. 76, и формул типа (135), (137) и (138) удастся установить следующее приближенное соотношение:

$$\Lambda = M_3 \left[\left(\frac{\Omega_N^*}{\Omega_N} \right)^{3/m} - 1 \right], \quad (143)$$

которое с учетом формул (44), (47) и (110) приводится к виду

$$\Lambda = M_4 \left[\left(\frac{d}{d^*} \right)^{3/m} - 1 \right] \quad (144)$$

или

$$\Lambda = M_4 \left[\left(\frac{N^*}{N} \right)^{1/m} - 1 \right], \quad (145)$$

где $\Lambda = l_{ct}/l_0$ (см. с. 12) и $d^* = 2(\varphi N^*)^{-1/3}$.

Величина N^* в формуле (145) — то минимальное число кристаллов, рост которых в двухфазной зоне фронта исключает превращение его во фронт транскристаллизации в данных условиях охлаждения расплава. Естественно, что в случаях, когда в расплаве перед фронтом будут расти $N < N^*$ кристаллов, в отливке должна возникнуть зона столбчатых кристаллов, протяженность

которой согласно формуле (145) обратно пропорциональна N . Формула (144) хорошо согласуется с графиками экспериментальных зависимостей протяженности Λ зоны столбчатых кристаллов от среднего размера d зерна на стыке ее с центральной зоной (рис. 79). Для углеродистых сталей (рис. 79, а) $m = 3$, $d^* = 0,6$ мм, $M_4 = 0,228$. Для технического алюминия (рис. 79, б) $m = 1,2$, $d^* = 0,5$ мм, $M_4 = 0,011$. Для всей группы однофазных сплавов алюминия с медью, марганцем и кремнием (рис. 79, в) $m = 1,5$, $d^* = 0,51$ мм и $M_4 = 0,011$, $0,008$ и $0,0066$ соответственно. Для двухфазных сплавов алюминия с никелем $m = 2,0$, $d^* = 0,25$ мм, $M_4 = 0,0075$; с сурьмой $m = 2,0$, $d^* = 0,5$ мм, $M_4 = 0,0045$ (рис. 79, г). Диаметр слитков 50 мм.

Средний размер зерна в центральной зоне отливки

В условиях, когда в отливке происходит транскристаллизация, появление числа кристаллов $N > N^*$ возможно только в результате их зарождения. Так как N^* связано со скоростью U^* затвердевания отливки, то $N > N^*$ возможно в тех зонах тела отливки, где $U > U^*$. Мы уже знаем, что таких зон две: *пристеночная*, где образуются замороженные кристаллы, и *центральная*, где образуются равноосные кристаллы.

Из (137) следует, что число N_n^* кристаллов, растущих от зародышей, тем больше, чем больше U^* . Тогда, по аналогии с (138), при $U > U^*$

$$N = H_8 U^m, \quad (146)$$

если, конечно, число N_3 затравок в общем числе N растущих кристаллов постоянно или равно нулю (при $N_3 \geq N_n$ связь между N и U невозможна).

Из (113) и (146) следует, что средний размер кристаллов

$$d = H_9 \frac{1}{U^{m/3}}. \quad (147)$$

Этот результат находится в полном согласии с данными опытов Б. Б. Гуляева (рис. 80), установившего зависимость между средним размером d зерна в слитках и скоростью U их затвердевания [28]. Кривые на рис. 80 рассчитаны по формуле (147): для технического алюминия при $H_9 = 0,45$ и $m = 1,2$; для сплава Al с 11,8% Si при $H_9 = 1,1$ и $m = 0,48$; для технического железа при $H_9 = 0,315$ и $m = 1,5$; для углеродистой стали (0,93% C) при $H_9 = 0,14$ и $m = 3,0$, если d измерять в мм, а U — в мм/с.

Ниже приведен показатель m в формулах (135) — (138) и (144) — (147) для ряда металлов и сплавов.

Сплав Al с 11,8% Si	0,48	Сплавы Al с Ni	2,0
Алюминий А7	1,2	Железо Армо	1,2
Сплавы Al с Cu	1,5	30ХМЗМ	2,5
		Стали углеродистые	3,0

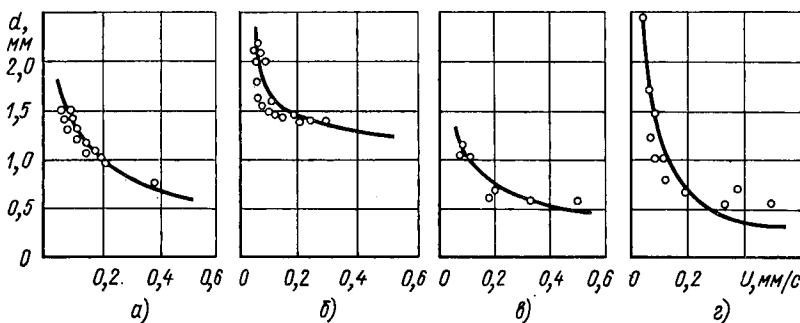


Рис. 80. Зависимость среднего диаметра кристаллического зерна в отливках от скорости их затвердевания:

а — технический алюминий; б — сплав Al с 12,77% Si; в — техническое железо; г — углеродистая сталь. Кривые рассчитаны по формуле (147); опытные данные Б. Б. Гуляева

С помощью формулы (147) можно оценить неоднородность $\Delta = d/d_0$ (см. с. 12) размера кристаллического зерна в центральной зоне отливки:

$$\Delta = M_6 \left(\frac{U_0}{U} \right)^{m/3}. \quad (148)$$

В заключение подчеркнем, что число кристаллов, рассчитанное по формулам (135), (137), (138), и, следовательно, характеристики Λ и Δ в области реальных температур заливки практически не зависят от перегрева.

Действительно, кривые Ω_v^* на рис. 77, соответствующие относительным температурам $\Theta_{\text{зал}}$ заливки 1,05 и 1,15 (или перегревам 5 и 15% от T_L), проходят близко одна от другой. Влияние перегрева во время заливки сказывается лишь при $\Theta_{\text{зал}} < 1,05$, т. е. в области, редко используемой в практике фасонного литья.

48. УПРАВЛЕНИЕ ФОРМИРОВАНИЕМ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАКРОСТРОЕНИЯ ОТЛИВКИ

Исследование последовательной кристаллизации отливок позволило, в первом приближении, выснить главные стороны процесса формирования кристаллического строения отливок: условия возникновения, развития и прекращения транскристаллизации расплава в форме. Исследование этих условий позволило наметить реальные пути регулирования протяженности зоны столбчатых кристаллов и размера зерна в центральной зоне тела отливок. Наиболее действенными средствами регулирования являются режимы плавки и заливки, модифицирование расплава и введение в него затравок в виде микрохолодильников.

Влияние перегрева

В формулах (135), (137), (141)—(148) нет очень важной характеристики условий литья — *перегрева* расплава во время заливки его в форму. Мы не учли перегрев, так как на математической модели И. Л. Воробьева выяснили, что его влияние ограничивается интервалом, составляющим всего около 5% от температуры начала кристаллизации металлов и сплавов (см. с. 157 и 164). Этот вывод можно подтвердить результатами опытов. Например, в слитках цинка с 0,025% Mg и сплава сурьмы с 5% Pb протяженность зоны столбчатых кристаллов и средний размер зерна в центральной зоне не зависят от перегрева (рис. 70 и 81).

Однако в некоторых случаях перегрев оказывает сильное влияние на процесс кристаллизации. На рис. 82, 83 представлены макроструктуры продольных размеров слитков алюминия А7, модифицированного 0,02% Ti. Первый слиток залит при температуре 1100 К (перегрев на 170 К), второй — при 1170 К (перегрев на 240 К). Перегрев на 240 К привел к дезактивации большей части примеси титана (см. рис. 36), что, естественно вызвало резкое расширение зоны столбчатых кристаллов, см. формулу (145). На рис. 84 приведен пример обратного влияния перегрева: измельчение зерна в слитке Cu₂ при заливке с перегревом 100 К.

Оба примера подтверждают ранее сделанный вывод о том, что влияние перегрева расплава в затвердевшей части отливки на тепловую обстановку зарождения и роста кристаллов пренебрежимо мало, и его можно не учитывать (см. с. 146—147). Перегрев заливаемого расплава может оказывать влияние на формирование кристаллической структуры отливок, если изменяется активность примесей.

В этой связи представляют интерес уже известные нам результаты опытов (см. рис. 12). Кристаллическое строение слитков стандартного сплава АМц (в нем 0,04% Ti) обнаруживает четкую связь с перегревом, которая чаще всего встречается на практике: с повышением перегрева при заливке зона столбчатых кристаллов расширяется, величина зерна в центральной зоне увеличивается (см. рис. 12, а). Напомним, что в наших опытах рассматриваемое



Рис. 81. Изломы слитков сплава сурьмы с 5% Pb; расплав залит:
а — без перегрева; б — при перегреве на 100 К

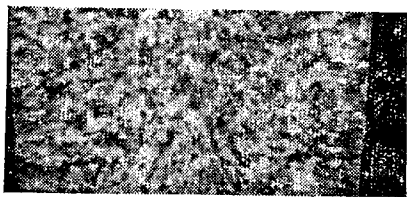


Рис. 82. Макроструктура слитков алюминия А7 с 0,02% Ti; расплав залит при температуре 1100 К



Рис. 83. Макроструктура слитков алюминия А7 с 0,02% Ti; расплав залит при температуре 1170 К

явление мы наблюдали только в случае, когда расплав во время плавки перегревали до 1220 К и затем охлаждали в печи до заданной температуры заливки. Если расплав при плавке не перегревали выше температуры заливки, протяженность зоны столбчатых кристаллов и размер зерна в центральной зоне слитков не зависит от перегрева, начиная с 40 К (см. рис. 12, б).

Следовательно, зависимость кристаллического макростроения от температуры заливки наблюдается в случаях, когда примесь потеряла активность еще при плавке — температура дезактивации титана в алюминии 1130 К (см. рис. 36 и 84). В то же время, согласно формуле (145) расширение зоны столбчатых кристаллов возможно только в результате уменьшения числа кристаллов, растущих перед фронтом транскристаллизации, что четко подтверждается кривой I на рис. 12, а, которая показывает постепенное укрупнение зерна с повышением перегрева. Однако с точки зрения теории видимых причин для этого нет, так как при 1220 К вся примесь титана или большая ее часть потеряла свою активность (см. рис. 84).

Еще раз обратим внимание на рис. 12, б. Несмотря на то, что примесь при плавке не потеряла свою активность, связь кристаллического макростроения с температурой заливки в области *малых* перегревов все же наблюдается. Более того, эта связь выражается прямыми, углы наклона которых к оси абсцисс графика такие же, как и у соответствующих прямых на рис. 12, а.



Рис. 84. Изломы слитков олова Sn; расплав залит;
а — без перегрева; б — при перегреве на 100 К

Отмеченное совпадение можно рассматривать как косвенное подтверждение теории Н. И. Хворина о решающем влиянии *затравок* в виде *обломков ветвей дендритов*, появляющихся в расплаве во время заполнения формы. Выше мы пришли к заключению, что предложение Н. И. Хворина правдоподобно лишь для низкой температуры заливки.

Докажем это. Предположим, что тепловое взаимодействие обломков с перегретым расплавом подчиняется закону Ньютона; коэффициент теплоотдачи от расплава к обломкам кристаллов равен α . Пусть они имеют конфигурацию, в тепловом отношении близкую к сфере радиусом r , и распределены по объему V_0 затвердевающей отливки равномерно. Пусть их число N_3 в единице объема расплава таково, что процесс теплообмена любого обломка с расплавом можно рассматривать независимо от других. Пусть, далее, температура обломков кристаллов равна температуре $T_{кр}^*$ плавления этих кристаллов. Если расплав в литейной форме охлаждается по закону, выражаемому формулой (52), то для малой интенсивности теплоотдачи получим систему дифференциальных уравнений охлаждения расплава при расплавлении в нем обломков кристаллов:

$$\beta (T_1 - T_c) F_0 dt = - [(1 - N_3 \omega) c \rho V_0 dT_1 + L^* \rho^* V_0 N_3 d\omega];$$

$$\alpha (T_1 - T_{кр}^*) f dt = - L^* \rho^* d\omega,$$

где ω — объем одного обломка; f — площадь поверхности обломка.

В безразмерных переменных эта система примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\tau} + \frac{3\mathcal{L}^* \Theta_{кр}^* \Phi}{K_c^* (1 - \Phi) \mathfrak{x}} \frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} &= - \frac{Bi_0 \Theta}{1 - \Phi}; \\ \frac{d\mathfrak{x}}{d\tau} &= - \frac{Nu K_c^*}{\mathcal{L}^* \Theta_{кр}^* \mathfrak{x}} (\Theta - \Theta_{кр}^*) \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

при начальных условиях

$$\Theta(F_{0n}) = \Theta_n; \quad \Phi(F_{0n}) = \Phi_n; \quad \mathfrak{x}(F_{0n}) = \mathfrak{x}_n,$$

где, для удобства, отсчет времени ведется с момента окончания заполнения формы; предполагается, что к этому моменту расплав во всем объеме приобретает температуру Θ_n и в нем образуются обломки кристаллов; их объемная доля $\Phi_n = \omega_n N_3 / V_0$, а относительный размер каждого $\mathfrak{x}_n = \omega_n / f_n$.

Кроме того, в (149) приняты следующие обозначения: $\mathfrak{x} = \frac{\omega}{f}$

$$Nu = \frac{\alpha}{\lambda^3} r; \quad \Theta_{кр}^* = \frac{T_{кр}^* - T_c}{T_{кр} - T_c}; \quad \mathcal{L}^* = \frac{L^*}{c^* (T_{кр}^* - T_c)}; \quad K_c^* = \frac{c \rho}{c^* \rho^*}.$$

Решающим при проведении расчетов является выбор величины критерия Nu , характеризующего интенсивность теплоотдачи от расплава к обломку кристалла, который, по мере его оплавления, уменьшается в размерах. Особенность металлических расплавов состоит в том, что для них величина критерия Прандтля существенно меньше единицы. В этом случае, как известно, процесс теплоотдачи от расплава к твердому телу определяется теплопроводностью расплава тем в большей степени, чем меньше скорость движения расплава относительно этого твердого тела.

Скорость относительного перемещения обломков и расплава кристаллов должна быть незначительной, так как размеры их очень малы и они будут увлекаться потоком расплава во время заполнения формы. Поэтому критерий Нуссельта во втором уравнении системы (149) будет всегда близок к предельному значению, равному *двум* (см. прилож. IV.1, с. 305, 1).

Система дифференциальных уравнений (149) является нелинейной. Для ее решения требуется использование ЭВМ. Однако для приближенной оценки минимальной величины перегрева расплава, необходимого для полного расплавления всех обломков кристаллов, поступим так: предположим, что $Bi_0 = 0$ и $\varphi_0 \ll 1$. Первое предположение основано на том, что охлаждение расплава в результате расплавления обломков кристаллов происходит быстрее, чем при отводе теплоты в форму при $Bi_0 \ll 1$. Второе предположение также отражает реальность, ибо объемная доля обломков кристаллов, образующихся при заполнении формы, не превышает величины $10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}$. С учетом перечисленных предположений, из первого уравнения системы (149) следует

$$\Theta - \Theta_{кр}^* = (\Theta_n - \Theta_{кр}^*) - \Theta_{кр}^* \frac{\varphi_0 \mathcal{L}^*}{3K_c} \left[1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^3 \right].$$

При полном расплавлении обломков, т. е. при $\tau = 0$, температура Θ расплава должна стать равной температуре $\Theta_{кр}^*$ плавления обломка. Следовательно, минимальный перегрев расплава

$$\Theta_n - \Theta_{кр}^* = \Theta_{кр}^* \frac{\varphi_0 \mathcal{L}^*}{3K_c}. \quad (150)$$

Этого перегрева достаточно для полного расплавления $\varphi_0 V_0$ обломков кристаллов.

Пусть во время заполнения формы в расплаве образуются $N_3 = 10^{10} \text{ м}^{-3}$ обломков кристаллов радиусом 0,1 мм (по данным Н. И. Хворинова, 0,1 мм — наибольший радиус обломков); тогда $\varphi = 0,05$. Для чистого алюминия $\Theta_{кр}^* = 1$, $K_c^* = 1$ и $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} = 0,542$; согласно формуле (150), $\Theta_n - 1 \approx 0,009$. Следовательно, при $T_c = 330 \text{ К}$ перегрев, необходимый для расплавления всех обломков кристаллов, равен 5—6 К. Если такое же число обломков образуется при меньшем перегреве, то они не расплавятся полностью и могут стать затравками кристалли-

зации, в результате которой вырастут кристаллы диаметром $\sim 0,4$ мм. Реально в расплаве образуются обломки различных размеров (по данным Н. И. Хворинова, радиус обломков кристаллов колеблется от 0,1 до 0,01 мм). Поэтому при перегреве, меньшем, например, 6 К, расплавятся все обломки размером $< 0,1$ мм. Остальные станут затравками для роста кристаллов. При снижении перегрева число сохранившихся затравок должно, таким образом, увеличиваться.

Рассмотренный пример означает, что в определенных условиях литья (в области весьма малых перегревов расплава) связь между перегревом и кристаллическим строением отливок, обусловленная затравочным действием обломков, реальна. Однако такая зависимость, например, протяженности зоны столбчатых кристаллов в алюминиевых слитках от перегрева расплава перед заливкой, согласно данным рис. 12, б, существует до перегрева около 40 К. Это расхождение можно объяснить следующим соображением. На рис. 12, б протяженность зоны столбчатых кристаллов сопоставляется с величиной перегрева расплава в момент начала заливки. Приведенный расчет выполнен для оценки перегрева после заливки. Во время заполнения формы перегретый расплав интенсивно охлаждается. Поэтому перегрев, оставшийся после окончания заливки, будет намного меньше. Замеры показали, что для литья в условиях, в которых получены слитки, приведенные на рис. 12 и 13, перегрев после заливки в 5—8 раз меньше, чем до начала заливки. Можно, конечно, по формулам (58-III.1) или (65-III.1) выполнить расчет потери перегрева.

Таким образом, *затравочное* действие обломков кристаллов, появляющихся во время заливки формы, возможно при литье слабо перегретого расплава. Однако при рассмотрении графиков на рис. 12, а складывается впечатление, что обломки действуют и после их расплавления. Это очень интересное заключение, к которому пришел Г. Ф. Баландин в 1962 г. на основании следующих наблюдений.

На рис. 85 показаны зависимости размера d зерна в центральной зоне слитков и относительной протяженности Λ зоны столбчатых кристаллов в этих слитках от состава сплавов системы Al—Si. Эти кривые перенесены с графиков на рис. 13 и соответствуют случаю, когда расплав при плавке перегревался выше 1220 К и затем охлаждался в печи до заданной температуры заливки, равной $T_L + 60$ К.

На рис. 85 дана также зависимость прочности σ_0 сплавов системы алюминий—кремний вблизи температуры солидуса от состава этих сплавов (см. прилож. VII). Сопоставление кривых показывает, что увеличение прочности сплавов вызывает расширение зоны столбчатых кристаллов и укрупнение зерна в центральной зоне слитков; уменьшение прочности ведет к обратному явлению. Это легко объяснить затравочным действием обломков кристаллов, образующихся при заливке. Действительно, при прочих

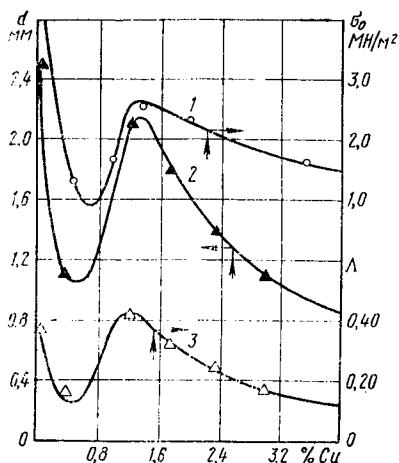


Рис. 85. Прочность (1) сплавов при температуре, близкой к солидусу, средний диаметр зерна в центральной зоне (2) и протяженность зоны столбчатых кристаллов (3) в слитках в зависимости от содержания меди в сплавах системы алюминий — кремний

выше 1170 К и затем охлаждался в печи до заданной температуры заливки. Если же расплав во время плавки не перегреть выше температуры заливки, то связь кристаллического строения слитков сплавов алюминий — кремний с прочностью этих сплавов при температуре, близкой к солидусу, нарушается (см. рис. 13). То же происходит и со связью кристаллического строения слитков сплава АМц с перегревом (см. рис. 12). Следовательно, интересующая нас зависимость обнаруживается лишь в случае, когда примесь титана дезактивирована при перегреве расплава во время плавки выше температуры 1130 К (см. с. 166). Поэтому модифицирующее действие обломков кристаллов после их расплавления можно объяснить лишь восстановлением активности примеси титана в результате образования и полного расплавления обломков.

Механизм восстановления активности примеси титана при литье слитков алюминия и его сплавов можно представить следующим. Так как примесь титана в алюминиевых сплавах ведет себя как активная нерастворимая, то можно предположить, что частички этой примеси взвешены в расплаве. По-видимому, это частички соединения $TiAl_3$. Если примесь дезактивирована перегревом при плавке, то она не оказывает влияния на процесс кристаллизации. Фронт кристаллов, растущих от поверхности стенок формы, будет захватывать частички этой дезактивированной примеси. Попав в твердую фазу, эти частицы вновь активируются. Если рост фронта кристаллов от поверхности стенок

равных условиях, количество образующихся при заливке обломков будет уменьшаться с увеличением прочности и, наоборот, увеличиваться с уменьшением прочности. Однако с точки зрения изложенного в предыдущем параграфе такое объяснение в данном случае несостоятельно, ибо обломки кристаллов, образующиеся при перегреве на 60 К выше T_L неминуемо расплавляются. В этой связи создается впечатление, что обломки кристаллов, расплавляясь полностью, тем не менее оказывают влияние на процесс кристаллизации отливки.

Такое *модифицирующее* влияние обломков кристаллов наблюдается только в случае, когда расплав во время плавки, например алюминий, модифицированный титаном, перегревался

формы происходит во время заполнения, то в образующихся обломках будут содержаться частицы этой вновь активированной примеси. Попад в перегретый расплав, обломки расплавляются и освобождают частицы вновь активированной примеси, которые теперь могут оказать влияние на дальнейший процесс кристаллизации слитков.

Количество φ_0 обломков, образующихся при заполнении формы, как это уже ясно, пропорционально перегреву расплава перед заливкой и обратно пропорционально прочности сплава при температуре, близкой к солидусу.

Таким образом, *модифицирующее действие обломков кристаллов, образующихся при заполнении формы, — явление регулярное*, так как любой металл и сплав имеют активные примеси, а температура плавки и заливки отвечает старому правилу литейщиков: *плавь горячо, лей холодно*.

Режимы плавки и заливки

Во время течения расплава по каналам литниковой системы, а также заполнения полости формы возможно образование обломков кристаллов.

Образование обломков реально при соблюдении двух условий. Во-первых, если во время заливки от стенок канала литниковой системы и полости формы происходит рост фронта кристаллов. Во-вторых, если интенсивность вынужденного движения расплава, возникающего во время течения его по литниковой системе и в полости формы, достаточна для разрушения кристаллов данного металла или сплава.

Выполнение первого условия зависит от величины перегрева расплава в момент начала заливки и интенсивности охлаждения его в данной форме. Выполнение второго условия зависит от способа заполнения формы (скорости заливки, скорости заполнения и вариант литниковой системы) и прочности данного сплава при температуре, близкой к солидусу.

Число обломков кристаллов будет тем меньше, чем выше перегрев расплава в момент начала заливки, меньше интенсивность охлаждения его в форме и меньше скорость вынужденного движения расплава около фронта кристаллов, растущих во время заполнения формы.

Образовавшиеся обломки кристаллов, попадая в перегретый расплав, в зависимости от величины перегрева расплава в момент окончания заполнения и времени снятия этого перегрева в данной форме после окончания заливки, либо расплавляются полностью, либо часть их, наиболее крупных, не успевает расплавиться полностью и остается. Эта часть обломков служит в дальнейшем затравками свободных кристаллов, растущих в двухфазной зоне фронта кристаллизации. Чем выше перегрев расплава в момент окончания заполнения и больше время снятия этого перегрева

после заполнения, тем меньше обломков останется в расплаве в виде затравок кристаллов в двухфазной зоне и, следовательно, согласно формуле (145), тем больше будет протяженность зоны столбчатых кристаллов в отливке или слитке.

Затравочное действие обломков кристаллов, появляющихся во время заполнения формы, возможно при литье с весьма малым перегревом, нереальным в большинстве случаев литья фасонных отливок или слитков. Практически затравочное действие обломков можно наблюдать при литье без перегрева.

Однако, если в металле или сплаве есть активные нерастворимые примеси или такие примеси вводятся в расплав во время плавки вместе с лигатурами, раскислителями, флюсами и т. п., то возможно модифицирующее действие обломков кристаллов, обуславливающее влияние перегрева расплава при заливке на кристаллическое строение отливок и слитков.

Модифицирующее действие обломков появляется только в случае, когда расплав во время плавки перегревается выше температуры дезактивации большей части активных нерастворимых примесей. При затвердевании такого расплава фронт кристаллов, растущих от стенок каналов литниковой системы и от стенок полости формы, захватывает дезактивированные примеси. В твердой фазе дезактивированные примеси снова приобретают активность. При разрушении фронта кристаллов во время заполнения формы будут образовываться обломки, содержащие вновь активированные примеси. В перегретом расплаве обломки расплавляются полностью и освобождают эти примеси, вновь ставшие активными. Если перегрев расплава меньше того, при котором примеси данного сорта дезактивируются, то на этих вновь приобретших активность примесях могут зародиться центры кристаллизации в двухфазной зоне фронта.

Число частиц примеси, активированных таким образом, будет тем меньше, чем меньше число обломков кристаллов, образующихся при плавке, т. е. чем выше перегрев расплава. Следовательно, с увеличением перегрева расплава число частиц активированных примесей, на которых возможно зарождение центров кристаллизации в двухфазной зоне фронта, будет уменьшаться, что, согласно формуле (145), приведет к увеличению протяженности зоны столбчатых кристаллов в отливках.

Модифицирующее действие обломков кристаллов, появляющихся во время заполнения формы, возможно при заливке с перегревом, не превышающим температуру дезактивации основной части нерастворимых примесей. При этом во время плавки расплав должен быть перегрет выше температуры дезактивации этих примесей.

Влияние модифицирующего действия обломков кристаллов на кристаллизацию отливок и слитков должно быть решающим в реальных условиях литья, так как почти все технические металлы и сплавы содержат активные нерастворимые примеси.

Активные примеси появляются также при легировании, раскислении, рафинировании расплава, а при плавке в связи с технологией легирования, раскисления, рафинирования и других операций расплав обычно перегревается до высокой температуры, и, следовательно, большинство активных примесей может дезактивироваться. Перегрев расплава в момент начала заливки при этом, как правило, меньше, чем во время плавки.

Применение вибрации, ультразвуковых колебаний и электромагнитных полей

Очевидно, что процесс образования обломков кристаллов можно интенсифицировать, если расплав в незатвердевшей части отливки привести в состояние вынужденного движения (перемешивания). Способов такого воздействия на расплав несколько.

Виброметоды литья. Возможность улучшения свойств стали в результате сотрясения изложницы во время затвердевания слитка предсказана Д. К. Черновым (см. с. 98). Но только в 1910 г. В. В. Лермантовым и затем В. И. Тыжновым было осуществлено встряхивание изложницы. Установлено, что периодическое встряхивание с частотой 10—100 ударов в минуту (при высоте подъема изложницы 15—20 мм) облегчает выделение газов из расплава, увеличивает плотность и улучшает механические свойства литой стали.

В литейном производстве получила распространение вибрация. При литье фасонных отливок чаще всего применяют вибрирование формы. В производственных условиях вибрирование кокилей было осуществлено в 1938 г. А. М. Корольковым и Н. И. Смирновым.

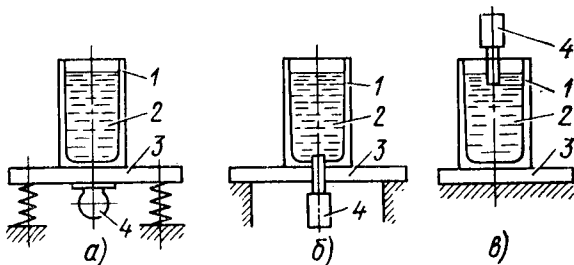
Для вибрирования литейных форм используют вибростолы (рис. 86, а). При литье мелких слитков, а также простых по конфигурации фасонных отливок иногда вибрация от вибратора передается непосредственно расплаву (рис. 86, б и в).

Для возбуждения вибраций применяют пневматические, механические, гидравлические и электромагнитные вибраторы. Наиболее удобны и просты в эксплуатации электромагнитные вибраторы.

Вибрирование расплава в форме увеличивает интенсивность вынужденного движения расплава и, следовательно, интенсивность воздействия его на фронт кристаллов, растущих от стенок

Рис. 86. Схемы вибрирования расплава в форме:

а — вибростол; б — введение вибрации инструментом через дно изложницы; в — то же, сверху; 1 — форма (изложница); 2 — расплав; 3 — плита; 4 — вибратор



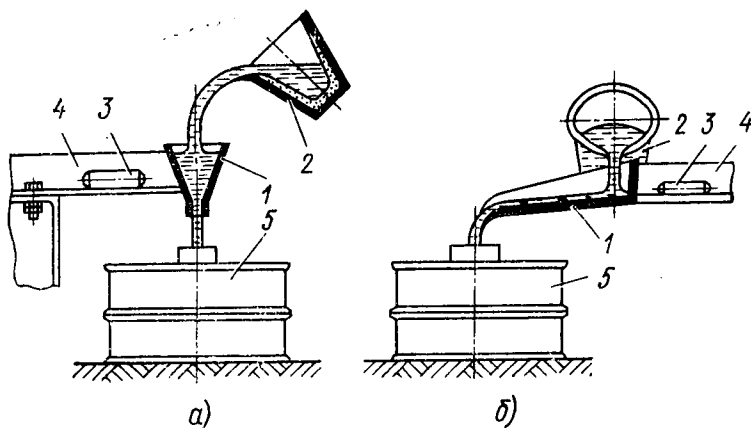


Рис. 87. Схема заливки через вибрируемые воронку (а) и желоб (б):
 1 — воронка (желоб); 2 — ковш; 3 — вибратор; 4 — кронштейн; 5 — форма

полости формы. С помощью вибрирования расплава в форме можно значительно увеличить количество обломков кристаллов и не только повышением скорости вынужденного движения, но и увеличением продолжительности этого движения. Подтверждением такого заключения служит сопоставление макроструктур слитков, приведенных на рис. 48 и 49.

Вибрация будет вызывать измельчение кристаллического зерна и сокращение зоны столбчатых кристаллов в отливках в том случае, когда, во-первых, во время вибрирования расплава от поверхности полости формы происходит затвердевание, и, во-вторых, если вибрируемый расплав будет разрушать фронт растущих кристаллов, т. е. если режим вибрирования (частота, амплитуда, мощность) согласованы с прочностью данного сплава при температуре, близкой к солидусу.

Если металл или сплав не содержит активных примесей, то вибрация приведет к измельчению зерна в отливках при вибрировании расплава в форме в течение времени, необходимого для полного отвода теплоты перегрева от этого расплава. Практически расплав в форме вибрируют в течение времени, соответствующего трети времени полного затвердевания отливки.

Если металл или сплав содержит активные примеси, то для измельчения кристаллического зерна в отливках можно использовать кратковременное вибрирование расплава в форме. Измельчение зерна в этом случае происходит, если расплав при плавке перегрет выше температуры дезактивации примесей, но залит ниже этой температуры.

На основе такого представления о действии кратковременной вибрации разработаны способы литья через вибрируемые заливочные устройства¹ (рис. 87).

¹ Способ предложен в МВТУ им. Н. Э. Баумана в 1959 г.

Из предыдущего ясно, что измельчение кристаллического зерна в отливках, залитых через вибрируемые заливочные устройства, будет наблюдаться только в том случае, когда на поверхности этих устройств во время заливки намораживается корочка твердого металла, которая разрушается расплавом под действием вибрации. Образующиеся обломки кристаллов вместе со струей расплава попадают в форму, где, расплавляясь, оказывают модифицирующее воздействие на процесс кристаллизации отливки.

Виброметоды литья позволяют существенно измельчить кристаллическое зерно в отливках, повысить их плотность и улучшить механические свойства литого металла, особенно его пластические характеристики.

Использование ультразвуковых колебаний (УЗК). На рис. 88 изображены схемы двух способов введения УЗК в расплав. Наибольшее распространение получил второй способ введения УЗК сверху.

Для возбуждения УЗК в расплаве применяют колебательную систему, состоящую из магнитострикционного преобразователя—двигателя, трансформатора упругих колебаний и инструмента, с помощью которого упругие колебания вводят в расплав. Источником упругих колебаний является двигатель, где электрический ток от генератора высокой частоты преобразуется в механические колебания.

Л. Л. Силин установил, что воздействие УЗК на процесс формирования кристаллического строения отливок аналогично вибрированию затвердевающего расплава. Поэтому при кратковременной обработке, если образующиеся обломки кристаллов будут попадать в перегретый расплав, возможно модифицирующее влияние на процесс кристаллизации отливки. Однако, как правило, расплав в форме обрабатывают дольше, чем требуется для отвода теплоты перегрева от этого расплава. В таких случаях измельчение зерна в отливках, повышение их плотности и улучшение механических свойств обусловлено затравочным действием обломков кристаллов.

Удобным для литья мелких отливок является способ введения УЗК через присадочную проволоку¹ (рис. 89). Присадочная проволока не только возбуждает УЗК в расплаве, находящемся в заливочном устройстве, но и оплавляется и разрушается сама. Таким способом можно эффективно вводить модификаторы, микрохолодильники. Требуется лишь вместо проволоки использовать трубку с порошком модификатора или микрохолодильников.

Использование электромагнитных полей. Вынужденное движение расплава в форме можно создать наложением бегущих, пульсирующих, вращающихся электромагнитных полей. Наиболее удобным для литья фасонных отливок является электромагнитное воздействие на затвердевающую отливку с помощью скрещенных постоянного электрического и магнитного полей².

¹ Способ предложен в ИМЕТ АН СССР в 1958 г.

² Способ предложен в ДонНИИЧМ в 1962 г.

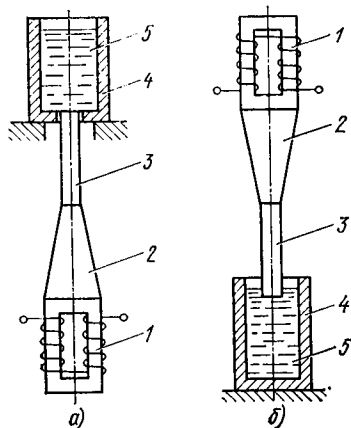


Рис. 88. Схемы систем для возбуждения ультразвуковых колебаний в расплаве:
а — через данную часть слитка; б — сверху;
1 — двигатель; 2 — трансформатор; 3 — инструмент; 4 — изложница; 5 — расплав

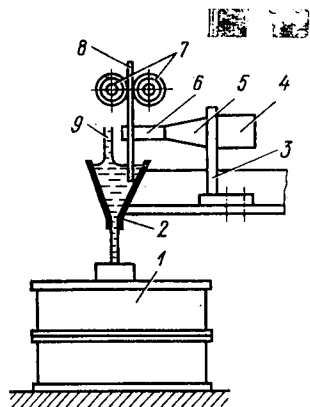


Рис. 89. Схема устройства для возбуждения ультразвуковых колебаний в промежуточной заливочной воронке:

1 — форма; 2 — воронка; 3 — кронштейн; 4 — двигатель; 5 — трансформатор; 6 — инструмент; 7 — подающие ролики; 8 — присадочная проволока; передающая упругие колебания в расплав; 9 — струя расплава из ковша

Если к расплаву, находящемуся в литейной форме, подвести постоянный электрический ток и поместить форму во внешнее поле постоянного магнита так, чтобы оно было перпендикулярно направлению электрического, то в результате их взаимодействия в расплаве возникнет электромагнитная объемная сила. Направление этой силы зависит от направления векторов плотности электрического тока и индукции магнитного поля.

Б. В. Чекин и Е. М. Шелухин установили, что в результате взаимодействия скрещенных неоднородного электрического и неоднородного магнитного полей, наложенных на расплав, в нем развивается интенсивная циркуляция.

Неоднородное электрическое поле получается при пропускании через расплав электрического тока с помощью токоподводов, расположенных в придонной части формы или в области прибыли.

Воздействие циркуляции расплава на процесс формирования кристаллического строения отливки аналогично вибрированию формы.

Введение в расплав микрохолодильников

Один из старинных способов снижения температуры расплава перед заливкой заключается во введении в ковш кусков твердого металла, которые, расплавляясь, быстро снижают перегрев жидкого металла. Кристаллическое строение отливок получается мелкозернистым. Этот способ иногда используют и сейчас.

В 1929—30 гг. Э. Шейль впервые изучил влияние внутренних расплавляющихся холодильников в виде прутков и лент, устанавливаемых в изложницы перед заливкой. В результате в слитках алюминия и сталей подавлялась транскристаллизация и измельчалось кристаллическое зерно.

В 1938 г. В. И. Данилов и В. Е. Неймарк своими опытами доказали, что в этом случае главное значение имеют активные нерастворимые примеси, которые освобождаются при расплавлении прутков и лент и не успевают потерять свою активность, попадая в расплав. Они впервые предложили вводить в расплав алюминия во время его заливки в форму алюминиевый порошок для измельчения кристаллического зерна в отливках. Однако этот способ был забыт, и к нему литейщики вернулись через 30 лет благодаря работам А. А. Рыжикова, А. М. Модянова, В. А. Ефимова и их учеников, которые разработали ряд оригинальных устройств для введения порошков в расплав при литье слитков и фасонных отливок¹.

На 1-й всесоюзной научно-технической сессии по стальному слитку в 1950 г. Н. Т. Гудцов среди задач, стоящих перед металлургами, особо подчеркнул задачу создания теории управления кристаллическим строением стальных слитков с помощью плавающих внутренних холодильников.

Согласно теории формирования кристаллического макростроения отливок, изложенной в данном разделе, воздействие вводимых в расплав металлических порошков на процесс кристаллизации может быть либо затравочным, либо модифицирующим. В этом отношении нет разницы между обломками кристаллов и частицами порошков, вводимых в расплав извне во время его заливки. Нерасплавившиеся частицы, как и обломки кристаллов, станут затравками. При полном расплавлении частиц в расплаве окажутся активные примеси, если, конечно, они имелись в металле порошка.

Разница в воздействии обломков кристаллов и частиц порошка проявляется в другом отношении. Выше уже показано, что реально количество обломков кристаллов, образующихся в расплаве при заполнении формы, не превышает 5% объема отливки, а размеры — 0,1 мм. Количество же порошка и размеры его частиц могут быть любыми. Если при расплавлении обломков кристаллов перегрев расплава уменьшается максимум на 0,01 температуры его кристаллизации (см. с. 168), то при полном расплавлении частиц порошка потеря перегрева расплава будет значительной. Это должно оказать соответствующее влияние на ход процесса кристаллизации отливки. А если учесть, что порошок вводится в расплав практически холодным, то действие его частиц как плавящихся микрохолодильников может оказать влияние на

¹ Способы литья, в которых в расплав вводятся микрохолодильники, А. А. Рыжиков предложил называть «Суспензионным литьем».

ход кристаллизации даже в тех случаях, когда частицы порошка не являются затравками или не содержат необходимых активных примесей.

Рассмотрим влияние микрохолодильников на процесс охлаждения расплава в литейной форме. Пусть в расплав вводятся микрохолодильники в виде порошка, частицы которого приблизительно одинаковы и по конфигурации близки к сфере радиусом r_0 ; N_0 — число частиц на единицу объема расплава. Пусть, далее, расплав обменивается теплотой с микрохолодильниками по закону Ньютона. При этом процесс теплообмена расплава с любой частицей происходит независимо от других; α — коэффициент теплоотдачи от расплава к частицам. Если, по-прежнему, расплав охлаждается в литейной форме по закону, выраженному формулой (52), то для $Bi_0 \ll 1$ получим следующую систему дифференциальных уравнений снижения температуры T_1 расплава и повышения температуры T^* частиц микрохолодильников:

$$\beta (T_1 - T_c) F_0 dt = -[(1 - N_0 w_0) c \rho V_0 dT_1 + c^* \rho^* V_0 N_0 w_0 dT^*];$$

$$\alpha (T_1 - T^*) f dt = c^* \rho^* V_0 N_0 w_0 dT^*$$

или в безразмерных переменных

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\tau} + \frac{\varphi_0}{K_c^* (1 - \varphi_0)} \frac{d\Theta^*}{d\tau} &= -\frac{Bi_0 \Theta}{1 - \varphi_0}; \\ \frac{d\Theta^*}{d\tau} &= \frac{3}{\tau_0^2} Nu K_c^* (\Theta - \Theta^*). \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Для начальных условий $\Theta(0) = \Theta_{зал}$ и $\Theta^*(0) = \Theta_n^*$ решение этой системы мы поручаем читателю. При $\tau_0 \ll 1$, так как реально всегда $\tau_0 \ll \mathfrak{R}$, оно принимает вид

$$C\Theta = A \exp \left[-\frac{1}{3} Bi_0 \tau / (1 - \varphi_0) \right] + B \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0} \exp (-3 Nu C \tau / \tau_0^2); \quad (152)$$

$$C\Theta^* = A \exp \left[-\frac{1}{2} Bi_0 \tau / (1 - \varphi_0) \right] + B K_c^* \exp (-3 Nu C \tau / \tau_0^2), \quad (153)$$

где $A = K_c^* \Theta_{зал} + \Theta_n^* \varphi_0 / (1 - \varphi_0)$; $B = \Theta_{зал} - \Theta_n^*$;

$$C = \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0} + K_c^*.$$

Вычитая из первой формулы вторую, получим, что

$$\Theta - \Theta^* = (\Theta_{зал} - \Theta_n^*) \exp (-3 C Nu \tau / \tau_0^2), \quad (154)$$

т. е. температуры расплава и частиц микрохолодильников сравниваются при $\tau \rightarrow \infty$. Учитывая, что при $x = 4,6$ величина $e^{-x} \approx 0,01$, можно оценить время τ_0 прогрева частиц микрохолодиль-

ников до температуры, которая будет лишь на 1% ниже температуры расплава:

$$\tau_0 \approx \frac{4,6\tau_0^2}{3Nu \left(\frac{\varphi_0}{1-\varphi_0} + K_c^* \right)}. \quad (155)$$

Очевидно, что процесс охлаждения расплава под воздействием микрохолодильников происходит очень быстро. Например, если частицы микрохолодильников малы и $Nu = 2$, для слитков диаметром > 50 мм при $r_0 \leq 0,3$ мм и $\varphi_0 \leq 0,2$ величина $\tau_0 < 10^{-4}$, что составляет несколько микросекунд. Естественно поэтому введение микрохолодильников является очень сильным средством управления процессом кристаллизации в результате целенаправленного снятия перегрева расплава во время заполнения формы. И именно такое их свойство затрудняет ввод порошков в расплав.

Количество микрохолодильников, необходимое для снятия заданного перегрева без их расплавления, можно оценить по формуле (152). Так как τ_0 весьма мало и $Bi_0 \ll 1$, то при $\Theta_0 \leq \Theta_{кр}^*$

$$\varphi_0 \approx \left[1 + \frac{1}{K_c^*} \left(\frac{\Theta_0 - \Theta_n^*}{\Theta_{зал} - \Theta_0} \right) \right]^{-1}, \quad (156)$$

где Θ_0 — заданная относительная температура расплава; $\Theta_{кр}^*$ — относительная температура плавления микрохолодильников.

Заметим, что с помощью формулы (156) можно оценить также требуемые температуру заливки и начальную температуру частиц наполнителя при литье изделий из композиционных материалов типа кераметов, если задано количество φ_0 тугоплавкого наполнителя и температура Θ_0 расплава к моменту τ_0 окончания нагрева наполнителя до температуры Θ_0 .

Рассмотрим поведение плавящихся микрохолодильников. Очевидно, что если в любой момент $\tau < \tau_0$ температура Θ^* частиц микрохолодильников станет равной температуре $\Theta_{кр}^*$ их плавления, то они начнут плавиться. Из (152) и (153) следует, что при $\tau < \tau_0$ и $\Theta^* = \Theta_{кр}^*$ расплав будет иметь температуру

$$\Theta_0 - \Theta_{кр}^* \approx (\Theta_{зал} - \Theta_{кр}^*) - (\Theta_{кр}^* - \Theta_n^*) \frac{\varphi_0}{K_c^* (1 - \varphi_0)}. \quad (157)$$

В случае, когда $(\Theta_0 - \Theta_{кр}^*)$ меньше, чем $(\Theta_n - \Theta_{кр}^*)$ из формулы (150), расплавление частиц будет неполным и микрохолодильники окажут еще и затравочное действие на процесс кристаллизации. Конечно, такое влияние будет возможным, если микрохолодильники изоморфны к кристаллизующемуся металлу или сплаву.

В другом случае, т. е. при $(\Theta_0 - \Theta_{кр}^*) \geq (\Theta_n - \Theta_{кр}^*)$, все частицы расплавятся полностью, будет снят перегрев на величину

$$\Theta_{зал} - \Theta \approx \Theta_{кр}^* \frac{\varphi_0}{K_c^*} \left(-\frac{\mathcal{L}^*}{3} + \frac{1}{1 - \varphi_0} \right) - \Theta_n^* \frac{\varphi_0}{K_c^* (1 - \varphi_0)} \quad (158)$$

и возможно модифицирующее действие микрохолодильников, если, конечно, они имеют активные примеси и эти примеси не потеряют активности при оставшемся перегреве расплава, равном $\Theta - 1$.

С помощью формулы (158) можно также оценить число микрохолодильников, необходимое для снятия заданного перегрева $\Theta_{\text{зал}} - \Theta$ в результате их нагрева и полного расплавления.

В заключение необходимо подчеркнуть, что формулы (150), (157) и (158) справедливы при $\Theta_{\text{зал}} > \Theta_{\text{кр}}^*$. При этом безразличен материал микрохолодильников: он может быть и чистым металлом, и сплавом; в любом случае после прогрева частиц они будут плавиться. При $\Theta_{\text{зал}} < \Theta_{\text{кр}}^*$ плавление невозможно, возможно лишь диффузионное растворение частиц микрохолодильников в расплаве. Этот процесс будет протекать на несколько порядков медленнее.

Комплексное модифицирование

Согласно общей теории кристаллизации примеси, растворимые в расплаве, но мало растворимые в твердой фазе, повышают энергию активации атомов и, следовательно, затрудняют переход их из переохлажденного расплава в твердую фазу (см. п. 30). Это приводит к снижению скорости роста кристаллов. В формуле (22) влияние таких примесей отражается на величине коэффициента K_v : увеличение количества примеси вызывает уменьшение K_v , а в общем случае — Ω_v .

При транскристаллизации уменьшение Ω_v должно вызвать снижение скорости $\mathfrak{W}_R$ роста столбчатых кристаллов, см. формулу (130), и, следовательно, уменьшение протяженности зоны столбчатых кристаллов в отливке (см. рис. 76). Этот вывод согласуется с наблюдениями. Известно, что увеличение концентрации ограниченных твердых растворов ведет к сокращению зоны столбчатых кристаллов в отливках.

Однако необходимо иметь в виду, что примеси с ограниченной растворимостью в твердой фазе одновременно увеличивают интервал метастабильности расплава (см. с. 84). Поэтому для чистых

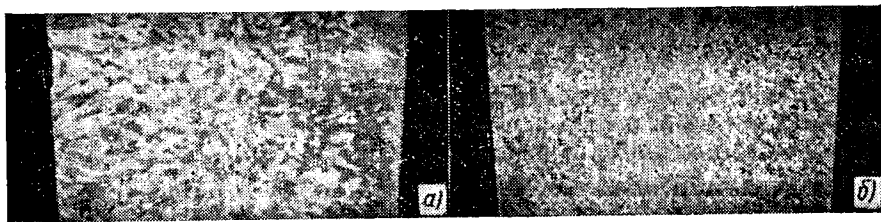


Рис. 90. Макроструктура слитков алюминия А2, залитого при 1000 К:
а — без титана; б — с 0,02% Ti

металлов и чистых однофазных сплавов введение таких примесей, при прочих равных условиях, практически не должно изменять протяженность зоны столбчатых кристаллов в отливках и слитках.

Уменьшение зоны столбчатых кристаллов произойдет, если в расплав чистого металла вместе с растворимой примесью, которая увеличивает переохлаждение перед фронтом кристаллизации, ввести нерастворимую активирующуюся или изоморфную примесь, которая, в свою очередь, уменьшит интервал метастабильности расплава.

Например, кремний в алюминии обладает свойствами примеси, которая, не являясь поверхностно-активной, увеличивает интервал метастабильности расплава. В то же время титан в алюминии и его сплавах является примесью, обладающей свойствами активной. Следовательно, введение его в расплав вместе с кремнием и должно вызывать сокращение протяженности зоны столбчатых кристаллов и уменьшение размера зерна в центральной зоне.

На рис. 90, а приведена макроструктура продольного разреза слитка А2, содержащего около 0,5% Si, на рис. 90, б — макроструктура слитка того же алюминия, но модифицированного 0,02% Ti. В обоих случаях расплав залит при температуре 1000 К.

Такое комплексное модифицирование является одним из действенных средств измельчения кристаллического зерна в отливках. Эффект комплексного модифицирования должен широко проявляться в практических условиях литья, так как в большинстве технических металлов и сплавов имеются активные примеси. Введение в расплав любой ограниченно растворимой или нерастворимой в твердой фазе примеси может вызвать эффект модифицирования. На рис. 91 приведены кривые, отражающие влияние ряда веществ на величину кристаллического зерна при литье технического алюминия. Все эти вещества не являются поверхностно-активными, но образуют с алюминием ограниченный твердый раствор. Технический алюминий, как известно, имеет естественные нерастворимые активные примеси. В результате комплексного воздействия активных примесей и добавок этих веществ наблюдается увеличение числа зерен в отливках тем больше, чем большее количество таких веществ вводится в расплав.

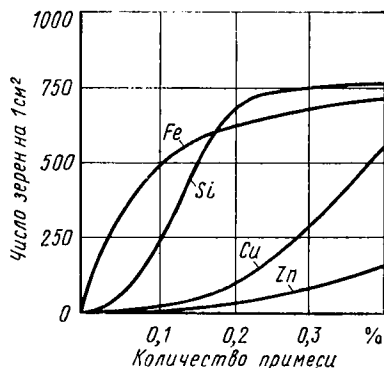


Рис. 91. Влияние растворимых примесей на величину зерна в алюминии

49. ЗАДАЧИ

1. Найти общее решение задачи (151) о нагревании микрохолодильников и охлаждении расплава, в который они введены. Рассчитать время потери перегрева расплава для случая, когда $T_{\text{зал}} < T_{\text{кр}}^*$, в зависимости от числа микрохолодильников и размеров частиц.

2. Рассчитать время потери перегрева расплава после введения в него микрохолодильников для случая, когда $T_{\text{кр}}^* < T_{\text{зал}}$.

3. Рассчитать режимы литья ($T_{\text{зал}}$ и U), при которых в отливке будут расти только столбчатые кристаллы.

4. Рассчитать режимы литья ($T_{\text{зал}}$ и U), при которых в отливке неоднородность кристаллического строения будет характеризоваться $\Lambda = 0$ и $\Delta = 0,9$.

Указание: в задачах 3 и 4 необходимо воспользоваться формулами (145), (146) и (147) с учетом (52).

5. Установить пределы $\mathcal{R}$, β , λ и $\mathcal{L}$, в которых реальна объемная кристаллизация для отливок из металлов и сплавов при $K_1 = 0,9$.

Указание: следует воспользоваться графиком на рис. 61.

Глава 10. ПОРИСТОСТЬ И ЛИКВАЦИОННЫЕ ДЕФЕКТЫ В ОТЛИВКАХ

Повышение плотности отливок и предотвращение образования в них ликвационных дефектов — научно-техническая проблема.

Эта проблема возникла перед металлургами и, позже, перед литейщиками в связи с освоением и развитием производства кузнечных слитков и, затем, фасонных стальных отливок.

Уже более 100 лет эффективным и доступным способом уменьшения пористости и ликвационных дефектов является *питание* затвердевающих отливок от прибылей.

За истекшие 100 лет созданы принципы конструирования технологичных отливок и принципы расчета для них необходимых числа и размеров прибылей. Однако до сих пор, они не реализованы в инженерных методах, позволяющих получать *однозначные и надежные* результаты таких расчетов. Причин две: чрезвычайная сложность процессов, приводящих к образованию пористости и неоднородности химического состава *фасонных* отливок, и недостаточная разработка теории этих процессов.

50. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПОРИСТОСТИ ОТЛИВКИ

Для теоретической оценки пористости тела отливки и анализа влияния условий литья на ее величину (см. п. 6) используем математические модели Куманина—Вейника и Флемингса—Журавлева (см. п. 19 и 24).

Оценка пористости по И. Б. Куманину и А. И. Вейнику

Наиболее простую оценку дает модель И. Б. Куманина (см. с. 72). С помощью этой модели удается рассчитать протяженность Λ_n центральной части тела отливки, где наиболее вероятно образование осевой усадочной пористости.

По И. Б. Куманину осевая пористость может появиться потому, что в определенный момент времени τ_1^* двухфазные зоны фронтов кристаллизации сомкнутся, центральная часть тела затвердевающей отливки станет только двухфазной и компенсация

объемной усадки при дальнейшем затвердевании может быть затрудненной из-за несогласованности скоростей роста кристаллов и фильтрации расплава между этими кристаллами.

Модель И. Б. Куманина следует рассматривать как *первое* приближение к оценке осевой пористости отливки. Поэтому функции $T_2(x, t)$ и $T_3(x, t)$ для $t = t_1^*$, если $T_2(0, t_1^*) = T_L$ (см. рис. 19), можно представить одной $T(x, t_1^*)$, аппроксимировав ее параболой порядка n :

$$\frac{T_1^* - T_0}{T_L - T_0} = 1 - \left(\frac{x}{l_0}\right)^n; \quad n > 1, \quad (1)$$

где $T_1^* = T(x, t_1^*)$; согласно схеме $T_0 = T(l_0, t_1^*)$ — температура поверхности отливки (см. рис. 19), которую просто определить из граничного условия

$$-\lambda_1 \frac{\partial T(l_0, t_1^*)}{\partial x} = q_0(t). \quad (2)$$

Пусть отливка затвердевает в тонкостенном кокиле (см. с. 120). Тогда, $q_0(t) = \beta_0(T_0 - T_\Phi)$ и, с учетом (1),

$$T_0 - T_\Phi = (T_L - T_\Phi) \left(\frac{\beta_0 l_0}{n \lambda_1} + 1 \right)^{-1}. \quad (3)$$

Так как при $x = \kappa_3(t_1^*)$ температура $T(\kappa_3, t_1^*) = T_S$ (см. рис. 19), а $\Lambda_n = \kappa_3(t_1^*)/l_0$, то из (1) и (2)

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_n &= \left[(1 - \Theta_S) \left(1 + \frac{n}{Bi_0} \right) \right]^{1/n}; \\ \text{так как } P_0 &= \gamma_1 \Lambda_n \text{ (см. с. 72), то} \\ P_0 &= \gamma_1 \left[(1 - \Theta_S) \left(1 + \frac{n}{Bi_0} \right) \right]^{1/n}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Второе приближение к оценке осевой пористости отливки дает модель Куманина—Вейника. Смысл уточнения А. И. Вейника заключается в следующем. Так как фильтрация расплава в двухфазной зоне начинается при относительном количестве в ней твердой фазы $\Psi \geq \Psi_v$ и прекращается при $\Psi \geq \Psi_n$ (см. с. 50 и 73), протяженность Λ_n центральной части тела отливки, где возможно образование осевой пористости, должна быть уже, чем это получается по модели И. Б. Куманина.

Реализуем уточнение А. И. Вейника. Примем, что $\Psi = \Psi_v$ соответствует температура T_v , а $\Psi = \Psi_n$ — температура T_n . Если в момент времени t_2^* температура в центре тела отливки $T_2^*(0, t_2^*) = T_v$ (см. рис. 19), то $T_2(x, t_2^*) = T_n$ при $x = \kappa_n(t_2^*)$. Следовательно, $\Lambda_n = \kappa_n/l_0$.

Функции $T_2(x, t)$ и $T_3(x, t)$ для $t = t_2$ аппроксимируем параболой порядка n :

$$\frac{T_2^* - T_0}{T_B - T_0} = 1 - \left(\frac{x}{l_0}\right)^n; \quad n > 1, \quad (5)$$

где $T_2^* = T(x, t_2^*)$; $T_0 = T(l_0, t_2^*)$ — температура поверхности отливки, которую определим по формуле (3).

Так как при $x = x_n$ температура $T(x, t_2^*) = T_n$, то с учетом (3) и (5),

$$\Lambda_n = \left[\frac{T_B - T_n}{T_B - T_\Phi} \left(1 + \frac{n}{Bi_0} \right) \right]^{1/n}. \quad (6)$$

Для вычисления T_B и T_n воспользуемся приближенной формулой (126-111.1)

$$\Psi = 1 - \left(\frac{T - T_S}{T_L - T_S} \right)^m; \quad m > 1.$$

Очевидно, что

$$T_B - T_n = (T_L - T_S) [(1 - \Psi_B)^{1/m} - (1 - \Psi_n)^{1/m}];$$

$$T_B - T_\Phi = (T_L - T_S) (1 - \Psi_B)^{1/m} + (T_S - T_\Phi).$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_n &= \left[B_n (1 - \Theta_S) \left(1 + \frac{n}{Bi_0} \right) \right]^{1/n}; \\ \text{так как } \Pi_0 &= \gamma_2 \Lambda_n \text{ (см. с. 73), то} \\ \Pi_0 &= \gamma_2 \left[B_n (1 - \Theta_S) \left(1 + \frac{n}{Bi_0} \right) \right]^{1/n}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\text{где } B_n = \frac{(1 - \Psi_B)^{1/m} - (1 - \Psi_n)^{1/m}}{(1 - \Theta_S) (1 - \Psi_B)^{1/m} + \Theta_S}.$$

Таким образом, количественно разница между формулами (4) и (7) только в масштабе, который определяется множителями γ_1 , γ_2 и $B_n^{1/n}$.

Несмотря на впечатление некоторой примитивности, которое производит содержательная сторона модели Куманина—Вейника, расчеты по формулам (4) и (7) согласуются с результатами измерений. Например, кривая зависимости Π_0 от толщины $2l_0$ отливки на рис. 9 построена по формулам (4) и (7), в которых критерий Био представлен как $\beta_0 l_0 / \lambda_1$. В расчетах использованы данные из прилож. VI.1 для стали 35Л: $T_L = 1773$ К, $T_S = 1723$ К, $T_\Phi = 293$ К, $\lambda_1 = 54$ Вт/(м·К). В формуле (4) принято $n = 2$ и $\gamma_1 = 2,2 \cdot 10^{-2}$; формуле (7) — $n = 2$, $m = 3$, $B_n = 0,5$ и $\gamma_2 = 3,1 \cdot 10^{-2}$. В той и другой формулах $\beta_0 = 1200$ Вт/(м²·К). Заметим, что γ_1 численно близко к ϵ_V для железа, а γ_2 — к ϵ_V для стали 35Л (см. прилож. III).

Еще одним подтверждением того, что формулы (4) и (7) в первом приближении достаточно отражают действительность, может служить связь P_0 с интервалом $T_L - T_S$ кристаллизации сплавов.

Так как $1 - \Theta_S = (T_L - T_S)/(T_L - T_\Phi)$, то очевидно, что при $T_L - T_S = 0$ пористость $P_0 = 0$. Это должно быть у отливок из чистых компонентов или из эвтектики бинарных сплавов с ограниченным твердым раствором одного компонента в другом. Очевидно также, что с увеличением $T_L - T_S$ пористость P_0 должна возрастать и будет наибольшей при предельном насыщении твердого раствора, т. е. у сплава с максимальной величиной $T_L - T_S$.

Точно такое поведение P_0 в зависимости от $T_L - T_S$ зафиксировано в эксперименте А. А. Бочваром и его сотрудниками (см. разность ординат кривых 2 и 3 на рис. 11 или величины, обратные ординатам кривой герметичности отливок, — кривая 4 на том же рисунке).

С помощью формул (4) и (7) можно сделать ряд интересных выводов.

Например, можно установить причины, по которым отливки из сплавов алюминия или магния имеют большую склонность к образованию пористости по сравнению со стальными отливками. Из формул (4) и (7) следует, что если у этих сплавов одинаковый интервал $T_L - T_S$ кристаллизации и отливки из них затвердевают при одной и той же интенсивности Bi_0 теплообмена с формой, то пористость P_0 будет тем больше, чем меньше температура T_L ликвидуса сплава. У сплавов алюминия T_L почти в 2 раза меньше, чем у сталей; то же у сплавов магния.

Однако, если учесть, что в формулах (4) и (7) из температуры T_L вычитается температура T_Φ формы, то при литье стали в нагретые формы, например, в формы, изготовленные по выплавляемым моделям, разность $T_L - T_\Phi$ может оказаться одинаковой с $T_L - T_\Phi$ для алюминиевых сплавов, при их литье в ненагретые формы, например в сырые песчаные. Следовательно, получается, будто бы пористость стальных отливок с увеличением T_Φ может сравняться с пористостью отливок из алюминиевых сплавов. Но практика показывает, что так не бывает. И формулы (4) и (7) подтверждают это. Действительно, так как $Bi_0 = \beta_0 l_0 / \lambda_l$, то при одинаковых $1 - \Theta_S$ (т. е. при одинаковых $T_L - T_S$ и $T_L - T_\Phi$), если отливки из алюминиевых сплавов и из сталей имеют одинаковую толщину $2l_0$ и затвердевают в формах с одинаковой величиной β_0 , пористость P_0 у отливок из сплава алюминия будет больше, чем у стальных, ибо λ_l алюминиевых сплавов в 3—4 раза больше λ_l углеродистых сталей (см. прилож. VI.1).

Наконец, еще один вывод. Из формул (4) и (7) следует, что пористость P_0 не становится равной нулю, даже если интенсивность охлаждения затвердевающей отливки будет бесконечно большой, т. е. если $Bi_0 \rightarrow \infty$. Пористость P_0 уменьшается, протяженность Λ_n области ее расположения сократится, но ни та, ни другая величина не станет равной нулю при $Bi_0 \rightarrow \infty$.

Таким образом, из формул (4) и (7) следует вывод, с которым ни один литейщик не захочет согласиться: получение плотных отливок невозможно.

Естественно, что этот результат требует проверки на другой, более совершенной модели процесса образования пористости, в качестве которой можно использовать модель Флемингса—Журавлева (см. с. 73—74).

Оценка пористости на модели Флемингса—Журавлева

Модель Флемингса—Журавлева учитывает наиболее существенную и специфическую черту процесса питания отливки — *фильтрацию* расплава через двухфазную зону к фронту кристаллизации.

Для приближенной оценки пористости на модели Флемингса—Журавлева последуем Ю. А. Самойловичу и зададим функцию $\Psi(x, t)$ в виде параболы порядка m_0 [46, с. 90—105] (рис. 92, а):

$$\Psi = 1 - \left(\frac{x_3 - x}{x_3 - x_1} \right)^{m_0}; \quad m_0 > 1. \quad (8)$$

Тогда, из уравнения неразрывности фильтрационного потока (31-1), представив его в виде, соответствующем схеме на рис. 92:

$$\varepsilon_V \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (9)$$

нетрудно найти скорость w фильтрации расплава, необходимую для *полной* компенсации объемной усадки затвердевания в двухфазной зоне фронта. Если принять, что при $x = x$ и $x < x_1$ ско-

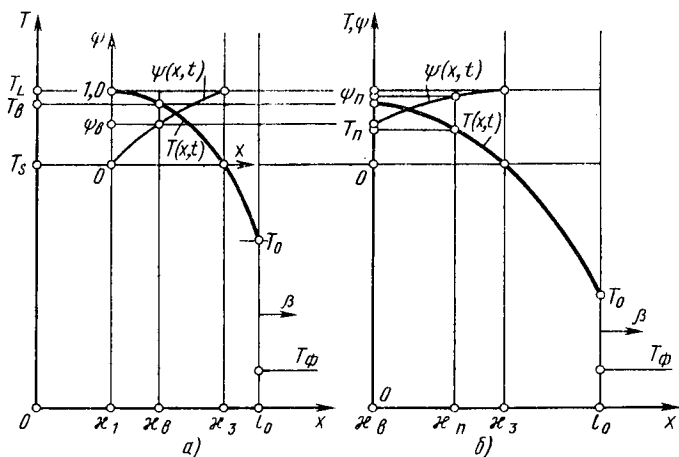


Рис. 92. Схема к оценке пористости рассеянной (а) и осевой (б) на модели Флемингса—Журавлева

рость $w = w(\kappa, t)$, а при $x = \kappa$, но $\kappa = \kappa_3$, она равна нулю, то из (9) с учетом (8)

$$w = -\varepsilon_V (1 - \Psi) \left[U + \frac{m_0}{m_0 + 1} (1 - \Psi)^{1/m_0} (U_1 - U) \right], \quad (10)$$

где $U_1 = -\frac{\partial \kappa_1}{\partial t}$ — линейная скорость продвижения изотермы ликвидус в затвердевающем расплаве; U — линейная скорость продвижения фронта кристаллизации отливки.

Для упрощения дальнейших выкладок найдем среднюю скорость w_{cp} фильтрации в двухфазной зоне, протяженность которой равна $\kappa_3 - \kappa_1$ (см. рис. 92, а). Из (10) при $\Psi = 0$

$$w_{cp} = -\frac{\varepsilon_V}{\kappa_3 - \kappa_1} \left[U_1 - \frac{1}{m_0 + 1} (U_1 - U) \right]. \quad (11)$$

Далее воспользуемся уравнением фильтрации (28-1). Для схемы на рис. 92 оно примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\eta}{k} w. \quad (12)$$

Если в него вместо w подставить w_{cp} из уравнения (11), то можно найти давление p , которое возникает в расплаве во время его движения через двухфазную зону к фронту кристаллизации отливки.

Согласно М. К. Флемингсу, определим коэффициент k проницаемости двухфазной зоны по формуле (29-1), представив ее в более общем виде:

$$k = \gamma (1 - \Psi)^\alpha; \quad \alpha > 2. \quad (13)$$

Формула (13) имеет смысл при $\Psi < \Psi_B$ (см. с. 50). Поэтому уравнение (12) следует интегрировать при условии, что $p(\kappa_B, t) = p_0$, где p_0 — внешнее давление на расплав. Получим

$$p = p_0 - \frac{\varepsilon_V \eta U}{\gamma (\alpha m_0 - 1) (m_0 + 1) (1 - \Psi_B)^{\alpha - 1/m_0}} \left[\left(\frac{1 - \Psi_B}{1 - \Psi} \right)^{\alpha - 1/m_0} - 1 \right], \quad (14)$$

ибо нас интересует давление в расплаве двухфазных зон фронтов кристаллизации отливки начиная с того момента времени t_3^* , когда они сомкнутся, т. е. когда $\kappa_B = 0$ и, следовательно, $U_1 = 0$ (рис. 92, б).

Теперь используем условие М. К. Флемингса образования пористости (35-1). Очевидно, что при $p \leq p_r$ в двухфазной зоне фронтов прекратится фильтрация. Это произойдет всюду, где в центральной части тела отливки $\Psi \geq \Psi_n$. Величину Ψ_n легко найти из (14) при $p = p_r$. А так как $P_0 = \varepsilon_V (1 - \Psi_n)$, то

$$P_0 = \varepsilon_V (1 - \Psi_B) \left[1 + \frac{\gamma (p_0 - p_r)}{\varepsilon_V \eta U} (\alpha m_0 - 1) \times \right. \\ \left. \times (m_0 + 1) (1 - \Psi_B)^{\alpha - 1/m_0} \right]^{-\frac{m_0}{\alpha m_0 - 1}}. \quad (15)$$

Протяженность Λ_{Π} зоны осевой пористости в теле отливки нетрудно оценить по формуле (8), так как $\Lambda_{\Gamma} = \kappa_{\Pi}/l_0$ при $\kappa_B = 0$ (рис. 92, б). При $x = \kappa_{\Pi}$

$$1 - \Psi_{\Pi} = \left(\frac{\kappa_3 - \kappa_{\Pi}}{\kappa_3 - \kappa_1} \right)^{m_0};$$

при $x = \kappa_B = 0$

$$1 - \Psi_B = \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_3 - \kappa_1} \right)^{m_0}.$$

Следовательно,

$$\Lambda_{\Pi} = \frac{\kappa_3}{l_0} \left[1 - \left(\frac{1 - \Psi_{\Pi}}{1 - \Psi_B} \right)^{1/m_0} \right]$$

или

$$\Lambda_{\Pi} = \frac{\kappa_3}{l_0} \left\{ 1 - \left[\frac{P_0}{\varepsilon_V (1 - \Psi_B)} \right]^{1/m_0} \right\}, \quad (16)$$

где $\kappa_3 = \kappa_3(t_3^*)$; для определения t_3^* необходимо учесть условия теплообмена отливки с формой.

В первом приближении можно поступать аналогично тому, как мы делали в анализе модели Куманина—Вейника. Очевидно, что для схемы на рис. 92, а

$$\frac{\Theta - \Theta_0}{1 - \Theta_0} = 1 - \left(\frac{x - \kappa_1}{l_0 - \kappa_1} \right)^n \quad (17)$$

или, с учетом (3),

$$\Theta = 1 - \left(1 + \frac{n}{Bi_0} \right)^{-1} \left(\frac{x - \kappa_1}{l_0 - \kappa_1} \right)^n. \quad (18)$$

Из формулы (126-III.1)

$$\Psi = 1 - \left(\frac{\Theta - \Theta_S}{1 - \Theta_S} \right)^m; \quad (19)$$

следовательно,

$$\Psi = 1 - \left[1 - (1 - \Theta_S)^{-1} \left(1 + \frac{n}{Bi_0} \right)^{-1} \left(\frac{x - \kappa_1}{l_0 - \kappa_1} \right)^n \right]^m. \quad (20)$$

Далее, эту формулу вместо (8) следует использовать в расчете P_0 и Λ_{Π} . Такой расчет поручаем читателю.

Однако и по формулам (15) и (16) можно сделать вывод, что получение плотной отливки возможно. Из (15) следует, что $P_0 = 0$ при $\Psi_B = 1$, т. е. в случае, когда фронт кристаллизации отливки является *плоским*. Такой ход процесса достигается при сквозной транскристаллизации отливки, т. е. когда $U \leq R$

(см. рис. 76 и с. 159—160), если число растущих кристаллов, согласно (145-II) при $\Lambda = 1$

$$N = N^* \left(\frac{M_4}{1 + M_4} \right)^m.$$

Из технологических дисциплин читателю известно, что этот ход процесса реализуется при *однонаправленном* отводе теплоты от отливки; например, при литье с направленной кристаллизацией расплава от холодильника снизу вверх.

Во всех остальных случаях величину пористости можно уменьшить, увеличивая второе слагаемое в квадратных скобках формулы (15). Реально это удастся при повышении внешнего давления p_0 на кристаллизующийся расплав. Этот путь увеличения плотности отливок также хорошо известен читателю. Он реализуется, например, при литье в автоклавах алюминиевых и магниевых сплавов; недавно в автоклавах начали изготавливать и стальные отливки. С той же целью используют прибыли с газовым давлением.

Заметим, что в формуле (15) из внешнего давления p_0 вычитается давление p_r , которое численно равно упругости газов, насыщающих данный расплав (см. с. 36). Поэтому плотность отливки можно повысить увеличением разности между p_0 и p_r , т. е. уменьшением p_r при неизменном давлении p_0 . Так как p_r зависит от *газонасыщенности* расплава, т. е. от объема газа, растворенного в единице объема этого расплава, то уменьшая газонасыщенность расплава продувкой его инертными газами, вакуумированием в ковше, при вакуумной плавке и другими способами, известными читателю, величину p_r можно заметно снизить.

Наконец, подчеркнем неожиданные, с точки зрения результатов, полученных при анализе модели Куманина—Вейника, выводы. Согласно модели Куманина—Вейника, между осевой пористостью P_0 и протяженностью Λ_n центральной части тела отливки, где эта пористость образуется, предполагается прямая пропорциональная связь $P_0 = \gamma_i \Lambda_n$, где $i = 1$ или 2 в зависимости от принятого варианта модели (см. с. 183—187). Из формулы (16), полученной по модели Флемингса—Журавлева, следует обратный результат: с увеличением пористости P_0 протяженность Λ_n области ее залегания в теле отливки сокращается. Это — *первое противоречие*, которое мы должны отметить, рассматривая две модели образования пористости в отливках.

Второе противоречие заключается в следующем. Из формулы (15) очевидно, что *уменьшение скорости U затвердевания отливки должно привести к уменьшению ее пористости*. Из формул (4) и (7) уменьшение пористости следует ожидать при увеличении Bi_0 , т. е. интенсивности охлаждения затвердевающей отливки; другими словами — при увеличении скорости затвердевания отливки, так как для одной и той же конфигурации и материала

отливки скорость затвердевания и Bi_0 связаны между собою пропорционально. Например, для $Bi_0 \ll 1$ из формулы (75-IV.1) ясно, что эта связь прямо пропорциональная.

51. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА НЕОДНОРОДНОСТИ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА ОТЛИВКИ

Для теоретической оценки неоднородности химического состава тела отливки и анализа влияния условий литья на ее величину (см. п. 5) можно использовать математическую модель, предложенную В. А. Журавлевым (см. п. 20 и 24). Но так как она является развитием модели В. Т. Борисова (см. с. 69—70) и в основе своей также содержит концепцию квазистационарности двухфазной зоны фронта кристаллизации, условимся называть ее моделью *Борисова—Журавлева*.

Представим эту модель в виде, удобном для приближенной оценки неоднородности химического состава по сечению тела плоской отливки. Из (51-I), (58-I), (60-I), (62-I)—(64-I) для случая, когда $\Psi(\kappa_3, t) = 1$, т. е. когда возникновение ликвации наиболее опасно (продумать!), следует

$$(1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_1 (1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} (w C_2) + \\ + [1 - k_0 (1 + \varepsilon_V)] C_2 \frac{\partial \Psi}{\partial t};$$

$$\varepsilon_V \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \Psi = \Psi(x, t);$$

$$D_1 \frac{\partial C_2(\kappa_3, t)}{\partial x} = (1 - k_0) (1 + \varepsilon_V) C_2(\kappa_3, t) U;$$

$$C_3(\kappa_3, t) = k_0 (1 + \varepsilon_V) C_2(\kappa_3, t);$$

$$\kappa_1 \frac{\partial C_1(\kappa_1, t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial C_2(\kappa_1, t)}{\partial x}; \quad C_1(\kappa_1, t) = C_2(\kappa_1, t).$$

$$w(\kappa_1, t) = w_0; \quad w(\kappa_3, t) = 0.$$

Функцию $\Psi(x, t)$ зададим в виде параболы (8), а связь ее с концентрацией C_2 расплава в двухфазной зоне — по *правилу модифицированного неравновесного рычага*. Это правило нетрудно получить, если $\frac{\partial w}{\partial x}$ из уравнения неразрывности фильтрационного потока подставить в уравнение переноса примеси в расплаве двухфазной зоны, положив, что перенос компонента молекулярной

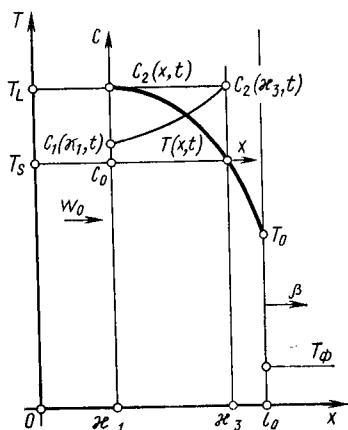


Рис. 93. Схема к оценке неоднородности химического состава отливки

диффузией компенсируется конвективным переносом того же компонента, т. е. $\frac{\partial}{\partial x} \left[D_1 (1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial x} \right] \approx w \frac{\partial C_2}{\partial x}$. Тогда

$$(1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial t} = (1 - k_0) (1 + \varepsilon_V) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (21)$$

и, следовательно,

$$\frac{C_2}{C_1} = (1 - \Psi)^{-(1-k_0)(1+\varepsilon_V)}. \quad (22)$$

При $\varepsilon_V = 0$, т. е. без учета движения расплава в двухфазной зоне, формула (22) примет вид

$$\frac{C_2}{C_1} = (1 - \Psi)^{-(1-k_0)}, \quad (23)$$

в котором обычно представляют *правило неравновесного рычага*¹ или, как его еще называют, — *уравнение Э. Шейля*.

Из уравнения переноса компонента, растворенного в расплаве, с учетом (8) и (22), получим

$$(1 - \Psi)^{1-(1-k_0)(1+\varepsilon_V)} \frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_1 (1 - \Psi) \frac{\partial C_2}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} (w C_2).$$

Выполним интегрирование левой и правой частей этого уравнения от x_3 до x_1 и учтем условия на границах x_1 и x_3 :

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -C_1 \frac{(1 - k_0) (1 + \varepsilon_V) w_0}{x_3 - [1 - (1 - k_0) (1 + \varepsilon_V)] x_1}.$$

Для оценки неоднородности химического состава отливки толщиной $2l_0$ (рис. 93) примем, что отливка затвердевает с постоянной скоростью U . Тогда $x_1 = -U_1 t$, $dt = -dx_1 / U_1$ (см. с. 188), и, следовательно, при $x_1 = 0$ (рис. 93)

$$C_3 = k_0 \left[\frac{l_0}{x_3} (1 - k_0) (1 + \varepsilon_V) \right]^{n_0}, \quad (24)$$

¹ Впервые формулу (23) нашел Г. Гулливер в 1922 г. Э. Шейль получил свое уравнение позже в 1942 г.

Как должно быть ясным читателю, правило (23) предполагает, что при $\varepsilon_V = 0$ молекулярная диффузия в расплаве двухфазной зоны так же отсутствует, т. е. $D_1 = 0$, подробно см. [15, с. 46—54].

где $C_3 = C_3/C_0$; $n_0 = \{1/[1 - (1 - k_0)(1 + \varepsilon_V)] - 1\} \omega_0/U_1$; $\omega_0 = |\omega_{cp}|(\kappa_3 - \kappa_1)$; $|\omega_{cp}|$ можно определить по формуле (11), умножив ее правую часть на -1 ; κ_3 можно оценить по формуле (18), положив в ней $x = \kappa_3$ и $\kappa_1 = 0$.

Теперь оценим относительную протяженность $\Lambda_{\text{л}}$ центральной части тела отливки, где возникает прямая зональная ликвация (рис. 93). Очевидно, что при $C_3 = 1$ отношение κ_3/l_0 можно принять пропорциональным $\Lambda_{\text{л}}$. Из (24)

$$\Lambda_{\text{л}} = \gamma_0 k_0 (1 - k_0) (1 + \varepsilon_V), \quad (25)$$

где γ_0 — множитель пропорциональности.

Приведенные весьма грубые оценки позволяют выявить ряд тенденций в развитии неоднородности химического состава отливок. Из (24) следует, что неоднородность уменьшается с уменьшением толщины $2l_0$ отливки, но увеличивается со снижением скорости U_1 ее затвердевания. Эти тенденции хорошо известны, и читатель знает о них из технологических курсов.

Несколько неожиданным является результат, выраженный формулой (25). Из нее следует, что относительная протяженность $\Lambda_{\text{л}}$ зоны прямой ликвации не зависит от толщины отливки. На первый взгляд, этот результат противоречит наблюдениям, ибо из тех же технологических курсов читателю известно обратное: с увеличением толщины отливки зона прямой ликвации расширяется. Однако анализ наблюдений показывает, что относительная протяженность зоны прямой ликвации действительно практически не зависит от толщины тела отливки. Но от толщины отливки, например, из углеродистых сталей зависит возникновение и интенсивность развития V- и Λ -образных ликвационных дефектов, в местах расположения которых, в пределах $\Lambda_{\text{л}}$, отмечаются локально высокие значения C_3 . Эти ликвационные дефекты образуются, начиная с определенной для данных условий литья толщины тела (см. с. 16—17), т. е., согласно формуле (24), начиная с определенной относительной концентрации C_3 данного компонента или примеси в пределах $\Lambda_{\text{л}}$ зоны прямой их ликвации.

В технологической литературе обычно не отмечается влияние объемной усадки при затвердевании сплава на развитие зональной ликвации в отливках. Из (24) следует, что с увеличением ε_V химическая неоднородность возрастает. Очевидно, это связано с увеличением интенсивности движения расплава в двухфазной зоне фронта кристаллизации.

52. ЗАТРУДНЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Кажущееся очевидным затруднение теоретических оценок пористости отливок заключается в том, что обе модели, рассмотренные в п. 50, дают противоположные результаты по определению влияния одной из основных характеристик условий литья — скорости затвердевания на осевую пористость. На модели Кума-

нина—Вейника увеличение скорости затвердевания уменьшает пористость отливки, на модели Флемингса—Журавлева, наоборот, увеличивает ее.

Об этом противоречии мы уже упоминали в конце п. 50. Сейчас важно подчеркнуть, что обе модели дают правдоподобные качественные результаты. Действительно, первая модель правильно, с точки зрения известных данных наблюдений и специальных экспериментов, оценивает влияние температуры ликвидуса сплава, его интервала кристаллизации, температуры формы, в которой затвердевает отливка, и толщины тела отливки на величину осевой пористости в этом теле. Вторая модель, также с точки зрения известных фактов, правильно оценивает влияние количества кристаллов, растущих перед фронтом кристаллизации отливки, газонасыщенности расплава и внешнего давления на затвердевающую отливку. Можно показать, что вторая модель вполне правдоподобно оценивает влияние и остальных характеристик сплава и отливки, но не на величину пористости Π_0 , а на протяженность Λ_n центральной части тела отливки, где сосредоточивается осевая пористость. Из формулы (18) при $x = x_3$ и $x_1 = 0$

$$\frac{x_3}{l_0} = \left[(1 - \Theta_S) \left(1 + \frac{n}{Bi_0} \right) \right]^{1/n}.$$

Поэтому (16), с учетом полученной формулы, примет вид

$$\Lambda_n = \left\{ 1 - \left[\frac{\Pi_0}{\varepsilon_V (1 - \Psi_B)} \right]^{1/m_0} \right\} \left[(1 - \Theta_S) \left(1 + \frac{n}{Bi_0} \right) \right]^{1/n}, \quad (26)$$

аналогичный первым формулам из (4) и (7).

Следовательно, влияние температуры ликвидуса сплава, его интервала кристаллизации, температуры формы, интенсивности охлаждения затвердевающей отливки и толщины ее тела на протяженность Λ_n области расположения осевой пористости обе модели качественно оценивают *идентично*. Более того, то противоречие, на которое мы еще раз указали в начале этого параграфа, легко устраняется, если различать влияние скорости U затвердевания и интенсивности охлаждения затвердевающей отливки Bi_0 на величину осевой пористости Π_0 и протяженности Λ_n области ее расположения в теле отливки. Действительно, согласно формуле (15) рост U должен привести к увеличению Π_0 ; согласно формулам (15) и (26) увеличение Bi_0 и, следовательно, U должно привести к сокращению Λ_n . Оба вывода согласуются с результатами наблюдений. Например, читатель хорошо это знает, перевод отливок на литье в кокиль приводит к увеличению пористости, но расширяет плотную часть тела отливки у ее поверхности.

Таким образом, рассмотренное противоречие в оценке пористости отливок на моделях Куманина—Вейника и Флемингса—Журавлева является результатом неверного начального положе-

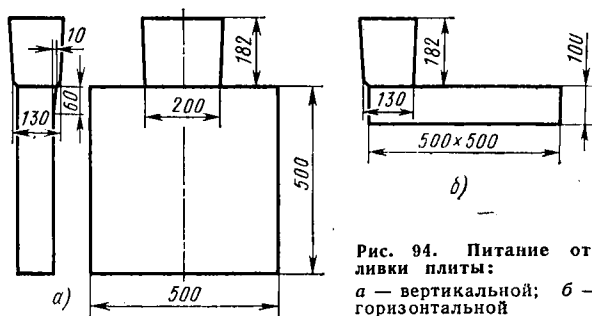


Рис. 94. Питание отливки плиты:

а — вертикальной; б — горизонтальной

ния первой модели о том, что величина осевой пористости P_0 отливки пропорциональна протяженности Δ_{π} центральной части ее тела, где эта пористость образуется.

Однако главная трудность теоретической оценки пористости отливки заключается не в указанных противоречиях. При правильной формулировке модели они, как мы видели, устранимы. Трудность и не в том, что при построении той или иной модели мы вынуждены исходить из допущения *идеального* питания отливок от прибылей, т. е. мы предполагаем, что расплав от прибылей *беспрепятственно* подается к двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки. Такое допущение — *нереальное*, и это хорошо известно читателю.

Главная трудность состоит в том, что рассмотренные модели предназначены для отливок, которые, по аналогии с моделью затвердевания (на основе которой они и разработаны), можно представить бесконечной плитой или бесконечным цилиндром.

Стоит только обратиться к примеру простейшей, но реальной отливки типа плиты, конфигурация которой — прямоугольный параллелепипед (рис. 94), поставить, как это принято, на меньшую его грань открытую прибыль (рис. 94, а), выбранную согласно рекомендациям П. Ф. Василевского [3, с. 100—106], или на большую грань, как это тоже часто делают (рис. 94, б), и теоретическая оценка пористости отливки — *конечной* плиты становится неразрешимой проблемой.

Причин для такой ситуации много. О них мы уже говорили выше (см. с. 59—61 и 74—77).

Приведем дополнительные соображения. Из схемы на рис. 94 ясно, что совершенно необходимо рассматривать затвердевание расплава, масса которого в форме распределена неоднородно.

В условиях малой интенсивности охлаждения затвердевающего расплава в литейной форме мы умеем рассчитывать кинетику затвердевания отливки и прибыли лишь раздельно. Основанием для раздельного расчета кинетики затвердевания сложной отливки является возможность игнорировать неоднородность температур-

ного поля по объему отливки в условиях малой интенсивности охлаждения.

Но именно учет неоднородности температурного поля в моделях Куманина—Вейника и Флемингса—Журавлева позволяет оценить пористость в отливках. Если неоднородностью температурного поля пренебречь, т. е. принять, что в формулах (1) и (5) $n = 0$, то, например, из (4) и (7) получается $P_0 = \infty$ и $\Lambda_n = \infty$. Следовательно, известные нам модели здесь не годятся, требуются другие.

Реально существующая неоднородность хода процесса затвердевания отливки обуславливает питание ее от прибыли. Конфигурация и размеры прибыли, технологические пополнения тела отливки, место подвода расплава от литниковой системы, скорость заполнения формы — вот известные читателю технологические средства, позволяющие *создать* направленное затвердевание отливки снизу вверх к прибыли (рис. 94, а) или справа налево к прибыли (рис. 94, б) и этим обеспечить необходимое питание отливки в результате движения незатвердевшего расплава из прибыли.

Таким образом, для теоретической оценки пористости и ликвационных дефектов в конечной по размерам отливке необходимы математические модели, которые учитывали бы не только неоднородность температурного поля по объему затвердевающего расплава, не только особенности его фильтрации в двухфазной зоне фронта кристаллизации, но и те гидродинамические процессы, которые протекают в незатвердевшей части объема отливки, т. е. перед двухфазной зоной фронта, и на сложность которых мы уже указывали неоднократно (см. с. 59—61).

Именно это движение расплава, а также то, которое неизбежно возникает в незатвердевшей части отливки вследствие термической и концентрационной неоднородности самого расплава (см. с. 39—40), оказывает решающее влияние на развитие неоднородности химического состава отливки и образование в ее теле ликвационных дефектов.

Более того, если даже и удастся создать необходимые детерминированные математические модели в терминах теорий тепло-, массопереноса, фильтрации, гидродинамики, напряженно-деформированного состояния, то использование их для исследования питания *реальных фасонных отливок* с целью повышения их плотности и предохранения их от ликвационных дефектов будет невозможным, ибо для таких моделей мы не умеем описывать конфигурацию фасонных отливок.

Очевидно, что здесь требуются другие подходы. Одним из них является *системотехника*.

Действительно, предъявим профессиональному технологу-литейщику чертеж какой-либо детали, которую мы предполагаем изготовить из углеродистой стали. Поставим перед ним вопрос о возможности получения в ней требуемых служебных свойств.

Технолог либо примет заказ без оговорок, либо предложит некоторые изменения в конфигурации детали.

Читатель как опытный технолог знает, что изменения будут касаться не всей конфигурации в целом, а лишь отдельных элементов или групп элементов конфигурации. Например, будет обращено внимание на элементы, затрудняющие свободную линейную усадку отливки, а также на те элементы, в которых в результате этого возможно появление горячих трещин. Может потребоваться изменение элементов конфигурации отливки, где ожидается образование усадочной рыхлоты, пористости и ликвационных дефектов, от которых только установкой прибылей, холодильников и т. п. средствами предохранить отливку, по мнению технолога, невозможно. Могут потребоваться и другие изменения. Читатель сам в состоянии продолжить перечень причин изменения элементов конфигурации фасонной отливки.

Этот пример приведен с целью подчеркнуть, что фасонную отливку любой конкретной конфигурации можно рассмотреть как *систему* элементов, находящихся друг с другом в определенном взаимодействии (*отношении*) с точки зрения протекания процессов в отливке, обуславливающих получение в ней необходимых свойств.

По-видимому, для каждого процесса или группы процессов, обуславливающих достижение требуемого свойства в отливке, ее конфигурация может быть представлена самостоятельной системой элементов.

В этом разделе нас интересует только обеспечение заданной плотности тела отливки и отсутствие в нем ликвационных дефектов.¹ Выше мы убедились, что ход группы процессов, приводящих к пористости и ликвации при неизменных условиях плавки и литья определяется *питанием* отливки от прибылей. Следовательно, в данном случае, мы имеем основание рассматривать фасонную отливку любой конкретной конфигурации как систему ее элементов, находящихся в том взаимодействии друг с другом, о котором В. Е. Грум-Гржимайло образно написал: «Вышележащая часть отливки должна служить прибылью нижележащей части», «Прибыль должна стыть последней» [26].

По сути дела, технолог, которому мы предъявили чертеж детали, предлагая изменения отдельных элементов ее конфигурации, рассматривал эту деталь как систему элементов, взаимодействующих друг с другом по правилу В. Е. Грум-Гржимайло. Но он действовал интуитивно. Нам предстоит эту интеллектуальную деятельность технолога исследовать методами системотехники и имитировать ее в виде *алгоритма* проектирования прибылей.

¹ Методы и средства предохранения отливок от образования в них горячих трещин рассмотрены в следующем разделе.

Глава 11. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ АППАРАТА СИСТЕМОТЕХНИКИ

Системотехника изучает явления, которые возникают в объектах, состоящих из большого количества компонентов или большого количества отношений между ними, рассматривая эти объекты как *сложные системы*.

Научно-технический прогресс выделил системотехнику как мощный современный метод решения научных и инженерных задач в тех случаях, когда они не поддаются классическим методам. В технологии — это случаи, когда ход технологического процесса обусловлен взаимосвязанным протеканием большого количества целесообразно скомпонованных природных процессов и ни одним из них пренебречь нельзя.

Методологию решения научных и инженерных задач при рассмотрении объекта изучения как сложной системы часто называют *«системным подходом»*¹.

53. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Современный уровень наших знаний законов природы основан на изучении их проявлений в чистом виде, т. е. при отсутствии сопутствующих эффектов или при пренебрежимо малом влиянии этих эффектов. В тех случаях, когда в связи с компоновкой природных процессов в единый, например, технологический процесс, законы природы группируются и результат, например, технологии зависит от каждого из них. Изучение такого единого процесса становится весьма трудным. В таких случаях принято говорить, что мы имеем дело со сложными системами.

Если в сложной системе удастся выделить наиболее типичные процессы, и, следовательно, умышленно отбросить остальные несущественные, то, изучая именно типичные процессы, можно построить теорию сложной системы, пользуясь терминологией Я. И. Френкеля, в виде хорошей «карикатуры» на эту систему (см. с. 15.1 и 95.1).

Мы уже пользовались таким приемом. При исследовании процессов затвердевания отливки и формирования ее кристаллического макростроения игнорированы все процессы, кроме теплообмена расплава с формой и зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве. Результаты оказались достаточными для разработки способов *управления* кристаллическим макростроением отливок.

Однако такой же прием при исследовании процессов образования усадочных и ликвационных дефектов не привел к успеху.

¹ Для более детального изучения основных принципов системного подхода и идей и методов системотехники рекомендуем читателю книгу Н. П. Бусленко, В. В. Калашникова и И. Н. Коваленко [21].

Здесь, по-видимому, — действительно сложная система, функция которой в сильной степени определяется и умышленно отброшенными процессами и, может быть, теми, о влиянии которых мы просто не подозреваем.

В системотехнической литературе нет канонического определения понятия сложной системы. Например, Ю. М. Снапелев и В. А. Старосельский указывают только черты сложных систем [48, с. 10]: большое число элементов; сложный характер связей между элементами; сложность функций, выполняемых системой; сложно организованное управление; взаимодействие системы с окружающей средой; воздействие на систему случайных факторов.

Согласно представлению В. Н. Бусленко *сложная система* характеризуется строго определенными свойствами [20].

1°. Изучаемый объект, рассматриваемый как *система*, может быть расчленен (не обязательно единственным образом) на конечное число частей, называемых *подсистемами* сложной системы. Каждая подсистема, в свою очередь, может быть расчленена на конечное число более мелких подсистем. И т. д. до получения (в результате конечного числа операции расчленения) таких частей, называемых *элементами* сложной системы, относительно которых имеется договоренность, что для целей решения данной задачи они не подлежат дальнейшему расчленению на части.

2°. Элементы сложной системы характеризуются набором *признаков*. Элементы сложной системы могут быть *гомогенными* (однородными) и *гетерогенными* (разнородными). Система может состоять из *смешанных* (гомогенных и гетерогенных) элементов.

3°. Элементы сложной системы функционируют не изолированно друг от друга, а во *взаимодействии*, при котором свойства одного в общем случае зависят от условий, определяемых поведением других элементов.

4°. Свойства сложной системы определяются не только свойствами элементов, но и характером взаимодействия между элементами. Поэтому две сложные системы, состоящие из попарно одинаковых элементов, взаимодействие между которыми различно, рассматриваются как две *разные* системы.

5°. Взаимодействие элементов характеризуется набором *связей*, объединяющих систему в *единое целое*.

Так как вне системы существует множество предметов, оказывающих соответствующее влияние на систему, то все, что не принадлежит системе, принято называть окружающей средой или *окружением* сложной системы. При этом изменение признаков предметов внешней среды влияет на систему; признаки предметов изменяются вследствие функционирования системы.

Структурой системы называется множество всевозможных *отношений*, характеризующих связи между подсистемами и элементами внутри системы.

В системотехнике используют разнообразный математический аппарат. Чаще других применяют теоретико-множественные методы, графы, линейную алгебру, методы составления и исследования дифференциальных уравнений, теоретико-вероятностные и комбинаторные методы, методы оптимизации.

Теорию множеств применяют как аппарат, позволяющий выразить единую формализованную концепцию теории сложных систем.

Графы используют как способ описания структуры сложной системы.

Остальные методы являются базой для разработки *математических моделей* функционирования системы и оптимизации их. Для нахождения математических моделей систем используют также методы теории подобия, теории размерностей, планирования эксперимента и др.¹

54. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Множество — это самое широкое по объему понятие математики и математической логики, имеющее смысл *категории* в математике.

Понятию «множество» нельзя дать полное логическое определение. Его обычно поясняют примерами: множество — набор, совокупность, собрание каких-либо объектов, обладающих общими для всех их характеристическими свойствами. Такие объекты называют *элементами* множества.

Символическая запись

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (27)$$

означает, что множество A состоит из n элементов a_i ; где $i = 1, 2, \dots, n$. Другая известная читателю запись

$$a_1 \in A$$

утверждает, что «элемент a_1 принадлежит множеству A ». Если элемент d не принадлежит множеству A , то записывают

$$d \notin A.$$

Множество (27) является конечным, так как оно состоит из конечного числа n элементов. Конечное множество может быть *единичным*, если оно состоит из одного элемента: $C = \{a_1\}$ — единичное множество. Множество, которое не содержит ни одного элемента, называют *пустым* и обозначают знаком $\emptyset$. При $n \rightarrow \infty$ множество (27) будет *бесконечным*.

Если элементы множества подчинены правилу предшествования, или *следования*, что обозначают знаком $\leq$, то такое множе-

¹ В следующих параграфах мы изложим элементы теории множеств и теории графов в том объеме, в каком это потребует для дальнейшего изучения питания отливки.

ство называют *упорядоченным*. Например, если элементы множества (27) расположены так, что $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, то оно упорядоченное.

В том случае, когда каждый элемент одного множества, например, $B = \{a_1, a_2, a_3\}$, одновременно является элементом другого множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то множество B называют *подмножеством* множества A . Символически это изображают так

$$B \subset A.$$

Очевидно, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Запись

$$D \not\subset A$$

означает, что множество D не является подмножеством A .

При $B \subset A$ и $A \subset B$ оба множества совпадают, т. е. состоят из одних и тех же элементов. Это обозначают как равенство

$$A = B$$

для конечных множеств или как *эквивалентность*

$$A \sim B$$

для бесконечных множеств.

В математической логике говорят о некотором исходном множестве, которое является соединением всех множеств данной области объектов. Такое исходное множество называют *полным* или *универсальным* и обозначают через U .

Из универсального множества можно выделить (задать) подмножества, т. е. множества, входящие в универсальное в виде его частей, и состоящие из элементов, которые обладают некоторыми отличительными свойствами.

Примером универсального множества может быть множество *всех* отливок, изготавливаемых на заводах страны. Из него нетрудно задать множества только стальных, только чугунных отливок и т. д. Каждое из них — подмножество универсального множества. В свою очередь, множества отливок из серого, ковкого, высокопрочного чугунов являются подмножествами множества всех чугунных отливок. И т. д. Очевидно, что множество отливок из водорода, находящегося в металлическом состоянии, является пока пустым, но оно как подмножество входит в универсальное множество. Если, например, из множества отливок из углеродистой стали 35Л выбрать отливки так, что каждая, более легкая из двух, на 10 кгс легче следующей, более тяжелой, то все эти отливки образуют упорядоченное множество.

Существует несколько способов задания множеств или, как говорят иначе, построения теоретико-множественных объектов.

Наиболее простой способ — *перечисление* элементов, т. е. как задано множество (27). Но этот способ удобен только для конечных

множеств и только для таких конечных, которые практически можно или целесообразно перечислить.

Например, можно перечислить все отливки из серого чугуна, изготавливаемые в данном цехе завода, особенно если цех не очень большой. Но вряд ли целесообразно, и вряд ли возможно, перечислить все отливки из серого чугуна, изготавливаемые на всех заводах страны.

И естественно, что перечислением невозможно задать бесконечное множество.

Используют другой способ — *описание* характерных свойств элементов множества. Этот способ более общий, так как можно задать и конечные перечислимые множества.

Например, множество (27) символически можно задать так:

$$A = \{a_i | i \in I\},$$

где I — множество индексов i .

В общем случае множество I можно задать как перечень пометок, названий и других отличий элементов a .

Пользуясь описанием, мы выше задали множество чугунных отливок, выделили из него подмножества отливок из серого, ковкого и высокопрочного чугунов. В качестве характерного свойства элементов множеств здесь выбран материал отливок. При описании упорядоченного множества стальных отливок характерным свойством его элементов является масса отливки.

Например, если B — множество отливок из серого чугуна (СЧ), то его символически можно задать так $B = \{b|b \text{ — отливки из СЧ}\}$.

Со множествами можно выполнять *теоретико-множественные операции*.

Пересечение множеств M и N символически записывается так:

$$M \cap N.$$

В результате операции пересечения множеств M и N является множество $X = M \cap N$, для каждого элемента x которого характерно то, что $x \in X \leftrightarrow x \in M$ и $x \in N$, где $\leftrightarrow$ — знак *равнозначности*.

Таким образом, пересечением множеств M и N называется *их общая часть*, т. е. множество элементов, состоящее из всех тех, и только тех элементов, которые принадлежат как M , так и N .

Например, если M — множество отливок из серого чугуна, среди которых есть отливки для легковых автомобилей, N — множество отливок из высокопрочного чугуна, среди которых также есть отливки для легковых автомобилей, то $X = M \cap N$ — множество всех чугунных отливок для легковых автомобилей.

Множества M и N считаются *непересекающимися*, если они не имеют общих элементов, т. е. если

$$M \cap N = \emptyset.$$

О такой записи говорят, что множества M и N имеют *пустое* пересечение.

Пусть K — множество чугунных отливок для тракторов, X — по-прежнему множество чугунных отливок для легковых автомобилей; очевидно, что $K \cap X = \emptyset$.

Объединение множеств M и N символически записывается так:

$$M \cup N.$$

В результате операции объединения образуется множество $Y = M \cup N$, для элемента y которого должно быть так, что $y \in Y \leftrightarrow y \in M$ или $y \in N$.

Таким образом, объединением множеств M и N называется *новое* множество элементов, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из объединяемых множеств M и N .

Другими словами, если пересечение множеств не пусто, то в объединении повторяющиеся элементы считают лишь по одному разу.

Рассмотрим пример. Пусть ваграночная шихта состоит из четырех компонентов: чугун передельный М1, титано-медистый чугун БТМЛЗ, стальной лом А2 и ферросилиций ФС45. Если читатель воспользуется соответствующими ГОСТами, то он установит, что чугун М1 содержит 6 элементов, чугун БТМЛЗ — 8, стальной лом А2 — 6 и ферросилиций ФС45 — 7 элементов. Выплавленный же чугун будет содержать 9 элементов: Fe, C, Si, Mn, P, S, Ti, Cu, Cr, ибо Fe, C, Si, Mn, P, S присутствуют во всех компонентах шихты, Ti и Cu — в чугуне БТМЛЗ, а Cr — в ферросилиции ФС45.

Теперь каждую компоненту шихты представим в виде множества составляющих эту компоненту химических элементов,

$$M_1 = \{\text{Fe, C, Si, Mn, P, S}\}; \quad M_2 = \{\text{Fe, C, Si, Mn, P, S, Cu, Ti}\};$$

$$M_3 = \{\text{Fe, C, Si, Mn, P, S}\}; \quad M_4 = \{\text{Fe, C, Si, Mn, P, S, Cr}\},$$

где M_1 — чугун М1; M_2 — чугун БТМЛЗ; M_3 — лом А2; M_4 — ферросилиций ФС45.

Тогда ваграночный чугун, выплавленный из этой шихты, можно представить как новое множество, являющееся объединением перечисленных множеств, которое будет состоять только из девяти элементов.

Этот пример используем также для того, чтобы подчеркнуть, что операции пересечения и объединения можно выполнять с любым числом множеств. Если M_i — произвольные множества, то $\bigcap_{i=1}^m M_i$ — пересечение этих множеств, а $\bigcup_{i=1}^m M_i$ их объединение; число m может быть как конечным, так и бесконечно большим.

Операции пересечения и объединения множеств *переместительны* (коммутативны):

$$M \cap N = N \cap M \text{ и } M \cup N = N \cup M,$$

подчиняются законам *соединения* (ассоциативны):

$$(M \cap N) \cap K = M \cap (N \cap K) \text{ и } (M \cup N) \cup K = M \cup (N \cup K)$$

и *распределения* (дистрибутивны):

$$(M \cap N) \cup K = (M \cup N) \cap (N \cup K) \text{ и } (M \cup N) \cap K = (M \cap N) \cup (N \cap K).$$

Разность множеств M и N символически записывается так-

$$M \setminus N.$$

В результате этой операции получается множество $Z = M \setminus N$, для каждого элемента z которого характерно $z \in Z \leftrightarrow z \in M$ и $z \notin N$.

Таким образом, разность множеств $M \setminus N$ — множество, состоящее из тех, и только из тех элементов, которые принадлежат одному множеству, например M , и не принадлежит другому, например N .

Для лучшего уяснения и запоминания теоретико-множественных операций рекомендуем читателю воспользоваться схемой Л. А. Калужина (рис. 95), на которой два круга иллюстрируют два множества M и N , область II есть $M \cap N$, области I , II , III в сумме есть $M \cup N$, область I есть $M \setminus N$ и область III есть $N \setminus M$. Области I и III в сумме есть *симметричная разность* множеств; символически ее записывают в виде $M \Delta N$.

Дополнение множества M элементами, ему не принадлежащими, символически записывается так: $Z_W(M)$.

В результате этой операции образуется множество W , дополнительное к множеству M , состоящее из элементов множества W , не принадлежащих множеству M .

Например, если вся площадь квадрата на рис. 96 — множество всех отливок для легковых автомобилей, а M — множество всех чугунных отливок для легковых автомобилей, то область W за пределами круга — множество отливок для легковых автомобилей из цветных сплавов.

Границу множества M символически обозначают через ∂M . Представление о границе множества можно составить с помощью схемы на рис. 96. Очевидно, что множество точек ∂M — граница множества M , если любая окрестность каждой точки из ∂M содержит как точки из M , так и точки из W .

Разбиение множества M — операция, позволяющая получить систему I непересекающихся и непустых подмножеств множества M (если $M \neq \emptyset$), полностью исчерпывающую все множество M .

Символически разбиение представляют как множество M множеств M_i :

$$M = \{M_i \{i \in I\}\},$$

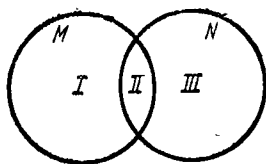
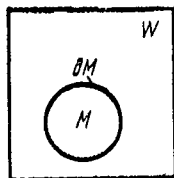


Рис. 95. Схема Л. А. Калужина:
 $I + II + III = M \cup N$; $II = M \cap N$;
 $I = M \setminus N$; $III = N \setminus M$; $I + III = M \Delta N$

Рис. 96. Схема, иллюстрирующая дополнение множества M элементарного множества W ; ∂M — граница множества M



где I — множество индексов i ; $M_i \subset M$ и $M_i \neq \emptyset$ при всех $i \in I$, если $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i \in I} M_i = M$.

Подмножества M_i , полученные разбиением множества M , называют *классами* разбиения.

Например, множество всех чугуновых отливок можно разбить на пять классов: отливки из серого, ковкого, высокопрочного, модифицированного и легированного чугунов.

Декартово произведение множеств M и N символически обозначают

$$M \times N.$$

В результате этой операции образуется множество всех упорядоченных пар (m, n) элементов $m \in M$ и $n \in N$.

На рис. 97 приведено графическое представление декартового произведения двух множеств M и N , которые изображены в виде конечных упорядоченных множеств точек на отрезках осей декартовой системы координат. Декартово произведение — упорядоченное множество координат (m, n) точек в пределах площади прямоугольника на рис. 97.

Пользуясь аналогичной схемой, нетрудно уяснить смысл декартового произведения трех множеств: $M \times N \times L$, и более.

Из схемы на рис. 97 следует, что декартово произведение не обладает свойством коммутативности: $M \times N \neq N \times M$.

Введем понятие *отношение*. Отношение — одна из форм, один из необходимых моментов всеобщей взаимосвязи всех предметов, явлений, процессов в природе, обществе и мышлении.

Понятие отношения на множествах определяют, исходя из представления о множествах упорядоченных пар, троек и большего числа элементов.

Бинарное отношение — отношение между двумя объектами. Бинарным отношением R между множествами X и Y называется любое подмножество множества упорядоченных пар (x, y) элементов, образованного декартовым произведением $X \times Y$.

Следовательно, если $(x, y) \in R$, то x находится в отношении R к y . Символически это обозначают в виде

$$(x, y) \in R \text{ или } xRy, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

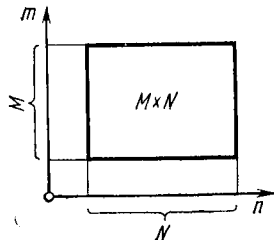


Рис. 97. Графическое представление декартового произведения множеств M и N

Если множества X и Y пронумерованы, т. е. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, то таблица из нулей и единиц, задающая любое отношение R , представляет собой $m \times n$ — матрицу ¹:

$$A = \|a_{ij}\|,$$

в которой $a_{ij} = 1$, если $x_i R y_j$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Матрицу A называют *матрицей отношения*.

Отношение R на множестве X называют *рефлексивным*, если xRx для каждого $x \in X$. В противном случае, т. е. при $(x, x) \notin R$, оно — *антирефлексивное*.

Отношение R между множествами X и Y является *симметрическим*, если для любых элементов $x \in X$ и $y \in X$ справедливо $xRy \rightarrow yRx$, где $\rightarrow$ — знак импликации, сходный с союзом «если, то ...». В случае $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$ оно — *антисимметрическое*.

Отношение R между множествами X и Y называется *тождественным*, если для любых $x \in X$ и $y \in Y$ справедливо xRy и $yRx \rightarrow x = y$.

Отношение R между множествами X, Y и Z *транзитивно*, если для любых элементов $x \in X, y \in Y, z \in Z$ справедливо xRy и $yRz \rightarrow xRz$.

Отношение $R \subset X \times X$ на множестве X , если оно *одновременно* обладает свойствами рефлексивности (xRx для всех $x \in X$), симметричности ($x_1Rx_2 \rightarrow x_2Rx_1$ для всех $x_1, x_2 \in X$) и транзитивности (x_1Rx_2 и $x_2Rx_3 \rightarrow x_1Rx_3$ для всех $x_1, x_2, x_3 \in X$), называется отношением *эквивалентности* (равносильности).

Символически отношение эквивалентности обозначают в виде

$$x_1 \sim x_2, \quad x_1 \in X, \quad x_2 \in X.$$

Очевидно, если $x_1 \in X, x_2 \in X$ и $x_1 \sim x_2$, то все элементы x_1 образуют подмножество $X_1 \subset X$. Такое подмножество X_1 называют *классом эквивалентности* элемента x_1 . Далее, если $x_1 \sim x_2, x_1 \in X_1 \subset X$ и $x_2 \in X_2 \subset X$, то классы эквивалентности элементов x_1 и x_2 совпадают, т. е. $X_1 = X_2$. Наконец, если $x_1 \in X_1 \subset X$ и $x_2 \in X_2 \subset X$, но $(x_1, x_2) \notin R$, а $(x_2, x_1) \notin R$, то $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, т. е. классы эквивалентности элементов x_1 и x_2 не пересекаются. Это означает, что отношение эквивалентности определяет разбиение множества X на систему I классов эквивалентности $X_i; i \in I$, где I — множество индексов. В свою очередь, это означает, что разбиение множества X на систему I непересекающихся и непустых подмножеств X_i определяет некоторое отношение эквивалентности на множестве X .

¹ Напомним читателю, что матрицей называется упорядоченная система *mn* чисел, расположенных в прямоугольной таблице из *m* строк и *n* столбцов. В записи $A = \|a_{ij}\|$ первый индекс *i* обозначает номер строки, второй *j* — номер столбца.

Отношение $R \subset X \times X$ на множестве X , если оно одновременно обладает свойствами рефлексивности (xRx для всех $x \in X$), тождественности (x_1Rx_2 и $x_2Rx_1 \rightarrow x_1 = x_2$ для всех $x_1, x_2 \in X$) и транзитивности (x_1Rx_2 и $x_2Rx_3 \rightarrow x_1Rx_3$ для всех $x_1, x_2, x_3 \in X$), называется отношением *порядка*.

Символически отношение порядка обозначают в виде

$$x_1 \leq x_2, \quad x_1 \in X, \quad x_2 \in X.$$

Бинарной операцией на множестве X является правило, которое каждой упорядоченной паре (x_i, x_{i+1}) элементов X ставит в соответствие третий элемент $x_j \in X$ — значение этой операции на паре (x_i, x_{i+1}) .

Символически бинарную операцию на X иногда обозначают

$$x_{i+1} * x_i = x_j.$$

Например, в арифметике $*$ — это операции $+$, $-$, $:$, $\times$.

В заключение определим понятие *функция*; оно в математику введено Г. Лейбницем. Привычное нам обозначение функции, как, например $y = f(x)$, можно встретить уже в трудах Л. Эйлера.

Наиболее общее определение понятию функции дал А. Н. Колмогоров: «Пусть X и Y — два произвольных множества. Говорят, что на X определена функция f , принимающая значения из Y , если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент из Y . В случае множеств произвольной природы вместо термина «функция» часто пользуются термином «отображение», говоря об отображении одного множества в другое».

Символически представление функции f как *отображения* или *преобразования* из множества X в множество Y записывают в виде

$$f: X \rightarrow Y.$$

Предельно точно эту запись читают так: f из X в Y сопоставляет каждому $x \in X$ единственный элемент из Y , являющийся значением $f(x)$.

Образ отображения $f: X \rightarrow Y$ есть множество $f(X)$ всех значений $f(x)$, которые оно принимает при всевозможных $x \in X$. Очевидно, что $f(X) \subset Y$.

Символически образ отображения $f: X \rightarrow Y$ обозначают

$$\text{Im } f = f(X).$$

Заметим, что каждое отображение $f: X \rightarrow Y$ определяет бинарное отношение R_f между X и Y : $xR_f y$ означает, что $y = f(x)$, т. е. функция в привычном нам представлении.

Теория графов применяется в самых разнообразных областях науки и техники: от физики до антропологии, включая машиностроение и архитектуру. Теория графов служит математической моделью для любой системы, содержащей бинарные отношения между ее элементами.

Граф обозначают через G . Граф G состоит из конечного и непустого множества $V = \{v_i | i \in I\}$, содержащего p вершин ($I = \{1, 2, \dots, i, \dots, p\}$) и заданного множества $E = \{e_s | s \in S\}$, содержащего m ребер ($S = \{1, 2, \dots, s, \dots, m\}$) в виде неупорядоченных пар (v_i, v_j) различных вершин.

Говорят: e_s соединяет v_i и v_j или v_i и v_j — концы e_s . Говорят также, что v_i и v_j — смежные вершины, если они являются концами ребра e_s . В этом случае вершину v_i и ребро e_s называют инцидентными, так же как и вершину v_j и ребро e_s . Если два ребра e_s и e_k инцидентны одной вершине v_i , то их называют смежными ребрами.

Степень вершины v_i графа обозначают d_i . Она равна числу ребер, инцидентных этому ребру. Если граф имеет p вершин и m ребер, то сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.

Правило, ставящее в соответствие каждому ребру $e_s \in E$ неупорядоченную пару вершин $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, определяется отображением $\theta: E \rightarrow V$.

Таким образом, графом называется тройка:

$$G = [V, E, \theta]. \quad (28)$$

Обычно граф G представляют в виде диаграммы, в которой вершины соединены отрезками прямых или кривых. Эту диаграмму обычно и называют графом.

Граф (28) является неориентированным. Его называют просто: граф.

Ориентированный граф иначе называют оргграф и обозначают через G_0 — это тройка:

$$G_0 = [N, A, \varphi], \quad (29)$$

где $N = \{n_i | i \in I\}$ — конечное и непустое множество, содержащее p узлов (вершин ориентированного графа); $A = \{a_s | s \in S\}$ — множество, содержащее m дуг (ориентированных ребер) в виде упорядоченных пар (n_i, n_j) узлов; $\varphi: A \rightarrow N \times N$ — отображение, ставящее в соответствие каждой дуге $a \in A$ упорядоченную пару (n_i, n_j) узлов.

Определения смежных узлов, смежных дуг и инцидентности, естественно, сохраняются. Говорят: дуга a_s выходит (исходит) из узла n_i и дуга a_s входит (заходит) в узел n_j .

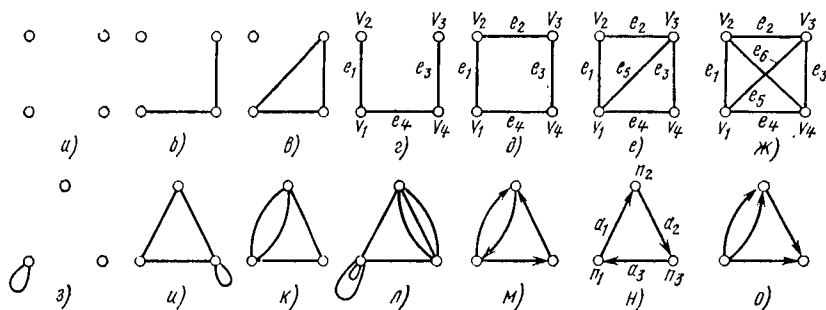


Рис. 98. Примеры графов

Орграф G_0 также представляют диаграммой, в которой узлы соединяют отрезками прямых или кривых, со стрелками, указывающими порядок концов дуг.

На рис. 98 приведены примеры различных графов. Диаграммы a — u изображают графы; диаграммы m — o представляют ориентированные графы. Графы a — $в$ и $з$ являются несвязными, остальные *связные*.

Граф $г$ называют *простой цепью*, граф $д$ — *простым циклом*. Графы $г$ — $е$ являются *неполными*; граф $ж$ — *полным*, так как все вершины попарно соединены ребрами. Полный граф обозначают через K_p (p — число вершин; в графе $ж$ $p = 4$).

Граф a — *пустой (нуль-граф)*; граф $з$ — нуль-граф с *петлей*, т. е. с ребром e_s , концы которого находятся в одной и той же вершине (v_i, v_i).

Граф $и$ называют *обцим графом*; он — полный граф с петлей (петлями).

Граф $к$ называют *мультиграфом*; он содержит *кратные ребра*.

Граф $л$ — *псевдограф*, т. е. мультиграф с петлей (петлями).

Граф $м$ — *орграф*; графы $н$ и $о$ — *направленные графы*, так как не содержат *симметричных пар дуг*; граф $н$ — *полный направленный граф*.

Графы $г$ — $ж$ называют *помеченными*, или *перенумерованными*, так как все вершины и ребра помечены номерами.

Графы $г$ — $е$ являются *подграфами* графа $ж$, так как они содержат вершины и ребра из графа $ж$; граф $ж$ называют *надграфом* каждого из графов $г$ — $е$.

Графы $г$ и $д$ называют *основными (частичными)* графами графа $ж$, так как это подграфы графа $ж$, содержащие все его вершины.

У графа $г$ на рис. 98 вершины v_2 и v_3 смежные, а вершины v_2 и v_4 нет; ребра все смежные. У графа $ж$ все вершины смежные, но ребра e_5 и e_6 не смежные; точка пересечения ребер e_5 и e_6 не является вершиной графа.

У графа $г$ на рис. 98 степень d_1 вершины v_1 равна трем, $d_2 = 2$; у графа $ж$ все вершины имеют степень, равную трем. Сумма сте-

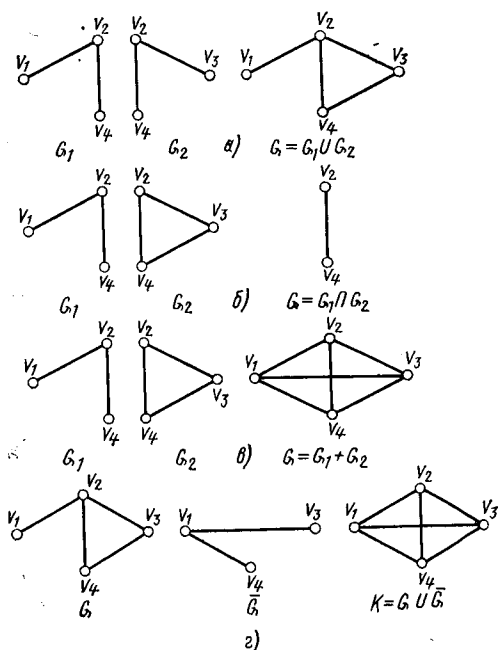


Рис. 99. Примеры теоретико-множественных операций с графами

пеней вершин графа e равна 10; у графа $ж$ она равна 12 (проверить!).

Для определения графа мы использовали теоретико-множественные представления. В этой связи с графами можно выполнять все теоретико-множественные операции.

На рис. 99, а, б и г приведены примеры объединения графов G_1 и G_2 и их пересечения, а также дополнения графа G до полного K ; $\bar{G}$ — дополнительный граф к графу G . Теоретико-множественный аспект этих операций читатель может рассмотреть самостоятельно если он усвоил предыдущий параграф.

На рис. 99, в представлена новая для нас операция — *соединение*.

Очевидно, что $G_1 + G_2 = G$ состоит из $G_1 \cup G_2$ и всех ребер, дополняющих его до полного графа K_4 .

На рис. 100 даны примеры теоретико-графовых операций: $(G - v_i)$ — удаление вершины (рис. 100, а); $(G - e_s)$ — удаление ребра (рис. 100, б); $(G + e_s)$ — добавление ребра (рис. 100, в) и $v_i = v_j$ — элементарное стягивание ребра графа (рис. 100, г). Как ясно из приведенных примеров, удаление вершины графа включает и удаление всех инцидентных с ней ребер, а стягивание ребра является процедурой отождествления смежных с этим ребром вершин.

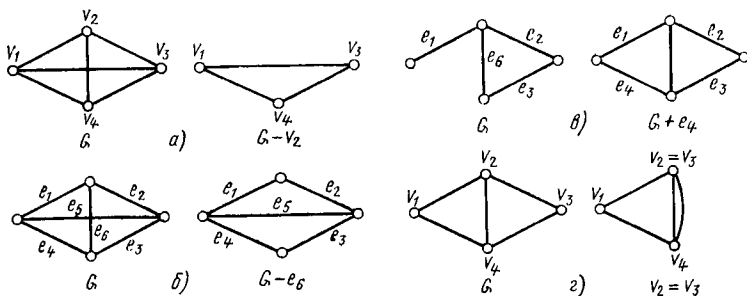


Рис. 100. Примеры теоретико-графовых операций

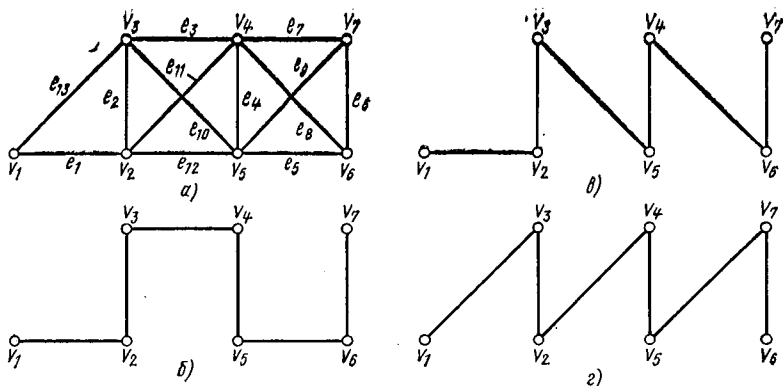


Рис. 101. Минимальные частичные (б—г) графы полного графа (а)

Рассмотрим граф, представленный на рис. 101, а. Он является полным графом без петель.

Введем несколько новых понятий. *Маршрут* в графе G — это конечная последовательность ребер вида $e_1, e_2, \dots, e_s, \dots, e_m$. При этом любые два последовательных ребра либо смежны, либо одинаковы. Маршрут начинается и кончается вершиной. Следовательно, каждому маршруту соответствует последовательность вершин: $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$; v_1 — начало маршрута, v_n — конец. Маршрут *замкнут*, если $v_1 = v_n$. Длина маршрута равна числу ребер в нем.

Маршрут называют *цепью*, если все ребра в нем различны. *Простая цепь* — цепь, в которой различны все вершины (кроме начала и конца ее, если маршрут замкнут).

Замкнутую цепь называют *циклом*; замкнутую простую цепь — *простым* циклом.

Например, в графе на рис. 101, а: маршрутом из v_1 в v_7 является последовательность вершин $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_7$ (длина этого маршрута равна 8); цепь — $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5 \rightarrow v_7$ (длина цепи 6); простая цепь — $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_7$ (длина 6); цикл — $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$; простой цикл — $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$.

Заметим, что в орграфе иногда маршрут называют *путем*, цепь — *простым путем*, простую цепь — *элементарным путем*.

На рис. 101, б—г приведены минимальные частичные (остовные) графы графа а. Все они получены удалением ряда ребер из полного графа (рис. 101, а). Так, третий частичный граф г получен удалением всех «горизонтальных» ребер e_1, e_3, e_5, e_7 и e_{12} из полного графа; второй — удалением «горизонтальных» ребер, кроме e_1 и одного «диагонального» ребра e_{13} . Первый граф получился в результате удаления двух «горизонтальных» ребер (e_7 и e_{12}) и всех «диагональных» ребер полного графа.

Заметим, что все приведенные частичные графы являются простыми цепями в графе на рис. 101, а.

Представим первый частичный граф (рис. 101, б) в виде направленного (рис. 102, а). Примем, что его узлы являются обозначением основных операций, например процесса изготовления песчаной формы. Пусть n_1 — подготовка оборудования, оснастки и материалов; n_2 — заполнение опоки смесью; n_3 — уплотнение смеси; n_4 — упрочнение тепловое (сушка) или химическое; n_5 — извлечение модели; n_6 — установка стержней и сборка полуформ; n_7 — готовая форма (закрепление полуформ или укладывание груза). Тогда, направленный граф на рис. 102, а можно рассматривать как реальный технологический маршрут изготовления песчаной формы, например, из жидкостекольной смеси с упрочнением формы продувкой углекислым газом.]

Применим операцию стягивания дуги a_3 , т. е. отождествим операции n_3 — уплотнения смеси и n_4 — упрочнения ее ($n_3 = n_4$). Получим оргграф на рис. 102, б, который является технологическим маршрутом изготовления сырых форм на автоматах пресования, вибропресования, одновременного встряхивания и пресования. Как мы видим, стягивание дуги и, следовательно, отождествление узлов в реальном маршруте имеют реальный смысл. В данном случае уплотнение и упрочнение сырой смеси — операции тождественные, так как упрочнение смеси происходит в результате ее уплотнения, а стягивание дуги означает сокращение маршрута, например, во времени.

Теперь применим операцию стягивания дуги a_2 орграфа на рис. 102, а, т. е. отождествим операции n_2 — заполнения опоки смесью и n_3 — ее уплотнения ($n_2 = n_3$). Получим оргграф на рис. 102, в, который является технологическим маршрутом изготовления сырых форм на пескострельно-прессовых автоматах, а также на пескострельных автоматах, при использовании терми-

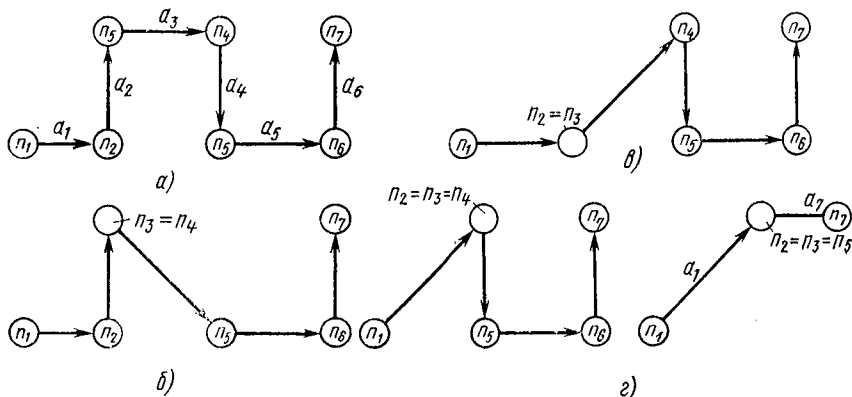
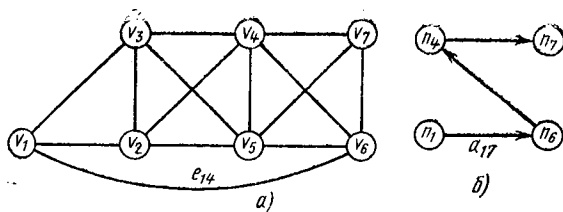


Рис. 102. Представление оргграфами технологических маршрутов изготовления форм: а — из жидкостекольных смесей с продувкой CO_2 ; б — вибропресованием; в — на пескострельно-прессовых автоматах; г — пескострельно-прессованием и по газифицируемым моделям

Рис. 103. Общий граф (а) и оргграф (б), иллюстрирующий технологический маршрут подготовки кокиля или пресс-формы к заливке



ческого или химического отверждения песчаносмоляных смесей до извлечения моделей (изготовление форм по горячей или холодной оснастке).

Если, далее, стянуть две смежные дуги a_2 и a_3 (т. е. отождествить три операции: $n_2 = n_3 = n_4$), то получим первый оргграф на рис. 102, г, который можно рассматривать как реальный маршрут изготовления сырых форм на пескометных автоматах, так как пескомет одновременно осуществляет и заполнение формы, и упрочнение смеси в результате ее уплотнения.

Если, наконец, в первом оргграфе на рис. 102, г добавить дугу a_7 , соединив узлы $n_2 = n_3 = n_4$ и n_7 , и удалить сразу два узла: n_5 — извлечение модели и n_6 — сборку формы, то получим новый оргграф (см. рис. 102, з), который отчетливо демонстрирует преимущества изготовления форм из сухого песка с газифицируемыми моделями.

Приведенные примеры иллюстрируют возможности теоретико-графового анализа маршрутов технологий. Мы предлагаем читателю сделать анализ других технологий с помощью графов, изображенных на рис. 101, в и г.

Таким образом, граф на рис. 101, а является изображением системы со всевозможными отношениями между ее элементами. Если вершины v_i этого графа по смыслу считать аналогичными узлам n_i оргграфа на рис. 102, а, то его анализ может привести к совершенно другим технологическим маршрутам изготовления формы.

Например, если в этом графе добавить еще одно ребро, соединяющее вершины v_1 и v_6 (рис. 103, а), затем удалить вершины v_2 , v_3 , v_5 и ребро e_6 , то получится граф, изображенный на рис. 103, б. В виде оргграфа он приобретает смысл технологического маршрута «изготовления» металлической формы (кокиля или пресс-формы). Действительно, n_1 — подготовка машины и оснастки; n_6 — сборка (установка стержней, смыкание полуформы); n_4 — упрочнение форм запиранием полуформ; n_7 — готовая форма.

Теперь вернемся к дальнейшему изложению элементов теории графов, которые нам потребуются для системотехнического изучения питания отливки прибылями.

На графе G можно определить все теоретико-множественные бинарные отношения. Отношение рефлексивности на множестве вершин V графа означает, что на вершине графа должна быть петля; если vRv для всех $v \in V$, то петли должны быть на всех вершинах графа.

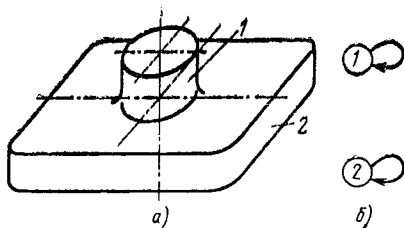


Рис. 104. Схема отливки крышки (а) и пустой граф с петлями (б), иллюстрирующий тепловое взаимодействие между элементами 1 и 2 этой отливки в условиях малой интенсивности ее охлаждения в форме

Например, мы уже неоднократно упоминали о том, что за твердевание фасонной отливки при условии весьма малой интенсивности ее охлаждения в форме допустимо рассматривать раздельно для каждого элемента конфигурации этой отливки. Такой прием допустим в связи с возможностью не учитывать неоднородность температурного поля по всему объему отливки, а следовательно, и тепловое взаимодействие между отдельными его ча-

стями. В отливке, схема конфигурации которой изображена на рис. 104, а, можно выделить два элемента. Граф, описывающий тепловое взаимодействие этих элементов (рис. 104, б), является нуль-графом с петлями на каждой вершине, ибо для каждого элемента реализуется отношение рефлексивности.

Отношение симметричности ($v_i R v_j \rightarrow v_j R v_i$, $v_i, v_j \in V$) на множестве V вершин графа соответствует неориентированному графу. Отношение антисимметричности — орграфу без петель, так как это отношение одновременно и антирефлексивно (продумать!). Естественно, что отношению, обладающему свойством тождественности, соответствует орграф без петель. Примеры таких графов и орграфов мы рассмотрели на рис. 101 и 102.

Граф, соответствующий отношению транзитивности на множестве V его вершин: $v_i R v_j$ и $v_j R v_k \rightarrow v_i R v_k$ для $v_i \in V$, $v_j \in V$, $v_k \in V$ — направленный граф, в котором для каждой пары смежных дуг есть третья, замыкающая дуга (см. рис. 98, н). Например, граф на рис. 101, а, если его представить в виде орграфа, будет транзитивным.

Такой анализ теоретико-графового представления бинарных отношений на множествах читатель может продолжить самостоятельно. Для руководства рекомендуется учебное пособие [13].

Определим ряд новых отношений, с помощью которых можно задать граф.

Отношение смежности вершин графа обозначают через α : запись $v_i \alpha v_j$ утверждает, что вершины v_i и v_j соединены *единственным* ребром e_s . Отношение смежности узлов орграфа обозначают через α_0 : запись $n_i \alpha_0 n_j$ утверждает, что узлы n_i и n_j соединены одной дугой a_s .

Любой простой граф (орграф), включая полный, можно задать *матрицей смежности вершин* (узлов) $p \times p$:

$$A = \|a_{ij}\|, \quad (30)$$

где a_{ij} — число ребер (дуг), соединяющих вершины v_i и v_j (идущих из n_i в n_j); $a_{ij} = 0$, если соответствующие вершины (дуги) не смежны.

Отношение инцидентности ребер и вершин графа обозначают через β : запись $v_i \beta e_s$ утверждает, что вершина v_i инцидентна ребру e_s .

Любой граф можно задать матрицей инцидентций для ребер $p \times m$:

$$B = \|b_{is}\|, \quad (31)$$

где $b_{is} = 1$, если вершина v_i — инцидентна ребру e_s и $b_{is} = 0$, если вершина v_i и ребро e_s не инцидентны.

Отношение инцидентности узлов и дуг орграфа обозначают ρ ; запись $a_s \rho n_i$ утверждает, что узел n_i является концом дуги a_s , т. е. дуга a_s заходит в узел n_i ; запись $a_k \leftarrow \rho n_i$ означает, что узел n_i — начало дуги a_k , т. е. дуга a_k исходит из узла n_i .

Любой орграф можно задать матрицей инцидентций для дуг $p \times m$:

$$B_0 = \|b_{is}\|, \quad (32)$$

где $b_{is} = +1$, если дуга a_s исходит из n_i ; $b_{is} = -1$, если дуга a_k заходит в n_i ; $b_{is} = 0$ в противном случае.

56. УПРАЖНЕНИЯ

Эти пять упражнений предназначены для закрепления знаний изложенного материала.

1. Рассмотреть технологический процесс изготовления отливки при литье в песчаную форму как систему. Представить взаимодействие элементов системы (технологических операций, см. рис. 1.1) в виде орграфа.

2. То же, для литья под давлением.

3. Представить орграфом маршрут изготовления формы по выплавляемым моделям. Найти наименьший элементарный путь в этом орграфе.

Указание: за основу можно принять граф, изображенный на рис. 105.

4. Затвердевающую отливку в виде неограниченной плиты (см. рис. 14) представить как систему, состоящую из незатвердевшего расплава, двухфазной зоны фронта кристаллизации и твердой части отливки. Представить в виде графа тепловое взаимодействие между элементами.

5. То же, с учетом переноса растворенного компонента и фильтрации расплава в двухфазной зоне.

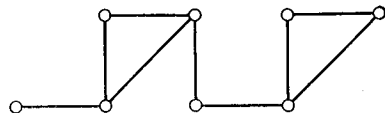


Рис. 105. Граф к упражнению 3

Глава 12. ОСНОВЫ ФОРМАЛИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ ПИТАНИЯ ОТЛИВКИ ПРИБЫЛЯМИ

Достижение заданной плотности отливки и предохранение ее от ликвационных дефектов для выбранных условий плавки и литья определяется питанием затвердевающей отливки прибылями. Так как процессы питания по физической и физико-химической природе очень сложны, создание детерминированных моделей их для фасонных отливок оказалось пока невозможным (см. гл. 10).

В этой связи мы условились использовать *системотехнические* методы (см. гл. 11), представляя отливку как систему элементов, достаточно полно отражающую ее реальную конфигурацию.

Ниже изложены *основы формализованной теории питания отливки прибылями*, которая является базой для создания методов автоматизированного проектирования прибылей на ЭВМ.

57. ФОРМАЛИЗОВАННАЯ ТЕОРИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИИ ЛИТЬЯ И КОНСТРУИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧНЫХ ОТЛИВОК

Введем три множества:

D_c — множество служебных назначений деталей машин и приборов (существующих и проектируемых):

$$D_c = \{d_\Phi | \Phi \in \Phi\},$$

где Φ — множество позиций в перечне функций, выполняемых деталями во время их эксплуатации;

D_k — множество конфигураций деталей машин и приборов (существующих и создаваемых):

$$D_k = \{d_\kappa | \kappa \in K\},$$

где K — множество позиций в перечне вариантов конструктивного оформления деталей;

D_τ — множество технологий литья и технических средств их реализации на производстве (имеющихся в данном цехе и известных вообще):

$$D_\tau = \{d_\tau | \tau \in T\},$$

где T — множество позиций в перечне вариантов технологий и технических средств.

Результат процесса *проектирования технологии литья* данной детали представим как отображение:

$$f_1: D_c \times D_k \times D_\tau \rightarrow D_\tau. \quad (33)$$

Результат процесса *конструирования* литой детали заданного служебного назначения и технологичной для данной технологии литья представим отображением

$$f_2: D_c \times D_k \times D_\tau \rightarrow D_k. \quad (34)$$

Проектирование технологии литья¹

Как правило, конструктор сам определяет ту конфигурацию детали, которая, согласно его опыту и знаниям, оптимально соответствует служебному назначению в данной машине или данном приборе. Иначе говоря, конструктор сам задает отображение

$$u_2: D_c \times D_k \rightarrow D_k. \quad (35)$$

¹ Формализованная теория проектирования технологии литья разработана С. Н. Поляковым в 1976 г.

В этой связи отображение (33) как результат проектирования технологии литья данной детали преобразуется к виду

$$u_1: D_k \times D_T \rightarrow D_T, \quad (36)$$

где отображение u_1 задает технолог-литейщик с учетом u_2 , т. е. с учетом тех требований к качеству отливки, удовлетворение которых обеспечивает необходимое функционирование ее как детали машины или прибора.

Осуществим операцию разбиения множества $D_k \times D_T$ на два класса: A_1 и B_1 ($A_1 \subset D_k \times D_T$, $B_1 \subset D_k \times D_T$, $A_1 \cup B_1 = D_k \times D_T$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$).

Если отображение (36) существует только из $A_1 \subset D_k \times D_T$ в D_T , т. е.

$$u_1: A_1 \rightarrow D_T,$$

а из $B_1 \subset D_k \times D_T$

$$u_1: B_1 \rightarrow \emptyset,$$

то A_1 — класс *технологичных* отливок, а B_1 — класс *нетехнологичных* отливок.

Полученный вывод о существовании класса *нетехнологичных* отливок весьма многозначителен. Он утверждает, что в отображении u_2 из $D_c \times D_k$ в D_k , если D_k задано конструктором, не учтены или недостаточно учтены аспекты технологии изготовления детали литьем. Эта ситуация читателю-технологу хорошо знакома: конструктор либо выбрал неудачную конфигурацию детали, либо предъявил к детали требования, удовлетворить которые при существующем уровне технологии литья для выбранных конфигураций детали и ее материала невозможно.

Но читателю хорошо известно и то, что совместная деятельность конструктора и технолога-литейщика очень часто позволяет разработать такую конфигурацию отливки, выбрать для нее такой материал и назначить такие требования к ее качеству, что она станет *технологичной* по отношению к выбранной технологии и будет удовлетворять необходимому служебному назначению¹.

Однако это означает, что расширение класса технологичных отливок достигается в результате дополнения $Z\mathcal{X}(D_k)$ множества D_k множеством новых элементов $d_k \in \mathcal{K}$ конфигурации, созданных при совместной работе конструктора и технолога. Собственно проектирование технологии, если она выбрана для *данной* технологичной детали, заключается в процедуре назначе-

¹ По аналогии можно представить себе два класса: A_2 и B_2 , разбиения множества $D_c \times D_k$. Если отображение (35) существует только из A_2 в D_k , т. е. $u_2: A_2 \rightarrow D_k$, а $u_2: B_2 \rightarrow \emptyset$, где $B_2 \subset D_c \times D_k$, то B_2 — класс конфигураций детали, не отвечающих ее служебному назначению, или класс служебных назначений детали, для которых нет реализуемых конфигураций. Этот вывод знаком конструкторам. Возникающая проблема решается изменением либо структуры механизма или машины, либо их принципа действия.

ния *оптимальных* положения отливки при формовке и заливке, конструкции литниковой системы и размеров ее элементов, числа и мест установки прибылей, их размеров и т. д.

Можно представить себе и другой путь расширения класса технологичных отливок: дополнение $Z_{\mathcal{T}}(D_T)$ множества D_T множеством элементов $d_t \in \mathcal{T}$, созданных в результате совершенствования литейных технологий. Тогда проектирование технологии литья помимо оптимизации известных приобретает смысл *развития и создания новых* технологий, предназначенных для изготовления *новых* деталей машин.

Изложенное представление о проектировании технологии позволяет выделить класс технологичных отливок A в самом общем виде:

$$A = D_c \times D_k \times D_T \setminus B,$$

где B — класс нетехнологичных отливок, т. е. деталей, изготовление которых литьем экономически нецелесообразно или принципиально невозможно, т. е. $f_1: B \rightarrow \emptyset$.

Следовательно, отображение (34) можно видоизменить:

$$f_2: A \rightarrow \mathcal{D}_k,$$

где $\mathcal{D}_k$ — множество технологичных конфигураций деталей; $\mathcal{D}_k \subset D_k$.

Таким образом, класс технологичных отливок — подмножество $A \subset D_c \times D_k \times D_T$, из множества упорядоченных пар элементов d_k и d_t которого реализуется отображение u_1 в множество D_T .

Конструирование технологичных отливок¹

Задача конструирования отливки заданного служебного назначения, но технологичной для выбранной технологии является, по смыслу, обратной задаче проектирования технологии для предложенной конфигурации детали и заданного ее служебного назначения. Поэтому результат процесса конструирования отливки технологом-конструктором можно представить как отображение:

$$u_3: D_k \times D_T \rightarrow \mathcal{D}_k,$$

где $\mathcal{D}_k \subset D_k$.

Однако рассмотрим более общее отображение (34). Прежде всего в соответствии с поставленной задачей выделим из множеств D_k и D_T подмножества $D_k^* \subset D_k$ и $D_T^* \subset D_T$.

Элементы множества D_k^* представим в виде *чертежа конструкции детали*, размеры на котором могут принимать *любые* значения.

¹ Формализованная теория конструирования технологичных отливок раз. работана В. А. Попковым в 1978 г.

Тогда каждый вариант числовых значений размеров даст *определенный* элемент $d_k \in D_k^*$, а совокупность возможных вариантов образует все множество D_k^* .

Пусть D_{T1}^* — множество технологических операций и средств их осуществления в данной технологии литья, которой присвоим № 1.

Отображение (34) можно представить в виде

$$f_2: D_c \times D_k^* \times D_{T1}^* \rightarrow D_k^*. \quad (37)$$

Оно означает, что заданное служебное назначение отливки $d_\varphi \in D_c$ определяет на множестве D_k^* такое подмножество $\mathcal{D}_k \subset D_k^*$, которое совместно с некоторым $\mathcal{D}_T \subset D_T^*$ выделяет множество вариантов размеров конструкции детали, реализуемых технологией № 1. Следовательно, множество $\mathcal{D}_k \times \mathcal{D}_{T1}$ однозначно определяет все множество упорядоченных пар (d_k, d_T) вариантов размеров конструкции детали и набора технологических операций вместе со средствами их осуществления в технологии № 1 с учетом достижения требуемого служебного назначения d_φ .

Пусть заданное служебное назначение детали $d_\varphi \in D_c$ допускает изменение размеров конструкции отливки в множестве D_k^* . Необходимо найти такое подмножество $\mathcal{D}_k \subset D_k^*$, которое бы давало *оптимальное* сочетание размеров в конструкции детали и допускало изготовление этой детали при *оптимальном* же наборе технологических операций и средств их реализации в виде подмножества $\mathcal{D}_T \subset D_{T1}^*$ для заданной технологии. Под *условиями оптимальности* будем понимать комплекс требований: минимальную массу отливки, наименьшие технологические отходы (литники, прибыли и т. д.), минимальную трудоемкость изготовления и т. п. при заданном качестве отливки.

Формально результат такого процесса конструирования можно представить как отображение:

$$\psi: d_\varphi \times \mathcal{D}_k \times \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{D}_T, \quad (38)$$

где $d_\varphi \in D_c$; $\mathcal{D}_k \subset D_k^*$ и $\mathcal{D}_T \subset D_{T1}^*$.

Не исключается, разумеется, и ситуация, когда

$$\psi: d_\varphi \times \mathcal{D}_k \times \mathcal{D}_T \rightarrow \emptyset,$$

т. е., когда для *выбранной* технологии № 1 технологичной конструкции отливки заданного служебного назначения при принятых условиях оптимальности сочетания размеров детали и реализации технологии № 1 создать нельзя.

Выход один: переход к другой технологии литья, которой присвоим № 2, т. е. дополнение множества D_{T1}^* множеством D_{T2}^* , затем, если потребуется, множеством D_{T3}^* и т. д. В конце концов, множество $\bigcup_{i=1}^n D_{Ti}^*$ должно содержать необходимое $\mathcal{D}_T \subset \bigcup_{i=1}^n D_{Ti}^*$.

Если, однако, этого не случится, вывод ясный: конструкцию отливки создать нельзя, необходимо переходить к другой технологии производства заготовок (к ковке, штамповке, сварке и т. п.).

58. СИСТЕМОТЕХНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОНФИГУРАЦИИ ФАСОННОЙ ОТЛИВКИ¹

Расчленение тела фасонной отливки на элементы ее конфигурации — процедура, которую выполняет технолог во время анализа конструкции детали, руководствуясь своими знаниями как о возможностях и особенностях той или иной технологии литья, так и о процессах формирования макростроения тела отливки и образования в нем тех или иных дефектов.

Эта процедура выполняется технологом, как правило, интуитивно. Очень часто технолог сам не подозревает о том, что рассматривает отливку как систему элементов ее конфигурации. Но как только речь пойдет о *качестве* будущей отливки, технолог не только перечислит предполагаемые дефекты, но определенно укажет *элементы* ее тела, в которых он ожидает их появление. Более того, при выяснении причин возникновения дефектов он всегда укажет на неудачное *взаимодействие* этих элементов с *другими* и даст определенные рекомендации об изменении их сочетания или размеров для исключения дефектов.

Таким образом, *связь между конфигурацией отливки, технологией литья и качеством отливки можно рассмотреть как функционирование системы элементов конфигурации фасонной отливки.*

Условимся: *фасонная отливка данной конфигурации — система элементов ее конфигурации; части конструкции отливки (бобышки, приливы, ребра, галтели и т. п.) — подсистемы.*

Условимся далее: *система функционирует в литейной форме как в заданном окружении; цель функционирования — формирование макростроения отливки и предохранение ее от возникновения усадочных рыхлот, пористости, ликвационных дефектов.*

В этой связи наиболее сложным является выбор *конфигурации элемента* системы. Необходимо прежде всего, чтобы элемент конфигурации отливки в концентрированном виде содержал всю информацию о функционировании системы в целом в заданном окружении, и в то же время конфигурация самого элемента была максимально *простой*, но такой, которая позволила бы без существенных затруднений составить из *конечного числа* таких элементов любую фасонную отливку. Кроме того, конфигурация элемента как конечного трехмерного тела должна быть удобной для теоретического и экспериментального *исследования* процессов возникновения в нем усадочных и ликвационных дефектов.

¹ Системотехническое описание конфигурации фасонной отливки предложено А. С. Чеботаревым, Ю. Ф. Чикунным. Формализация описания разработана С. Н. Поляковым.

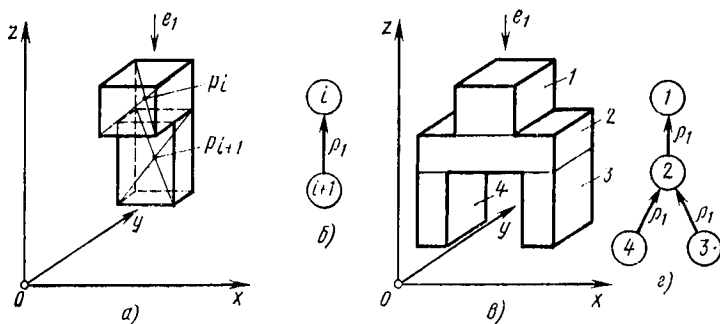


Рис. 106. Схема вертикального расположения элементов отливки (а) и оргграф (б), представляющий отношение между ними; пример расчленения отливки «вилка» на элементы (в) и оргграф их взаимодействия (г) при направлении питания e_1 (1—4—элементы отливки)

Условимся: элементом конфигурации фасонной отливки как системы является прямоугольный параллелепипед; размеры ребер параллелепипедов, составляющих данную отливку, могут быть разными и задаются в зависимости от выбранного правила расчленения этой отливки на элементы¹.

В этой связи в дальнейшем каждый элемент конфигурации отливки будем характеризовать множеством P размеров ребер прямоугольного параллелепипеда и координат его центра тяжести в декартовой системе с обычным евклидовым расстоянием.

Так как каждый элемент в зависимости от места расположения в отливке и размеров будет обладать определенным набором и степенью развития дефектов усадочного и ликвационного происхождения, то его помимо множества P необходимо характеризовать еще и множеством D .

Пусть D — множество характеристик дефектов элемента в виде $P_0, \bar{C}_i, \Lambda_n, \Lambda_d$ (см. гл. 11), а также координат центров тяжести областей залегания этих дефектов в той же системе координат.

Очевидно, если речь идет об отливке из данного сплава, то пара множеств P и D полностью определяет свойства каждого ее элемента, функционирующего в системе с другими элементами, на которые данная отливка расчленена. Это означает, что под *взаимодействием* элементов системы необходимо понимать те процессы кристаллизации, тепло- и массопереноса, фильтрации и др. (см. гл. 4), которые протекают между элементами во время затвердевания отливки.

Пусть p_i и p_{i+1} — координаты центров тяжести элементов P_i и P_{i+1} тела некой отливки (рис. 106, а). Если направление питания отливки e_1 , то *отношение* взаимодействия между этими элементами обозначим через ρ_1 (рис. 106, б). Тогда запись $p_{i+1}\rho_1 p_i$

¹ Это важное предложение сделано А. С. Чеботаревым и Ю. М. Чикуновым в 1969 г.

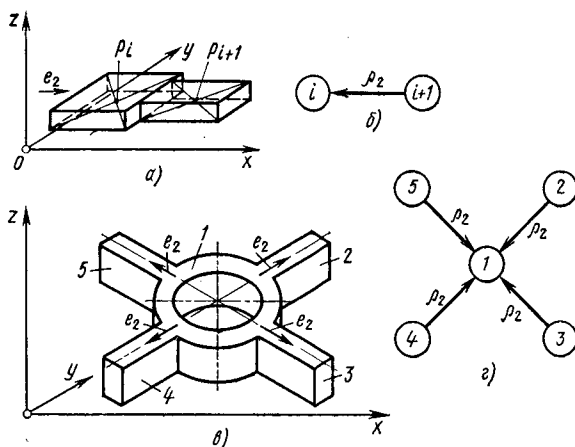


Рис. 107. Схема горизонтального расположения элементов отливки (а) и орграф (б), представляющий отношение между ними; пример расчленения отливки «крестовина» на элементы (в) и орграф их взаимодействия (г) при направлении питания e_2

будет означать, что элемент p_i вышележащий, а p_{i+1} — нижележащий по направлению питания в рассматриваемой системе. Характерным здесь является то, что контакт между элементами существует только по одной грани параллелепипедов, расположенной перпендикулярно к вертикальному направлению питания отливки.

Если направление питания e_2 горизонтальное, и между элементами p_i и p_{i+1} есть контакт только по одной грани, расположенной перпендикулярно к горизонтальному направлению питания отливки (рис. 107, а), то отношение взаимодействия между этими элементами обозначим через ρ_2 (рис. 107, б). Тогда запись $p_{i+1}\rho_2p_i$ будет означать, что элемент p_i питает элемент p_{i+1} .

На рис. 106, в и г, а также на рис. 107, в и г приведены примеры расчленения отливок на элементы и выявления отношений ρ_1 и ρ_2 взаимодействия между ними. Кольцо на рис. 107, в предлагается рассмотреть «развернутым», т. е. представленным в виде параллелепипеда, длина которого равна длине средней окружности кольца.

Заметим, что на рис. 106, б и г представлены ориентированные графы взаимодействия между элементами соответствующих систем-отливок.

В общем случае ориентированный граф взаимодействия между элементами фасонной отливки можно представить как

$$G_0 = [P, R, \Phi].$$

$P = \bigcup_{i=1}^n P_i$ — множество элементов системы, достаточно полно отражающее конфигурацию отливки. Так как p_i — координаты соответствующих элементов, то множество P можно задать в виде

$$P = \{p_i | i \in I\},$$

где I — упорядоченное множество номеров элементов по направлению питания, представляемых в виде узлов орграфа; $i = 1, 2, \dots, n$; n — число узлов.

$R = \{\rho_1, \rho_2\}$ — множество отношений между элементами системы, представляемое в виде множества дуг a_s орграфа; $s = 1, 2, \dots, m$; m — число дуг. Такой способ задания множества R полностью отражает *структуру* системы.

$\varphi: R \rightarrow P \times P$ — функция, ставящая в соответствие каждой дуге $a_s \in R$ *упорядоченную пару* вершин (p_i, p_{i+1}) . Порядок определяется отношением $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$.

Для описания графа G_0 взаимодействия, как это ясно, допустимо применять матрицу инцидентий для дуг, т. е. $B_0 = \|b_{is}\|$ размера $n \times m$, в которой

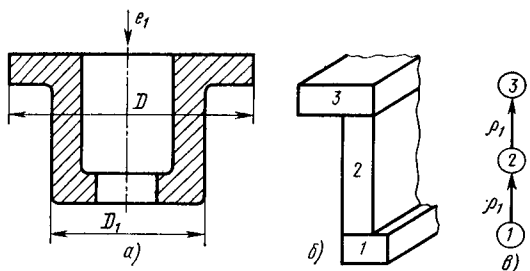
$$b_{is} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } a_s \text{ исходит из } p_i, \\ -1, & \text{если дуга } a_s \text{ заходит в } p_i, \\ 0, & \text{если дуга } a_s \text{ не инцидентна } p_i. \end{cases}$$

Наиболее сложным моментом в изложенном способе описания конфигурации фасонной отливки является расчленение ее на элементы в виде прямоугольных параллелепипедов. Здесь необходимы и некоторый навык, и изобретательность.

Без труда удастся расчленить отливку, конфигурация которой приведена на рис. 108. Действительно, ее с достаточной точностью можно представить как систему трех параллелепипедов, если каждый кольцевой элемент «развернуть» так, как это уже делали в примере на рис. 107. Однако такой прием допустим, если внутренний диаметр нижнего кольца намного больше, чем его ширина.

Гораздо сложнее расчленить на элементы аналогичную отливку, но с дном (рис. 109). С элементами 1 и 2 все ясно. С элементом 3 можно поступить так, как это показано на рис. 109, б. Выделим дно как элемент, который питается горизонтально от периферии к центру. Будем рассматривать этот элемент в виде подсистемы, состоящей из n колец одинаковой ширины $b = d/2n$, и, естественно, разными внутренними диаметрами $\bar{d}_i/d = (n - i + 1)/n$. Если теперь, каждое кольцо «развернуть», получится n параллелепипедов. На рис. 109, в приведен орграф взаимодействия всех элементов отливки.

Рис. 108. Пример расчленения отливки «втулка» а) на элементы б) и орграф в) взаимодействия элементов (1—3 — элементы отливки)



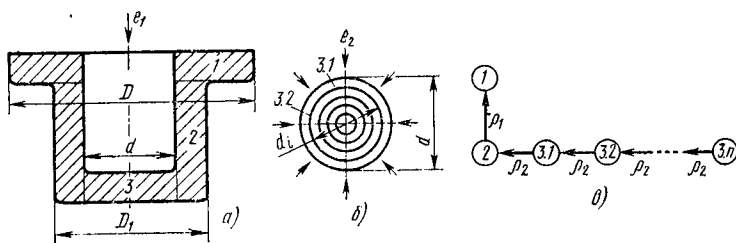


Рис. 109. Пример расчленения отливки «стакан» (а) на элементы (б) и граф (в) взаимодействия элементов

Изложенный способ описания конфигурации фасонной отливки, другими словами — способ задания множества $\mathcal{D}_k$, предназначен для изучения *только процесса питания* отливки. Для других целей следует прибегнуть к другим способам описания. Один из них мы уже знаем. Это — расчленение отливки на элементы, не взаимодействующие между собой, которые возможно уподобить бесконечной плите, цилиндру или шару для расчета затвердевания отливки в условиях малой интенсивности ее охлаждения в литейной форме.

Здесь также возможно системотехническое описание конфигурации. Вспомним отливку в виде крышки (см. рис. 104, а). Пусть бобышка и плита — элементы системы. Так как учитываемое взаимодействие между ними — только тепловое, а при малой интенсивности охлаждения отливки в форме это взаимодействие пренебрежимо мало, для описания структуры системы мы получим нуль-граф, содержащий петли (см. рис. 104, б).

В заключение подчеркнем, что та ситуация, с которой мы встретились, — необходимость специального описания конфигурации отливки в зависимости от целей ее анализа с точки зрения технологии литья, хода процесса формирования макростроения и образования дефектов тела отливки — не является искусственно созданной. Именно так смотрит на конфигурацию отливки и профессиональный технолог. Во время анализа возможности осуществления технологических операций (формовка, сборка формы, заливка и т. д.) и возникновения типичных дефектов в отливке он последовательно смотрит на ее конфигурацию «другими глазами», выделяя в ней те особенности, которые могут повлиять на эффективность технологии или на качество литой детали.

По-видимому, для других целей анализа конфигурации конструкции отливки необходимо создавать и другие способы задания множества $\mathcal{D}_k$.

59. О ФОРМАЛИЗОВАННОМ ОПИСАНИИ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ПИТАНИЯ ОТЛИВКИ

Структура множества D_T технологий литья и технических средств их реализации весьма сложна из-за большого разнообразия как самих технологий и их вариантов, так и технических

средств их реализации на конкретных производствах. Естественно, что каждый раз мы будем вынуждены останавливаться на некотором подмножестве множества D_T , полагая на основе обобщенного опыта и с учетом существующего уровня технологических знаний, что именно оно ответственно за достижение требуемого качества отливки. Однако выбор такого подмножества «автоматически» предполагает будто все остальные, не учтенные элементы множества D_T оказывают несущественное влияние на качество отливки. Конечно, это не так, точнее, не всегда так. Чаще всего, мы можем даже не подозревать о тех связях между характеристиками условий плавки и литья, какие существуют на самом деле в реальной технологии.

Изложенное означает, что любая математическая модель литейных процессов, созданная на основе использования физических и физико-химических знаний о природных процессах, составляющих тот или иной литейный процесс, будет *приближенной*. Во-первых, мы можем не знать всех природных процессов, составляющих технологический процесс литья; во-вторых, не все природные процессы изучены в физике и в физической химии с полнотой, необходимой для составления математической модели литейного процесса.

В том и другом мы убедились в разделе I во время анализа процессов, протекающих в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки (см. гл. 4). Несмотря на то, что мы ограничились только четырьмя процессами (тепловыми, диффузионными, фильтрационными и деформационными), математическая модель получилась весьма сложной (см. гл. 5). Ее использование для отливки реальной конфигурации составит задачу, неразрешимую даже с применением самых современных численных методов. И все это при всем, при том, что полученная в гл. 5 математическая модель является весьма приближенной — она не учитывает многих важных процессов, участвующих в формировании макростроения отливки и ее дефектов (см. п. 22). Читатель знает как мы поступили: пока можно было не учитывать реальную конфигурацию отливки, мы использовали *фрагменты* математической модели (см. раздел I), но когда такой прием оказался недопустимым (см. гл. 10), пришлось прибегнуть к *системотехническим* методам.

Из предыдущего (см. гл. 11) читатель знает, что подход с позиций сложных систем позволяет рассматривать технологический процесс не как составленный из ряда природных процессов, а в целом. Изменение любой характеристики условий плавки и литья удастся изучать не на идеализированной модели процесса, когда прочие характеристики остаются неизменными (имеется в виду однофакторный эксперимент или математическая модель), а на реальном технологическом процессе или на одной, интересной для заданной цели, технологической операции. Системотехнический аппарат *при рассмотрении технологического процесса как*

сложной системы позволяет использовать комплекс понятий и определений, которым можно придать только *технологический смысл*. Поэтому нет необходимости находить связи между ходом и итогом природных процессов (физических, физико-химических и др.), составляющих изучаемый технологический процесс, и теми их суммарными технологическими проявлениями, которые принято рассматривать в самой технологии, например характеристики макростроения отливки и ее дефекты в зависимости от условий плавки и литья данного сплава в заданной литейной форме.

Однако системотехнические методы эффективны при *постоянстве* внешней среды. Например, если марка сплава или материал формы отнесены в окружение системы (технологического процесса литья этого сплава в данной форме), то переход к другой марке сплава или к иному материалу формы может изменить, и порою существенно, взаимодействие элементов этой системы. По сути дела, изменение окружения приводит к необходимости рассматривать *новую* систему. Так, переход к другому сплаву приводит к необходимости рассматривать *тот же*, с точки зрения технолога, технологический процесс, как *новую систему*. В этом — главное ограничение системотехнических методов для изучения технологии, которые отличаются чрезвычайным разнообразием как вариантов и вариантов их операций, так и средств их осуществления на производстве. Другими словами, системотехнические методы при изучении технологий, например, *с целью их оптимизации или автоматизации их проектирования* в силу сложности технологических процессов и указанного ограничения требуют настолько трудоемких экспериментов, что порою эти методы кажутся неэффективными.

Выход из такого положения есть, и мы его обсудим на примере *технологии питания отливки как на объекте* излагаемой в этой главе *формализованной теории питания*.

Выше мы уже указывали на то, что системотехнические методы позволяют изучать технологический процесс в целом или любую одну существенную для заданной цели изучения технологическую операцию (см. с. 225).

Для уменьшения пористости отливок и предохранения их от ликвационных дефектов с целью повышения качества литых деталей больше других нас должны интересовать лишь одна операция — питание отливки и наиболее распространенные технические средства ее реализации на производстве — прибыли.

Читателю-технологу хорошо известно, что число прибылей z , их объемы $V_{n1}, V_{n2}, \dots, V_{nz}$ и места их установки на отливке, задаваемые, например, декартовыми координатами $v_1, v_2, \dots, v_z$ — те технические средства реализации технологии питания, с помощью которых можно *управлять качеством отливки* в результате уменьшения пористости ее тела и предохранения его от ликвационных дефектов.

Однако кроме числа, объемов, мест установки прибылей необходимо задать еще их тип и конфигурацию. Читатель знает разницу эффективности питания открытыми и закрытыми, сферическими и полушаровыми и другими прибылями. В этой связи, согласно А. С. Чеботареву и Ю. М. Чикунову, введем понятие *предельной* (минимальной по объему) прибыли.

Условимся: *предельная прибыль заданной конфигурации — прибыль, увеличение размеров которой (без изменения конфигурации) не приводит к существенному улучшению качества отливки; конец усадочной раковины, образующейся в такой прибыли, должен всегда находиться у подприбыльной поверхности отливки.*

Очевидно, объем предельной прибыли заданной конфигурации и эмпирически, и теоретически можно найти только, и только, *подобным* изменением ее размеров. Следовательно, по объему предельных прибылей удобно различать их конфигурации.

Таким образом, можно принять, что перечисленные выше технические средства реализации технологии питания отливки образуют множество D_T . Тогда, отображение (36) в виде

$$u: D_K \times D_T \rightarrow D_T \quad (39)$$

представляет результат системотехнического проектирования питания отливки прибылями, если D_K задано как система элементов-параллелепипедов и D_T — как набор z , v_i и V_{pi} ($i \in Z$, где Z — конечное множество прибылей от 1 до z).

Отображение (39) для выявленных структур множеств D_K и D_T предполагает, что марка сплава и все характеристики условий плавки, литья и затвердевания отливки — параметры окружения системы, состоящей из числа, места установки, объемов прибылей и множества элементов конфигурации отливки. Изменение одного из этих параметров окружения влечет за собою изменение связей между ее элементами и, следовательно, необходимость рассмотрения системы как новой, т. е. с новыми связями.

Эмпирическое выявление новых связей, например, для всех широко применяемых литейных сплавов — дело весьма трудоемкое.

Теоретическое выявление новых связей требует создания подробной математической модели физических и физико-химических процессов, обуславливающих процесс питания. Мы уже указывали на приближенный характер таких моделей.

Возможен еще один вариант — совмещение эмпирической и теоретической информации. Очевидно, что от точности и подробности математической модели будет зависеть объем экспериментальных работ. Поэтому *дальнейшее развитие работ по дополнению и уточнению математической модели формирования макростроения отливки и ее дефектов*, о которых мы говорили в п. 25, является необходимым и для решения проблемы повышения качества отливки на основе системотехнических методов.

Конкретно — для разработки системного метода исследования и проектирования технологии питания такое совмещение эмпирической и теоретической информации является вполне реальным. Во-первых, мы выбрали в качестве элемента конфигурации отливки прямоугольный параллелепипед — т. е. простейшую конечную отливку, в которой протекают те же процессы, какие обуславливают питание фасонной отливки в целом. Во-вторых, мы определили предельную прибыль как ту, в которой сосредоточивается вся усадочная раковина, а конец ее находится непосредственно у подприбыльной поверхности отливки.

Обе отмеченные особенности элементов множеств D_k и D_T позволяют ограничиться математической моделью А. И. Вейника для получения информации об объеме предельной прибыли для параллелепипеда в зависимости от марки сплавов, условий литья и затвердевания. Влияние условий плавки этих сплавов и массопереноса во время затвердевания — уже посильная задача для эмпирического исследования. Если же в дальнейшем удастся воспользоваться более точной моделью, учитывающей массоперенос в отливке прямоугольного параллелепипеда, то объем экспериментальных работ сократится еще более. И т. д.

Совмещение тех и других результатов дает возможность *уточнения* связей между элементами рассматриваемой системы: числом, местами установки, объемом прибылей и множеством элементов конфигурации отливки.

Теперь несколько соображений о структуре множества D_c служебных назначений деталей машин и приборов (существующих и проектируемых).

По-видимому, некоторой моделью множества D_c может быть обобщенное техническое задание (ТЗ) на конструирование детали. Однако в ТЗ, как правило, присутствуют понятия, воспринимаемые конструктором на основе его предшествующего опыта. Поэтому структуру множества D_c можно представить в виде некоторого *транслятора* с формального языка, близкого по форме, например, к русскому, на какую-либо форму математической записи, например числовую, матричную, графовую и т. п. Такой язык ТЗ позволяет получить элементы $d_k \in D_c$. Он должен содержать набор *целей* (множество целей) служебного назначения деталей, которые составляют слова языка, и *правил*, которые связывают слова в предложения.

Разумеется, данная идея создания множества D_c не является единственной. Возможны другие, более удобные и плодотворные. Однако здесь мы не будем развивать их, так как это выходит за рамки профессиональных задач литейщика-технолога. Пока условимся, что конструктор, предлагая технологу конфигурацию конструкции детали, гарантирует соответствие ее служебному назначению, если технолог обеспечит заданное ТЗ качество отливки.

Именно последнее соображение заставило нас принять представление процесса проектирования технологии литья данной детали в виде отображения (39), в котором для анализа питания отливки мы знаем способ задания множеств D_K и D_T .

60. УПРАЖНЕНИЯ

Для системотехнического описания конфигурации отливки с учетом условий их питания от прибылей предлагаются следующие три упражнения.

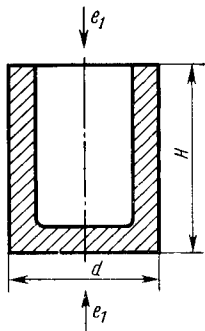


Рис. 110. Схема к упражнению 1

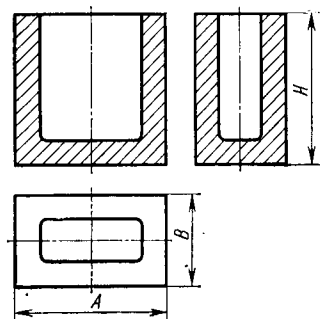
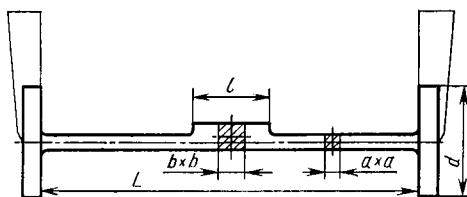


Рис. 111. Схема к упражнению 2

1. Составить систему и представить взаимодействие ее элементов графом для отливки, приведенной на рис. 110. Рассмотреть два направления питания: $\vec{e}_1$ и обратное $\vec{e}_1$.

2. То же, для отливки, приведенной на рис. 111. Здесь также рассмотреть два варианта направления питания.

Рис. 112. Схема к упражнению 3



3. То же, для отливки, приведенной на рис. 112. Эта отливка представляет собою упрощенный вариант известной технологической пробы на трещиностойкость сплавов при литье в песчаные формы.

Глава 13. РАСЧЕТ ПРИБЫЛЕЙ ДЛЯ ФАСОННЫХ ОТЛИВОК

Научно обоснованный расчет минимальных числа и объема прибылей и определение оптимальных мест их расположения на отливке — способ управления качеством отливки и уменьшения металлоемкости технологии ее изготовления.

Такой расчет возможен на основе формализованной теории питания отливки, изложенной в предыдущей главе. В этой главе мы приведем методику и алгоритм расчета на примере отливок из углеродистых сталей. В качестве базовой выбрана сталь 35Л, как широко применяемая в производстве тяжелых отливок.

61. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕМЕНТА ОТЛИВКИ

Представление фасонной отливки, питаемой прибылями, как системы из прибылей и прямоугольных параллелепипедов, составляющих конфигурацию этой отливки, требует создания *математической модели функционирования элемента в системе*.

Рассмотрим элементарную систему, состоящую из прибыли и отливки в виде прямоугольного параллелепипеда, размеры которого: a — наибольшее горизонтальное ребро, b — меньшее горизонтальное ребро и c — высота. Если объем отливки V_0 и объем прибыли V_n , то для любой, но известной конфигурации прибыли функциональное уравнение, связывающее параметры системы с условиями формирования качества отливки (в данном случае — ее плотности и степени химической неоднородности), можно представить в виде

$$\Phi(V_n, V_0, a, b, c) = 0. \quad (40)$$

Этой записью мы хотим подчеркнуть, что питание даже такой простой отливки, как прямоугольный параллелепипед, может определяться не только величиной V_n , подобранной по величине V_0 , но и размерами отливки.

Так как взаимодействие отливки с формой осуществляется через ее поверхность $F_0 = 2(ab + bc + ac)$, а с прибылью — через поверхность ее контакта с этой прибылью: $F_n = ab$, то функциональное уравнение (40) можно записать иначе:

$$\Phi_1(V_n, V_0, F_n, F_0) = 0.$$

Условимся F_n называть *подприбыльной гранью отливки*. Приведем это уравнение к безразмерному виду. Используя π -теорему теории размерности¹, получим

$$\Phi_2(K, W, N) = 0, \quad (41)$$

¹ Напомним π -теорему Бэкингема: число безразмерных переменных и критериев подобия равно разности числа вторичных величин, существенных для рассматриваемого объекта, и числа первичных величин, характерных для него.

В нашем случае существенных вторичных величин четыре: V_n, V_0, F_n, F_0 ; первичная характерная — одна; число безразмерных параметров — три. Подробно см. учебник А. А. Гухмана: Введение в теорию подобия. М., Высшая школа, 1973.

где $K = V_{\Pi}/V_0$ — коэффициент прибыли, широко используемый в известных читателю способах расчета прибылей; W и N — два новых безразмерных параметра:

$$W = \frac{F_{\Pi}}{F_0}; \quad (42)$$

$$N = \frac{F_0}{6V_0^{2/3}}. \quad (43)$$

Параметр N выражает известный из проективной геометрии принцип рассимметризации. В данном случае N — мера рассимметризации куба в рассматриваемый прямоугольный параллелепипед того же объема V_0 , так как $V_0^{1/3}$ — ребро куба, $V_0^{2/3}$ — площадь одной его грани, $6V_0^{2/3}$ — площадь всей поверхности куба, т. е.

$$N = \frac{1}{3} (a/c \cdot b/c)^{1/3} (1 + c/a + c/b). \quad (44)$$

Параметр W предложен А. С. Чеботаревым и Ю. М. Чикуновым. Он выражает ориентацию отливки в виде параллелепипеда к направлению ее питания прибылью, которую устанавливают на подприбыльную грань F_{Π} параллелепипеда. Его можно записать в виде

$$W = [2(1 + c/a + c/b)]^{-1}. \quad (45)$$

Сравнивая (44) и (45), получим

$$N = \frac{1}{3} W^{-1} (a/c \cdot b/c)^{1/3}. \quad (46)$$

Таким образом, если цель расчета прибыли — определение коэффициента прибыли, то уравнение (41) требуется решить относительно K , т. е. получить функцию

$$K = \Phi_3(W, N), \quad (47)$$

которая является математической моделью взаимодействия элемента системы с прибылью и внешней средой. Учитывая изложенное в гл. 10, найти модель можно только экспериментально. Однако число прямоугольных параллелепипедов, которые могут быть элементами конфигураций реальных фасонных отливок, безгранично.

Очевидно, $0 < W < 0,5$ и $1 \leq N < \infty$ — интервалы изменения значений W и N . Действительно, из (45) и (46) следует, что при $c \rightarrow 0$ параметры $W \rightarrow 0,5$ и $N \rightarrow \infty$, а при $c \rightarrow \infty$ параметры $W \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$; значениям $W = 1/6 \approx 0,167$ и $N = 1$ соответствует куб. Очевидно также, что все возможные сочетания W и N в указанных интервалах их изменения образуют бесконечное

множество прямоугольных параллелепипедов, которые можно задать как множество M элементов $m \in M$ в виде пар (W, N) :

$$\left. \begin{aligned} M &= \{m \mid m = (W, N)\}, \\ W &= V_0^{1/3}/6cN. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где

На рис. 113 в декартовой системе координат W, N множество M для $V_0 = \text{const}$ представлено графически областью координатной плоскости WON . Эта область имеет границу в виде кривой, которая описывается уравнением (проверить!)

$$(1 - 2W)^2 W - 2/27 N^2 = 0, \quad (49)$$

если $a = b$, и, следовательно,

$$W = [2(1 + 2c/a)]^{-1}; \quad N = \frac{1}{3} W^{-1} (a/c)^{2/3}.$$

Иначе говоря, граница ∂M множества M является подмножеством $\partial M \subset M$ параллелепипедов с *квадратной* подприбыльной гранью.

Заметим, что на рис. 113 подприбыльная грань параллелепипедов та, которая перпендикулярна направлению оси ординат W .

Множество ∂M можно разделить на три подмножества: $\partial M_0 \subset \subset \partial M$, $\partial M_1 \subset \partial M$ и $\partial M_2 \subset \partial M$, которые имеют пустые пересечения: $\partial M_0 \cap \partial M_1 \cap \partial M_2 = \emptyset$, но их объединение $\partial M_0 \cup \partial M_1 \cup \partial M_2 = \partial M$. Следовательно, ∂M_0 , ∂M_1 и ∂M_2 — классы разбиения множества ∂M , т. е. классы параллелепипедов с *квадратной* подприбыльной гранью: $\partial M_0 = \{m_0\}$ и $m_0 = (1/6, 1)$ — куб (точка 1 на рис. 113); $\partial M_1 = \{m_1 \mid m_1 = (W_1, N)\}$ и $W_1 \in (0, 1/6)$ — параллелепипеды, вытянутые вдоль оси W — *призмы* (бруски) (точки 7—10 на рис. 113); $\partial M_2 = \{m_2 \mid m_2 = (W_2, N)\}$ и $W_2 \in (1/6, 0, 5)$ — параллелепипеды, вытянутые вдоль оси N — *плиты* (точки 1—6 на рис. 113).

Очевидно, что подмножество $M \setminus \partial M$ — множество параллелепипедов с *прямоугольной* подприбыльной гранью. Условимся называть их параллелепипедами произвольной конфигурации.

На рис. 113 приведена схема трансформации параллелепипедов с квадратной подприбыльной гранью в произвольные параллелепипеды.

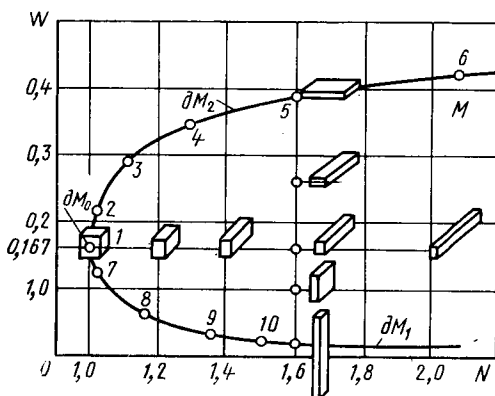


Рис. 113. Графическое представление множества M прямоугольных параллелепипедов

62. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТА ОТЛИВКИ С ПРИБЫЛЯМИ

Фасонную отливку мы условились рассматривать как систему взаимодействующих элементов в виде прямоугольных параллелепипедов. Это взаимодействие определяется правилом В. Е. Грума-Гржимайло (см. с. 197): каждый вышележащий элемент является прибылью нижележащего. Следовательно, и отливка в виде одного элемента и прибыль — произвольные параллелепипеды.

Математическая модель (47) выражает взаимодействие элемента отливки любого прямоугольного параллелепипеда с прибылью любой, но заданной конфигурации, и внешней средой.

Элементы $m = (W, N)$ множества M являются исчерпывающими признаками любого элемента конфигурации отливки при условии, что функция (47) определена для данного сплава.

Выше мы уже говорили о том, что функцию (47) можно найти только экспериментально.

Из (47) следует, что коэффициент прибыли не должен зависеть от объема отливки. Экспериментальная проверка, выполненная А. С. Чеботаревым и Ю. М. Чикуновым при литье стали 35Л, показала, что K не связан с объемом V_0 элемента, если $V_0 \leq 15,6 \text{ дм}^3$, а отношения a/c и b/c неизменны. Это обстоятельство значительно сокращает число экспериментов для определения функции (47).

Представление множества M в виде (48) позволяет еще более сократить необходимую экспериментальную работу, если воспользоваться разбиением множества ∂M на классы как для прибылей, так и для самих элементов отливки.

Прибыль в виде куба

На рис. 114 приведены результаты А. С. Чеботарева и Ю. М. Чикунова экспериментального определения коэффициента K предельной кубической прибыли для отливок из стали 35Л в виде параллелепипедов с квадратной подприбыльной гранью.

На рис. 115 представлен пример предельной кубической прибыли для отливки с $a = b = 210$ и $c = 77$ мм из стали 35Л. Температурен травлен в 50%-ном растворе HCl при температуре 80°C в течение 30 мин.

Точки 1—10 на кривых K_1 и K_2 (рис. 114) соответствуют номерам точек на границах ∂M_0 , ∂M_1 и ∂M_2 множества M (рис. 113). Следовательно, для любого N точки на кривых K_1 и K_2 дают значение K для W_1 призм и W_2 плит; K в интервале $[K_1, K_2]$ соответствуют W в интервале $[W_1, W_2]$, т. е. является значением коэффициента кубической прибыли $K \in (K_1, K_2)$ для отливок в виде произвольного параллелепипеда с $W \in (W_1, W_2)$.

В точке 1 $K_0 = K_1 = K_2$ и $W_1 = W_2 = 0,167$; это означает, что отливка в виде куба инвариантна к направлению питания. Во всех остальных случаях коэффициент прибыли не только зависит

от отношений a/c и b/c отливок, но и от их ориентации к направлению питания, т. е. от W .

Разложим функцию (47) для любого N в ряд по степеням $W - W_1$:

$$K = \varphi_3(W_1 N) + B_1(W - W_1) + B_2(W - W_1)^2 + \dots$$

Сохраним только первые два его члена, так как интервал $[K_1, K_2]$ достаточно мал по сравнению с K , если, конечно, $N \leq 2,0$ (см. рис. 114). Тогда,

$$K = \varphi_3(W_1, N) + B_1(W - W_1);$$

$$K_1 = \varphi_3(W_1, N);$$

$$K_2 = \varphi_3(W_1, N) + B_1(W_2 - W_1),$$

и, следовательно, для любого $N \leq 2,0$

$$K = K_1 + \frac{K_2 - K_1}{W_2 - W_1} (W - W_1), \quad (50)$$

где связь между W и N определяется из (48), а между W_1, W_2 и N — из (49).

Для любого $N > 2$ коэффициент $K = K_1 \cong K_2$, где K не зависит от N .

Размеры параллелепипедов заданного объема V_0 можно найти из (45) и (46):

для произвольных параллелепипедов

$$c = V_0^{1/3}/6WN;$$

$$a/c; b/c = \left\{ (1 - 2W)/4W \mp [(1 - 2W)^2/16W^2 - (6WN)^{-3}]^{1/2} \right\}^{-1}; \quad (51)$$

для параллелепипедов с квадратной подприбыльной гранью

$$a/c = 4W_i/(1 - 2W_i); \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что для расчетов K по формуле (50) надо знать функции $K_1 = \varphi_3(W_1, N)$ и $K_2 =$

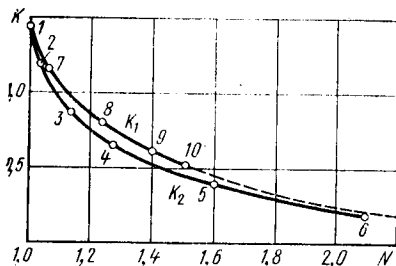


Рис. 114. Зависимость коэффициента K минимальной кубической прибыли для множества M отливок прямоугольных параллелепипедов

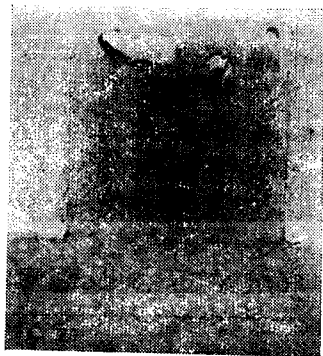


Рис. 115. Минимальная кубическая прибыль для отливки ($a = b = 210$, $c = 77$ мм) из стали 35Л

$\cong \varphi_3(W_2, N)$. Определить их можно пока только из эксперимента, например, в виде кривых, приведенных на рис. 114. При этом эксперимент требуется для каждой марки сплава, каждого состава формовочной смеси, каждой температуры заливки и т. д.

Прибыль в виде произвольного параллелепипеда

Математическую модель взаимодействия элемента отливки с прибылью в виде произвольного параллелепипеда следует представить аналогично (47), но как функцию от четырех переменных:

$$\left. \begin{aligned} K &= \xi_1(W_n, N_n, W, N) \\ \text{или} \quad K &= \xi_2(m_n, m), \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где $m = (W, N)$ — известный нам элемент множества M прямоугольных параллелепипедов — элементов тела отливки; $m_n = (W_n, N_n)$ — элемент множества M_n прямоугольных параллелепипедов — прибылей для данного элемента тела отливки; очевидно, что $M = M_n$.

Экспериментальное определение функции (52) построим так: сначала найдем ее для ряда *фиксированных* конфигураций прибылей, затем аппроксимируем значения K на все возможные их конфигурации.

Первую фиксированную конфигурацию прибыли мы уже выбрали — это *куб* (см. рис. 115). Для такой прибыли $W_{он} = 0,167$. Значение K для всех возможных элементов отливки можно рассчитать по формуле (50), если известны графики типа приведенных на рис. 114.

Вторая фиксированная конфигурация прибыли — «*бесконечная*» *призма* (брусок), т. е. удлиненный параллелепипед с квадратным основанием. Такую прибыль на практике не применяют, но для экспериментального определения K она имеет смысл.

Условимся: предельная прибыль в виде «бесконечной» призмы та, высота s_n которой *больше или равна некоторой s_n^* , минимальной* для данной отливки.

На рис. 116 представлен пример предельной прибыли в виде бесконечной призмы для отливки с квадратной подприбыльной гранью $a = b = 210$ и высотой $c = 77$ мм из стали 35Л. Травление темплета то же, что и в случае, приведенном на рис. 115.

Для такой прибыли $K_i^* = 0,99$ и параметр $W_{ин}^* = 0,092$, но эти числа справедливы *только* при литье стали 35Л.

Третью фиксированную конфигурацию прибыли — «бесконечная» *плита*, т. е. плоский параллелепипед с квадратным основанием. С точки зрения технолога, таких прибылей вообще не может быть. Однако на рис. 117 приведен пример прибыли в виде бесконечной плиты для той же отливки с $a = b = 210$ и $c = 77$ мм из

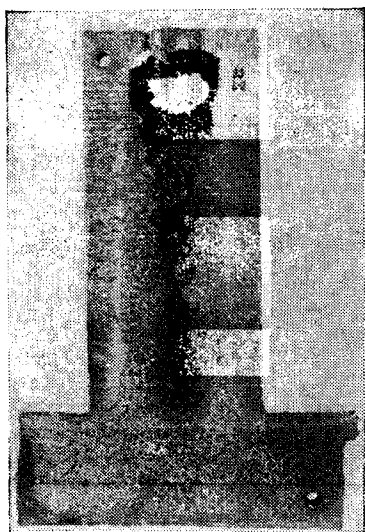


Рис. 116. Минимальная прибыль в виде «неограниченной» призмы для отливки на рис. 115

Коэффициент K для элементов отливки в виде параллелепипедов с квадратной подприбыльной гранью. Пусть на элементе отливки с квадратной подприбыльной гранью установлена предельная прибыль в виде *бесконечной призмы* (рис. 118, а). Объем отливки $V_0 = a^2 c$.

Пусть для предельной прибыли в виде бесконечной призмы известны c_n^* , W_{1n}^* и K_1^* . Так как при увеличении высоты $c_n > c_n^*$ (если $a_n^* = \text{const}$) прибыли остаются предельными, то для них, т. е. более высоких прибылей (проверить!),

$$K_1 = K_1^* \frac{W_{1n}^* (1 - 2W_{1n})}{W_{1n} (1 - 2W_{1n}^*)}; \quad W_{1n} \leq W_{1n}^*. \quad (53)$$



Рис. 117. Минимальная прибыль в виде «неограниченной» плиты для отливки на рис. 115

стали 35Л. Режим травления тем-плета прежний.

Для такой прибыли $K_2^* = 6,05$ и параметр $W_{2n}^* = 0,41$. Но эти числа, как и прежние, справедливы *только* при литье стали 35Л.

Условимся: предельная прибыль в виде «бесконечной» плиты, *горизонтальный размер* $a_n = b_n$ которой *больше или равен* некоторому $a_n^* = b_n^*$, минимальному для данной отливки.

Таким образом, на кривой, описывающей границу $\partial M_n = \partial M$ множества $M_n = M$ (см. рис. 113), в соответствии с классами разбиения $\partial M = \partial M_n$, мы установили три точки с $W_{0n}^* = 0,167$, $W_{1n}^* = 0,092$ и $W_{2n}^* = 0,41$, в каждой из которых известен коэффициент предельной прибыли с квадратным основанием для отливок с квадратной подприбыльной гранью.

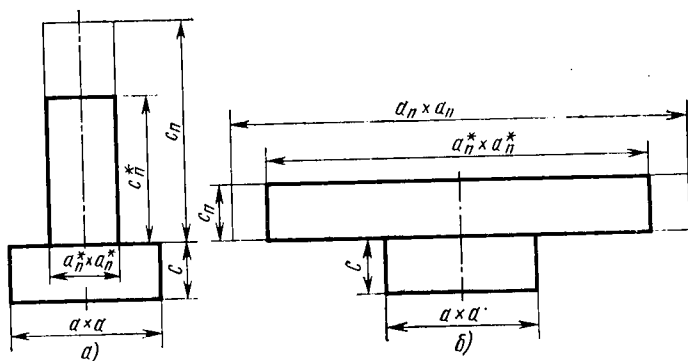


Рис. 118. Схемы к выводу формул:
а — (53); б — (54)

Аналогично, пусть на том же элементе отливки с квадратной подприбыльной гранью установлена предельная прибыль в виде бесконечной плиты с известными a_n^* , W_{2n}^* и K_2^* (рис. 118, б). Так как при увеличении $a_n^* > a_n$ (если $c_n^* = \text{const}$) прибыли остаются предельными, то для более широких прибылей (также проверить!)

$$K_2 = K_2^* \left[\frac{W_{2n} (1 - 2W_{2n}^*)}{W_{2n}^* (1 - 2W_{2n})} \right]^2; \quad W_{2n} \geq W_{2n}^*. \quad (54)$$

Как это ясно читателю, в формулах (53) и (54) четыре величины: W_{1n}^* , K_1^* , W_{2n}^* и K_2^* — должны быть известными из эксперимента для каждого сплава, каждого материала формы и т. д. Применительно к стали 35Л, заливаемой в песчаные формы, числовые значения этих величин приведены выше.

На рис. 119 сплошными линиями изображены кривые, отвечающие формулам (53) и (54). Они представлены в виде функций $K_1 = \zeta_1(W_{1n})$ и $K_2 = \zeta_2(W_{2n})$, которые можно рассматривать как результат преобразования (52) для случаев, когда $W_{1n} = W_{1n}$ и $W_{2n} = W_{2n}$, $W = W_1 = \text{const}$ и $W = W_2 = \text{const}$, если связь между W_{1n} и N_{1n} , W_{2n} и N_{2n} , W_1 и N_1 , W_2 и N_2 устанавливается формулой (49) при соответствующей индексации W и N .

Теперь нам предстоит описать части кривых K_1 и K_2 в интервалах $[W_{1n}^*, 1/6]$ и $[1/6, W_{2n}^*]$. Для этого удобно задать аппроксимирующие функции так, чтобы они продолжили

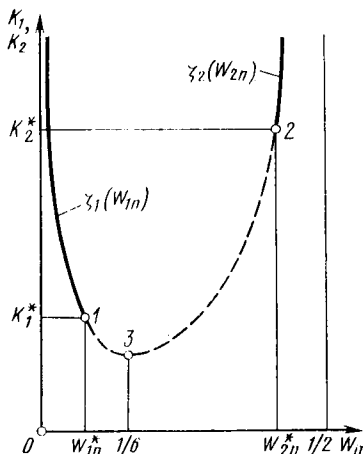


Рис. 119. Схема к выводу формул (55) и (56)

ход кривых $\xi_1(W_{1n})$ и $\xi_2(W_{2n})$ и проходили через точку K_0 , W_{0n} (рис. 119, штриховая линия).

Анализ экспериментов А. С. Чеботарева и Ю. М. Чикунова на стали 35Л позволил С. Н. Полякову предложить следующие функции:

$$K_1 = K_1^* \exp \alpha(W_{1n} - 0,167), \text{ если } W_{1n}^* < W_{1n} \leq 1/6;$$

$$K_2 = K_2^* \exp \beta(0,167 - W_{2n}), \quad 1/6 \leq W_{2n} < W_{2n}^*,$$

в которых α и β определяются из условия прохождения кривых через точки соответственно 1,3 и 2,3.

Расчет коэффициентов K_1 и K_2 прибылей в виде *любого* параллелепипеда с *квадратным* основанием для элемента отливки в виде также *любого* параллелепипеда с *квадратной* подприбыльной гранью можно осуществить по следующим формулам:

прибыли в виде призм

$$K_1 = \begin{cases} K_1^* \frac{W_{1n}^* (1 - 2W_{1n})}{W_{1n} (1 - 2W_{1n}^*)} & \text{при } 0 < W_{1n} \leq W_{1n}^*; \\ K_1^* \exp \alpha(W_{1n} - 0,167) & \text{при } W_{1n}^* < W_{1n} < 1/6, \end{cases} \quad (55)$$

где

$$K_1^* = \delta(W) \varphi_4(W_2, N) + [1 - \delta(W)] \varphi_4(W_1, N);$$

$$\delta(W) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < W \leq 1/6; \\ 0, & \text{если } 1/6 < W < 0,5; \end{cases}$$

прибыли в виде плит

$$K_2 = \begin{cases} K_2^* \exp \beta(0,167 - W_{2n}) & \text{при } 1/6 \leq W_{2n} < W_{2n}^*; \\ K_2^* \left[\frac{W_{2n} (1 - 2W_{2n}^*)}{W_{2n}^* (1 - 2W_{2n})} \right]^2 & \text{при } W_{2n}^* \leq W_{2n} < 1/2, \end{cases} \quad (56)$$

где

$$K_2^* = \delta(W) \varphi_5(W_2, N) + [1 - \delta(W)] \varphi_5(W_1, N);$$

$$\delta(W) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < W \leq 1/6; \\ 0, & \text{если } 1/6 < W < 0,5. \end{cases}$$

В формуле (55) $\varphi_4(W_1, N)$ и $\varphi_4(W_2, N)$ — найденные экспериментально функции K призматических прибылей типа, представленных на рис. 114, но для элементов отливки в виде призм и плит соответственно. В формуле (56) $\varphi_5(W_1, N)$ и $\varphi_5(W_2, N)$ — то же, но для прибылей в виде плит.

Коэффициент K для элементов отливки в виде произвольного параллелепипеда. Формулы (55) и (56) задают множество $K = K_1 \cup K_2$ коэффициентов прибылей — параллелепипедов с квад-

ратным основанием для элементов отливки — параллелепипедов с квадратной подприбыльной гранью. В общем виде множество K можно задавать функцией

$$K = \xi_3(W_n, N).$$

Для целей расчета питания отливки, состоящей из элементов — произвольных параллелепипедов, требуется знать функцию (52). А. С. Чеботарев, Ю. М. Чикунев и С. Н. Поляков разработали способ вычисления значений $K = \xi_1(W_n, N_n, W, N)$ по известным значениям $K = \xi_3(W_n, N)$.

На рис. 120 в виде схемы изображен интересующий нас случай. Пусть для элемента отливки, который задан координатами W_5, N (точка 5 на рис. 120), необходимо найти коэффициент K_{25} минимальной прибыли, конфигурация которой задана координатами W_2, N_n (точка 2). Пусть точки 1 и 3 соответствуют прибылям с N_n и квадратным основанием; точки 4 и 6 — элементам отливок с N и квадратной подприбыльной гранью.

Очевидно, что по формулам (55) и (56) можно найти коэффициенты $K_{14}, K_{16}, K_{34}, K_{36}$, где первая цифра в индексе — прибыль, вторая — элемент отливки с квадратной подприбыльной гранью. Учитывая, что для любого N коэффициент K линейно зависит от W (см. с. 234), получим (проверить!)

$$K_{25} = K_{35} - (K_{35} - K_{15}) \frac{W_3 - W_2}{W_3 - W_1}, \quad (57)$$

где

$$K_{15} = K_{14} - (K_{14} - K_{16}) \frac{W_5 - W_4}{W_6 - W_4}; \quad (58)$$

$$K_{35} = K_{34} - (K_{34} - K_{36}) \frac{W_5 - W_4}{W_6 - W_4}. \quad (59)$$

Очевидно также, что процедура расчета K для любых вариантов прибылей и элементов отливки в виде произвольных прямоугольных параллелепипедов легко алгоритмизируется и может быть реализована на ЭЦВМ.

63. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕЛА ОТЛИВКИ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С. Н. ПОЛЯКОВА

В предыдущих параграфах мы нашли математические модели элемента тела отливки (п. 61) и взаимодействие его с прибылью в виде произвольного параллелепипеда (п. 62). Теперь, исследуем взаимодействие элементов друг с другом при питании отливки от прибылей заданной конфигурации, например полушаровых.

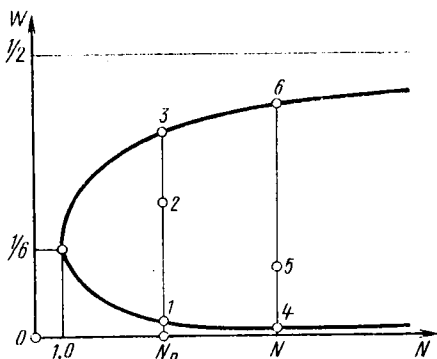


Рис. 120. Схема к выводу формул (57)–(59)

Рассмотрим простейший вариант: два элемента взаимодействуют по горизонтальным граням, при этом оси симметрии элементов совпадают; направление питания $\vec{e}$ — вдоль оси симметрии (рис. 121). Задача состоит в нахождении минимальной прибыли для такой системы.

Для решения задачи введем понятие — эквивалентность отливки по предельной прибыли¹ заданной конфигурации.

Пусть некоторый параллелепипед является прибылью; W_n , N_n и V_n известны. Пользуясь изложенным выше, найдем все отливки также в виде параллелепипедов, для которых эта прибыль является предельной. Очевидно, что таких отливок множество; признак его элементов — коэффициент K прибыли (рис. 122). Очевидно также, что каждой прибыли с другими W_n , N_n соответствует свое множество отливок. Читателю ясно, что таким путем все множество M параллелепипедов (см. рис. 113) разбивается на классы, которые являются *классами элементов, эквивалентных по предельной прибыли для них* (доказать!).

Теперь вернемся к схеме на рис. 121. Множество $P_2 = \{s_1, s_2\}$ для этой отливки (см. с. 221—224) состоит из двух элементов: $s_1 = (m, n, b)$ и $s_2 = (a, b, c)$.

Если $a = m$ и $b = n$, то систему из двух элементов легко представить одним новым элементом $\hat{s}_1$ в виде параллелепипеда с размерами m , n и $b + c$. Другими словами мы осуществили *бинарную операцию* (см с. 207)

$$s_1 * s_2 = \hat{s}_1.$$

Если $a \neq m$ и $b \neq n$ (см. рис. 121), то для выполнения бинарной операции нам потребуются изложенные выше представления об эквивалентности отливок по предельной прибыли.

¹ Это понятие в теорию питания ввели А. С. Чеботарев и Ю. М. Чикунов в 1970 г.

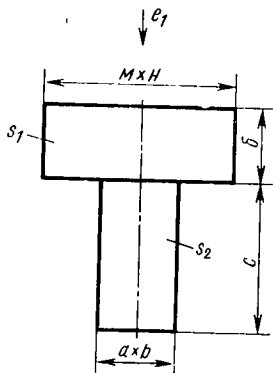


Рис. 121. Схема отливки из двух элементов

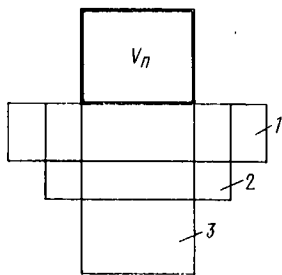


Рис. 122. Схема к определению эквивалентных отливок (1—3) для минимальной прибыли V_{II}

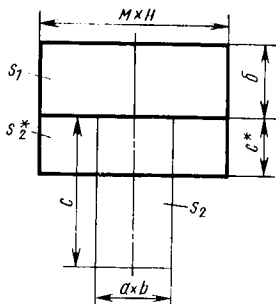


Рис. 123. Схема к приведению отливки из двух элементов (см. рис. 121) к эквивалентному параллелепипеду

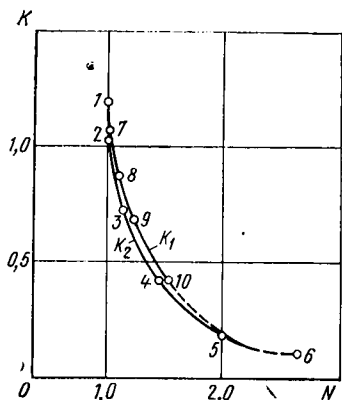


Рис. 124. Зависимость коэффициента K минимальной полушаровой прибыли для множества M отливок прямоугольных параллелепипедов (точки 1—10, см. рис. 113)

Поступим так: найдем предельную прибыль с основанием $m \times n$ для элемента $s_2 = (a, b, c)$; затем, для этой прибыли найдем такой элемент s_2^* , у которого будут размеры m , n и c^* (рис. 123); следовательно, s_2 и s_2^* — эквиваленты по прибыли, т. е. $s_2 \sim s_2^*$. Так как у s_1 и s_2^* размеры оснований параллелепипедов одинаковы, то возможна бинарная операция

$$s_1 * s_2^* = \hat{s}_1, \quad (60)$$

где $\hat{s}_1 = (m, n, b + c^*)$.

Заметим, что в изложенной процедуре сделано одно допущение: все, лежащее выше элемента s_2 , т. е. s_1 и искомая, например полушаровая, прибыль — в совокупности питает элемент *не лучше*, чем предельная прибыль, по которой найден элемент s_2^* . Это допущение можно принять без особых оговорок, так как оно гарантирует заданное качество элемента s_2 .

Таким образом, с помощью бинарной операции (60) мы нашли элемент $\hat{s}_1 = (m, n, b + c^*)$, который имеет такую же предельную прибыль, что и вся система $P_2 = \{s_1, s_2\}$, т. е. заданная на рис. 121 отливка. Так как отливка *приведена к эквивалентному параллелепипеду* с размерами m — наибольший горизонтальный, n — меньший горизонтальный и $b + c^*$ — высота, то для него можно найти параметры W и N и, следовательно, минимальную, например полушаровую, прибыль, если воспользоваться графиками K от N , приведенными на рис. 124 (графики построены по данным А. С. Чеботарева и Ю. М. Чикунова для стали 35Л).

Взаимодействие любого числа элементов

Читатель без труда уже представил себе последовательность преобразования системы из n элементов, составляющих фасонную отливку, при условии, что оси симметрии этих элементов *совпадают*.

Пусть данная отливка расчленена на n элементов, совокупность которых можно представить упорядоченным множеством

$$P_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\};$$

элемент s_n — последний по направлению питания. Найдем $s_n^* \sim s_n$ и осуществим бинарную операцию (60):

$$s_{n-1} * s_n^* = \hat{s}_{n-1}.$$

В результате число элементов множества P_n сократится на единицу:

$$P_{n-1} = \{s_1, s_2, \dots, \hat{s}_{n-1}\}.$$

Повторяя эту процедуру $n - 1$ раз, получим

$$P_1 = \{\hat{s}_1\},$$

где $\hat{s}_1$ — один элемент, эквивалентный по предельной прибыли всей отливке.

Для этого параллелепипеда и, следовательно, для отливки $P_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ можно найти минимальную полушаровую прибыль, используя графики на рис. 124.

Изложенную процедуру эквивалентного преобразования отливки в прямоугольный параллелепипед, т. е. системы P_n в P_1 , читатель без труда может истолковать как постепенное стягивание дуг орграфа (см, например, рис. 108, *г* и 109, *в*) взаимодействия элементов фасонной отливки с заменой отождествленных узлов p_{n-1} и p_n орграфа эквивалентным узлом $\hat{p}_{n-1}$ для элемента $\hat{s}_{n-1}$.

Еще раз подчеркнем, что изложенная процедура приведения фасонной отливки к эквивалентному ей прямоугольному параллелепипеду предназначена для случая, когда оси симметрии элементов ее тела совпадают. Допустимо смещение осей не больше чем $a/2$ или $b/2$.

В прилож. X приведена программа «Преобразование фасонной отливки из углеродистой стали», составленная С. Н. Поляковым и В. А. Попковым для ЭЦВМ «Наири».

Обращение к программе по первому оператору: *на исполним 1*. Порядок ввода исходных данных: a, b, c, m, n, b (см. рис. 121), т. е. для нижнего и предыдущего элементов. На печать выводятся размеры минимальной прибыли m, n и b для нижнего элемента и размеры a, b, c параллелепипеда, эквивалентного двум элементам; при этом, естественно, $m = a$ и $n = b$. Затем вводятся данные третьего, лежащего выше элемента m, n, b , и т. д.

Эту программу в случаях, когда один элемент конфигурации отливки взаимодействует с несколькими одновременно (см., например, рис. 106, *в* и 107, *в*), использовать нельзя. Требуется усовершенствовать алгоритм приведения отливки к эквивалент-

Ному параллелизму, так как оргграф будет иметь дополнительные дуги, т. е. он перестанет быть простой целью. Продумать этот вопрос мы поручаем читателю¹.

64. УПРАВЛЕНИЕ КАЧЕСТВОМ ОТЛИВКИ.

РАСЧЕТ ЧИСЛА И ОБЪЕМА ПОЛУШАРОВЫХ ПРИБЫЛЕЙ

Преобразование отливки как системы элементов ее тела к эквивалентному элементу на основе идей, изложенных в п. 57, является отображением

$$f_3: D_K \rightarrow D_K, \quad (61)$$

при этом $P_i = \{s_1, s_2, \dots, \hat{s}_i\}$ являются элементами d_K множества D_K . Отображение (39) можно истолковать как нахождение предельной прибыли $d_\tau \in D_\tau$ для каждого элемента $d_K = P_i$ множества D_K при выбранном (заданном) направлении питания отливки, т. е. как

$$u: P_i \times D_\tau \rightarrow d_\tau. \quad (62)$$

Улучшение технологичности отливки

Представим себе, что цепочка преобразований, реализующих отображение (61), обрывается. Это означает, что на каком-то этапе преобразования P_i в P_1 минимальной прибыли, способной питать все нижележащие элементы, нет. Следовательно, необходимой прибыли нет и для всей системы P_n , т. е.

$$u: P_n \times D_\tau \rightarrow \emptyset \quad (63)$$

для отливки, выражаемой системой $P_n \subset D_K$; *выбранное* направление питания требуется признать неудачным. Если же отображение (63) останется пустым и для других направлений питания, то отливка *нетехнологична*.

Читателю известно, что в большинстве случаев конструкцию отливки можно улучшить и сделать ее *технологичной*. Если предельной прибыли нет для этапа преобразования системы P_n в P_i , то элемент отливки s_{i-1} необходимо изменить: как правило, требуется измерить его размеры a или b . В результате система P_n заменяется на P'_n , в которой вместо элемента s_{i-1} функционирует элемент s'_{i-1} и

$$u: P'_n \times D_\tau \rightarrow d_\tau. \quad (64)$$

Но отливку *следует* признать технологичной, если одновременно отображение (35) примет вид

$$u_2: D_c \times P'_n \rightarrow D_K. \quad (65)$$

¹ Проблема автоматизированного проектирования технологии литья еще только разрабатывается. В этом разделе мы считали необходимым познакомить читателя с некоторыми подходами и результатами проектирования только питания отливки и, конечно, заинтересовать его перешенными вопросами.

В программе «Преобразование фасонной отливки из углеродистой стали» (см. прилож. X) учтена необходимость изменения элемента тела отливки, если цепочка преобразования прерывается.

Вопрос об удовлетворении P'_n отображению (65) решается пока в результате консультации с конструктором.

Улучшение качества отливки

До сих пор мы говорили о качестве, не давая этому понятию количественного выражения. Мы подразумевали уменьшение пористости и ликвационных дефектов в теле отливки.

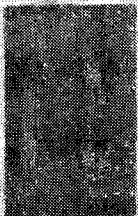
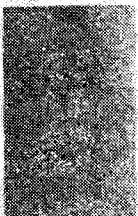
Балл качества	Вид обработки		
	Ш	Х	Г
1			
2			
3			

Рис. 125. Матрица для оценки отливок качества из углеродистых сталей:

1, 2, 3 — баллы качества; Ш — шлифование; Х — холодное травление; Г — горячее травление осевого темплета

Для отливок из углеродистых сталей можно воспользоваться рекомендациями известных читателю ГОСТов по визуальному выявлению дефектов усадочного, газового и ликвационного происхождения различными способами обработки осевых темплетов, вырезанных из отдельных элементов детали.

Условимся оценивать качество отливок одним из трех баллов:

1-й балл — отсутствие дефектов после травления в 50%-ном растворе соляной кислоты при 80° С в течение 30 мин;

2-й балл — отсутствие дефектов после травления в холодном растворе персульфата аммония;

3-й балл — отсутствие дефектов после шлифования до $R_z = 20$.

На рис. 125 приведена матрица, иллюстрирующая вид поверхности темплетов для выбранных баллов качества отливок из углеродистых сталей: 1-й балл — 1Г; 2-й — 2Х; 3-й — 3Ш. Из рис. 125 следует, что в отливках 2-го балла могут выявиться дефекты после горячего травления; в отливках 3-го балла после травления также могут выявляться дефекты и в гораздо большем количестве.

В соответствии с изложенным методом анализа взаимодействия элементов тела отливки друг с другом возникает вопрос о возможности обеспечить *требуемое качество* литой стали при питании этих элементов от *одной минимальной полушаровой прибыли*. Для условий плавки и литья стали 35Л из множества параллелепипедов M , на основе результатов исследований А. С. Чеботарева и Ю. М. Чикунова, выделены три непересекающихся подмножества: M_1 , M_2 и M_3 , отвечающие принятым баллам качества (рис. 126). При этом отливки, входящие в $M_1 \cup M_2$, могут быть приняты по 2-му, а входящие в $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ — по 3-му баллу.

Заметим, что область M_1 довольно узкая, и если в отливке будут элементы из множества $M \setminus M_1$, то они заведомо дефектны. Для расширения области M_1 требуется установка не одной, а нескольких *предельных* прибылей.

Расчет числа прибылей по А. С. Чеботареву и Ю. М. Чикуну

Достижение заданного балла качества отливки требует определения числа предельных прибылей, если параллелепипед, эквивалентный данной фасонной отливке, попадает за пределы заданного подмножества, например за пределы M_1 на рис. 126.

Пусть для отливки параллелепипеда с размерами a , b , c (рис. 127) необходимо определить объем V_n каждой из двух полушаровых прибылей, расположенных симметрично.

Рассмотрим следующую схему (рис. 128): V_{n1} — объем прибыли для отливки с размером $a/2$, b , c (рис. 128, а) и V_{n2} — то же, но для отливки с размерами a , b , c (рис. 128, б). Если обе прибыли являются предельными для своих отливок, то должна существовать связь (продумать!)

$$V_n = f_0(V_{n1}, V_{n2}).$$

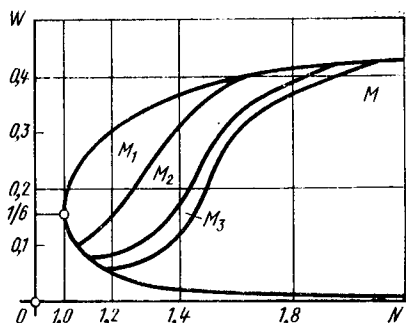


Рис. 126. Подмножества M_1 , M_2 и M_3 множества M отливок прямоугольных параллелепипедов, содержащих отливки соответственно 1, 2 и 3-го баллов качества

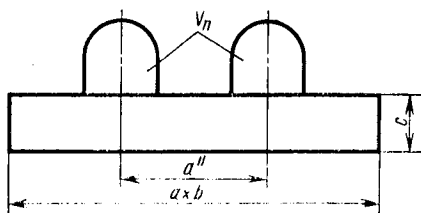


Рис. 127. Схема к определению расстояния между двумя прибылями

Экспериментальное исследование А. С. Чеботарева и Ю. М. Чикунова показало, что эта связь выражается как среднее арифметическое:

$$V_{\Pi} = \frac{1}{2} (V_{\Pi 1} + V_{\Pi 2}).$$

Если число прибылей z , то

$$V_{\Pi} = \frac{1}{z} (V_{\Pi 1} + V_{\Pi 2} + \dots + V_{\Pi z}). \quad (66)$$

Помимо определения числа z прибылей необходимо знать расстояние a'' (см. рис. 127), на котором они должны находиться друг от друга. Очевидно, что a'' будет различным в зависимости от заданного балла качества.

На рис. 129 приведены графики кривых, полученных А. С. Чеботаревым и Ю. М. Чикуновым экспериментально для стали 35Л. Эти графики устанавливают связь между a''/c и b/c отливки для 1, 2, 3-го баллов ее качества.

Таким образом, процедуру расчета числа прибылей можно представить себе так: если размер a параллелепипеда, эквивалентного данной отливки, больше a'' для заданного балла качества, то

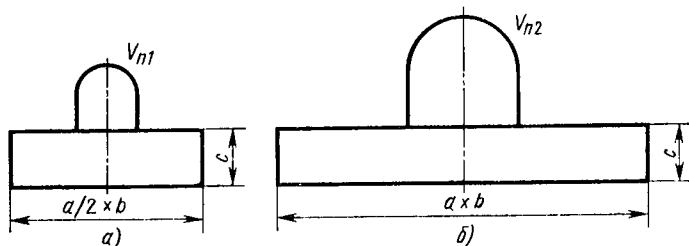


Рис. 128. Схемы к определению объема прибылей V_{Π} (см. рис. 127) по известным $V_{\Pi 1}$ (а) и $V_{\Pi 2}$ (б)

число прибылей можно оценить как отношение a/a'' ; если прибыли получаются слишком большими по размерам и, следовательно, неудобными для данной технологии, то число прибылей можно увеличить согласно формуле (66). При наличии необходимых эмпирических данных эта процедура легко алгоритмизируется для реализации на ЭЦВМ.

В прилож. XI в качестве примера приведена программа «Расчет прибылей для отливок «Кольцо» из углеродистых сталей», составленная С. Н. Поляковым и В. А. Попковым для ЭЦВМ «Наири».

Обращение к программе по первому оператору: *на исполнить 1*. Порядок ввода исходных данных: d_1 — внешний диаметр, d_2 — внутренний диаметр, c — высота, b — номер балла качества. На печать выводятся: в первой строке размеры a_0 , b , c параллелепипеда, эквивалентного кольцу, и b — заданный балл качества; во второй строке z — число, u_3 — объем всех прибылей и h_3 — высота каждой прибыли.

Программу можно использовать *только* для отливок типа колец и *только* из углеродистых сталей.

В заключение заметим, что из всех технических средств осуществления технологии питания отливок мы использовали только полушаровые прибыли. Кроме таких прибылей есть другие — они читателю известны. Известны также способы утепления прибылей экзотермическими вставками, доливка прибылей, установка холодильников, введение микрохолодильников. Все перечисленное необходимо учесть в структуре множества D_T и, следовательно, в алгоритме расчета питания отливок прибылями. Продумать эти вопросы мы также поручаем читателю¹.

65. ПРИМЕР АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРИБЫЛЕЙ ДЛЯ СТАЛЬНОЙ ОТЛИВКИ

Для отливки «насадка» (рис. 130) необходимо определить минимальные число, объем, размеры и оптимальные места установки полушаровых прибылей. В соответствии с изложенным

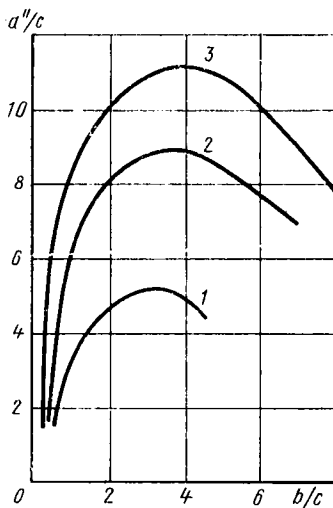


Рис. 129. Зависимость относительного расстояния a''/c между прибылями от относительной ширины b/c параллелепипеда для 1, 2 и 3-го баллов качества

¹ В изложенном выше все перечисленное мы отнесли к окружению системы. Если что-либо из этого окружения ввести в систему, мы получим новую систему с новыми связями между элементами, которые необходимо экспериментально или теоретически изучить и формализовать для данного метода расчета прибылей. Некоторые соображения на этот счет мы высказали раньше (см. с. 226—228).

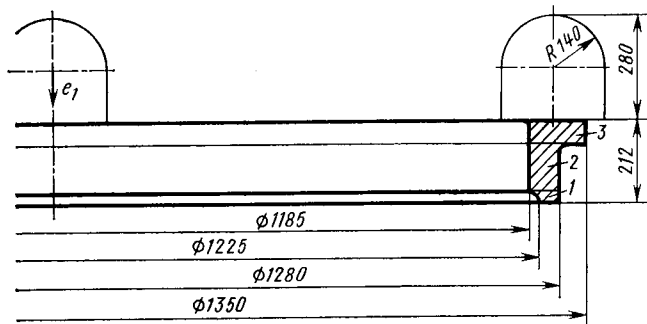


Рис. 130. Чертеж отливки «насадка» (материал—сталь 35Л) и схема расчленения ее на кольца (1, 2, 3)

в этой главе выберем направление питания $\vec{e}_1$. Видимо, такой выбор не вызовет возражений у профессиональных технологов. Затем расчленим отливку на три кольца, взаимодействующих друг с другом по торцам, т. е. по плоскостям, которые перпендикулярны направлению питания. Теперь преобразуем эту систему колец в систему прямоугольных параллелепипедов (рис. 131, а). Для расчета размеров параллелепипедов воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} a_i &= 0,5\pi (d_{1i} + d_{2i}); \\ b_i &= 0,5\pi (d_{1i} + d_{2i}); \end{aligned} \quad (67)$$

высота i -го параллелепипеда c_i равна высоте соответствующего кольца; здесь i — номера колец и параллелепипедов, $i = 1, 2, 3$.

Построим оргграф взаимодействия элементов (рис. 131, б); ρ_1 —отношение взаимодействия элементов (см. с. 221). Очевидно, что направление дуг оргграфа определяет направление преобразования системы элементов к эквивалентному параллелепипеду (см. с. 241).

Заметим, что смещение осей симметрии всех параллелепипедов не превышает $a/2$ у каждой пары. Следовательно, для преобразования системы этих параллелепипедов к эквивалентному по предельной прибыли допустимо воспользоваться программой, приведенной в прилож. X.

Составим матрицу исходных данных о системе:

$$A = \begin{vmatrix} 3628 & 55 & 30 \\ 3502 & 95 & 124 \\ 3722 & 165 & 58 \end{vmatrix}, \quad (68)$$

где строки соответствуют номерам элементов (см. рис. 131), столбцы —

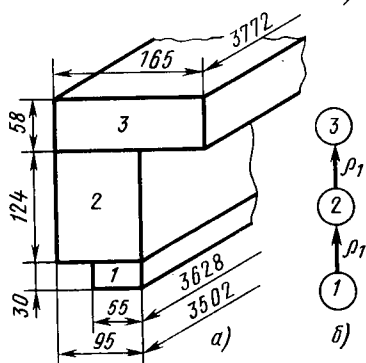


Рис. 131. Представление колец отливки «насадка» (см. рис. 130) системой прямоугольных параллелепипедов (а) и оргграф (б) взаимодействия элементов системы

размерам параллелепипедов (1-й — большому горизонтальному, 2-й — меньшему горизонтальному, 3-й — высоте).

Теперь с помощью перфоленты, на которой «набита» программа «Преобразование ...», через фотосчитывающее устройство (ФСМ) введем эту программу в ЭЦВМ «Наири».

Печатаем обращение к программе (см. с. 242) и две первые строки матрицы A . Получим на печать: m , n и b — размеры предельной прибыли для элемента, эквивалентного первым двум, и размеры a , b , c этого элемента.

Далее, после возврата каретки «Консула», печатаем третью строку матрицы A . Получим на печать: m , n и b — размеры предельной прибыли для *всей отливки* и размеры a , b , c параллелепипеда, эквивалентного *этой отливке*.

На рис. 132 приведен протокол вычислений на «Наири-К».

Рис. 132. Протокол результатов вычислений на «Наири-К» при приведении системы для отливки «насадка» (см. рис. 131) к эквивалентному параллелепипеду

на

исполним 1

3628 55 30

3502 95 124

$m = 3502,00000$	$n = 95,00000$	$\delta = 78,08044$
$a = 3502,00000$	$b = 95,00000$	$c = 142,19335$
3722 165 58		

$m = 3722,00000$	$n = 165,00000$	$\delta = 180,10620$
$a = 3722,00000$	$b = 165,00000$	$c = 137,91433$

Теперь можно перейти к расчету числа, объема и высоты полусферовых прибылей для рассматриваемой отливки «насадка» (см. рис. 130).

В связи с тем, что в память ЭЦВМ типа «Наири-2» и «Наири-К» нельзя ввести одновременно с программой «Преобразование ...» программу «Расчет прибылей ...» (прилож. XI), после преобразования системы (см. рис. 131, a) к эквивалентному параллелепипеду и расчета минимальной прибыли с основанием, равным подприбыльной грани элемента (рис. 132, предпоследняя строка), в машину необходимо с помощью перфоленты ввести программу «Расчет прибылей ...».

Печатаем обращение к программе (см. с. 247), затем размеры кольца¹ (наружный диаметр, внутренний диаметр, высоту) и требуемый балл качества.

¹ Для определения d_1 и d_2 по известным a и b параллелепипеда следует воспользоваться формулами (67). Если у параллелепипеда $N=2$, то программой пользоваться не рекомендуется, ибо в действительности при $N \rightarrow \infty$ $K \rightarrow 0$ (см. с. 234).

на

исполним 1

1350 1020 138 1

$a_0 = 3722,78729$

$b = 164,99999$

$c = 138,00000$

$z = 7,000$

$u_3 = 13925972,375$

$n_3 = 277,102$

на

исполним 1

1350 1020 138 2

$a_0 = 3722,78729$

$b = 164,99999$

$c = 138,00000$

$z = 4,000$

$u_3 = 14498204,875$

$n_3 = 280,847$

на

исполним 1

1350 1020 138 3

$a_0 = 3722,78729$

$b = 164,99999$

$c = 138,00000$

$z = 3,000$

$u_3 = 14894199,625$

$n_3 = 283,381$

Рис. 133. Протокол результатов вычислений на «Наири-К» при определении числа и размеров минимальных полушаровых прибылей для отливки «насадка» (см. рис. 130)

Получим на печать: a_0 , b и c — размеры параллелепипеда, соответствующего кольцу, и z — число прибылей, u_3 — объем прибыли и n_3 — ее высоту.

На рис. 133 приведен протокол трех вычислений на «Наири-К» последовательно для трех баллов качества. Ясно, что с увеличением требований к качеству число прибылей возрастает; особенно резко при переходе от 2-го балла к 1-му.

Вариант технологии питания «насадка» четырьмя полушаровыми прибылями высотой 280 мм и диаметром 280 мм был осуществлен в условиях фасонно-сталелитейного цеха. «Насадка» отлита из стали 35Л. На рис. 134, а, б приведены темплеты сечения тела отливки под прибылью и между прибылями. Оба темплета — после горячего травления. На последнем видны дефекты, но после холодного травления обнаружить их было нельзя (рис. 134, в).

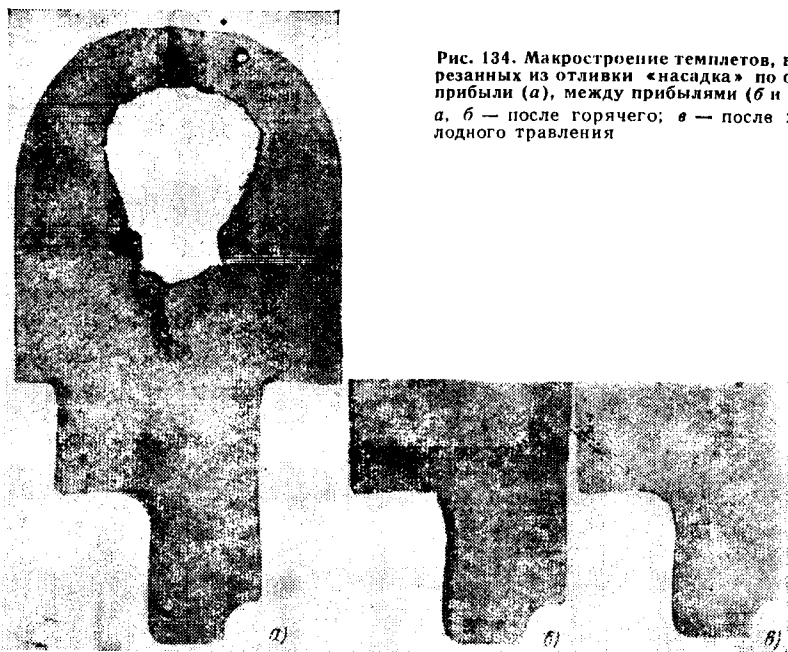


Рис. 134. Макростроение темплетов, вырезанных из отливки «насадка» по оси прибыли (а), между прибылями (б и в): а, б — после горячего; в — после холодного травления

66. ЗАДАЧИ

1. Для отливки, изображенной на рис. 94, а, рассчитать полушаровую прибыль. Баллы качества — 3, 2, 1; материал — сталь 35Л, форма песчаная.

Указание: необходимо воспользоваться формулой (50) и кривыми на рис. 124 и 126. Сравнить полученный результат с расчетом по П. Ф. Василевскому [3, с. 100—114].

2. На ЭЦВМ «Наири» выполнить преобразования конфигурации отливки, изображенной на рис. 108, к эквивалентному параллелепипеду с помощью программы «Преобразование...» (см. прилож. X).

Указание: принять следующую матрицу размеров элементов системы, представленной на рис. 108, б:

$$A = \begin{pmatrix} 2592 & 225 & 100 \\ 2984 & 100 & 500 \\ 4477 & 575 & 100 \end{pmatrix}.$$

Примечание. ЭЦВМ «Наири» выдаст на печать данные, приведенные на рис. 136. Обратите внимание на то, что толщина элемента 2 скорректирована после преобразования элементов 1 и 2: новая толщина стала 146 мм вместо 100 мм. Объяснить причину этого результата.

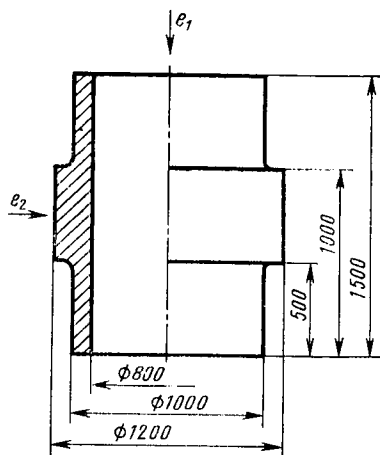


Рис. 135. Схема к задачам 4 и 5

на

исполним 1

2592 225 100
2984 100 500

m = 2984,00000	n = 146,40999	δ = 287,27959
a = 2984,00000	b = 146,40999	c = 629,08644
4477 575 100		

m = 4477,00000	n = 575,00000	δ = 217,59033
a = 4477,00000	b = 575,00000	c = 226,93846

Рис. 136. Протокол вычислений на «Наири—К» к задаче 2

3. Доказать, что уменьшение числа строк в матрице A (см. рис. 136)

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2592 & 225 & 100 \\ 2984 & 100 & 500 \\ 4477 & 575 & 100 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc} 2984 & 146,41 & 629,1 \\ 4477 & 575,0 & 100 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc} 4477 & 575 & 227 \end{array} \right\|$$

и стягивание соответствующих дуг в орграфе 108, δ являются тождественными операциями преобразования системы элементов отливки (см. рис. 108, a , b) к эквивалентному параллелепипеду.

4. Рассчитать на ЭЦВМ «Наири» число, объем и размеры полушаровых прибылей для втулки (рис. 135) при направлении питания $\vec{e}_1$.

5. То же, для направления питания $\vec{e}_2$.

Раздел IV | ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРЯЧИХ ТРЕЩИН В ОТЛИВКАХ

Глава 14. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ. НАПРАВЛЕНИЕ ЕЕ РАЗРАБОТКИ

Создание надежных и технологичных способов, исключающих образование горячих трещин в отливках, — научно-техническая проблема. Эту проблему литейщики и металловеды разрабатывают уже более 70 лет. Сейчас в связи с широким применением литья под давлением, в кокиль и в другие неподатливые формы, а также внедрением новых высокопрочных сплавов, обладающих, как правило, повышенной склонностью к образованию горячих трещин в отливках, решение этой проблемы имеет особое значение для повышения эффективности технологии литья.

67. ПРИЧИНЫ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРЯЧИХ ТРЕЩИН

Горячие трещины иногда называют *кристаллизационными*, подчеркивая этим, что чаще всего они возникают во время затвердевания отливок.

В научном отношении названную выше научно-техническую проблему исследователи всегда рассматривали как проблему выявления *причин* образования горячих трещин в отливках. Важность именно такой ее постановки трудно переоценить. Ясно, что точное знание причин растрескивания отливок во время затвердевания позволяет однозначно решить проблему и в техническом отношении, т. е. создать необходимые способы предохранения отливок от горячих трещин и, следовательно, ликвидировать этот распространенный вид брака литых заготовок.

На первый взгляд, причины образования горячих трещин очевидны. Действительно, анализ схем, представленных на рис. 137, должен привести читателя к следующему заключению, основанному на его знаниях в области технологии литья.

В изображенной на первой схеме отливке (рис. 137, а) горячие трещины появляются тогда, и только тогда, когда деформация растяжения, развивающаяся в затвердевающей отливке на длине L_0 при торможении ее свободной линейной усадки в результате сопротивления части формы между поперечными ребрами высотой d , исчерпает деформационную способность сплава, расплав кото-

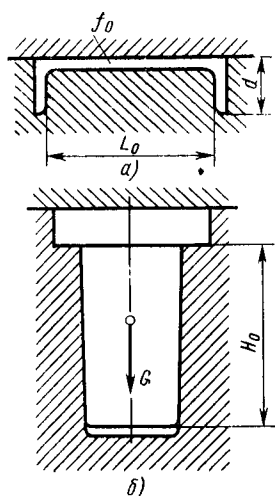


Рис. 137. Варианты затруднения свободной линейной усадки отливок:
а — формой; б — массой отливки

рого затвердевает в данной форме (f_0 — площадь поперечного сечения тела отливки).

Это заключение нетрудно формализовать. Условимся деформационную способность затвердевающего сплава характеризовать ϵ_0 — предельной относительной деформацией растяжения сплава в тот момент времени затвердевания отливки, когда в ней образуются горячие трещины. Пусть ϵ — относительная деформация растяжения отливки в тот же момент времени ее затвердевания; численно ϵ равна величине относительной затрудненной усадки отливки, т. е. $\frac{1}{2}$

$$\epsilon = \epsilon_y - \epsilon_n - \epsilon_p, \quad (1)$$

где ϵ_y — относительная свободная линейная усадка сплава в момент времени образования горячих трещин в затвердеваемой отливке; ϵ_n — относительная podatlivost' формы (для схемы на рис. 137, а ϵ_n равна абсолютной деформации части формы между ребрами во время усадки отливки, отнесенной к расстоянию L_0 между ними); ϵ_p — относительное расширение формы в результате ее нагревания во время затвердевания отливки (для схемы на рис. 137, б ϵ_p равна абсолютному расширению части формы между ребрами, отнесенному к той же длине L_0).

Очевидно, что в отливках, затруднение свободной линейной усадки которых вызывается формой (или стержнями), горячие трещины образуются тогда, и только тогда, когда

$$\epsilon_0 - \epsilon = 0. \quad (2)$$

Очевидно также, что в отливке, изображенной на второй схеме (рис. 137, б), горячие трещины появятся в случае, когда

$$\sigma_0 - \sigma = 0, \quad (3)$$

если σ_0 — предел прочности на разрыв сплава в тот момент времени затвердевания отливки, когда в ней образуются горячие трещины; σ — действующее в отливке напряжение растяжения в тот же момент времени ее затвердевания; напряжение σ возникает здесь при торможении свободной линейной усадки нижней части отливки на длине H_0 в результате действия силы G ее тяжести.

Очевидно, наконец, что при литье одного и того же сплава обе схемы, изображенные на рис. 137, следует рассматривать как тождественные, а полученные равенства — как равносильные,

если торможению свободной линейной усадки отливки на величину ϵ соответствует напряжение ее растяжения σ .

Таким образом, *необходимое условие образования горячих трещин в отливках — торможение свободной линейной усадки сплава во время затвердевания расплава этого сплава в литейных формах.*

Как правило, свободную линейную усадку отливки тормозит форма или стержни, так как конструкции подавляющего большинства машиностроительных отливок имеют элементы затруднения усадки. Поэтому величина деформации ϵ в отливках из одного и того же сплава в основном зависит от податливости ϵ_n формы и стержней; при литье в неподатливые формы ϵ принимает наибольшее значение.

Достаточное условие образования горячих трещин в отливках — равенство относительной деформации их растяжения (растягивающего напряжения в них), возникающей вследствие торможения свободной линейной усадки затвердевающего сплава, величине предельной относительной деформации растяжения (пределу прочности на разрыв) данного сплава.

68. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУТЕЙ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ

Даже самый придирчивый читатель согласится, что эти необходимые и достаточные условия образования горячих трещин в отливках полностью определяют причины их образования, естественно, в рамках изложенных представлений об этих причинах. А раз так, то в соответствии с предыдущим, можно указать радикальные способы предохранения отливок от растрескивания во время затвердевания.

Из формул (2) и (3) ясно, что горячих трещин в отливках не будет, если

$$\text{и, следовательно,} \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon_0 - \epsilon > 0 \\ \sigma_0 - \sigma > 0. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Достигнуть этого можно тремя путями.

Первый путь — создание конструкций отливок с минимальным затруднением свободной линейной усадки (лучше вообще без элементов торможения усадки!); он следует из формулировки необходимого условия. Такой путь является наиболее радикальным, но не годится для большинства фасонных отливок.

Второй путь — увеличение податливости ϵ_n формы и стержней; он следует из анализа формулы (1). Литейщики-технологи давно разрабатывают специальные податливые смеси для форм и стержней, используют оболочковые стержни и т. п.

Третий путь — увеличение деформационной способности ϵ_0 (предела прочности σ_0) и уменьшение свободной линейной усадки ϵ_y сплавов (усадочных напряжений σ_y); он следует из анализа

формул (1)—(4). На этом основании литейщики-металловеды разрабатывали специальные литейные сплавы.

Последний путь представляется предпочтительным, ибо научно-технический прогресс в литейном производстве, рост требований к точности отливок и к эффективности технологии литья сделали неизбежным использование неподатливых и малоподатливых форм (в первую очередь металлических при литье в кокиль и под давлением, а также керамических). Для гарантированного предупреждения образования горячих трещин в отливках при литье в металлические формы необходимо, чтобы

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon_0 - (\varepsilon_y + \varepsilon_p) &> 0 \\ \sigma_0 - (\sigma_y + \sigma_p) &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где σ_y — растягивающее напряжение в отливке, вызванное полным торможением свободной линейной усадки; σ_p — растягивающее напряжение в отливке, соответствующее ее деформации на ε_p , которая возникает в результате термического расширения формы и стержней во время затвердевания.

И вот здесь возникает одна из самых интересных неожиданно рассматриваемой проблемы выяснения причин образования горячих трещин при литье. Читателю хорошо известно, что при литье, например в кокиль, существует такое расстояние $L_0 = L_k$ между элементами торможения усадки (см., например, схему на рис. 137, а), превышение которого приводит к образованию горячих трещин в отливках типа изображенных на рис. 137, а. Этот размер L_k зависит от толщины стенок отливки, ее конструкции, режимов литья и свойств сплава, в частности от разности величин ε_0 и ε_y (следовательно, σ_0 и σ_y)¹.

Удачно объяснить такое явление с позиций изложенного пока не удастся, ибо величины ε_0 и ε_y (следовательно, σ_0 и σ_y) характеризуют свойства сплавов и не зависят от L_0 .

Таким образом, несмотря на очевидность, приведенные выше формулировки необходимого и достаточного условий образования горячих трещин не охватывают существенного комплекса факторов, реально действующих на процесс растрескивания отливок во время их затвердевания.

Каков этот комплекс факторов? И металловеды, и литейщики пока не дали однозначного ответа. Но они пошли еще одним, *четвертым путем*. Они ввели понятия о склонности сплавов к образованию горячих трещин и о сопротивляемости сплавов горячим трещинам.

Перечисленные термины, которые все чаще заменяют еще одним — горячеломкость сплавов, обозначают *технологическое* свойство сплавов образовывать горячие трещины в отливках.

¹ Величина ε_p в большинстве случаев литья в металлические формы не существенна, и ее можно не учитывать.

Определяют это свойство с помощью проб—отливок, в которых различными способами создается измеряемое (оцениваемое сравнительно) торможение линейной свободной усадки при постоянных (контролируемых) режимах литья. Читателю из технологических дисциплин хорошо известны такие пробы. Известно также, что с помощью проб можно установить большую или меньшую склонность сплавов к образованию горячих трещин в отливках, выбрать сплавы с повышенной сопротивляемостью горячим трещинам при литье, но нельзя указать надежные и технологические способы предохранения фасонных отливок от растрескивания во время затвердевания.

Следовательно, остается одно: на основе данных, полученных с помощью проб, а также на основе опыта технолога требовать от конструкторов создания литых деталей с минимальным затруднением их свободной линейной усадки. Можно, конечно, по-прежнему требовать от металлургов создания сплавов с максимальной сопротивляемостью горячим трещинам. Однако сейчас это не реально, так как металловеды, решая задачи ускорения научно-технического прогресса в машиностроении и приборостроении, предлагают литейщикам много новых высокопрочных, жаропрочных, коррозионно-устойчивых и других сплавов, которые, к сожалению, обладают, как правило, повышенной склонностью к образованию горячих трещин.

Но есть еще путь — необходимо обратиться к *теоретическому анализу* процесса трещинообразования в затвердевающей отливке.

69. ТЕОРИЯ ГОРЯЧЕЛОМКОСТИ СПЛАВОВ

Цель теоретического анализа процесса образования горячих трещин — выявление комплекса существенных для этого процесса факторов. Однако существующая теория ограничивается анализом факторов, определяющих лишь *горячеломкость* сплавов.

Эффективный интервал кристаллизации сплавов по А. А. Бочвару,

А. А. Бочвар впервые высказал предложение рассматривать возникновение горячих трещин с того момента времени затвердевания сплавов, когда начинается развитие линейной усадки отливок. Такое предложение понятно, ибо только с этого момента времени возможна реализация необходимого условия образования горячих трещин, т. е. возможно торможение свободной линейной усадки и возникновение в отливках растягивающих напряжений.

Большинство сплавов, применяемых в литейном производстве, кристаллизуется в интервале температуры. Читателю известно, что в условиях литейной формы эти сплавы, как правило, затвердевают практически объемом (см. гл. 13.1 и 18.1, пп. 60.1, 81.1). Следовательно, развитие свободной линейной усадки отливки

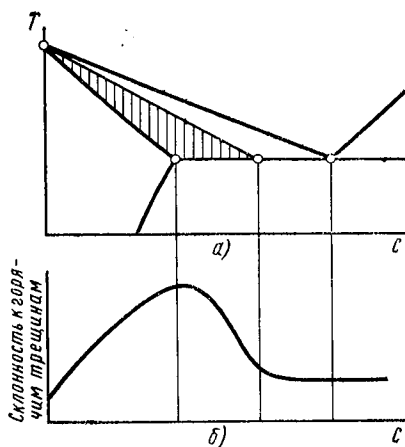


Рис. 138. Зависимость горячеломкости сплавов от величины их эффективного интервала кристаллизации по А. А. Бочвару:

а — эффективный интервал кристаллизации сплавов (заштрихован); б — горячеломкость сплавов

должно начинаться при той температуре затвердевающего расплава, при которой в нем появится количество твердой фазы, необходимое для образования «остова» («каркаса») отливки, способного сокращать свои линейные размеры. Понятно, что температура T_y начала свободной линейной усадки должна быть меньше температуры ликвидуса сплавов. Она ограничивает интервал кристаллизации сплавов на две части (рис. 138, а). Нижнюю А. А. Бочвар в 1947 г. назвал *эффективным интервалом кристаллизации сплавов* (на рис. 138, а он заштрихован).

В эффективном интервале кристаллизации (ЭИК) сплав находится в особом *твердо-жидком* состоянии¹, когда кристаллы образовали остов отливки, но частично отделены друг от друга прослойками расплава. Если свободную линейную усадку отливки затормозить, то в результате возникнут напряжения растяжения. А так как предел прочности жидкого сплава невелик, то прослойки расплава между кристаллами могут хрупко разрушаться — образуется горячая трещина.

По мнению А. А. Бочвара, горячеломкость сплавов связана с шириной ЭИК: чем шире ЭИК, тем больше склонность сплава к образованию горячих трещин (рис. 138, б; см. также рис. 11, кривая 5). Схему на рис. 138 А. А. Бочвар опубликовал в 1942 г.

На основе изложенного читатель должен сделать очевидные и вполне правдоподобные выводы. Во-первых, горячеломкость сплавов можно характеризовать количественно разностью

$$\text{или} \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon_0 - \varepsilon_y \\ \sigma_0 - \sigma_y \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Во-вторых, величины ε_0 , σ_0 и ε_y , σ_y необходимо измерять у температуры T_s солидуса сплавов, т. е. на нижней границе ЭИК, так как свободная линейная усадка сплавов увеличивается

¹ Твердо-жидким назвал его И. И. Новиков (1951 г.), подчеркнув этим, что затвердевающий сплав ниже температуры T_y начала линейной усадки обладает основным свойством твердого тела сохранять ранее приданную ему конфигурацию.

Выше T_y затвердевающий сплав находится в *жидко-твердом* состоянии, так как сохраняет основное свойство жидкости — повышенную текучесть.

по мере снижения температуры от T_y до T_S , и поэтому у T_S деформация ϵ_y растяжения сплавов и, следовательно, растягивающее напряжение σ_y , возникающие в результате полного торможения свободной линейной усадки отливки, максимальны.

Показатель горячеломкости сплавов по Н. Н. Прохорову

Если принять, что деформационная способность ϵ_0 сплавов определяется *пластической деформацией $\epsilon_{пл}$ растяжения (пластичностью) сплавов*, зафиксированной в момент разрушения при T_S , то согласно *теории технологической прочности* первая разность из (6) при $\epsilon_0 = \epsilon_{пл}$ является количественной характеристикой (показателем) горячеломкости сплавов.

Принципиальные основы теории технологической прочности сплавов наиболее полно изложены в статье А. А. Бочвара, Н. Н. Рыкалина, Н. Н. Прохорова, И. И. Новикова и Б. А. Мовчана [34]. Впервые она предложена Н. Н. Прохоровым в 1952 г. и получила впоследствии широкое признание [43].

Логическое обоснование теории весьма просто. Деформационная способность сплава в твердо-жидком состоянии обусловлена в основном циркуляцией расплава между кристаллами, возникающей при растяжении затвердевающей отливки. Поэтому ее можно зафиксировать главным образом в виде пластической деформации. Толщина прослоек расплава уменьшается по мере снижения температуры до T_S , следовательно, при T_S пластичность $\epsilon_{пл}$ сплава минимальна. Так как при T_S деформация ϵ_y растяжения сплава в результате полного торможения свободной линейной усадки отливки максимальна, то разность $\epsilon_{пл}$ и ϵ_y при T_S минимальна и она может служить *характеристикой (показателем) горячеломкости сплавов*:

$$\Delta = \min (\epsilon_{пл} - \epsilon_y), \quad (7)$$

где Δ — *запас пластичности сплава*.

Экспериментальное обоснование теории: на рис. 139 приведена связь $\epsilon_{пл}$ с T и ϵ_y с T внутри интервала кристаллизации $T_L - T_S$ для сплава Al с 0,6% Si.

Величина $\epsilon_{пл}$ замерена как *остаточная деформация* плоских образцов сплава после их разрыва при заданной температуре T внутри интервала кристаллизации.

Величина ϵ_y замерена при непрерывном охлаждении образца сплава со скоростью 10 К/с. При этом оказалось, что

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_y &= \alpha_{св} (T_y - T) \\ \text{и, следовательно,} \quad \max \epsilon_y &= \alpha_{св} (T_y - T_S), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\alpha_{св}$ — коэффициент свободной линейной усадки сплава внутри эффективного интервала кристаллизации.

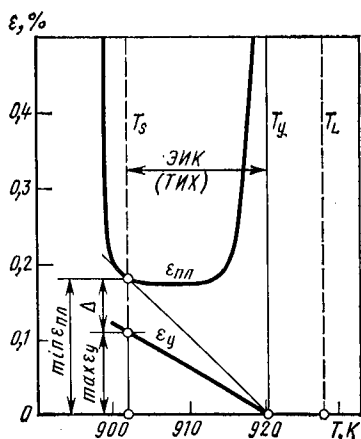
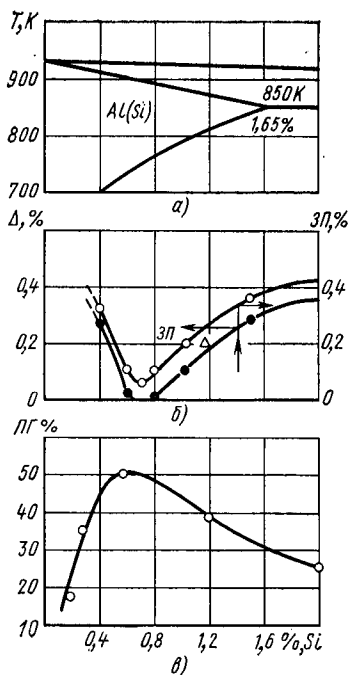


Рис. 139. Определение показателя горячеломкости сплавов по Н. Н. Прохорову

Рис. 140. Запас пластичности Δ и условный запас пластичности ЗП (б), показатель горячеломкости ПГ (в) для сплавов Al с Si (а)



На рис. 140 приведены кривые изменения запаса пластичности Δ (по данным М. П. Бачая и Н. Н. Прохорова) и склонности к образованию горячих трещин, характеризуемой показателем горячеломкости ПГ (по данным Н. Ф. Лашко и С. В. Лашко-Авакян) для сплавов системы Al—Si. Величина ПГ определена с помощью технологической пробы, которая представляет собою кольцо, отлитое в кокиль с металлическим стержнем. ПГ является отношением протяженности самой большой трещины к радиальному сечению кольца, выраженным в процентах.

Сопоставление кривых Δ и ПГ на рис. 140, б и в позволяет рассматривать Δ из формулы (7) как теоретический показатель горячеломкости сплавов.

Интервал $T_\gamma - T_S$ Н. Н. Прохоров назвал *температурным интервалом хрупкости*¹ (ТИХ) сплава:

$$\text{ТИХ} = T_\gamma - T_S. \quad (9)$$

¹ Термин введен Н. Н. Прохоровым в 1952 г. в связи с тем, что в эффективном интервале кристаллизации при растяжении образцов происходит межкристаллическое разрушение, т. е. хрупкое по прослойкам расплава. Аналогичное разрушение наблюдается и ниже солидуса, поэтому ТИХ, по Прохорову, несколько больше ЭИК.

Однако в более поздней работе Н. Н. Прохоров отождествил ТИХ и ЭИК [44]. Заметим, что в 1946 г. Зингер и Катрелл ЭИК назвали *интервалом горячеломкости*, так как в ЭИК сплавы разрушались хрупко. Более того, по границе перехода от хрупкого разрушения к вязкому эти исследователи предлагали определять температуру солидуса сплава.

С учетом (8) и (9),

$$\Delta = \min \varepsilon_{\text{пл}} - \alpha_{\text{св}} (T_y - T_S)$$

или

$$\delta = e - \alpha_{\text{св}}, \quad (10)$$

где $e = \frac{\min \varepsilon_{\text{пл}}}{\text{ТИХ}}$ — максимально допустимый темп деформации сплава; $\delta = \frac{\Delta}{\text{ТИХ}}$ — максимальный запас технологической прочности сплава.

Показатель горячеломкости сплавов, предложенный Н. Н. Прохоровым в виде формулы (10), можно рассматривать как более общий, ибо он учитывает влияние температурного интервала хрупкости.

Математизация теории

Пусть единица объема затвердевающего сплава содержит Ψ твердой фазы. Тогда количество расплава равно $1 - \Psi$. Если в единице объема растут N кристаллов, то средний относительный объем каждого кристалла $\sim \Psi/N$, а средний относительный размер его $\sim (\Psi/N)^{1/3}$. Каждый кристалл окружен расплавом. Относительный объем кристалла вместе с окружающим его расплавом $1/N$. Поэтому вокруг каждого кристалла относительная толщина прослоек расплава

$$s \sim 1 - \Psi^{1/3}.$$

Пусть растяжение единицы объема затвердевающего сплава обусловлено перетеканием (циркуляцией) расплава в направлении деформирования. Тогда толщина прослоек, ориентированных по этому направлению, будет уменьшаться, а толщина прослоек, расположенных перпендикулярно этому направлению, увеличиваться. В момент хрупкого разрушения относительная толщина таких прослоек достигает

$$s_1 \sim \frac{1}{\Psi^{2/3}} - \Psi^{1/3},$$

так как $(\Psi/N)^{2/3}$ — средняя «смоченная» поверхность кристалла, т. е. поверхность, на которой толщина прослойки расплава увеличивается до s_1 .

Следовательно, величина $s_1 - s$ — предельная пластическая деформация $\varepsilon_{\text{пл}}$ сплава при температуре T внутри $T_L - T_S$, для которой в затвердевающем расплаве появилось Ψ твердой фазы:

$$\varepsilon_{\text{пл}} \sim \left(\frac{1}{\Psi^{2/3}} - 1 \right). \quad (11)$$

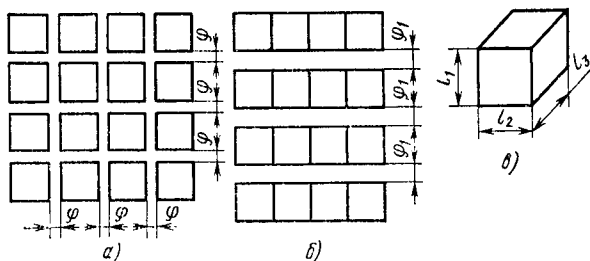


Рис. 141. Схемы к расчету предельной пластической деформации затвердевающего сплава по Н. Н. Прохорову:

a — до деформирования; *b* — после деформирования; *в* — модель кристалла

Формулу (11) Н. Н. Прохоров нашел другим путем [44]. На рис. 141 приведена схема строения сплава в ТИХ; l_1 , l_2 и l_3 — размеры кристаллов, принятых в виде прямоугольных параллелепипедов; φ — толщина прослоек расплава до деформирования, φ_1 — после деформирования.

Из схем непосредственно следует: объем расплава до деформирования равен

$$(l_1 + \varphi)(l_2 + \varphi)(l_3 + \varphi) - l_1 l_2 l_3,$$

после деформирования —

$$(l_1 + \varphi_1) l_2 l_3 - l_1 l_2 l_3,$$

так как объем расплава во время деформирования при постоянной температуре T внутри интервала кристаллизации не изменяется, то, приравняв оба выражения, получим

$$\varphi_1 = l_1 - \frac{1}{l_1 l_2} (l_1 + \varphi)(l_2 + \varphi)(l_3 - \varphi).$$

Определим величину относительной деформации $\epsilon_{\text{пл}}$ растяжения как

$$\epsilon_{\text{пл}} = \frac{\varphi_1 - \varphi}{l_1 + \varphi};$$

тогда, с учетом предыдущей формулы,

$$\epsilon_{\text{пл}} = \frac{\varphi}{l_1} + \frac{\varphi}{l_2} + \frac{\varphi^2}{l_1 l_2};$$

в случае, когда $l_1 = l_2 = l_3 = l$,

$$\epsilon_{\text{пл}} = \frac{\varphi}{l} \left(2 + \frac{\varphi}{l} \right). \quad (12)$$

Далее, из схемы на рис. 141 следует

$$\Psi = \frac{l_1 l_2 l_3}{(l_1 + \varphi)(l_2 + \varphi)(l_3 + \varphi)},$$

или при $l_1 = l_2 = l_3 = l$

$$\Psi = \left(\frac{l}{l + \varphi} \right)^3.$$

Очевидно, что

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{1}{\Psi^{1/3}} - 1.$$

Подставляя это отношение в (12), получим формулу, аналогичную (11).

Однако согласно формуле (11) получается, что при T_S , т. е. при $\Psi = 1$, пластическая деформация $\epsilon_{пл}$ равна нулю. В этой связи Н. Н. Прохоров усовершенствовал формулу (11), исходя из следующих соображений.

Во-первых, изложенный расчет основан на эскизной модели идеальной циркуляции расплава между кристаллами. Но реально выжать весь расплав с боковых поверхностей кристаллов на их торцовые поверхности невозможно. Поэтому Н. Н. Прохоров ввел в формулу (11) эмпирический коэффициент $K_{ц}$ полноты циркуляции расплава; его величина всегда меньше единицы.

Во-вторых, рассмотренная модель предполагает совершенные кристаллы. На самом деле, это дендриты, и поэтому расплав, находящийся между ветвями дендритов, вообще не может принимать участие в процессе циркуляции. Н. Н. Прохоров предложил учитывать в формуле (11) относительный объем $\mathcal{S}_н$ неподвижного расплава; величина $\mathcal{S}_н$ также подлежит экспериментальному определению.

В связи с этими соображениями Н. Н. Прохоров придал формуле (11) следующий вид [44]:

$$\epsilon_{пл} = K_{ц} \left[\frac{1}{(\Psi + \mathcal{S}_н)^{2/3}} - 1 \right]. \quad (13)$$

Далее, с помощью схемы, изображенной на рис. 142, нетрудно найти соотношение между Ψ и T внутри интервала кристаллизации сплава. По правилу отрезков, для сплава концентрации C_0

$$\Psi = \frac{C - C_0}{C(1 - k_0)}.$$

Если допустить, что линия ликвидуса — прямая, то

$$\Psi = \frac{1}{1 - k_0} \frac{T_L - T}{T_A - T} \quad \text{или} \quad \Psi = 1 - \frac{k_0}{1 - k_0} \frac{T - T_S}{T_A - T}; \quad (14)$$

где T_A — температура кристаллизации основного компонента сплава.

Если, наконец, принять, что верхняя граница ТИХ, т. е. температура T_y соответствует относительному объему твердой фазы Ψ_y , то

$$\text{ТИХ} = \frac{(1 - k_0)(1 - \Psi_y)}{k_0[1 - (1 - k_0)\Psi_y]} m_L C_0, \quad (15)$$

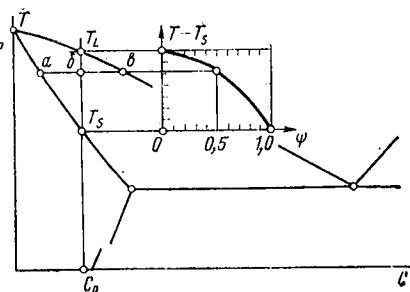


Рис. 142. Схема к расчету относительного количества твердой фазы Ψ в интервале кристаллизации сплава

где Ψ_y — относительный объем твердой фазы, образующей остов отливки, в которой начинает развиваться свободная линейная усадка сплава; m_L — тангенс угла наклона линии ликвидуса к оси абсцисс диаграммы состояния; k_0 — равновесный коэффициент распределения.

По предложению Н. Н. Прохорова [44], $\Psi_y = 0,5$, тогда

$$\text{ТИХ} = \frac{1 - k_0}{k_0 (1 + k_0)} m_L C_0. \quad (16)$$

70. ЗАТРУДНЕНИЯ ТЕОРИИ ГОРЯЧЕЛОМКОСТИ СПЛАВОВ

На первый взгляд, теория горячеломкости, являющаяся основой теории технологической прочности сплавов, предельно логична. Ее главный результат (7) подтвержден экспериментально (см. рис. 139 и 140). Однако эта теория имеет ряд затруднений именно при сопоставлении ее результатов с экспериментом; ниже мы приведем лишь некоторые.

Сопоставление с экспериментом

Прежде всего обратим внимание на формулу (13). Очевидно, что при $\Psi = 1 - \mathcal{S}_n$, т. е. при $T \approx T_S$, пластическая деформация $\varepsilon_{пл} = 0$. Очевидно также, что будет более правдоподобно, если эту формулу записать иначе:

$$\varepsilon_{пл} = \begin{cases} K_{ц} \left(\frac{1}{\Psi^{2/3}} - 1 \right), & \text{если } \Psi < 1 - \mathcal{S}_n, \\ K_{ц} \left[\frac{1}{(1 - \mathcal{S}_n)^{2/3}} - 1 \right], & \text{если } \Psi \geq 1 - \mathcal{S}_n \end{cases}$$

или, с учетом (14),

$$\varepsilon_{пл} = \begin{cases} K_{ц} \left[\left(\frac{1}{1 - k_0} \frac{T_L - T}{T_A - T} \right)^{-2/3} - 1 \right], & \text{если } \Psi < 1 - \mathcal{S}_n, \\ K_{ц} [(1 - \mathcal{S}_n)^{-2/3} - 1], & \text{если } \Psi \geq 1 - \mathcal{S}_n, \end{cases} \quad (17)$$

где $\mathcal{S}_n$ можно придать смысл того количества расплава, при котором циркуляция его между кристаллами прекращается (т. е. $\mathcal{S}_n = 1 - \Psi_n$, см. п. 18).

На рис. 143 приведена зависимость $\varepsilon_{пл}$ от T внутри интервала кристаллизации сплава Al с 0,5% Cu (экспериментальные данные Н. Н. Прохорова); кривая 1 рассчитана по формуле (17) при $T_A = 933$ К, $T_L = 923$ К, $k_0 = 0,1$, $\mathcal{S}_n = 0,063$ и $K_{ц} = 0,09$. Согласованность между эмпирическими и расчетной кривыми достигнута подбором величин $K_{ц}$ и $\mathcal{S}_n$. При этом $K_{ц}$ и $\mathcal{S}_n$ можно определить только по минимальной величине $\varepsilon_{пл}$ у нижней границы ТИХ, т. е. по той величине $\min \varepsilon_{пл}$, от которой зависит максимально допустимый темп деформирования $\dot{\varepsilon}$, и, следовательно, запас δ технологической прочности сплава.

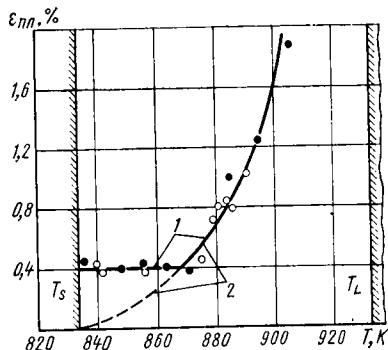


Рис. 143. Зависимость относительной предельной пластической деформации сплава Al с 0,5% Si от температуры внутри интервала кристаллизации (● — скорость охлаждения 10 К/мин; ○ — 160 К/мин); расчет по формуле (17):

1 — при $\delta_n = 0,063$; 2 — при $\delta_n = 0$

мента, затем по формуле (17) рассчитать $\epsilon_{пл}$ как функцию от T в интервале $T_L - T_S$; при этом наиболее важной, согласно формуле (7), является именно величина $\epsilon_{пл}$ у T_S , т. е. $\min \epsilon_{пл}$!

Возникает следующее предложение. В формулу (11) поправку δ_n не вводить, т. е. в формуле (17) считать $\delta_n = 0$, ибо может быть, что модельные представления о пластичности сплавов у нижней границы ТИХ ближе к действительности, чем это следует из измерений $\epsilon_{пл}$ в экспериментах типа приведенных на рис. 139. Другими словами, может быть, что у T_S пластическая деформация близка к нулю (рис. 143, кривая 2).

Далее, известны случаи, когда формула (7) не подтверждается для ряда сплавов [12]. На рис. 144 в качестве примера приведены результаты экспериментов И. И. Новикова. С точки зрения изложенной теории, сплав Al с 2,0% Si и 4,0% Si при полном торможении его свободной линейной усадки должен обладать способностью всегда образовывать горячие трещины, ибо у него $\min (\epsilon_{пл} - \epsilon_y) < 0$, т. е. при T_S величина Δ отрицательная (рис. 144, б). На самом деле, практика литья показывает, что этот сплав обладает гораздо меньшей склонностью к образованию горячих трещин, чем сплав Al с 2,0% Si, для которого $\Delta > 0$ (рис. 144, а). Объяснить приведенные результаты с помощью существующей теории нельзя.

Наконец, еще одно затруднение теории. На рис. 144 отмечены интервалы температуры горячеломкости сплавов (ТИГЛ), в которых преимущественно образуются горячие трещины в отливках из этих сплавов. ¹ В первом сплаве трещины могут образовываться

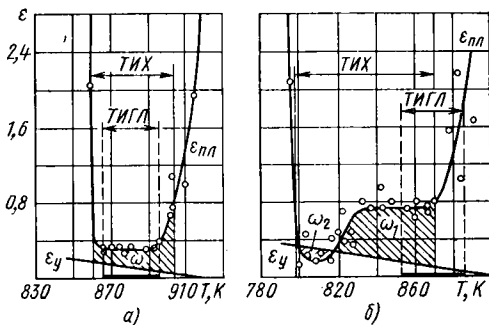


Рис. 144. Определение показателя горячеломкости сплавов по И. И. Новикову:

а — случай $\Delta > 0$; б — случай $\Delta < 0$

Здесь очевидно затруднение теории: для определения $K_{ц}$ и δ_n необходимо знать $\min \epsilon_{пл}$ из экспери-

¹ Методика и техника определения температурного интервала горячеломкости сплавов (ТИГЛ) описаны в книге И. И. Новикова [12, с. 165—175].

почти во всем ТИХ, во втором — только в верхней его части. И то, и другое противоречит теории, согласно которой трещины могут образовываться только в нижней части ТИХ.

Показатель горячеломкости сплавов по И. И. Новикову

Дальнейшее усовершенствование теории предложил И. И. Новиков в 1963 г. Он предложил оценить *условный* запас пластичности сплавов (ЗП) как отношение площади ω к ТИХ (см. рис. 144, а):

$$\text{ЗП} = \frac{\omega}{\text{ТИХ}},$$

или разности площадей $\omega_1 - \omega_2$ к ТИХ (рис. 144, б):

$$\text{ЗП} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\text{ТИХ}},$$

определив ТИХ так, как это указано на графиках ¹ (см. рис. 144).

Читатель уже понял, что ЗП по существу своему является разностью *средних интегральных* значений $\epsilon_{\text{пл}}$ и ϵ_y в температурном интервале хрупкости:

$$\text{ЗП} = \text{med} (\epsilon_{\text{пл}} - \epsilon_y), \quad (18)$$

где

$$\text{med } \epsilon_{\text{пл}} = \frac{1}{\text{ТИХ}} \int_{T_s}^{T_y} \epsilon_{\text{пл}} dT \text{ и } \text{med } \epsilon_y = \frac{1}{\text{ТИХ}} \int_{T_s}^{T_y} \epsilon_y dT.$$

По И. И. Новикову, ЗП лучше согласуется с данными технологических проб на горячеломкость сплавов. Например, для сплава Al с 2% Si (рис. 144, а) ЗП = 18%, а для сплава Al с 2,2% Si и 4,0 Cu (рис. 144, б), обладающего меньшей горячеломкостью, ЗП = 36%.

По И. И. Новикову, ЗП отражает влияние ряда неучтенных ранее факторов на горячеломкость сплавов, определяемую с помощью технологических проб. Наиболее существенные из них следующие два. Прежде всего реально свободная линейная усадка при полном ее затруднении не может вызывать деформацию растяжения отливки $\epsilon_y = \alpha_{\text{св}} (T_y - T)$, так как в процессе непрерывного охлаждения до температуры T часть усадки реализуется в виде пластической деформации, развивающейся в отливке при температурах, больших T .

Кроме того, графики типа приведенных на рис. 139 и 144 дают соотношение между $\epsilon_{\text{пл}}$ и ϵ_y в предположении, что полное затруднение свободной линейной усадки вызывает однородную деформацию ϵ_y растяжения всей отливки. В действительности же деформация может локализоваться в отдельных частях отливки.

¹ Границы ТИХ должны соответствовать $\epsilon_{\text{пл}} = 0,8 \div 1,0\%$ [12].

Поэтому реальная деформация растяжения может быть и больше, чем $\epsilon_y = \alpha_{св} (T_y - T)$.

Таким образом, действие, в основном, второго фактора объясняет причину, по которой сплав типа приведенного на рис. 144, а обладает большой горячеломкостью, несмотря на то, что у него $\Delta > 0$. Действие, в основном, первого фактора объясняет причину, по которой второй сплав (рис. 144, б) обладает меньшей горячеломкостью, хотя у него $\Delta < 0$.

Однако формула (18) условно учитывает влияние только первого фактора, так как $\text{med } \epsilon_y$ всегда меньше $\text{max } \epsilon_y$, а $\text{med } \epsilon_{пл}$ всегда больше $\text{min } \epsilon_{пл}$, поэтому ЗП всегда больше Δ . На рис. 140 в качестве примера приведен график ЗП для сплавов системы Al—Si. Ясно, что Δ и ЗП (рис. 140, б) отличаются лишь масштабом, и $\text{ЗП} > \Delta$.

Влияние второго фактора, т. е. локализацию деформации растяжения отливки при торможении ее свободной линейной усадки, формула (18) не учитывает даже условно.

71. НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШЕЙ РАЗРАБОТКИ ПРОБЛЕМЫ

Теперь нетрудно перечислить результаты, полученные при разработке проблемы создания надежных и технологичных способов предохранения отливок от образования в них горячих трещин.

1°. Предложено большое число технологических проб для оценки горячеломкости сплавов. Классификация и перечень проб приведены в книге И. И. Новикова [12, с. 196—211]. Среди них, по-видимому, есть такие, с помощью которых оценка получается наиболее объективной. Эти пробы необходимо выявить или разработать и стандартизировать. То и другое необходимо потому, что технологические пробы очень важны при создании литейных сплавов и сейчас их значение возросло. Но и то, и другое возможно на основе теории образования горячих трещин в отливках (*теория трещиностойчивости отливок* — это название кажется нам более отвечающим рассматриваемой проблеме).

2°. Теории трещиностойчивости отливок пока нет. Существующая же теория является теорией горячеломкости сплавов, но и она еще далека от завершения.

Достоверны следующие положения:

горячие трещины в фасонных отливках образуются вследствие *торможения их свободной линейной усадки формой или стержнями и локализации возникающей деформации растяжения*;

горячие трещины возникают и развиваются преимущественно в *эффективном интервале кристаллизации сплавов* (в ЭИК — по А. А. Бочвару или в ТИХ — по Н. Н. Прохорову), т. е. там, где возникает и развивается их свободная линейная усадка;¹

¹ Сведения о закономерностях линейной усадки читателю известны из технологических курсов. При необходимости их можно возобновить в памяти по книге И. И. Новикова [12, с. 123—161].

горячие трещины — результат *хрупкого разрушения* затвердевающего сплава по границам растущих кристаллов.

Спорной, в этой связи, является особая роль пластической деформации затвердевающего сплава в оценке его деформационной способности.

Противоречивы поэтому попытки согласования теоретических показателей горячеломкости сплавов (Δ — по Н. Н. Прохорову и ЗП — по И. И. Новикову) с показателями, определенными с помощью технологических проб.

3°. Надежные и технологичные способы повышения трещиностойчивости отливок пока не созданы.

Применяют следующие способы:

увеличение податливости форм и стержней известными читателю приемами;

упрочнение «теплых» мест отливок установкой холодильников, литейных ребер, галтелей в сопряжениях элементов конструкции;

снижение температуры и скорости заливки, а также рациональное конструирование литниковой системы для устранения разогрева тела отливки у места установки питателей;

уменьшение содержания примесей, повышающих, по данным технологических проб, горячеломкость сплава;

изменение конструкции отливок с целью уменьшения или устранения торможения их свободной линейной усадки.

Эти способы, кроме последнего, нельзя считать надежными, так как даже при их использовании брак по горячим трещинам составляет ~50% от всех дефектов отливок из современных сплавов.

Последний способ — исключение элементов конструкции отливки, вызывающих торможение ее линейной усадки, — хотя и является надежным, но его нельзя считать технологичным, так как он требует серьезных ограничений конфигурации отливки.

Таким образом, складывается впечатление, что либо известные способы предохранения отливок от горячих трещин по интуиции, на основе технологической практики, производственного опыта и теории горячеломкости сплавов используют не всегда эффективно, либо для разработки новых способов *требуется развитие теории трещиностойчивости отливок*.

В этой связи направления дальнейшей разработки проблемы очевидны: уточнение теории горячеломкости сплавов на основе самых общих принципов науки о деформациях и текучести вещества — *реологии*; развитие ее в теорию трещиностойчивости отливок на основе обобщения данных технологической практики и производственного опыта; разработка с ее помощью требуемых надежных и технологичных способов предохранения отливок от образования в них горячих трещин.

При разработке проблемы в этих направлениях мы опять пойдем классическим путем. Если же он окажется неэффективным, нам придется воспользоваться методами системотехники.

Глава 15. ОСНОВЫ РЕОЛОГИИ

Реология¹ это раздел физики, в котором изучают деформации материалов. Другими словами, *реология — физика деформации материалов.*

Реология устанавливает взаимосвязь между силами, действующими на материальное тело, и вызванными ими деформациями.

Аксиомой реологии является положение о том, что *любой реальный материал обладает ему присущей комбинацией свойств трех идеальных материалов: упругого, вязкого и пластического.*

Реология решает различные задачи технологии материалов с помощью реологических уравнений связи между напряжениями, деформациями и их производными по времени.

Реологическое уравнение для каждого рода материала находят экспериментально с учетом аксиомы реологии. Оно описывает механическую модель реального тела, обладающего упругостью, вязкостью и пластичностью, выраженными в разной степени.

Именно это и представляется важным для изучения горячеломкости сплавов.

72. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Большинство материалов представляет собою *дисперсные системы*, состоящие из двух и более фаз.

Реология разделяет дисперсные системы на *золи*, которые ведут себя, как жидкости, и *гели*, обладающие свойствами твердых тел. В золях сплошная фаза или *дисперсионная среда* — жидкость, *дисперсная фаза* может быть жидкой в случае *эмульсии* или твердой в случае *суспензии*. В гелях преобладает *твердая фаза*, которая, однако, не всегда однородна в пределах всего объема, а разделена на отдельные зерна жидкой фазой.

Используя такое представление, например, поликристаллический металл в реологии рассматривают как гель, в котором тонкие слои атомной разупорядоченности между кристаллами уподобляют жидкой фазе.²

Материал называют *квазиоднородным*, если размер наибольшей частицы диспергированных фаз меньше, чем размеры самых малых элементов объема тела, деформация которых является предметом исследования.

¹ Основы реологии заложены трудами Н. Ф. Шведова (1890 г.), Е. Бингама и Г. Грина (1919 г.). Для более детального изучения основных положений и методов реологии рекомендуем читателю книгу М. Рейнера [14].

² Читатель, по-видимому, уже оценил возможную плодотворность реологического метода исследования горячеломкости сплавов. Во всяком случае, очевидная аналогия в определении золя и геля (в терминах реологии) и жидко-твердого и твердо-жидкого состояний (в терминах теории горячеломкости) стоит того, чтобы изучить основы реологии и попытаться использовать их для анализа трещиностойкости отливок.

Материал считают *квазиизотропным*, если самый малый элемент объема тела содержит анизотропные частицы диспергированных фаз всевозможных ориентаций.

Таким образом, реология изучает главным образом квазиоднородные и квазиизотропные материалы на *феноменологическом* уровне, т. е. предполагая, что они являются *сплошными средами*.

Макрореология рассматривает поведение материалов под нагрузкой как однородных, лишенных структуры, но обладающих тем или иным сочетанием *реологических свойств*.

Реологические свойства различают как фундаментальные и сложные.

В соответствии с аксиомой реологии, *фундаментальных* свойств три: *упругость, вязкость и пластичность (внутреннее трение)*. Сложные свойства являются комбинацией фундаментальных. Сейчас их известно семь.

Микрореология рассматривает реологическое поведение двух- и многофазных материалов в зависимости от реологических свойств этих фаз.¹

В дальнейшем мы уделим внимание только методам макро-реологии.

73. КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕЛА

Для нахождения реологического уравнения реального материала по экспериментальным данным используют метод построения механических моделей этого материала. Элементами таких моделей являются модели тел, определяющих три фундаментальных свойства: тело Гука — упругость, тело Ньютона — вязкость, тело Сен-Венана — пластичность.

Наиболее ярко реологические различия материалов проявляются при формоизменении и, следовательно, при сдвиге. Поэтому упрощенно реологические уравнения можно записать в виде связи между касательными напряжениями τ , сдвиговыми деформациями γ и их первыми производными по времени $\dot{\tau}$ и $\dot{\gamma}$. Однако в эксперименте с твердыми телами и очень вязкими жидкостями часто используют простое растяжение и сжатие. Поэтому для классических тел реологические уравнения мы дадим и в виде связи между σ и ϵ или $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$.

Упругое тело Гука

Реологическое уравнение упругого твердого тела Гука (*H*-тела) имеет вид

$$\tau = G\gamma, \quad (19)$$

где G — *модуль сдвига или модуль упругости второго рода*.

¹ В весьма упрощенном виде микрореологический подход мы уже видели на примере исследования Н. Н. Прохоровым процесса деформирования твердо-жидкого сплава как циркуляции жидкости между перемещающимися кристаллами (см. с. 259—264). Трудность такого подхода заключается в необходимости модельного представления структуры реальных дисперсных систем.

В случае простого одноосного растяжения формула (19) принимает вид

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (20)$$

где E — модуль Юнга.

$$E = \frac{9KG}{3K + G};$$

K — объемный модуль упругости.

Здесь необходимо подчеркнуть, что при гидростатическом (статическом в термодинамическом смысле) давлении p все материалы, твердые и жидкие, ведут себя с достаточной степенью приближения одинаково — они являются идеально упругими:

$$-p = K\varepsilon_v, \quad (21)$$

где ε_v — объемная деформация сжатия.

Для несжимаемого материала $K = \infty$ и, следовательно,

$$E = 3G. \quad (22)$$

Формулы (19)—(21) выражают известный закон Гука о пропорциональности напряжений и упругих деформаций.

Деформация, исчезающая при разгрузке, т. е. после прекращения действия сил на тело, является *упругой* деформацией.

Свойство деформированных тел восстанавливать свою форму называют *упругостью*.

В качестве механической модели N -тела в реологии принята спиральная пружина, изображенная на рис. 145. Ее удлинение Δl определяется законом Гука:

$$\Delta l = \frac{P_H}{E^*}, \quad (23)$$

где E^* — жесткость пружины, моделирующая модули G или E .

На рис. 145, в приведена схема поведения N -тела при нагрузке и разгрузке.

Вязкая жидкость Ньютона

Реологическое уравнение ньютоновской жидкости (N -тела) имеет вид

$$\tau = \eta \dot{\gamma}, \quad (24)$$

где η — коэффициент динамической (сдвиговой) вязкости.

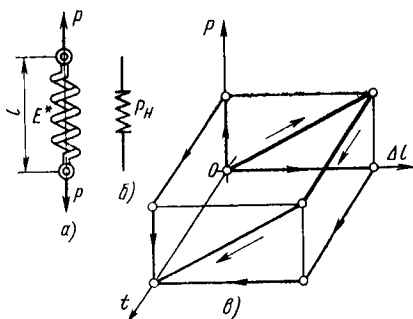


Рис. 145. Тело Гука:

а, б — механическая модель и ее схема; в — схема реологического поведения

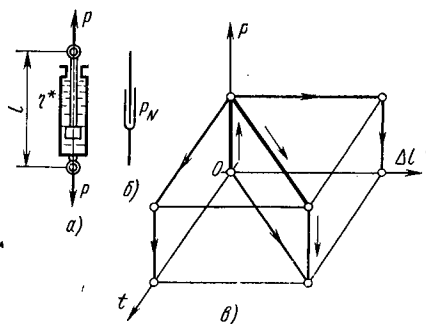


Рис. 146. Тело Ньютона:

а, б — механическая модель и ее схема;
в — схема реологического поведения

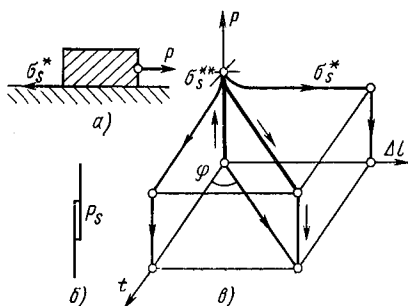


Рис. 147. Тело Сен-Венана:

а, б — механическая модель и ее схема;
в — схема реологического поведения

Для очень вязких материалов справедлива пропорциональность

$$\sigma = \lambda \dot{\epsilon}; \quad (25)$$

λ — вязкий аналог модуля Юнга; его называют *коэффициентом вязкости при растяжении* или вязкостью Трoutона.

Для несжимаемых вязких материалов

$$\lambda = 3\eta. \quad (26)$$

Формулы (24) и (25) выражают известный закон Ньютона о пропорциональности напряжений и скоростей вязкого течения материалов.

Непрерывное и необратимое увеличение деформации тела во времени под действием конечных сил называют *течением*.

Вязкое течение происходит под действием любых сил, как бы малы они не были. Скорость вязкого течения уменьшается при уменьшении сил, а при их исчезновении обращается в ноль.

В качестве механической модели *N*-тела в реологии принят наполненный вязкой жидкостью цилиндр, в который с некоторым зазором вставлен поршень (рис. 146). Скорость перемещения поршня $(\Delta l)'$ в цилиндре определяется законом Ньютона

$$(\Delta l)' = \frac{P_N}{\eta^*}, \quad (27)$$

где η^* моделирует коэффициенты сдвиговой вязкости η или вязкости при растяжении λ .

Пластическое тело Сен-Венана

Реологическое уравнение пластического материала имеет вид

$$\tau = \tau_s; \quad (28)$$

в случае растяжения

$$\sigma = \sigma_s; \quad (29)$$

где τ_s и σ_s — пределы текучести соответственно при сдвиге и растяжении; согласно гипотезе Треска—Сен-Венана,

$$\sigma_s = 2\tau_s.$$

Тело Сен-Венана (S-тело) при напряжении, меньшем предела текучести, является абсолютно твердым, но при $\tau = \tau_s$ (или $\sigma = \sigma_s$) материал *пластически течет* со скоростью, равной скорости деформирования.

В качестве механической модели S-тела в реологии принят элемент сухого трения (рис. 147). Сила трения покоя

$$P_S = \sigma_s^{**}$$

моделирует верхний предел текучести τ_s^0 или σ_s^0 , и сила трения движения

$$P_S = \sigma_s^* \quad (30)$$

моделирует нижний предел текучести τ_s или σ_s . Тангенс угла φ на рис. 147, φ равен заданной скорости деформирования.

74. СЛОЖНЫЕ РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕЛА

Для построения механических моделей сложных тел используют тела H , N и S как элементы этих моделей. Возможно последовательное и параллельное соединение элементов в любом сочетании и порядке.²

При последовательном соединении каждый из элементов передает полную нагрузку, приложенную к телу. Полная скорость деформации является суммой скоростей деформации элементов модели. При параллельном соединении полная нагрузка на тело складывается из нагрузок, передаваемых отдельными элементами, а скорости деформации их одинаковы.

Практически выбор и соединение элементов модели друг с другом выполняют так, чтобы она возможно лучше воспроизводила реологическое поведение данного материала, выявленное на основе анализа результатов специальных экспериментов.

В реологии изучены более десятка типов сложных тел.³ Мы рассмотрим три типа тел, которые потребуются для анализа горячеломкости сплавов и трещиностойчивости отливок. Реологические уравнения будем записывать в виде связи между τ , $\dot{\tau}$, γ и $\dot{\gamma}$.

¹ Некоторые материалы, например мягкие стали, обнаруживают два предела текучести. В дальнейшем будем считать, что материалы обладают одним пределом текучести τ_s (или σ_s).

² Механические модели для описания реологических свойств материалов впервые ввели в реологию Д. Пойнтинг и Д. Томсон в 1902 г.

³ Классическим телам и хорошо изученным сложным телам присвоены имена ученых, которые впервые нашли их реологические уравнения. Такую терминологию ввел Р. Мизес в 1930 г.

Тело Кельвина

Схема механической модели, воспроизводящей тело Кельвина (K -тело), приведена на рис. 148, *а*.

Если условиться последовательное соединение элементов модели обозначать через «—», а параллельные — через «|», то для K -тела можно записать *реологическую формулу*

$$K = H | N.$$

Если, далее, учесть, что при параллельном соединении элементов модели полная нагрузка P_K на K -тело должна складываться из нагрузок, передаваемых отдельными элементами, то

$$P_K = P_H + P_N,$$

и, с учетом формул (23) и (27),

$$P_K = E^* \Delta l + \eta^* (\dot{\Delta l}).$$

Наконец, пользуясь методом реологии, т. е. заменяя силы на напряжения и удлинения на деформации из формул (19) и (24), получим *реологическое уравнение K -тела*¹

$$\tau = G\gamma + \eta \dot{\gamma}; \quad t > 0. \quad (31)$$

Оно представляет собою линейное дифференциальное уравнение относительно γ . Его решением является интеграл

$$\gamma = \exp \left[-\frac{G}{\eta} (t - t_1) \right] \left[\gamma_1 + \frac{1}{\eta} \int_{t_1}^t \tau \exp \left(\frac{G}{\eta} t \right) dt \right], \quad (32)$$

где γ_1 — начальная деформация, созданная в теле в момент времени t_1 .

При постоянном напряжении $\tau = \tau_c \equiv \text{const}$ и $t_1 = 0$

$$\gamma = \frac{\tau_c}{G} + \left(\gamma_1 - \frac{\tau_c}{G} \right) \exp \left(-\frac{G}{\eta} t \right). \quad (33)$$

Рассмотрим два случая поведения K -тела.

¹ Уравнение (31) предложено Кельвином (В. Томсоном) в 1875 г.

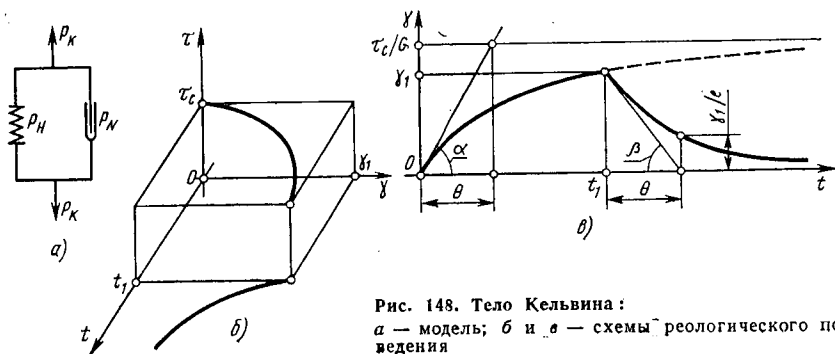


Рис. 148. Тело Кельвина:
а — модель; *б* и *в* — схемы реологического поведения

Первый случай — действие постоянного напряжения τ_c , если начальная деформация $\gamma_1 = 0$, а нагрузка приложена при $t_1 = 0$. Из (33)

$$\gamma = \frac{\tau_c}{G} \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\theta} \right) \right], \quad (34)$$

где

$$\theta = \frac{\eta}{G}. \quad (35)$$

Второй случай — деформирование тела после его разгрузки от постоянного напряжения τ_c в момент времени $t = t_1 > 0$. Из (33) при $\tau_c \equiv 0$

$$\gamma = \gamma_1 \exp \left(-\frac{t - t_1}{\theta} \right), \quad (36)$$

где γ_1 вычисляется по (34) при $t = t_1$.

На рис. 148, б приведены схемы кривых, соответствующих формулам (34) и (36). Проекция этих кривых на координатную плоскость $(\gamma, 0, t)$ дана на рис. 148, в.

Тангенс угла α равен $\tau_c/\theta G$, т. е. первой производной $\dot{\gamma}$ из формулы (34) при $t = 0$; тангенс угла β равен γ_1/θ , т. е. первой производной $\dot{\gamma}$ из формулы (36) при $t = t_1$.

Из формулы (34) следует, что деформация K -тела после его нагружения не развивается мгновенно, а задерживается вследствие *упругого преддействия* и достигнет значения τ_c/G при $t = \infty$. Из формулы (36) следует, что и после разгрузки деформация в связи с *упругим последствием* при возврате исчезнет также при $t = \infty$.

Эффекты запаздывания роста деформации при нагрузке и уменьшения деформации при разгрузке тела называют упругим последствием. Величина θ — время упругого последствия (см. рис. 148, в).

Нетрудно показать, что K -тело — *твердое тело*. Из (33) следует, что при $\tau_c = G\gamma_1$ величина γ остается неизменной во времени и равной τ_c/G , т. е. $\gamma = \tau_c/G$ как и для тела Гука (сравнить с рис. 145, в). Это означает, что *вязкость η K -тела является вязкостью твердого тела.*

Примеры тела Кельвина: суглинки, насыщенные водой, многие металлы и сплавы.

Тело Максвелла

Схема механической модели, воспроизводящей тело Максвелла (M -тело), приведена на рис. 149, а.

Реологическая формула M -тела:

$$M = H - N.$$

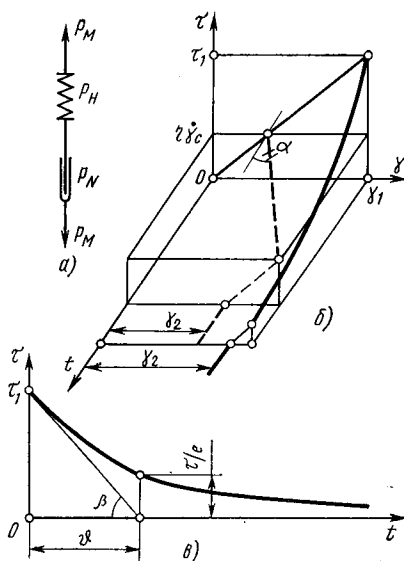


Рис. 149. Тело Максвелла:
а — модель; б и в — схемы реологического поведения

Так как при последовательном соединении элементов модели полная скорость деформации тела равна сумме скоростей деформации каждого элемента, то

$$(\Delta l)\dot{m} = \frac{\dot{P}_H}{E^*} + \frac{P_N}{\eta^*}.$$

Следовательно, реологическое уравнение¹ М-тела

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta}; \quad t > 0. \quad (37)$$

Оно представляет собою линейное дифференциальное уравнение относительно τ . Его решение

$$\tau = \exp \left[-\frac{G}{\eta} (t - t_1) \right] \left[\tau_1 + G \int_{t_1}^t \dot{\gamma} \exp \left(\frac{G}{\eta} t \right) dt \right], \quad (38)$$

где τ_1 — напряжение, возникшее в теле при его нагружении в момент времени t_1 .

При постоянной скорости деформации $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e \equiv \text{const}$ и $t_1 = 0$

$$\tau = \eta \dot{\gamma}_e + (\tau_1 - \eta \dot{\gamma}_e) \exp \left(-\frac{t}{\theta} \right), \quad (39)$$

где

$$\theta = \frac{\eta}{G}. \quad (40)$$

Рассмотрим два случая поведения М-тела.

Первый случай — действие постоянной деформации γ_1 , которая создана в теле мгновенным приложением напряжения τ_1 . Из (39) при $\dot{\gamma}_e = 0$

$$\tau = \tau_1 \exp \left(-\frac{t}{\theta} \right). \quad (41)$$

На рис. 149, б приведена схема кривой (сплошная линия) уменьшения упругого напряжения в теле в соответствии с фор-

¹ Уравнение (37) предложено Д. Максвеллом в 1868 г.

мулой (41). Проекция этой кривой на координатную плоскость (τ , 0, t) дана на рис. 149, в.

Эффект убывания упругих напряжений с течением времени называется релаксацией. Величина ϑ — время релаксации (см. рис. 149, в). Тангенс угла β равен τ_1/ϑ , т. е. первой производной $\dot{\tau}$ при $t_1 = 0$; γ_2 — остаточная деформация.

Второй случай — действие мгновенно ($t_1 = 0$) приложенного напряжения τ_1 и, затем, непрерывного деформирования со скоростью $\dot{\gamma}_c \equiv \text{const}$; при этом τ_1 выбрана равной $\eta\dot{\gamma}_c$. Из (39) следует, что $\tau = \eta\dot{\gamma}_c$ и остается неизменной, как и для тела Ньютона (рис. 149, б — штриховая линия, сравнить с рис. 146, в; на рис. 149, б $\text{tg } \alpha = \dot{\gamma}_c$).

Это означает, что M -тело — вязкая жидкость, обладающая упругостью, характеризуемой величиной модуля G_M (индекс M означает, что речь идет о модуле G упругости M -тела).

Примеры M -тела: бетон, растворы крахмала, некоторые сплавы.

Тело Шведова

Схема механической модели, воспроизводящей тело Шведова (Sch -тело), приведена на рис. 150, а.

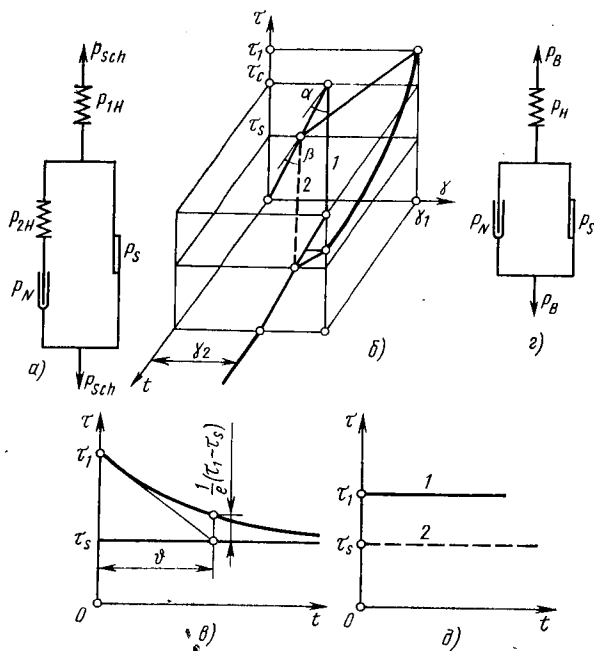


Рис. 150. Тело Шведова:

а, г — модели; б, в и д — схемы реологического поведения

Реологическая формула Sch-тела:

$$Sch = H - [(H - N) | S]$$

или

$$Sch = H - (M | S).$$

Учитывая, что при последовательном соединении элементов модели полная скорость деформации тела равна сумме скоростей деформации каждого элемента, а при параллельном соединении скорости деформации элементов одинаковы, получим

$$(\Delta t) \dot{\epsilon}_{Sch} = \frac{\dot{P}_{1H}}{E_1^*} + \frac{(P_{2H} - P_S)}{E_2^*} + \frac{P_N - P_S}{\eta^*}.$$

Следовательно, реологическое уравнение¹ Sch-тела

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \frac{\dot{\tau}}{G_1}, & \text{если } \tau < \tau_s, \\ \frac{\dot{\tau}}{G_1} + \frac{(\tau - \tau_s)}{G_2} + \frac{\tau - \tau_s}{\eta}, & \text{если } \tau \geq \tau_s; \quad t > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Его решение для $\tau \geq \tau_s$

$$\begin{aligned} \tau = \exp - \left[\frac{G_1 G_2 (t - t_1)}{\eta (G_1 + G_2)} \right] \times \\ \times \left\{ (\tau_1 - \tau_s) + \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \int_{t_1}^t \dot{\gamma} \exp \left[\frac{G_1 G_2 t}{\eta (G_1 + G_2)} \right] dt \right\} + \tau_s, \end{aligned} \quad (43)$$

где τ_1 — напряжение, возникшее в теле при его нагружении в момент времени t_1 .

При $\tau \geq \tau_s$ постоянной скорости деформации $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c$ и $t_1 = 0$

$$\tau = \eta \dot{\gamma}_c + [(\tau_1 - \tau_s) - \eta \dot{\gamma}_c] \exp \left(-\frac{t}{\vartheta_n} \right) + \tau_s, \quad (44)$$

где

$$\vartheta_n = \frac{\eta}{G_1 G_2} (G_1 + G_2). \quad (45)$$

Рассмотрим четыре случая поведения Sch-тела.

Первый случай — действие постоянной деформации γ_1 , которая создана в теле мгновенным приложением напряжения $\tau_1 > \tau_s$. Из (44) при $\dot{\gamma}_c = 0$

$$\tau = (\tau_1 - \tau_s) \exp \left(-\frac{t}{\vartheta_n} \right) + \tau_s. \quad (46)$$

¹ Уравнение (42) предложил Н. Ф. Шведов в 1890 г.

На рис. 150, б приведена схема кривой (жирная линия) уменьшения упругого напряжения в соответствии с формулой (46). Проекция этой кривой на координатную плоскость $(\tau, 0, t)$ дана на рис. 150, в.

Очевидно, что в *Sch*-теле происходит релаксация упругих напряжений, но в отличие от *M*-тела в теле Шведова при $t = \infty$ часть напряжения сохраняется, т. е. появляется *остаточное* напряжение, равное τ_s (см. рис. 150, в).

Второй случай — действие мгновенно ($t_1 = 0$) приложенного напряжения τ_1 и, затем, непрерывного деформирования с постоянной скоростью $\dot{\gamma}_c$; при этом τ_1 выбрана равной $\tau_s + \eta \dot{\gamma}_c$. Из (44) следует, что $\tau = \tau_s + \eta \dot{\gamma}_c$. На рис. 150, б $\text{tg } \beta = \dot{\gamma}_c$.

Это означает, что *тело Шведова является пластическим твердым телом, обладающим вязкостью, называемой пластической вязкостью или вязкостью Шведова* $\eta_{\text{п}}$.

Очевидно, что при $\tau_s = 0$ тело Шведова будет вести себя как тело Максвелла, а при $\tau_s = 0$ и $G_1 = \infty$ *Sch*-тело вырождается в *M*-тело (сравнить с рис. 149, а).

Третий случай — действие постоянного напряжения $\tau_c > \tau_s$, возникшего в теле при его нагружении в момент времени $t_1 = 0$, если $G_2 = \infty$ (см. рис. 150, в). Из (42) для $\tau = \tau_c = \text{const}$ получим

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta_{\text{п}}} (\tau_c - \tau_s); \quad (47)$$

следовательно,

$$\tau_c = \tau_s + \eta_{\text{п}} \dot{\gamma}; \quad t > 0 \quad (48)$$

и $\text{tg } \alpha = \dot{\gamma}$ (см. рис. 150, б и д, прямая *l*) или, если $\gamma = 0$ при $t = 0$,

$$\gamma = \frac{1}{\eta_{\text{п}}} (\tau_c - \tau_s) t. \quad (49)$$

Тело, схема механической модели которого изображена на рис. 150, г, называют *телом Бингама (В-тело)*. Уравнение (47) — *реологическое уравнение*¹ В-тела. Реологическая формула В-тела очевидна:

$$B = H - (N | S).$$

Тело Бингама является вырожденным телом Шведова и, следовательно, представляет частный случай *вязко-пластического* материала.

Четвертый случай — действие постоянного напряжения $\tau_c = \tau_s$, возникшего в теле при его нагружении в момент времени $t_1 = 0$, если $G_2 = \infty$ и $\eta_{\text{п}} = 0$. Из (44) следует, что $\tau = \tau_s$.

¹ Уравнение (47) предложил Е. Бингам в 1919 г., т. е. на 29 лет позже Н. Ф. Шведова.

(рис. 150, б и д, прямая 2). Этот вариант *Sch*-тела называют *телом Прандтля*, которое, как ясно читателю, в отличие от тела Сен-Венана представляет случай *упруго-пластического* материала.

Величина

$$\gamma_s = \frac{\tau_s}{G_1} \quad (50)$$

является *предельной упругой деформацией* *Sch*-тела во всех его вариантах.

Примеры *Sch*-тела: глины, песчано-битумные смеси, тесто, некоторые металлы и сплавы.

75. ДЕФОРМАЦИЯ СЛОЖНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОЙ НАГРУЗКИ

Итак, мы рассмотрели три типа сложных тел (*K*-, *M*- и *Sch*-тела) как комбинации классических.

Тело Кельвина является твердым упругим, но обладает вязкостью η_K , которая обуславливает запаздывание роста деформации под действием нагрузки и уменьшения деформации при разгрузке тела (рис. 148). Это запаздывание характеризуется временем упругого последействия

$$\theta = \frac{\eta_K}{G}$$

K-тело называют *псевдовязким*.

Тело Максвелла является вязкой жидкостью и обладает упругостью G_M . В этой связи созданное в нем упругое напряжение со временем уменьшается (см. рис. 149). Скорость уменьшения напряжения характеризуется временем релаксации

$$\phi = \frac{\eta}{G_M}$$

M-тело называют *упруговязким*.

Тело Шведова является пластическим телом, обладающим упругостью $G_{Sch} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ и вязкостью η_n . За пределом текучести τ_s *Sch*-тело ведет себя как тело Максвелла: созданное в нем напряжение со временем уменьшается (см. рис. 150). Скорость уменьшения напряжения характеризуется временем релаксации

$$\phi_n = \frac{\eta_n}{G_{Sch}}$$

Sch-тело называют *пластическим гелем*.

В случае $G_2 = \infty$ *Sch*-тело вырождается в *вязкопластическое* тело Бингама.

В случае $G_2 = \infty$ и $\eta_n = 0$ *Sch*-тело вырождается в *упруго-пластическое* тело Прандтля.

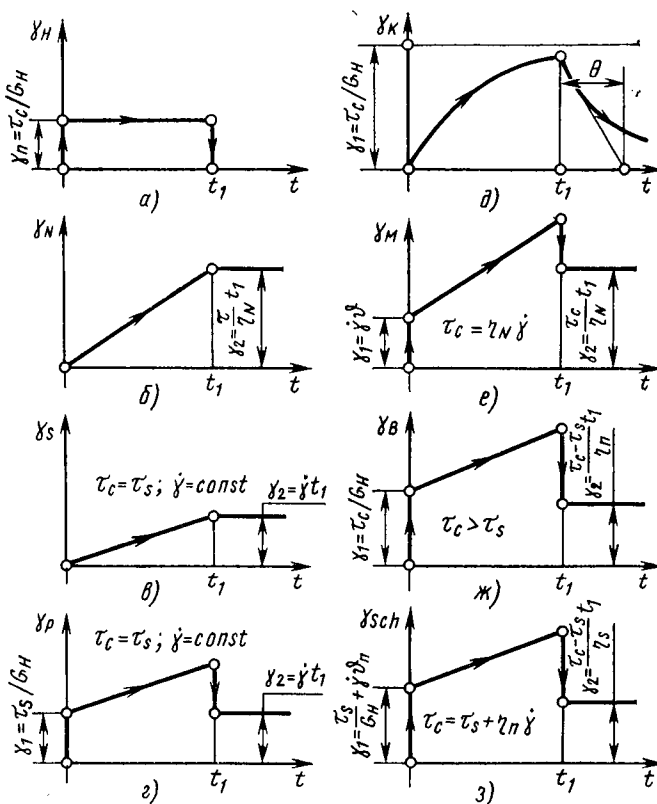


Рис. 151. Развитие деформации в простых и сложных телах под действием постоянной нагрузки:

а — H -тело; б — N -тело; в — S -тело; г — P -тело; д — K -тело; е — M -тело; ж — B -тело; з — Sch -тело

На рис. 151 приведена сводка схем развития деформации всех рассмотренных выше реологических тел под действием постоянной нагрузки, которая вызвала в теле постоянное напряжение τ_c . Обозначение деформации γ дается с индексом тела; например, γ_M — деформация M -тела и т. д. Свойства классических тел H и N также имеют соответствующие индексы. Прочие обозначения сохранены прежними.

Напомним, что деформация, исчезающая при разгрузке тела, является упругой. Непрерывное и необратимое увеличение деформации — течение.

Из схем на рис. 151 ясно, что упругость G_H и, следовательно, упругие деформации γ_1 характерны для всех тел, кроме N и Sch (рис. 151, б и в). К течению способны все тела; кроме H и K (рис. 151, а и д).

Установившееся вязкое течение происходит при любом постоянном напряжении $\tau_c > 0$; скорость течения $\dot{\gamma}$ однозначно определяется величинами τ_c и η_N (рис. 151, б).

Установившееся пластическое течение развивается только при $\tau = \tau_s$; скорость течения $\dot{\gamma}$ может быть любой, большей нуля (рис. 151, в и г).

Вязкопластическое течение возможно у тел B и Sch (рис. 151, ж и з). При этом установившееся течение B -тела происходит при любом $\tau_c > \tau_s$; скорость $\dot{\gamma}$ определяется величинами τ_c и η_n . У Sch -тела установившееся течение развивается только, и только, при постоянной скорости деформации $\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta_n} (\tau_c - \tau_s)$.

Наконец, упруговязкое течение (установившаяся ползучесть) развивается только у M -тела при постоянной скорости деформации $\dot{\gamma} = \tau_c / \eta_N$ (рис. 151, е).

Из схем на рис. 151 ясно, что в результате развития в соответствующих телах вязкого, вязкоупругого, пластического или вязко-пластического течения после разгрузки в них образуется остаточная деформация (на рис. 151 — величина γ_2 при $t = t_1$).

У читателя может возникнуть естественный вопрос о том, как по экспериментальным диаграммам зависимости γ от t различать то или иное тело, если, например, диаграммы для тел P , M , B и Sch идентичны.

Реология знает только один ответ на такой вопрос: по виду диаграммы постулируют механическую модель исследуемого тела, для нее составляют реологическое уравнение, с помощью которого на основе диаграммы вычисляют включенные в модель характеристики классических тел (G , η , τ_s) и по ним судят о типе изучаемого материала.

Именно так в следующей главе мы будем искать реологическую модель сплавов в интервале кристаллизации, с тем чтобы на ее основе исследовать их горячеломкость. В этой связи предлагаем читателю пять упражнений и три задачи.

76. УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

Упражнение 1. Графически изобразить механические модели следующих тел: $L = N - K$, $J = N \parallel M$, $Bu = M - K$ и $X = H - K$.

Примечание. J — тело Джеффриса (1929 г.), Bu — тело Бюргерса (1935 г.), L — тело Лесерсича (1942 г.), X — гипотетическое тело, которое можно представить как вырожденное Bu -тело, если в M -теле как его элементе $\eta = \infty$.

Упражнение 2. Графически изобразить механическую модель тела Шоффина и Скотт-Блера (1937 г.): $SSB = Sch - K$.

Упражнение 3. Составить реологические уравнения J - и L -тел.

Упражнение 4. Составить реологические уравнения Bu - и X -тел.

Упражнение 5. Составить реологические уравнения тела $Y = B - K$. Показать, что гипотетическое Y -тело является вырожденным SSB -телом, если в элементе M тела Sch величина $G = \infty$.

Задача 1. Исследовать реологическое поведение X -тела под действием постоянного напряжения τ_c .

Задача 2. Исследовать реологическое поведение Y -тела под действием постоянного напряжения $\tau_c \geq \tau_s$.

Задача 3. Исследовать реологическое поведение SSB -тела под действием постоянного напряжения τ_c и постоянной скорости деформирования $\dot{\gamma}$, если $\tau_c = \tau_s + \eta_n \dot{\gamma}$.

Г л а в а 16. ГОРЯЧЕЛОМКОСТЬ СПЛАВОВ

Согласно существующей теории горячеломкости сплавов, деформационная способность сплавов в эффективном интервале кристаллизации (ЭИК) определяется в основном (или только) их предельной пластичностью при разрыве образцов в условиях изотермического растяжения с постоянной скоростью.

С позиции реологии, сплавы в ЭИК возможно отнести к гелям: либо к упругопластическим, в смысле Шведова, либо к упругим вязкопластическим, в смысле Бингама. Следовательно, деформационная способность сплава в ЭИК должна определяться суммой предельных упругой и пластической деформаций при разрыве образцов в условиях изотермического растяжения с постоянной скоростью.

Очевидно, что оба положения совпадут, если упругая деформация сплавов в ЭИК пренебрежимо мала. Именно из этого предположения исходит существующая теория горячеломкости [12, с. 178]. Однако на прямые и достоверные измерения упругой и пластической частей полной деформации сплавов в ЭИК указаний нет.

В этой связи ценные результаты дает реологический эксперимент, так как на его основе с помощью подходящей механической модели и соответствующего ей реологического уравнения удастся рассчитать все части полной предельной деформации, т. е. деформационную способность сплавов в интервале их кристаллизации.

77. РЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Выше мы уже отмечали, что наиболее ярко реологические различия материалов проявляются при формоизменении и, следовательно, при сдвиге. Наиболее простым является метод П. А. Ребиндера, позволяющий исследовать реологическое поведение консистентного материала в условиях однородного сдвига при постоянной величине касательного напряжения.

Метод П. А. Ребиндера

Схема метода П. А. Ребиндера изображена на рис. 152. Деформацию чистого однородного сдвига создают вытягиванием тонкой рифленой пластины 3 из исследуемого материала 2, помещенного в сосуд 1 с рифлеными стенками. Перемещение s пластины при ее

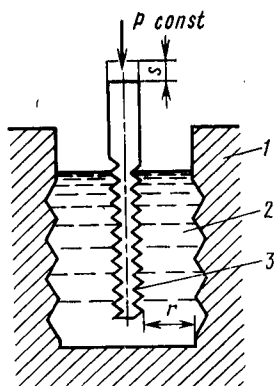
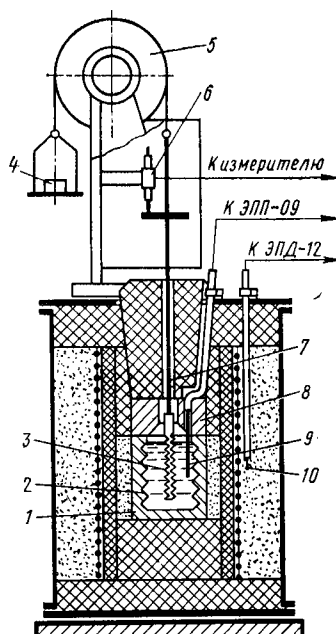


Рис. 152. Схема метода П. А. Ребиндера

Рис. 153. Схема установки Л. П. Каширцева для исследования реологических свойств затвердевающих алюминиевых сплавов: 1 — тигель; 2 — сплав; 3 — пластина; 4 — сменный груз; 5 — блок; 6 — индукционный датчик перемещения пластины; 7 — тяга; 8 — крышка тигля; 9 и 10 — термометры



вытягивании с постоянной силой P регистрируют по времени. В результате получают кривую течения исследуемого тела.

Напряжение сдвига для метода П. А. Ребиндера рассчитывают как

$$\tau = \frac{P}{F}.$$

Деформация сдвига

$$\gamma = \frac{s}{r},$$

где F — суммарная площадь рифленой поверхности пластины и сосуда; r — расстояние между поверхностью пластины и стенкой сосуда (рис. 152).

Техническая реализация метода П. А. Ребиндера для реологического исследования сплавов в интервале кристаллизации сопряжена с рядом трудностей. Главные из них следующие: измерение перемещений пластины при высокой температуре, необходимость длительно поддерживать эту температуру постоянной и равной заданной внутри интервала кристаллизации исследуемого сплава и предохранение расплава от окисления и химического взаимодействия с материалом пластины и сосуда.

Впервые все эти трудности для алюминиевых сплавов преодолел Л. П. Каширцев. Он создал специальную установку, схема

которой приведена на рис. 153. В прямоугольный тигель 1 помещают исследуемый сплав 2 и рифленую пластину 3. Тигель закрыт крышкой 8 и размещен в печи-термостате с большой тепловой инерцией. Пластина, тигель и его крышка сделаны из графита высокой чистоты и плотности, благодаря чему над расплавом создается восстановительная атмосфера и исключается его взаимодействие с пластиной и стенками тигля.

Во время реологических исследований пластина, к которой прикреплена тяга 7, перемещается в расплаве под действием груза 4. Перемещение измеряет индукционный датчик 6 типа АРП. Результаты измерений с помощью компенсационной схемы непрерывно записываются на приборе Н 373. Точность записи ± 2 мкм.

Высокая степень термостатирования достигнута большой тепловой инерцией печи, точным подбором мощности, подводимой к ней, и использованием регулирующего потенциометра ЭПД повышенной чувствительности при расположении термопары 10 непосредственно у нагревателя. Температуру расплава измеряет термопара 9 с помощью прибора ЭПП-09. Точность термостатирования на любой заданной температуре в интервале кристаллизации алюминиевых сплавов $\pm 0,1$ К.

Для исключения влияния электрических и магнитных полей на точность измерения перемещения пластины и температуры расплава обмотка нагревателя печи выполнена бифилярной. Кроме того, корпус индукционного датчика и часть тяги за пределами печи защищены металлическим экраном. Термопары 9 и 10 размещены в заземленных экранах. Спай термопары погружения 9 закрыт керамикой.

Результаты

На установке, показанной на рис. 153, Л. П. Каширцев получил большое число кривых течения ряда бинарных сплавов алюминия с кремнием при различных температурах в интервале их кристаллизации и при разной массе грузов. Кривые течения имеют вид, аналогичный представленным на рис. 154. Очевидно, что сплавы в интервале кристаллизации обладают пределом текучести, при превышении которого под действием постоянной силы на пластину развивается пластическое течение, приводящее к необратимой деформации сплавов после разгрузки пластины (см. рис. 154, а и б).

При отработке методики измерений перемещения пластины Л. П. Каширцев обнаружил следующее явление. Во время непрерывного охлаждения расплава, начиная с температуры ликвидуса исследованных сплавов, предварительно уравновешенная в перегретом расплаве пластина начинает погружаться. При нагревании происходит всплывание пластины. Это явление вызвано тем, что

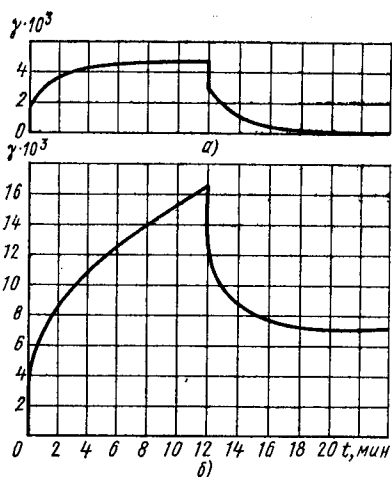


Рис. 154. Кривые течения кристаллизующегося алюминия А7 под действием постоянной нагрузки:

а — до предела текучести; б — после предела текучести

с появлением твердой фазы в кристаллизующемся расплаве возникает консистентная структура, обладающая предельным напряжением сдвига.

Другими словами, при температурах, даже весьма близких к температуре ликвидуса, сплавы в интервале их кристаллизации нельзя рассматривать как жидкость Ньютона. Сплавы в интервале кристаллизации — реологическое тело, обладающее пределом текучести, величина которого лишь возрастает по мере приближения к температуре солидуса. И разделение интервала кристаллизации на две части жидко-твердого и твердо-жидкого состояния сплава объективно невозможно.

78. РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СПЛАВА

Теперь согласно методу реологии мы должны по кривым течения (см. рис. 154) подобрать вариант механической модели, максимально близко воспроизводящей поведение изучаемого материала под действием постоянной нагрузки. Затем по этой модели потребуются найти реологическое уравнение и с его помощью определить реологические свойства сплавов в интервале их кристаллизации.

Механическая модель сплава. Реологическая формула

Сравнивая кривые течения под нагрузкой и после разгрузки (см. рис. 154), читатель неизбежно придет к выводу, что исследуемый материал, назовем его Т-тело, должен обладать упругостью Н-тела. Поэтому механическая модель должна содержать в качестве элемента Н-тело:

$$T = H - X_1, \quad (51)$$

где X_1 — другие элементы, которые необходимо выяснить из дальнейшего анализа.

Основанием для последовательного соединения H и X_1 является мгновенная обратимая часть полной деформации на кривых течения.

Из изложенного в предыдущем параграфе ясно, что Т-тело обладает пределом текучести, при превышении которого развивается пластическое течение, приводящее к остаточной деформации. Об этом свидетельствуют необратимая часть деформации

после разгрузки тела, зафиксированная на рис. 154, б, и отсутствие такой деформации на рис. 154, а. Следовательно, среди элементов X_1 в формуле (51) должны быть элементы S и N , соединенные параллельно:

$$\left. \begin{aligned} T &= H - (S|N) - X_2 \\ \text{или} \quad T &= B - X_2, \end{aligned} \right\} (52)$$

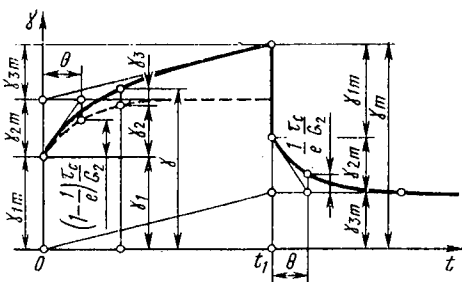


Рис. 155. Схема кривой течения сплава в интервале кристаллизации

так как $B = H - (S|N)$ (см. рис. 150, з); X_2 — элементы, которые будут выяснены в ходе дальнейшего анализа.

Основанием для параллельного соединения элементов S и N является то, что пластическое течение T -тела происходит под действием любой постоянной нагрузки, которая создает постоянное напряжение $\tau_c \geq \tau_s$. А такой особенностью обладает только B -тело (см. рис. 151, ж).

На рис. 155 приведена схема кривой течения T -тела, воспроизводящая все особенности экспериментальной кривой для случая $\tau_c > \tau_s$ (см. рис. 154, б), т. е. для наиболее общего случая течения затвердевающего сплава под действием постоянного напряжения. На схеме выделены максимальные мгновенная обратимая γ_{1m} и необратимая (пластическая) γ_{3m} деформации как части общей деформации γ_m .

Еще одну часть общей деформации — деформацию X_2 -тела, равную γ_{2m} , следует отнести также к *обратимой, но развивающейся с запаздыванием*. Это заключение следует из анализа кривой течения тела под действием нагрузки, если из γ вычесть $\gamma_1 + \gamma_2$. Наиболее четко это видно из кривой течения после разгрузки тела.

Из схемы на рис. 151 ясно, что таким свойством обладает K -тело, состоящее из параллельно соединенных H и N .

Таким образом, сплав в интервале кристаллизации, т. е. исследуемое T -тело, должно иметь реологическую формулу

$$\left. \begin{aligned} T &= B - K \\ \text{или} \quad T &= H_1 - (S|N_1) - (H_2|N_2); \end{aligned} \right\} (53)$$

смысл H_1 , H_2 , N_1 и N_2 читателю, выполнившему *упражнение 5* в предыдущей главе, ясен из схемы механической модели T -тела (рис. 156), так как гипотетическое тело Y и установленное нами T -тело тождественны.

¹ Эта схема предложена для сплавов в интервале кристаллизации Г. Ф. Баландиным, Л. П. Каширцевым, В. И. Семеновым и Ю. А. Степановым в 1967 г.

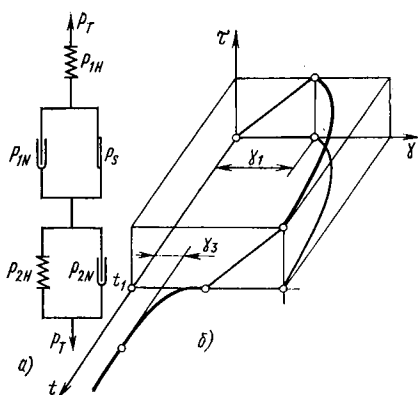


Рис. 156. Сплав в интервале кристаллизации:

а — механическая модель; б — реологическое поведение

Для читателя, выполнившего упражнения 4 и 5 из предыдущей главы, составление реологического уравнения T -тела по его реологическим формулам (53) и (54) не представит особых трудностей.

Очевидно, что реологическое поведение T -тела полностью описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \gamma_1 G_1; \\ \tau &= \gamma_2 G_2 + \eta_2 \dot{\gamma}_2; \\ \dot{\gamma}_3 &= \begin{cases} 0 \text{ и } \gamma_3 = 0, & \text{если } \tau \leq \tau_s, \\ \frac{1}{\eta_1} (\tau - \tau_s), & \text{если } \tau > \tau_s; \end{cases} \\ \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3; \quad t > 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Для изотермических условий деформирования сплава в интервале кристаллизации, т. е. для постоянных величин G_1 , G_2 , η_1 , η_2 и τ_s при заданной температуре T внутри интервала $T_L - T_S$, из системы (55) следует реологическое уравнение T -тела:

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \frac{\dot{\tau}}{G_1} + \frac{1}{\eta_2} (G_1 + G_2) \frac{\tau}{G_1} - \frac{G_2}{\eta_2} \gamma, & \text{если } \tau \leq \tau_s, \\ \frac{\eta_2}{G_2} \left[\frac{\ddot{\tau}}{G_1} + \left(\frac{G_1}{\eta_1} + \frac{G_1 + G_2}{\eta_2} \right) \frac{\dot{\tau}}{G_1} + \frac{G_2}{\eta_2} \frac{\tau - \tau_s}{\eta_1} - \ddot{\gamma} \right], & \text{если } \tau > \tau_s; \quad t > 0 \end{cases} \quad (56)$$

В случае действия постоянной нагрузки, создающей в теле постоянное напряжение $\tau = \tau_c \equiv \text{const}$,

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \frac{G_2}{\eta_2} \left[\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \tau_c - \gamma \right], & \text{если } \tau \leq \tau_s, \\ \frac{\tau_c - \tau_s}{\eta_1} - \frac{\eta_2}{G_2} \ddot{\gamma}, & \text{если } \tau > \tau_s; \quad t > 0. \end{cases} \quad (57)$$

При $\tau_c < \tau_s$ реологическая формула (53) примет вид

$$\left. \begin{aligned} T &= H - K \\ \text{или} \quad T &= H_1 - (H_2 | N_2). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Этот вариант T -тела читателю известен из упражнения 1 в предыдущей главе: гипотетическое X -тело тождественно T -телу при $\tau_c < \tau_s$.

Реологическое уравнение Л. П. Каширцева

Решение уравнения (57) для начальных условий, когда $\gamma = \frac{\tau_c}{G_1}$ в момент времени $t = 0$, выражается двумя формулами: ¹ при $\tau_c \leq \tau_s$

$$\gamma = \frac{\tau_c}{G_1} + \frac{\tau_c}{G_2} \left[1 - \exp \left(-\frac{G_2}{\eta_2} t \right) \right] \quad (58)$$

и при $\tau > \tau_s$

$$\gamma = \frac{\tau_c}{G_1} + \frac{\tau_c}{G_2} \left[1 - \exp \left(-\frac{G_2}{\eta_2} t \right) \right] + \frac{\tau_c - \tau_s}{\eta_1} t, \quad (59)$$

которые, как это ясно, качественно адекватны экспериментальным кривым (см. рис. 154) на участке $0 \leq t \leq t_1$ течения под нагрузкой.

Для течения T -тела после разгрузки в момент времени t_1 решение уравнения (57) выражается следующими формулами: при $\tau_c \leq \tau_s$

$$\gamma = \frac{\tau_c}{G_2} \left[1 - \exp \left(-\frac{G_2}{\eta_2} t_1 \right) \right] \exp \left[-\frac{G_2}{\eta_2} (t - t_1) \right] \quad (60)$$

и при $\tau > \tau_s$

$$\gamma = \frac{\tau_c}{G_2} \left[1 - \exp \left(-\frac{G_2}{\eta_2} t_1 \right) \right] \exp \left[-\frac{G_2}{\eta_2} (t - t_1) \right] + \frac{\tau_c - \tau_s}{\eta_1} t_1. \quad (61)$$

Их качественная адекватность экспериментальным кривым (см. рис. 154) на участке $t > t_1$ также не вызывает сомнений. Однако требуются доказательства *количественной* адекватности формул (58)–(61) эксперименту. Без таких доказательств их нельзя использовать для интересующего нас дальнейшего анализа деформации сплава.

Поступим так. Из формулы (59) следует, что при достаточно большом $t = t_1$, близком к 6θ , экспонента близка к нулю (см. прилож. IX.1). Следовательно, деформация в этот момент времени будет

$$\gamma_m = \frac{\tau_c}{G_1} + \frac{\tau_c}{G_2} + \frac{\tau_c - \tau_s}{\eta_1} t_1$$

или, согласно рис. 155,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1m} &= \frac{\tau_c}{G_1}; \\ \gamma_{2m} &= \frac{\tau_c}{G_2}; \\ \gamma_{3m} &= \frac{1}{\eta_1} (\tau_c - \tau_s) t_1. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

¹ Формула (59) для описания реологического поведения сплавов в интервале кристаллизации впервые найдена Г. Ф. Баландиным и Л. П. Каширцевым в 1967 г.

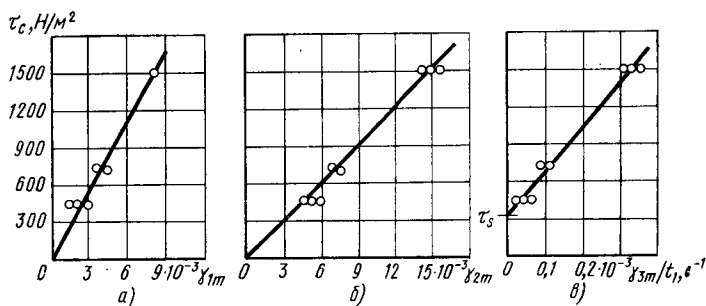


Рис. 157. К доказательству адекватности механической модели сплава его реологическому поведению:

а — упругость; б — упругое последействие; в — пластическая вязкость

Если в эксперименте будет установлено, что зависимости γ_{1m} , γ_{2m} и γ_{3m}/t_1 от τ_c линейны, то можно утверждать количественную адекватность модели T -тела действительному реологическому поведению сплавов в интервале их кристаллизации.

На рис. 157 приведены данные о связи τ_c с γ_{1m} , γ_{2m} и γ_{3m}/t_1 , полученные по экспериментальным кривым течения сплава Al с 2,52% Si при $T = 894,7$ К. С хорошим приближением эти данные соответствуют формулам из (62).

Таким образом, можно считать установленным, что *сплавы в интервале их кристаллизации — линейно-деформируемое упруго-вязкопластическое тело, обладающее псевдовязкостью η_2 Кельвина и пластической вязкостью η_1 Шведова.*

Соотношения из (62) являются условиями линейности реологической модели $T = B - K$.

Реологические характеристики

Для сплавов в интервале кристаллизации, как для T -тела, реологическими характеристиками являются G_1 , G_2 , η_1 , η_2 и τ_s . Их определение возможно с помощью формул из (62), если по экспериментальным кривым течения сплавов для любой заданной температуры T внутри интервала кристаллизации $T_L - T_s$ будут установлены зависимости типа приведенных на рис. 157.

Очевидно, что тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс на первом графике равен модулю упругости при сдвиге G_1 , на втором — модулю G_2 , на третьем — пластической вязкости η_1 ; напряжение при $\gamma_{3m}/t_1 = 0$ на третьем графике определяет предел текучести τ_s .

Время упругого последействия θ при течении под действием постоянной нагрузки и после разгрузки можно найти, как это показано на рис. 156, по известной величине G_2 . Зная θ , нетрудно вычислить $\eta_2 = \theta G_2$.

На рис. 158 в качестве примера представлены графики зависимости реологических характеристик сплава Al с 0,6 Si от температуры внутри интервала кристаллизации¹.

Первое, на что необходимо обратить внимание, это монотонное возрастание всех характеристик по мере приближения к температуре солидуса сплава. Следовательно, как мы уже отмечали выше, по реологическим характеристикам не удастся объективно определить границу между жидко-твердым (золе) и твердо-жидким (гелем) состоянием сплава внутри интервала кристаллизации. По-видимому, верхняя граница эффективного интервала кристаллизации фиксирует начало заметного развития *свободной линейной усадки отливки*, а не сплава вне литейной формы.

И второе. Попытаемся оценить соотношение между величинами мгновенной обратимой γ_1 и необратимой частей деформации γ_3 сплава Al с 0,6% Si при температуре, близкой к T_S , например при $T = 904$ К. Оценим это соотношение для течения под нагрузкой, создающей напряжение $\tau_c = 1,0$ МН/м².

Из (59) при $\eta_3 = \infty$ получим $\gamma \approx 0,007 + 0,001$, т. е. $\gamma_1 = 0,007$ и $\gamma_3 = 0,001$.

Следовательно, обратимая деформация чуть меньше чем на порядок превышает пластическую (в нашем примере в 7 раз). Естественно, возникает уже известный нам вопрос об обоснованности оценки деформационной способности сплавов в эффективном интервале кристаллизации величиной только пластической (необратимой) части деформации сплавов, как это принято в существующей теории горячеломкости (см. с. 258—261, а также с. 265).

¹ Реологические характеристики ряда сплавов системы Al—Si по данным Л. П. Каширцева приведены в прилож. VII.

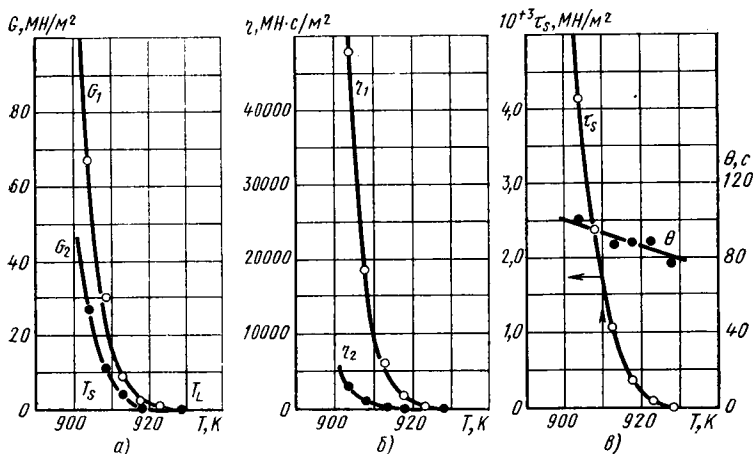


Рис. 158. Реологические характеристики сплава Al с 0,6% Si в интервале кристаллизации:

а — модули G ; б — вязкости η ; в — предел текучести τ_s

Напомним читателю, что при экспериментальном определении деформационной способности сплавов в их двухфазном состоянии традиционно обращается внимание только на величину пластической деформации образца в момент его разрыва. Как правило, обе части разорванного образца складывают вместе и определяют его относительное остаточное удлинение.

Согласно реологическому поведению сплавов в интервале кристаллизации, пластическая остаточная деформация является лишь частью общей деформации, которую и следует рассматривать как величину, характеризующую деформационную способность сплава.

С помощью реологического уравнения (56), зная реологические характеристики сплавов системы Al—Si, мы в состоянии рассчитать общую деформацию и составляющие ее части для условий изотермического растяжения образца с заданной постоянной скоростью деформирования $\dot{\epsilon}_c$.

Прежде всего напомним уравнение (56) для случая одноосного изотермического растяжения с постоянной скоростью $\dot{\epsilon}_c \equiv \text{const}$. Очевидно, что оно распадается на два со своими начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma} + \frac{1}{\lambda_2} (E_1 + E_2) \sigma - \dot{\epsilon}_c E_1 - \frac{1}{\lambda_2} E_1 E_2 \dot{\epsilon}_c t &= 0; \quad t > 0; \\ \sigma(0) &= 0 \\ \text{и} \\ \ddot{\sigma} + \left[\frac{E_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} (E_1 + E_2) \right] \dot{\sigma} + \\ + \frac{E_1 E_2}{\lambda_1 \lambda_2} (\sigma - \sigma_s) - \frac{1}{\lambda_2} E_1 E_2 \dot{\epsilon}_c &= 0; \quad t > 0; \\ \sigma(t_0) &= \sigma_s, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где, согласно (22), (26) и (29), $E_1 = 3G_1$, $E_2 = 3G_2$, $\lambda_1 = 3\eta_1$, $\lambda_2 = 3\eta_2$ и $\sigma_s = 2\tau_s$; t_0 — момент времени достижения в образце напряжения, равного пределу текучести сплава σ_s .

Решение этой системы имеет вид (доказать!)

$$\sigma = \begin{cases} \left[1 - \exp \left(-\frac{E_1 + E_2}{\lambda_2} t \right) \right] \frac{\lambda_2^2 E_1^2 \dot{\epsilon}_c}{(E_1 + E_2)^2} + \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \dot{\epsilon}_c t, \\ \text{если } \sigma \leq \sigma_s, \\ \sigma_s - A \{ 1 - \exp [-a(t - t_0)] \} - \\ - B \{ 1 - \exp [-b(t - t_0)] \}, \quad \text{если } \sigma < \sigma_s, \end{cases} \quad (64)$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= \dot{\epsilon}_c \lambda_1 \frac{bc}{a-b}; & B &= c - \dot{\epsilon}_c \lambda_1 \frac{a}{a-b}; \\
 c &= \frac{1}{a-b} \left[\dot{\epsilon}_c E_1 + \frac{1}{\lambda_2} E_1 E_2 \dot{\epsilon}_c t_0 - \frac{1}{\lambda_2} (E_1 + E_2) \sigma_s \right]; \\
 a, b &= \frac{1}{2} \left[\frac{E_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} (E_1 + E_2) \right] \mp \\
 &= \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{E_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} (E_1 + E_2) \right]^2 - \frac{E_1 E_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right\}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Вычисление общей деформации ϵ и составляющих ее частей — упругой ϵ_1 , упругого последствия ϵ_2 , пластической ϵ_3 возможно с помощью системы (55). Напишем ее для случая одноосного изотермического растяжения с постоянной скоростью $\dot{\epsilon}_c$:

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon &= \dot{\epsilon}_c t; & t &\geq 0, \\
 \epsilon_1 &= \frac{\sigma}{E_1}; & t &\geq 0, \\
 \epsilon_2 &= \dot{\epsilon}_c t - \left(\frac{\sigma}{E_1} + \epsilon_3 \right); & t &\geq 0; \\
 \dot{\epsilon}_3 &= \begin{cases} 0 \text{ и } \epsilon_3 = 0, & \text{если } 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{1}{\lambda_1} (\sigma - \sigma_s), & \text{если } t > t_0; \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

величина t_0 определяется по (64) при $\sigma = \sigma_s$.

Подставляя σ из (64) в последнее дифференциальное уравнение, получим (проверить!)

$$\epsilon_3 = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq t_0, \\ M \{1 - \exp[-a(t - t_0)]\} + N \{1 - \exp[-b(t - t_0)]\} + \\ + \dot{\epsilon}_c (t - t_0), & \text{если } t \geq t_0, \end{cases} \quad (66)$$

где $M = \frac{A}{a\lambda_1}$; $N = \frac{B}{b\lambda_1}$.

Условимся: деформационная способность сплава при данной температуре в интервале кристаллизации — полная (общая) предельная деформация ϵ_0 образца в момент его разрыва, т. е. в момент t_1 достижения в образце напряжения σ , равного σ_0 — пределу прочности сплава.¹

¹ Предел прочности σ_0 сплава в интервале кристаллизации следует рассматривать как его шестую реологическую характеристику. Для сплава системы Al—Si величина σ_0 приведена в прилож. VII. Для других сплавов необходимые сведения можно найти в книге И. И. Новикова [12, с. 268—272].

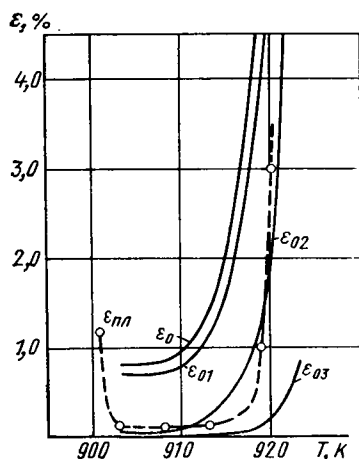


Рис. 159. Предельная деформационная способность сплава Al с 0,6Si и ее составляющие. Расчет по (65) — (66)

На рис. 159 приведены результаты расчета Л. П. Каширцева по формулам (65) и (66) для изотермического одноосного растяжения образцов сплава Al с 0,6% Si в интервале его кристаллизации при скорости $\dot{\epsilon}_c = 0,00015 \text{ с}^{-1}$: ϵ_{01} — предельная упругая деформация, ϵ_{02} — предельная деформация упругого последствия, ϵ_{03} — предельная пластическая деформация, $\epsilon_0 = (\epsilon_{01} + \epsilon_{02} + \epsilon_{03})$ — деформационная способность в момент времени t_1 , определенный по формуле (64) при $\sigma = \sigma_0 > \sigma_c$; величины σ_0 взяты из прилож. VII. Программа для расчета на ЭЦВМ «Наири-К» приведена в прилож. XII.

Сопоставление частей, составляющих предельную деформацию, показывает, что мы не намного ошиблись в приближенной оценке соотношения между обратимой и необратимой деформациями сплава в интервале кристаллизации (см. с. 291). Действительно, пластическая деформация при растяжении более чем на порядок меньше обратимой, т. е.

$$\epsilon_{03} \ll (\epsilon_{01} + \epsilon_{02}). \quad (67)$$

Следовательно, деформационную способность сплава в интервале кристаллизации допустимо определять как предельную обратимую, т. е.

$$\epsilon_0 \approx \epsilon_{01} + \epsilon_{02}.$$

Анализ кривых на рис. 159 показывает, что при выбранной скорости деформирования ($\dot{\epsilon}_c = 0,00015 \text{ с}^{-1}$) деформация упругого последствия ϵ_{02} составляет всего 20—25% от ϵ_0 , т. е.

$$\epsilon_{02} \leq 0,25\epsilon_0. \quad (68)$$

Поэтому деформационную способность сплава в интервале кристаллизации в первом приближении можно оценить по величине только предельной упругой деформации ¹:

$$\epsilon_0 \approx \epsilon_{01}. \quad (69)$$

Заметим, что соотношения (67) и (68) сохраняются для всех сплавов, исследованных Л. П. Каширцевым.

¹ Формула (69) предложена Л. П. Каширцевым в 1976 г.

На рис. 159 штриховой линией нанесена кривая деформационной способности того же сплава Al с 0,6% Si внутри интервала кристаллизации, замеренная М. П. Бачаев и Н. Н. Прохоровым как остаточная деформация после разрыва образцов при деформировании со скоростью $\dot{\epsilon}_c = 0,000145 \text{ с}^{-1}$.

Из сопоставления расчетных и экспериментальных кривых ясно, что в эксперименте фиксировалась не только пластическая, но и деформация упругого последействия. Такой вывод является правдоподобным, если учесть, что после разрыва образцы остались в печи при температуре испытания в течение времени, меньшего времени упругого последействия этого сплава в интервале кристаллизации (80—100 с; см. рис. 158).

Итак, *деформационная способность сплавов в интервале кристаллизации в основном определяется величиной их предельной упругой деформации.*

Это заключение полностью противоречит основному положению существующей теории горячеломкости сплавов. Но оно четко согласуется с другими не менее важными ее положениями. Во-первых, с экспериментально установленным фактором *хрупкого* разрушения сплавов внутри интервала кристаллизации, что обусловлено их весьма малой пластичностью.¹ Во-вторых, количественные оценки горячеломкости сплавов величиной Δ из формулы (7), по Н. Н. Прохорову, и величиной ЗП из (18), по И. И. Новикову, противоречивы, что объясняется тем, что в эти величины входит пластическая деформация ($\epsilon_{пл} = \epsilon_3$), а она не характеризует деформационную способность сплавов.

Однако величиной предельной пластической деформации ϵ_3 можно воспользоваться для определения температуры на нижней границе интервала хрупкости (ТИХ): температура нижней границы ТИХ та, при которой ϵ_3 *практически* достигает нуля; на рис. 159 это видно отчетливо.

80. ОБ ОЦЕНКЕ ГОРЯЧЕЛОМКОСТИ СПЛАВОВ

Так как деформационная способность сплавов в интервале кристаллизации определяется не их пластичностью ϵ_3 , а величиной предельной деформации ϵ_0 , формулы (7) и (8) следует написать иначе:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \min \epsilon_0 - \max \epsilon_y \\ \mathcal{D}_2 &= \text{med} (\epsilon_0 - \epsilon_y) \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Учитывая, что $\min \epsilon_0 \gg \max \epsilon_y$ и $\text{med} \epsilon_0 \gg \text{med} \epsilon_y$, величина $\min \epsilon_0 \approx \text{med} \epsilon_0$ и, следовательно, $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2 \approx \mathcal{D}_0 \approx \min \epsilon_0$ или $\mathcal{D}_1 \approx \mathcal{D}_2 \approx \mathcal{D}_0 \approx \text{med} \epsilon_0$.

¹ Напомним читателю, что к весьма малой пластичности сплавов в конце интервала кристаллизации приводит и дискретная модель Н. Н. Прохорова; см. формулы (13) и (17), а также с. 265.

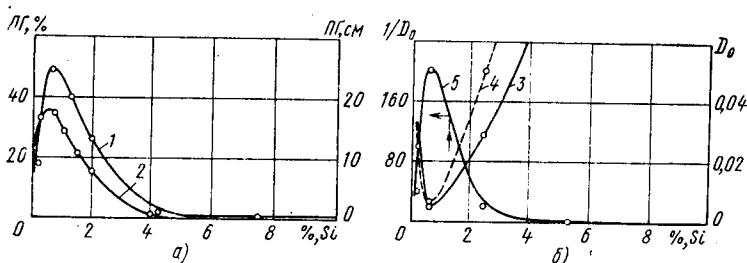


Рис. 160. Деформационная способность сплавов Al с Si:

a — по технологическим пробам; *б* — расчетная; *1* — по Н. Ф. Лашко и С. В. Лашко-Авакян; *2* — по данным Бирменгамского университета; *3* — по формуле (71); *4* — по формуле (72); *5* — величины $1/D_0$ из формулы (71)

Таким образом, согласно существующей теории в качестве количественной характеристики горячеломкости сплавов D_0 необходимо выбрать предельную деформацию этих сплавов при температуре их солидуса, т. е. $\min \epsilon_0$. Более того, согласно полученному Л. П. Каширцевым результату, выраженному формулой (69),

$$D_0 \approx \min \left(\frac{\sigma_0}{E_1} \right), \quad (71)$$

где $\min \left(\frac{\sigma_0}{E_1} \right)$ равно отношению $\max \sigma_0$ и $\max E_1$, т. е. пределу прочности и модулю упругости сплавов при температуре их солидуса.

Однако, по данным исследований многих авторов, прочность сплавов вблизи температуры солидуса находится в узких пределах. Так, у сплавов системы Al—Si величина $\sigma_0 = 0,5 \div 1,3$ МН/м²; предел прочности стандартных литейных алюминиевых сплавов составляет 0,5—0,8 МН/м²; у сплавов систем Al—Cu, Al—Mg и Al—Zn величина σ_0 находится в пределах соответственно 0,2—0,4; 0,5—0,8; 0,3—0,8 МН/м². Следовательно, σ_0 для изученных сплавов изменяется в пределах 0,5—1,0 МН/м².

Возникает естественное предложение принять $\max \sigma_0 \sim 1,0$ МН/м² и, следовательно,

$$D_0 \sim \frac{1}{\max E_1}, \quad (72)$$

так как в пределах одной системы, например Al—Si, величина $\max E_1$ изменяется на несколько порядков (см. прилож VII). На рис. 160, *a* представлено изменение показателей горячеломкости (ΠГ) для сплавов системы Al—Si по данным заливки технологических проб (измерения Н. Ф. Лашко и С. В. Лашко-Авакян — кривая 1, и Бирменгамского университета — кривая 2) [12, с. 251]. На рис. 160, *б* приведены результаты расчета D_0

по формуле (71) — кривая 3, и по формуле (72) — кривая 4, для этих же сплавов. Соответствие между $\mathcal{D}_0$ и ПГ очевидно.

Однако не менее убедительно соответствие между ПГ, Δ и ЗП на рис. 140.

Разница состоит в следующем. Величины Δ и ЗП могут быть отрицательными. Согласно существующей теории, такие сплавы должны обладать способностью *всегда* образовывать горячие трещины в отливках. Например, для сплава Al с 2,0% Si и 4,0% Cu величина $\Delta < 0$ (см. рис. 144, б); для сплава Mg с 4,5% Zn, по измерениям И. И. Новикова, ЗП < 0 [12, с. 254]. Более того, для сплава Al с 1,0% Cu и Δ , и ЗП отрицательны [12, 43]. На самом деле, из всех этих сплавов умеют получать отливки без трещин (на данное противоречие мы уже обращали внимание, см. с. 267).

Величина $\mathcal{D}_0$ из формул (70)—(72) всегда положительна. Следовательно, согласно существующей теории, горячие трещины в отливках, даже при полном торможении их свободной линейной усадки, не должны образовываться *никогда*. Этот вывод — *новое затруднение теории*, ибо различная склонность сплавов к образованию горячих трещин является давно точно установленным фактом.

Правда, на данном этапе уточнения теории мы с большим основанием можем говорить о том, что величина $\mathcal{D}_0$ характеризует именно *сопротивляемость сплавов* образованию горячих трещин в отливках, т. е. *трещиностойчивость* сплавов при литье. Обратная величина $\mathcal{D}_0$ характеризует *горячеломкость сплавов* при литье.

Этот вывод становится более отчетливым, если сравнить кривую 5 с кривыми 1 и 2 на рис. 160. Кривая 5 построена как обратная величина $\mathcal{D}_0$ из формулы (71).

На вопрос о том, при каких условиях в отливках из данного сплава образуются горячие трещины, а при каких нет, теория горячеломкости сплавов ответить не может.

81. УПРАЖНЕНИЯ

Цель этих упражнений — убедиться в справедливости формул (67)—(69) для других сплавов системы Al—Si и других условий их деформирования.

1. Рассчитать ϵ_0 , ϵ_{01} , ϵ_{02} и ϵ_{03} для сплава Al с 0,6% Si при деформировании его со скоростью $\dot{\epsilon}_c = 0,0015 \text{ с}^{-1}$.

2. Рассчитать ϵ_{01} , ϵ_{02} и ϵ_{03} для сплава Al с 2,0% Si при деформировании его со скоростью $\dot{\epsilon}_c = 0,00015 \text{ с}^{-1}$.

3. То же, для сплава Al с 10,36% Si.

Указание. Реологические характеристики перечисленных сплавов приведены в прилож. VII. Необходимые величины следует пересчитать с использованием формул (22), (26), (29). Затем использовать программу из прилож. XII.

4. Доказать, что SSB-тело неадекватно кривым течения на рис. 154.

Указание. Использовать реологическое уравнение, найденное при решении задачи 3 из гл. 2, записав его применительно к условиям одноосного однородного растяжения.

Теория горячеломкости сплавов исходит из предположения, что во всем деформируемом объеме свойства сплава одинаковы и неизменны, а деформация растяжения в пределах этого объема однородна. Реально же процесс затвердевания отливки происходит при непрерывном охлаждении, и скорость охлаждения этой отливки. Следовательно, реологические свойства затвердевающего сплава не только изменяются во времени, но и в объеме отливки распределены существенно неоднородно. Так же неоднородно развивается и линейная усадка. Естественно, что при построении теории трещиностойкости отливки эти обстоятельства процесса затвердевания необходимо учесть возможно полнее.

82. ИСХОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Напомним необходимое и достаточное условие возникновения горячих трещин в фасонных отливках: *горячие трещины образуются тогда, и только тогда, когда в результате торможения формой или стержнем свободной линейной усадки затвердевающей отливки в ней развивается деформация растяжения (растягивающее напряжение), равная деформационной способности (пределу прочности) сплава в интервале его кристаллизации* (см. с. 255).

Это утверждение в общем случае представлено формулами (2) и (3): $\epsilon_0 - \epsilon = 0$, $\sigma_0 - \sigma = 0$. Мы только что установили, что у сплавов в интервале их кристаллизации *всегда* $\epsilon_0 > \epsilon_y$ и $\sigma_0 > \sigma_y$. Следовательно, даже при полном торможении свободной линейной усадки в момент образования горячих трещин, в реальных условиях литья, величины ϵ и σ должны быть больше¹ соответственно ϵ_y и σ_y .

Поступим так: в случае полного торможения усадки $\epsilon = t\epsilon_y$ и $\sigma = u\sigma_y$, при этом t и u больше единицы. Тогда формулы (2) и (3) примут вид

$$\epsilon_0 - t\epsilon_y = 0 \tag{73}$$

и

$$\sigma_0 - u\sigma_y = 0, \tag{74}$$

где t и u должны отражать особенности реологического поведения отливки, затвердевающей в литейной форме.

¹ Конечно, не за счет ϵ_p , как указано в формуле (1), ибо при стабильной работе термическое расширение металлических форм за время затвердевания отливки незначительно.

83. ИЗМЕНЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕГО РАСПЛАВА В ЛИТЕЙНОЙ ФОРМЕ

Анализ процесса охлаждения затвердевающего расплава в форме при литье сплавов, кристаллизующихся в интервале $T_L - T_S$, читателю известен из тепловой теории формирования отливки (см. п. 60.1, с. 226.1—235 и п. 81.1, с. 290.1—292.1).

Из формулы (116-III.1) температура расплава, затвердевающего в *песчаной форме*,

$$T = T_L - S(t - \sqrt{tt_1}); \quad t \geq t_1, \quad (75)$$

где S — скорость охлаждения расплава; с учетом (1-1) и (2-1),

$$S = (T_L - T_S) \frac{b_4 (T_L - T_\Phi)}{s_{\text{эф}} \rho_2 \mathfrak{R}_0 \sqrt{\pi t}}; \quad t \geq t_1; \quad (76)$$

t_1 — время отвода теплоты перегрева от расплава из (42-III.1) или (3-1); $\mathfrak{R}_0$ — приведенный размер отливки.

Из формулы (70-IV.1) температура расплава, затвердевающего в *кокиле*,

$$T = T_L - S(t - t_1); \quad t \geq t_1, \quad (77)$$

где, с учетом (1-1) и (4-1),

$$S = (T_L - T_S) \frac{\tilde{\beta} (T_L - \tilde{T})}{s_{\text{эф}} \rho_2 \mathfrak{R}_0}; \quad (78)$$

величину t_1 определяют по формуле (5-1).

В общем случае скорость охлаждения S затвердевающего расплава однозначно связана со скоростью затвердевания U , отливки формулой (1-1):

$$S \equiv U_s \frac{T_L - T_S}{\mathfrak{R}_0}. \quad (79)$$

84. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ ОТЛИВКИ

Реологические свойства сплавов в интервале их кристаллизации существенно зависят от температуры. Следовательно, во время затвердевания расплава в форме его реологические свойства значительно изменяются. Определенное представление об этом дает схема на рис. 161: для примера кривые E_1 и λ_1 перенесены с рис. 158, с учетом (22) и (26), кривая T построена в соответствии с формулой (75).

Таким образом, *первая особенность в реологическом поведении затвердевающей отливки состоит в том, что свойства расплава, затвердевающего в форме, а именно E_1 , λ_1 , E_2 , λ_2 , σ_s и σ_0 , являются функциями T .*

Из формулы (79) ясно, что скорость охлаждения элементов тела отливки, отличающихся приведенным размером, различна.

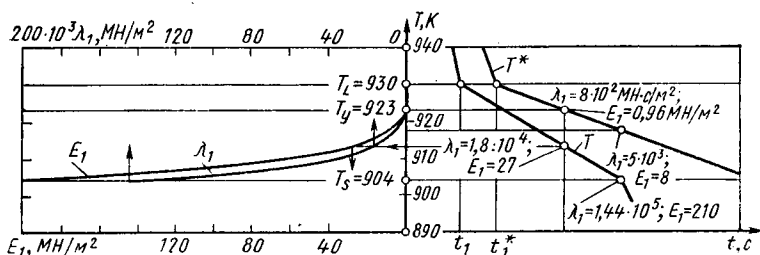


Рис. 161. Схема, иллюстрирующая неоднородность реологических свойств в затвердевающей отливке

Следовательно, согласно формулам (75) и (77), разной будет температура затвердевающего расплава в этих элементах в любой заданный момент времени. Например, если тело отливки имеет утолщение с приведенным размером $\mathfrak{R}_0^* > \mathfrak{R}_0$, то с помощью (75)—(79) найдем, что

$$T^* - T = (T_L - T_S) \frac{U_3}{\mathfrak{R}_0} \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_0^*} \right) t; \quad t \geq t_1^*, \quad (80)$$

где T — температура затвердевающего расплава в теле отливки; T^* — температура в утолщении тела; t_1^* — время отвода теплоты перегрева от расплава в утолщенном элементе тела отливки.

На рис. 161 кривая T^* построена в соответствии с формулой (80). Очевидно, что реологические свойства затвердевающего расплава в теле отливки и в его утолщении могут отличаться более чем в 10 раз в любой момент времени процесса затвердевания. При этом, согласно формуле (80), разница в свойствах тем больше, чем выше перегрев расплава при заливке, так как время отвода теплоты перегрева в толстостенных элементах тела отливки тем больше, чем больше их приведенный размер.

Однако неоднородность реологических свойств в объеме расплава, затвердевающего в форме, может возникать и по другим причинам. Например, из технологических дисциплин читатель знает, что плотность смеси в форме, уплотненной перессованием, встряхиванием или комбинированным способом, неравномерна. Следовательно, коэффициент тепловой аккумуляции формы по ее объему неодинаков. Если выбрать два участка формы с коэффициентами b_1^* и b_4 , чтобы $b_1^* < b_4$, то в соответствующих участках *равнотемперной* отливки свойства будут разными.

Из формул (75), (79) и (42-III.1)

$$T^* - T = (T_L - T_S) \frac{U_3}{\mathfrak{R}_0} \left(1 - \frac{b_1^*}{b_4} \right) t; \quad t \geq t_1^*; \quad (81)$$

здесь T^* — температура расплава у «теплого» участка формы; t_1^* — время отвода теплоты перегрева от расплава в этой части формы.

Из схемы на рис. 161 ясно, что разница температур приводит к указанному различию реологических свойств равностенной отливки.

Аналогичны причины неоднородности реологических свойств равностенной отливки при литье в кокиль. Читателю из технологических дисциплин известно, что толщина краски, нанесенной на внутреннюю поверхность кокиля, неравномерна. Следовательно, неодинаков коэффициент тепловой проводимости слоя краски на разных участках рабочей поверхности кокиля. Пусть $\beta^* < \beta$, тогда из формул (77), (79) и (46-IV.1), учитывая в (46-V.1) первые два члена степенного ряда для экспоненты,

$$T^* - T = (T_L - T_S) \frac{U_3}{\mathfrak{R}_0} \left(1 - \frac{\beta^*}{\beta}\right) t; \quad t \geq t_1^*. \quad (82)$$

Кокиль — конструкция, как правило, разностенная, поэтому средняя калориметрическая температура для элементов кокиля с разной массивностью различна. Следовательно,

$$T^* - T = (T_L - T_S) \frac{U_3}{\mathfrak{R}_0} \left(1 - \frac{T_L - \tilde{T}^*}{T_L - \tilde{T}}\right) t; \quad t \geq t_1^*, \quad (83)$$

где $\tilde{T}^*$ — средняя калориметрическая температура менее массивной части кокиля; t_1^* — время отвода теплоты от расплава в эту часть кокиля.

Таким образом, *вторая особенность в реологическом поведении затвердевающей отливки состоит в том, что свойства расплава, затвердевающего в форме, неоднородны по его объему.*

85. ДЕФОРМАЦИЯ РАСТЯЖЕНИЯ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕЙ ОТЛИВКИ

Из предыдущего известно, что деформация ε растяжения затвердевающей отливки возникает и развивается в результате торможения ее свободной линейной усадки

$$\varepsilon_y = \alpha_{св} (T_y - T). \quad (84)$$

Это означает, что все перечисленные выше причины неоднородности затвердевания отливки являются причинами неоднородности развития ее свободной линейной усадки, а при затруднении усадки — причинами неоднородности возникновения и развития деформации растяжения затвердевающего расплава в форме.

Поясним полученный вывод примером. Пусть тело отливки, схема которой представлена на рис. 162, а, имеет утолщение: $\mathfrak{R}_0$ — приведенный размер тела, $\mathfrak{R}_0^*$ — приведенный размер утолщения тела. Пусть затвердевание происходит в песчаной форме. Тогда из формулы (80) ясно, что существуют такая скорость U_3 затвердевания тела отливки и такое отношение приведенных размеров $\mathfrak{R}_0/\mathfrak{R}_0^*$ тела и его утолщения, при которых разница $T^* - T$ приводит к весьма большому различию их реологических свойств.

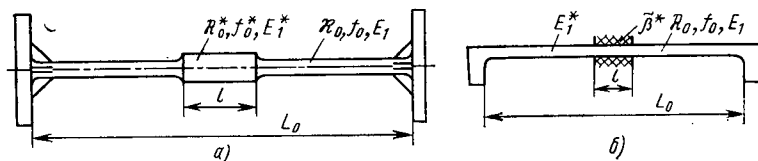


Рис. 162. Схема, иллюстрирующая причины локализации деформации отливки при торможении ее свободной линейной усадки:

а — литье в песчаные формы; б — в кокиль

На рис. 161 представлен именно такой случай: и E_1 , и λ_1 в утолщении более чем на порядок меньше по сравнению с расплавом в теле отливки. Это означает, что в данном случае на всем протяжении процесса затвердевания тело отливки по сравнению с утолщением, допуская ошибку менее 10%, можно рассматривать как жесткое, а также, что в результате торможения свободной линейной усадки ϵ_y отливки формой, деформации ϵ растяжения будет развиваться преимущественно в утолщении тела, т. е.

$$\epsilon = \epsilon_y \frac{L_0 - l}{l} + \epsilon_y^*; \quad t \geq t_1^*, \quad (85)$$

где l — протяженность утолщения тела отливки; ϵ_y^* — свободная линейная усадка этого утолщения:

$$\epsilon_y^* = \alpha_{св} (T_y - T^*). \quad (86)$$

Принимая во внимание (75), (80) и (84),

$$\epsilon = \left[\frac{L_0}{l} - \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_0^*} \right) \right] \epsilon_y; \quad t \geq t_1^*. \quad (87)$$

Следовательно, *всегда*, когда сочетание величин $\alpha_{св}$, $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$, L_0 , l , t и t_1^* приведет к тому, что деформация ϵ станет равной деформационной способности ϵ_0 расплава, затвердевающего в утолщении тела отливки, обязательно образуется горячая трещина.¹

К аналогичному выводу мы придем, если рассмотрим деформирование отливки без утолщения (рис. 162, б). Пусть затвердевание происходит в кокиле; на участке l толщина краски больше, чем на всей остальной поверхности. Если и в этом случае разность $T^* - T$ из формулы (82) такова, что тело отливки по сравнению с его участком, затвердевающим медленнее, допустимо принять жестким, то из формул (77), (82) и (84)

$$\epsilon = \left[\frac{L_0}{l} - \left(1 - \frac{\tilde{\beta}^*}{\tilde{\beta}} \right) \right] \epsilon_y; \quad t \geq t_1^*. \quad (88)$$

¹ Для того чтобы горячие трещины не возникали в сопряжениях тела отливки с фланцами, предусмотрены литейные ребра (рис. 162).

Следовательно, *всегда*, когда сочетание величин $\alpha_{св}$, R_0 , L_0 , l , β , β^* , t , t_1^* приведет к тому, что деформация ε станет равной ε_0 , на «теплом» участке тела отливки *обязательно* образуется горячая трещина.

Таким образом, *горячие трещины в отливках образуются только, и только, в местах (на участках) локализации деформации растяжения тела отливки; будем называть такие участки тела «теплыми». Это — третья особенность в реологическом поведении затвердевающей отливки.*

Однако ситуации, аналогичные рассмотренным, т. е. когда тело отливки ведет себя как жесткое, а деформируется только ее теплый участок, исключение и, по-видимому, довольно редкое. Реально деформируется вся отливка, но наибольшая деформация возникает в самом теплом участке ее тела. Поэтому формулы (87), (88) следует написать иначе:

$$\varepsilon = m\varepsilon_y, \quad (89)$$

где

$$m = \frac{L_0}{l} K,$$

K — коэффициент, учитывающий все особенности реологического поведения затвердевающей отливки во время торможения ее свободной линейной усадки; $K < 1$.

Сравнивая эти выводы и формулу (89) с (73) нетрудно придти к заключению, что m следует рассматривать как коэффициент, который, согласно только что изложенному, отражает влияние именно локализации деформации растяжения затвердевающей отливки в теплых местах ее тела.

Условимся: m — коэффициент, определяющий *степень локализации* деформации затвердевающей отливки при торможении ее свободной линейной усадки формой или стержнем.

Расчет коэффициента m возможен, и то приближенно, только для простейших случаев, когда причина локализации точно известна. Для реальной фасонной отливки все значительно сложнее, так как причины локализации весьма разнообразны. Поэтому коэффициент m целесообразно определять экспериментально. Для создания объективного способа определения m исследуем процесс образования горячих трещин в отливках на математической модели.

86. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРЯЧИХ ТРЕЩИН В ОТЛИВКАХ

Основой для построения математической модели является система уравнений (55), описывающая реологическое поведение

сплавов в интервале их кристаллизации. Для однородного растяжения по закону $\varepsilon = m\varepsilon_y$ система (55) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E_1 \varepsilon_1; \\ \sigma &= \lambda_2 \dot{\varepsilon}_2 + E_2 \varepsilon_2; \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \begin{cases} 0 \text{ и } \varepsilon_3 = 0, & \text{если } \sigma \leq \sigma_s; \\ \frac{1}{\lambda_1} (\sigma - \sigma_s), & \text{если } \sigma > \sigma_s; \end{cases} \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ \varepsilon &= m\varepsilon_y, \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

где E_1 , E_2 , λ_1 , λ_2 , σ_s , ε_y , m — известные функции от температуры внутри интервала кристаллизации данного сплава.

Математическая модель Л. П. Каширцева

Л. П. Каширцев предложил математическую модель напряженно-деформированного состояния затвердевающей отливки, исходя из следующих допущений [10].

1°. Расплав во время затвердевания в литейной форме в пределах интервала $T_L - T_S$ или $T_L - T_E$ данного сплава охлаждается с постоянной скоростью S .

2°. Деформация растяжения затвердевающей отливки развивается однородно по всему ее объему в результате полного торможения ее свободной линейной усадки формой.

Согласно формуле (78), $S \equiv \text{const}$ при литье в кокиль. Следовательно, с учетом (77), (84) и (89), при $m = 1$

$$\varepsilon = \varepsilon_y = \alpha_{св} St,$$

если время деформирования отливки при торможении ее свободной линейной усадки кокилем отсчитывать от момента достижения затвердевающим расплавом температуры T_y .

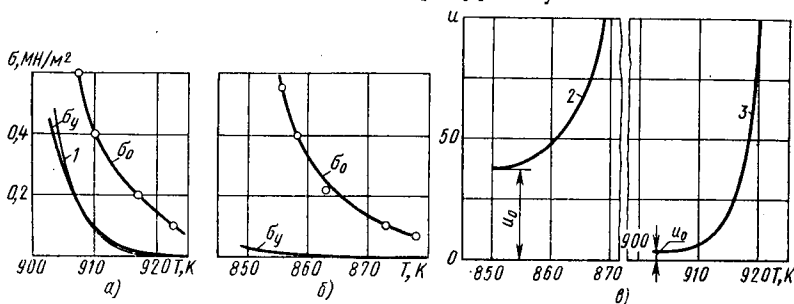


Рис. 163. Напряжения, возникающие в отливке при торможении ее свободной линейной усадки;

a — сплав Al с 0,6% Si; $б$ — сплав Al с 2,52% Si; $в$ — запас технологической прочности сплавов в интервале их кристаллизации

3°. Реологические свойства сплавов в интервале кристаллизации практически не зависят от скорости охлаждения затвердевающего расплава в литейной форме при малой интенсивности их теплового взаимодействия.

С учетом перечисленных допущений математическую модель Л. П. Каширцева возможно представить преобразованной системой уравнений (90):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= E_1 \varepsilon_1; \\ \varepsilon_2 &= \begin{cases} \frac{1}{\lambda_2} [E_1 \alpha_{св} St - (E_1 + E_2) \varepsilon_2], & \text{если } 0 < \sigma \leq \sigma_s, \\ \frac{1}{\lambda_2} [E_1 \alpha_{св} St - (E_1 + E_2) \varepsilon_2 - E_1 \varepsilon_3], & \text{если } \sigma_s < \sigma_y \leq \sigma_0; \\ 0 \text{ и } \varepsilon_3 = 0, & \text{если } 0 < \sigma \leq \sigma_s, \\ \frac{1}{\lambda_1} [E_1 \alpha_{св} St - E_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - \sigma_s], & \text{если } \sigma < \sigma_y \leq \sigma_0; \end{cases} \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ \varepsilon &= \alpha_{св} St; \quad t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

и начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(0) &= 0; \\ E_1(0) = E_2(0) = \lambda_1(0) = \lambda_2(0) = \sigma_s(0) &= 0; \quad \sigma_0(0) = \min \sigma_0, \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

где $E_1 = E_1(T)$; $E_2 = E_2(T)$; $\lambda_1 = \lambda_1(T)$; $\lambda_2 = \lambda_2(T)$; $\sigma_s = \sigma_s(T)$; $\sigma_0 = \sigma_0(T)$ — известные функции, заданные таблицами (см. прилож. VII).

Исследование формирования напряженно-деформированного состояния отливки с помощью такой модели возможно только на основе численного решения задачи (91)–(92). На рис. 163 приведены кривые $\sigma_y = \sigma_y(T)$ напряжений в отливке, рассчитанные на «Наири-2» методом Рунге-Кутты четвертой степени точности для сплавов Al с 0,6% Si ($\alpha_{св} = 11,36 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $S = 10 \text{ K/c}$; рис. 163, а) и Al с 2,52% Si ($\alpha_{св} = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $S = 10 \text{ K/c}$; рис. 163, б). Из сопоставления полученных результатов с кривыми для σ_0 ясно, что σ_y всегда меньше σ_0 .

В этой связи Л. П. Каширцев ввел понятие *запаса технологической прочности сплавов* в интервале их кристаллизации, определив коэффициент запаса как

$$u = \frac{\sigma_0}{\sigma_y}. \quad (93)$$

На рис. 163, в построены кривые 2 и 3, которые иллюстрируют значительное изменение u в пределах интервала кристаллизации исследованных сплавов.

Очевидно, что горячие трещины в отливках из *любых* сплавов образуются лишь в тех случаях, когда при торможении свободной линейной усадки, вследствие локализации деформации растяжения в теплых местах тела отливок, запас прочности сплава исчерпается. Видимо, такой смысл необходимо придать величине u в формуле (74). Более того, видимо, формулы (73) и (74) следует относить именно к теплым местам тела отливки, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0^* - m\varepsilon_y &= 0, \\ \sigma_0^* - u\sigma_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

где σ_0^* и ε_0^* — предел прочности и соответствующая ему предельная деформация растяжения сплава, затвердевающего в теплом месте тела отливки.

Наконец, очевидно, что между m и u должна существовать однозначная связь.

Упрощенная математическая модель

В итоге анализа реологического поведения сплавов в интервале их кристаллизации в условиях изотермического деформирования было показано, что деформация ε сплавов при постоянной скорости растяжения определяется в основном мгновенной упругой деформацией ε_1 (см. с. 294 и 296). В этой связи возможна упрощенная математическая модель образования горячих трещин в отливках. Положим $\lambda_1 = \lambda_2 \approx \infty$ и сохраним только допущение 3°. Тогда из (90) для сечения тела отливки, где локализуется деформация при торможении свободной линейной усадки, получим

$$\sigma = m\varepsilon_y E_1^*; \quad 0 < \sigma \leq \sigma_0^*; \quad (95)$$

$$\varepsilon_y(T_y) = 0; \quad E_1^*(T_y) = \min E_1^*; \quad \sigma_0^*(T_y) = \min \sigma_0^*,$$

где $E_1^* = E_1^*(T)$; $\sigma_0^* = \sigma_0^*(T)$ — известные функции, заданные таблицами в прилож. VII; ε_y — функция, заданная формулой (84) или формулами (85) и (86).

Например, для сплава Al с 0,6% Si ($\alpha_{св} = 11,63 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $T_y = 923 \text{ K}$) из (95) при $m = 1$

$$\sigma = 11,63 \cdot 10^{-5} (923 - T) E_1; \quad T \geq T_s, \quad (96)$$

где¹

$(923 - T) \rightarrow E_1$	
0	$0,96 \cdot 10^6$
5	$6,0 \cdot 10^6$
10	$27,0 \cdot 10^6$
15	$90,0 \cdot 10^6$
19K	$210,0 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$

¹ В современной математике используют предельно широкое понятие функции и способов ее задания (см. например, п. 62, с. 207). Здесь мы используем обозначение $x \rightarrow f(x)$ для функций, заданных таблицами.

На рис. 163, а кривая 1 рассчитана по формуле (96). Расхождение с расчетом по точной модели Л. П. Каширцева невелико.

87. ОЦЕНКА ТРЕЩИНОУСТОЙЧИВОСТИ ОТЛИВОК

Из (95) следует, что горячие трещины в отливках из данного сплава образуются в случае, если

$$\sigma_0^* = m \varepsilon_y E_1^*.$$

Так как $\varepsilon_y E_1^* = \sigma_y$ — напряжение, возникающее в отливке при полном торможении свободной линейной усадки, то

$$\sigma_0^* = m \sigma_y.$$

Сравнивая со второй формулой из (94), получим

$$m = u. \quad (97)$$

Таким образом, горячие трещины в отливках образуются тогда, и только тогда, когда степень локализации деформации растяжения отливки m при ее свободной линейной усадке окажется равной запасу прочности сплава и в эффективном интервале его кристаллизации.

Этот результат трудно переоценить. По сути дела, он является условием образования горячих трещин в любой отливке из любого сплава при любом способе и режимах литья, обеспечивающих малую интенсивность охлаждения затвердевающего расплава в форме.

Теоретическая оценка

Из данных, приведенных на рис. 163, в, наименьший запас прочности сплавов соответствует температуре их солидуса, обозначим его через u_0 , тогда

$$u_0 = \frac{\max \sigma_0}{\max \sigma_y}, \quad (98)$$

где $\max \sigma_y = \max \varepsilon_y E_1 = \alpha_{св} (T_y - T_s) E_1$ — напряжение, возникающее в отливке при температуре солидуса в результате полного торможения ее свободной линейной усадки.

Имея в виду равенство (97), возможно определить ту минимальную степень локализации деформации m_0 в теле отливок, которая обязательно приведет к образованию в них горячих трещин: $m_0 = u_0$. Очевидно, что при любом $m < m_0$ или, что то же, при любом

$$m < u_0 \quad (99)$$

горячих трещин не будет.

В этой связи неравенство (99) приобретает смысл условия трещиноустойчивости отливок.

Действительно, с учетом формулы (71),

$$u_0 = \frac{\mathcal{D}_0}{\max \varepsilon_y}, \quad (100)$$

т. е. u_0 связана с характеристикой горячеломкости сплавов $\mathcal{D}_0$, введенной нами выше (см. с. 295—297). Что касается m , то связь его с конструкцией отливки, технологией и режимами литья ясна из формул (88) и (89).

Теперь поставим вопрос так: что произойдет, если $m > u_0$? Исходя из предыдущего, ответ как-будто ясен: в отливках образуются горячие трещины.

Но рассмотрим следующий пример. Пусть перед нами серия отливок с различной величиной $m > u_0$. Материал отливок — сплав Al с 0,6% Si ($u_0 = 3,1$). Из формулы (96), если записать ее для $m > 1$, получим, что при $m \geq u_0$, напряжение $\sigma = \sigma_0^*$ и

$$\sigma_0^* = 11,63 \cdot 10^{-5} (923 - T) m E_1^*; \quad T \geq T_s, \quad (101)$$

Рис. 164. Схема, иллюстрирующая случаи, когда возможно залечивание горячих трещин в отливках

где

$(923 - T)$	$\rightarrow$	E_1^*	и	$(923 - T)$	$\rightarrow$	σ_0^*
0		$0,96 \cdot 10^6$		0		$0,1 \cdot 10^6$
5		$6 \cdot 10^6$		5		$0,17 \cdot 10^6$
10		$27 \cdot 10^6$		10		$0,28 \cdot 10^6$
15		$90 \cdot 10^6$		15		$0,60 \cdot 10^6$
19K		$210 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$		19K		$1,30 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$

Следовательно, для $m > u_0$ температура образования горячих трещин будет больше T_s (рис. 164). А при $T > T_s$ не исключена возможность залечивания таких горячих трещин незатвердевшим расплавом¹.

Таким образом, условие (99) является условием гарантированной трещиностойкости отливок.

Однако на пути реализации этого условия имеются по крайней мере две существенные трудности.

¹ Впервые предположение о залечивании горячих трещин сделано К. Зингером и Г. Беннеком в 1931 г. А. А. Бочвар в 1942—1944 гг. поддержал и развил эту гипотезу. С конца 40-х годов она получила широкое применение. Затем, с развитием представлений об образовании трещин в районе T_s эта гипотеза подверглась критике. Сейчас мы можем утверждать, что залечивание трещин — реальный процесс, но развивающийся лишь в определенных условиях формирования отливки.

Первая трудность заключается в расчете u_0 по формуле (100). Измерение $\max \sigma_0$ и $\max \varepsilon_1$, т. е. величины $\mathcal{D}_0$, не вызывает особых осложнений. Требуется лишь создать простой и объективный метод и накопить данные для литейных сплавов. В то же время измерение ε_y , и особенно $\max \varepsilon_y$ — дело пока чрезвычайно сложное. Процесс линейной усадки затвердевающей отливки осложняется явлением предсудачного расширения, которое зависит от многих факторов, в том числе и от технологии как плавки, так и литья. Более того, пока мы не умеем измерять *свободную* линейную усадку и температуру солидуса сплава, ибо и та, и другая зависит от скорости охлаждения затвердевающего расплава, и т. д.

Вторая трудность была отмечена выше: пока для фасонной отливки расчет m затруднен (см. с. 303). Причин локализации деформации в теле отливки много, и они разнообразны. Их нельзя выявить на уровне расчета процесса затвердевания отливки с учетом усредненных характеристик теплофизических свойств материала отливки и формы, а также коэффициента «свободной» линейной усадки сплава и податливости формы.

Но перечисленное не должно означать, что эти трудности носят принципиальный характер. Безусловно, с развитием теории формирования отливки в направлении математического моделирования технологического процесса литья в целом как для целей проектирования технологии, так и для управления технологическим процессом расчет u_0 и m_0 станет неизбежным уже на стадии создания литейных сплавов и конструирования литых деталей и будет выполняться с помощью ЭВМ.

По-видимому, и здесь неизбежным будем системотехническое описание конфигурации отливки как множества взаимодействующих друг с другом элементов (продумать!). Математические модели взаимодействия в своей основе уже готовы: это — модель Л. П. Каширцева или ее упрощенный вариант (см. п. 86).

А сейчас целесообразно использовать оценку u_0 и m_0 с помощью технологических проб.

Технологические пробы

Наиболее удобные варианты конструкций отливок, которые можно использовать в качестве технологических проб на их трещиностойчивость в заданных режимах технологии, приведены на рис. 162 для литья в песчаные формы и в кокиль.

Они удобны из следующих соображений: во-первых, величину m для них нетрудно рассчитать; во-вторых, можно найти такие отношения $\mathcal{R}_c/\mathcal{R}_0^*$ или $\tilde{\beta}^*/\tilde{\beta}$, при которых m будет близко к m_0 и, следовательно, к u_0 .

Действительно, если $\mathcal{R}_c/\mathcal{R}_0^*$ выбрать таким, чтобы другие причины локализации деформации не оказывали заметного влияния,

то для технологической пробы, изображенной на рис. 162, а (проверить!),

$$m = \frac{L_0}{l} \left\{ \left[1 - \frac{l}{L_0} \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_0^*} \right) \right] \frac{1}{1 + \left(\frac{L_0}{l} - 1 \right) \frac{f_0^* E_1^*}{f_0 E_1}} \right\}; \quad t \geq t_1^*, \quad (102)$$

где f_0 , E_1 и f_0^* , E_1^* — площади поперечного сечения и модули упругости затвердевающего расплава соответственно в теле пробы и его утолщении¹.

После проверки этой формулы читателю должно быть ясно, что выражение в фигурных скобках учитывает влияние на коэффициент m различной жесткости тела и его утолщения, а также запаздывания начала развития деформации в утолщении по сравнению с началом усадки в теле, т. е. выражение в фигурных скобках является множителем K в формуле (89) для данной пробы.

Согласно (102), локализацию деформации, необходимую для образования горячих трещин в утолщении тела, можно создать, варьируя одним из следующих четырех конструктивных параметров: L_0 , $\mathfrak{R}_0$, l и $\mathfrak{R}_0^*$ (почему не включены f_0 и f_0^* ?).

Однако уменьшение l сложно осуществить, так как наименьшая величина l должна быть в 10 раз больше характерного размера утолщения, с тем чтобы на ход затвердевания не оказывали влияния его торцы (см. с. 56.1). Ясно, что это приведет к необходимости значительной длины L_0 пробы. Уменьшение $\mathfrak{R}_0$ или увеличение $\mathfrak{R}_0^*$ также неприемлемо. Согласно формуле (79), изменение приведенного размера вызывает изменение скорости охлаждения тела пробы или его утолщения, что приведет к изменению их кристаллического строения от одной заливки пробы к другой.

Следовательно, остается последний вариант: достижение требуемой локализации деформации в утолщении тела пробы изменением длины L_0 . Это удобно, так как при выборе остальных параметров пробы, в соответствии с формулой (102), величина $m \approx \frac{L_0}{l}$. Если L_{κ} — минимальная длина, при которой в утолщении тела пробы образуется горячая трещина, то $m \approx m_0$ и

$$m_0 \approx \frac{L_{\kappa}}{l}.$$

Здесь необходимо отметить, что именно на таком варианте остановился в конце концов Х. Ф. Холл, предложив в 1938 г. аналогичную пробу для оценки трещиностойкости при литье стали в песчаные формы.

¹ Заметим, что при $E_1^* \ll E_1$ из (102) получается множитель перед ε_y в формуле (87).

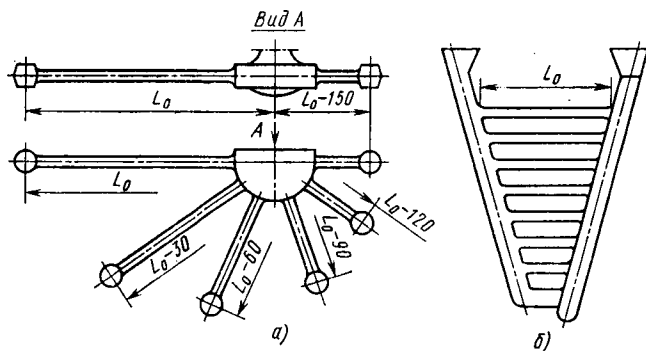


Рис. 165. Технологические пробы А. Татюра (а) и Н. Н. Прохорова (б)

Рассмотрим пробу для литья в кокиль (рис. 162, б). Выберем отношение $\tilde{\beta}^*/\tilde{\beta}$ таким, чтобы другие причины локализации деформации не оказывали заметного влияния. Тогда (проверить!)

$$m = \frac{L_0}{l} \left\{ \left[1 - \frac{l}{L_0} \left(1 - \frac{\tilde{\beta}^*}{\tilde{\beta}} \right) \right] \frac{1}{1 + \left(\frac{L_0}{l} - 1 \right) \frac{E_1^*}{E_1}} \right\}; \quad t \geq t_1^*. \quad (103)$$

Ясно, что и в этом случае наиболее удобна проба с переменной длиной L_0 . Конструктивно такая проба удачно оформлена в предложениях А. Татюра (1950 г.) и Н. Н. Прохорова (1962 г.) (рис. 165).

Правда, в указанных предложениях участки с $\tilde{\beta}^*$ не предусмотрены. Однако, если их предусмотреть, то при соответствующем выборе других параметров эти пробы дадут $m \approx m_0 \approx \frac{L_K}{l}$.

Теперь читатель может сделать анализ других технологических проб на горячие трещины и установить, насколько объективно они оценивают горячеломкость сплавов и трещиностойкость отливок. Более того, читатель может предложить свою конструкцию, если она будет лучше и удобнее существующих.

А сейчас мы лишь подчеркнем, что пробы, схема которых изображена на рис. 162, при соответствующем выборе параметров их конструкции дают m_0 как характеристику горячеломкости сплавов, ибо $m_0 = u_0$ с учетом всех особенностей усадки отливки, в том числе и эффектов от предусадочного расширения в реальных условиях плавки сплавов и их затвердевания. В то же время эти пробы дают m_0 как предельную величину m в отливках, ибо при $m < m_0$ гарантируется трещиностойкость отливок из этих сплавов в тех же условиях их плавки и затвердевания.

88. СПОСОБЫ ПРЕДОХРАНЕНИЯ ОТЛИВОК ОТ ОБРАЗОВАНИЯ В НИХ ГОРЯЧИХ ТРЕЩИН

Способы, перечисленные на с. 268, остаются в силе и с позиций реологического анализа трещиностойчивости отливок.

Однако из этого анализа следует, что радикальным и надежным способом предохранения отливок от горячих трещин является *обеспечение гарантированной трещиностойчивости литых деталей еще на стадии их конструирования.*

Первый путь достижения гарантированной трещиностойчивости отливок ясен: необходимо располагать элементы затруднения усадки на расстоянии друг от друга, меньшем, чем величина L_k , найденная для данного сплава с помощью технологических проб, приведенных на рис. 162 и 165.

Другими словами, речь должна идти не о ликвидации элементов затруднения усадки, как иногда рекомендуют в технологических руководствах. В большинстве случаев такую рекомендацию просто невозможно осуществить в связи с функциональным назначением детали машины или прибора. Речь должна идти о конструировании детали с учетом максимально допустимого расстояния между этими элементами, ибо во многих случаях расстояние между ребрами, приливами, бобышками и т. п. элементами назначаются произвольно.

Читатель, конечно, возразит: во многих конструкциях не только элементы, затрудняющие усадку, но и расположение их относительно друг друга обусловлены функциональным назначением литой детали.

Читатель прав. В этой связи *второй путь* достижения гарантированной трещиностойчивости отливки не требует принципиального изменения конструкции. Необходимо лишь между элементами затруднения усадки, находящимися на расстоянии друг от друга, большем L_k , предусмотреть дополнительные элементы затруднения усадки, с тем чтобы новое расстояние между ними стало меньше L_k . На этом пути есть две возможности. Одна состоит в том, чтобы новые элементы затруднения усадки (чаще всего ребра, толщина которых меньше тела детали) ввести в состав конструкции литой детали. Если такая возможность исключается (например, исходя из требований к массе детали), то есть другая: рассматривать дополнительные ребра как технологические, обеспечивающие гарантированную трещиностойчивость отливки, но подлежащие удалению при обработке литой детали.

Наиболее яркой иллюстрацией этого способа является технология литья тонкостенных панелей из сплава Мл5 при заполнении песчаной формы под напором стояка. Установка технологических ребер гарантированно предохраняет панель от множественных горячих трещин [39].

Еще раз подчеркнем, что реологический анализ трещиностойчивости отливок не отвергает ни одного из способов предотвращения в них горячих трещин, перечисленных на с. 268.

Все они — результат обобщения обширной технологической практики литья сплавов, склонных к трещинообразованию.

Однако развитие техники и технологии литья в направлении повышения точности отливок требует более широкого использования неподатливых (металлических) и малоподатливых (керамических, высокопрочных песчаных и т. п.) форм. Следовательно, широко применяемый способ предотвращения горячих трещин в результате увеличения податливости формы или стержней становится ограниченным. Из технологических способов остается один: упрочнение теплых мест тела отливки холодильниками и ребрами (их называют литейными). Но упрочнить можно заведомо известные теплые места тела отливки, поэтому и холодильники, и литейные ребра не гарантируют трещиностойчивость, так как деформация может локализоваться в других теплых местах, возникающих по причинам несовершенства технологии изготовления формы и ее конструкции, способа заливки и питания отливки.

Таким образом, важно обеспечить гарантированную трещиностойчивость отливок еще на стадии их конструирования, используя изложенные выше предложения.

Но в некоторых случаях эффективным может быть и следующий технологический способ предохранения отливок от образования в них горячих трещин. Он также является результатом анализа особенностей реологического поведения затвердевающей отливки в условиях полного затруднения ее свободной линейной усадки.

Из технологических дисциплин читателю известно, что при литье выжиманием основная причина образования горячих трещин в панельных отливках заключается в торможении усадки заусенцами, неизбежно возникающими между подвижной полуформой и боковыми щеками машины (рис. 166). Разумеется, что избавиться от трещин можно установкой технологических ребер. Но можно поступить иначе: вызвать образование трещин *за пределами* отливки, специально создав там теплое место для локализации деформации в нем с большим коэффициентом m . На схеме (рис. 166) два таких теплых места созданы утолщением тела и нанесением толстого слоя кокильной краски на подвижную полуформу около боковых щек. Только с помощью этого способа стало возможным литье выжиманием панельных отливок из высокопрочных алюминиевых и магниевых сплавов, весьма склонных к образованию горячих трещин [39].

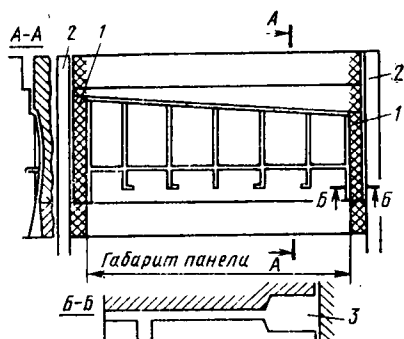


Рис. 166. Способы локализации деформации за пределами панели при литье выжиманием:

1 — слой теплоизоляционной краски; 2 — щека машины; 3 — утолщение тела за пределами габарита отливки

89. ЗАДАЧИ

1. Дать анализ реологического поведения технологических проб для оценки горячеломкости сплавов.

Указание: воспользоваться схемами и описанием конструкций проб, а также характеристик горячеломкости сплавов, определяемых с их помощью, из книги И. И. Новикова [12, с. 196—211].

2. Рассчитать коэффициент m для пробы на рис. 162, а при условии, что верхняя половина формы выполнена стержнем.

3. Определить скорость охлаждения утолщения тела пробы (рис. 162, а) холодильником, необходимую для устранения локализации деформации.

4. Рассчитать коэффициент m для пробы на рис. 162, б при условии, что нижняя полуформа имеет стержневую вставку между ребрами отливки протяженностью: а) вставки равна L_0 ; б) меньше $1/2 L_0$.

5. Рассчитать коэффициент m для отливки, аналогичной пробе на рис. 162, а, но с двумя утолщениями. При этом утолщения имеют разные l , α_0^* и, следовательно, E_1^* .

6. То же, учитывая податливость формы между фланцами.

Указание: принять, что $\epsilon_n = \frac{\sigma}{E_{см}}$, где $E_{см}$ — модуль сжатия формовочной смеси [39]; σ — сжимающее напряжение.

7. Рассчитать m для пробы на рис. 162, б, но с k теплыми участками при условии, что в каждом участке l , β^* и E_1^* различны.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. КОЭФФИЦИЕНТ РАВНОВЕСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Таблица 1

Распределение элементов в железе

Элемент	k_0	Элемент	k_0	Элемент	k_0	Элемент	k_0
C	0,26	Ni	0,80	Si	0,66	V	0,90
O	0,10	Cr	0,95	P	0,07	Ti	0,50
S	0,05	Mo	0,70	Cu	0,56	Co	0,92
Mn	0,84	W	0,95	Al	0,92	B	0,13

Таблица 2

Распределение элементов в молибдене

Элемент	k_0	Элемент	k_0
C	0,1	Be	0,01
Al	0,3	B	0,02
Si	0,3	W	1,1

Таблица 3

Распределение элементов в титане

Элемент	k_0	Элемент	k_0
Mo	0,3	M	2
C	3	Fe	0,3
O	6	Zr	0,4
Al	0,4	—	—

Таблица 4

Распределение водорода в металлах

Металл	k_0	Металл	k_0
Mg	0,70	Ni	0,46
Al	0,052	Fe	0,50
Cu	0,33	—	—

II. КОЭФФИЦИЕНТ ЛИКВАЦИИ

Таблица 5

Ликвация легирующих элементов в сталях

Сталь	C, %	c_{Cr}	c_{Mn}	c_{Mo}	c_{Ni}	c_{Si}
12X13	0,13	1,2	1,2	—	—	—
18ХГТ	0,21	1,5	1,5	—	—	—
20Х3	0,23	1,5	—	—	—	1,3

Сталь	C, %	C_{Cr}	C_{Mn}	C_{Mo}	C_{Ni}	C_{Si}
20ХН	0,23	1,3	1,2	—	1,2	—
30ХГСА	0,34	1,8	1,7	—	—	1,7
35ХМ	0,37	1,6	1,4	2,0	—	—
40Х	0,39	2,0	1,9	—	—	—
40Х13	0,39	1,4	1,8	—	—	—
40ХН	0,42	1,7	1,25	—	1,2	—
38ХМЮА	0,42	2,1	—	8,7	—	—
45Г2	0,45	—	1,7	—	—	—
6Х2	0,7	1,6	—	—	—	1,4
ШХ15	1,3	3,9	1,6	—	—	—

Ликвация в сплавах на основе железа

Таблица 6

Сплав	C_{Cr}	C_{Ni}	C_{Ti}
Fe с 2,5% Cr и 18% Ni	1,1	1,1	—
Fe с 11% Cr и 3% Ti	1,0	1,1	1,0
Fe с 9% Ni и 3% Ti	—	1,3	2,5
Fe с 18% Ni и 3% Ti	—	1,7	5,0
Fe с 11% Cr, 18% Ni и 3% Ti	0,8	1,4	3,5

Таблица 8

Таблица 7

Дендритная ликвация в железных сплавах

Дендритная ликвация элементов в никелевых сплавах

Элемент	C_d	Элемент	C_d	Элемент	C_d
Cr	1,2	Si	1,5	W	1,5
Mn	1,2	Co	1,05	V	2,0
Ni	1,5	Mo	2,0	Mg	3,5

Элемент	C_d	Элемент	C_d
Co	0,9	V	1,1
W	0,9	Mo	1,2
Cr	1,2	Ta	2,2
Cu	1,5	Nb	2,0
Mn	1,5	Ti	2,0
Al	1,0		

III. КОЭФФИЦИЕНТЫ УСАДКИ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

Таблица 9

Таблица 10

Коэффициент усадки при затвердевании металлов

Средние значения коэффициентов усадки литейных сплавов

Элемент	ϵ_V	Элемент	ϵ_V
Al	0,060	Sn	0,028
Mg	0,051	Na	0,025
Cd	0,047	K	0,025
Zn	0,042	Fe	0,022
Cu	0,041	Li	0,0165
Ag	0,038	Sb	—0,032
Pb	—	Bi	—0,033

Основа сплава	$\epsilon_1 \cdot 10^3, K^{-1}$	$\epsilon_2 \cdot 10^3, K^{-1}$	$\epsilon_V \cdot 10^2$
Al	4,0	63	6,6
Mg	3,5	87	5,1
Cu	2,0	60	4,4
Fe	0,9	36	3,0
Ti	—	30	1,0

Таблица 11

**Коэффициент усадки
при затвердевании углеродистых сталей**

С, %	ε_V	С, %	ε_V
0,10	0,02	0,45	0,043
0,35	0,03	0,70	0,053

IV. ДАВЛЕНИЕ НАСЫЩЕННЫХ ПАРОВ МЕТАЛЛОВ

Таблица 12

Металл	$T_{кр}, K$	$p_{п} \cdot 10^5, \text{ кгс/мм}^2$	Металл	$T_{кр}, K$	$p_{п} \cdot 10^5, \text{ кгс/мм}^2$
Al	933	16	Cu	1356	410
W	3660	2,2	Mo	2895	2,9
Fe	1808	4,95	Ni	1728	58
Co	1713	1010	Ti	2000	11,2
Si	1683	4,2	Cr	2173	8350
Mn	1517	120	Zn	692	21,3

V. ДИФФУЗИЯ ЛЕГИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЖИДКОЙ И ТВЕРДОЙ ФАЗАХ

Таблица 13

Коэффициент D_3 диффузии в твердых сплавах железа

Диффундирующий элемент	T_3, K	$D_3 \cdot 10^{12}, \text{ м}^2/\text{с}$	Диффундирующий элемент	T_3, K	$D_3 \cdot 10^{12}, \text{ м}^2/\text{с}$
Cr	1620	2,0	C	1670	0,005
Mn	1470	9,6	B	1570	200
Si	1620	13,0	N	1620	310
W	1600	1,0	H	1670	$7,2 \cdot 10^6$

Таблица 14

Коэффициент D_1 диффузии в жидких сплавах железа

Диффундирующий элемент	T_1, K	$D_1 \cdot 10^9, \text{ м}^2/\text{с}$	Диффундирующий элемент	T_1, K	$D_1 \cdot 10^9, \text{ м}^2/\text{с}$
Cr	1770	5	C	1620—1770	0,3—0,5
Mn	1480—1830	3,9	B	1670—1770	20
Si	1750—1830	10	N	1870	5,5
W	1770	1,14	H	1770	$6,7 \cdot 10^8$

Таблица 15

Коэффициент D_1 диффузии в жидких сплавах железа

Диффундирующий элемент	T_1 , К	$D_1 \cdot 10^9$, м ² /с	Диффундирующий элемент	T_1 , К	$D_1 \cdot 10^9$, м ² /с
—	—	—	Mo	1770	0,9
V	1500—1600	6,6	Ti	1500—1820	1,65
S	1890	1,94	Al	1880	1,55
Co	1840—1900	4,6	Nb	1500—1820	4,3
Ni	1550—1700	3,2			

Таблица 16

Коэффициент D_1 диффузии в жидких металлах и сплавах железа с углеродом

A диффундирует в B		T_1 , К	$D_1 \cdot 10^9$, м ² /с	A диффундирует в B		T_1 , К	$D_1 \cdot 10^9$, м ² /с
A	B			A	B		
Fe	Fe	1890	0,17	C	Fe + 0,08% C	1820	7,9
Mg	Mg	970	2,70			1840	7,2
Sn	Sn	570	3,74			1860	7,2
		900	13,50				
				C	Fe + 2,1% C	1720	6,7
Zn	Zn	970	6,2			1770	5,5
		1070	14,0			1820	4,3
				C	Fe + 3,5% C	1720	6,0
O	Fe	1900	0,3			1770	6,0
						1820	6,7

VI. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ КРИСТАЛЛА С ПЕРЕОХЛАЖДЕННЫМ РАСПЛАВОМ

Таблица 17

Технические металлы

Элемент	σ , Дж/м ²	Элемент	σ , Дж/м ²	Элемент	σ , Дж/м ²	Элемент	σ , Дж/м ²
Sn	5,45	Al	9,30	Au	13,20	Co	23,40
Bi	5,44	Sb	10,10	Cu	17,70	Pt	24,40
Pb	3,33	Ag	12,60	Fe	20,40	Ni	25,50

VII. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЛАВОВ
АЛЮМИНИЯ С КРЕМНИЕМ

Таблица 18

Si, %	T_2 , К	G_1 , МН/М ²	G_2 , МН/М ²	η_1 , МН·с/М ²	η_2 , МН·с/М ²	τ_s , МН/М ²
0,6	928	0,02	0,017	10,5	11,3	4,5
	923	0,32	0,2	270,0	17,8	98,0
	918	2,0	0,9	1 600	80,0	450,0
	913	9,0	3,8	6 000	290,0	1250
	908	30,0	10,5	18 500	1000	2760
	904	67,0	27,0	48 000	2700	4800
2,52	913	0,005	0,0015	2,2	0,27	5,8
	908	0,023	0,0086	22,0	1,1	16,7
	898	0,120	0,063	195,0	5,5	53,0
	888	0,37	0,176	590,0	19,3	125,0
	878	0,95	0,395	1 360	44,5	290,0
	868	2,2	1,05	3 250	122,0	800,0
	858	5,8	4,5	10 000	470,0	3000
	852	11,5	27,0	25 100	1450	7800
5,24	898	0,00022	0,00018	0,1	0,15	—
	888	0,011	0,0072	8,6	0,41	12
	878	0,045	0,027	31,0	1,65	34
	868	0,12	0,067	71,0	4,1	72
	858	0,26	0,138	158,0	8,2	156
	853	0,37	0,211	200,0	10,5	202
10,36	863	0,00012	0,00007	0,22	0,07	0,5
	858	0,00031	0,00019	1,1	0,23	1,3
	853	0,00074	0,00045	3,1	0,62	5,5

VIII. Программа
для решения I-й задачи И.Л. Воробьева (ЭЦВМ "Наири")

```

an15 a
13 n
1 bba0 a1 a2 a3 a4 a5
2 byz=(a0/a5)3 l=(a1/a5)3
3 ne7a0 a1 a2 a3
4 ne7a4 a5 z l
5 un2
6 got=0 r=0 n0=0 n1=0 n2=0 n3=0 y=0
7 bye=a03 ч=a13 в=3ч b=3е m=z
8 bnd=0,0001a2/a3
9 gon=1
10 goi=1
11 gof=1
12 bvx=y-a4
13 esx>16
14 gox=0
15 ug17
16 gox=1
17 byg=x(y-a4) r=r+dy n0=n0+dg p=rg n1=n1+dp
p=rg n2=n2+dp p=rg n3=n3+dp u=eg3+4(n0r3-3n1r2+3n2r-n3)
l=rg2y+by(r2n0-2rn1+n2) y=y+d(a3(1-y)-la2 e(-u))
m=m+lgd e(-u) t=t+d
18 cn19 bcf=j+1 n=n+1
20 esn-200<30
21 esj-100<12
22 byc=1- e(-u) ш=l e(-u)
23 ne7t
24 ne7y c ш m
25 bci=1+1
26 esi-5<11
27 un1
28 ess-0,99<10
29 ко30 esj-10<12
31 ug22
uc29

```

Ф Идентификаторы переменных:

$a_0 = R_2$	$e = R_2^3$	$r = J$	$c = \psi$
$a_1 = R_1$	$b = JR_1$	$n_0 = A_0$	$u = \omega$
$a_2 = L$	$b_1 = JR_2^3$	$n_1 = A_1$	$n = \dot{\omega}$
$a_3 = Bi_0$	$p = \gamma(\theta^l - \theta)J$	$n_2 = A_2$	$m = A$
$a_4 = (1 - \theta^l)$	$ч = R_2^3$	$n_3 = A_3$	$ш = \dot{\psi}$
$a_5 = R_v$	$y = (1 - \theta)$	$g = \gamma(\theta^l - \theta)$	$l = R_2/R_v$
$\delta = \Delta t$	$t = \tau$	$x = \gamma$	

Обращение к программе по первому оператору

IX. Программа

для решения 2-й задачи И.Л. Воробьева (ЭЦВМ „Наири“)

152к

o2274н n0к1 n5к12 nn1897н5+ o2270н c4096к1 b1к12 u156н>12
o2274н n0к1 n5к12 nn1908н5+ o2270н c4096к1 b1к12 u164н>12
o2274н n0к1 n5к12 nn1919н5+ o2270н c4096к1 b1к12 u172н>12
o2270н n0к1 n5к12 nn1930н5+ o2270н c4096к1 b1к12 u180н>12
o2274н u31п ш

an110 мшсуоглнрта

1 bba0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7
2 ne7a0 a1 a2 a3
3 ne7a4 a5 a6 a7
4 goz=0.1666666666
5 byt=0.01z δ=t
6 go1=0
7 byy1=a4 m1=a7 l1=0 r1=0 n1=0 p1=0 m1=0 c1=0
8 bci=i+1
9 eci=10<7
10 bye=a0> ч=a1> b=3e y=3ч
11 gon=1
12. ecc0=0.1>53
13 go1=0
14 byx=1-y1
15 ecx<23
16 byx=a5-y1
17 ecx<19
18 gox=1
19 ug21
20 gox=0
21 byg=x(a5-y1) x=1-y1 r1=r1+δx l1=l1+δg x=g r1
m1=m1+δx x=x r1 p1=p1+δx x=x r1 m1=m1+δx
u=er1>+u(l1r1>-3r1>2n1+3r1p1-m1) л=c1 c1=1- e(-u)
w1=c1/δ-л/δ s=a2w1 m1=m1+a6δg e(-u)
22 ug24
23 bys=0 w1=0 c1=0
24 cn25 eci=48
26 eci=10=37
27 bci=i-1
28 byx=zy1
29 bci=i+1
30 byx=x+(1-2z)y1+0.01zs
31 bci=i+1
32 byx=x+zy1
33 bci=i-1
34 byo1=x
35 bci=i+1
36 ug14
37 byy10=y9+a3y10+δs
38 go1=1
39 byy1=o1
40 bci=i+1

```

41 eci-9<39
42 bcn=n+1
43 ecn-60<45
44 np152
45 bbit=t+δ
46 ecn-60<13
47 ug11
48 byy0=y0(1-2z)+2zy1+δs
49 ecc1-0.99>52
50 bci=1+1
51 ug14
52 ug55
53 goz=0.5 δ=0.005
54 ug13
55 kouc55

```

Идентификаторы переменных:

$a_0 = \Omega_2$ $a_6 = \Omega_n^3/\varphi$ $l_1 = A_{0,i,j}$ $g = \dot{A}$ $s = H$

$a_1 = \Omega_1$ $a_7 = \Omega_n^3/\varphi$ $n_1 = A_{1,i,j}$ $x = \gamma$

$a_2 = L$ $\delta = \Delta\tau$ $p_1 = A_{2,i,j}$ $u = \omega$

$a_3 = Bi$ $t = \tau$ $e = \Omega_2^3$ $c = \Psi$

$a_4 = \theta_{3an}$ $r_1 = J_{i,j}$ $m_1 = A_{3,i,j}$ $w_1 = \dot{\psi}_i$

$a_5 = \theta'$ $y_1 = \theta_{i,j}$ $u = \Omega_1^3$ $n = \dot{\omega}_{i,j}$

Обращение к программе по первому оператору

Х. Программа
Преобразование фасонной отливки из углеродистой стали
(для ЭЦВМ "Наири").

```

an17 ху
1 88a b c m n d
2 gon=0 k=0 y6=m y7=n x3=d
3 ug7
4 byo=(a+b+c+a)/(3( e(0,666666( ln(a+b+c)))) ) y3=mnd/(a+b+c)
u=0,5ab/(a+b+c+a)
5 bym=0,333333(1+(d/m)+d/n)/( e(0,333333 ln(d²/mn)))
ы=0,5/(1+d/m+d/n)
6 ug125
7 byx5=0 x6=4n
8 есn-1=11
9 byd=0,5(x5+x6)
10 ug4
11 byc=0,5(x6+x5)
12 ug4
13 bys=x1-(x1-x2)(r-u)/(r-e) z=y1-(y1-y2)(r-u)/(r-e)
p=s-(s-z)(l-ы)/(l-ч) x4=p-y3
14 еск=85
15 byg=√(x4²) ш=y3
16 ug131
17 есn-1=97
18 ug102
19 goi=3 j=1
20 byyo=2/(27o³)
21 gox1=0 y1=0,1666666
22 byxo=0,5(x1+y1) s=(1-2x0)²x0-yo
23 goz=|s
24 есz=0,0001<31
25 byp=(1-2x1)²x1-yo
26 еср>29
27 byy1=xo
28 ug22
29 byx1=xo
30 ug22
31 bci=i-1
32 есf<40
33 есi-2<37
34 bye=xo
35 gox1=0,166666 y1=0,5
36 ug22
37 byr=xo yo=2/(27m³)
38 bcf=j-1
39 ug21
40 есi<43
41 byч=xo
42 ug35
43 byl=xo
44 сn45 goi=1
46 есi-1>60
47 есо-2,5>50
48 byш=1/o g=395,75ω³-152,2ω⁴+114,548ω-326,824ω²-13,628

```

```

49 ug51
50 gog=1,33
51 eco-1,84>54
52 bwm=180,2/o^4-532,5/o^3+581,5/o^2-276,01/o+48,159
53 ug55
54 gow=0,15121
55 eco-1,93>58
56 bwn=70,1/o^4-177,3/o^3+164,01/o^2-63,92/o+8,96
57 ug59
58 gon=0,263
59 ug72
60 eco-2,175>63
61 bwg=1/o g=221,136g^3-55,458g^4-233,752g^2+100,868g-14,635
62 ug64
63 gog=1,342
64 eco-2,2>67
65 bwm=1/o w=25,715w^4-68,203w^3+67,348w^2-27,606w+4,14
66 ug68
67 gow=0,2
68 eco-2,0175<71
69 gon=0,3
70 ug72
71 bwn=1/o n=34,917n^4-85,287n^3+77,62n^2-29,275n+4,008
72 bwx1=(4/(1-2l)-9,11)/9,11
73 ecl-0,41>80
74 bws=(ln(g/w))/0,243 x1=w e(s(l-0,166666))
75 ec4-0,092>78
76 byy1=n(0,5/4-1)/4,4
77 ug82
78 bws=(ln(n/w))/0,075 y1=w e(s(0,166666-4))
79 ug82
80 bwx1=g(1+x1)^2
81 ug75
82 bci=1+1
83 ec1-2=46
84 ug13
85 ecx4>88
86 gok=1
87 ug15
88 bwn=n+0,1n
89 ecm-n>7
90 gos=n n=m m=s
91 ug7
92 ug117
93 ne5m n d
94 gon=1
95 ug136
96 ug11

```



```

97 есх4<100
98 гоx6=c
99 ug11
100 гоx5=c
101 ug11
102 есх4<105
103 гоx5=δ
104 ug9
105 гоx6=δ
106 ug9
107 вьс=c+x3
108 ne5a в c
109 ввм н δ
110 ug2
111 cn112 ввм н δ а в c
113 got=c κ=2 n=1
114 ug7
115 гоm=a н=в n=0 κ=3
116 ug7
117 еск-2=115
118 еск-3=121
119 есн-1=107
120 ug93
121 вьδ=δ+t
122 ne5m н δ
123 вва в c
124 ug113
125 вco=о+0,000002 m=m+0,000002
126 ug19
127 еск-2=129
128 ug118
129 ne5m н δ
130 ug115
131 есн=134
132 ес((x6-x5)/δ)-0,0010<92
133 ug17
134 ес((x6-x5)/c)-0,001<92
135 ug17
136 есн-в<139
137 гоx6=c
138 ug140
139 вьx6=3δ
140 гоa=m в=m x5=0
141 ug96

```

XI. Программа
Расчет прибылей отливов "Кольцо" из углеродистых
сталей (для ЭЦВМ "Наури")

```

an13 awxyl umg
1 88g1 g2 c δ
2 88a0=0,5π(g1+g2)  B=0,5(g1-g2)
3 ug4
4 ne5a0 B c δ
5 88m=8/c
6 go1=δ
7 ec1-1=11
8 ec1-2=13
9 ec1-3=15
10 ug2
11 есм-4,5>2
12 ug18
13 есм-7>2
14 ug20
15 есм-8>2
16 88p=0-0,0068134m^4+0,186182m^3-1,8987268m^2+7,60941m+1,0705323
17 ug21
18 88p=0-0,0027052m^4+0,0961848m^3-1,1180868m^2+4,3386m-0,0450207
19 ug21
20 88p=0-0,0106941m^4+0,2667666m^3-2,371986m^2+8,250399m-0,4364179
21 88z=a0/cp+0,5
22 go1=z z=1
23 ec1-1<31
24 gon=1
25 ug34
26 ug27
27 ug28
28 ug29
29 ug30
30 ug34
31 goz=1 n=1
32 ug33
33 ug34
34 88p=a0/z
35 gos=0 i=1 a1=0
36 88a1=a1+p
37 88a0=(a1B+8c+a1c)/(3 e(0,666666 ln(a1Bc)))
38 ug86
39 88p=0,5a1B/(a1B+8c+a1c)  y0=2/270^3
40 gof=1 x1=0 y1=0,1666666
41 88x0=0,5(x1+y1)  n=(1-2x0)^2x0-y0
42 gom=ln
43 есм-0,0001<50
44 88m=(1-2x1)^2x1-y0
45 есмл>48
46 88y1=x0
47 ug41
48 88x1=x0
49 ug41
50 ecj-2=79

```

```

51 bwlj=xo
52 gox1=0,166666666 y1=0,5 j=2
53 ug41
54 ecw=0,00001<59
55 ug81
56 bwg=1/o w2=24,888g4-64,099g3+61,491g2-24,81g+3,6755 w2=1/w2
57 bwe=(w2-w1)(r-l1)/(l2-l1)+w1
58 ug62
59 bwe=0,89
60 ug62
61 bwe=3,1413333o4-35,6578183o3+157,154390o2-308,6774177o+230,95
62 bws=s+a,8c/e
63 bci=1+1
64 eci=n<36
65 ug66
66 ug67
67 bwi3=s/z n3= e(0,3333333333 ln(u3/0,65449))
68 ne5z u3 n3
69 ug1
70 bwp=0,5(a0-H0cz)
71 go1=z n=2
72 ug35
73 go1=1 p=1
74 ug76
75 go1=2 p=2
76 bwi1=s/p n1= e(0,33333333 ln(u1/0,654498))
77 ne5z u1 n1
78 ug1
79 bwl2=xo b=l2-l1
80 ug54
81 eco=1,5>84
82 bwg=1/o w1=15,24g4-27,539g3+8,176g2+9,9789g-4,7143 w1=1/w1
83 ug56
84 bwg=1/o w1=24,888g4-64,099g3+61,491g2-24,81g+3,6755
w1=w1+0,03889(2,2-o)/0,7 w1=1/w1
85 ug56
86 eco=3,5>89
87 eco=2,2>61
88 ug39
89 bwe=23,8(o-2,7)
90 ug62
91 bwp=pc (
92 ug35

```

XII. Программа

для расчета напряжений и деформаций при одноосном изотермическом растяжении (для ЭЦВМ "Наири")

```

an13 xys
1 88x1 x2 y1 y2 w
2 goδ=0,0005
3 got=0 n=0 r=0 w=0
4 8ct=t+5
5 8wz=δy2x1^2(1- e(-(t(x1+x2)/y2)))/(x1+x2)^2+δtx1x2/(x1+x2)
s0=δt s1=z/x1 s2=δt-s1
6 8wln=(z-w)/w
7 gom=ln
8 есм=0,00001≤23
9 есz-w>17
10 gor=t
11 есn-1>21
12 gow=t
13 un1
14 ne5t s0
15 ne9z s1 s2
16 ug4
17 goe=t
18 8сn=n+1
19 8wt=(r+t)/2
20 ug5
21 8wt=(e+t)/2
22 ug5
23 8wm=t
24 un2
25 ne9δ n z
26 got=w
27 8ct=t+5
28 8wa=0,5(x1/y1+x2/y2+x1/y2)- √(0,25(x1/y1+x2/y2+x1/y2)^2
+ x1x2/(y1y2)) 8=0,5(x1/y1+x2/y2+x1/y2)+
√(0,25(x1/y1+x2/y2+x1/y2)^2-x1x2/(y1y2)) c=1- e(-a(t-n))
g=1- e(-b(t-n)) p=-(δx1-δby1-w(x1+x2)/y2+δnx1x2/y2)/(a-b)
l=(δx1-aδy1-w(x1+x2)/y2+δnx1x2/y2)/(a-b) z=w-pc-gl
s0=δt s1=z/x1 s2=(ay1-x1)pc/(ax1y1)+(by1-x1)gl
(8x1y1)+δn-w/x1 s3=pc/(ay1)+gl/(8y1)+δ(t-n) u=s1+s2+s3
29 un1
30 ne5t s0 u
31 ne7z s1 s2 s3
32 есt-85≤27
33 8сδ=δ+0,0005
34 есδ-0,0015≤3
35 kouc1

```

Идентификаторы переменных:

t = t	y ₂ = λ ₂	s ₁ = ε ₁	a = α	y ₁ = λ ₁
n = t ₀	z = σ	s ₂ = ε ₂	b = β	} см. формулу (64)
x ₁ = E ₁	w = σ _s	s ₃ = ε ₃	p = A	
x ₂ = E ₂	s ₀ = ε	c = ε _c	l = B	

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. Баландин Г. Ф. Основы теории формирования отливки. Часть I. М., Машиностроение, 1976. 328 с.
2. Баландин Г. Ф. Формирование кристаллического строения отливки. 2-е изд. М., Машиностроение, 1973. 288 с.
3. Василевский П. Ф. Технология стального литья. М., Машиностроение, 1974. 408 с.
4. Вейник А. И. Расчет отливки. М., Машиностроение, 1964. 404 с.
5. Гиршович Н. Г. Кристаллизация и свойства чугуна в отливке. М.—Л., Машиностроение, 1966. 562 с.
6. Гуляев Б. Б. Теория литейных процессов. М.—Л., Машиностроение, 1976. 214 с.
7. Данилов В. И. Строение и кристаллизация жидкостей. Киев, Изд-во АН УССР, 1956. 424 с.
8. Ефимов А. В. Разливка и кристаллизация стали. М., Металлургия, 1976. 552 с.
9. Журавлев В. А. О макроскопической теории кристаллизации сплавов. — Известия АН СССР, 1975, № 5, с. 141—147.
10. Каширцев Л. П. Анализ горячеломкости алюминий—кремниевых сплавов. — Физика и химия неорганических материалов, 1977, № 1, с. 87—92.
11. Колмогоров А. Н. К статической теории кристаллизации. — Известия АН СССР (серия математическая). 1937, № 3, с. 17—21.
12. Новиков И. И. Горячеломкость цветных металлов и сплавов. М., Наука, 1966. 300 с.
13. Основы кибернетики /А. И. Галушкин, Ю. И. Дегтярев, Б. Н. Калинин и др. Под ред. К. А. Пупкова. М., Высшая школа, 1974. 413 с.
14. Райнер М. Реология. Пер. с англ. М., Наука, 1955. 224 с.
15. Флемингс М. К. Процессы затвердевания. Пер. с англ. М., Мир, 1977. 424 с.
16. Хворинов Н. И. Кристаллизация и неоднородность стали. Пер. с чешск. М., Машгиз, 1958. 392 с.
17. Чернов Д. К. и наука о металлах. — В кн.: Труды Д. К. Чернова /Под ред. Н. Т. Гудцова. М.—Л., Металлургиздат, 1950. 564 с.

Дополнительный

18. Борисов В. Т. — Доклады АН СССР, т. 136, № 3, 1961, с. 583—596.
19. Биркгоф Г., Барта Т. Современная алгебра. Пер. с англ. М., Мир, 1976. 400 с.
20. Бусленко В. Н. Автоматизация имитационного моделирования сложных систем. М., Наука, 1977. 240 с.
21. Бусленко Н. П., Калашников В. В., Коваленко И. П. Лекции по теории сложных систем. М., Советское радио, 1973. 440 с.

22. Вайнгард У. Введение в физику кристаллизации металлов. Пер. с англ. М., Мир, 1976. 160 с.
23. Вейник А. И. Термодинамика литейной формы. М., Машиностроение, 1968. 240 с.
24. Гаген-Торн В. О. Кристаллизация и строение слитка. — *Металлург*, 1937, № 2, с. 18, № 11, с. 23.
25. Гречный Я. В. О зарождении кристаллов в двойных сплавах. — В кн.: *Рост кристаллов*. М., Изд-во АН СССР, 1957. с. 108
26. Грум-Гржимайло В. Е. Производство стали. 3-е изд. М.—Л., Госмашметиздат, 1933. 408 с.
27. Гуляев Б. Б. Затвердевание и неоднородность стали/ Под ред. Ю. А. Нехенджи. М.—Л., Metallurgizdat, 1950. 228 с.
28. Гуляев Б. Б. Литейные процессы. М.—Л., Машгиз, 1960. 416 с.
29. Данилов В. И. Основные физические факторы кристаллизации. — *Сталь*. 1955, № 10, с. 15
30. Данков П. Д. Кристаллохимический механизм взаимодействия поверхности кристаллов с чужеродными элементарными частицами. — *ЖФХ*, т. 20, 1946, с. 324.
31. Жуков А. А. Основы расчета структуры и прочности серого чугуна. — В кн.: *Вопросы теории литья*. М., Машгиз, 1957, с. 163—252.
32. Иванцов Г. П. К вопросу о возможности «дождя» кристаллов в стальном слитке. — *Сталь*, 195, № 10, с. 5—11.
33. Иванцов Г. П. Диффузионное переохлаждение при кристаллизации бинарного сплава. — *Доклады АН СССР*, 1951, т. 81, № 2, с. 217.
34. К вопросу о горячих (кристаллизационных) трещинах при литье и сварке/ А. А. Бочвар, Н. Н. Рыкалин, И. И. Новиков и др. — *Литейное производство*, 1960, № 10, с. 47.
35. Казачковский О. Д. О влиянии рельефа поверхности механических примесей на кристаллизацию жидкости. — В кн.: *Сборник научных работ лаборатории металлофизики*. Киев, Изд-во АН УССР, 1948, с. 137.
36. Корольков А. М. Литейные свойства металлов и сплавов. М., Наука, 1967. 200 с.
37. Куманин И. Б. Вопросы теории литейных процессов. М., Машиностроение, 1976. 216 с.
38. Леви Л. И., Кантеник С. К. Литейные сплавы. М., Высшая школа, 1967. 435 с.
39. Литье тонкостенных конструкций /Ю. А. Степанов, Э. Ч. Гини, Е. А. Соколов, Ю. П. Матвейко, Под ред. Г. Ф. Баландина. М., Машиностроение, 1965, 224 с.
40. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Высшая школа, 1967. 424 с.
41. Любов Б. Я. Теория кристаллизации в больших объемах. М., Наука, 1975. 256 с.
42. Новиков И. И., Золотаревский В. С. Дендритная ликвация в сплавах. М., Наука, 1966. 156 с.
43. Прохоров Н. Н. Горячие трещины при сварке. М., Машгиз, 1952. 224 с.
44. Прохоров Н. Н. Физические основы сварки. Т. II. М., Металлургия, 1976. 562 с.
45. Пржибыл Й. Теория литейных процессов. Пер. с чешск. М., Мир, 1967. 328 с.
46. Самойлович Ю. А. Формирование слитка. М., Металлургия, 1977. 160 с.
47. Семенченко В. К. Поверхностные явления в металлах и сплавах. М., ГИТТЛ, 1957. 320 с.
48. Снаплев Ю. М., Старосельский В. А. Моделирование и управление в сложных системах. М., Советское радио, 1974. с. 10.
49. Уолкер Дж. У. Структура слитков и отливок. — В кн.: *Жидкие металлы и их затвердевание*. М., Metallurgizdat, 1962, с. 355—370.
50. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1945. 422 с.
51. Чалмерс Б. Теория затвердевания. Пер. с англ. М., Металлургия, 1968. 288 с.

Предисловие	3
Раздел I	
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ ТЕЛА ОТЛИВКИ	
Глава 1. Главный аспект центральной проблемы теории формирования отливки	5
1. Границы тепловой теории формирования отливки	5
2. Частные теории формирования отливки	7
3. Постановка проблемы в целом	9
Глава 2. Характеристики строения тела отливки, его неоднородности и дефектов	10
4. Кристаллическое строение отливки	11
5. Неоднородность химического состава отливки	14
Прямая зональная ликвация	15
Обратная зональная ликвация	17
Дендритная ликвация	19
6. Пористость тела отливки	20
Газовая пористость	20
Усадочная пористость	21
Газоусадочная пористость	23
7. Механические свойства отливки	25
8. Горячеломкость литейных сплавов	26
9. Связь характеристик строения отливки с диаграммой состояния сплавов	27
Глава 3. Характеристики условий литья	28
10. Скорость затвердевания отливки	29
11. Перегрев расплава при плавке	31
12. Температура расплава, заливаемого в форму	34
13. Внепечная обработка расплава	35
Глава 4. Математическое описание основных процессов в двухфазной зоне фронта кристаллизации отливки	37
14. Двухфазная (переходная) зона фронта кристаллизации отливки	37
15. Тепловые процессы в двухфазной зоне	41
16. Зарождение и совместный рост кристаллов в ограниченном объеме переохлажденного расплава. Уравнение А. Н. Колмогорова	43
	331

17. Объемная усадка двухфазной зоны	48
18. Движение расплава в двухфазной зоне. Уравнение Дарси	49
19. Условие образования пористости в теле отливки по В. А. Журавлеву и М. К. Флемингсу	52
20. Перенос растворенного компонента и примесей сплава в двухфазной зоне	53
21. Деформация двухфазной зоны при затруднении свободной линейной усадки затвердевающей отливки	57
Глава 5. Математическая схема теории формирования макростроения тела отливки	59
22. Анализ допущений	59
23. Математическая схема	61
24. Математические модели частных теорий	66
Затвердевание отливки. Модель А. И. Вейника	66
Формирование кристаллического строения отливки. Модель процесса	68
Образование неоднородности химического состава отливки. Модели В. Т. Борисова и В. А. Журавлева	69
Усадочная и газоусадочная пористость в теле отливки. Модели процесса	71
25. Фрагментарность теории формирования макростроения отливки	74
26. Упражнения	77

Раздел II

ФОРМИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МАКРОСТРОЕНИЯ ОТЛИВКИ

Глава 6. Основные понятия, законы и уравнения теории кристаллизации металлов и сплавов	79
27. Исходные положения	79
28. Зарождение кристаллов	80
29. Рост кристаллов	84
30. Воздействие примесей	87
Растворимые примеси. Модификаторы 1-го рода	88
Нерастворимые (механические) примеси. Модификаторы 2-го рода	90
Активированные (активные) нерастворимые примеси	92
31. Основные представления общей теории кристаллизации	93
Глава 7. Описательная теория кристаллизации отливок. Математическая модель процесса формирования кристаллического макростроения тела отливки	94
32. Теория Д. К. Чернова	95
33. Основные представления описательной теории кристаллизации отливки	98
34. Затруднения описательной теории	104
35. Схема процесса кристаллизации отливки и ее математическое представление	109
Схема процесса	110
Упрощение зависимости скорости зарождения и роста кристаллов от переохлаждения	111
Математическая модель И. Л. Воробьева	113
36. Обобщенная математическая модель	115
37. Упражнения	118

Глава 8. Объемная кристаллизация	118
38. Математическая модель объемной кристаллизации в литейной форме. Уравнение Н. Г. Гиршовича	118
39. Кинетика кристаллизации	121
Кристаллизация от зародышей и затравок. 1-я задача И. Л. Воробьева	122
Кристаллизация от затравок. Приближенное аналитическое решение 1-й задачи И. Л. Воробьева	125
40. Условия объемной кристаллизации в литейной форме	128
Рост кристаллов от затравок	129
Рост кристаллов от зародышей	133
41. Анализ кинетики кристаллизации	135
Переохлаждаемость расплава	136
Рекалесценция переохлажденного расплава	138
Результаты экспериментов	139
42. Число и размер кристаллов	142
Влияние примесей	143
Влияние перегрева	146
43. Упражнения	149

Глава 9. Последовательная кристаллизация	149
44. 2-я задача И. Л. Воробьева	149
45. Кинетика последовательной кристаллизации от затравок	151
46. Анализ кинетики кристаллизации	156
Условия формирования зернистого кристаллического строения отливки	156
Условия транскристаллизации в отливке	159
47. Неоднородность кристаллического макростроения отливки	160
Протяженность зоны столбчатых кристаллов	161
Средний размер зерна в центральной зоне отливки	163
48. Управление формированием кристаллического макростроения отливки	164
Влияние перегрева	165
Режимы плавки и заливки	171
Применение вибрации, ультразвуковых колебаний и электромагнитных полей	173
Введение в расплав микрохолодильников	176
Комплексное модифицирование	180
49. Задачи	182

Раздел III

ПИТАНИЕ ОТЛИВКИ

Глава 10. Пористость и ликвационные дефекты в отливках	183
50. Теоретическая оценка пористости отливки	183
Оценка пористости по И. Б. Куманину и А. И. Вейнику	183
Оценка пористости на модели Флемингса—Журавлева	187
51. Теоретическая оценка неоднородности химического состава отливки	191
52. Затруднения теоретических оценок	193
Глава 11. Основные определения и элементы аппарата системотехники	198
53. Основные понятия и определения	198
54. Элементы теории множеств	200
55. Элементы теории графов	208
56. Упражнения	215
	333

Глава 12. Основы формализованной теории питания отливки прибы- лями	215
57. Формализованная теория проектирования технологии литья и конструирования технологичных отливок	216
Проектирование технологии литья	216
Конструирование технологичных отливок	218
58. Системотехническое описание конфигурации фасонной отливки	220
59. О формализованном описании технологии и технических средств питания отливки	224
60. Упражнения	229
Глава 13. Расчет прибылей для фасонных отливок	229
61. Математическая модель элемента отливки	230
62. Взаимодействие элемента отливки с прибылями	233
Прибыль в виде куба	233
Прибыль в виде произвольного параллелепипеда	235
63. Взаимодействие элементов тела отливки. Математическая модель С. Н. Полякова	239
Взаимодействие двух элементов	240
Взаимодействие любого числа элементов	241
64. Управление качеством отливки. Расчет числа и объема полушаро- вых прибылей	243
Улучшение технологичности отливки	243
Улучшение качества отливки	244
Расчет числа прибылей по А. С. Чеботареву и Ю. М. Чикуну	245
65. Пример автоматизированного проектирования прибылей для сталь- ной отливки	247
66. Задачи	251

Раздел IV

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРЯЧИХ ТРЕЩИН В ОТЛИВКАХ

Глава 14. Постановка проблемы. Направление ее разработки	253
67. Причины образования горячих трещин	253
68. Определение путей решения проблемы	255
69. Теория горячеломкости сплавов	257
Эффективный интервал кристаллизации сплавов по А. А. Бочвару	257
Показатель горячеломкости сплавов по Н. Н. Прохорову	259
Математизация теории	261
70. Затруднения теории горячеломкости сплавов	264
Сопоставление с экспериментом	264
Показатель горячеломкости сплавов по И. И. Новикову	266
71. Направления дальнейшей разработки проблемы	267
Глава 15. Основы реологии	269
72. Основные понятия и определения	269
73. Классические тела	270
Упругое тело Гука	270
Вязкая жидкость Ньютона	271
Пластическое тело Сен-Венана	272
74. Сложные реологические тела	273
Тело Кельвина	274
Тело Максвелла	275
Тело Шведова	277
75. Деформация сложных реологических тел под действием постоян- ной нагрузки	280
76. Упражнения и задачи	282

Глава 16. Горячеломкость сплавов	283
77. Реологический эксперимент	283
Метод П. А. Ребиндера	283
Результаты	285
78. Реологическая модель сплава	286
Механическая модель сплава. Реологическая формула	286
Реологическое уравнение Л. П. Каширцева	288
Реологические характеристики	290
79. Деформационная способность сплавов	292
80. Об оценке горячеломкости сплавов	295
81. Упражнения	297
Глава 17. Трещиностойкость отливок	298
82. Исходное положение	298
83. Изменение температуры затвердевающего расплава в литейной форме	299
84. Реологические свойства затвердевающей отливки	299
85. Деформация растяжения затвердевающей отливки	301
86. Математическая модель образования горячих трещин в отливках Математическая модель Л. П. Каширцева	303
Упрощенная математическая модель	304
87. Оценка трещиностойкости отливок	306
Теоретическая оценка	307
Технологические пробы	309
88. Способы предохранения отливок от образования в них горячих трещин	312
89. Задачи	314
Приложения	315
Список рекомендуемой литературы	329

ИБ № 828

Геннадий Федорович Б а л а н д и н

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОТЛИВКИ

Редактор *Г. Н. Соболева*
Художественный редактор *П. П. Розачев*
Технический редактор *Н. Ф. Демкина*
Корректор *О. Е. Мишина*
Переплет художника *Е. В. Бекетова*

Сдано в набор 24.01.79.

Подписано к печати 29.08.79.

Т-13255. Формат 60×90/16. Бумага типографская № 2.
Гарнитура литературная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 21,0. Уч.-изд. л. 21,8.
Тираж 12 000 экз. Заказ 1261. Цена 1 р.

Издательство «Машиностроение»
107885, Москва, Б-78, 1-й Басманный пер, 3

Ленинградская типография № 6
Ленинградского производственного объединения
«Техническая книга» Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10