Г. Ф. БАЛАНДИН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОТЛИВКИ

Часть I

ТЕПЛОВЫЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ. ЗАТВЕРДЕВАНИЕ И ОХЛАЖДЕНИЕ ОТЛИВКИ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов, обучающихся
по специальности «Машины и технология
литейного производства»

Москва «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1976

6П4.1
Б20
УДК 621.746.62 : 001.1 (075.8)

Рецензенты: Кафедра «Машины и технология
литейного производства» Пензенского политехнического института
и д-р техн. наук проф. **Н. Г. Гиршович**

Баландин Г. Ф.

Б20 Основы теории формирования отливки. В 2-х частях. Ч. I. Тепловые основы теории. Затвердевание и охлаждение отливки. Учебное пособие для машиностроительных вузов по специальности «Машины и технология литейного производства». М., «Машиностроение», 1976.

328 с. с ил.

В части I изложены тепловые основы теории формирования отливки. Главное внимание уделено способам построения математических моделей процессов заполнения формы, затвердевания и охлаждения в ней отливки и их систематическому анализу на основе этих моделей с использованием ЭВМ и приближенных аналитических решений. В итоге дана методика расчета технологических режимов, которая может быть использована для проектирования (в том числе машинного) технологии литья в песчаные формы и кокили. Полученные приближенные математические модели затвердевания и охлаждения отливок предназначены для изучения и оценки в части II эффективности различных способов управления кристаллизацией и уменьшения брака отливок.

Б $\frac{31204\text{-}061}{038(01)\text{-}76}$ 061-76 6П4.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом учебном пособии идет речь о некоторых принципах технической науки, у которой еще нет общепринятого названия, но которая занимается изучением процессов формирования свойств отливки.

Никакая наука не рождается внезапно. Каждая наука появляется в результате совпадения все возрастающего интереса к определенному классу важных практических задач и уровня развития тех принципов, методов и средств, с помощью которых эти задачи возможно решить.

Стремительное повышение требований к служебным и технологическим свойствам отливок, обусловленное научно-техническим прогрессом машиностроения, заставляет литейщиков все чаще обращаться к фундаментальным и техническим наукам, искать в них те принципы, методы и средства, какие необходимы для решения новых и сложных задач современного литейного производства — получения отливок с заданными свойствами.

Формирование свойств отливки — это сложная совокупность разнородных по физическому и химическому содержанию процессов, взаимодействующих друг с другом на различных этапах технологии литья.

Процессом, ответственным за формирование большинства свойств отливки, является ее затвердевание.

Затвердевание металлов и сплавов происходит в результате зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве. От числа, скорости, формы роста кристаллов и их преимущественной ориентировки в теле отливки зависят ее кристаллическое строение и следовательно, ее важнейшие служебные и технологические свойства.

Очевидно, однако, что протекание процесса затвердевания и его конечный результат обусловлены отводом теплоты от расплава в литейную форму. По этой причине I часть данной книги посвящена подробному анализу именно процессов затвердевания и охлаждения отливки в форме.

Во II части будут рассмотрены процессы формирования кристаллического строения тела отливки, а также образования в нем усадочных раковин, рыхлот и пористости, появление химической неоднородности и газовой пористости, возникновение горячих трещин в отливках и коробление отливок от остаточных напряжений.

Назначение этого учебного пособия не только в том, чтобы сообщить студенту сведения, требующиеся для усвоения основ теории формирования свойств отливок в пределах утвержденной вузовской программы. Автор стремился нацелить его на творческое применение теории для совершенствования существующих и разработки новых способов литья и, следовательно, управления формированием свойств отливок. Поэтому автор старался изложить учебное пособие как логически развивающуюся «конструкцию», вскрывающую пути создания научных концепций и их использования при анализе процессов формирования отливок на базе принципов, методов и средств фундаментальных и ряда технических наук: физики металлов, теории теплообмена, реологии, теории кристаллизации и др.

Конечно, это удалось далеко не везде. Главная причина заключается в том, что еще не для всех разделов теории литейных процессов предложены достаточно обоснованные, четкие и простые концепции, получившие широкое признание. Тем не менее, автор считал необходимым каждую проблему теории ставить возможно шире и исследовать ее не только на основе данных практики и специальных экспериментов, но и с помощью математических моделей процессов формирования отливки.

Здесь ведущим является известное положение К. Маркса: «. . . наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой».[1]

К сожалению, при написании учебного пособия автору пришлось обращаться к приближенным математическим моделям, применяемым в современной теории литейных процессов. Однако распространение электронно-вычислительных машин (ЭВМ) и обучение студентов применению ЭВМ для решения инженерных задач доказало не только практическую полезность математики, но и возможность математического моделирования реальных явлений. В свою очередь, это позволило включить в учебное пособие примеры использования ЭВМ для анализа таких сложных процессов, как затвердевание отливок, формирование кристаллического строения их тела, питание отливок и др., и, что главное, — наметить пути дальнейшей математизации литейной технологии. По мнению автора, это совершенно необходимо для ускорения темпа научно-технического прогресса литейного производства как будущего металлообработки.

---

[1] Из письма К. Маркса к П. Лафаргу. См. сб. «Воспоминания о Марксе и Энгельсе». М., Госполитиздат, 1956, с. 66.

Литейное производство — единственное производство заготовок деталей, формообразование которых осуществляется тогда, когда материал заготовки находится в расплавленном состоянии. В этом состоит важнейшее достоинство и перспективность технологии литья: для придания детали любой конфигурации из любого расплава требуются минимальные затраты энергии. Но это же приводит к главному недостатку литых заготовок: в результате затвердевания расплава в отливках возникают многие дефекты, снижающие их свойства. Сейчас, помимо традиционного пластического деформирования литого металла, повышение свойств этого металла в изделиях достигается и другими способами: воздействием на процессы кристаллизации расплава в форме ультразвуком, вибрацией, электромагнитными полями, модификаторами, внутренними холодильниками и т. п. Разработка этих способов — заслуга теории формирования отливки. Создание новых, более эффективных способов повышения качества отливок — задача теории.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

T — температура, К;
t — время, с;
x, y, z — координаты пространства;
Q — количество теплоты, Дж;
Φ — тепловой поток, Вт;
q — плотность теплового потока в Вт/м^2;
$\mathrm{grad}\ T$ — температурный градиент, К/м;
c — удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);
λ — теплопроводность, Вт/(м·К);
α — коэффициент полной теплоотдачи, Вт/(м^2·К);
ρ — плотность, кг/м^3;
a — температуропроводность, м^2/с;
w — скорость течения жидкости (газа), м/с;
F — площадь изотермической поверхности, м^2;
S — скорость охлаждения, К/с;
L — удельная теплота кристаллизации, Дж/кг;
$\alpha_к$ — коэффициент теплоотдачи конвекцией, Вт/(м^2·К);
$\alpha_и$ — коэффициент теплоотдачи излучением в Вт/(м^2·К);
σ — постоянная Стефана—Больцмана, равная $5{,}67 \times 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4);
ε — степень черноты тела; толщина кокильной краски, м;
ε_0 — приведенная (эффективная) степень черноты системы тел;
T_0 — температура поверхности тела, К;
$T_с$ — температура окружающей среды, К;
F_0 — площадь граничной поверхности тела, м^2;
q_0 — поверхностная плотность теплового потока, Вт/м^2;
Φ_0 — тепловой поток через поверхность тела, Вт;
Q_0 — количество теплоты, проходящей через поверхность тела, Дж;
q_v — объемная плотность теплового потока, Вт/м^2;
I — объемная плотность теплового потока от внутренних источников, Вт/м^3;
W — удельная объемная теплота, выделяемая (поглощаемая) внутренними источниками, Дж/м^3;

l — характерный размер тела, м;

r — радиус-вектор в цилиндрической и сферической системах координат, м;

x_0, y_0, z_0 — координаты граничной поверхности тела, м;

r_0 — радиус граничной поверхности цилиндра (сферы), м;

$T_н$ — начальная температура тела, К;

b — коэффициент тепловой аккумуляции тела, Дж/(м^2·К·с^{0,5}) или Вт·с^{0,5}/(м^2·К);

$\mathfrak{R}$ — приведенный размер тела, м;

d — диаметр цилиндра (сферы), м;

h — высота цилиндра, м;

l_0 — половина толщины плиты, м;

$\vartheta = T - T_с$ — избыточная температура тела, К;

$\vartheta_0 = T_0 - T_с$ — избыточная температура поверхности тела (температурный напор), К;

ν — кинематическая вязкость жидкости, м^2/с;

g — ускорения силы тяжести, м/с^2;

γ — коэффициент объемного расширения тела, К$^{-1}$;

$s_{эф}$ — эффективная удельная теплота кристаллизации сплавов типа растворов, Дж/кг;

T_L — температура ликвидуса сплава, К;

T_S — температура солидуса сплава, К;

T_E — температура эвтектики сплава, К;

μ — темп кристаллизации сплава, К$^{-1}$;

k_0 — коэффициент распределения растворимого компонента;

C_L — концентрация растворимого компонента сплава в расплаве, %;

C_S — концентрация растворимого компонента сплава в твердой фазе, %;

β — коэффициент тепловой проводимости краски (смазки), Вт/(м^2·К);

$l_ф$ — толщина формы, м;

$\theta_к$ — средняя калориметрическая температура системы отливка—форма, К;

H — гидравлический напор, м;

ζ — глубина прогрева формы, м;

К — множитель подобного преобразования;

F_0 — площадь граничной поверхности тела, м^2;

$T_{зал}$ — начальная температура расплава, заливаемого в форму, К;

$T_ф$ — начальная температура формы, К;

$t_{зал}$ — продолжительность заполнения формы расплавом, с;

$t_ц$ — продолжительность технологического цикла изготовления отливки, с;

ξ — толщина твердой корки затвердевающей отливки, м; коэффициент гидравлических потерь;

L_2 — удельная теплота кристаллизации сплава в интервале его температур ликвидус и солидус, Дж/кг;

L_E — удельная теплота кристаллизации эвтектики, Дж/кг;

Ψ_E — доля эвтектики в до- или заэвтектическом сплаве;

U — линейная скорость затвердевания, м/с;

$U_э$ — линейная скорость затвердевания эквивалентной отливки, м/с;

$\zeta_э$ — глубина прогрева формы эквивалентной отливки, м;

$\xi_э$ — толщина твердой корки эквивалентной отливки, м.

Индексы у переменных и параметрических величин

1 — расплав;

2 — двухфазная зона затвердевающей отливки;

3 — отливка;

4 — форма.

Обобщенные переменные и критерии подобия

$$X \equiv \frac{x}{l}; \quad Y \equiv \frac{y}{l}; \quad Z \equiv \frac{z}{l}; \quad R \equiv \frac{r}{l}; \quad \Theta \equiv \frac{T - T_с}{T_н - T_с};$$

$$\tau \equiv \frac{at^2}{l}; \quad \mathrm{Bi} \equiv \frac{\alpha}{\lambda} l; \quad \mathscr{D} \equiv \frac{d}{2h}; \quad \mathscr{A} \equiv \frac{a}{c}; \quad \mathscr{B} \equiv \frac{b}{c};$$

$$\mathscr{F} \equiv \frac{F_0}{F_э}; \quad \varphi \equiv \frac{V}{V_0}; \quad k_0 \equiv \frac{C_S}{C_L}; \quad \mathscr{L} \equiv \frac{L}{c_з (T_L - T_с)};$$

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{wD}{\nu}; \quad S_{эф} \equiv \frac{s_{эф}}{c_8 (T_L - T_с)}; \quad \mathrm{Nu} \equiv \frac{\alpha}{\lambda} d.$$

ВВЕДЕНИЕ

ЛИТЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Идея изготовления отливки (литой заготовки) чрезвычайно проста.

Давно и широко известно, что любая жидкость, налитая в сосуд, под действием силы притяжения Земли приобретает конфигурацию внутренней полости этого сосуда, как бы сложна она ни была. Если жидкость по тем или иным причинам затвердевает, то приобретенная ею конфигурация сохранится и вне сосуда.

При изготовлении отливки жидкость — это расплав, чаще всего металлического литейного сплава, сосуд — это литейная форма, в большинстве способов литья песчаная, керамическая или металлическая. Расплав заливают в форму через литниковую систему. Затвердевание расплава происходит в результате его кристаллизации. Твердая отливка охлаждается в форме до заданной температуры. Затем ее извлекают из формы; форму при этом разрушают (песчаную, керамическую) или разбирают на части (металлическую). После окончательного охлаждения и удаления литниковой системы отливка становится заготовкой деталей машин.

Если читатель на основе своих знаний и опыта в области технологии литейного производства составит структурную схему технологии изготовления фасонной отливки литьем в песчаные формы, то эта схема вряд ли будет существенно отличаться от приведенной на рис. 1. В ней обязательно будут присутствовать перечисленные операции: *Р* — приготовление расплава (плавка, раскисление, рафинирование и т. д.); *Ф* — приготовление формы (изготовление полуформ, стержней, сборка формы); *З* — заливка расплава в форму; *ЗО* — затвердевание расплава и охлаждение отливки в форме; *В* — выбивка отливки из формы; *О* — охлаждение отливки после выбивки; *У* — удаление литниковой системы, выпоров и прибылей. Назовем эти операции *необходимыми* для реализации идеи литья.

Остальные операции — дополнительные, предназначены для устранения дефектов отливки, которые возникают из-за несовер-

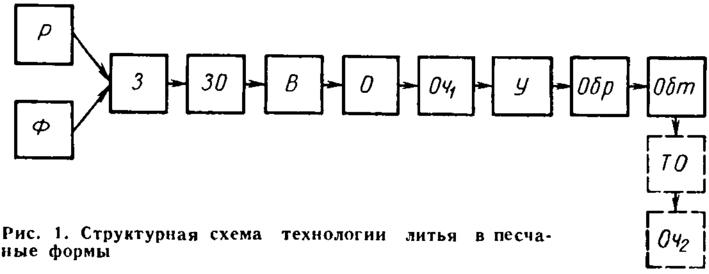


Рис. 1. Структурная схема технологии литья в песчаные формы

шенства способов осуществления необходимых операций технологии литья на производстве. На рис. 1 приведены наиболее типичные [1]: *Оч*$_1$ — очистка отливки от пригоревших к ней формовочной и стержневой смесей; *Обр* — обрубка заусенцев и заливов; *Обт* — обточка отливки в местах обрубки.

Естественно, что в зависимости от того или иного способа осуществления на производстве необходимых операций технологии литья набор и последовательность дополнительных операций могут быть различными.

Например, на рис. 1 первая дополнительная операция очистки отливки предваряет необходимую операцию удаления литниковой системы, выпоров и прибылей. Дело в том, что на практике очень часто во время очистки отливки от пригоревшего песка продолжается операция выбивки: в очистных агрегатах удаляют стержни из отливки. Применение формовочных смесей с добавками, предотвращающими химическое взаимодействие отливки и песка, и следовательно, образование пригара, делает ненужной очистку отливки. Однако операция очистки остается в технологическом процессе как продолжение операции выбивки. Поэтому использование стержней, получаемых из песчано-смоляных смесей в горячих ящиках, полностью устраняет операцию очистки, так как они легко удаляются из отливки во время выбивки ее из формы.

Появление на отливке заусенцев по разъему формы и заливов по стержневым знакам, как известно, вызвано неточным изготовлением полуформ и стержней и, следовательно, неточной сборкой формы. В свою очередь, это связано с применением малопрочных формовочных и стержневых смесей, а также с использованием недостаточно точных оснастки и машин. Поэтому изготовление полуформ по точной оснастке на автоматических линиях из высокопрочных смесей песка с бентонитовой глиной и противопригарными добавками, а также применение стержней, изготовлен-

---

[1] *ТО* — термическая обработка отливки; включается в технологию производства при необходимости улучшить механические свойства отливки или снять в ней остаточные напряжения. Если во время *ТО* отливка покрывается окалиной, то в технологию ее производства включается вторичная очистка *Оч*$_2$.

ных в горячих ящиках, позволяют сократить число и уменьшить объем дополнительных операций производства отливки.

Дефекты, появление которых требует очистки, обрубки и обточки отливок, полностью исключаются при литье в формы с газифицируемыми (испаряемыми) моделями, так как в этом случае песчаная форма не собирается, стержней нет, а восстановительная атмосфера, образующаяся при термической деструкции модели из пенополистирола, предотвращает пригорание сухого песка к отливке.

Приведенные примеры совершенствования способов осуществления на производстве необходимых операций технологии литья показывают, что операции, названные необходимыми, являются необходимыми и достаточными для производства фасонной отливки. Следовательно, именно они должны определять качество отливки как заготовки деталей машин.

В самом общем виде качество отливки можно оценивать следующими параметрами: точностью размеров, шероховатостью поверхности и показателями комплекса служебных и технологических[1] свойств литого металла. Даже поверхностный анализ существа необходимых операций позволяет заключить, что ответственность за качество отливки лежит на первых четырех и отчасти на шестой, которые являются основными.

Однако более тщательный анализ схемы на рис. 1, выполненный с учетом знаний и опыта читателя в области технологии литейного производства, должен привести его к выводу, что приготовление расплава и формы, заливка расплава в форму, затвердевание расплава и охлаждение отливки в форме и вне формы — *этапы* технологии производства отливки. Каждый из них имеет свою, ему присущую специфику и несет свою долю «ответственности» за качество отливки. Если качество отливки характеризовать точностью ее размеров, шероховатостью ее поверхности и показателями служебных и технологических свойств литого металла, то первые две характеристики зависят от этапов приготовления формы и отчасти от заливки ее расплавом, а остальные — от этапов приготовления расплава, заливки его в форму, затвердевания и охлаждения отливки.

Действительно, приготовление расплава, т. е. плавка металлов и сплавов в литейных цехах, — самостоятельный этап технологии производства отливки, предназначенный для изготовления «полуфабриката», который проходит «окончательную обработку» в литейной форме. Цель этого этапа — получение расплава литейного сплава заданного химического состава с той температурой

---

[1] Технологические свойства отливки — те, которые определяют возможность и степень совершенства ее последующей обработки: свариваемость (для изготовления сварно-литых деталей); обрабатываемость (для обработки резанием); деформируемость (если отливка является заготовкой для последующей объемной штамповки) и т. д.

и содержанием газов, окислов и неметаллических включений, какие требуются для достижения заданных свойств отливки на других этапах.

Изготовление формы — весьма важный этап технологии литейного производства. Если вспомнить идею процесса литья, то форма выступает как своеобразный инструмент, с помощью которого расплав превращается в отливку. Цель этого этапа — изготовить форму, способную обеспечить заданное качество отливки, если в нее будет залит расплав литейного сплава требуемой температуры и чистоты. От материала формы и точности ее изготовления зависят точность размеров отливки и шероховатость ее поверхности. Но, помимо этих характеристик качества отливки, от материала формы и ее конструкции зависит еще способность формы отводить теплоту от расплава во время его заливки и последующего затвердевания.

Таким образом, приготовление расплава и изготовление формы являются *предварительными* этапами технологического процесса литья. Собственно *процесс литья* начинается с момента заливки расплава в форму и заканчивается охлаждением отливки после извлечения ее из формы. За это время происходит заполнение формы расплавом, затвердевание и охлаждение затвердевшей отливки в форме до температуры ее выбивки, а также вне формы (т. е. после выбивки) до температуры, при которой возможны дополнительные операции технологии. В течение этого времени совершаются *процессы формирования* основных служебных и технологических свойств отливки. Естественно, что именно процессы формирования свойств отливки должны быть изучены в первую очередь, ибо, в конечном счете, только таким путем можно научно обоснованно определить требования к расплаву литейных сплавов и к литейной форме, необходимые для гарантированного получения отливки с заданными свойствами.

Исследование процессов формирования свойств отливки началось сравнительно недавно, но с каждым годом принимает все большие значение и масштаб. Фактически их изучение уже выделилось в самостоятельную *техническую науку*, краткое, но вполне точное название которой — *Формирование отливки*. Основа этой науки — теория процессов формирования свойств отливки — достаточно полно разработана главным образом русскими и советскими учеными.

* *
*

В литературе, посвященной изложению научных основ литейного производства, теорию процессов формирования свойств отливки называют теорией литейных процессов. Однако смысл такого названия более широкий.

В самом деле, *теория литейных процессов* в целом представляется состоящей из четырех разделов. Первым и центральным ее разделом должна быть теория процессов формирования свойств отливки или, короче, *теория формирования* *отливки*, изучающая процессы, которые происходят во время заливки расплава, его затвердевания в форме и последующего охлаждения отливки. К сожалению, в учебной литературе теория формирования отливки даже в своих основах еще не излагалась. Данное учебное пособие — первая попытка.

Второй раздел — *теория металлургических процессов плавки литейных сплавов*. В рамках общей теории металлургических процессов она разрабатывается давно. Основоположником металлургии как науки принято считать Плиния Старшего, жившего в Риме в I в. н. э. Общепризнанной вехой в истории развития металлургии является классический труд М. В. Ломоносова «Первые основания металлургии или рудных дел», изданный в 1763 г. В этой первой русской технической книге нашли отражение и вопросы изготовления отливок.

Современная теория металлургических процессов построена на основе положений и законов физической химии и химической физики, которые используют для анализа конкретных процессов, происходящих в разнообразных металлургических и плавильных агрегатах и системах во всех отраслях металлургии и машиностроения. При плавке литейных сплавов металлургические процессы в подавляющем большинстве случаев определяются необходимостью приготовлять эти сплавы из металлической шихты, раскислять расплав, рафинировать его и т. д. Поэтому теория металлургических процессов плавки литейных сплавов имеет лишь ряд особенностей, обусловленных большим разнообразием литейных сплавов и необходимостью получения расплава с требуемыми для литья фасонных отливок свойствами.

Наиболее полное изложение второго раздела теории литейных процессов дано в учебнике Л. И. Леви и Л. М. Мариенбаха[1]. В этом учебнике приведен краткий обзор истории развития теоретических основ металлургии (металлургических процессов).

Третьим разделом теории литейных процессов являются *учение о формовочных материалах и теория уплотнения литейных форм*. Этот раздел теории начали разрабатывать недавно. Теоретические основы учения о формовочных материалах впервые изложены в 1933 г. в книге П. П. Берга «Курс формовочных материалов». Основы теории уплотнения литейных форм, разработанные Н. П. Аксеновым, впервые были изложены в 1939 г. в учебнике «Оборудование литейных цехов».

В современном учении о формовочных материалах и теории уплотнения форм используются законы и положения физической химии, физико-химической механики и механики сыпучих тел. На этой основе разработаны многие перспективные формовочные материалы и технологические процессы изготовления форм и стержней. Наливные самотвердеющие смеси, «текучие» смеси для уплотнения форм прессованием, уплотнение одновременно прессованием и встряхиванием форм из маловлажных и высокопрочных смесей, материалы и процессы для изготовления форм по выплавляемым и выжигаемым моделям — вот далеко неполный перечень достижений третьего раздела теории литейных процессов.

Этот раздел теории систематизированно изложен в учебном пособии Ю. А. Степанова и В. И. Семенова[2] и учебнике П. Н. Аксенова[3].

Четвертый раздел — *термическая обработка отливки*. Она по своим принципам не отличается от обработки слитков, сварных конструкций и поковок и имеет собственную теоретическую основу — физику металлов и металловедение, — достаточно хорошо известную читателю из дисциплины «Материаловедение»[4]. Некоторые особенности обусловлены лишь разнообразием литейных

---

[1] **Леви Л. И., Мариенбах Л. М.** Основы теории металлургических процессов и технология плавки литейных сплавов. М., «Машиностроение», 1970. 496 с.

[2] **Степанов Ю. А., Семенов В. И.** Формовочные материалы. Под ред. Г. Ф. Баландина. М., «Машиностроение», 1969. 158 с.

[3] **Аксенов П. Н.** Оборудование литейных цехов. М., «Машиностроение», 1968. 458 с.

[4] **Лахтин Ю. М., Леонтьева В. П.** Металловедение. М., «Машиностроение», 1972. 511 с.

сплавов (в том числе чугуна) и необходимостью для ряда отливок разрабатывать режимы специальной термической обработки, снижающие в литых деталях остаточные напряжения, с целью предотвращения их от коробления или растрескивания в процессе эксплуатации.

* * *

Итак, технология изготовления отливки, несмотря на предельную простоту ее идеи, является обширным комплексом различных процессов. Анализ структуры технологии литья в песчаные формы позволяет выделить из этого комплекса сравнительно небольшой круг процессов, которые представляют собой основные этапы технологии, ответственные за формирование отливки: заполнение формы расплавом, затвердевание расплава и охлаждение отливки в форме и вне ее. Именно они определяют начало, ход и конечный результат формирования свойств отливки.

ФОРМИРОВАНИЕ ОТЛИВКИ

Формирование отливки — это формирование ее конфигурации, тела и поверхности; вместе с тем — это образование различных дефектов отливки, ухудшающих ее качество: неоднородности кристаллического строения, ликвации, усадочной рыхлоты, усадочной и газовой пористости, горячих трещин, пригара, остаточных напряжений и вызываемого ими коробления отливки и др.

Короче говоря, формирование отливки — это прежде всего формирование ее свойств.

Процессы формирования отливки складываются из разнородных явлений — гидродинамических, физико-химических, тепловых, фильтрационных, усадочных, деформационных и др. Эти явления, развиваясь, а также взаимодействуя одно с другим при заполнении формы, затвердевании расплава и охлаждении отливки, обусловливают все многообразие процессов формирования ее свойств.

Большинство свойств отливки формируется во время затвердевания расплава в форме. Теория формирования отливки рассматривает процесс затвердевания как наиболее полно отражающий специфику формирования свойств литой заготовки. Затвердевание обусловлено отводом теплоты от расплава в форму. Оно происходит в результате кристаллизации расплава, т. е. путем зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве. Число кристаллов, скорость и форма их роста, а также преимущественная их ориентировка в теле отливки полностью определяют ее кристаллическое строение и, следовательно, ее наивысшие служебные свойства для данных условий затвердевания расплава определенного качества. Поэтому первая цель теории формирования отливки — изучить процесс затвердевания расплава в литейной форме и указать рациональные способы получения отливки с заданным кристаллическим строением.

Затвердевание расплава в форме сопровождается другими процессами, развитие которых приводит к образованию дефектов отливки и, следовательно, к снижению ее свойств. Главные дефекты — химическая неоднородность, усадочные раковины и рыхлота, усадочная и газовая пористость, горячие трещины. Эти процессы развиваются благодаря явлениям, сопутствующим кристаллизации расплава в условиях литейной формы. Главные из них — физико-химические, усадочные, фильтрационные, деформационные. В этой связи вторая, не менее важная цель теории формирования отливки — изучение процессов образования дефектов и изыскание путей, исключающих появление их в отливках или уменьшающих их влияние на свойства литой заготовки.

Само собой разумеется, что суммарной целью теории формирования отливки является изучение всего многообразия процессов в целом и нахождение способов их компоновки, позволяющих получить литую заготовку заданных свойств. Однако это многообразие процессов обширно и изучение его в целом для современной теории — цель пока недостижимая. Читатель, по-видимому, обратил внимание на то, что в соответствии с современной теорией нами выделен процесс затвердевания расплава в форме как основной, ответственный за формирование большинства свойств отливки. Однако и его изучение в целом, т. е. с учетом сопутствующих процессов, оказывается во многих случаях делом чрезвычайной сложности. Поэтому и процесс затвердевания рассматривается также по частям: в начале основной — кристаллизация расплава в литейной форме и формирование кристаллического строения отливки, затем — сопутствующие процессы и образование в отливках дефектов.

Но здесь читатель должен возразить: такое деление затвердевания на основной и сопутствующие процессы незаконно, ибо они совершаются одновременно и их суперпозиция неочевидна. Возникает ситуация, с которой сталкивается почти любая теория. Действительно, изучение процесса в целом либо невозможно, либо связано с большими трудностями. Необходимо расчленение процесса на отдельные составляющие его явления. Но они, как и должно быть, взаимодействуют один с другим. Требуемое расчленение изучаемого процесса достигается в результате того или иного абстрагирования отдельных явлений. И здесь при построении любой теории сложного процесса важно не потерять специфические черты этого процесса. Я. И. Френкель выразил эту мысль очень образно: «Теория сложных систем должна представлять собою лишь хорошую «каррикатуру» на эти системы, утрирующую те свойства их, которые являются наиболее типичными и умышленно игнорирующими все остальные несущественные свойства» [1].

---

[1] **Френкель Я. И.** На заре новой физики. Л., «Наука», 1970, с. 308.

Теория формирования отливки рассматривает процесс затвердевания расплава в форме в различных приближениях к реальному, т. е. на различных уровнях его соответствия реальному процессу.

Условимся: тот или иной *уровень рассмотрения конкретного процесса формирования отливки* — это *изучение процесса на основе понятий, определений и методов* той или иной *фундаментальной* или *технической науки* или *теории*; иными словами, — это изучение процесса на основе физической (химической или физико-химической) и математической моделей, которые использует та или иная фундаментальная, техническая наука или теория.

Затвердевание расплава в первом приближении рассматривают только на *тепловом* уровне, во втором приближении — на *теплокинетическом*. В соответствии с установившейся терминологией процессы, изучаемые на тепловом уровне, — это процессы *затвердевания*; процессы, изучаемые на теплокинетическом уровне, — процессы *кристаллизации* расплава в форме.

В результате изучения *затвердевания* на основе теории теплопроводности с учетом только особенностей теплообмена затвердевающего расплава и формы решено много задач. Их цель — выяснение кинетики нарастания объема твердой фазы в затвердевающем расплаве и продвижения фронта сплошь затвердевшей части отливки в зависимости от свойств формы отводить теплоту, типа конфигурации внутренней полости этой формы, величины перегрева расплава при заливке его в форму и от типа литейного сплава. С помощью этих закономерностей затвердевания удается довольно просто определить продолжительность процесса затвердевания от момента начала заливки расплава в форму до начала охлаждения твердой отливки в этой форме. Эти же закономерности позволяют оценить тепловые потери расплава при его течении по каналам литниковой системы и в полости формы, изучить с необходимой полнотой жидкотекучесть металлов и сплавов, а также проникновение расплава в поры песчаной формы, как причины образования механического пригара. Наконец, этих закономерностей затвердевания оказывается вполне достаточно, чтобы на их основе дать анализ процессов образования усадочных раковин, рыхлот и некоторых аспектов процесса образования горячих трещин в отливках.

При решении задач затвердевания только на тепловом уровне игнорируются особенности кристаллического строения сплошь затвердевшей части отливки и твердой фазы, появляющейся в затвердевающем расплаве. Естественно, что анализ процессов образования других дефектов отливки становится невозможным.

Кристаллизация расплава в литейной форме в теории формирования отливки рассматривается на основе теории теплопроводности с учетом не только теплообмена расплава с формой, но и кинетики зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве. Так решены некоторые задачи, цель которых — выяснение основных закономерностей формирования кристаллического строения отливки в зависимости от скорости охлаждения расплава, величины его перегрева при заливке и от кинетических характеристик зарождения и роста кристаллов того или иного сплава. С помощью этих закономерностей удается определить условия получения отливок только с зернистым кристаллическим строением или состоящих только из столбчатых кристаллов. Эти же закономерности позволяют оценить эффективность воздействия модификаторов, микрохолодильников, вибрации, ультразвука, электромагнитных полей и т. п. на процесс формирования кристаллического строения отливки. Наконец, полученные закономерности необходимы для анализа процессов образования структурной неоднородности отливок, усадочной пористости, некоторых видов химической неоднородности (зональной ликвации), а также горячих трещин и в тех случаях, когда они образуются после окончания процесса затвердевания отливки.

Таким образом, в своих основах теория формирования отливки является результатом анализа процессов затвердевания расплава и кристаллизации его в форме. Используя образный язык Я. И. Френкеля, можно сказать, что затвердевание расплава, которое изучается только на тепловом уровне, вполне хорошая «каррикатура» на реальный процесс формирования отливки. Что же касается кристаллизации расплава, которая изучается на теплокинетическом уровне, то это уже — «дружеский шарж», позволяющий установить «сходство» с реальным процессом по характеристикам кристаллического строения отливки.

Здесь важно подчеркнуть, что реальный процесс во всех аспектах его проявления очень редко удается изучить с необходимой полнотой на каком-то одном уровне. Чаще он может быть осмыслен не иначе как на нескольких уровнях одновременно. Но точные методы в таких случаях оказываются бессильными, и истина скорее «нащупывается», чем достигается строгими выкладками, и, конечно, теряет бесспорность. Поэтому при использовании теории формирования отливки часто прибегают к экспериментальному изучению процесса кристаллизации расплава реальных литейных сплавов в реальной же литейной форме и применяют методы математического планирования многофакторных экспериментов, методы теории подобия, моделирования и аналогирования. Экспериментальное исследование оказывается плодотворным, если при его постановке и анализе результатов учитываются основные закономерности затвердевания и кристаллизации расплава, выявленные в результате теплового и теплокинетического изучения процесса формирования отливки аналитическими методами. Такое экспериментальное исследование плодотворно не только для решения практически важных задач совершенствования технологии литья, но и для развития самой теории формирования отливки, ибо результаты экспериментов позволяют находить новые подходы и методы приближенного аналитического и численного решения этих задач и на их основе создавать новые способы литья.

Так, в современной теории формирования отливки процесс кристаллизации расплава реальных литейных сплавов в форме начинает рассматриваться одновременно на двух и даже трех уровнях: *теплокинетическом, физико-химическом и гидродинамическом*, т. е. на основе теории теплообмена с учетом не только кинетики зарождения и роста кристаллов, и но и молекулярной и конвективной диффузии растворенных в расплаве и твердой фазе примесей и газов. В такой постановке решено несколько простейших задач. Но результаты их решения уже позволили дать приближенный анализ формирования структуры фронта роста кристаллов и образования различных видов сегрегации растворимых примесей и газов. Эти результаты значительно ускорили появление способа изготовления отливок при их однонаправленной кристаллизации, в том числе монокристальных отливок и изделий из естественных композитов, получающихся при направленном затвердевании эвтектик и дисперсионно-твердеющих твердых растворов.

Формирование отливки — это, конечно, не только затвердевание расплава в форме. Большое значение имеют процессы, происходящие во время заполнения формы расплавом, а также при охлаждении отливки с момента окончания затвердевания расплава. Их изучают также на разных уровнях.

Заполнение формы расплавом теория формирования отливки рассматривает преимущественно на *гидродинамическом* уровне (чаще — на гидравлическом). Этого оказывается достаточно для анализа и проектирования литниковых и вентиляционных систем при литье в песчаные, керамические и металлические формы, заливаемые под напором стояка. Однако при определении максимально допустимой продолжительности процесса заполнения формы и минимальной площади сечения питателей, при которых не образуются дефекты типа неслитин, «мороза» на поверхности отливок и т. п., требуется одновременно учитывать охлаждение потока расплава, а в некоторых случаях и его затвердевание, т. е. заполнение формы необходимо изучать на двух уровнях одновременно: на *гидродинамическом* и *тепловом*. Такой анализ заполнения формы совершенно необходим для способов литья, у которых этапы заполнения формы расплавом и его затвердевания совмещены по времени. Это — литье способами намораживания, литье выжиманием, некоторые варианты литья под давлением и др.

Охлаждение отливки в форме и вне ее в теории формирования изучают, используя методы термопластичности, термоупругости и реологии. Только на тепловом уровне удается найти закономерности охлаждения отливки и на их основе дать анализ тех структурных превращений, которые будут происходить в отливке из конкретного литейного сплава. С помощью этих закономерностей легко создать способы расчетов продолжительности остывания отливки в форме, т. е. решить задачу, важную для проектирования литейных конвейеров и транспортных систем авоматических формовочных линий. При решении других задач, связанных с анализом причин возникновения в отливках термических напряжений и «превращения» их в остаточные, необходимо рассматривать остывание отливок и в форме и после выбивки из нее на тепловом и деформационном уровнях одновременно.

⁂

Подводя итоги изложенному, можно сделать вывод, что *формирование отливки — техническая наука, ее основным объектом являются расплавы литейных сплавов и происходящие в них процессы во время заполнения формы и затвердевания, используемые для решения инженерных задач получения отливок с заданными служебными и технологическими свойствами.*

Структура теории формирования отливки для читателя уже ясна:

заливка формы перегретым расплавом,
затвердевание расплава и
кристаллизация расплава в форме.

Теория формирования отливки изучает также твердую отливку и происходящие в ней процессы во время ее охлаждения. Поэтому еще один раздел теории — *охлаждение отливки.*

Перечисленные разделы теории объединяются из-за необходимости рассматривать их прежде всего на тепловом уровне. Это вполне естественно, так как тепловые процессы обусловливают начало, ход и завершение других процессов формирования отливки.

Следовательно, методически теорию формирования отливки требуется строить и излагать иначе:

затвердевание расплава и охлаждение отливки (тепловые процессы);

заполнение формы перегретым расплавом (теплогидравлические процессы);

формирование кристаллического строения отливки (теплокинетические процессы кристаллизации);

образование дефектов отливки (процессы, сопутствующие заполнению формы, затвердеванию расплава, его кристаллизации и охлаждению отливки: усадочные, фильтрационные, диффузионные, физико-химические, деформационные и др.).

Такой порядок изложения теории формирования отливки принят в данном учебном пособии. При этом первые два раздела теории составляют содержание первой части пособия, третий и четвертый разделы — второй части.

Во второй части рассмотрены процессы образования усадочной раковины, усадочной пористости, химической неоднородности, газовой пористости, горячих трещин и остаточных напряжений в отливках, т. е. процессы, для анализа которых необходимо учитывать *только тепловое взаимодействие отливки и формы*: форма является лишь окружающей средой, обладающей свойством с той или иной скоростью отводить теплоту от затвердевшего расплава или охлаждающейся отливки.

В этой связи процесс образования горячих трещин, являющихся результатом развития и *силового взаимодействия отливки и формы*, подробно рассмотрен лишь для неподатливой формы (кокиля, пресс-формы и др.); податливость песчаных форм учитывается введением в расчеты эмпирических характеристик их деформационной способности. Подробный анализ податливости песчаных форм изложен в книге Г. Ф. Баландина [1].

В этой же связи процесс образования химического пригара формовочной и стержневой смесей, являющегося результатом и *физико-химического взаимодействия отливки и формы*, в данном учебном пособии не рассматривается. Необходимый анализ приведен в учебном пособии Г. Ф. Баландина и В. А. Васильева [2].

НЕМНОГО ИСТОРИИ

Процессы формирования отливки, как наиболее специфические для технологии литья, всегда привлекали внимание ученых и инженеров-литейщиков.

В 1859 г. в Харькове была издана первая русская книга по литейному производству, которая называлась «Чугунолитейное производство, или систематическое изложение всех способов и приемов, употребляемых для получения литейного чугуна, приготовления моделей, производства формовки, отливки и окончательной отделки различных чугунных изделий». Автор этой книги — горный инженер А. Ф. Мевиус полно описал технику и технологию литья того времени и, конечно, уделил внимание процессам, происходящим при заливке расплава в форму и его затвердевании. Он указал принципы конструирования литниковых

---

[1] **Баландин Г. Ф.** Литье намораживанием. М., Машгиз, 1962. 264 с.

[2] **Баландин Г. Ф., Васильев В. А.** Физико-химические основы литейного производства. М., «Машиностроение», 1971. 224 с.

систем, описал основные дефекты отливок. Это очень краткое описание. Из 1083 страниц текста литейным процессам отведено около 20, в заключение А. Ф. Мевиус подчеркнул: «Располагая на приличном месте литники, выбирая соответственные формовочные материалы и, вообще, производя формовку и отливку с должным знанием дела, литейщик очень значительно может ослабить вредное влияние неравномерного охлаждения чугуна, если только не встретит непреодолимых препятствий в моделях, либо рисунках, неправильно и безо всякого знания литейного дела составленных». Научного анализа процессов формирования отливки в этой книге нет, но в ней уже четко определены причины многих дефектов чугунных отливок: их нетехнологичность и неравномерность охлаждения в форме.

Основоположниками теории формирования отливки в XIX в. являются классики русской металлургии П. П. Аносов, Н. В. Калакуцкий, Д. К. Чернов и А. С. Лавров.

Как это было уже много раз, возникновение трудной и практически полезной задачи дает мощный толчок развитию исследований, результаты которых становятся новой наукой. Такой задачей для металлургии и литейного производства XIX в. явилось освоение нового литейного материала — стали. В России литье слитков из тигельной стали впервые освоено в 30-х годах прошлого столетия П. П. Аносовым; систематическое производство фасонных отливок из мартеновской стали в песчаных формах — А. С. Лавровым в 1881—1891 гг.

П. П. Аносов (1799—1851 гг.), разрабатывая технологию литья стальных слитков, сделал ряд ценных наблюдений и обобщений. В сочинении «О приготовлении литой стали» (1837 г.) он отмечает вредное влияние перегрева стали на процессы формирования слитка. По его наблюдениям, сталь, залитая с высоким перегревом, дает большую усадку, и в слитке могут образоваться поперечные горячие трещины.

Н. В. Калакуцкий (1831—1889 гг.) создает теорию внутренних термических напряжений (ему же принадлежит этот термин) в чугунных и стальных отливках; на ее основе он разрабатывает интересные способы получения отливок с минимальными остаточными напряжениями.

Д. К. Чернов (1839—1921 гг.) выполнил интереснейшие исследования, которые сыграли большую роль в становлении и развитии теории формирования отливки. Именно ему принадлежит утверждение о том, что в результате управления процессом формирования можно получать отливки, свойства которых не уступят свойствам кованых заготовок [1]. К такому выводу Д. К. Чернов

---

[1] Вот это утверждение дословно: «. . .прочность непрокованной стали нисколько не меньше прочности прокованной, если они обе имеют одинаковое сложение. . .» См. «Чернов Д. К. и наука о металлах». Под ред. Н. Т. Гудцова. Л.—М., Металлургиздат, 1950. 564 с.

пришел на основе своих наблюдений, главные из которых он изложил в работе «Исследования, относящиеся до структуры литых стальных болванок» (1878 г.). Здесь он впервые полно описал кристаллическое строение и основные структурные зоны стальных слитков (факт кристаллического строения стали и дендритную форму роста кристаллов он установил раньше, в 1868 г.). В этом же труде Д. К. Чернов впервые рассмотрел механизм возникновения основных видов неоднородности строения стальных слитков (зоны столбчатых кристаллов, усадочных раковин и пористости, газовых пузырей и др.) и предложил конкретные способы улучшения их качества и повышения свойств литой стали.

Позднее, обобщая свои наблюдения и результаты исследований, Д. К. Чернов в сочинении «О влиянии механической и термической обработки на свойства стали» (1886 г.) и в учебном курсе «Сталелитейное дело» (1898 г.) дает полное и блестящее по простоте аргументации описание процесса кристаллизации расплава стали в форме. В этих трудах он четко указывает причины начала и прекращения роста столбчатых кристаллов в отливках и особо подчеркивает роль теплообмена отливки с формой как определяющую ход и характер процесса затвердевания; в частности, он установил, что реально отливки и слитки всегда затвердевают последовательно.

В 1904 г. в Петербурге вышла в свет книга А. С. Лаврова «Работы и заметки по литейному производству». Эта книга, подводящая итог всех его работ, является первой специальной монографией по формированию отливки. В ней четко различаются пустоты в отливках «от усадки и газов, поглощенных металлом во время его плавки»; анализируется механизм формирования усадочных раковин в фасонных отливках, дается описание почти всех известных в настоящее время способов борьбы с ними и излагается развернутая методика проектирования литниковых систем и прибылей. В этой книге впервые описана ликвация в стали; обстоятельно обсуждаются меры борьбы с усадочной пористостью и горячими трещинами; в частности, перечислены почти все известные сейчас меры по предотвращению горячих трещин в фасонных отливках. Большое внимание уделено результатам изучения процессов затвердевания и кристаллизации стали. А. С. Лавров впервые установил ставшие ныне классическими зависимости величины зерна в слитках от скорости охлаждения стали в изложницах. Он является автором широко известного литейщикам метода исследования процесса затвердевания отливок — метода выливания незатвердевшего расплава.

Изучение процессов формирования отливок было продолжено уже после Великой Октябрьской социалистической революции. В первой половине 30-х годов в СССР создано несколько профилирующих кафедр литейного производства: в Московском высшем техническом училище им. Н. Э. Баумана (Н. Н. Рубцов, Н. П. Аксенов), в Ленинградском политехническом институте

(Ю. А. Нехендзи, Н. Г. Гиршович), в Московском институте цветных металлов и золота (А. А. Бочвар, А. Г. Спасский) и в некоторых других вузах. Они начали подготовку инженеров-механиков и инженеров-металлургов по литейному производству. В последующем эти кафедры образовали и развили ныне хорошо известные во всем мире научные школы. Почти одновременно возникли научно-исследовательские центры в Ленинграде (Н. Т. Гудцов), в Свердовске (А. А. Горшков, А. А. Рыжиков), в Харькове (В. И. Данилов) и в других городах. На кафедрах вузов и в научно-исследовательских лабораториях и институтах, число и научный потенциал которых к настоящему времени значительно выросли, успешно изучаются различные литейные процессы и способы их механизации и автоматизации и многое сделано для построения научных основ литейного производства, а также для совершенствования существующих и создания новых технологических процессов и оборудования.

С самого начала на кафедрах вузов и в научно-исследовательских лабораториях развернуты работы в области разнообразных литейных процессов (изучение формовочных материалов и их поведения во время формообразования, а также при заливке формы и затвердевании расплава; исследование процессов плавки и заливки расплавов литейных сплавов в форму; анализ процессов формовки и др.) и особенно в области формирования отливки. Так, под руководством Н. Т. Гудцова выполнены систематические исследования кристаллизации стали в слитках. Первые результаты исследований получены в 1935 г. Н. Я. Гранатом и А. К. Жегаловым. В дальнейшем они были использованы и развиты во многих трудах учеников Н. Т. Гудцова. К концу 30-х годов сформировалась группа физиков, возглавляемая В. И. Даниловым, которая изучала процессы зарождения и роста кристаллов в переохлажденных расплавах металлов. Открытие В. И. Даниловым так называемых активных примесей и закономерностей их поведения во время плавки и кристаллизации металлов позволило понять многие особенности формирования кристаллического строения реальных отливок.

Проведенные в 1935—1950 гг. исследования А. А. Бочвара надолго определили методы анализа технологических свойств сплавов и создания специальных литейных сплавов, обладающих благоприятным сочетанием жидкотекучести их расплавов и склонности к транскристаллизации в форме, а также минимальной склонности к образованию усадочной пористости и горячих трещин в отливках.

Особое значение имели труды Н. Н. Рубцова «Специальные виды литья», Ю. А. Нехендзи «Стальное литье», Н. Г. Гиршовича «Чугунное литье», А. Г. Спасского «Основы литейного производства», В. И. Фундатора «Литниковые системы и заливка металлов», А. А. Рыжикова «Улучшение качества отливок», П. Н. Бидули «Литейное производство», изданные в 1940—1953 гг., в которых подведены итоги исследований процессов формирования отливок из сталей, чугунов, цветных сплавов при литье в песчаные формы различными специальными способами.

50-е годы — период, когда научные исследования литейных процессов и особенно процессов формирования отливки претерпели существенный перелом. Предыдущий период определялся преобладанием эмпирических по существу методов исследования. Непосредственным объектом исследования были лишь те конечные эффекты, которыми определяется совершенство на данный момент технологических процессов производства отливок. Задача исследования заключалась в установлении зависимости между величинами, которыми характеризуются эти конечные эффекты (чаще всего тот или иной параметр качества отливки), от различных мероприятий по усовершенствованию технологических процессов.

В противовес эмпирическому направлению в исследовании литейных процессов в 50-е годы развивается направление, отражающее совершенно иные представления о системе научного исследования, представления, основанные на понимании литейных процессов как комплексов тепловых, гидродинамических, диффузионных, поверхностных, физико-химических и других явлений в их взаимодействии. В 1953 г. А. И. Вейник книгой «Тепловые основы теории литья» открыл публикацию серии работ, выполненных в 1950—1960 гг. под руководством Н. Н. Рубцова, по теории затвердевания. Б. Б. Гуляев в монографии «Литейные процессы» (1960 г.) обобщил результаты своих исследований за 1947—1957 гг. в области затвердевания и кристаллизации расплава литейных сплавов в форме, многих процессов, обусловливающих образование дефектов отливки (горячих трещин, ликвации, усадочной пористости и др.), а также процессов изготовления песчаной формы и ее поведения во время формирования отливки.

В 1961 г. вышло 2-е издание книги А. А. Рыжикова «Теоретические основы литейного производства».

Эти труды содержат практически все идеи, которые составили основы современной теории формирования отливки. В дальнейшем более углубленно развивались отдельные ее разделы. Простое перечисление наименований книг, изданных в 60-е годы, дает необходимое представление о главных разделах теории и об уровне их разработки: «Расчет отливки» (А. И. Вейник, 1964 г.), «Введение в литейную гидравлику» (Б. В. Рабинович, 1965 г.), «Формирование кристаллического строения отливок» (Г. Ф. Баландин, 1965 г.), «Коробление чугунных отливок от остаточных напряжений» (О. Ю. Коцюбинский, 1965 г.), «Кристаллизация и свойства чугуна в отливке» (Н. Г. Гиршович, 1966 г.), «Термодинамика литейных форм» (А. И. Вейник, 1968 г.).

Перечисленные книги, а также статьи и книги других ученых, использованы при написании данного учебного пособия.

ОЦЕНКА ПЕРСПЕКТИВЫ

В основном современная промышленная металлообработка осуществляется прокаткой, волочением, ковкой, штамповкой, литьем и резанием. Однако в мыслимой перспективе должны быть эффективными те технологии, которые позволяют необходимую конфигурацию конечных изделий получать при *минимальных* затратах энергии, например технологии изготовления всех необходимых изделий в их предельно завершенном виде непосредственно из расплава любых металлов и сплавов. Естественно, что здесь *технология литья должна занять одно из первых мест.* Доказательством этому может служить все расширяющееся внедрение методов точного литья (литье в формы, изготовленные по выплавляемым моделям, в металлические формы под низким давлением, в оболочковые формы и др.).

Кроме того, по-видимому, прошло то время, когда считали, что только пластическое деформирование литого металла приводит к возможности дальнейшего повышения требуемых служебных свойств этого металла в изделиях. Современные научные представления о физике процессов кристаллизации и структурных превращений, а также достижения теории формирования отливки определенно указывают на принципиально другие пути: целенаправленное воздействие на процессы формирования кристаллического строения отливки, легирование сплавов, создание композиционных структур и т. д. Некоторые из этих путей уже реализуются на практике. Так, модифицирование расплавов, введение в них микрохолодильников, перемешивание расплавов электромагнитными полями, обработка ультразвуком позволяют получать отливки высокой плотности с мелкозернистым кристаллическим строением. Односторонне направленное затвердевание расплава дает возможность существенно повысить прочность, например отливок из жаропрочных сплавов, а также получить естественные композиционные материалы в отливках из эвтектических сплавов. Успешно разрабатываются способы изготовления отливок из искусственных композиционных материалов.

Достижения технической науки, названной нами *формирование отливки*, в понимании процессов, происходящих во время заполнения формы расплавом литейных сплавов, затвердевания этого расплава и охлаждения отливки в форме, уже сейчас позволяют осуществлять корректную постановку и получать строгое математическое решение задач теплофизики. На этой основе стало возможным математически прогнозировать и устанавливать необходимые тепловые и гидродинамические режимы для ряда типичных технологических процессов литья с конкретно требуемыми скоростями затвердевания. В дальнейшем, с развитием теории формирования отливки, станет возможным устанавливать таким путем режимы литья с целью достижения заданного кристаллического строения отливки при минимальном поражении ее дефектами, снижающими служебные свойства литых изделий. В свою очередь, это создает реальную основу для построения математических моделей непосредственно самих технологических процессов литья, что предопределяет особую эффективность разработки единой системы автоматизации и оптимального управления соответствующими производственными комплексами на основе применения управляющих электронно-вычислительных машин.

Если дополнительно учесть неизбежный в будущем переход *формирования отливки* как технической науки от феноменологической теории к аналитическому представлению всех элементарных физических и физико-химических процессов, обусловливающих приобретение литым изделием требуемых свойств, то указанную возможность *математизации* на стадии микрофизического анализа этих процессов следует рассматривать как *необходимый* этап в общей обязательной программе перспективного становления теории формирования отливки в рамки строгих физико-математических наук.

Раздел I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАКОНЫ

Теория теплообмена — это учение о процессах распространения (переноса) теплоты в пространстве. Распространение теплоты происходит в результате развития трех различных по физической природе явлений: *теплопроводности, конвекции и теплового излучения.*

В теории теплообмена все пространство условно делится на объект исследования и окружающую среду. *Объект исследования* представляет собой вещественную среду, как правило, в виде одного *тела* (твердого или жидкого) или системы таких тел. *Окружающая среда* может быть любой, в том числе — физический вакуум.

Поверхность, которая отделяет исследуемый объект от окружающей среды и через которую осуществляется тепловое взаимодействие объекта с этой окружающей средой, является *граничной поверхностью.*

Теплообмен между граничной поверхностью тела и окружающей средой называется *процессом теплоотдачи*, а теплообмен между различными средами, разделенными телом или системой тел, — *процессом теплопередачи.*

1. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ

Физической величиной, характеризующей степень нагретости тела или любого его элемента, является температура T.

Совокупность значений температуры во всех точках тела в каждый момент времени t процесса распределения теплоты называется *температурным полем*, или распределением температуры в данном теле.

Температура есть величина *скалярная*, поэтому температурное поле — *скалярное поле.*

В аналитической теории теплообмена температурное поле тела выражается непрерывной и дифференцируемой функцией времени и координат точек физического пространства. В зависимости от конфигурации граничной поверхности и условий теплового взаимодействия тела с окружающей средой температурное поле может выражаться функцией в трехмерном пространстве

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y, z, t), \\ \text{в двухмерном пространстве} \\ T(x, y, t) \\ \text{и в одномерном} \\ T(x, t), \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где x, y, z — координаты точек тела в декартовой системе.

Множество точек тела, имеющих одинаковую температуру, называется *изотермой* температурного поля. Для функции температурного поля в трехмерном пространстве изотермы геометрически представляют собою поверхности, в двухмерном пространстве — кривые, в одномерном — прямые линии.

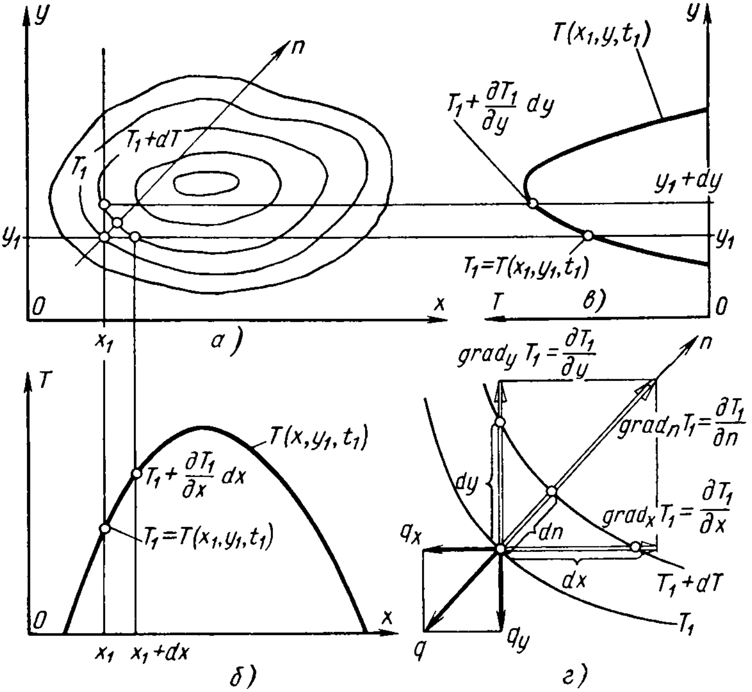


Рис. 2. Схема температурного поля в двухмерном пространстве:

а — изотермические кривые; *б* и *в* — изменение температуры по направлениям осей x и y; *г* — температурный градиент и его проекции на координатные оси

На рис. 2, *а* изображена схема изотермических кривых температурного поля в двухмерном пространстве для некоторого момента времени t_1 процесса распространения теплоты в исследуемом теле. На схеме (рис. 2, *б* и *в*) даны кривые распределения температуры по направлению оси X при $y = y_1$ и по направлению оси y при $x = x_1$, иллюстрирующие изменение температуры вдоль соответствующих координатных осей.

2. ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ГРАДИЕНТ

Изменение температуры тела в направлении оси x (рис. 2, *а*), например, в точке x_1, y_1 (для момента времени t_1) определяют как разницу температур $T_1 + dT$ и T_1 на единицу длины бесконечно малого отрезка dx. Согласно схеме на рис. 2, *б* она равна первой частной производной функции $T\ (x,\ y,\ t)$ температурного поля по x, вычисленной в точке x_1, y_1:

$$\frac{\partial T\,(x_1,\ y_1,\ t_1)}{\partial x}.$$

Так как это определение справедливо для любой точки тела в направлении x и для любого момента времени t процесса распространения теплоты, то в общем виде изменение температуры тела в направлении оси x будет характеризоваться величиной $\frac{\partial T}{\partial x}$; в направлении оси y (см. рис. 2, *в*) — величиной $\frac{\partial T}{\partial y}$; в направлении оси z (для температурного поля в трехмерном пространстве) — величиной $\frac{\partial T}{\partial z}$.

Из рис. 2, *г* следует, что величины первой частной производной функции температурного поля в точке x_1, y_1 (для момента времени t_1) различны в зависимости от направления, вдоль которого исследуется изменение температуры тела. Наибольшая величина — вдоль направления нормали n к изотермической кривой. Она и определяет величину температурного градиента поля в точке x_1, y_1:

$$\mathrm{grad}_n T_1 = \frac{\partial T\,(x_1\ y_1\ t_1)}{\partial n}.$$

Температурный градиент — вектор, направленный по нормали к изотерме температурного поля тела в сторону возрастания температуры. Его численное значение равно первой частной производной функции температурного поля по направлению нормали к изотерме:

$$\mathrm{grad}_n T = \frac{\partial T}{\partial n}. \tag{2}$$

Величина проекций температурного градиента на оси декартовой системы координат численно равна соответствующим первым частным производным по x, y и z:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{grad}_x T &= \frac{\partial T}{\partial x};\\ \mathrm{grad}_y T &= \frac{\partial T}{\partial y};\\ \mathrm{grad}_z T &= \frac{\partial T}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

3. ЗАКОН ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ФУРЬЕ

Количество теплоты Q, проходящее через изотермическую поверхность температурного поля тела в единицу времени, называется *тепловым потоком* Φ. В общем случае

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}.$$

Тепловой поток, проходящий через единицу изотермической поверхности F, называют *плотностью теплового потока* q. В общем случае

$$q = \frac{d\Phi}{dF}.$$

Связь между плотностью теплового потока и температурным градиентом для любой точки тела в любой момент процесса распространения теплоты устанавливает *закон теплопроводности Фурье*:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \qquad (4)$$

где λ — *теплопроводность* тела.

Теплопроводность тела характеризует физическое свойство этого тела проводить теплоту, численно определяет собой количество теплоты, которое проходит через единицу изотермической поверхности тела в единицу времени при значении температурного градиента, равном единице. Величина теплопроводности зависит от природы вещества тела, его структуры, плотности, температуры, влажности, давления и других факторов. Однако в практических расчетах теплообмена, как правило, теплопроводность принимают постоянной для данного тела[1].

Плотность теплового потока, как и температурный градиент, является вектором. Знак минус в законе Фурье отражает очевидный экспериментальный факт: теплота в теле распространяется

---

[1] Значения λ для некоторых литейных сплавов и литейных материалов, используемых при изготовлении форм и стержней, приведены в приложениях VI—VIII.

в сторону убывающей температуры. Этот знак появился потому, что вектор температурного градиента направлен в противоположную сторону (см. рис. 2, *г*).

Так же как и вектор температурного градиента, вектор плотности теплового потока в теле можно представить величинами его проекций на оси координат. Эти величины численно равны

$$\left.\begin{aligned} q_x &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \\ q_y &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \\ q_z &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В соответствии с приведенными выше определениями

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -\int\limits_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF; \\ Q &= -\int\limits_t \int\limits_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

С помощью этих выражений для количества теплоты и теплового потока вся проблема изучения процесса распространения теплоты в телах — объектах исследования сводится к анализу температурных полей в них для конкретных условий теплообмена граничной поверхности этих тел с окружающей средой. Чаще всего теплообмен с окружающей средой осуществляется конвекцией, тепловым излучением, а также конвекцией и тепловым излучением одновременно.

4. ЗАКОН ТЕПЛООТДАЧИ НЬЮТОНА

Тепловой поток, отдаваемый единицей граничной поверхности исследуемого тела в окружающую среду, называют *поверхностной плотностью теплового потока* q_0.

При *конвективном теплообмене* поверхностную плотность теплового потока приближенно рассчитывают по *закону теплоотдачи Ньютона*:

$$q_0 = \alpha_к (T_0 - T_с), \tag{7}$$

где $\alpha_к$ — *коэффициент теплоотдачи конвекцией*; T_0 — температура граничной поверхности тела; $T_с$ — температура окружающей среды.

Разность $T_0 - T_с$ принято называть *температурным напором* на граничной поверхности тела.

При конвективном теплообмене теплота с поверхности тела уносится жидкостью, которая перемещается относительно этой поверхности. Движение жидкости может возникать вследствие различной плотности ее нагретых и ненагретых зон (*естественная* конвекция) или принудительной ее циркуляции (*вынужденная* конвекция). В этой связи коэффициент теплоотдачи конвекцией характеризует комплекс физических свойств, отражающих способность той или иной жидкости (капельной или сжимаемой) в конкретных условиях ее движения отводить теплоту от поверхности данного тела (или отдавать теплоту поверхности тела). Численно коэффициент $\alpha_к$ определяет собою количество теплоты, которое проходит через единицу граничной поверхности тела за единицу времени в жидкую окружающую среду при температурном напоре, равном одному градусу.

Коэффициент теплоотдачи конвекцией зависит от плотности, вязкости, теплопроводности, теплоемкости жидкости, скорости и характера ее движения около граничной поверхности тела, от формы этой поверхности, положения ее в пространстве, а также от величины температурного напора. В теории теплообмена коэффициент $\alpha_к$ рассчитывают по эмпирическим формулам. Необходимые формулы приведены в справочниках и монографиях по теплопередаче[1].

5. ЗАКОН ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СТЕФАНА—БОЛЬЦМАНА

При лучистом теплообмене теплота от граничной поверхности тела передается в пространство окружающей среды электромагнитными волнами, которые возникают вследствие преобразования части внутренней энергии в энергию электромагнитных колебаний.

Связь между поверхностной плотностью теплового потока (*удельной энергией теплового излучения*) и температурой излучающей поверхности абсолютно черного тела устанавливает *закон Стефана—Больцмана*

$$q_0 = \sigma T_0^4,$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) — постоянная Стефана—Больцмана.

Строго говоря, закон Стефана—Больцмана справедлив только для *абсолютно черного тела*, излучающего теплоту в вакуум. Однако опыты Стефана и других исследователей показали, что этот закон применим и для так называемых *серых тел*, если его представить в виде

$$q_0 = \varepsilon \sigma T_0^4,$$

где ε — постоянная, характеризующая *степень черноты* данного тела.

Реально нагретое излучающее тело окружено другими телами. Между ними происходит взаимный лучистый теплообмен: каждое

---

[1] Например, в справочнике С. С. Кутателадзе и В. М. Боришанского [7]. Некоторые формулы для расчета $\alpha_к$ в условиях протекания литейных процессов приведены в приложении IV.

тело излучает теплоту и одновременно поглощает часть теплоты, излучаемой другими телами. Если все тела, составляющие окружающую среду, имеют температуру $T_с$, то

$$q_0 = \varepsilon_0 \sigma (T_0^4 - T_с^4), \tag{8}$$

где ε_0 — приведенное эффективное значение степени черноты тел, участвующих в процессе лучистого теплообмена.

Уменьшаемая величина в (8) выражает поверхностную плотность теплового потока от тела-излучателя, вычитаемая —поверхностную плотность теплового потока, поглощаемого телами в окружающей среде.

Постоянную ε_0 рассчитывают согласно закону Кирхгофа, который устанавливает связь между излучательными и поглащательными свойствами тел, участвующих в лучистом теплообмене. Необходимые формулы для расчета ε_0 даны в справочнике по теплопередаче С. С. Кутателадзе и В. М. Боришанского. Например, для системы из двух плоских тел

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_п} + \frac{1}{\varepsilon_с} - 1},$$

где $\varepsilon_п$ — степень черноты поверхности излучающего тела; $\varepsilon_с$ — степень черноты тела окружающей среды.

Степень черноты зависит от природы тела, характеристик его поверхности и температуры этой поверхности [1].

6. ЗАКОН ПОЛНОЙ ТЕПЛООТДАЧИ

Если нагретое тело охлаждается в окружающей среде, которая является газом (сжимаемой жидкостью), то, учитывая, что большинство газов прозрачно для теплового излучения, поверхностную плотность теплового потока можно выразить так:

$$q_0 = \alpha_к (T_0 - T_с) + \varepsilon_0 \sigma (T_0^4 - T_с^4).$$

Первое слагаемое формулы учитывает конвективный теплообмен между поверхностью тела и газом, второе — теплообмен излучением поверхности этого тела в прозрачный газ. Для упрощения расчетов эту формулу записывают в форме закона теплоотдачи Ньютона:

$$q_0 = \alpha (T_0 - T_с), \tag{9}$$

где α — коэффициент полной теплоотдачи.

Величина

$$\alpha = \alpha_к + \alpha_и$$

---

[1] Значения ε для материалов и тел, используемых в литейном производстве, указаны в приложении V.

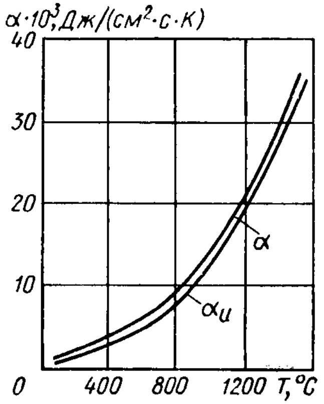


Рис. 3. Коэффициент α полной теплоотдачи от вертикальной стальной плиты и коэффициент $\alpha_{и}$ теплоотдачи тепловым излучением

и существенно зависит от температурного напора (рис. 3), так как

$$\alpha_{и} = \varepsilon_0 \sigma (T_0^2 + T_с^2)(T_0 + T_с).$$

Формула (9), выражающая *закон полной теплоотдачи*, представляет особый интерес. Дело в том, что разделение процесса теплообмена на отдельные явления — теплопроводность, конвекцию и тепловое излучение — во многих случаях условно. Конечно, в твердых телах теплота распространяется только теплопроводностью; в физическом вакууме теплота переносится только тепловым излучением. Но в капельных жидкостях теплообмен осуществляется одновременно теплопроводностью и конвекцией, а в газах, прозрачных для теплового излучения, — одновременно теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением.

Особые трудности точного описания процесса теплообмена одновременно теплопроводностью и конвекцией привели к необходимости использования приближенного представления о процессе переноса тепла в жидкости, которое дает закон теплоотдачи Ньютона. Коэффициент теплоотдачи конвекцией в этом законе отражает суммарный эффект теплопроводности в неподвижной жидкости и при ее конвекции (естественной или вынужденной).

Приближенное представление о теплопереносе в газах, прозрачных для теплового излучения, дает закон полной теплоотдачи. *Коэффициент полной теплоотдачи* отражает суммарный эффект всех трех явлений, обусловливающих распространение теплоты в вещественной среде. В этом смысле закон полной теплоотдачи является наиболее общим.

Действительно, для капельных жидкостей, которые непрозрачны для теплового излучения, формула (9) преобразуется в (7), так как $\alpha_{и} = 0$. При теплоотдаче в вакуум $\alpha_{к} = 0$ и (9) преобразуется в (8). Далее, из графика на рис. 3, например, следует, что при температуре поверхности тела ниже 500 К основная теплоотдача в воздух осуществляется конвекцией; при более высокой, выше 1000 К, — тепловым излучением.

В этой связи величину теплового потока и количество теплоты, отдаваемое поверхностью тела в жидкую окружающую среду, целесообразно представить в общем виде:

$$\Phi_0 = \int_{F_0} \alpha (T_0 - T_с)\, dF; \qquad Q_0 = \int_t \int_{F_0} \alpha (T_0 - T_с)\, dF\, dt. \qquad (10)$$

Очевидно, что в случае теплоотдачи от нагретой окружающей среды к поверхности холодного тела в (7)—(10) температурный напор следует записать как $T_c - T_0$.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Основной задачей аналитической теории теплообмена является описание и исследование свойств пространственно-временного изменения температурного поля в вещественной среде при распространении в ней теплоты.

Необходимую зависимость между температурой, временем и координатами элементарного объема вещественной среды дает *дифференциальное уравнение теплопереноса*

$$S = a\nabla^2 T + \frac{1}{c\rho} I, \qquad (11)$$

где ∇ — оператор Лапласа; S — скорость изменения температуры, I — объемная плотность теплового потока от внутренних источников теплоты, распределенных в вещественной среде; a — температуропроводность вещественной среды; c, ρ — соответственно удельная теплоемкость и плотность среды.

Уравнение (11) теплопереноса справедливо для постоянных, независящих от температуры, теплофизических свойств λ, c, ρ вещественной среды.

7. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА ДЛЯ ФУНКЦИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

В трехмерном пространстве, заполненном вещественной средой, в декартовой системе координат [1]

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \qquad (12)$$

Если учесть выражения (5) численных значений проекции вектора плотности теплового потока на оси координат, то

$$\nabla^2 T = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right). \qquad (13)$$

Следовательно, при $\nabla^2 T > 0$ температура вещественной среды в точке x, y, z пространства повышается, при $\nabla^2 T < 0$ — снижается, а при $\nabla^2 T = 0$ температура остается неизменной, если,

---

[1] Выражения оператора Лапласа для функции температурного поля в цилиндрической и сферической системах координат даны в приложении I.

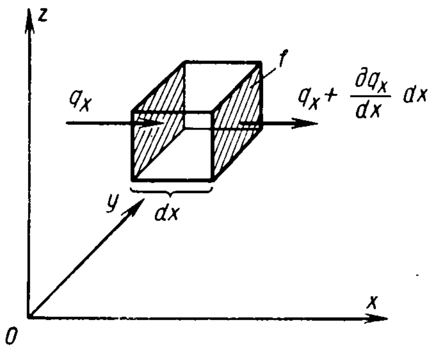


Рис. 4. Схема, поясняющая изменение плотности теплового потока при нестационарном процессе теплопроводности

конечно, в вещественной среде нет внутренних источников теплоты.

Поясним этот вывод следующей схемой (рис. 4). Пусть через призматический элемент вещественной среды проходит тепловой поток так, что на входе в элемент его величина в направлении оси x равна $q_x f$, а на выходе из элемента составляет

$$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)f.$$

Если

$$q_x > q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx,$$

то разница между тепловым потоком на входе в элемент и на выходе из него должна аккумулироваться вещественной средой этого элемента. Согласно схеме, приведенной на рис. 4, объем элемента $dv = f\,dx$. Тогда, часть теплового потока, аккумулированная единицей объема вещественной среды этого элемента, равна $-\frac{\partial q_x}{\partial x}$ или с учетом первого выражения (5)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial q_x}{\partial x},$$

что соответствует первым слагаемым правой части (12) и (13).

Точно такое же рассуждение легко повторить для тепловых потоков в направлении оси y и затем z. В результате получится равенство (13) для $\nabla^2 T$.

8. СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Изменение температуры вещественной среды в любой ее точке и в любой момент времени распространения теплоты в этой среде характеризуется *скоростью* S *нагревания* или *охлаждения среды* в рассматриваемой точке:

$$\left.\begin{aligned} &S = \frac{dT}{dt}, \\ &\text{или} \\ &S = \frac{\partial T}{\partial t} + w_x\frac{\partial T}{\partial x} + w_y\frac{\partial T}{\partial y} + w_z\frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

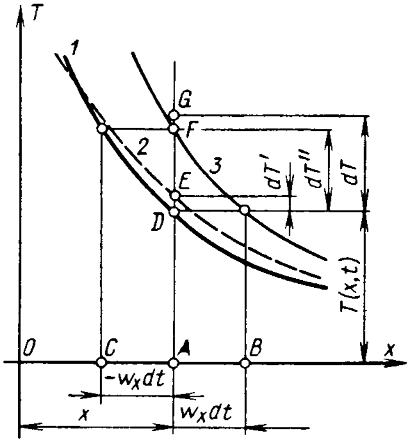


Рис. 5. Схема, поясняющая смысл локальной и конвективной составляющих скорости изменения температуры вещественной среды

Первое слагаемое в правой части этого выражения является *локальной* составляющей скорости изменения температуры в любой точке пространства, заполненного вещественной средой. Остальные три слагаемых представляют собой *конвективную* составляющую скорости изменения температуры в той же точке, возникающую вследствие перемещения вещественной среды в пространстве со скоростью, проекции которой на оси координат в указанной точке пространства численно равны w_x, w_y и w_z.

Для пояснения смысла каждой из составляющих скорости изменения температуры рассмотрим схему на рис. 5. Кривая *1* изображает температурное поле вещественной среды в одномерном пространстве в момент времени t. В точке A пространства, отстоящей от начала координат на расстоянии x, температура среды равна $T(x, t)$. Если среда неподвижна, то в результате развития процесса только теплопроводности за время dt кривая *1* займет положение *2*, при котором в точке A пространства температура среды увеличится на $dT' = \frac{\partial T}{\partial t}\, dt$ (см. отрезок DE на рис. 5). Если вещественная среда перемещается в направлении оси x со скоростью w_x, то за то же время dt температура среды в точке пространства должна увеличиться на dT'', так как точка A среды переместится в положение точки B пространства, а кривая *1* в положение *3*. Следовательно, в положение точки A переместится некая точка C среды. Поэтому $dT'' = -\frac{\partial T}{\partial x}\,(-w_x\, dt)$, т. е. отрезок DF, равный произведению тангенса угла наклона касательной к кривой *1* в точке A [или, что одно и то же, — отрицательной величины градиента $T(x, t)$ в точке D] на перемещение точки C вещественной среды за время dt в положение точки A пространства.

Согласно схеме на рис. 5 за время dt изменение dT температуры среды в точке A пространства определяется отрезком DG, т. е. суммой dT' и dT''. Следовательно,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x},$$

что соответствует выражению (14) для S при $w_y = 0$ и $w_z = 0$.

9. ОБЪЕМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ОТ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛОТЫ

В вещественной среде может быть непрерывно распределенный по ее объему источник теплоты. Испарение влаги внутри сырой песчаной формы во время ее нагревания является примером отрицательного внутреннего источника. Выделение теплоты кристаллизации при объемном затвердевании литейных сплавов внутри интервала температуры их ликвидуса и солидуса является примером положительного внутреннего источника.

Количество поглощаемой (или выделяемой) теплоты непрерывно распределенными в объеме вещественной среды внутренними источниками в единицу времени и в единице объема этой среды называют производительностью источников или *объемной плотностью теплового потока от внутренних источников.* В общем виде

$$\left.\begin{aligned} & I = \frac{dW}{dt} \\ & \text{или} \\ & I = \frac{dW}{\partial t} + w_x \frac{\partial W}{\partial x} + w_y \frac{\partial W}{\partial y} + w_z \frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где W — удельная объемная теплота, выделяемая или поглощаемая внутренними источниками (для приведенных примеров это либо удельная объемная теплота испарения влаги, либо удельная объемная теплота кристаллизации сплавов).

Выражение (15) записано в общем виде потому, что внутренние источники теплоты могут быть и в движущейся вещественной среде.

Например, рост кристаллов в потоке расплава во время заполнения формы при литье под давлением без перегрева — это положительный источник теплоты в потоке расплава.

Смысл первого и второго слагаемых в последнем выражении (15) тот же, что и в (14).

10. ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТЬ

Множитель

$$a \equiv \frac{\lambda}{c\rho}$$

в дифференциальном уравнении (11) температуропроводностью назван Максвеллом. Кельвин назвал этот множитель коэффициентом тепловой диффузии.

Температуропроводность характеризует теплоинерционные свойства вещественной среды и является мерой скорости перераспределения температуры в пределах температурного поля (выравнивания температурного поля). Величина имеет смысл только при постоянных значениях теплофизических параметров среды λ, c и ρ.

11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ВЕЩЕСТВЕННОЙ СРЕДЕ

Из уравнения (11) с учетом (13)—(15) следует, что

$$c\rho \frac{dT}{dt} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \frac{dW}{dt}. \tag{16}$$

Подстановка в это уравнение значений q_x, q_y и q_z из (5) приводит к *общему дифференциальному уравнению теплопереноса*, которое справедливо и для переменных значений параметров λ, c и ρ:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{dW}{dt}. \tag{17}$$

Уравнение Фурье—Кирхгофа

При $W = 0$ и постоянных значениях λ, c и ρ из уравнения (17) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{dT}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{18}$$

если полную производную температуры по времени в левой части раскрыть в соответствии с (14). Уравнение (18) является *дифференциальным уравнением конвективного теплообмена*, которое называется уравнением Фурье—Кирхгофа. Оно имеет смысл связи между временным изменением и пространственным распределением температуры в движущейся вещественной среде — в жидкости. Однако это уравнение, помимо температуры, содержит еще одну зависимую переменную — скорость движения среды, характеризующую гидродинамическую сторону процесса конвективного теплообмена. Поэтому для определения температурного поля в движущейся среде к уравнению Фурье—Кирхгофа необходимо присоединить еще четыре гидродинамических: *дифференциальное уравнение неразрывности потока* и систему из трех *дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости Навье—Стокса*[1].

Совместное решение перечисленных пяти уравнений представляет весьма серьезные трудности и получено для нескольких простейших случаев. Для практических расчетов в теории теплообмена используется закон теплоотдачи Ньютона.

---

[1] Система дифференциальных уравнений гидродинамики приведена в приложении II.

В дальнейшем для анализа процесса охлаждения потока расплава в процессе заполнения формы будем использовать уравнение Фурье—Кирхгофа, а также аналогичное уравнение, учитывающее действие внутренних источников теплоты, равномерно распределенных в потоке расплава:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+w_x\frac{\partial T}{\partial x}+w_y\frac{\partial T}{\partial y}+w_z\frac{\partial T}{\partial z}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{c\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial t}+w_x\frac{\partial W}{\partial x}+w_y\frac{\partial W}{\partial y}+w_z\frac{\partial W}{\partial z}\right). \qquad (19)$$

Уравнение теплопроводности Фурье

При $W=0$, постоянных λ, c и ρ и $w_x=w_y=w_z=0$ из уравнения (19) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \qquad (20)$$

Уравнение (20) является *дифференциальным уравнением теплопроводности Фурье* и представляет собой частный случай уравнения Фурье—Кирхгофа для неподвижной среды. При этом оно имеет смысл связи между временны́м изменением и пространственным распределением температуры в твердом теле [1].

В дальнейшем для анализа процессов затвердевания расплава в форме будем использовать уравнение теплопроводности Фурье, а также аналогичное уравнение, учитывающее действие внутренних источников теплоты:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{c\rho}\frac{\partial W}{\partial t}. \qquad (21)$$

12. ОБОБЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

При решении большинства задач теории теплообмена используют дифференциальные уравнения (16)—(21), в виде, преобразованном для одномерного теплового потока.

Одномерным называют тепловой поток, если интеграл в правой части (6) для Φ равен произведению плотности теплового потока на площадь изотермической поверхности:

$$\Phi(r, t)=q(r, t)F(r), \qquad (22)$$

где r — радиус-вектор изотермической поверхности температурного поля.

---

[1] В литературе дифференциальное уравнение (20) иногда называют уравнением Био—Фурье.

Это означает, что для объема V вещественной среды, ограниченного *любой* изотермической поверхностью, справедливо равенство

$$V(r)=\int_0^r F(n)\,dn, \tag{23}$$

т. е. все изотермические поверхности эквидистантны друг другу и граничной поверхности рассматриваемого тела, так как для объема V_0 тела должно быть справедливым то же равенство при $r=r_0$ — радиусу граничной поверхности этого тела. В свою очередь, это означает, что плотность $q(r, t)$ теплового потока, проходящего через данную изотермическую поверхность, остается неизменной для любой ее точки.

Введем понятие *объемной плотности теплового потока*, определив его как

$$q_V=-\frac{d\Phi}{dV}, \tag{24}$$

т. е. как изменение теплового потока при прохождении его через элемент dV объема тела на единицу объема этого элемента; знак минус показывает, что изменение теплового потока вызвано аккумуляцией части теплоты в этом элементе тела.

Очевидно, что объемная плотность q_V теплового потока в любом элементе dV объема тела, характеризующая нестационарность температурного поля, и объемная плотность I теплового потока от внутренних источников в этом элементе в сумме должны определять скорость изменения *теплосодержания* рассматриваемого элемента тела:

$$c\rho S=q_V+I. \tag{25}$$

С учетом (24)

$$c\rho S=-\frac{d\Phi}{dV}+I$$

или

$$c\rho S\,dV=-d\Phi+I\,dV.$$

Из (23) $dV=F(r)\,dr$, поэтому

$$c\rho SF(r)=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}+IF(r), \tag{26}$$

так как Φ — функция от r, t, и, следовательно, $d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}dr$.

Подставляя Φ из (22), S и I из (14) и (15), получим

$$c\rho F(r)\frac{\partial T(r, t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial r}[q(r,t)F(r)]+F(r)\frac{\partial W(r, t)}{\partial t},$$

так как (26) в общем виде имеет смысл только для неподвижной среды.

В соответствии с законом Фурье

$$q(r, t) = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r},$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned} &c\rho F \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda F \frac{\partial T}{\partial r}\right) + F \frac{\partial W}{\partial t} \\ &\text{или} \\ &F \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial r}\left(F \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{c\rho} F \frac{\partial W}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

если λ, c, и ρ — постоянные величины.

Формулы (27) являются различной формой записи *обобщенного дифференциального уравнения переноса для одномерного теплового потока.* В случаях, когда в теле нет распределенных источников теплоты ($W = 0$),

$$F \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial r}\left(F \frac{\partial T}{\partial r}\right). \qquad (28)$$

Типичными представителями тел, для которых справедливы равенства (22) и (23), являются все тела, если у них

$$F(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^k F_0, \qquad (29)$$

где $F_0 = F(r_0)$ — площадь граничной поверхности; k — действительное положительное число.

В этой связи, например, уравнение (28) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &r^k \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial r}\left(r^k \frac{\partial T}{\partial r}\right) \\ &\text{или} \\ &\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

При $k = 0$ и $r = x$ эти уравнения соответствуют уравнению (20) теплопроводности Фурье для температурного поля в одномерном пространстве, т. е. для случаев, когда

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0;$$

примерами таких тел, как известно, являются полубесконечное тело и неограниченная пластина.

При $k = 1$ уравнения (30) преобразуются в уравнения Фурье для бесконечного цилиндра, при $k = 2$ — для шара, записанные соответственно в цилиндрических сферических координатах (см. приложение I).

Глава 3. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ

Как уже было указано в предыдущем параграфе, основной задачей аналитической теории теплообмена является исследование пространственно-временного изменения температурного поля в теле, выбранном в качестве объекта такого исследования. Математическое содержание этой задачи заключается в интегрировании одного из дифференциальных уравнений (18)—(21), (27), (28) или (30) теплопереноса для нахождения температурного поля в виде функции (1) от времени и координат пространства, заполнена исследуемым телом[1]. Так как перечисленные уравнения, являющиеся частными выражениями общего дифференциального уравнения (17) теплопереноса, отражают только механизм переноса теплоты в той или иной вещественной среде и полностью абстрагированы от конкретных обстоятельств протекания этого процесса, то к дифференциальным уравнениям (18)—(21), (27), (28) или (30) необходимо присоединить так называемые *условия однозначности.*

Условия однозначности определяют существенные для процесса переноса теплоты физические характеристики тела и окружающей его среды, геометрические свойства тела, начальное состояние системы тело — окружающая среда и условия теплового взаимодействия граничной поверхности тела с окружающей средой. Эти условия в результате интегрирования дифференциального уравнения обеспечивают нахождение той функции (1) температурного поля, которая является единственным решением уравнения для данного конкретного случая переноса теплоты.

Для конкретности дальнейшего изложения в этой главе рассмотрим состав и способы представления условий однозначности применительно к дифференциальному уравнению (20) теплопроводности Фурье.

13. ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ

Из дифференциального уравнения (20) непосредственно следует, что существенными для процесса переноса теплоты теплопроводностью являются коэффициент a температуропроводности тела или составляющие его величины λ, c и ρ. При формулировке условий однозначности эти величины должны быть заданы в виде числовых значений.

Если λ, c и ρ существенно зависят от температуры, то дифференциальное уравнение (20) необходимо заменить другим:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right),\qquad(31)$$

---

[1] Если тело является жидкостью, то к дифференциальным уравнениям (18) или (19) необходимо присоединить еще уравнения гидродинамики (см. с. 39) и интегрировать систему дифференциальных уравнений.

которое получается из (17) при $W = 0$ и $w_x = w_y = w_z = 0$. В этом случае при формулировке условий однозначности величины λ, c и ρ следует задать функциям, например, от температуры.

Перечисленные физические характеристики тела должны быть дополнены характеристиками окружающей среды, с которой исследуемое тело обменивается теплотой. Конкретно эти характеристики среды и способы их представления в условиях однозначности определяются так называемыми *граничными условиями*.

14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЕЛА

Дифференциальные уравнения (20) и (31) инвариантны к конфигурации тела. Поэтому при формулировке условий однозначности конфигурация тела должна быть задана уравнением его граничной поверхности. Однако, как правило, дифференциальные уравнения (20) и (31) используют для исследования температурных полей тел классических конфигураций: призматических, цилиндрических и сферических. Для таких тел уравнения представляются соответственно в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Поэтому конфигурация классических тел в условиях однозначности задается словесной формулировкой и числовыми значениями координат граничной поверхности в той или иной системе.

15. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СИСТЕМЫ

Для исследования пространственно-временного изменения температурного поля в заданном теле (т. е. с известными тепловыми и геометрическими свойствами) необходимо знать момент начала этого изменения и распределение температуры в этот момент времени по всему объему тела и окружающей среды.

Если за начало процесса теплопереноса принимается момент времени $t_н$, то соответствующее ему распределение температуры в теле задают функцией $\varphi_1(x, y, z)$, т. е.

$$T(x, y, z, t_н) = \varphi_1(x, y, z). \tag{32}$$

Выбор функции φ_1 зависит от особенностей тех конкретных процессов, которые происходили в теле или в окружающей его среде до момента времени $t = t_н$. Как правило, принимают $t = 0$ и

$$T(x, y, z, 0) = T_н \equiv \text{const}. \tag{33}$$

Аналогично задают начальное распределение температуры и в среде, окружающей тело.

16. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Учитывая структуру дифференциальных уравнений (20) и (31) в качестве граничных условий, наиболее логично задать либо функцию $\varphi_2(x_0, y_0, z_0, t)$ распределения температуры на поверхности тела, тогда

$$T(x_0, y_0, z_0, t) = \varphi_2(x_0, y_0, z_0, t),$$

либо функцию $\varphi_3(x_0, y_0, z_0, t)$ распределения градиента температурного поля тела во всех точках на его поверхности, т. е.

$$(\mathrm{grad}_m T)_0 = \varphi_3(x_0, y_0, z_0, t),$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точек граничной поверхности тела; $(\mathrm{grad}_m T)_0$ — проекция температурного градиента в теле непосредственно у его поверхности на направление нормали m к этой поверхности.

Выбор варианта граничных условий, а также функций φ_2 и φ_3 является весьма ответственным этапом назначения условий однозначности и может быть только результатом тщательного анализа обстоятельств теплового взаимодействия тела с окружающей средой на практике или в специальном эксперименте. Обобщение многолетних наблюдений и громадного числа экспериментов позволило выявить несколько наиболее часто встречающихся родов граничных условий.

Оказалось возможным не учитывать в ряде случаев неоднородность распределения температуры на поверхности тела и принять, что φ_2 является функцией только времени, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} T(x_0, y_0, z_0, t) = T_0(t); \\ \text{в частном случае она принимается постоянной:} \\ T(x_0, y_0, z_0, t) = T_0 \equiv \mathrm{const}. \end{array}\right\} \qquad (34)$$

Формулы (34) выражают *граничное условие I рода.*

Аналогично оказалось возможным не учитывать также неоднородность распределения градиента температурного поля тела во всех точках на его поверхности и принять, что φ_3 является функцией только времени. Это позволяет представить второй вариант граничных условий в виде уравнения теплообмена тела с окружающей средой:

$$-\lambda(\mathrm{grad}_m T)_0 = q_0(t), \qquad (35)$$

где $q_0(t)$ — поверхностная плотность теплового потока.

В частном случае

$$-\lambda(\mathrm{grad}_m T)_0 = q_0 \equiv \mathrm{const}, \qquad (36)$$

что выражает *граничное условие II рода.*

Наиболее универсальным является *граничное условие III рода*. Оно получается из (35), если функцию $q_0(t)$ представить в виде, соответствующем закону полной теплоотдачи (9):

$$-\lambda(\mathrm{grad}_m T)_0=\alpha(T_0-T_\text{c}). \qquad (37)$$

В этом случае в условиях однозначности, помимо физических характеристик λ, c и ρ тела, должно быть задано числовое значение или функция для коэффициента α, а также среди начальных условий — начальное значение функции $T_\text{c}(t)$, если температура окружающей среды изменяется со временем.

Вообще говоря, в каждом конкретном случае в уравнении (35) теплообмена тела с окружающей средой в качестве $q_0(t)$ может быть использована любая функция, определяющая интенсивность этого теплообмена. Из известных функций — это закон теплоотдачи (7) Ньютона, закон теплового излучения (8) Стефана—Больцмана и даже закон теплопроводности (4) Фурье. Последний используют в теории теплообмена для формулировки *граничного условия IV рода*, отражающего тепловое взаимодействие между двумя контактирующими твердыми телами:

$$-\lambda_1(\mathrm{grad}_m T_1)_0=-\lambda_2(\mathrm{grad}_m T_2)_0,\quad (T_1)_0=(T_2)_0. \qquad (38)$$

В дальнейшем, при решении задач на затвердевание расплава в литейной форме будем использовать все перечисленные граничные условия, а также ряд новых, характерных для обстоятельств теплопереноса в среде, изменяющей свое агрегатное состояние.

17. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Для тел заданной геометрической формы и заданных физических характеристик формулировка условий однозначности сводится к назначению начальных и граничных условий. Эти условия в совокупности называют *краевыми*. Они определяют «края» той пространственно-временной области, в пределах которой происходит исследуемый процесс изменения температурного поля в данном теле.

При присоединении краевых условий, представленных в виде того или иного варианта начальных и того или иного рода граничных условий, к дифференциальному уравнению теплопроводности Фурье, записанному применительно к заданным геометрической форме и величинам физических характеристик тела, образуется математическая формулировка *краевой задачи* теплопроводности.

Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Математическая формулировка краевой задачи теплопроводности — один из наиболее точных способов математического описания процесса распространения тепла в твердых телах. Ее называют, в этой связи, *математической моделью процесса* нагревания или охлаждения твердого тела. Число таких моделей определяется числом вариантов краевых условий. Однако в основе всех моделей всегда лежит дифференциальное уравнение теплопроводности, которое является математическим описанием *физической модели теплопроводности*, общей для всех твердых тел.

18. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Построению физической модели теплопроводности предшествовал длительный и сложный процесс формирования *физических представлений* о распространении теплоты в твердых телах. Именно он на известной ступени развития экспериментального исследования привел к определенному пониманию движущих причин распространения теплоты и использованию для исследования теплопроводности *количественных законов физики*.

Основной вывод из экспериментов состоит в том, что распространение теплоты в твердом теле происходит в том, и только в том случае, если элементы тела имеют различную температуру. Следовательно, условия, необходимые и достаточные для возникновения и протекания процесса, заключаются в неоднородности температурного поля.

Физическим законом, на основе которого строится количественное исследование теплопроводности, является *закон сохранения энергии*. Действительно, выделим внутри тела достаточно малый элемент, в пределах объема которого температуру можно было бы считать одинаковой в каждый данный момент времени. Если другие такие же элементы, соприкасающиеся с ним, будут иметь другую температуру, то в теле должен происходить процесс распространения теплоты. Если температура рассматриваемого элемента при этом будет изменяться со временем, то должна изменяться также и его внутренняя энергия. Согласно закону сохранения энергии, это изменение внутренней энергии должно равняться изменению количества теплоты, которым данный элемент обменивается с другими элементами тела.

Обозначим изменение внутренней энергии единицы объема dV элемента за время dt через dU, а соответствующее изменение количества теплоты за то же время — через dQ_V. Тогда

$$dU = dQ_V, \qquad (39$$

где $dU = c\rho dT$ — для твердого тела, если dT — изменение температуры рассматриваемого элемента тела за время dt.

По определению

$$dQ_V = q_V\, dt,$$

с учетом (24)

$$dQ_V = -\frac{d\Phi}{dV}\, dt.$$

Согласно закону теплопроводности Фурье (4) тепловой поток Ф определяется формулой (6). Поэтому

$$dQ_V = \left(\frac{d}{dV} \int\limits_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n}\, dF\right) dt,$$

или, с помощью ряда преобразований, в том числе преобразования Остроградского, получим

$$dQ_V = \lambda \nabla^2 T\, dt,$$

если коэффициент λ — величина постоянная. Так как для твердого тела $dT = \frac{\partial T}{\partial t}\, dt$, то в итоге дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье — математическое представление физической модели теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T. \tag{40}$$

Здесь следует подчеркнуть, что математическая форма исходного уравнения (39) отличается завидной простотой. Однако его потребовалось конкретизировать применительно к процессу теплопроводности, ибо внешне он проявляется как изменение температуры в различных точках тела с течением времени. Необходимая конкретизация достигнута с помощью закона теплопроводности Фурье, выражающего в виде формулы (4) определенное, многократно проверенное на практике физическое соответствие потока теплоты в данном теле с распределением температуры в нем. В результате физическая модель теплопроводности оказалась представленной в форме дифференциального уравнения (40) в частных производных второго порядка.

19. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА

Дифференциальное уравнение (40), которое является лишь сокращенной записью (20), отвечает, как это понятно из только что изложенного, процессу перераспределения теплоты между элементами внутри твердого тела, т. е. процессу теплопроводности. Будет ли данное тело нагреваться или охлаждаться и как в этой связи будет формироваться его температурное поле, — все это зависит от начального состояния данного тела и от условий его теплового взаимодействия с окружающей средой. Следовательно, требуется дальнейшая конкретизация физической модели теплопроводности применительно к анализу заданного процесса охлаждения или нагревания. Эта конкретизация для данного тела с заданными физическими характеристиками возможна в результате ее дополнения краевыми условиями.

Пусть, например, в начале процесса температура тела всюду одинакова и равна $T_н$, температура среды в течение всего процесса постоянна и равна $T_с$. Пусть, данное тело обменивается теплотой с окружающей средой. Этот теплообмен описывается граничным условием III рода. Тогда

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial t}=a\nabla^2 T;\\&-\lambda(\mathrm{grad}_m T)_0=\alpha(T_0-T_\text{c});\\&T(x, y, z, 0)=T_\text{н}\equiv\mathrm{const};\\&T_\text{c}\equiv\mathrm{const},\end{aligned}\right\}\qquad(41)$$

что является уже математической моделью конкретного процесса охлаждения (при $T_\text{н} > T_\text{c}$) или нагревания (при $T_\text{н} < T_\text{c}$) тела.

Систему (41) называют математической моделью конкретного процесса охлаждения или нагревания твердого тела потому, что краевые условия (три последние строчки системы), определяющие начало, направление и интенсивность хода процесса распространения теплоты в твердом теле, лишь *приближенно* отражают действительные начальные и граничные условия протекания рассматриваемого реального процесса охлаждения или нагревания данного тела. Достаточно сказать, что не существует *объективного* способа выбора (или назначения) краевых условий. Выше даны типовые математические представления начальных и граничных условий. Естественно, что указанные там четыре рода граничных условий не могут охватить все многообразие реальных процессов охлаждения или нагревания тел. И они, следовательно, будут с тем или иным приближением соответствовать реальным условиям теплового взаимодействия этих тел с окружающей средой.

Необходимость предельного упрощения краевых условий диктуется стремлением получить аналитическое решение задач теплопроводности. Как, по-видимому, читатель помнит, математическое содержание аналитической теории теплообмена заключается в интегрировании дифференциального уравнения теплопроводности для заданных краевых условий, т. е. в нахождении решения краевой задачи теплопроводности, например решения задачи (41).

Пусть функция

$$T=f(x, y, z, t, l, \lambda, c, \rho, \alpha, T_\text{н}, T_\text{c})\qquad(42)$$

является аналитическим решением задачи (41). Тогда функция (42) лишь вторая форма представления математической модели рассматриваемого процесса охлаждения или нагревания тела (l — характерный размер тела). В этой новой форме математическая модель позволяет уже непосредственно проследить во всех подробностях за пространственно-временным изменением температурного поля в теле и за перераспределением в нем теплоты.

К сожалению, аналитическое решение многих практически важных краевых задач теплопроводности все же не удается найти из-за их чрезвычайной сложности даже при простейших краевых условиях. Поэтому математические модели чаще всего представляются в виде системы типа (41), и необходимое исследование процесса охлаждения или нагревания тел проводят на основе приближенных и численных решений краевых задач с использованием электронно-вычислительных машин (ЭВМ). Однако такое исследование оказывается плодотворным, если для него применить *метод обобщенного анализа.*

20. ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА

Математическая модель процесса, представленная системой (41), может быть обобщена, если воспользоваться *безразмерными* (*обобщенными*) переменными, характерными для рассматриваемых процессов теплопроводности и теплообмена.

Согласно методу обобщенного анализа [1], безразмерные переменные являются частным от деления текущего значения переменных на их *характерные значения*, заданные непосредственно по условию краевой задачи.

Для краевой задачи конфигурация тела задана, т. е. задан характерный размер l этого тела. Тогда *относительные координаты* тела

$$X = \frac{x}{l}; \quad Y = \frac{y}{l}; \quad Z = \frac{z}{l}. \tag{43}$$

В условиях краевой задачи (41) заданы начальная температура $T_н$ тела и температура $T_с$ среды. *Относительную температуру* или температурный фактор θ можно записать как частное от деления избыточной текущей температуры тела

$$\vartheta \equiv T - T_с \tag{44}$$

на избыточную начальную температуру этого тела $\vartheta_н \equiv T_н - T_с$, т. е.

$$\Theta \equiv \frac{\vartheta}{\vartheta_н}. \tag{45}$$

Возможность такой записи относительной температуры следует непосредственно из дифференциальных уравнений, входящих в систему (41). И для уравнения теплопроводности, и для уравнения теплообмена существенны лишь разницы температур, что легко проверить подстановкой ϑ в (41). При этом значение температуры, принимаемой за начало отсчета, безразлично. Мы приняли за начало отсчета температуру среды, которая по условию задачи остается постоянной в течение всего процесса.

В условиях краевой задачи (41) нет характерного значения

---

[1] Подробно с методом обобщенного анализа читатель может ознакомиться по книге А. А. Гухмана [2].

для времени. Поэтому, согласно методу обобщенного анализа, *относительное время* должно быть частным от деления текущего времени на его *характеристическое значение*, которое определяется из дифференциального уравнения теплопроводности.

Подставим относительные переменные из (43) и (45) в (41):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nabla^2 \Theta; \\ &-(\mathrm{grad}_m \Theta)_0 = \mathrm{Bi}\,\Theta_0; \\ &\Theta(X, Y, Z, 0) = 1; \\ &\Theta_c = 0, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

где

$$\tau \equiv \frac{at}{l^2} - \tag{47}$$

относительное время, которое называется *числом Фурье*[1]; отношение $\frac{l^2}{a}$ — характеристическое значение времени распространения теплоты в данном теле;

$$\mathrm{Bi} \equiv \frac{\alpha l}{\lambda} - \tag{48}$$

критерий Био или *относительная интенсивность процесса теплообмена* тела с окружающей средой: отношение $\frac{\lambda}{l}$ называется *термической проводимостью* данного тела.

Система (46) является *обобщенной математической моделью* рассматриваемого процесса. Следовательно, аналитическое решение этой системы в виде функции

$$\Theta = F(X, Y, Z, \tau, \mathrm{Bi}) \tag{49}$$

будет второй формой представления той же обобщенной математической модели.

Смысл обобщения модели заключается в следующем.

Во-первых, *модель распространяется на все тела, геометрически подобные тому, для которого составлена система (41)*. Действительно, отношение характерных размеров любых двух, например i-го и $i+1$-го, из n подобных тел будет выражено множителем подобного преобразования

$$\mathrm{K}_l = \frac{l_{i+1}}{l_i}. \tag{50}$$

---

[1] В специальной литературе безразмерный комплекс $\frac{at}{l^2}$ принято называть критерием Фурье и обозначать через Fo. По предложению А. А. Гухмана этот комплекс назван числом Фурье, так как он содержит переменную величину t. Число Фурье еще не имеет общепринятого обозначения.

Пусть для координат, например, x точек этих тел

$$\text{К}_x = \frac{x_{i+1}}{x_i}. \tag{51}$$

Если множители К_l и К_x выбрать равными друг другу, то относительные координаты X точек будут одинаковыми, т. е. $\frac{x_i}{l_i} = \frac{x_{i+1}}{l_{i+1}}$, так как $\frac{\text{К}_x}{\text{К}_l} = 1$.

Аналогичные результаты нетрудно получить и для координат y и z этих точек. Следовательно, *точки, определяемые одинаковыми значениями относительных координат, являются сходственными для подобных тел.*

Во-вторых, *обобщенная модель позволяет сопоставлять температурные поля в геометрически подобных телах.* Действительно, пусть

$$\frac{\partial T_i}{\partial t_i} = a_i\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z_i^2}\right) -$$

уравнение теплопроводности системы (41), составленной для i-го тела, и

$$\frac{\partial T_{i+1}}{\partial t_{i+1}} = a_{i+1}\left(\frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial x_{i+1}^2} + \frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial y_{i+1}^2} + \frac{\partial^2 T_{i+1}}{\partial z_{i+1}^2}\right) -$$

уравнение теплопроводности той же системы (41), но записанной для $i + 1$-го тела. Введем аналогично (50), (51) множители преобразования переменных и параметров, входящих в эти уравнения теплопроводности:

$$\text{К}_T = \frac{T_{i+1}}{T_i};\quad \text{К}_t = \frac{t_{i+1}}{t_i};\quad \text{К}_a = \frac{a_{i+1}}{a_i};\quad \text{К}_y = \frac{y_{i+1}}{y_i};\quad \text{К}_z = \frac{z_{i+1}}{z_i}. \tag{52}$$

Далее, с помощью (51) и (52) выразим уравнение, записанное для $i + 1$-го тела, через переменные и параметры i-го тела. Получим

$$\frac{\text{К}_T}{\text{К}_t}\frac{\partial T_i}{\partial t_i} = \text{К}_T\text{К}_a a_i\left(\frac{\partial^2 T_i}{\text{К}_x^2 \partial x_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\text{К}_y^2 \partial y_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\text{К}_z^2 \partial z_i^2}\right)$$

или, умножив и разделив правую часть этого уравнения на К_l^2,

$$\frac{\partial T_i}{\partial t_i} = \frac{\text{К}_a\text{К}_t}{\text{К}_l^2} a_i\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z_i^2}\right),$$

так как для геометрически подобных тел

$$\frac{\text{К}_x}{\text{К}_l} = \frac{\text{К}_y}{\text{К}_l} = \frac{\text{К}_z}{\text{К}_l} = 1. \tag{53}$$

Очевидно, что процесс пространственно-временного изменения температурных полей в i-м и в $i+1$-м телах будет описываться одним и тем же уравнением, если

$$\frac{\mathrm{K}_a \mathrm{K}_t}{\mathrm{K}_l^2} = 1 \tag{54}$$

или

$$\frac{a_i t_i}{l_i^2} = \frac{a_{i+1} t_{i+1}}{l_{i+1}^2}.$$

Следовательно, *температурные поля в геометрически подобных телах можно сопоставлять во взаимно соответственные моменты времени, определяемые одинаковыми для этих тел числами Фурье*; как ясно из структуры числа Фурье, тела могут иметь различные физические характеристики.

Наконец, в-третьих, *обобщенная модель* (46) *позволяет сопоставлять температурные поля в геометрически подобных телах, которые обмениваются теплотой с окружающей средой в соответствии с граничными условиями III рода*. Действительно, пусть

$$-\lambda_i\,(\mathrm{grad}_m T_i)_0 = \alpha_i\,(T_{0i} - T_{ci}) \text{ —}$$

уравнение теплообмена системы (41), записанной для i-го тела, и

$$-\lambda_{i+1}\,(\mathrm{grad}_m T_{i+1})_0 = \alpha_{i+1}\,(T_{0\,(i+1)} - T_{c\,(i+1)}) \text{ —}$$

уравнение теплообмена той же системы (41), но составленной для $i+1$-го тела. В соответствии с предыдущим, введем множитель преобразования переменных и параметров, входящих в эти уравнения теплообмена:

$$\mathrm{K}_{\vartheta_0} = \frac{\vartheta_{0\,(i+1)}}{\vartheta_{0i}} = \frac{T_{0\,(i+1)} - T_{c\,(i+1)}}{T_{0i} - T_{ci}}; \quad \mathrm{K}_\lambda = \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}; \quad \mathrm{K}_\alpha = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \tag{55}$$

и с помощью (51), (52), (55) выразим уравнение теплообмена, записанное для $i+1$-го тела, через переменные и параметры i-го тела. Получим, что

$$-\mathrm{K}_{\vartheta_0}\mathrm{K}_\lambda\lambda_i \sqrt{\left(\frac{\partial\vartheta_{0i}}{\mathrm{K}_x\,\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta_{0i}}{\mathrm{K}_y\,\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta_{0i}}{\mathrm{K}_z\,\partial z_i}\right)^2} = \mathrm{K}_{\vartheta_0}\mathrm{K}_\alpha\alpha_i\vartheta_{0i},$$

так как численное значение

$$(\mathrm{grad}_m T)_0 = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Если обе части полученного уравнения для $i+1$-го тела умножить на K_l, то, с учетом (53),

$$-\lambda_i\,(\mathrm{grad}_m T_i)_0 = \frac{\mathrm{K}_\alpha \mathrm{K}_l}{\mathrm{K}_\lambda}\,\alpha_i\,(T_{0i} - T_{ci}).$$

Очевидно, что процесс теплообмена i-го и $i+1$-го тел с соответствующей окружающей средой будет описываться одним и тем же уравнением, если

$$\frac{\text{K}_\alpha \text{K}_l}{\text{K}_\lambda} = 1 \qquad (56)$$

или

$$\frac{\alpha_i l_i}{\lambda_i} = \frac{\alpha_{i+1} l_{i+1}}{\lambda_{i+1}}.$$

Следовательно, *температурные поля в геометрически подобных телах можно сопоставлять друг с другом в случае, когда интенсивности теплообмена этих тел с окружающей средой, происходящего согласно условиям III рода, определяются одинаковыми значениями критерия Био*; как ясно из структуры критерия Био, тела и окружающая их среда могут обладать различными физическими характеристиками.

Таким образом, выполненный анализ обобщенной математической модели (46) показывает, что в геометрически подобных телах в сходственных точках во взаимно соответственные моменты времени, определяемые числом (47) Фурье, относительные избыточные температуры (45) этих тел будут одинаковыми, если относительная интенсивность теплообмена их с окружающей средой, определяемая значением критерия (48) Био, будет одной и той же.

Введем множители преобразования для избыточных температур i-го и $i+1$-го тел:

$$\text{K}_\vartheta = \frac{\vartheta_{i+1}}{\vartheta_i}; \quad \text{K}_{\vartheta_\text{н}} = \frac{\vartheta_{\text{н}\,(i+1)}}{\vartheta_{\text{н}i}}.$$

Так как $\Theta_i = \Theta_{i+1} = \Theta$, то

$$\frac{\text{K}_\vartheta}{\text{K}_{\vartheta_\text{н}}} = 1; \qquad (57)$$

следовательно,

$$\vartheta_i = \vartheta_{\text{н}i}\Theta \text{ и } \vartheta_{i+1} = \vartheta_{\text{н}\,(i+1)}\Theta,$$

или, с учетом (49),

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta_i(x, y, z, t) = \vartheta_{\text{н}i} F(X, Y, Z, \tau, \text{Bi}) \\ \text{и} \\ \vartheta_{i+1}(x, y, z, t) = \vartheta_{\text{н}\,(i+1)} F(X, Y, Z, \tau, \text{Bi}). \end{array}\right\} \qquad (58)$$

Это означает, что при одинаковых значениях критерия Био в сходственных точках геометрически подобных тел и во взаимно соответственные моменты времени избыточные температуры ϑ будут отличаться только *масштабом*, определяемым начальным значением $\vartheta_\text{н}$ избыточной температуры. Другими словами, *поля избыточных температур в таких телах будут подобными.*

В соответствии с (58) *подобие температурных полей обусловлено равенством критерия Био для геометрически подобных тел.* Поэтому критерий Био называют *критерием подобия.* Численное значение Bi определяет *группу физически подобных процессов распространения теплоты.* Это, в свою очередь, означает, что обобщенная математическая модель (46) объединяет *множество* групп подобных процессов, каждая из которых характеризуется конкретным значением критерия Био в пределах $0 < \mathrm{Bi} < \infty$.

Глава 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ НАГРЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ. СПОСОБЫ ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ

Математическая модель группы подобных процессов охлаждения и нагревания тел при их теплообмене с окружающей средой в соответствии с граничными условиями III рода представлена выше в виде обобщенной краевой задачи (46). Наиболее полное исследование рассматриваемых процессов на основе этой математической модели возможно с помощью точного аналитического решения краевой задачи (46) в виде функции (49), которая является еще одной формой представления той же модели. Однако, как уже отмечено в предыдущей главе, существуют в большинстве случаев непреодоленные до сих пор трудности нахождения точных аналитических решений кревых задач теплопроводности. В той части общей теории теплообмена, которая изучает процессы теплопроводности в твердых телах, эти трудности даже при простейших граничных условиях связаны с решением задач для тел сложной конфигурации.

Точные аналитические решения найдены главным образом для так называемых *классических* тел (бесконечной плиты, бесконечного кругового цилиндра и шара), в которых тепловой поток является одномерным [1]. Поэтому теория теплообмена широко использует приближенные математические модели. Способы их представления и исследования различны. Ниже изложена суть наиболее часто применяемых способов.

21. УПРОЩЕННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Широко применяют способы упрощения формулировки краевой задачи для отыскания ее аналитического решения. Такая упрощенная формулировка будет представлять приближенную мате-

---

[1] Примеры решения некоторых одномерных краевых задач, представляющих интерес для анализа процессов формирования свойств отливок, приведены в следующей главе.

матическую модель исследуемого процесса. Если задача сформулирована в безразмерных переменных и критериях подобия, то она — приближенная модель группы подобных процессов.

Необходимые упрощения краевой задачи достигаются в результате ее анализа методами теории подобия. Мы рассмотрим упрощения для тел сложной конфигурации с целью приведения их к классическим.

Например, конфигурацию группы подобных круговых цилиндров конечной высоты можно характеризовать *параметрическим критерием подобия*

$$\mathscr{D} \equiv \frac{d}{2h},$$

где d и h — диаметр и высота цилиндра.

Эти размеры цилиндра являются характерными потому, что они — характерные значения переменных r и z для данной конфигурации тела в цилиндрической системе координат.

Очевидно, что краевая задача существенно упрощается, если для рассматриваемых цилиндров $\mathscr{D} \ll 1$, т. е. если $\mathscr{D} < 0{,}1$. Действительно, при $\mathscr{D} \ll 1$ площадь $F_\text{т}$ поверхности торцов цилиндров будет составлять менее 10% от площади F_0 их боковой поверхности, так как

$$\mathscr{D} = \frac{2\frac{1}{4}\pi d^2}{\pi dh} = \frac{F_\text{т}}{F_0}.$$

Следовательно, тепловым потоком через торцы можно пренебречь по сравнению с тепловым потоком через боковую поверхность, т. е. в тепловом смысле эти цилиндры конечной высоты можно рассматривать как бесконечные.

При $\mathscr{D} \gg 1$, т. е. при $\mathscr{D} > 10$, цилиндры превращаются в диски, толщина которых по крайней мере в 20 раз меньше их диаметра. Здесь, очевидно, можно пренебречь тепловым потоком через боковую поверхность дисков, т. е. в тепловом смысле эти диски допустимо рассматривать как бесконечные плиты.

Для группы подобных параллелепипедов параметрические критерии, характеризующие их конфигурацию, можно выразить, например, следующими соотношениями:

$$\mathscr{A} \equiv \frac{a}{c} \text{ и } \mathscr{B} \equiv \frac{b}{c}, \tag{59}$$

где a, b и c — три измерения параллелепипедов.

Очевидно, что при $\mathscr{A} \gg 1$ и $\mathscr{B} \gg 1$ эти параллелепипеды допустимо представить как бесконечные плиты с толщиной c; при $\mathscr{A} \approx 1$ и $\mathscr{B} \ll 1$ — как бесконечные плиты с толщиной b; при $\mathscr{A} \ll 1$ и $\mathscr{B} \approx 1$ — то же, с толщиной a. Другими словами, если два измерения параллелепипедов приблизительно одинаковы и много больше третьего, то такие параллелепипеды возможно рассматривать как бесконечные плиты.

Более сложный случай, когда все три измерения параллелепипедов приблизительно одинаковы ($\mathscr{A} = \mathscr{B} \approx 1$), т. е. когда они являются телами, близкими к кубам. Однако, используя прием А. И. Вейника, их можно приближенно представить как шары.

Пусть, например, куб объемом V_0 и шар того же объема охлаждаются в окружающей среде в соответствии с граничным условием III рода. Примем, что избыточные температуры в поверхности этих тел и тепловые потоки от их поверхностей в окружающую среду одинаковы. Но тогда

$$\alpha (T_0 - T_с) F_0 = \alpha_э (T_0 - T_с) F_э,$$

т. е.

$$\alpha_э = \alpha \frac{F_0}{F_э}, \tag{60}$$

где α — коэффициент теплоотдачи от рассматриваемого реального тела (в данном случае — куба) в окружающую среду; F_0 — площадь граничной поверхности этого тела; $F_э$ — площадь граничной поверхности эквивалентного тела (в данном случае — шара) того же объема.

Следовательно, $\alpha_э$ является условным коэффициентом теплоотдачи, формальная подстановка которого с помощью (60) в уравнение теплообмена краевой задачи (41) позволяет использовать результаты исследования процесса распространения теплоты в шаре для приближенного анализа этого процесса в кубическом теле. Такой анализ оказывается вполне удовлетворительным для практики, если отношение $\alpha_э$ к действительному значению коэффициента теплоотдачи α не превышает 1,5. В этой связи отношение площадей в (60) можно выразить в виде параметрического критерия

$$\mathscr{F} \equiv \frac{F_0}{F_э}, \tag{61}$$

который, как показал А. И. Вейник, в пределах $1 < \mathscr{F} \leqslant 1{,}5$ является *критерием приближенного теплового подобия* сплошных тел произвольной конфигурации соответствующим телам классической формы. Необходимое соответствие определяется значением критериев $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, если под a, b и c понимать три измерения произвольного сплошного тела. Как уже ясно читателю, при $\mathscr{A} = \mathscr{B} \approx 1$ все тела, в том числе и цилиндр с $\mathscr{D} \approx 0{,}5$, приводятся к шару радиусом

$$l = \left(\frac{4V_0}{3\pi}\right)^{1/3}; \tag{62}$$

при $\mathscr{A} \ll 1$ и $\mathscr{B} \ll 1$ (или $\mathscr{A} \approx 1$ и $\mathscr{B} \gg 1$, или $\mathscr{A} \gg 1$ и $\mathscr{B} \approx 1$) все тела приводятся к бесконечному цилиндру радиусом

$$l=\left(\frac{V_0}{\pi h}\right)^{1/2}=\left(\frac{f_0}{\pi}\right)^{1/2}, \tag{63}$$

где f_0 — площадь поперечного сечения тела.

Наконец, при $\mathscr{A} \gg 1$ и $\mathscr{B} \gg 1$ (или $\mathscr{A} \approx 1$ и $\mathscr{B} \ll 1$, или $\mathscr{A} \ll 1$ и $\mathscr{B} \approx 1$) все тела приводятся к бесконечной плите, половина толщины которой

$$l=\frac{V_0}{2F_{\text{ср}}}, \tag{64}$$

где $F_{\text{ср}}$ — площадь средней плоскости тела.

Таким образом, с учетом изложенных упрощений обобщенную математическую модель (46) можно представить приближенно как модель для одномерного теплового потока в телах произвольной конфигурации. Используя безразмерные переменные и критерии подобия применительно к дифференциальному уравнению (30), получим, что при любом значении критерия $\mathscr{F}$ в пределах $0 < \mathscr{F} \leqslant 1{,}5$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial R^2}+\dfrac{k}{R}\dfrac{\partial\Theta}{\partial R}; \qquad -1<R<1;\\
\mp\dfrac{\partial\Theta(\pm 1,\tau)}{\partial R}=\pm\mathscr{F}\mathrm{Bi}\,\Theta(\pm 1,\tau);\\
\Theta(R,0)=1;\\
\Theta_{\text{с}}=0,
\end{array}\right\} \tag{65}$$

где

$$k=\begin{cases}0, \text{ если } \mathscr{A}\gg 1 \text{ и } \mathscr{B}\gg 1;\\ 1, \text{ если } \mathscr{A}\ll 1 \text{ и } \mathscr{B}\ll 1;\\ \quad 2, \text{ если } \mathscr{A}=\mathscr{B}\approx 1;\end{cases}$$

$$R\equiv\begin{cases}X\equiv\dfrac{x}{l}, \text{ если } k=0;\\ \dfrac{r}{l}, \text{ если } k=1 \text{ и } 2;\end{cases}$$

$$l=\begin{cases}V_0/2F_{\text{ср}}, \text{ если } \mathscr{A}\gg 1 \text{ и } \mathscr{B}\gg 1;\\ \left(\dfrac{f_0}{\pi}\right)^{1/2}, \text{ если } \mathscr{A}\ll 1 \text{ и } \mathscr{B}\ll 1;\\ \left(\dfrac{4V_0}{3\pi}\right)^{1/3}, \text{ если } \mathscr{A}=\mathscr{B}\approx 1.\end{cases} \tag{66}$$

Заметим, что при $\mathscr{F} = 1$ математическая модель (65) является точной для трех классических тел: бесконечной плиты ($k = 0$,

$\mathscr{A} \gg 1$ и $\mathscr{B} \gg 1$, $l = \frac{1}{2} c$ — половина толщины $x_0 = l_0$ плиты), бесконечного цилиндра ($k = 1$, $\mathscr{D} \ll 1$, $l = \frac{1}{2} d$ — радиус r_0 цилиндра) и шара ($k = 2$, l — радиус r_0 шара).

22. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Второй из часто применяемых способов исследования рассматриваемых процессов на основе математических моделей заключается в использовании приближенных методов решения краевых задач. Таких методов много. Здесь изложен лишь один, который в дальнейшем широко используется при решении краевых задач теории формирования свойств отливки.

По предложению А. И. Вейника, температурное поле в теле задается приближенно уравнением параболы n-го порядка. Например, для краевой задачи (65) в случае охлаждения тела такую параболу можно представить формулой

$$\Theta = \Theta_ц - (\Theta_ц - \Theta_0) R^n,$$

где $\Theta_ц \equiv \Theta (0, \tau)$ и $\Theta_0 \equiv \Theta (1, \tau)$ — относительная избыточная температура центра и- поверхности тела соответственно; n — действительное положительное число.

Пусть n известно. Тогда неизвестной остается зависимость относительной избыточной температуры Θ тела от времени, которая должна быть выражена функциями $\Theta_ц$ и Θ_0 от числа Фурье τ. Их следует найти подстановкой параболической функции температурного поля в уравнения задачи (65).

Воспользуемся сначала уравнением теплообмена. Так как

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R} = - n (\Theta_ц - \Theta_0) R^{n-1}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \Theta (1, \tau)}{\partial R} = - n (\Theta_ц - \Theta_0),$$

то, согласно уравнению теплообмена,

$$\Theta_ц = \Theta_0 \left(1 + \frac{1}{n} \mathscr{F} \mathrm{Bi} \right). \tag{67}$$

В этой связи уравнение параболы примет вид

$$\Theta = \Theta_ц \left(1 - \frac{\mathscr{F} \mathrm{Bi} R^n}{n + \mathscr{F} \mathrm{Bi}} \right), \tag{68}$$

в котором лишь $\Theta_ц$ — функция от τ.

Будем далее рассматривать симметричное охлаждение бесконечной плиты. Уравнение теплопроводности при $k = 0$ представим как

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}\, dX = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right) dX$$

и выполним операцию интегрирования левой и правой его частей от 0 до 1. Левый интеграл вычисляется при подстановке Θ из формулы (68), если в ней $R = X$:

$$\int_0^1 \frac{\partial\Theta}{\partial\tau}\, dX = \frac{d\Theta_{\text{ц}}}{d\tau} \int_0^1 \left(1 - \frac{\mathcal{F}\mathrm{Bi}X^n}{n + \mathcal{F}\mathrm{Bi}}\right) dX =$$

$$= \left[1 - \frac{\mathcal{F}\mathrm{Bi}}{(n+1)(n+\mathcal{F}\mathrm{Bi})}\right] \frac{d\Theta_{\text{ц}}}{d\tau};$$

правый интеграл берется непосредственно:

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right) dX = \int_0^1 d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right) = \frac{\partial\Theta(1,\tau)}{\partial X},$$

так как при симметричном охлаждении $\frac{\partial\Theta(0,\tau)}{\partial X} = 0$. Теперь, с учетом граничного условия задачи (65) и формулы (67),

$$\left[1 - \frac{\mathcal{F}\mathrm{Bi}}{(n+1)(n+\mathcal{F}\mathrm{Bi})}\right] \frac{d\Theta_{\text{ц}}}{d\tau} = -\frac{n\mathcal{F}\mathrm{Bi}}{n+\mathcal{F}\mathrm{Bi}}\,\Theta_{\text{ц}},$$

т. е. уравнения теплопроводности и теплообмена в задаче (65) сведены к простейшему уравнению в обыкновенных производных первого порядка. Решение этого уравнения очевидно:

$$\Theta_{\text{ц}} = \exp\left[-(n+1)\frac{\mathcal{F}\mathrm{Bi}(\tau - \tau_1)}{\mathcal{F}\mathrm{Bi} + (n+1)}\right];$$

τ_1 — относительное время, в течение которого температура центра тела остается равной его начальной температуре; оно определяется этим же методом и равно[1]

$$\tau_1 = \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\mathrm{Bi}} - \frac{n}{(n+1)\mathrm{Bi}^2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\mathrm{Bi}\right).$$

Следовательно, температурное поле охлаждающейся бесконечной плиты приближенно выражается формулой

$$\Theta = \left(1 - \frac{\mathcal{F}\mathrm{Bi}X^n}{n+\mathcal{F}\mathrm{Bi}}\right)\exp\left[-(n+1)\frac{\mathcal{F}\mathrm{Bi}(\tau-\tau_1)}{(n+1)+\mathcal{F}\mathrm{Bi}}\right], \qquad (69)$$

число n в которой должно быть определено экспериментально или на основе численного решения этой же задачи. Как будет

---

[1] См. следующую главу, с. 88, формула (104).

показано в следующей главе, для бесконечной плиты $n = 2$. Несмотря на предельную простоту (69) при $n = 2$ вполне удовлетворительно согласуется с результатами точного расчета. Именно по этой причине в теории формирования свойств отливки изложенный метод[1] широко используют для тех задач, которые не решаются известными точными методами.

В заключение заметим, что изложенный метод приближенного решения краевых задач имеет очень интересное ответвление. Вернемся к (67). Очевидно, для всех случаев теплообмена тел с окружающей средой, когда интенсивность этого теплообмена будет настолько малой, что $\mathrm{Bi} \ll 1$ (меньше 0,1),

$$\Theta_{\text{ц}} \approx \Theta_0,$$

т. е. температура центра тела будет мало отличаться от температуры его поверхности. Следовательно, при $\mathrm{Bi} \ll 1$ можно не учитывать неоднородность температурного поля и считать, что температура тела является функцией только времени. Действительно, из формулы (69) для $\mathrm{Bi} \ll 1$

$$\Theta = \exp(-\mathscr{F}\,\mathrm{Bi}\,\tau), \tag{70}$$

так как при $\mathrm{Bi} \ll 1$ число $\tau_1 \approx 0$.

Полученная формула описывает процесс охлаждения тел любой конфигурации, для которых составлена модель (65). При этом отпадает ограничение для наибольшего значения критерия $\mathscr{F}$. В самом деле, если вспомнить, что (70) есть результат упрощения (в силу $\mathrm{Bi} \ll 1$) формулы (69), то согласно (66) для тел, эквивалентных бесконечной плите,

$$l = \frac{V_0}{2F_{\text{ср}}}.$$

Тогда, показатель экспоненты в (70)

$$\mathscr{F}\,\mathrm{Bi}\,\tau = \frac{F_0}{F_{\text{э}}}\,\frac{\alpha}{\lambda}\,at\,\frac{2F_{\text{ср}}}{V_0},$$

и так как удвоенная площадь $2F_{\text{ср}}$ средней плоскости рассматриваемого тела равна площади $F_{\text{э}}$ боковых поверхностей бесконечной плиты, эквивалентной этому телу, то

$$\mathscr{F}\,\mathrm{Bi}\,\tau = \frac{1}{\mathfrak{R}}\,\frac{\alpha}{\lambda}\,at.$$

Следовательно,

$$\Theta = \exp(-\mathrm{Bi}_{\mathfrak{R}}\tau_{\mathfrak{R}}), \tag{71}$$

---

[1] Подробнее с этим методом читатель может ознакомиться в книге А. И. Вейника [1].

где

$$\tau_{\mathfrak{R}} \equiv \frac{at}{\mathfrak{R}^2}; \qquad (72)$$

$$\mathrm{Bi}_{\mathfrak{R}} \equiv \frac{\alpha}{\lambda}\mathfrak{R}; \qquad (73)$$

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{V_0}{F_0}, \qquad (74)$$

где $\mathfrak{R}$ — *приведенный размер тела*; *он определяет численное значение половины толщины бесконечной плиты, к которой приводится любое тело сложной конфигурации*; *естественно, что* $\mathfrak{R}$ *имеет такой смысл только и только для* $\mathrm{Bi} \ll 1$.

В этой связи вспомним физический смысл критерия Био. Из (48) следует, что критерий Био является отношением коэффициента α теплоотдачи от поверхности тела в окружающую его среду к термической проводимости λ/l этого тела. Если $\mathrm{Bi} \ll 1$, то термическая проводимость тела много больше термической проводимости окружающей среды (коэффициент α можно представить как термическую проводимость окружающей среды). Следовательно, процесс перераспределения теплоты внутри тела будет происходить гораздо интенсивнее, чем отдача теплоты с его поверхности. Это означает, что, например, скорость охлаждения тела определится главным образом величиной термической проводимости окружающей среды; термическая проводимость самого тела не окажет заметного влияния на скорость его охлаждения. В свою очередь, это означает, что при $\mathrm{Bi} \ll 1$ *геометрические свойства конфигурации тела становятся несущественными для анализа хода процесса его охлаждения или нагревания в окружающей среде, с которой оно обменивается теплотой в соответствии с граничным условием III рода.*

Из формулы (67) следует, что

$$\frac{\delta\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{1}{n}\mathcal{F}\mathrm{Bi}, \qquad (75)$$

где $\delta\vartheta \equiv \vartheta_{\text{ц}} - \vartheta_0$ или $\delta\vartheta \equiv T_{\text{ц}} - T_0$ — *температурный перепад* внутри тела; $\vartheta_0 \equiv T_0 - T_{\text{с}}$ — *температурный напор* на границе соприкосновения тела с окружающей средой (избыточная температура поверхности тела, см. с. 53).

Таким образом, *критерий Био является приближенной мерой отношения температурного перепада в теле к температурному напору между телом и средой*:

$$\frac{\delta\vartheta}{\vartheta_0} \approx \mathrm{Bi}. \qquad (76)$$

Приближенной мерой является потому, что величины $\mathcal{F}$ и n зависят от конфигурации тела; величина n, помимо этого, зависит еще и от степени нестационарности процесса распространения теплоты [1].

Пусть $\mathrm{Bi} \ll 1$. Тогда согласно (75) вне зависимости от конфигурации $\delta\vartheta \ll \vartheta_0$, т. е. при $\mathrm{Bi} \ll 1$ *температурный перепад намного меньше температурного напора, и им для тела любой конфигурации допустимо пренебречь и считать, что температура тела является функцией только времени.*

В связи с чрезвычайной простотой (71), читатель может подумать, что случаи теплообмена при $\mathrm{Bi} \ll 1$ относительно редки в реальных условиях теплового взаимодействия тел с окружающей средой. На самом деле, на практике они встречаются достаточно часто. Что же касается литейного производства, то охлаждение отливок в песчаных формах и в окрашенных изнутри металлических (кокилях) — это, как мы увидим далее, случаи охлаждения с весьма малой интенсивностью.

23. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Во всех случаях, когда точное аналитическое решение задачи найти не удается, когда попытки упростить формулировку задачи, а также применить тот или иной способ получения приближенного решения приводят к недопустимо грубому искажению существа рассматриваемого процесса, целесообразно использовать численные методы решения и уже на их основе провести исследование рассматриваемого процесса.

Широкое внедрение электронно-вычислительных машин сделало возможным применение численных методов решения для сложных краевых задач теплопроводности. В арсенале вычислительной математики необходимых методов много. Здесь будут изложены основные идеи двух, обычно используемых для решения задач теории формирования отливок.

Метод прямых

Этот метод рассмотрим на примере краевой задачи (65) для бесконечной плиты. При $k = 0$, $\mathcal{F} = 1$ и симметричном охлаждении система (65) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}; \quad 0 < X < 1; \\ &-\frac{\partial\Theta(1,\tau)}{\partial X} = \mathrm{Bi}\,\Theta(1,\tau); \\ &\frac{\partial\Theta(0,\tau)}{\partial X} = 0; \\ &\Theta(X,0) = 1; \\ &\Theta_c = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

---

[1] Действительно, например, для бесконечной пластины $\mathcal{F} = 1$, а в случае стационарного процесса $n = 1$, т. е. соотношение (76) становится точным равенством.

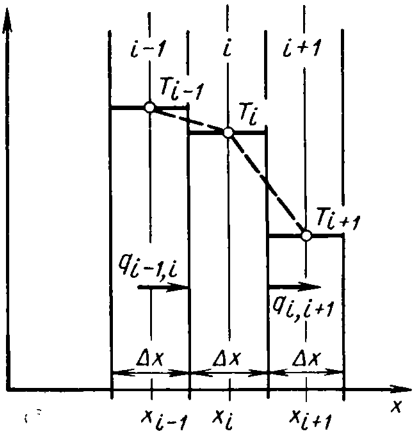


Рис. 6. Схема к выводу конечно-разностного уравнения охлаждения *i*-го слоя бесконечной плиты

Разделим плиту на $2k$ одинаковых слоев, параллельных боковой поверхности ее охлаждения. Толщина ΔX слоя будет равна $1/k$. Проведем через середину каждого слоя плоскости, параллельные боковой поверхности плиты. Эти плоскости будут отстоять от середины плиты на расстояния

$$X_i = \frac{1}{k}\left(i - \frac{1}{2}\right),$$

где $i = 1, 2, \ldots, k$ — номера слоев (если считать от середины плиты).

Следы пересечения этих плоскостей с координатной плоскостью $(\Theta, 0, X)$ образуют *семейство параллельных прямых* $X = X_i$. На каждой такой прямой функция $\Theta(X, \tau)$ примет значение $\Theta(X_i, \tau)$, т. е. будет зависеть только от времени:

$$\Theta(X_i, \tau) = \Theta_i(\tau).$$

Если число слоев, на которые разделена плита, велико (т. е. толщина каждого слоя достаточно мала), то с определенным приближением $\Theta_i(\tau)$ допустимо рассматривать как избыточную температуру соответствующего слоя, зависящую только от времени. Тогда уравнение теплопроводности в задаче (77), используя конечно-разностное представление правой его части, можно заменить системой уравнений в обыкновенных производных типа

$$\frac{d\Theta_i}{d\tau} = k^2(\Theta_{i+1} - 2\Theta_i + \Theta_{i+1}). \qquad (78)$$

Поясним смысл полученного конечно-разностного уравнения для i-го слоя плиты схемой на рис. 6. В соответствии с идеей вывода дифференциального уравнения теплопроводности Фурье (см. с. 47) i-й слой плиты — элемент тела, который обменивается теплотой с соседними элементами: i — 1-м и i + 1-м слоями той же плиты. Так как в результате изменяется его температура T_i, то должно изменяться и его теплосодержание. При этом скорость изменения теплосодержания

$$c\rho\,\Delta x\frac{dT_i}{dt}$$

должна быть в точности равна изменению Δq_i плотности теплового потока, проходящего через i-й слой. Если Δq_i вычислить как разность между плотностями теплового потока $q_{i-1,\,i}$, входящего в i-й слой, и $q_{i,\,i+1}$, выходящего из этого слоя, то

$$c\rho\,\Delta x\frac{dT_i}{dt}=q_{i-1,\,i}-q_{i,\,i+1}. \tag{79}$$

Пусть толщина слоев мала. Тогда кривую действительного распределения температуры, которая проходит через точки, отвечающие значениям температуры T_{i-1}, T_i и T_{i+1}, приближенно можно заменить ломаной прямой, проходящей через эти же точки, и, согласно закону теплопроводности Фурье, принять, что

$$q_{i-1,\,i}\approx\frac{\lambda}{\Delta x}(T_{i-1}-T_i);$$

$$q_{i,\,i+1}\approx\frac{\lambda}{\Delta x}(T_i-T_{i+1}).$$

Следовательно,

$$\frac{dT_i}{dt}\approx\frac{a}{\Delta x^2}(T_{i+1}-2T_i+T_{i+1}). \tag{80}$$

В безразмерных переменных $\Theta_i=\frac{T_i-T_{\text{с}}}{T_{\text{н}}-T_{\text{с}}}$; $\tau=\frac{at}{l^2}$; $X=\frac{x}{l}$ полученное приближенное уравнение примет вид (78), если $k=\frac{l}{\Delta x}$, или, что то же самое, $k=\frac{1}{\Delta X}$.

Составим систему уравнений типа (78) для задачи (77). Здесь важно согласовать первое и последнее уравнения системы с граничными условиями задачи (рис. 7). Для первого центрального

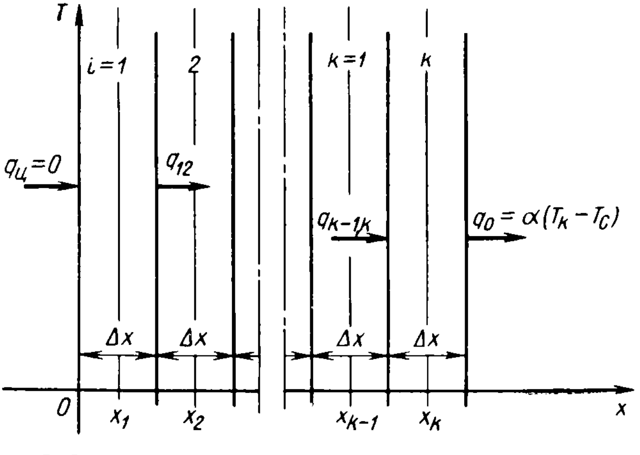


Рис. 7. Схема согласования конечно-разностных уравнений с граничными условиями охлаждения бесконечной плиты

слоя ($i = 1$) уравнение (79), из которого мы получили уравнение (80), примет вид

$$c\rho\,\Delta x \frac{dT_1}{dt} = q_{\text{ц}} - q_{1,\,2},$$

где $q_{\text{ц}}$ — плотность теплового потока от центра плиты (рис. 7).

Так как, согласно условиям задачи,

$$\frac{\partial\Theta\,(0,\,\tau)}{\partial X} = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial T\,(0,\,t)}{\partial x} = 0,$$

то $q_{\text{ц}} = -\lambda \dfrac{\partial T\,(0,\,t)}{\partial x} = 0$. Поэтому при $i = 1$ $q_{i-1,\,i} = q_{\text{ц}} = 0$;

$$c\rho\,\Delta x \frac{dT_1}{dt} = -\,q_{1,\,2}$$

или

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{a}{\Delta x^2}(T_2 - T_1). \tag{81}$$

Для последнего поверхностного слоя плиты ($i = k$) уравнение (79) примет другой вид:

$$c\rho\,\Delta x \frac{dT_k}{dt} = q_{k-1,\,k} - q_0,$$

где q_0 — плотность теплового потока от поверхности плиты в окружающую среду (рис. 7).

Так как, согласно условиям задачи,

$$-\frac{\partial\Theta\,(1,\,\tau)}{\partial X} = \text{Bi}\,\Theta\,(1,\,\tau), \text{ т. е. } -\lambda\frac{\partial T\,(l,\,t)}{\partial x} = \alpha\,[T\,(l,\,t) - T_{\text{c}}],$$

то $q_0 = -\lambda \dfrac{\partial T\,(l,\,t)}{\partial x}$ и, следовательно,

$$q_0 = \alpha\,[T\,(l,\,t) - T_{\text{c}}].$$

Поэтому при $i = k$ величина $q_{i,\,i+1} = q_0 = \alpha\,(T_k - T_{\text{c}})$,

$$c\rho\,\Delta x \frac{dT_k}{dt} = q_{k-1,\,k} - \alpha\,(T_k - T_{\text{c}})$$

или

$$\frac{dT_k}{dt} = \frac{a}{\Delta x^2}\left[T_{k-1} - \left(\frac{1}{k}\,\text{Bi} + 1\right)\,T_k\right]. \tag{82}$$

Для внутренних слоев плиты ($i = 2, 3, \ldots, k-1$) уравнение (79), как мы установили раньше, принимает вид (80).

Таким образом, уравнение теплопроводности в задаче (77) с учетом граничных условий заменяется системой из k уравнений в обыкновенных производных: (81), (82) и $k-2$ уравнений (80). В безразмерных переменных

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\Theta_1}{d\tau}=k^2(\Theta_2-\Theta_1);\\&\frac{d\Theta_i}{d\tau}=k^2(\Theta_{i+1}-2\Theta_i+\Theta_{i-1});\\&\qquad i=2,3,\ldots,k-1;\\&\frac{d\Theta_k}{d\tau}=k^2\left[\Theta_{k-1}-\left(\frac{1}{k}\mathrm{Bi}+1\right)\Theta_k\right];\end{aligned}\right\}\tag{83}$$

начальные условия для этой системы:

$$\Theta_1(0)=\Theta_2(0)=\cdots=\Theta_{k-1}(0)=\Theta_k(0)=1,\ \Theta_c=0.\tag{84}$$

В таком виде задача (77) решается на аналоговых электронно-вычислительных машинах (АВМ).

Для решения на цифровых электронно-вычислительных машинах (ЭЦВМ) краевые задачи приводят к системе конечно-разностных алгебраических уравнений. При решении краевых задач теплопроводности чаще всего используют метод сеток.

Метод сеток

Этот метод рассмотрим также на примере краевой задачи (77). Для представления ее системой конечно-разностных алгебраических линейных уравнений на координатной плоскости (τ, 0, X) в области $\tau>0$ и $0\leqslant X\leqslant 1$ строят два семейства параллельных прямых:

$$X=X_i=\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k}\ (i=1,\ 2,\ldots,k);\ \tau=\tau_j=j\,\Delta\tau\ (j=0,\ 1,\ 2\ldots);$$

эти прямые образуют сетку.

Обозначим $\Theta\ (X_i,\ \tau_j)=\Theta_{ij}$ и приближенно заменим в каждом внутреннем узле $(X_i,\ \tau_j)$ сетки производную в правой части дифференциального уравнения теплопроводности разностным соотношением

$$\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}\right)_{ij}\approx k^2(\Theta_{i+1,\,j}-2\Theta_{ij}+\Theta_{i-1,\,j}),$$

а производную в левой части — соотношением

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}\right)_{ij}\approx\frac{1}{\Delta\tau}(\Theta_{i,\,j+1}-\Theta_{ij}).\tag{85}$$

Тогда уравнение теплопроводности приводится к системе конечно-разностных уравнений типа

$$\Theta_{i,\,j+1}=(1-2\sigma)\Theta_{ij}+\sigma(\Theta_{i+1,\,j}+\Theta_{i-1,\,j}),\tag{86}$$

где $\sigma=k^2\Delta\tau$ — критерий устойчивости этого уравнения.

В вычислительной математике доказано, что уравнение (86) будет устойчивым при $0 < \sigma \leqslant 0{,}5$. Если $\sigma = 0{,}5$, т. е. $\Delta\tau = 1/2k^2$, то уравнение (86) принимает весьма простой вид:

$$\Theta_{i,\,j+1} = \frac{1}{2}(\Theta_{j+1,\,j} + \Theta_{j-1,\,j}). \tag{87}$$

Составим систему уравнений типа (87) для задачи (77). Здесь, как и в предыдущем методе, важно согласовать уравнения для первого ($i = 1$) и граничного ($i = k$) слоев плиты с граничными условиями задачи:

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_{1,\,j+1} = \frac{1}{2}(\Theta_{2j} + \Theta_{1j});\\
&\Theta_{i,\,j+1} = \frac{1}{2}(\Theta_{i+1,\,j} + \Theta_{i-1,\,j});\\
&\qquad i = 2, 3, \ldots, k-1;\\
&\Theta_{k,\,j+1} = \frac{1}{2}\left[\Theta_{k,\,j}\left(1 - \frac{\mathrm{Bi}}{k}\right) + \Theta_{k-1,\,j}\right];\\
&\tau_j = j\,\frac{1}{2k^2}, \quad j = 0,\ 1, 2\ldots;
\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

начальные условия для этой системы ($j = 0$):

$$\Theta_{10} = \Theta_{20} = \cdots \Theta_{k-1,\,0} = \Theta_{k,\,0} = 1, \ \Theta_c = 0. \tag{89}$$

Первое и последнее уравнения системы (88) найдены соответственно из (81), (85) и (82), (85).

В представленном виде та же задача (77) решается на ЭЦВМ [1].

Представление результатов численных решений

Независимо от метода и вычислительных средств, использованных для численного решения задач, результаты решения — числа, т. е. числовые значения зависимой переменной для соответствующих числовых значений аргументов и параметров. Их представляют в виде таблиц или в виде графиков, которые являются способами представления приближенных математических моделей процессов (приближенных потому, что методы, используемые для численного решения сложных задач, являются, как правило, приближенными). К ним относятся и те способы, которые только что изложены. Однако с помощью таких приближенных моделей возможно выполнить необходимое исследование весьма сложных процессов.

---

[1] Заметим, что задачу (77), представленную системой обыкновенных дифференциальных уравнений (83) и условиями (84), можно решить на ЭЦВМ методом Рунге—Кутта. При необходимости читатель сможет самостоятельно изучить этот метод по книге Н. В. Копченовой и И. А. Марона [5].

В рассмотренной задаче на охлаждение бесконечной плиты зависимость

$$\Theta = F(X,\ \tau,\ \mathrm{Bi}) \tag{90}$$

может быть представлена графиками температурных полей $\Theta = F_1(X)$ для различных моментов времени τ или заданных значений критерия Bi, или графиками изменения избыточной температуры $\Theta = F_2(\tau)$ от времени в характерных точках тела (например, в центре плиты, т. е. для $X = 0$, или на ее поверхности, т. е. для $X = 1$) при тех же значениях критерия Bi. Такие графики обладают весьма необходимыми свойствами обобщенной математической модели, так как они составлены с использованием безразмерных переменных и критериев подобия. Действительно, в рассмотренной задаче с самого начала были введены обобщенные переменные: при математической формулировке задачи (77) и при приведении ее к виду, необходимому для численного решения на ЭВМ. Поэтому результаты решения распространимы на группы физически подобных процессов охлаждения бесконечных плит для заданных значений критерия Bi.

С помощью графиков $\Theta = F_1(X)$ и $\Theta = F_2(\tau)$, о которых шла речь, возможно выполнить необходимое исследование процесса охлаждения плиты. Графическим дифференцированием нетрудно найти производную Θ по τ для различных X, и следовательно, рассчитать скорость охлаждения плиты в различных ее точках. По графику $\Theta = F(\tau)$ при $X = 1$ с помощью формулы (10) просто рассчитать тепловой поток Φ_0 от поверхности тела в окружающую среду. И т. д. То же самое можно выполнить и на ЭВМ, создав соответствующие программы.

Однако графики (и таблицы тоже) обладают определенным неудобством — они громоздки. В инженерной практике удобнее использовать формулы. В этой связи результаты численного решения задач полностью или частично для необходимой области значений параметров аппроксимируют приближенными формулами. Способов построения и подбора необходимых формул очень много. Чаще всего используют степенные формулы типа

$$\mathrm{K} = A\mathrm{K}_1^{n_1}\mathrm{K}_2^{n_2}\mathrm{K}_3^{n_3}\cdots\mathrm{K}_m^{n_m} + B, \tag{91}$$

где K, K_1, K_2, K_3, . . ., K_m — относительные переменные и критерии подобия; A, B, n_1, n_2, n_3, . . ., n_m — вещественные числа.

Для одномерных задач теплопроводности можно применить более удобный способ аппроксимации результатов их численного решения приближенными формулами: найти приближенное аналитическое решение, например, методом А. И. Вейника (см. стр. 59—61) и при сопоставлении аналитического решения с численным определить показатель n параболы, а также установить необходимость введения в формулу, выражающую приближенное аналитическое решение, поправочных коэффициентов, которые улучшают требуемую аппроксимацию.

Для рассмотренной задачи на охлаждение бесконечной плиты такой аппроксимирующей формулой является (69) при $\mathcal{F} = 1$. Если в ней на основе численного решения задачи (77) определить значение n, то она будет приближенной обобщенной математической моделью процесса охлаждения плиты, выражающей зависимость (90) в целом, удобной для инженерных расчетов. В дальнейшем к этому способу аппроксимации численных решений краевых задач теории формирования свойств отливок будем прибегать довольно часто.

24. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ НА ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ. МОДЕЛИРОВАНИЕ

По существу нет принципиальной разницы *в способах использования результатов* экспериментов и результатов численного решения краевых задач для построения и исследования математических моделей.

И в том, и в другом случаях результаты — числовые значения искомой зависимой переменной для соответствующих числовых значений независимых переменных и параметров. И в том, и в другом случаях их представляют в виде таблиц или графиков, а для удобства дальнейшего инженерного применения аппроксимируют приближенными формулами, например степенными[1] типа (91). И если таблицы, графики и приближенные формулы устанавливают функциональную связь между безразмерными переменными и критериями подобия, характерными для изучаемого процесса, то они являются приближенной обобщенной математической моделью этого процесса, с помощью которой его можно исследовать с необходимой полнотой.

Есть разница лишь *в способах получения результатов*.

При численном решении краевых задач числовые значения критериев подобия и независимых переменных задают, а значения зависимой переменной *вычисляют*. При экспериментальном исследовании все величины *измеряют*. Измерения всегда сопряжены с ошибками, вызванными как ограниченной точностью способов и средств измерения, так и влиянием неучтенных и случайных эффектов, которые всегда возникают при реализации специальных экспериментов. Например, в теплофизических экспериментах такие эффекты возникают из-за влияния переменных коэффициента теплопроводности, удельной теплоемкости, плотности реальных тел, а также из-за нестабильности условий теплового взаимодействия их с окружающей средой, которые при обработке результатов измерений часто принимают постоянными или усредненными.

---

[1] В приложении IV приведены формулы для расчета коэффициента теплоотдачи для различных случаев конвективного теплообмена жидкости и твердых тел. Эти формулы имеют вид (91) и являются итогом соответствующей обработки специальных экспериментов.

Для уменьшения таких ошибок экспериментальное исследование изучаемого процесса повторяют несколько раз, а результаты измерений обрабатывают специальными статистическими методами, позволяющими повысить точность итоговых значений измеренных величин. Очень полезно для этой цели использовать *методы математического планирования многофакторных экспериментов*, которые дают возможность не только уменьшить влияние случайных и неучтенных эффектов, но и представить результаты экспериментов сразу в виде *полиноминальной* математической модели, выраженной уравнением регрессии (полиномом):

$$\text{K} = b_0 + \sum^{n} b_i \text{K}_i + \sum^{n,\, m} b_{ij} \text{K}_i;\ \text{K}_j + \sum^{n} b_{ii} \text{K}_i^2 + \cdots, \qquad (92)$$

где n — число независимых переменных (факторов); b_0, b_i — коэффициенты регрессии, определяемые на основании измерений величин K_i, полученных при реализации экспериментов по специальному плану.

Здесь не будем рассматривать методы постановки, реализации и обработки экспериментальных данных. С ними читатель хорошо знаком, а при необходимости может восстановить их в памяти по специальным руководствам[1]. Наша цель заключается в том, чтобы показать, что на основании хорошо и правильно обработанных результатов измерений можно построить приближенную математическую модель исследуемого процесса, структура и назначение которой аналогичны получаемым на основании численного решения краевых задач.

Далее еще раз обратим внимание на то, что представление результатов экспериментов в виде таблиц, графиков или их аппроксимирующих формул, устанавливающих функциональную связь между относительно зависимыми и независимыми переменными и критериями подобия, позволяет распространить эти результаты на группу физически подобных процессов. Такое соображение, в свою очередь, позволяет сделать известный вывод о том, что при постановке и реализации экспериментального исследования вовсе необязательно обращаться к изучаемому процессу в натуре. Можно, если это целесообразно, необходимое исследование выполнить на модели процесса, физически подобной той, которая подлежит изучению. На этом пути моделирования есть две возможности: первая заключается в изменении масштаба изучаемого процесса, вторая — замене его другим, аналогичным.

---

[1] См., например, **Шенк Х.** Теория инженерного эксперимента. М., «Мир», 1972. 396 с. **Налимов В. В., Чернова Н. А.** Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., «Наука», 1965. 288 с.

Масштабирование

Моделирование изменением масштаба изучаемого процесса непосредственно следует из анализа структуры критериев подобия и комплексных переменных, для рассмотренных выше процессов охлаждения и нагревания тел — из структуры критерия Био и числа Фурье.

Процессы охлаждения (нагревания) геометрически подобных тел при их тепловом взаимодействии с окружающей средой в соответствии с граничным условием III рода подобны, если значения критерия Био для них одинаковы (см. с. 54). Следовательно, если Bi — критерий Био для изучаемого процесса охлаждения, а $\mathrm{Bi_м}$ — критерий Био для подобной ему модели того же процесса, то

$$\mathrm{Bi} = \mathrm{Bi_м}$$

или

$$\frac{\alpha}{\lambda} l = \frac{\alpha_м}{\lambda_м} l_м,$$

т. е.

$$\frac{K_\alpha}{K_\lambda} K_l = 1,$$

где $K_\alpha = \frac{\alpha_м}{\alpha}$, $K_\lambda = \frac{\lambda_м}{\lambda}$, $K_l = \frac{l_м}{l}$ — множители подобного преобразования изучаемого процесса к модели, являющиеся *масштабами* этой модели.

Полученное соотношение в точности повторяет (56), найденное при анализе обобщенной математической модели процесса, которая представлена системой (46). Очевидно, и в (54) K_a и K_t можно также считать множителями подобного преобразования изучаемого процесса к модели и, следовательно, *масштабами* этой модели.

Пользоваться масштабами очень просто. Например, процесс охлаждения весьма массивных отливок можно экспериментально исследовать на уменьшенных геометрически подобных моделях из того же материала. Пусть $K_l = 1/5$, т. е. модель уменьшена в 5 раз. Тогда при $K_\lambda = 1$ (модель отливки выполнена из материала натурной отливки) $K_\alpha = 5$, так как $K_\alpha = K_\lambda/K_l$. Процесс охлаждения модели будет протекать в 25 раз быстрее, ибо из (54) $K_t = K_l^2/K_a$, при $K_a = 1$ и $K_l = 1/5$ величина $K_t = 1/25$. Для экспериментального исследования это очень важно, так'как весьма массивные отливки охлаждаются очень долго, как правило, более суток. Однако при таком исследовании могут возникнуть трудности создания условий охлаждения, при которых коэффициент α теплоотдачи от модели отливки к окружающей среде необходимо увеличивать в 5 раз. Возможно в этом случае изменить масштаб K_λ, т. е. выполнить модель из другого, менее теплопроводного материала. Например, если отливка из стали, то модель можно сделать из висмута. Тогда $K_\lambda \approx 1/4$, но $K_a \approx 1$ (см. приложение VI), и для достижения того же уменьшения времени охлаждения требуется увеличить коэффициент α всего в 1,25 раза, так как $K_\alpha = 1{,}25$.

Как это должно быть понятным, относительные температуры, измеренные на первой или второй моделях в сходственных точках, для которых согласно (53)

$$\frac{K_x}{K_l} = \frac{K_y}{K_l} = \frac{K_z}{K_l} = 1,$$

будут равны относительным температурам натурной отливки, так как

$$K_\theta = 1$$

(см. с. 54).

Аналогирование[1]

Моделирование заменой изучаемого процесса аналогичным, но другой физической природы, следует из сопоставления математической модели теплопроводности, например, для одномерного потока

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

с математическими моделями таких процессов, как, например, диффузия

$$\frac{\partial C_B}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C_B}{\partial x^2}$$

(C_B — объемная концентрация растворенного вещества B; D — коэффициент диффузии); распределение электрического потенциала U в линейном проводнике

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{RC}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

(R — электрическое сопротивление; C — емкость); распределение гидростатического напора h в трубопроводе с пористыми стенками

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\zeta S_0}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

---

[1] Термины «масштабирование» и «аналогирование» не являются общепринятыми. Их ввели для того, чтобы различить два способа моделирования. В специальной литературе очень часто забывают о втором способе, считая его всего лишь способом, удобным для решения краевых задач. В этой связи, например, гидравлической установке, предназначенной для экспериментального изучения тепловых и диффузионных процессов на гидравлической модели-аналоге, дано наименование гидроинтегратор.

(ζ — гидравлическое сопротивление трубопровода; S_0 — площадь поперечного сечения пьезометров для измерения напора); распределение нормального напряжения σ_z в безраспорной зернистой среде (грунте)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2}$$

(B — коэффициент структуры безраспорного грунта).

Перечень процессов, описываемых однотипными дифференциальными уравнениями, можно продолжить. Это — перенос взвешенных частиц в потоке жидкости, коагуляция, броуновское движение, движение жидкости в пористых средах и др.

Здесь уместно напомнить следующую мысль В. И. Ленина: «Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений» [1].

Очевидно, что в безразмерных переменных все эти уравнения выразятся одним:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2},$$

где ψ — относительная зависимая переменная (температура, концентрация, электрический потенциал, гидростатический напор и т. д.); θ — относительное время («тепловое» число Фурье $\tau = \frac{at}{l^2}$, «диффузионное» число Фурье $\tau_D = \frac{Dt}{l^2}$, «электрическое» число Фурье $\tau_R = \frac{t}{Rcl^2}$, «гидравлическое» число Фурье $\tau_h = \frac{t}{\zeta S_0 l^2}$ и т. д.).

Это означает, что при одних и тех же краевых условиях функция ψ будет одной и той же для всех перечисленных процессов. Следовательно, экспериментальное исследование весьма медленного процесса диффузии можно осуществить, например, на тепловой модели-аналоге или гидравлической модели-аналоге и т. д.

Пересчет результатов аналогирования на натурный процесс очень прост: пусть процесс диффузии протекает соответственно граничному условию I рода, т. е. $\psi(1, \theta) = \psi_0 = \text{const}$.

Тогда при гидравлическом аналогировании в любой момент времени $\tau_D = \tau_h$, т. е.

$$\frac{Dt}{l^2} = \frac{t_м}{\zeta S_0 l_м^2},$$

---

[1] **Ленин В. И.** ПСС, изд. 5-е, т. 18, с. 306.

где $l_м$ — характерный размер модели, геометрически подобной натуре:

$$K_l = \frac{l_м}{l};$$

$t_м$ — абсолютное время протекания процесса на гидравлической модели, которое фиксируется в эксперименте; в натурном процессе время

$$t = \frac{t_м}{D\zeta S_0 K_l^2}.$$

Для изучения тепловых процессов широко применяют гидравлическое и особенно электрическое аналогирование [1].

Глава 6. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ОХЛАЖДЕНИЯ И НАГРЕВАНИЯ ТЕЛ

В этой главе рассмотрены два примера исследования процесса охлаждения и нагревания тел на основе математических моделей, представленных дифференциальным уравнением теплопроводности и краевыми условиями, которые, как мы увидим далее, сходны с краевыми условиями для процессов теплообмена отливки и формы. Для исследования будут использованы практически все способы, о которых шла речь выше.

25. ОХЛАЖДЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ ПРИ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ III РОДА

Математическая модель процесса охлаждения бесконечной плиты нам уже известна. В обобщенном виде она представлена системой уравнений и условий (77). Напишем эту систему еще раз:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}; \quad 0 < X < 1;$$

$$-\frac{\partial\Theta(1, \tau)}{\partial X} = \mathrm{Bi}\Theta(1, \tau);$$

$$\frac{\partial\Theta(0, \tau)}{\partial X} = 0;$$

$$\Theta(X, 0) = 1.$$

Исследование процесса охлаждения сводится к решению данной краевой задачи, т. е. к интегрированию дифференциального

---

[1] Подробно с электрическим моделированием процессов охлаждения и нагревания можно познакомиться в книге Л. А. Коздобы [3].

уравнения Фурье при сформулированных граничных и начальных условиях. В результате получим уравнение температурного поля в плите, с помощью которого можно определить скорость ее охлаждения в любой его точке и для любой интенсивности теплообмена с окружающей средой, температурные перепады внутри плиты, расход теплоты с поверхности тела в окружающую среду и другие характеристики процесса в зависимости от целей исследования.

Точное решение краевой задачи

Сформулированную краевую задачу будем искать методом разделения переменных. Как хорошо помнит читатель, решение дифференциального уравнения Фурье в этом случае представляется в виде произведения двух функций:

$$\Theta(X, \tau) = \Theta_1(\tau)\,\Theta_2(X).$$

Такой прием позволяет дифференциальное уравнение в частных производных заменить двумя обыкновенными уравнениями. Действительно, уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\dot{\Theta}_1(\tau)}{\Theta_1(\tau)} = \frac{\Theta_2''(X)}{\Theta_2(X)}.$$

Так как левая часть этого равенства не зависит от X, а правая — от τ, то оба отношения являются постоянной величиной. Пусть она равна μ^2, возьмем ее со знаком «—». Тогда

$$\frac{d\Theta_1(\tau)}{\partial\tau} = -\mu^2\Theta_1(\tau);$$

$$\frac{d^2\Theta_2(X)}{dX^2} = -\mu^2\Theta_2(X).$$

Решения полученных дифференциальных уравнений известны:

$$\Theta_1(\tau) = A_1 \exp(-\mu^2\tau);$$

$$\Theta_2(X) = A_2 \sin\mu X + B_2 \cos\mu X.$$

Следовательно,

$$\Theta(X, \tau) = (C \sin\mu X + D\cos\mu X)\exp(-\mu^2\tau),$$

где $C = A_1A_2$, $D = A_1B_2$ — постоянные интегрирования, которые так же как и постоянную μ следует найти из краевых условий.

Вычислим частную производную Θ по X:

$$\frac{\partial\Theta(X, \tau)}{\partial X} = (\mu C\cos\mu X + \mu D\sin\mu X)\exp(-\mu^2\tau).$$

В центре плиты (при $X = 0$) она, в соответствии с условием симметрии теплообмена с окружающей средой, равна нулю, поэтому $C = 0$, и, следовательно,

$$\Theta(X, \tau) = D\cos\mu X\cdot\exp(-\mu^2\tau).$$

У поверхности плиты (при $X = 1$) согласно граничному условию частная производная Θ по X равна $\mathrm{Bi}\,\Theta\,(1,\ \tau)$. Тогда

$$\mu D \sin\mu \exp(-\mu^2\tau) = \mathrm{Bi}\, D \cos\mu \exp(-\mu^2\tau),$$

что справедливо для любого момента времени. После сокращения на $\exp(-\mu^2\tau)$

$$\mu\, \mathrm{tg}\, \mu = \mathrm{Bi}.$$

С помощью полученного трансцендентного уравнения можно рассчитывать значения постоянных μ. Их будет бесконечное множество, ибо $\mathrm{tg}\,\mu$ — периодическая функция. Поэтому общее решение дифференциального уравнения теплопроводности при заданных граничных условиях ввиду его линейности равно сумме частных решений для всех значений μ, т. е.

$$\Theta(X,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\mu_n X \cdot \exp(-\mu^2\tau),$$

где D_n — постоянные D, которые необходимо найти для каждого μ_n с учетом пока еще неиспользованного условия задачи — начального распределения температуры $\Theta\,(X,\ 0)$ в плите.

Пусть $\Theta\,(X,\ 0) = f\,(X)$, тогда при $\tau = 0$

$$f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\mu_n X;$$

разлагая $f\,(X)$ в ряд Фурье в интервале $-1 < X < +1$, получим

$$D_n = \frac{2\mu_n}{(\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n)} \int\limits_0^1 f(X) \cos\mu_n X\, dX.$$

В нашей задаче $f\,(X) = 1$, так как $\Theta\,(X,\ 0) = 1$. Поэтому $D_n = \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n}$.

Таким образом, точное аналитическое решение задачи выражается бесконечным рядом:

$$\Theta(X,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n} \cos\mu_n X \cdot \exp(-\mu^2\tau), \qquad (93)$$

где μ_n — корни трансцендентного уравнения $\mu\,\mathrm{tg}\,\mu = \mathrm{Bi}$.

Этот ряд довольно быстро сходится, так как согласно трансцендентному уравнению $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots < \mu_n$. Для практических расчетов при $\tau < 0{,}2$ достаточно шести членов ряда, при $0{,}2 < \tau < 0{,}5$ — трех, а при $\tau > 0{,}5$ — одного члена ряда.

Значения первых четырех корней трансцендентного уравнения приведены в табл. 1. Более подробные таблицы можно найти в специальной справочной литературе[1].

Таблица 1

Значения μ_n для плиты

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0	0	π	2	3
0,001	0,032	3,142	6,283	9,425
0,01	0,1	3,145	6,285	9,426
0,05	0,222	3,157	6,291	9,430
0,1	0,311	3,173	6,299	9,435
0,2	0,433	3,204	6,315	9,446
0,5	0,653	3,292	6,362	9,477
1,0	0,861	3,426	6,437	9,529
2,0	1,079	3,644	6,578	9,630
4,0	1,260	3,936	6,814	9,811
10,0	1,428	4,305	7,299	10,200
20,0	1,498	4,491	7,495	10,513
50,0	1,536	4,619	7,703	10,783
∞	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$

С помощью формулы (93), которая является точной обобщенной математической моделью процесса охлаждения бесконечной плиты при граничном условии III рода, легко выполнить всю намеченную программу исследования этого процесса: найти скорость

$$S(x, t) = (T_н - T_с)\frac{a}{l^2}\frac{\partial\Theta(X, \tau)}{\partial\tau}$$

охлаждения плиты в любой ее точке, рассчитать тепловой поток Φ_0 от поверхности плиты в окружающую среду согласно закону Ньютона

$$\Phi_0 = \alpha(T_н - T_с)\,\Theta(1, \tau)\,F_0$$

и т. д. Читатель выполнит эти расчеты самостоятельно[2].

Определим температуру в центре плиты $\Theta_ц = \Theta(0, \tau)$ и на ее поверхности $\Theta_0 = \Theta(1, \tau)$, а также температурный перепад $\delta\vartheta = \vartheta_ц - \vartheta_0$ в теле плиты. Из (93) следует, что

$$\Theta_ц = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp(-\mu_n^2\tau);$$

---

[1] Например, в справочнике С. С. Кутателадзе и В. М. Боришанского [7].

[2] Необходимые таблицы значений тригонометрических функций и экспонент приведены в приложении IX.

$$\Theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \mu_n \exp(-\mu_n^2 \tau).$$

Результаты расчета для Bi = 2 приведены в табл. 2 и представлены в виде графика на рис. 8. Очевидно, что

$$\delta\vartheta = (T_н - T_с) \sum_{n=1}^{\infty} D_n (1 - \cos \mu_n) \exp(-\mu_n^2 \tau).$$

Из графика на рис. 8 следует, что для Bi = 2 величина $\delta\vartheta$ большая. Исследуем случай, когда Bi $\ll$ 1 (т. е. меньше 0,1).

Таблица 2

Сравнение точного и численного решений

Число Фурье τ	Точное решение		Численное решение	
	ц	Θ_0	$\Theta_ц \approx \Theta_1$	$\Theta_0 \approx \Theta_5$
0	1	1	1	1
0,02	1	0,747	1	0,770
0,04	1	0,670	1	0,678
0,06	1	0,621	0,997	0,624
0,08	0,995	0,584	0,994	0,585
0,1	0,988	0,554	0,987	0,554
0,2	0,918	0,458	0,918	0,457
0,4	0,742	0,352	0,740	0,351
0,6	0,588	0,279	0,588	0,279
0,8	0,468	0,221	0,466	0,221
1,0	0,370	0,175	0,369	0,174
1,5	0,207	0,098	0,207	0,096
2,0	0,116	0,055	0,114	0,056

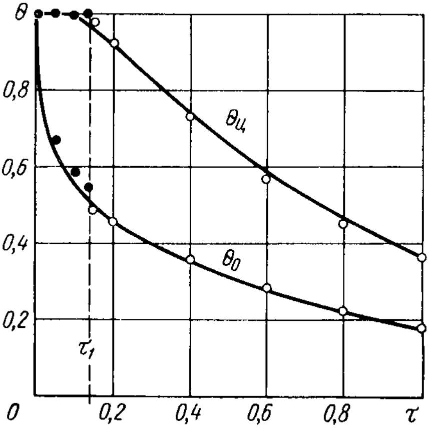


Рис. 8. Охлаждение центра и поверхности бесконечной плиты при Bi = 2. Кривые рассчитаны по (93), светлые точки — по (94), темные — по (103) и (105) при $X = 1$ и $n = 2$

Примем верхнее значение: Bi = 0,1. Получим $\mu_1 = 0{,}311$; $\mu_n \approx n\pi$ (если $n = 2, 3, \ldots$); $D_1 = 1{,}016$; $D_n \approx 0$ (если $n = 2, 3, \ldots$). Следовательно, при Bi $\ll$ 1 в формуле для $\delta\vartheta$ сохранится только первый член ряда и

$$\delta\vartheta = (T_н - T_с) D_1 (1 - \cos \mu_1) \exp(-\mu_1^2 \tau).$$

Для Bi = 0,1

$$\delta\vartheta = (T_н - T_с) [1{,}016 (1 - 0{,}952) \exp(-0{,}1\tau)]$$

или

$$\delta\vartheta = (T_н - T_с)\, 0{,}05 \exp(-0{,}1\tau),$$

т. е. $\delta\vartheta$ меньше 5% от начального температурного напора, и эта величина будет уменьшаться с течением времени.

Естественно сделать вывод о том, что при $\mathrm{Bi} \ll 1$ температурным перепадом в плите возможно пренебречь по сравнению с температурным напором на границе плиты и окружающей среды. Тогда $\Theta_ц \approx \Theta_0 = \Theta(\tau)$ и

$$\Theta(\tau) = \exp(-\mathrm{Bi}\,\tau),$$

так как при $\mathrm{Bi} \ll 1$ величина $\mu_1 < 0{,}32$; $\mu_1 \operatorname{tg} \mu_1 \approx \mu_1^2$ и, следовательно, $\mu_1 \approx \sqrt{\mathrm{Bi}}$. С этим выводом мы уже знакомы (см. с. 61).

Приближенное решение краевой задачи

Для рассматриваемой задачи уже найдено приближенное решение методом А. И. Вейника раньше (см. с. 59—60). Оно выражается формулой (69), которая при $\mathcal{F} = 1$ примет вид

$$\Theta(X, \tau) = \left(1 - \frac{\mathrm{Bi} X^n}{n + \mathrm{Bi}}\right) \exp\left[-\frac{(n+1)\mathrm{Bi}(\tau - \tau_1)}{(n+1) + \mathrm{Bi}}\right], \tag{94}$$

где

$$\tau_1 = \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\mathrm{Bi}} - \frac{n}{(n+1)\mathrm{Bi}^2} \ln\left(1 + \frac{\mathrm{Bi}}{n}\right).$$

Обращает внимание, что структура формулы (94) аналогична структуре точной формулы (93). В этой связи с ее помощью возможно выполнить то же исследование процесса охлаждения плиты, какое сделано выше на основе точной формулы. Качественно результаты будут теми же. Приближенные количественные результаты удается получить, если будет известно числовое значение n — показателя параболы. Величину n определяют при сопоставлении (94) с численным решением этой задачи либо с данными специального эксперимента на натуре или на моделях.

Численное решение на АВМ методом прямых

Представим рассматриваемую задачу системой приближенных дифференциальных уравнений (83). Разделим плиту на пять параллельных боковой поверхности слоев и примем, что $\mathrm{Bi} = 2$. Тогда для $k = 5$ и $\mathrm{Bi} = 2$ система (83) примет вид

$$\frac{d\Theta_1}{d\tau} = 25(\Theta_2 - \Theta_1);$$

$$\frac{\partial\Theta_2}{d\tau} = 25(\Theta_3 - 2\Theta_2 + \Theta_1),$$

$$\frac{d\Theta_3}{d\tau} = 25(\Theta_4 - 2\Theta_3 + \Theta_2);$$

$$\frac{d\Theta_4}{d\tau} = 25(\Theta_5 - 2\Theta_4 + \Theta_3);$$

$$\frac{d\Theta_5}{d\tau} = 25\left[\Theta_4 - \left(1 + \frac{2}{5}\right)\Theta_5\right];$$

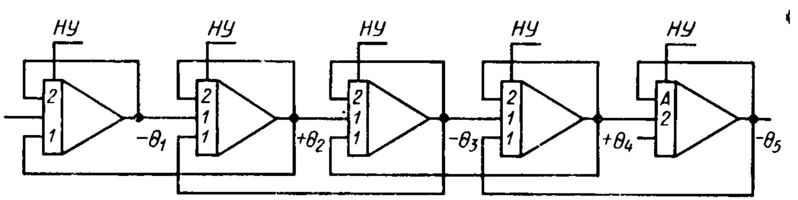


Рис. 9. Структурная схема численного решения задачи на охлаждение бесконечной плиты при Bi = 2 на АВМ

начальные условия

$$\Theta_1(0) = \Theta_2(0) = \Theta_3(0) = \Theta_4(0) = \Theta_5(0) = 1; \quad \Theta_c = 0.$$

На рис. 9 изображена структурная схема решения этой задачи на машине МН-14. Результаты численного решения для $\Theta_ц$ и Θ_0 приведены в табл. 2. Обращает внимание вполне достаточная его точность.

С помощью численного решения возможно рассчитать величину теплового потока Φ_0 с поверхности плиты, вычислить температурный перепад $\delta\vartheta$ для Bi = 2 и выполнить весь объем необходимых исследований процесса охлаждения плиты. В частности, если по данным численного решения (см. табл. 2) построить кривые, аналогичные кривым на рис. 8, то после их графического дифференцирования просто рассчитать скорость охлаждения плиты в центре и на поверхности в любой момент времени.

Однако более удобно такое исследование осуществить с помощью формул, аппроксимирующих результаты численного решения. Например, сопоставление формулы (94) при Bi = 2, $X = 0$ и $X = 1$ с результатами численного решения (см. табл. 2) дает возможность установить, что $n = 1{,}8 \div 2{,}0$, начиная с $\tau = 0{,}14$. На рис. 8 точками показаны значения $\Theta_ц$ и Θ_0, рассчитанные по формуле (94) при $n = 2$, $\tau_1 = 0{,}134$ и Bi = 2. Совпадение удовлетворительное.

Следовательно, численное решение задачи можно аппроксимировать на отрезке $\tau \geqslant 0{,}134$ одной формулой

$$\Theta(X, \tau) = \left(1 - \frac{1}{2} X^2\right) \exp\left[-1{,}2(\tau - 0{,}134)\right],$$

которая пригодна для приближенного исследования процесса охлаждения плиты при Bi = 2.

26. НАГРЕВ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА

Рассмотрим полубесконечное (полуограниченное) тело, т. е. тело, размеры которого не ограничены по всем направлениям, кроме отрицательных значений координаты x. Это означает, что тело имеет только одну граничную поверхность, совпадающую с плоскостью $x = 0$. Несмотря на «академизм» определения полубесконечного тела, примеров таких тел очень много. Некоторые из них будут обсуждены позже. Сейчас ограничимся лишь указанием на то, что литейная форма, в которой охлаждается отливка при литье в кессонах, является полуограниченным телом.

Если условия теплового взаимодействия полубесконечного тела с окружающей средой однородны по всей граничной поверхности, то тепловой поток внутри тела будет одномерным (при нагреве тела он направлен вдоль оси x).

Математическую модель процесса нагревания полубесконечного тела при граничных условиях III рода представим в первоначальных переменных и параметрах:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \infty;$$

$$-\lambda\frac{\partial T(0,\ t)}{\partial x} = \alpha\,[T_{\text{с}} - T(0,\ t)];$$

$$\frac{\partial T(\infty,\ t)}{\partial x} = 0; \quad T(\infty,\ t) = T_{\text{н}};$$

$$T(x,\ 0) = T_{\text{н}};$$

$$T_{\text{н}} < T_{\text{с}}.$$

Написанное в третьей строке этой системы — еще одно «граничное» условие для полубесконечного тела. Оно утверждает очевидное: на бесконечно большом расстоянии от граничной поверхности за все время процесса теплообмена плотность теплового потока равна нулю, а температура не изменяется.

Замечательным в рассматриваемой задаче является то, что для полуограниченного тела нет характерного размера. Поэтому согласно методу обобщенного анализа необходимо найти характеристическое значение для координаты x. Таким значением в данном случае может быть отношение λ/α, которое для постоянных λ и α сохраняется постоянным в течение всего времени процесса нагрева тела. Смысл отношения λ/α просто установить из анализа граничного условия задачи (вторая строка системы). Так как геометрически $\frac{\partial T(0,\ t)}{\partial x}$ равно тангенсу угла наклона касательной к краевой температурного поля в точке на граничной поверхности, то λ/α равно катету прямоугольного треугольника, образованного пересечением этой касательной и прямых $T = T_{\text{с}} \equiv \text{const}$ и $x = 0$ (рис. 10). Точку A пересечения касательной с прямой $T = T_{\text{с}} \equiv \text{const}$ называют *направляющей точкой*. Итак, отношение λ/α численно равно расстоянию от поверхности тела до направляющей точки.

Введем обозначение:

$$\delta \equiv \frac{\lambda}{\alpha}.$$

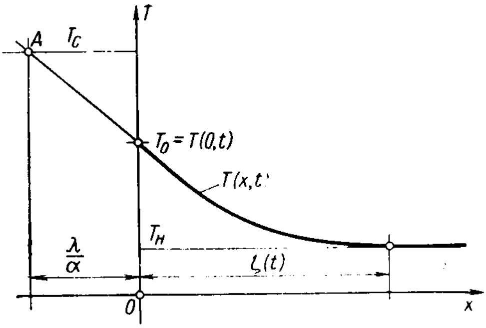


Рис. 10. Схема температурного поля в полуограниченном теле при нагреве его в соответствии с граничным условием III рода

Тогда независимые переменные в рассматриваемой задаче можно выразить следующими комплексами[1]:

$$X_\delta = \frac{x}{\delta} \quad \text{и} \quad \tau_\delta \equiv \frac{at}{\delta^2}$$

или

$$\tau_\alpha \equiv \frac{\alpha}{b} \sqrt{t},$$

где b — *коэффициент тепловой аккумуляции тела*; его называют также коэффициентом проникновения тела или коэффициентом теплоусвоения;

$$b \equiv \sqrt{\lambda c \rho}. \tag{95}$$

Если зависимую переменную в рассматриваемой задаче выразить отношением избыточных текущей температуры тела и температуры окружающей среды

$$\Theta \equiv \frac{T(x,\ t) - T_\text{н}}{T_\text{с} - T_\text{н}}, \tag{96}$$

то обобщенная математическая модель процесса нагревания полубесконечного тела при граничных условиях III рода примет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau_\delta} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X_\delta^2}; \quad 0 < X_\delta < \infty;$$

$$-\frac{\partial \Theta(0,\ \tau_\delta)}{\partial X_\delta} = 1 - \Theta(0,\ \tau_\delta);$$

$$\frac{\partial \Theta(\infty,\ \tau_\delta)}{\partial X_\delta} = 0; \quad \Theta(\infty,\ \tau_\delta) = 0;$$

$$\Theta(X_\delta,\ 0) = 0, \quad \Theta_\text{с} = 1.$$

Точное решение краевой задачи операционным методом

Используем интегральное преобразование Лапласа. Напомним, что преобразование Лапласа функции $\Theta(X_\delta,\ \tau_\delta)$, например по времени τ_δ, состоит в умножении ее на $\exp(-s\tau_\delta)$ и интегрировании этого произведения от 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \Theta(X_\delta,\ \tau_\delta)\, e^{-s\tau_\delta}\, d\tau_\delta = \mathscr{T}(X_\delta,\ s),$$

---

[1] По предложению А. В. Лыкова комплекс τ_α назван числом Тихонова. Очевидно, что $\tau_\delta = \tau_\alpha^2$.

где s — некоторая комплексная величина; $\mathcal{T}(X_\delta, s)$ — преобразованная по времени функция $\Theta(X_\delta, \tau_\delta)$, которая называется изображением функции $\Theta(X_\delta, \tau_\delta)$.

Операция преобразования Лапласа обозначается символом $\mathcal{L}[\Theta(X_\delta, \tau_\delta)]$:

$$\mathcal{L}[\Theta(X_\delta, \tau_\delta)] = \mathcal{T}(X_\delta, s).$$

Напомним далее, что изображение постоянной величины C

$$\mathcal{L}[C] = \frac{C}{s};$$

изображение производной функции в данном случае по времени

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial\Theta(X_\delta, \tau_\delta)}{\partial\tau_\delta}\right] = s\mathcal{T}(X_\delta, s) + \Theta(X_\delta, 0).$$

Применим преобразование Лапласа к математической формулировке рассматриваемой задачи в ее обобщенном представлении:

$$\frac{d^2\mathcal{T}(X_\delta, s)}{dX_\delta^2} - s\mathcal{T}(X_\delta, s) = 0;$$

$$-\frac{d\mathcal{T}(0, s)}{dX_\delta} = \left[\frac{1}{s} - \mathcal{T}(0, s)\right];$$

$$\frac{d\mathcal{T}(\infty, s)}{\partial X_\delta} = 0; \quad \mathcal{T}(\infty, s) = 0.$$

В результате дифференциальные уравнения теплопроводности и теплообмена оказались преобразованными в уравнения в обыкновенных производных.

Решение первого дифференциального уравнения в общем виде известно:

$$\mathcal{T}(X_\delta, s) = A\exp\left(+\sqrt{s}X_\delta\right) - B\exp\left(-\sqrt{s}X_\delta\right),$$

где A и B — постоянные величины, которые определяют из граничных условий: из второго условия получим, что $A = 0$, а из первого условия

$$B = \frac{1}{s(1-\sqrt{s})}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{T}(X_\delta, s) = \frac{1}{s(1-\sqrt{s})}\exp\left(-\sqrt{s}\,X_\delta\right)$$

является решением рассматриваемой задачи для изображения искомой функции $\Theta(X_\delta, \tau_\delta)$. Теперь воспользуемся таблицей изображений [1]. В ней найдем, что

$$\Theta = \mathrm{erfc}\left(\frac{X_\delta}{2\sqrt{\tau_\delta}}\right) + \exp(X_\delta + \tau_\delta)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{X_\delta}{2\sqrt{\tau_\delta}} + \sqrt{\tau_\delta}\right), \qquad (97)$$

где $\mathrm{erfc}(u) = 1 - \mathrm{erf}(u)$; $\mathrm{erf}(u)$ – известная *функция ошибок Гаусса*:

$$\mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^u e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Значение этой функции приведено в приложении IX.

Формула (97) — точное аналитическое решение задачи, которое представляет точную обобщенную математическую модель процесса нагревания полубесконечного тела при граничном условии III рода. С помощью этой модели возможно выполнить необходимое исследование процесса. Например, скорость нагревания тела в любой его точке

$$S(X_\delta, t) = (T_с - T_н)\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\partial\Theta(X_\delta, \tau_\delta)}{\partial\tau_\delta}.$$

Поверхностная плотность теплового потока от окружающей среды к поверхности тела

$$q_0 = \alpha(T_с - T_н)[1 - \Theta(0, \tau_\delta)],$$

где $\Theta(0, \tau_\delta) = \Theta_0$ — относительная температура поверхности тела; из формулы (97)

$$\Theta_0 = 1 - e^{\tau_\alpha^2}\,\mathrm{erfc}(\tau_\alpha). \qquad (98)$$

Как и в предыдущей задаче, читатель сам выполнит дальнейшие расчеты, а также исследует зависимость S и q от интенсивности теплоотдачи, величины коэффициента тепловой аккумуляции и избыточной температуры окружающей среды. Совместно исследуем решение (97) для случая, когда $\alpha \to \infty$. Запишем его в следующем виде:

$$\Theta = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp\left[\left(1 + \frac{c\rho x}{\alpha t}\right)\frac{\alpha^2}{b^2}\, t\right]\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{\alpha}{B}\sqrt{t}\right).$$

При $\alpha \to \infty$ второе слагаемое стремится к нулю. В этом просто убедиться, раскрывая неопределенность по правилу Лапиталя.

---

[1] Необходимые таблицы изображений можно найти в любом справочнике по операционному исчислению. Достаточно полные таблицы для задач теплопроводности приведены в книге А. В. Лыкова [8].

Таким образом, для случая бесконечно большой интенсивности нагрева полубесконечного тела

$$\Theta(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \tag{99}$$

где $\Theta \equiv \frac{T - T_н}{T_с - T_н}$, так как из (98) при $\alpha \to \infty$ следует, что $\Theta_0 = 1$ или, с учетом (96), $T_0 = T_с$, т. е. при $\alpha \to \infty$ температура поверхности тела равна температуре окружающей среды и граничное условие III рода заменяется граничным условием I рода (см. с. 45). Более наглядно это показано на схеме рис. 10; очевидно, что при $\alpha \to \infty$ расстояние от поверхности тела до направляющей точки A стремится к нулю и T_0 становится равной $T_с$.

Приближенное решение краевой задачи

Как и в предыдущей задаче, используем метод А. И. Вейника. Температурное поле в полубесконечном теле опишем параболой порядка n:

$$T(x, t) = [T(0, t) - T_н]\left(1 - \frac{x}{\zeta(t)}\right)^n + T_н,$$

где $\zeta(t)$ — глубина прогрева тела (глубина проникновения теплоты в тело) к моменту времени t процесса теплообмена с окружающей средой.

Другими словами, ζ — расстояние от поверхности тела (рис. 10), на котором его температура практически не отличается от начальной, а температурный градиент весьма близок к нулю:

$$T(\zeta, t) = T_н \quad \text{и} \quad \frac{\partial T(\zeta, t)}{\partial x} = 0.$$

В безразмерных переменных

$$\Theta = \frac{(X_\zeta - X_\delta)^n}{X_\zeta^{n-1}(X_\zeta + n)}, \tag{100}$$

где $X_\zeta \equiv \frac{\zeta(t)}{\delta}$ — относительная глубина прогрева тела.

Уравнение температурного поля в виде формулы (100) удовлетворяет всем краевым условиям задачи. Неизвестными остались показатель степени n и функция X_ζ. Для определения X_ζ воспользуемся дифференциальным уравнением теплопроводности, представив его в интегральной форме:

$$\int_0^{X_\zeta} \frac{\partial\Theta}{\partial\tau_\delta}\,dX_\delta = \int_0^{X_\zeta} \frac{\partial^2\Theta}{\partial X_\delta^2}\,dX_\delta = \int_0^{X_\zeta} d\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X_\delta}\right).$$

Так как по условию задачи при $X_\delta = X_\zeta$ температурный градиент равен нулю, то

$$\int\limits_0^{X_\zeta} \frac{\partial\Theta}{\partial\tau_\delta}\, dX_\delta = -\frac{\partial\Theta(0,\ \tau_\delta)}{\partial X_\delta}.$$

Подстановка в это уравнение Θ из (100) приводит к простому дифференциальному уравнению для X_ζ:

$$\frac{dX_\zeta}{d\tau_\delta} = \frac{n(n+1)(X_\zeta + n)}{X_\zeta(X_\zeta + 2n)},$$

которое также просто интегрируется:

$$\tau_\delta = \frac{X_\zeta^2}{2n(n+1)} + \frac{X_\zeta}{n+1} - \frac{n}{n+1}\ln\left(1 + \frac{1}{n}X_\zeta\right). \qquad (101)$$

Таким образом, формула (100) с X_ζ из (101) является приближенным решением задачи. Величина n, как и для предыдущей задачи, определяется в результате сопоставления (100) и (101) с численным решением этой же задачи либо с данными специального эксперимента на натуре или на моделях.

С помощью полученных формул можно выполнить все необходимые исследования процесса нагревания полубесконечного тела при граничных условиях III рода, а также в случае, когда они превращаются в условия I рода, т. е. при $\alpha \to \infty$. Представим (100) и (101) в следующем виде:

$$\Theta = \frac{\left(1 - \frac{x}{\zeta}\right)^n}{1 + \frac{n\lambda}{\alpha\zeta}};$$

$$t = \frac{\zeta^2}{2n(n+1)a} + \frac{\lambda\zeta}{\alpha(n+1)a} - \frac{n\lambda^2}{\alpha^2(n+1)a}\ln\left(1 + \frac{\alpha\zeta}{n\lambda}\right).$$

Очевидно, что при $\alpha \to \infty$

$$\Theta = \left(1 - \frac{x}{\zeta}\right)^n$$

и

$$t = \frac{\zeta^2}{2n(n+1)a} \quad \text{или} \quad \zeta = \sqrt{2n(n+1)at}.$$

Следовательно, для весьма большой интенсивности нагрева полубесконечного тела, т. е. для граничного условия I рода,

$$\Theta = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2n(n+1)at}}\right)^n. \qquad (102)$$

С помощью тех же формул (100) и (101), хотя и приближенно, но количественно, удается определить понятие полубесконечного тела. Выше говорилось о том, что полубесконечные тела встречаются гораздо чаще, чем это можно представить себе на основе формулировки, которая дана при постановке рассматриваемой задачи (см. с. 81). Теперь можно конкретизировать формулировку. Действительно, *к полуограниченному возможно отнести любое тело, если в течение времени t, например, его нагревания глубина ζ прогрева будет меньше, чем характерный размер l этого тела.*

Вернемся к задаче на охлаждение бесконечной пластины при граничных условиях III рода. Из графиков на рис. 8 следует, что существует интервал времени $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, в пределах которого температура $\Theta_ц$ центра плиты остается неизменной, а температура Θ_0 ее поверхности снижается. Этот факт, установленный на основе точной математической модели (он, кстати, следует также и из результатов численного решения; см. табл. 2), можно истолковать как результат процесса охлаждения плиты, когда в течение времени $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$ глубина ζ ее охлаждения была меньше половины ее толщины l. Иначе говоря, в течение времени $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$ бесконечную плиту толщиной $2l$ допустимо рассматривать как полуограниченное тело. Тогда это время τ_1 просто определить из формулы (101). Разделим ее левую и правую части на $\mathrm{Bi}^2 \equiv \left(\frac{\alpha}{\lambda} l\right)^2$:

$$\tau = \frac{\Delta^2}{2n(n+1)} + \frac{\Delta}{(n+1)\,\mathrm{Bi}} - \frac{n}{(n+1)\,\mathrm{Bi}^2} \ln(1 - \Delta\,\mathrm{Bi}); \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1, \tag{103}$$

где Δ — относительная глубина прогрева (охлаждения) тела плиты;

$$\Delta \equiv \frac{\zeta}{l};$$

τ_1 — относительное время полного прогрева плиты; оно определяется моментом t, когда $\zeta(t) = l$, т. е. $\Delta = 1$:

$$\tau_1 = \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\,\mathrm{Bi}} - \frac{n}{(n+1)\,\mathrm{Bi}^2} \ln(1 + \mathrm{Bi}). \tag{104}$$

Температурное поле в плите для начального этапа $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$ охлаждения может быть выражено формулой (100), если в ней X_δ и X_ζ^* умножить и разделить на l и осуществить перенос начала координат в середину плиты, а избыточную температуру отсчитывать от T_c:

$$\Theta = 1 - \frac{\mathrm{Bi}}{\frac{n}{\Delta} + \mathrm{Bi}} \left(1 - \frac{1 - X}{\Delta}\right)^n; \quad (1 - \Delta) \leqslant X \leqslant 1, \tag{105}$$

где $\Theta = \frac{T - T_с}{T_н - T_с}$; $X = \frac{x}{l}$ и x отсчитывается от середины плиты, как это было принято в предыдущей задаче.

На рис. 8 темными точками нанесены результаты расчетов по (103) и (105) для $\Theta_ц = \Theta\,(1 - \Delta, \tau)$ и $\Theta_0 = \Theta\,(1, \tau)$ при $\mathrm{Bi} = 2$ и $n = 2$.

Численное решение на ЭЦВМ методом сеток

Представим обобщенную математическую модель рассматриваемого процесса системой конечно-разностных алгебраических уравнений типа (87). Первое уравнение, естественно, должно учитывать граничное условие задачи. Получим $k = \frac{\delta}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta X_\delta}$; $\Delta\tau_\delta = \frac{1}{2k^2}$; $\tau_{\delta j} = j\Delta\tau_\delta$. Для достижения большей точности примем $k = 10$; тогда $\Delta\tau_\delta = 0{,}005$ и $\tau_{\delta j} = 0{,}05$, если $j = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно,

$$\Theta_{1,\,j+1} = \frac{1}{2}\left[(\Theta_{2j} + \Theta_{1j}) + \frac{1}{10}(1 - \Theta_{1j})\right];$$

$$\Theta_{i,\,j+1} = \frac{1}{2}(\Theta_{i+1,\,j} + \Theta_{i-1,\,j}); \quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ 10;$$

Таблица 3

Сравнение точного и численного решений

Число Фурье $\tau_\delta = \tau_\alpha^2$	Решение	
	точное	численное
0	0	0
0,02	0,142	0,147
0,04	0,192	0,198
0,06	0,226	0,230
0,08	0,253	0,258
0,10	0,276	0,283
0,12	0,297	0,305
0,14	0,308	0,316
0,16	0,328	0,334
0,18	0,343	0,351
0,20	0,357	0,367

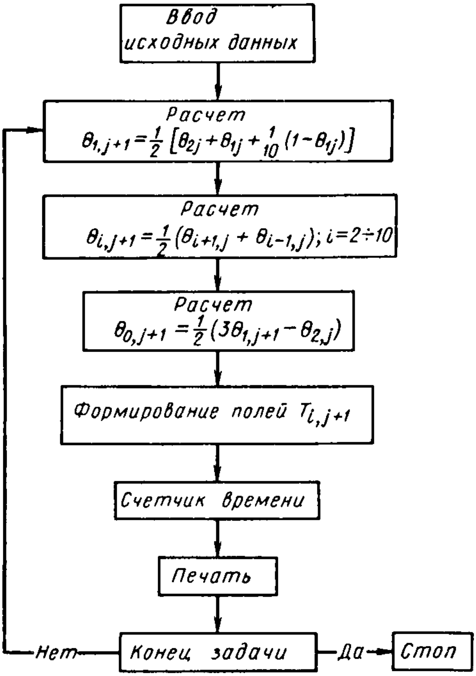


Рис. 11. Блок-схема численного расчета нагрева полубесконечного тела на ЭЦВМ

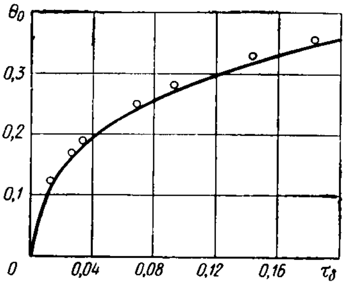


Рис. 12. Изменение температуры поверхности полуограниченного тела при нагреве его в соответствии с граничным условием III рода. Кривая рассчитана по (98), точки — по (100) и (101) при $X_\delta = 0$ и $n = 2$

$$\tau_{\delta j} = j\,0{,}005;\quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 100$$

при начальных условиях

$$\Theta_{10} = \Theta_{20} = \cdots = \Theta_{100} = 0;\quad \Theta_c = 1.$$

Блок-схема численного решения этой системы уравнения на ЭЦВМ приведена на рис. 11. Она была реализована на машине «Наири-К». При этом температура Θ_0 поверхности тела рассчитана по следующей формуле[1]:

$$\Theta_{0,\,j+1} = \frac{1}{2}\,(3\Theta_{1,\,j+1} - \Theta_{2j}).$$

Результаты представлены в табл. 3. В ней же даны результаты расчетов по (98), полученной из точного решения задачи. Совпадение вполне удовлетворительное.

Как и в предыдущей задаче, результаты численного решения можно аппроксимировать приближенной формулой. Например, сопоставление (100) и (103) при $X_\delta = 0$ с данными для Θ_0 в табл. 3 позволяет установить, что $n \approx 2$. На рис. 12 кривая рассчитана по точной формуле (98), точками нанесены значения Θ_0, определенные по (100) и (101) при $X_\delta = 0$ и $n = 2$:

$$\Theta_0 = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{2}{X_\zeta}\right)}$$

и

$$\tau_\delta = \frac{1}{12}\left[X_\zeta^2 + 4X_\zeta - 8\ln\left(1 + \frac{1}{2}X_\zeta\right)\right].$$

Точность этих формул вполне достаточная для исследования процесса нагревания полубесконечного тела на основе результатов численного решения задачи.

27. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Две рассмотренные задачи — простейшие из задач классической теплопроводности. Они выбраны с тем, чтобы на конкретных и простых примерах показать технику использования различных методов исследования процессов нагревания и охлаждения тел

---

[1] Можно, конечно, не применять эту формулу, но для получения достаточно точных результатов требуется еще более сократить шаг по координате x, что увеличит машинное время решения задачи.

с помощью математических моделей. Более сложные задачи встретятся дальше, во время анализа процессов формирования свойств отливки. При их решении будем выбирать те методы, которые быстрее остальных приведут к результатам, удобным для исследования этих процессов и для использования на практике.

Ниже читателю будут предложены еще несколько задач и упражнений. Они чуть сложнее рассмотренных. Эти задачи и упражнения являются продолжением примеров исследования процессов нагревания и охлаждения тел на основе математических моделей. Читатель должен стремиться использовать все методы, о которых шла речь выше, и сделать вывод о наиболее рациональном из них для каждой задачи. Этот вывод — один из ответов задач и один из результатов упражнений. Он во многом будет зависеть от того, насколько хорошо читатель владеет тем или иным методом, ибо все предлагаемые задачи можно решить любым из методов, о которых шла речь.

К задачам не даны и традиционные ответы, т. е. конечные формулы или уравнения. Во-первых, потому, что неизвестно, какой метод предпочтет читатель, а во-вторых, потому, что предлагаемые задачи и упражнения заимствованы из тех учебников и книг, которые указаны в списке литературы, рекомендуемой в данной главе. Все задачи решены в этих учебниках и книгах, решены различными методами. В них можно найти ответы, если читатель будет сомневаться в своих[1].

Лишь для некоторых задач мы будем давать указания. Итак: задачи и упражнения.

Упражнение 1. Пусть известны решения $\Theta_1(X, t)$, $\Theta_2(Y, t)$ и $\Theta_3(Z, t)$ одномерных задач, например, для неограниченных плит. Показать, что:

а) решение $\Theta(X, Y, Z, \tau)$ для трехмерного тела, например для параллелепипеда, равно произведению этих трех решений

$$\Theta(X, Y, Z, \tau) = \Theta_1(X, \tau)\,\Theta_2(Y, \tau)\,\Theta_3(Z, \tau);$$

б) решением для двухмерного тела, например для бесконечной призмы, является

$$\Theta(X, Y, \tau) = \Theta_1(X, \tau)\,\Theta_2(Y, \tau);$$

в) оба решения справедливы для граничных условий I—IV родов и однородного начального условия.

---

[1] Конечно, в этих книгах содержатся и сами решения, т. е. математическая модель, ход исследования и результаты (ответ!). Однако читатель все же должен решить задачи и выполнить упражнения самостоятельно, так как далее будет труднее; именно сейчас необходима полнота понятий и способов, которыми придется оперировать при решении «литейных» задач.

Упражнение 2. Составить обобщенную математическую модель процесса теплообмена бесконечной плиты с двумя одномерными полубесконечными телами (граничные условия IV рода), приняв физические свойства этих тел одинаковыми, но отличными от свойств плиты. Выяснить условия, при которых можно не учитывать неоднородность температурного поля в плите.

Задача 1. Составить обобщенную математическую модель и исследовать процесс нагревания полубесконечного тела при граничных условиях I рода.

Задача 2. Найти температурное поле и с его помощью исследовать процесс охлаждения угла двухмерного полубесконечного тела при граничных условиях I рода.

Указание. Двухмерное полуограниченное тело такое, у которого две граничные поверхности пересекаются друг с другом под прямым углом, т. е. тело простирается безгранично вдоль только положительного направления координатных осей x и y; по оси z тело безгранично и в положительном, и в отрицательном направлениях. Таким образом, это — двухмерная задача.

Задача 3. Составить обобщенную математическую модель и исследовать процесс охлаждения бесконечной плиты при граничных условиях I рода.

Задача 4. Найти температурное поле в кубе, охлаждающемся при граничных условиях I рода.

Установить точность определения температуры центра куба, которую обеспечивает приближенный расчет этой температуры по формуле, найденной для шара, с поправкой по А. И. Вейнику (см. с. 57—58).

Указание. Температурное поле в шаре может быть выражено следующей формулой:

$$\Theta(R,\ \tau)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{1}{\mu_n R}\sin \mu_n R \exp\ (-\mu_n^2\tau),$$

где $D=(-1)^{n+1}2$; $\mu_n=n\pi$; $R\equiv\frac{r}{l}$; $\tau\equiv\frac{at}{l^2}$;

$$\Theta(R,\ \tau)=\frac{T(r,\ t)-T_0}{T_\text{н}-T_0}\ .$$

Для расчета температуры $\Theta\ (0,\ \tau)=\Theta_\text{ц}$ центра в кубе по этой формуле необходимо τ уменьшить на $\mathcal{F}$ (почему?), положить $l = = \left(\frac{4V_0}{3\pi}\right)$ и $\mathcal{F}=\frac{F_\text{к}}{F_\text{ш}}$ ($F_\text{к}$ — площадь поверхности куба; $F_\text{ш}$ — то же, шара; V_0 — объем куба, равный объему шара).

Задача 5. Составить математическую модель промерзания влажного полубесконечного грунта при граничных условиях I рода. Найти кинетическое уравнение продвижения фронта промерзания грунта (*задача Стефана*).

Указание. При решении приближенным методом показатель параболы принять равным единице (*метод Лейбензона*).

Рекомендуемая литература

1. **Вейник А. И.** Приближенный расчет процессов теплопроводности. М.—Л., Госэнергоиздат, 1959. 184 с.
2. **Гухман А. А.** Введение в теорию подобия. М., «Высшая школа», 1973. 298 с.
3. **Коздоба Л. А.** Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. М., «Энергия», 1972. 296 с.
4. **Козлов Н. П.** и др. Техническая термодинамика и теплопередача. М., «Высшая школа», 1972. 671 с.
5. **Копченова Н. В., Марон И. А.** Вычислительная математика в примерах и задачах. М., «Наука», 1972. 368 с.
6. **Кутателадзе С. С.** Основы теории теплообмена. М.—Л., Машгиз, 1957. 384 с.
7. **Кутателадзе С. С., Боришанский В. М.** Справочник по теплопередаче. М.—Л., Госэнергоиздат, 1959. 414 с.
8. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967. 392 с.

Раздел II | ПРОЦЕССЫ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВКИ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Глава 7. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОТЛИВКИ

Затвердевание расплава литейных сплавов в литейной форме, т. е. переход сплавов из их жидкого состояния в твердое в условиях формы, является специфическим этапом технологии литья. Во время затвердевания происходит формирование большинства важнейших свойств отливки. В этой связи исследование процессов затвердевания разнообразных литейных сплавов в конкретных условиях литейной технологии — *центральная проблема* теории формирования свойств отливки.

28. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ ЕЕ РАЗРАБОТКИ

Объектом исследования является расплав литейных сплавов, который после заливки его в литейную форму постепенно охлаждается, достигает температуры начала кристаллизации данного сплава и, наконец, затвердевает.

Затвердевание обусловлено отводом теплоты от расплава в форму и происходит в результате зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве. Оно сопровождается перераспределением растворимых компонентов данного сплава между твердой фазой и незатвердевшим расплавом, фильтрацией этого расплава между растущими кристаллами (вследствие развития объемной усадки затвердевающего сплава) и деформацией затвердевающего сплава (вследствие развития его линейной усадки и сопротивления ей со стороны формы).

От числа кристаллов, формы их роста и их преимущественной ориентировки в теле отливки зависят ее кристаллическое строение и, следовательно, предельные служебные и технологические свойства литого изделия. Перераспределение растворимых компонентов между твердой и жидкой фазами в определенных условиях кристаллизации приводит к химической неоднородности отливки. Неполнота процесса фильтрации расплава между растущими кристаллами вызывает образование усадочной пористости в отливке. Если в расплаве во время плавки литейного сплава растворились газы, то они, выделяясь из расплава при его кристаллизации, дополнят усадочную пористость еще и газовой. И химическая неоднородность отливки, и газоусадочная пористость в ее теле существенно снизят те служебные и технологические свойства литого изделия, которые определяются данным кристаллическим строением. Если же развитие деформации затвердевающего сплава, в результате торможения его линейной усадки формой, приведет к образованию трещин в отливке, то она будет забракована вовсе.

Таким образом, расплав, затвердевающий в условиях литейной формы, представляет собой весьма сложную физическую и физико-химическую систему. Создание общей теории такой сложной системы, т. е. теории, охватывающей *все* стороны процессов затвердевания, — задача, невыполнимая и из-за недостатка наших знаний о явлениях, составляющих процесс затвердевания, и из-за чрезвычайных и практически непреодолимых математических трудностей. Целесообразен путь, которым следуют почти все теории сложных систем, в особенности — претендующие на непосредственное практическое использование. Этот путь состоит в следующем. *На основе экспериментов и наблюдений необходимо выявить те важнейшие факторы, которые определяют ход процесса в целом или ход отдельных его частей, интересных с точки зрения практических задач совершенствования технологии литья. Далее, необходимо абстрагироваться от других, менее важных факторов, чтобы для процесса в целом или отдельных его частей построить возможно более простую математическую модель, которая учитывает лишь выявленные важнейшие факторы.*

Во введении к настоящему учебному пособию приведены слова Я. И. Френкеля о том, что должна представлять собою теория сложных систем (см. с. 15). Они, как нельзя лучше, иллюстрируют именно такой подход к построению теории. Дополним эту цитату: «Физик-теоретик в этом отношении подобен художнику-карикатуристу, который должен воспроизвести оригинал не во всех деталях, подобно фотографическому аппарату, но упростить и схематизировать его таким образом, чтобы выявить и подчеркнуть наиболее характерные черты»[1].

Сейчас читателю следует уподобиться «художнику-карикатуристу» и выявить наиболее важный фактор, управляющий процессом затвердевания расплава литейных сплавов в условиях литейной формы. По-видимому, нет необходимости в специальных экспериментах и наблюдениях для того, чтобы прийти к выводу, что *важнейшим фактором, обусловливающим протекание самого процесса затвердевания и развитие сопутствующих ему явлений, должен быть теплообмен между затвердевающим расплавом и литейной формой.* Поэтому можно построить *тепловую теорию формирования отливок*, основанную на использовании математических моделей теории теплообмена. Такая теория будет плодо-

---

[1] **Френкель Я. И.** На заре новой физики. Л., «Наука», 1970. с. 308.

творной, если ее результаты возможно использовать для непосредственного совершенствования отдельных этапов технологии литья и для дальнейшего развития теории формирования свойств отливки на основе других математических моделей.

Дело в том, что тепловая теория формирования отливки, построенная на базе математических моделей распространения теплоты в затвердевающем расплаве и в литейной форме, неизбежно должна игнорировать процессы образования усадочной и газовой пористости в отливках и возникновения в них горячих трещин. Это очевидно хотя бы потому, что, например, дифференциальное уравнение теплопроводности не учитывает и не может учесть явления фильтрации расплава между растущими кристаллами, выделение газов, растворенных в затвердевающем расплаве, и деформацию его при торможении усадки формой. Для их анализа требуется привлечение других математических моделей и создание дополнительных (локальных) теорий.

Более того, в тепловой теории формирования отливки, претендующей на максимально простое описание процесса затвердевания в целом, следует отказаться от попыток учесть зарождение и рост кристаллов в охлаждающемся расплаве. Действительно, дифференциальное уравнение теплопроводности не отражает природы и процесса возникновения внутренних источников теплоты, какими в нашем случае являются кристаллы, растущие в охлаждающемся расплаве. Поэтому необходимо либо задать темп появления твердой фазы в расплаве в соответствии с диаграммой состояния рассматриваемого литейного сплава, т. е. задать связь между количеством твердой фазы и температурой расплава ниже температуры ликвидуса, либо привлечь дополнительно математические модели теории кристаллизации металлов и сплавов. Выбор того или другого варианта зависит от целей, которые ставятся перед тепловой теорией. Если для ее практического использования возможно не учитывать особенности кристаллического строения отливки, то предпочтительнее первый вариант. Однако, если цель теории — разработка способов управления формированием кристаллического строения отливки для получения заданного строения, то второй вариант неизбежен, несмотря на существенное усложнение теории.

29. ГЛАВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ

Исторически тепловая теория формирования свойств отливки применительно к различным способам литья развивалась в наиболее простом варианте, т. е. без учета зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве. Этот вариант тепловой теории будем называть так, как он именуется традиционно: *теория затвердевания отливки*[1]. Она до сих пор играет важную роль для со-

---

[1] В достаточно завершенном виде теорию затвердевания отливки разработал А. И. Вейник. См., например, его монографии [2, 3].

вершенствования технологии и становления ее на научные основы. Она позволяет технологу-литейщику отчетливо представить кинетику затвердевания в зависимости от режимов технологии литья, типа литейного сплава и особенностей конфигурации отливки. Она дает возможность установить условия, при которых протекает последовательное или объемное затвердевание отливки, и, следовательно, рассчитать прибыли и холодильники для ликвидации, усадочных раковин и рыхлот и уменьшения усадочной пористости в литых изделиях. Наконец, с ее помощью сейчас создается простая, но эффективная система инженерных расчетов свойств литой детали на основе знания *скорости затвердевания расплава* в конкретных условиях литья и связи скорости со свойствами разнообразных литейных сплавов в отливках.

По существу, *главная задача теории затвердевания отливки — расчет скорости затвердевания расплава в той или иной форме и выявление связи между этим комплексным параметром условий литья и свойствами отливки из различных литейных сплавов.*

Пока теория затвердевания развивалась без учета зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве, необходимая связь между скоростью затвердевания и свойствами сплавов в отливках устанавливалась экспериментально.

Обширные экспериментальные исследования, выполненные советскими и зарубежными учеными и инженерами, показывают, что важнейшие свойства реальных отливок определяются величиной скорости затвердевания расплава в условиях конкретной технологии литья.

На рис. 13 в качестве примера приведены экспериментальные данные Б. Б. Гуляева, иллюстрирующие зависимость механических свойств отливок и слитков из стали 40Л от линейной скорости затвердевания U расплава этой стали в литейной форме и изложницах. Графики демонстрируют резкое увеличение пластических свойств (относительного сужения ψ), менее резкое увеличение ударной вязкости $a_н$ и предела прочности (временного сопротивления $\sigma_в$ на разрыв) литой стали с ростом скорости затвердевания. Заметим, что ход этих кривых находится во вполне определенной связи с измельчением кристаллического зерна в отливках и слитках, вызванным ростом скорости затвердевания: увеличение числа кристаллических зерен в отливке ведет к улучшению ее механических свойств даже в тех случаях, когда расплав стали загрязнен большим количеством неметаллических включений.

С помощью результатов еще одного экспериментального исследования Б. Б. Гуляева можно выяснить следующее интересное обстоятельство процесса формирования свойств отливок из углеродистых сталей. Основную массу неметаллических включений в таких сталях составляют окислы (главным образом силикаты) и сульфиды. Окислы образуют частицы самостоятельной фазы в расплаве стали еще до начала процесса затвердевания (чаще во

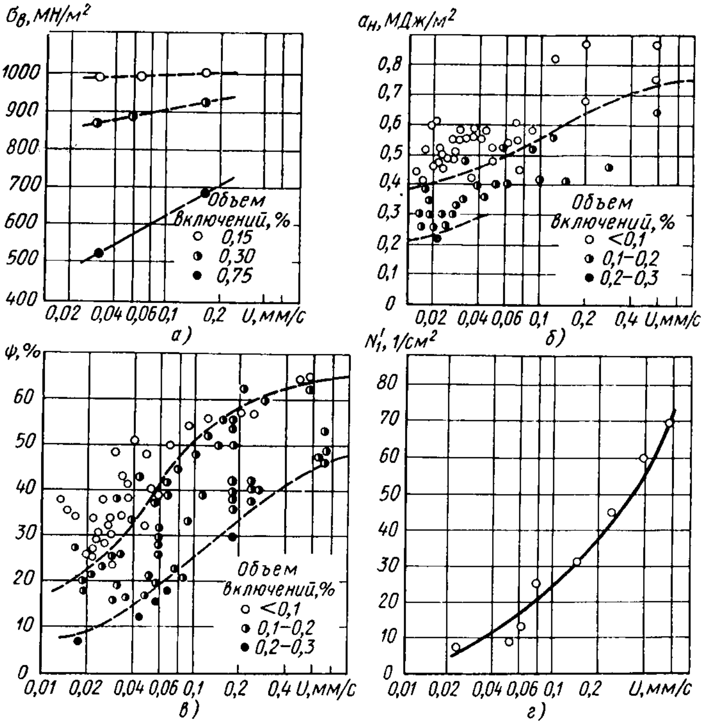


Рис. 13. Зависимость механических свойств (*а*, *б* и *в*) и числа N_1' кристаллов (*г*) в отливках и слитках углеродистой стали 40Л от скорости их затвердевания

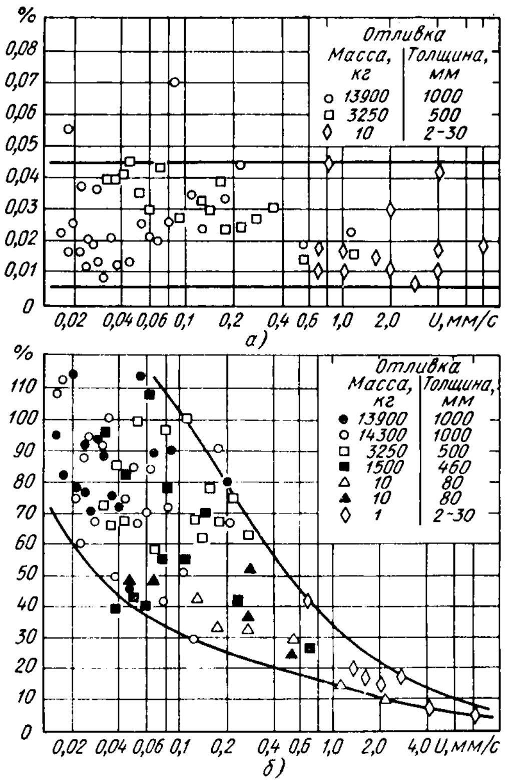
время плавки и разливки). Поэтому естественно, что количество, например, силикатных включений в отливках не зависит от скорости затвердевания (рис. 14, *а*). Сульфидные включения образуют самостоятельную фазу только во время затвердевания, так как сера растворима в железе, и в процессе кристаллизации развивается сегрегация ее в микрообъемы между ветвями дендритов. В этой связи количество включений сульфидов уменьшается с ростом скорости затвердевания (рис. 14, *б*), а размеры включений сопоставимы с расстоянием между вторичными осями дендритов (рис. 15).

Таким образом, кристаллическое строение отливок из стали 40Л (рис. 13, *г* и 15, *б*), их химическая неоднородность (рис. 14, *б* и 15, *а*) и, как следствие, их механические свойства (рис. 13, *а*—*в*) связаны со скоростью затвердевания расплава этой стали в литейной форме и изложницах[1].

---

[1] В теории затвердевания вместо этого длинного названия скорости принято сокращенное: *скорость затвердевания отливки*. В дальнейшем будем пользоваться общепринятым наименованием.

Рис. 14. Количество силикатных включений (*а*) и сульфидов (*б*) в отливках и слитках стали 40Л в зависимости от скорости их затвердевания



На рис. 16 в качестве второго примера приведены результаты экспериментов Н. А. Буткевичуса и В. П. Дагиса, показывающие положение структурных зон для отливок из синтетических чугунов с C/Si = 1,02÷1,25 в зависимости от углеродного эквивалента этих чугунов и скорости затвердевания отливок (зона *II*, заштрихованная вертикально, является зоной половинчатого синтетического чугуна, модифицированного 0,6% силикокальция).

На рис. 17 в качестве третьего примера представлены результаты, полученные Г. Ф. Баландиным и А. А. Заболоцким, по экспериментальному исследованию процесса односторонне направленного затвердевания слитков из сплава алюминия, содержащего 3% Si. Из графика и фотографии макроструктуры слитка видна зависимость между кристаллическим строением и скоростью затвердевания слитка. Представление о существовании такой связи можно вынести из анализа графиков на рис. 13, *г* и 15, *б*. Однако в рассматриваемом случае важно то, что при определенной критической скорости затвердевания $U_{кр}$ происходит переход от мелкокристаллического строения слитка к строению, состоящему только из столбчатых кристаллов. С точки зрения повышения служебных свойств литых деталей возможность получения такого их строения является очень важной. Например, лопатки газовых турбин, отлитые при односторонне направленном отводе теплоты так, что тело их состоит из столбчатых кристаллов, направленных вдоль действия главных растягивающих напряжений, обладают ресурсом работы в 4—5 раз бо́льшим, чем такие же лопатки с обычным мелкозернистым кристаллическим строением.

Примеры, показывающие связь между скоростью затвердевания и характеристиками служебных и технологических свойств отливок или их кристаллическим строением, или типом их структуры, нетрудно продолжить. Однако и только что приведенных примеров достаточно, чтобы убедиться в практическом существовании такой связи. По этой причине законно предложение о возможности прогнозировать свойства отливок, если, во-первых, будут известны необходимые зависимости свойств литейных сплавов от скорости затвердевания их расплавов для конкретных условий литья, и, во-вторых, если теория затвердевания даст аппарат расчета скорости затвердевания отливок для различных способов литья.

Несмотря на очевидную законность такого предложения, его осуществление представляется исключительно трудоемким из-за большого разнообразия и громадного числа литейных сплавов и

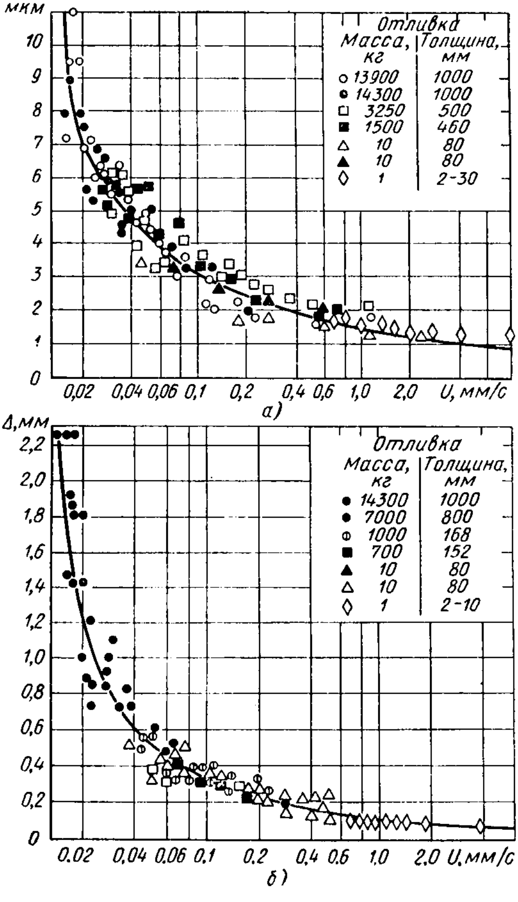


Рис. 15. Зависимость размеров включений сульфидов (*а*) и расстояния между дендритными осями второго порядка (*б*) от скорости затвердевания отливок и слитков из стали 40Л

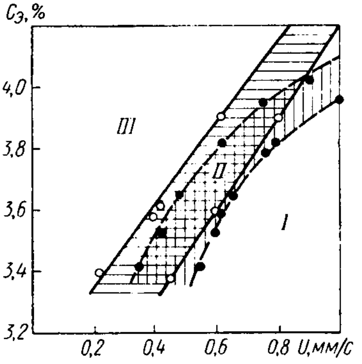
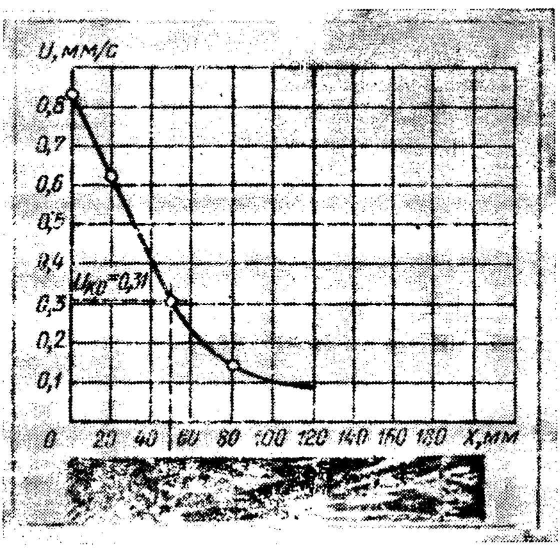


Рис. 16. Зоны белого (*I*), половинчатого (*II*) и серого перлитного (*III*) синтетических чугунов (при C/Si = 1,02÷1,25) в зависимости от углеродного эквивалента и скорости затвердевания отливок

Рис. 17. Зависимость кристаллического строения слитка из сплава алюминия, содержащего 3% Si, от скорости его затвердевания при односторонне направленном отводе теплоты



бесконечного множества конфигураций отливок. Тем не менее, на пути реализации этого предложения наметился определенный прогресс. В результате длительных и тщательных экспериментальных исследований процесса структурообразования в чугунах ваграночной плавки, теперь *в первом приближении* возможно предсказывать структуру чугунных отливок, получаемых в различных условиях литья. Это возможно, например, с помощью структурной диаграммы Г. Ф. Баландина (рис. 18), которая А. И. Вейником дополнена и уточнена на основе исследований Н. Г. Гиршовича, Н. Я. Иоффе и А. Ф. Ланды. Что же касается аппарата для расчета скорости затвердевания отливок реальной конфигурации, то здесь теория затвердевания идет испытанным путем — путем построения частных (локальных) математических моделей, с которыми будем внимательно знакомиться далее.

30. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ

Итак, главная задача теории заключается в создании аппарата для расчета скорости затвердевания реальных отливок и в установлении связи между этой скоростью и свойствами отливки или с характеристиками строения отливки, определяющими уровень необходимых свойств. Если с расчетом скорости затвердевания отливок тепловая теория формирования отливки справляется так или иначе, то установление требуемых зависимостей свойств отливок от скорости их затвердевания — результат экспериментального изучения процессов формирования литых изделий.

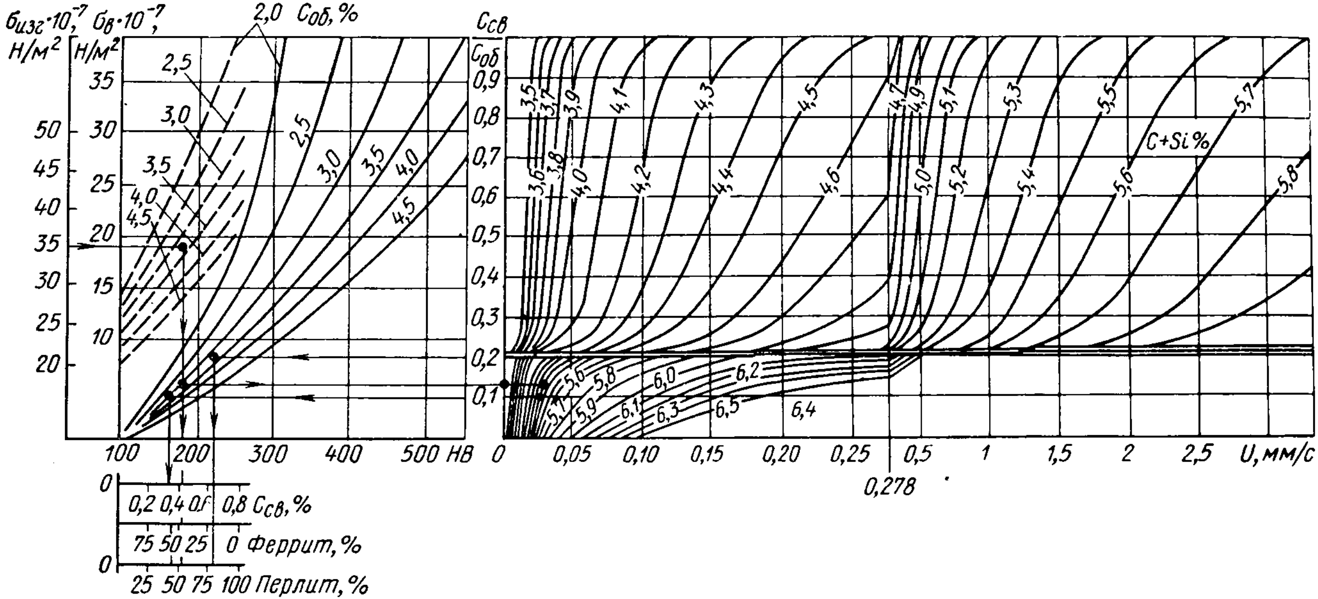


Рис. 18. Диаграмма для расчета механических свойств и структуры отливок из чугунов

Учитывая чрезвычайную сложность процессов, этот путь, по-видимому, останется неизбежным и в дальнейшем. Однако читатель ни в коем случае не должен видеть здесь какую-либо ущербность теории формирования свойств отливки.

Дело в том, что теория действительно сложных систем не может быть доведенной до состояния, при котором ее результаты непосредственно пригодны для расчета поведения этих систем без привлечения дополнительных и, порою, существенных сведений. Мы напомним читателю, что такие теории учитывают действие лишь самых главных и важнейших факторов, управляющих этими системами.

В нашем случае тепловая теория строится только на основе математических моделей распространения теплоты в затвердевающем расплаве, охлаждающемся в литейной форме. Формирование свойств отливки лишь обусловлено теплоотводом в форму, но является результатом других процессов. Поэтому требовать от тепловой теории установления зависимости свойств отливок из разнообразнейших литейных сплавов от одного из параметров процесса затвердевания — от его скорости — расчетным путем, конечно, нельзя. Она *должна* быть найдена экспериментально. Точно так же, как только экспериментально определяют теплопроводность, теплоемкость, плотность и другие физические характеристики, необходимые для расчетов процессов теплопроводности в реальных телах. Точно так же, как только экспериментально определяют предел текучести, временное сопротивление разрыву, модули упругости, коэффициент Пуассона и другие физические характеристики, необходимые для расчета напряженного и деформированного состояния реальных металлов и сплавов методами сопротивления материалов, теории упругости или теории пластичности.

Определение перечисленных характеристик весьма трудоемко, тем не менее они известны почти для всех практически важных промышленных и конструкционных материалов.

Заметим, что, например, современная физика твердого состояния располагает аппаратом для вычисления физических характеристик, о которых только что шла речь. Однако с ее помощью можно вычислить их для простейших случаев, привлекая приближенные модели (для расчета теплопроводности металлов — модель электронного газа, для теплоемкости металлов при температуре выше комнатной — модель гармонических колебаний атомов в кристаллической решетке, и т. д.). Такие расчеты имеют целью скорее всего объяснить природу явлений, найти между ними общие черты для различных металлов и сплавов, чем дать числовые значения физических характеристик этих явлений. Но такие расчеты и, главное, модели, на основе которых они выполнены, оказываются весьма важными и необычайно плодотворными для научного обоснования методов экспериментального определения необходимых физических характеристик металлов и сплавов.

В этом отношении теория формирования свойств отливки находится в аналогичном, но более сложном положении. Сложность, и очень большая, состоит в том, что требуемые зависимости между свойствами отливок и скоростью их затвердевания должны определяться в результате экспериментального исследования процессов формирования свойств отливки в условиях *реальной* технологии. Однако трудоемкость его можно заметно уменьшить. Необходимо развить тепловую теорию формирования свойств отливки за счет учета в ней кинетики зарождения и роста кристаллов в охлаждающемся расплаве. Другими словами, требуется создание *теплокинетической теории формирования*, на основе результатов которой оказалось бы возможным выявить главные тенденции в зависимостях между кристаллическим строением отливки, определяющим основные ее свойства, и скоростью затвердевания, являющейся, как мы убедимся далее, комплексной характеристикой условий литья. Зная эти тенденции, можно осуществить целенаправленное и научно обоснованное экспериментальное исследование процесса формирования свойств отливки, о котором шла речь.

Сейчас трудами главным образом советских ученых и инженеров разрабатывается такая теплокинетическая теория формирования отливки. Чтобы не путать с тепловой теорией, ее называют традиционно *теорией кристаллизации отливок*; точное ее наименование, отражающее суть дела, следующее: *теория формирования кристаллического строения отливки.*

Она строится на основе математических моделей распространения теплоты в затвердевающем расплаве, которые уточняются с помощью математических моделей общей теории кристаллизации металлов и сплавов. Сложность процессов кристаллизации и математические трудности, возникающие при их анализе в условиях литейной технологии, делают реальным развитие теории формирования кристаллического строения отливки путем создания локальных и приближенных математических моделей применительно к тому или иному типу сплава и способу литья. Наиболее полно разработана теория для технически чистых металлов, слабых твердых растворов, эвтектических и близэвтектических сплавов при литье в кокиль.

По существу теория формирования кристаллического строения отливки находится в зачаточном состоянии. Однако с ее помощью уже удалось усовершенствовать известные и найти новые способы управления формированием кристаллического строения отливок и, следовательно, получения заданного строения. А главное, с ее помощью удается осуществить целенаправленный экспериментальный поиск режимов технологии для получения строения отливки, близкого к желаемому, при литье с использованием модифицирования, внутренних микрохолодильников, вибрирования затвердевающего расплава, перемешивания его наложением электромагнитного поля и т. п.

Глава 8. СХЕМЫ ПРОЦЕССОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ

Здесь и далее, до конца четвертого раздела, будет рассматриваться теория затвердевания отливки, т. е. тепловая теория формирования свойств литых изделий.

31. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ФАКТЫ

На рис. 19 приведены некоторые результаты экспериментального исследования затвердевания плоской отливки из алюминия А0 в чугунном кокиле. Толщина отливки 100 мм, толщина стенки кокиля 50 мм.

Исследование выполнено на основе анализа температурных полей (рис. 19, *а*), построенных по кривым охлаждения затвердевающего расплава. Температуру измеряли с помощью хромель-алюмелевых термопар с незащищенными спаями. Термопары устанавливали в шести точках по сечению полости формы на одинаковых расстояниях друг от друга так, чтобы на их показание не оказало влияния охлаждение расплава через торцовые поверхности, Для этого размеры плиты выбраны в 4 раза большими ее толщины (400×400 мм). Показания термопар записаны в виде кривых охлаждения на автоматическом шеститочечном потенциометре ЭПП-09; точность измерения температуры 2К.

На рис. 19, *б* представлена кривая охлаждения затвердевающего расплава алюминия в центре плиты. Она иллюстрирует процесс охлаждения расплава от его начальной температуры

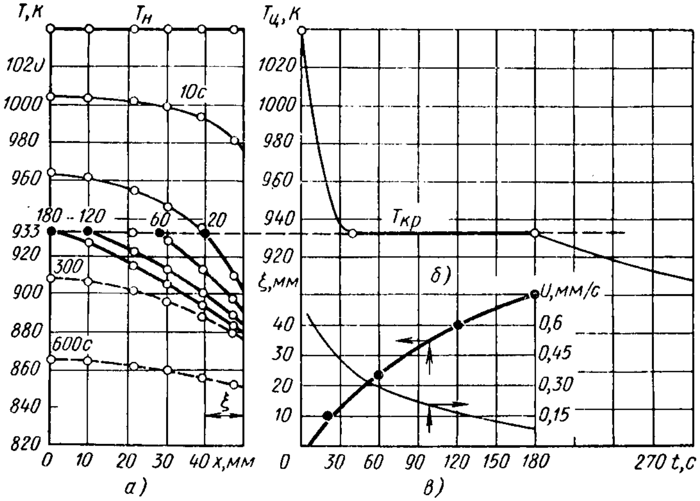


Рис. 19. Температурные поля (*а*), кривая охлаждения (*б*) и кинетика затвердевания (*в*) отливки из алюминия А0 в чугунном кокиле

$T_н = 1040$ K до температуры кристаллизации алюминия $T_{кр} = 933$ К, т. е. процесс отвода теплоты от расплава, перегретого выше температуры кристаллизации, или, как часто говорят,— снятие перегрева.

Неправильно считать, что в момент достижения расплавом в центре плиты температуры кристаллизации начинается процесс затвердевания отливки. Из рассмотрения рис. 19, *а* следует, что затвердевание расплава алюминия происходит последовательно. Например, через 20 с после окончания заполнения формы, т. е. после фиксирования начальной температуры $T_н$ расплава, от поверхности формы успевает вырасти корка твердого алюминия толщиной $\xi = 10$ мм (температурное поле в корке затвердевшего алюминия изображено жирными кривыми). Весь остальной незатвердевший к этому времени расплав еще сохраняет перегрев. Примерно через 40 с расплав в центре плиты теряет перегрев полностью (рис. 19, *б*), а толщина корки достигает 16—18 мм (рис. 19, *в*). В дальнейшем до конца затвердевания отливки температура незатвердевшего расплава остается неизменной и равной температуре кристаллизации алюминия. Поэтому по кривой охлаждения расплава, записанной с помощью термопары, которая установлена в центре затвердевающей отливки, можно зафиксировать лишь момент завершения процесса затвердевания. Для определения начала процесса термопару необходимо установить возможно ближе к поверхности формы. В нашем случае затвердевание началось примерно через 8—10 с после заливки (рис. 19, *в*).

В изложенном анализе исходили из того, что затвердевание расплава алюминия в кокиле развивается последовательно, и ссылались при этом на рис. 19, *а*. Действительно, та часть отливки, которая в данный момент времени имеет температуру, меньшую температуры кристаллизации, должна быть твердой. Так как охлаждение расплава происходит в результате отдачи теплоты в форму, то прежде других температуры кристаллизации достигнет расплав у поверхности формы. Естественно, что слой расплава, прилежащий к поверхности кокиля, затвердеет в первую очередь. Например (рис. 19, *а*), в момент времени $t = 20$ с часть отливки, прилежащая к поверхности кокиля, имеет температуру ниже $T_{кр}$. Протяженность ее равна 10 мм. На рис. 19, *а* она определена точкой пересечения кривой температурного поля в затвердевшей части отливки с прямой, параллельной оси абсцисс и соответствующей значению температуры кристаллизации алюминия. Таким образом, через 20 с от начала процесса охлаждения расплава алюминия толщина затвердевшей части отливки, т. е. толщина ξ твердой корки, если ее отсчитывать от поверхности кокиля, равна 10 мм. Используя тот же признак, нетрудно определить толщину твердой корки для последующих моментов времени 60, 120 и 180 с, в которые зафиксированы температурные поля (см. жирные кривые на рис. 19, *а*): она равна соответственно

23, 40 и 50 мм. На основе этих данных построены *график кинетики затвердевания отливки* (кривая ξ от t на рис. 19, *в*) и с помощью операции графического дифференцирования — кривая *скорости затвердевания* U от t.

32. СХЕМА ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК ИЗ ЧИСТЫХ МЕТАЛЛОВ И ЭВТЕКТИЧЕСКИХ СПЛАВОВ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Процесс теплообмена расплава с литейной формой начинается с момента попадания его первых порций в литниковую систему.

Условимся пока рассматривать процесс затвердевания расплава с момента $t_{зал}$ окончания заполнения формы, т. е. условимся, что расплав за время операции заливки не успеет потерять весь перегрев и его температура равна $T_н > T_{кр}$.

Заполнение формы через литниковую систему вызывает интенсивную циркуляцию расплава в полости формы, что приводит к выравниванию температуры расплава по всему объему. Это соображение следует непосредственно из эксперимента: в момент окончания заливки расплава алюминия все шесть термопар зафиксировали практически одинаковую температуру $T_н = 1040$ К (см. рис. 19, *а*). Следовательно, при выполнении принятого условия можно считать, что к моменту $t_{зал}$ температура расплава всюду одинаковая и равна $T_н > T_{кр}$.

В дальнейшем вынужденная циркуляция расплава затухает. Останется менее интенсивная естественная конвекция, вызванная охлаждением расплава у поверхности формы. Температурное поле в объеме расплава станет неоднородным: температура у поверхности будет ниже, чем в центре. Далее, в момент времени t_1 температура поверхности преобретет значение, равное температуре $T_{кр}$ кристаллизации чистого металла или эвтектического сплава, и начнется рост твердой корки, который закончится в момент времени t_3.

На рис. 20 представлена схема температурных полей в затвердевающей отливке в виде неограниченной плиты толщиной $2l_0$ для момента времени $t_1 < t < t_3$: $T_1(x, t)$ — температурное поле в незатвердевшем расплаве, $T_3(x, t)$— в за-

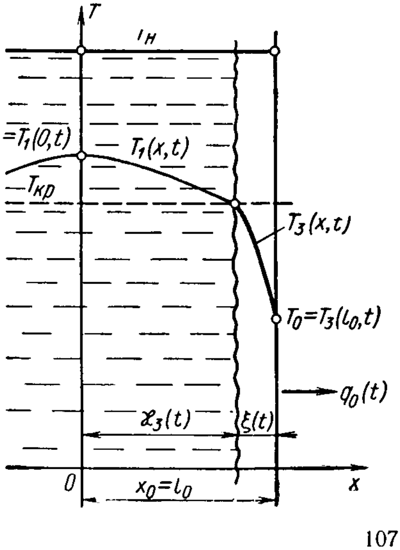


Рис. 20. Схема температурных полей в затвердевающей отливке из чистых металлов и эвтектических сплавов

твердевшей корке[1]; $\xi(t)$ — толщина твердой корки; $\varkappa_3(t) = l_0 - \xi(t)$ — координата фронта затвердевания (т. е. координата положения границы твердой корки и незатвердевшего расплава).

Специфической особенностью процесса затвердевания чистых металлов и эвтектик является выделение теплоты кристаллизации при постоянной температуре $T_{кр}$. Согласно схеме на рис. 20 теплота кристаллизации должна выделяться на фронте затвердевания отливки, т. е. на границе твердой корки и расплава, где

$$T_1(\varkappa_3, t) = T_3(\varkappa_3, t) = T_{кр}. \tag{1}$$

Очевидно, что увеличение толщины корки происходит только в том случае, когда от фронта затвердевания будет отводиться теплота кристаллизации в форму. Это означает, что температурное поле в твердой корке должно обладать свойством, при котором

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3(\varkappa_3, t)}{\partial x} \geqslant L\rho_3 U,$$

т. е. плотность теплового потока от фронта затвердевания в корку больше или равна скорости $L\rho_3 U$ выделения теплоты кристаллизации на фронте (L — удельная теплота кристаллизации металла или эвтектики). Плотность теплового потока от фронта будет в точности равна скорости выделения теплоты кристаллизации, если расплав перед фронтом уже потерял перегрев. Из экспериментальных данных, приведенных на рис. 19, *а*, можно заключить, что такой случай для условий, в которых выполнен эксперимент, наблюдается при $t \geqslant 60$ с. В общем же случае расплав перед фронтом затвердевания перегрет, поэтому, кроме теплоты кристаллизации, от фронта необходимо отводить теплоту перегретого расплава:

$$q_1(\varkappa_3, t) + L\rho_3 U = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(\varkappa_3, t)}{\partial x}, \tag{2}$$

где $q_2(\varkappa_3, t)$ — плотность теплового потока от перегретого расплава к твердой корке.

Дифференциальное уравнение (2) является уравнением теплообмена между перегретым расплавом и твердой коркой, на границе контакта которой с расплавом происходит выделение теплоты кристаллизации. По существу (2) — *дифференциальное уравнение затвердевания*. Впервые оно было предложено членами Российской Академии наук Ламэ и Клапейроном в статье «Мемуар о затвердевании охлаждающихся жидких сфер» (1831 г.) для частного случая затвердевания перегретого расплава, т. е. когда $q_1(\varkappa_3, t) = 0$. Затем, 58 лет спустя, австрийский математик Стефан ис-

---

[1] Причины, по которым температурному полю в твердой корке и координате фронта затвердевания присвоен индекс «3», будут ясны позже (см. с. 115).

пользовал его для анализа процесса образования льда в северных морях при

$$q_1(\varkappa_3,\ t) = -\lambda_0 \frac{\partial T_1(\varkappa_3,\ t)}{\partial x},$$

предположив, что конвекцией воды около поверхности льда допустимо пренебречь. В такой постановке Стефану удалось найти решение задачи для полупространства при граничном условии I рода, т. е. при $T_0 = \text{const}$. Оно является одним из немногих точных решений в математической теории затвердевания[1].

При анализе процесса затвердевания расплава металлов и литейных сплавов в общем случае пренебрегать конвекцией нельзя, ибо она вносит весьма ощутимый вклад в процесс теплопереноса в расплаве. Действительно, из опытных данных, приведенных на рис. 19, *а*, следует, что за первые 10 с с момента окончания заливки температура расплава в центре полости формы уменьшалась примерно на 40 К. Однако зафиксированное распределение температуры показывает перепад температуры от центра к поверхности всего лишь 20 К. Градиент температурного поля достигает заметной величины только вблизи поверхности контакта расплава с формой. Этот факт свидетельствует о том, что и после окончания заливки расплав интенсивно перемешивается. По мере дальнейшего охлаждения, например еще через 10 с, интенсивность конвекции уменьшается, что приводит к большей неоднородности температурного поля в расплаве. Учесть конвекцию расплава в уравнении затвердевания (2) можно тремя путями.

Первый путь состоит в том, что плотность теплового потока от перегретого расплава к твердой корке представляется так же, как это предложил Стефан, т. е. в форме закона теплопроводности Фурье. Но температурный градиент $\frac{\partial T_1(\varkappa_3,\ t)}{\partial x}$ в расплаве у поверхности корки должен быть найден как результат решения дифференциального уравнения теплопереноса Фурье—Кирхгофа совместно с дифференциальными уравнениями гидродинамики при соответствующих краевых условиях. Однако из-за серьезных математических трудностей этот путь пока еще не удается реализовать даже для весьма упрощенных частных случаев затвердевания.

Второй, самый простой и реальный путь состоит в том, что плотность теплового потока от перегретого расплава к твердой корке представляется в форме закона теплоотдачи Ньютона:

$$q_1(\varkappa_3,\ t) = \alpha_1 [T_1(t) - T_{\text{кр}}].$$

---

[1] В § 27 задачу Стефана было предложено читателю решить самостоятельно (с. 92, задача 5). Она сформулирована как задача о промерзании влажного грунта, так как в незатвердевшем объеме влажного грунта конвекция воды не вносит заметных искажений температурного поля, если его описывать дифференциальным уравнением теплопроводности Фурье.

Температура T_1 расплава принимается распределенной равномерно по всему объему незатвердевшей части отливки, т. е. принимается функцией только времени (α_1 — коэффициент теплоотдачи перегретого расплава). Численно ее можно определить как среднюю интегральную действительного распределения температуры:

$$T_1(t) = \frac{1}{\varkappa_3} \int\limits_0^{\varkappa_3} T_1(x, t)\,dx.$$

Этот путь учета влияния конвекции расплава на процесс затвердевания впервые был предложен и использован для приближенных расчетов при $\alpha_1 = \mathrm{const}$. Б. Б. Гуляевым в 1950 г. Затем в 1953 г. этот же путь использован Г. И. Иванцовым для α_1, зависящего от перегрева расплава, при приближенном расчете затвердевания стального слитка. В дальнейшем к такому способу учета конвекции расплава в расчетах затвердевания прибегали многие исследователи.

Третий путь состоит в том, чтобы сохранить дифференциальное уравнение затвердевания в форме Стефана:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(\varkappa_3, t)}{\partial x} + L\rho_3 U = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(\varkappa_3, t)}{\partial x}, \qquad (3)$$

описать процесс распространения теплоты в расплаве только дифференциальным уравнением теплопроводности Фурье и в то же время учесть влияние естественной конвекции на этот процесс и, следовательно, на ход затвердевания расплава в форме. Этого можно достичь заменой действительного коэффициента теплопроводности λ_0 перегретого расплава эффективным его значением λ_1, учитывающим конвекцию. Представим коэффициент теплоотдачи α_1 от перегретого расплава к твердой корке как коэффициент тепловой проводимости расплава только конвекцией[1]. Если расплав залит в форму для отливки с характерным размером l_0, то

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{l_0} - \frac{\lambda_0}{l_0},$$

так как λ_1 — эффективное значение коэффициента теплопроводности расплава, λ_0 — действительное его значение. Теперь, если известно значение числа Нуссельта для исследуемого процесса охлаждения расплава, то

$$\lambda_1 = \lambda_0 \left(1 + \mathrm{Nu} \frac{l_0}{l}\right),$$

---

[1] Напомним читателю, что коэффициентом тепловой проводимости твердого тела называют отношение $\frac{\lambda}{l}$; коэффициент теплоотдачи жидкости является характеристикой ее тепловой проводимости (см. с. 51).

где Nu — число Нуссельта, $\mathrm{Nu} = \frac{\alpha_1}{\lambda_0} l$; l — характерный размер обтекаемого жидкостью тела, для которого определено число Нуссельта, в эксперименте.

Некоторые формулы, с помощью которых можно рассчитать значения числа Нуссельта для различных режимов движения жидкости, приведены в приложении IV. Например, для случая естественной конвекции расплава металлов и сплавов ($\mathrm{Pr} \ll 1$)

$$\mathrm{Nu} = 0{,}53\,(\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Gr})^{1/4};$$

где Pr — критерий Прандтля;

$$\mathrm{Pr} \equiv \frac{\nu}{a};$$

Gr — критерий Грасгофа;

$$\mathrm{Gr} \equiv \frac{g\gamma\,\Delta T}{\nu a}\, l^3.$$

Величина ΔT — разница между температурой расплава и температурой стенки, которую омывает расплав при естественном движении. Для расплава, затвердевающего в литейной форме, примем $\Delta T = T_ц - T_{кр}$ (рис. 20). Тогда эффективный коэффициент теплопроводности расплава в незатвердевшей части отливки будет зависеть от величины его текущего перегрева $T_ц - T_{кр}$:

$$\lambda_1 = B_1 \frac{l_0}{h^{1/4}} (T_ц - T_{кр})^{1/4} + \lambda_0,$$

где $B_1 = (g\gamma\lambda_0 c^3 \rho^3 \nu)^{1/4}$ — постоянная данного металла или сплава; h — высота отливки (в соответствии со смыслом исходной формулы для Nu, см. приложение IV).

Изложенный третий путь учета конвекции расплава в уравнении (3) затвердевания по точности мало отличается от второго пути, но имеет по сравнению с ним ряд преимуществ. Во-первых, использование эффективного коэффициента теплопроводности позволяет, хотя и приближенно, но все же найти температурное поле $T_1(x, t)$ в незатвердевшем расплаве, что важно, как мы увидим позже, например для анализа процессов формирования кристаллического строения отливки. Во-вторых, формально в расчетах затвердевания ничего не изменяется в тех случаях, когда конвекцией расплава допустимо пренебречь. Эти случаи следуют из только что полученной формулы. Очевидно, что $\lambda_1 \approx \lambda_0$ для тонкостенных отливок (малые значения l_0) и при заливке расплава с небольшим перегревом (малые значения разности $T_н - T_{кр}$, см. рис. 20), а также для отливок большой высоты (бо́льшие значения h).

Таким образом, мы можем остановиться на схеме, изображенной на рис. 20, и при ее математическом описании использовать дифференциальное уравнение (3) затвердевания в форме Стефана, понимая под λ_1 эффективный коэффициент теплопроводности перегретого расплава. Необходимые функции температурных полей в расплаве и в твердой корке следует найти из решения (точного, приближенного аналитического или численного) дифференциальных уравнений теплопроводности Фурье для незатвердевшего расплава:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \varkappa_3(t) \\ \text{и твердой корки:} \\ \dfrac{\partial T_3}{\partial t} = a_3 \dfrac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}; \quad \varkappa_3(t) < x < l_0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

при граничном условии

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda_i \dfrac{\partial T_i(l_0,\ t)}{\partial x} = q_0(t); \quad \dfrac{\partial T_i(0,\ t)}{\partial x} = 0; \quad i = 1 \text{ и } 3 \\ \text{либо} \\ T_i(l_0,\ t) = T_0(t); \quad \dfrac{\partial T_i(0,\ t)}{\partial x} = 0; \quad i = 1 \text{ и } 3, \end{array}\right\} \qquad (5)$$

полагая, что отливка охлаждается в форме симметрично (см. схему на рис. 20); $q_0(t)$ и $T_0(t)$ — заданные либо поверхностная плотность q_0 теплового потока с поверхности затвердевающей отливки в форму, либо закон изменения температуры T_0 поверхности контакта затвердевающего расплава с формой[1].

Одно начальное условие установлено раньше:

$$\left.\begin{array}{l} T_1(x,\ t_{\text{зал}}) = T_{\text{н}} = \text{const}; \quad T_{\text{н}} > T_{\text{кр}}; \\ \text{второе начальное условие очевидно:} \\ \varkappa_3(t_{\text{зал}}) = l_0. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Условие «склеивания» решений двух уравнений теплопроводности Фурье, т. е. для температурных полей $T_1(x,\ t)$ и $T_3(x,\ t)$, следует из равенства (1), с помощью которого устанавливается закон затвердевания отливки $\xi(t) = l_0 - \varkappa_3(t)$.

На этом можно закончить рассмотрение схемы процесса затвердевания отливок из чистых металлов и эвтектик и ее математическое описание. Однако читатель вправе поставить нам следующий вопрос. Из курса физической химии известно, что для появления и роста твердой фазы необходимо переохлаждение расплава металла ниже температуры его кристаллизации. На схеме (рис. 20) и в уравнении (3) затвердевания принято, что процесс затвердевания развивается при температуре $T_{\text{кр}}$. И, несмотря на то, что те-

---

[1] Тот или другой способ задания граничного условия зависит от конкретной технологии литья. Позже этот важный для построения математической модели затвердевания вопрос будет обсужден подробно (см. гл. 9).

пловая теория затвердевания игнорирует процессы зарождения и роста кристаллов, схема на рис. 20 и уравнение (3) затвердевания должны учитывать тепловые эффекты от переохлаждения расплава перед фронтом твердой корки, где происходят эти процессы.

Для получения ответа на вопрос о причинах, по которым указанные эффекты не учтены, читатель должен обратиться к результатам экспериментов, приведенных на рис. 19. На кривой охлаждения расплава алюминия (см. рис. 19, *б*) переохлаждение не зафиксировано. Это, конечно, не означает, что переохлаждения нет. Оно есть, иначе процесс затвердевания не мог бы начаться и развиваться. Дело в том, что измерение температуры затвердевающего расплава выполнено с использованием довольно грубых средств. Напомним, что точность измерения составляла около 2 К. Следовательно, в техническом алюминии А0 переохлаждение, необходимое для его затвердевания при литье в кокиль, меньше 2 К. И если условиться о точности расчетов температурных полей не выше величины переохлаждения ΔT при кристаллизации реальных металлов и сплавов, то тепловые эффекты от переохлаждения расплава можно не учитывать. Другими словами, если $\frac{\Delta T}{T_{\text{кр}}} \ll \ll 1$, то переохлаждением расплава в тепловых расчетах затвердевания отливки допустимо пренебречь.

33. ДАЛЬНЕЙШИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ФАКТЫ

На рис. 21 представлены некоторые результаты экспериментального исследования затвердевания плоской отливки из сплава алюминия, содержащего 20% Zn, в чугунном кокиле. Размеры отливки, толщина стенки кокиля и методика исследования в точности такие же, какие были использованы в экспериментах с техническим алюминием А0.

В целом полученные результаты аналогичны уже рассмотренным раньше (см. рис. 19). Однако есть и различия. Сплав алюминия, содержащего 20% Zn, является твердым раствором цинка в алюминии. Его расплав кристаллизуется в температурном интервале T_L = 896 и $T_S = 854$ К.

Из анализа температурных полей на рис. 21, *а* ясно, что расплав затвердевает последовательно, начиная от поверхности формы. Однако продвижение твердой корки происходит за счет срастания кристаллов, которые зарождаются и растут впереди нее, т. е. в слое расплава, имеющего температуру между ликвидусом и солидусом данного сплава. На рис. 21, *а* для момента времени 60 с отмечены толщина корки ξ_S и положение фронта температуры ликвидуса координатой ξ_L. На рис. 21, *в* приведены графики кинетики затвердевания отливки — продвижения фронта ликвидуса, т. е. фронта начала затвердевания расплава (кривая ξ_L от t), и фронта солидуса, т. е. фронта конца затвердевания (кривая ξ_S от t). Разницу между ξ_L и ξ_S называют шириной (протяженностью)

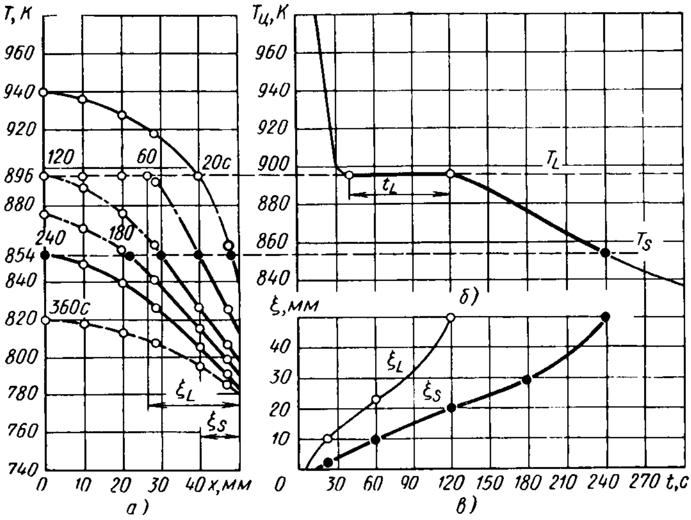


Рис. 21. Температурные поля (*а*), кривая охлаждения (*б*) и кинетика затвердевания (*в*) отливки из сплава алюминия, содержащего 20% Zn, в чугунном кокиле

двухфазной зоны затвердевающей отливки, или зоной затвердевания расплава сплавов, кристаллизующихся в интервале температур T_L и T_S.

Таким образом, первое и наиболее существенное отличие процесса затвердевания отливки из сплавов типа твердого раствора от затвердевания расплава металлов или эвтектических сплавов заключается в том, что этот процесс развивается в двухфазной зоне.

На рис. 21, *б* приведена кривая охлаждения расплава в центре плиты. Она иллюстрирует процесс снятия перегрева расплава, который заканчивается в данном случае через 40—45 с после заполнения формы. Далее температура расплава остается на уровне температуры ликвидуса вплоть до момента времени, когда фронт начала затвердевания достигает центра отливки; в данном случае этот момент времени соответствует 120 с. Промежуток времени t_L, в течение которого температура затвердевающего расплава остается равной T_L сплава, по предложению Ю. А. Нехендзи называют *стоянием ликвидуса*.

Эта характеристика процесса затвердевания расплава сплавов, кристаллизующихся в интервале температур T_L и T_S, имеет очень важное значение. Так, в момент времени, когда стояние ликвидуса прекращается и, следовательно, начинается затвердевание расплава в центре отливки, двухфазная зона достигает наибольшей протяженности (рис. 21, *в*). По существу вся незатвердевшая часть отливки является двухфазной зоной (рис. 21, *а*, см. температурное поле в момент времени 120 с).

Читателю известно, что процесс затвердевания отливки сопровождается развитием объемной усадки затвердевающего расплава. В результате, если не вникать в подробности, уровень расплава в незатвердевшей части отливки понижается. При анализе экспериментов с алюминием (см. рис. 19) мы не обращали внимания на это обстоятельство, так как понижение уровня расплава протекает беспрепятственно, а образующийся дефицит расплава легко пополняется из прибыли. Сейчас, при анализе экспериментов со сплавом алюминия и цинка, необходимо обратить внимание на развитие объемной усадки. Ибо с того момента времени, когда прекращается стояние ликвидуса, незатвердевшая часть отливки представляет собой твердо-жидкую массу, и понижение уровня расплава в этой части отливки может происходить только за счет *фильтрации* его между растущими кристаллами. В связи с тем, что фильтрация — процесс медленный, затвердевание отливки может закончиться раньше, чем успеет пополниться дефицит расплава из прибыли. В центральной части отливки образуются пустоты — *усадочные поры.*

Следовательно, вторым отличием процесса затвердевания отливки из сплавов типа твердого раствора от затвердевания расплава металлов или эвтектик является то, что заключительной стадии процесса сопутствует фильтрация расплава между растущими кристаллами.

34. СХЕМА ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК ИЗ СПЛАВОВ ТИПА ТВЕРДОГО РАСТВОРА И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

При анализе методами теории теплообмена процесса затвердевания расплава сплавов, кристаллизующихся в интервале температур, из двух выявленных особенностей важной является первая, т. е. то, что процесс затвердевания развивается в двухфазной зоне расплава, прилегающей к твердой корке[1]. С учетом ее на рис. 22 изображена схема температурных полей: T_1 (x, t) — температурное поле в незатвердевшем расплаве, T_2 (x, t) — в двухфазной зоне и T_3 (x, t) — в твердой корке; $\varkappa_1$ (t) и $\varkappa_3$ (t) — соответственно координаты фронтов начала и конца затвердевания.

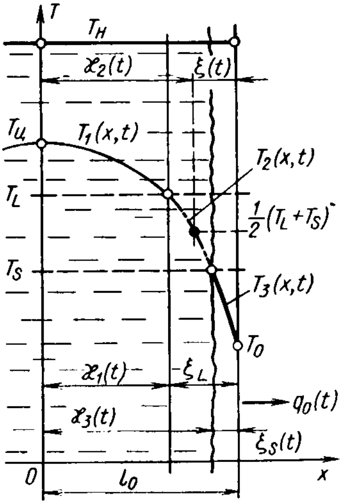


Рис. 22. Схема температурных полей в затвердевающей отливке из сплавов типа твердых растворов

---

[1] Вторая особенность процесса затвердевания очень важна для анализа формирования усадочной пористости и разработки способов ее уменьшения.

Для математического описания этой схемы возможны два способа.

Первый способ состоит в том, чтобы эту схему привести к уже рассмотренной нами схеме затвердевания при постоянной температуре. Если внутри интервала кристаллизации сплава выбрать температуру, равную, например, $\frac{1}{2}(T_L + T_S)$, и принять, что к моменту ее достижения в двухфазной зоне практически заканчивается процесс кристаллизации (рис. 22), то кинетику затвердевания можно характеризовать скоростью нарастания твердой корки $\xi(t)$. Естественно, что для математического описания такого варианта схемы можно использовать все уравнения и соотношения, которые были получены выше применительно к схеме затвердевания металлов и эвтектик. Необходимо лишь вместо $\varkappa_3(t)$ подставить координату $\varkappa_2(t)$ условного фронта затвердевания (рис. 22) и $T_{\text{кр}}$ заменить $\frac{1}{2}(T_L + T_S)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \varkappa_2(t); \\ &\frac{\partial T_3}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}; \quad \varkappa_2(t) < x < l_0; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(\varkappa_2,\ t)}{\partial x} + L\rho_3 U = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(\varkappa_2,\ t)}{\partial x}; \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &-\lambda_i \frac{\partial T_i(l_0,\ t)}{\partial x} = q_0(t); \quad \frac{\partial T_i(0,\ t)}{\partial x} = 0; \quad i = 1 \text{ и } 3 \\ &\text{или} \\ &T_i(l_0,\ t) = T_0(t); \quad \frac{\partial T_i(0,\ t)}{\partial x} = 0: \quad i = 1 \text{ и } 3; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa_2(t_{\text{зал}}) = l_0; \quad T_1(x,\ t_{\text{зал}}) = T_{\text{н}} = \text{const}; \\ &T_{\text{н}} > \frac{1}{2}(T_L + T_S). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$T_1(\varkappa_2,\ t) = T_3(\varkappa_2,\ t) = \frac{1}{2}(T_L + T_S). \tag{11}$$

Конечно, этот способ математического описания схемы на рис. 22 нельзя считать приемлемым для *анализа* процесса затвердевания отливки из сплавов типа твердого раствора, так как он полностью игнорирует главную особенность процесса — развитие его в интервале температур T_L и T_S. Однако этот способ нельзя считать и бесполезным вообще. В самом деле, из рис 23, *в* ясно, что к середине температурного интервала T_L — T_S кристаллизации твердого раствора (сплав *I*, рис. 23, *а*) образуется более 80% объема Ψ твердой фазы (график на рис. 23, *в* построен на основе диаграммы состояния по правилу отрезков, см. с. 119). Следо-

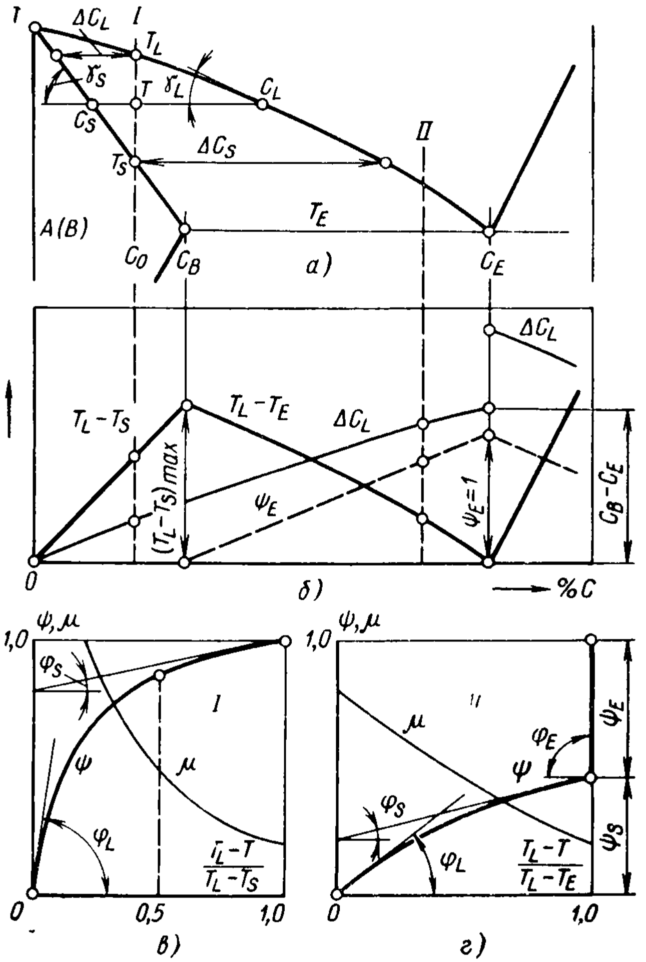


Рис. 23. Схема диаграммы состояния бинарных сплавов (*а*), зависимость температурных $T_L - T_S$ и $T_L - T_E$ и концентрационного ΔC_L интервалов кристаллизации от концентрации сплавов (*б*), изменение количества твердой фазы Ψ и темпа ее кристаллизации μ для твердого раствора (*в*) и эвтектического сплава (*г*)

вательно, несмотря на очень грубую схематизацию процесса затвердевания, с помощью рассмотренного способа математического описания можно достаточно просто, но, естественно, приближенно рассчитать линейную скорость затвердевания U, которая необходима для практического применения экспериментальных данных и диаграмм типа приведенных на рис. 13—18, устанавливающих связь свойств и структуры отливки со скоростью ее затвердевания.

Второй способ математического описания процесса затвердевания расплава твердых растворов в условиях литейной формы состоит в том, чтобы возможно полнее отразить развитие процесса в интервале температур T_L и T_S. Это необходимо, как мы уже упоминали, для анализа процесса затвердевания. Например, для достаточно точного определения момента времени, когда начинается затвердевание в центральной части отливки, где возможно образование усадочной пористости; для определения той части тела отливки, которая может быть поражена пористостью, и следовательно, для разработки мер по уменьшению ее в реальных условиях литья. Анализ процесса затвердевания в интервале T_L и T_S потребуется и для исследования процесса формирования кристаллического строения отливки, ибо зарождение и рост кристаллов при затвердевании твердых растворов происходит именно в двухфазной зоне отливки. Все это будет рассмотрено позже. Сейчас рассмотрим второй способ математического описания схемы, приведенной на рис. 22.

Принципиально он очевиден. Если речь идет о процессе затвердевания в объеме двухфазной зоны, т. е. в объеме расплава, в котором растут кристаллы и, следовательно, выделяют теплоту кристаллизации, то для математического описания процесса возможно использовать дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье, учитывающее тепловыделение от распределенных по объему внутренних источников,

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{1}{c_2 \rho_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial t}; \quad \varkappa_1(t) < x < \varkappa_3(t),$$

и, естественно, не учитывающее движения расплава и кристаллов в этом объеме[1]. Обозначим удельную теплоту кристаллизации сплава через L_2, а относительное количество твердой фазы в объеме двухфазной зоны — через Ψ. Тогда

$$W = L_2 \rho_3 \Psi$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{L_2 \rho_3}{c_2 \rho_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \quad \varkappa_1(t) < x < \varkappa_3(t), \tag{12}$$

так как удельная объемная теплота $L_2\rho_3$ кристаллизации сплава мало изменяется внутри интервала T_L—T_S. Однако для использования этого дифференциального уравнения необходимо знать функцию Ψ для каждого конкретного сплава.

Функцию Ψ относительного количества твердой фазы, кристаллизующейся в двухфазной зоне отливки, т. е. внутри интервала

---

[1] Условимся пренебрегать перемещением расплава и кристаллов в пределах двухфазной зоны. Движение расплава возможно за счет его фильтрации между растущими кристаллами, что происходит очень медленно. Движение кристаллов возможно, так как они в среднем на 5% тяжелее расплава. Но оно, учитывая, что размеры кристаллов весьма малы, будет происходить еще медленнее. Более интенсивное движение расплава и кристаллов у фронта кристаллизации возможно лишь при специальном перемешивании расплава в форме.

T_L—T_S сплава, можно определить по диаграмме состояния конкретной системы сплавов с помощью известного правила отрезков. На рис. 23, *а* приведена схема наиболее распространенных диаграмм состояния бинарных сплавов, являющихся основой многих литейных сплавов. Для сплава *I*, который следует рассматривать как представителя твердых растворов, используя правило отрезков, получим

$$\Psi = \frac{C_L - C_0}{C_L - C_S}. \tag{13}$$

Так как C_L и C_S — функции температуры T внутри интервала T_L—T_S (см. рис. 23, *а*), то правило отрезков позволяет определить Ψ как функцию температуры затвердевающего расплава. На рис. 23, *в* функция Ψ для сплава *I* (см. рис. 23, *а*) представлена в виде графика в зависимости от относительной разности температур $\frac{T_L - T}{T_L - T_S}$ в интервале кристаллизации. На этот график уже была ссылка при обсуждении первого способа математического описания процесса затвердевания отливки из твердого раствора. Функцию Ψ можно, разумеется, представить в виде таблицы или приближенной формулы.

В связи с тем, что Ψ определяется как функция от температуры, дифференциальное уравнение (7) целесообразно записать в другой форме:

$$(c_2\rho_2 - \rho_3\mu L_2)\frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}; \quad \varkappa_1(t) < x < \varkappa_3(t), \tag{14}$$

так как $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial T_2} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t}$ или $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mu \frac{\partial T_2}{\partial t}$, где $\mu = \frac{d\Psi}{dT}$ и является функцией от температуры внутри интервала кристаллизации сплава. В виде графика, таблицы или приближенной формулы ее можно определить пока только по диаграмме состояния исследуемых сплавов. На рис. 23, *в* для примера приведена кривая μ, построенная в результате графического дифференцирования кривой Ψ по T. В этом смысле особой разницы между (12) и (14) нет. Однако на основе (14) с помощью диаграммы состояния системы исследуемых сплавов гораздо легче выполнить качественный анализ процесса затвердевания в двухфазной зоне отливки. Необходимо лишь воспользоваться функцией μ.

Функция $\mu = \frac{d\Psi}{dT}$ является важной характеристикой процессов, происходящих в интервале температур T_L—T_S. Она называется *темпом кристаллизации*[1] сплавов. Из (13)

$$\mu = \frac{C_0 - C_S}{m_L (C_L - C_S)} + \frac{C_L - C_0}{m_S (C_L - C_S)}, \tag{15}$$

---

[1] В теорию кристаллизации сплавов эту характеристику ввел И. В. Горбачев (1941 г.). Наименование «темп кристаллизации» принадлежит А. А. Бочвару.

где $m_L = dT/dC_L$ и $m_S = dT/dC_S$ — тангенсы углов наклона касательных к линиям ликвидуса и солидуса (для сплава I, рис. 23, *а*, при температуре T эти углы соответственно равны γ_L и γ_S).

Из этой формулы следует, что в начале процесса, т. е. при $T = T_L$, когда $C_L = C_0$, темп кристаллизации у ликвидуса

$$\mu_L = \frac{1}{m_L \Delta C_L};$$

в конце процесса, т. е. при $T = T_S$, когда $C_S = C_0$, темп кристаллизации у солидуса

$$\mu_S = \frac{1}{m_S \Delta C_S}.$$

Для сплава I (см. рис. 23, *а*) $m_L < m_S$ и $\Delta C_L < \Delta C_S$, поэтому $\mu_L > \mu_S$, т. е. темп кристаллизации в начале процесса больше, чем в конце. Так как $\mu = d\Psi/dT$, то величины темпа кристаллизации μ_L и μ_S равны тангенсам углов наклона касательных к кривой Ψ от T соответственно при $T = T_L$ и $T = T_S$; на рис. 23, *в* эти углы равны φ_L и φ_S, при этом ясно, что $\varphi_L > \varphi_S$.

Такое положение сохранится для всех сплавов типа твердых растворов из бинарных систем, диаграммы состояния которых аналогичны схематически изображенной на рис. 23, *а*. Более четко это можно показать, если предположить, что линии ликвидуса и солидуса являются прямыми. Тогда $m_L = \frac{T_L - T_S}{\Delta C_S}$ и $m_S = \frac{T_L - T_S}{\Delta C_L}$, а отношение

$$\frac{\mu_L}{\mu_S} = \frac{1}{k_0^2},$$

как $k_0 = C_S/C_L$ — коэффициент распределения[1] растворимого компонента между твердой и жидкой фазами для данной температуры внутри интервала кристаллизации твердого раствора.

Исследования В. М. Голода показали, что для 95% известных бинарных диаграмм состояния сплавов на основе алюминия, меди, железа, кобальта, никеля и титана коэффициент распределения меньше единицы и для 65% $k_0 < 0{,}2$; причем у 60% диаграмм состояния линии ликвидуса и солидуса практически прямолинейны; наконец, 70% диаграмм состояния с тем или иным приближением соответствуют схеме на рис. 23, *а*. Следовательно, у подавляющего большинства литейных сплавов, таких как углеродистые стали, бронзы, латуни, алюминиево-кремниевые, магниево-алюминиевые и др., $\mu_L > \mu_S$. Это означает, что при затвердевании

---

[1] Коэффициент распределения ввел в теорию кристаллизации сплавов лауреат Нобелевской премии В. Пфанн.

реальных сплавов интенсивность выделения теплоты кристаллизации в начале процесса намного больше, чем в конце. В свою очередь, это означает, что в интервале T_L—T_S кривая охлаждения затвердевающего расплава должна быть выпуклой и по ней нельзя точно определить момент начала кристаллизации расплава в той или иной точке объема, залитого в форму. Момент прекращения стояния ликвидуса (см. рис. 21, *б*), не является началом кристаллизации в центре отливки. Скорее всего, он начался раньше, ибо высокий темп кристаллизации при температуре, близкой к T_L, удерживал кривую охлаждения на уровне ликвидуса. Поэтому графики на рис. 21, *в*, иллюстрирующие кинетику затвердевания отливки, являются весьма приближенными и отражают лишь качественную картину хода исследуемого процесса.

Надежнее расчет. Но на основе уравнений (12) или (14) он возможен, если известна функция Ψ или μ для конкретных реальных сплавов. Конкретные реальные сплавы редко бывают бинарными, для которых Ψ или μ можно определить по (13) или (15), если эти сплавы затвердевают в равновесных условиях кристаллизации. Гораздо чаще — это сложные многокомпонентные сплавы, затвердевающие в неравновесных условиях охлаждения в литейной форме. Для них Ψ или μ возможно установить в результате специальных экспериментов. И здесь возникает мысль об эксперименте, если уж он неизбежен, с помощью которого удалось бы найти не функцию Ψ или μ, а весь множитель перед частотой производной $\partial T_2/\partial t$ в уравнении (14). Именно такая мысль впервые была сформулирована А. И. Вейником в 1960 г. [3] и затем в 1964 г. реализована для расчетов затвердевания отливки [4].

По предложению А. И. Вейника, выражение $c_2 - \mu \frac{\rho_3}{\rho_2} L_2$ называется *спектральной эффективной теплотой кристаллизации сплава* (иногда его называют спектральной эффективной удельной теплоемкостью сплава в двухфазном его состоянии; пока еще нет установившегося термина).

Обозначим это выражение через $s(T_2)$; тогда уравнение (14) примет вид

$$s(T_2)\rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}; \quad \varkappa_1(t) < x < \varkappa_3(t). \tag{16}$$

Таким образом, реализация второго способа математического описания процесса затвердевания расплава в двухфазной зоне отливки возможна с помощью трех дифференциальных уравнений. В дальнейшем будем пользоваться одним из способов в зависимости от целей исследования процесса затвердевания отливки. Для полного описания процесса затвердевания расплава твердого раствора в условиях литейной формы целесообразно остановиться на уравнении (12), так как оно в явной форме отражает особенности схемы на рис. 22.

Итак, для перегретого расплава в незатвердевшей части отливки

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T_1}{\partial t}=a_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2};\quad 0<x<\varkappa_1(t);\\&\text{для расплава в двухфазной зоне}\\&\frac{\partial T_2}{\partial t}=a_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{L_2\rho_3}{c_2\rho_2}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t};\quad \varkappa_1(t)<x<\varkappa_3(t);\\&\text{для твердой корки}\\&\frac{\partial T_3}{\partial t}=a_3\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2};\quad \varkappa_3(t)<x<l_0.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Условие равенства тепловых потоков на фронте начала кристаллизации

$$\left.\begin{aligned}&-\lambda_1\frac{\partial T_1(\varkappa_1,\ t)}{\partial x}=-\lambda_2\frac{\partial T_2(\varkappa_1,\ t)}{\partial x}\\&\text{и на фронте конца кристаллизации в двухфазной зоне}\\&-\lambda_2\frac{\partial T_2(\varkappa_3,\ t)}{\partial x}=-\lambda_3\frac{\partial T_3(\varkappa_3,\ t)}{\partial x}.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Варианты граничных условий (см. схемы на рис. 20 и 22) следует сохранить прежними в виде (5), но для $i = 1{,}2$ и 3; начальные условия (6) необходимо уточнить, так как $T_н > T_L$, и дополнить: $\varkappa_1\ (t_{зал}) = l_0$; $\Psi\ (\varkappa_1,\ t_{зал}) = 0$.

Условия «склеивания» решений уравнений системы (17):

$$\left.\begin{aligned}&T_1(\varkappa_1,\ t)=T_2(\varkappa_1,\ t)=T_L\\&\text{и}\\&T_2(\varkappa_3,\ t)=T_3(\varkappa_3,\ t)=T_S.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

С их помощью можно устанавливать законы продвижения фронтов начала $\varkappa_1\ (t)$ и конца $\varkappa_3\ (t)$ затвердевания в двухфазной зоне отливки, если $\Psi=\Psi(I_2)$ известна.

Читатель, по-видимому, обратил внимание на то, что по-прежнему предполагается развитие конвекции перегретого расплава в незатвердевшей части отливки при $T_1 > T_L$, которая учитывается эффективным коэффициентом теплопроводности λ_1 расплава.

Таким образом, процесс затвердевания отливок из сплавов, кристаллизующихся в интервале температур T_L и T_S, можно описать двумя способами. Первый — системы уравнений и условий (7)—(11) — признан нами как условный, позволяющий просто рассчитать линейную скорость затвердевания; второй — система уравнений и условий (17)—(19) — отражает специфику затвердевания расплава в двухфазной зоне. Однако эта специфика не проявляется при затвердевании достаточно чистых и, как правило, узкоинтервальных сплавов, которые кристаллизуются в литейной форме с образованием столбчатых кристаллов, т. е. когда процессы в двухфазной зоне не развиваются вовсе. Для такого случая наиболее подходящ первый способ математического описания. Однако можно усовершенствовать и второй способ. Необходимо лишь условие равенства тепловых потоков на фронте конца кристаллизации в двухфазной зоне заменить дифференциальным уравнением затвердевания типа уравнения (3):

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(\varkappa_3,\ t)}{\partial x} + L\rho_3[1-\Psi(\varkappa_3,\ t)]U = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(\varkappa_3,\ t)}{\partial x}, \qquad (20)$$

где $U = +\frac{d\xi_S}{dt}$ — линейная скорость продвижения фронта солидуса, т. е. линейная скорость затвердевания отливки; $\Psi(\varkappa_3,\ t)$ — значение функции Ψ у фронта солидуса.

Очевидно, что при $\Psi(\varkappa_3,\ t) = 1$ это уравнение превращается в условие на фронте конца кристаллизации в двухфазной зоне. Но при $\Psi(\varkappa_3,\ t) = 0$ процессы в двухфазной зоне отливки не развиваются, (20) становится аналогичным (8), система дифференциальных уравнений (17) превращается в (7), так как второе уравнение в системе (17) повторяет первое (при $\Psi = 0$ в интервале $T_L - T_S$, только расплав — твердая фаза отсутствует) и, следовательно, расширяет его на область $0 < x < \varkappa_3(t)$.

Предлагаемое усовершенствование второго способа описания процесса затвердевания отливки из твердых растворов по-существу является формальным приемом, всего лишь объединяющим оба способа в один. Нам остаются неизвестными условия, при которых для реальных сплавов и технологии литья функция $\Psi(\varkappa_3,\ t)$ принимает значения 0 либо 1. Выяснение этих условий — задача теплокинетической теории затвердевания отливки. Но если они будут выяснены на основе изучения процессов зарождения и роста кристаллов в двухфазной зоне, то с помощью уравнения (20) затвердевания удастся понять причины, которые приводят к образованию столбчатых кристаллов, берущих свое начало от поверхности формы, и которые, затем, останавливают их рост, приводя к образованию центральной зоны отливки с равновесным кристаллическим строением. Иными словами, будут понятны причины изменения функции $\Psi(\varkappa_3,\ t)$ от 0 до 1 в процессе затвердевания отливок из любых сплавов и, следовательно, осознаны способы управления процессом так, чтобы по желанию можно было получить заданное кристаллическое строение отливок: либо зернистое строение, либо строение, состоящее только из столбчатых кристаллов.

35. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ФАКТЫ И УТОЧНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ

На рис. 24 приведены некоторые результаты экспериментального исследования затвердевания плоской отливки из сплава алюминия, содержащего 7% Si, в чугунном кокиле. Размеры отливки,

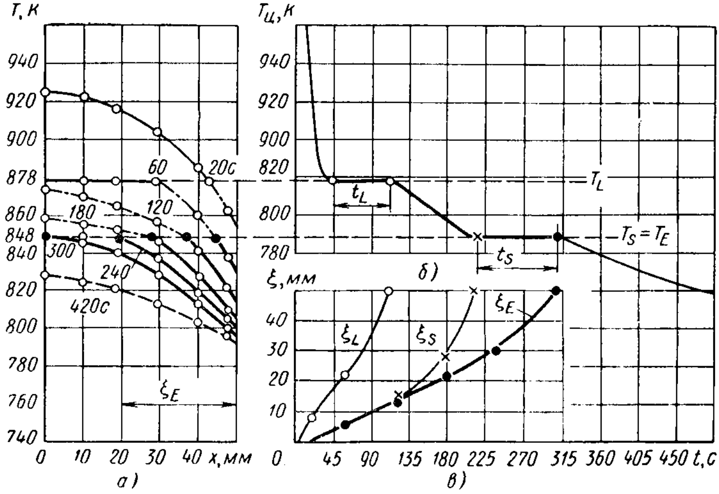


Рис. 24. Температурные поля (*а*), кривая охлаждения (*б*) и кинетика затвердевания (*в*) отливки из сплава алюминия, содержащего 7% Si, в чугунном кокиле

толщина стенки кокиля и методика исследования сохранены такими же, как и в предыдущих экспериментах с алюминием А0 и сплавом алюминия, содержащего 20% Zn.

Результаты аналогичны полученным в предыдущем случае (см. рис. 21). Есть лишь одна особенность.

Сплав алюминия с 7% Si кристаллизуется в температурном интервале $T_L = 878$ и $T_E = 848$ К, а затем — при $T_E = 848$ К. В интервале $T_L - T_E$ появляется 26% твердой фазы, остальные 74% — при $T_E = \text{const}$.

На основе анализа температурных полей затвердевающей отливки (рис. 24, *а*) построены кривые продвижения фронта ξ_L начала и фронта ξ_S конца кристаллизации в интервале $T_L - T_E$, а также фронта ξ_E конца кристаллизации эвтектики (фронта затвердевания отливки, см. рис. 24, *в*). Из кинетических кривых следует, что рост толщины твердой корки при затвердевании расплава рассматриваемого сплава обусловлен как зарождением и ростом кристаллов в двухфазной зоне расплава перед коркой, так и ростом кристаллов самой корки при $T_E = \text{const}$. В этом состоит особенность процесса затвердевания сплава, содержащего эвтектику.

Она очень четко выявляется на кривых охлаждения расплава, затвердевающего в литейной форме. На рис. 24, *б* представлена такая кривая для центра отливки. Помимо стояния ликвидуса t_L, уже известного нам из предыдущих экспериментов, на кривой охлаждения обнаруживается *стояние солидуса*[1] t_S. Стояние соли-

---

[1] Это явление, так же как и стояние ликвидуса, обнаружено Ю. А. Нехендзи. Наименование *стояние солидуса* предложено им же в 1956 г.

дуса — промежуток времени, в течение которого температура в центре незатвердевшей части отливки удерживается равной температуре кристаллизации эвтектики. В конце t_S происходит кристаллизация эвтектики и твердая корка ξ_E достигает центра отливки.

Стояние солидуса является также важной характеристикой процесса затвердевания сплавов, кристаллизующихся в температурном интервале, прежде всего потому, что оно свидетельствует о развитии эвтектической кристаллизующих в сплаве. Но главное заключается в том, что начало стояния солидуса — момент конца кристаллизации расплава в интервале $T_L - T_E$ в центре отливки. С этого момента времени вся незатвердевшая часть отливки представляет собой двухфазную зону с максимальным для данного сплава количеством твердой фазы. Например, в условиях, для которых выполнено экспериментальное исследование процесса затвердевания отливки из сплава алюминия с 7% Si, этот момент наступает примерно через 240 с после окончания заливки (рис. 24, *а*).

Дальнейшая кристаллизация эвтектики, благодаря которой завершается процесс затвердевания отливки, будет происходить в сопровождении фильтрации расплава эвтектической концентрации между кристаллами, выросшими в интервале $T_L - T_E$. От скорости фильтрации, как помнит читатель, зависит вероятность образования усадочной пористости в центральной части отливки. Скорость же фильтрации, как это ясно, зависит от количества твердой фазы в двухфазной зоне, а количество твердой фазы в незатвердевшей части отливки тем меньше, чем у́же интервал $T_L - T_E$ или, что то же самое, чем дольше стояние солидуса.

Таким образом, особенность затвердевания отливки из сплава, содержащего эвтектику, заключается в том, что, кроме уже известных нам процессов, совершающихся в интервале $T_L - T_E$ в двухфазной зоне фронта затвердевания ξ_E, происходит выделение теплоты кристаллизации на фронте ξ_E в результате затвердевания эвтектики.

Связь между величиной интервала $T_L - T_E$ и количеством эвтектики в сплавах можно установить только по диаграмме их состояния. Например, для сплава *II* (см. рис. 23, *а*) относительное количество Ψ твердой фазы при любой температуре T в интервале $T_L - T_E$, если по-прежнему воспользоваться правилом отрезков, выражается уже известной нам зависимостью

$$\Psi = \frac{C_L - C_0}{C_L - C_S}.$$

При $T = T_E$ величины $C_L = C_E$ и $C_S = C_B$ (C_B — концентрация предельного насыщения твердого раствора; C_E — концентрация эвтектики), поэтому количество твердой фазы к концу кристаллизации в интервале $T_L - T_E$

$$\Psi_S = \frac{C_E - C_0}{C_E - C_B}. \quad (21)$$

На рис. 23, *г* приведен график Ψ в зависимости от относительной разности температур $\frac{T_L-T}{T_L-T_E}$ для сплава *II* (см. рис. 23, *а*). Так как к концу кристаллизации всего расплава $\Psi = 1$, то при температуре T_E должно закристаллизоваться $\Psi_E = 1 - \Psi_S$ эвтектики.

Очевидно, что

$$\Psi_E = \frac{C_0 - C_B}{C_E - C_B}. \tag{22}$$

На рис. 23, *б* представлен график зависимости количества эвтектики в сплавах от их концентрации при $C_0 > C_B$. Эта зависимость, как и следует из (22), линейная; при $C_0 = C_E$ величина $\Psi_E = 1$.

Темп кристаллизации сплава *II* выражается той же формулой (15); график μ приведен на рис. 23, *г*. Однако, если при $T = T_L$ по-прежнему

$$\mu_L = \frac{1}{m_L \, \Delta C_L},$$

то при $T = T_E$ из (15) с учетом (21) и (22)

$$\mu_S = \frac{1}{C_E - C_B}\left(\frac{\Psi_E}{m_L} + \frac{\Psi_S}{m_S}\right).$$

Если, как и раньше, предположить, что линии ликвидуса и солидуса сплава являются прямыми, то

$$\frac{\mu_L}{\mu_S} = \frac{C_E - C_B}{\Delta C_L \left(\Psi_E + k_0 \Psi_S\right)}.$$

Следовательно, и при $C_0 \geqslant C_B$ $\mu_L > \mu_S$, т. е. темп кристаллизации у ликвидуса больше, чем у солидуса (см. рис. 23, *б*: при $C_0 < C_E$ величина $\Delta C_L < C_E - C_B$, а сумма $\Psi_E + k_0\Psi_S < 1$ всегда, так как для подавляющего большинства литейных сплавов $k_0 < 1$). Отношение $\mu_L/\mu_S = 1$ только в одном случае — при $C_0 = C_E$, так как $\Delta C_L = C_E - C_B$, $\Psi_S = 0$ и $\Psi_E = 1$. Следовательно, для чистой эвтектики $\mu_L = \mu_S = \mu_E$, при этом $\mu_E = \infty$ (см. рис. 23, *г*: угол наклона прямой Ψ_E к оси абсцисс равен $\pi/2$, тангенс его равен бесконечности).

Суммируя результаты анализа экспериментального исследования процесса затвердевания отливки из сплава алюминия с 7% Si и схемы диаграммы состояния для сплавов, содержащих эвтектику, можно сделать вывод, что математическое описание процесса возможно системой уравнений и условий (17)—(19). Необходимо лишь условие равенства тепловых потоков на фронте конца кристаллизации в двухфазной зоне заменить дифференциальным уравнением (20) затвердевания, положив в нем фиксированные значения для Ψ $(\varkappa_3, t)$, т. е.

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(\varkappa_3, t)}{\partial x} + L_E \rho_3 \left[1 - \Psi(\varkappa_3, t)\right] U = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(\varkappa_3, t)}{\partial x}, \tag{23}$$

где

$$\Psi(\varkappa_3,\ t)=\begin{cases}1, & \text{если } 0<C_0<C_B.\\ 1-\Psi_E, & \text{если } C_B<C_0<C_E;\\ 0, & \text{если } C_0=C_E.\end{cases}$$

Заметим, что в первом случае получается первое условие из (18), т. е. условие затвердевания твердого раствора; в последнем случае получается уравнение (3), т. е. условие затвердевания чистой эвтектики, так как при $T_L - T_E = 0$, $\varkappa_2 = \varkappa_3$ и $\Psi = \Psi_S = 0$.

Итак, система уравнений и условий (17)—(19), если в ней условие равенства тепловых потоков на фронте конца кристаллизации в двухфазной зоне заменить уравнением (23), позволяет дать математическое описание всем рассмотренным выше схемам процессов затвердевания отливок из чистых металлов, эвтектических сплавов, твердых растворов и сплавов, содержащих эвтектику. Эта система является основой для построения математических моделей процессов затвердевания расплавов литейных сплавов в конкретных условиях реальной технологии литья.

Глава 9. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВОК

Построение математических моделей процессов затвердевания отливок на основе системы (17)—(19) требует знаний условий теплообмена затвердевающего расплава с литейной формой, т. е. граничных условий для системы (17)—(19). Пока они представлены в виде соотношений (5), в которых функции $q_0(t)$ и $T_0(t)$ предполагались известными. Сейчас нам предстоит либо найти их в явном виде, либо указать способ их нахождения для той или иной конкретной технологии литья.

36. ТЕПЛОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОТЛИВКИ И ФОРМЫ

Выяснение граничных условий для затвердевающего расплава литейных сплавов в конкретной литейной форме является важнейшей задачей тепловой теории формирования отливки. Решается она на основе тщательного анализа результатов экспериментального исследования теплового взаимодействия отливки и формы.

На рис. 25 приведены схемы температурных полей в плоской отливке $T_3(x,\ t)$ (аналогичной рассмотренной в предыдущей главе) и в форме $T_4(x,\ t)$, зафиксированных в эксперименте для различных способов литья в момент окончания процесса затвердевания.

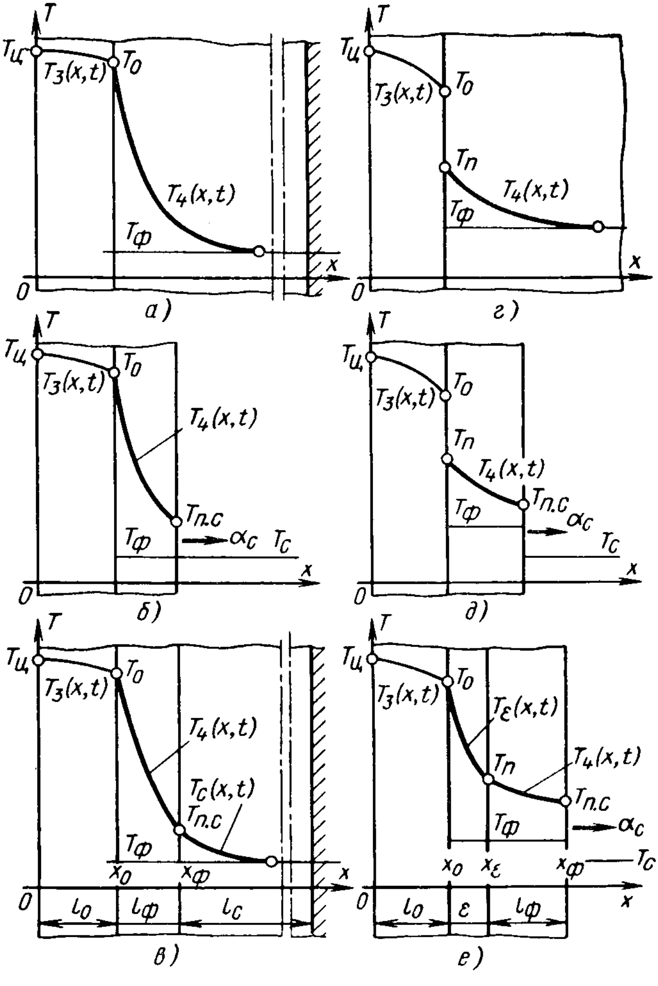


Рис. 25. Схемы температурных полей в отливке и форме:

а — литье в массивную неохлаждаемую сухую форму; *б* — в оболочковую форму; *в* — в оболочковую форму с засыпкой стальной дробью; *г* — в массивную неохлаждаемую металлическую форму; *д* — в кокиль; *е* — в металлическую футерованную (металлокерамическую) форму

Первые три схемы (рис. 25, *а*, *б* и *в*) относятся к литью в песчаные формы.

Схема *а* иллюстрирует температурные поля для литья в сухую песчаную форму, полученную, например, уплотнением формовочной смеси в опоках и затем высушенную в сушиле. Форма в данном случае не прогрелась насквозь (т. е. до стенки опоки) к моменту окончания процесса затвердевания отливки. Следовательно, в течение процесса затвердевания эту форму можно рассматривать как полуограниченное тело. Условимся такую форму называть *массивной неохлаждаемой*[1].

Схема *б* на рис. 25 отражает распределение температуры в отливке и в оболочковой песчаной форме. К моменту завершения процесса затвердевания форма прогрелась насквозь. Температура T_{0c} на наружной поверхности формы поднялась выше окружающей среды. И если эта окружающая среда — воздух, то форма, нагреваясь теплотой затвердевающей отливки, одновременно охлаждается в результате конвекции воздуха около ее наружной поверхности. Такую форму условимся называть *охлаждаемой* или *тонкостенной*.

Случай литья в оболочковую форму, которая укреплена сухим песком или чугунной дробью, представлен на схеме *в* (рис. 25). Оболочковая форма с наружной поверхности также охлаждается в окружающую среду. Но в качестве окружающей среды здесь выступает засыпка из песка или дроби. Если она находится в плотном контакте с оболочкой и за время затвердевания отливки не прогревается до стенки короба или контейнера, то можно принять, что оболочка будет охлаждаться только за счет теплоаккумуляции засыпки, которую допустимо рассматривать как полуограниченное тело. По существу оболочковую форму и в этом случае следует рассматривать как тонкостенную. Но так как засыпка из песка или дроби является как бы продолжением формы, ее вторым слоем, то такую форму называют *двухслойной неохлаждаемой*.

Следовательно, песчаная форма может быть массивной неохлаждаемой (обычная сухая форма[2] в опоках), тонкостенной (оболочковая форма или полый стержень) и двухслойной (оболочковая форма с засыпкой). В этом смысле они различаются условиями теплового взаимодействия с воздушной окружающей средой: в первом и третьем случаях форма во время затвердевания отливки не отдает теплоту в воздух, во втором случае теплоотдача в воздух есть. Объединяют же их в одну группу условия теплового взаимодействия с отливкой. Как вытекает из схем на рис. 25, для песчаных форм характерно то, что температура поверхности отливки и температура внутренней поверхности формы одинаковы и равны T_0. Она, естественно, изменяется во время затвердевания отливки. Закон ее изменения со временем, конечно, разный для различных типов песчаной формы.

Оставшиеся три схемы на рис. 25 (схемы *г*, *д* и *е*) относятся к литью в металлические формы.

Схема *г* иллюстрирует температурные поля в случае литья в массивную неохлаждаемую форму. Примерами такой формы могут быть кокиль, когда за время затвердевания тонкостенной

---

[1] Далее будет дано более точное определение массивной неохлаждаемой формы.

[2] Сюда же относятся и сырая форма и формы из песчано-смоляной смеси (см. приложение VII).

отливки он не прогревается насквозь, и пресс-форма при литье под давлением. Второй пример является наиболее типичным для ситуации, изображенной на рис. 25, *г*.

Схема *д* отражает распределение температуры в отливке и в обычном, чаще всего применяемом на практике, кокиле. В соответствии с логикой предыдущего его необходимо назвать тонкостенным или охлаждаемым.

Следовательно, металлическая форма, как и песчаная, может быть массивной неохлаждаемой (пресс-форма для литья под давлением) и тонкостенной (кокиль). Как и в случае песчаной формы, их различают условия теплового вазаимодействия с окружающей охлаждающей средой (так как при литье в кокиль окружающей средой может быть не только воздух, но вода, паровоздушная смесь и т. п.). Объединяют их в одну группу, по-прежнему, условия теплового взаимодействия с отливкой: для рассмотренных вариантов (рис. 25, *г* и *д*) металлических форм температура T_0 поверхности отливки отличается от температуры $T_п$ внутренней поверхности формы. Условия, естественно, изменяются во время затвердевания отливки. Закон их изменения, как и в случаях литья в песчаные формы, зависит от типа металлических форм.

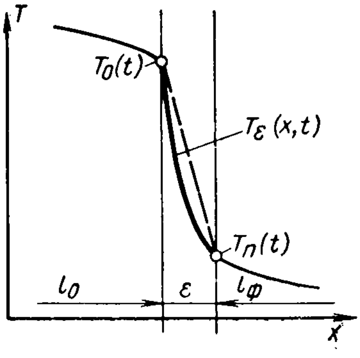
Таким образом, возможность представить тепловое взаимодействие отливки и формы граничным условием I рода исключена, так как функция $T_0(t)$ не известна ни для одного из рассмотренных способов литья. Заметим, что рассмотрены наиболее широко применяемые в производстве способы: литье в песчаные формы, в оболочковые формы, в кокиль и под давлением. К этому перечню можно добавить и литье в формы, изготовленные по выплавляемым моделям: схема *в* на рис. 25 соответствует литью в керамические оболочки с засыпкой, а схема *б* — без засыпки их песком.

Остается только один путь описания теплового взаимодействия отливки и формы — это граничные условия IV рода, т. е. для металлической и песчаной форм:

$$q_0(t) = -\lambda_е \frac{\partial T_е(x_0,\ t)}{\partial x}; \quad q_0(t) = -\lambda_4 \frac{\partial T_4(x_0,\ t)}{\partial x}. \tag{24}$$

Однако, на первый взгляд, он пригоден лишь для литья в песчаные формы, у которых образуется достаточно плотный контакт внутренней поверхности с отливкой. Об этом свидетельствует зафиксированный в эксперименте и отраженный на схемах *а*—*в* (рис. 25) факт: одинаковая температура поверхности отливки и внутренней поверхности формы. Еще одним доводом, подтверждающим образование плотного контакта между отливкой и песчаной формой, может служить широко известный факт возникновения пригара на поверхности отливки. Читатель, конечно, помнит и о тех трудностях, которые приходится преодолевать во время очистки стальных отливок от остатков керамики при литье по выплавляемым моделям.

Рис. 26. Схема распределения температуры $T_\varepsilon(x, t)$ по сечению слоя кокильной краски



Гораздо сложнее использование граничного условия IV рода для описания теплового взаимодействия отливки и металлической формы. На первый взгляд, это невозможно, так как разница температур поверхности отливки и внутренней поверхности формы говорит об отсутствии плотного контакта между ними. Но если вспомнить, что внутренняя поверхность металлической формы покрыта теплоизоляционной краской (например, при литье в кокиль) или смазкой (например, при литье под давлением), то все становится на свои места. Дело в том, что в эксперименте термопару заделывают в форму так, чтобы измерить температуру $T_п$ возможно ближе к внутренней поверхности этой формы. Аналогично, при измерении температуры T_0 термопару устанавливают возможно ближе к поверхности отливки. Слой краски на поверхности кокиля весьма тонкий, он редко бывает больше 0,5 мм. Поэтому при графическом представлении температурных полей в отливке и в форме толщина краски кокиля (а тем более толщина смазки пресс-формы) не учитывается (см. рис. 25, *г* и *д*), и создается впечатление о существовании необъяснимого температурного напора $T_0 — T_п$.

На эту деталь впервые обратил внимание А. И. Вейник [2]. Он рассмотрел систему отливка—краска—форма, предположив, что по сечению краски температура распределена так, как показано на рис. 26, на котором в увеличенном масштабе изображена схема контакта отливки и внутренней поверхности металлической формы с нанесенным на нее слоем ε теплоизоляционной краски. Такое предположение объясняет возникновение температурного напора на границе контакта (так как краска является большим термическим сопротивлением в системе отливка—форма, то разница $T_0 — T_п$ есть по существу температурный перепад по сечению слоя краски) и, следовательно, позволяет использовать граничное условие IV рода для описания теплового взаимодействия отливки и металлической формы.

Более того, это предположение позволяет включить в группу способов литья в металлическую форму еще и способ литья в металлическую форму с нанесенной на ее поверхность песчаной футеровкой (например, из песчано-смоляных смесей), т. е. способ литья, который чаще называют литьем в металлокерамические формы. Действительно, стоит сравнить схемы на рис. 26 и 25, *е*, для того чтобы уяснить, что с точки зрения условий теплового взаимодействия с отливкой металлические формы, окрашенные (или покрытые смазкой) изнутри, и металлокерамические формы идентичны. Они будут различаться только толщиной ε покрытия, его теплофизическими свойствами и, естественно, способами нанесения на форму. Следуя логике предыдущего анализа песчаных форм, металлокерамическую форму можно назвать двухслойной охлаждаемой формой. Один слой, прилежащий к отливке, — неметаллический, второй — металлический, который за время ее затвердевания прогревается насквозь и с внешней поверхности охлаждается в окружающий воздух.

Таким образом, тепловое взаимодействие отливки и формы для всех способов литья, имеющих широкое распространение на практике, возможно выразить граничными условиями IV рода в соответствии с (24). Однако оно требует знания величины градиента температурного поля в форме у поверхности контакта с отливкой. Для определения этого градиента необходимо решить краевую задачу на прогрев формы теплотой затвердевающей отливки.

37. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СХЕМ ПРОГРЕВА ЛИТЕЙНЫХ ФОРМ

Так же как и при математическом описании схем процесса затвердевания отливок из различных сплавов, и здесь хотелось бы найти единую систему уравнений и условий. Для этого есть основания. Во-первых, тепловое взаимодействие отливки с любой из рассмотренных выше форм выражается граничным условием IV рода. Во-вторых, при соответствующей формализации схема *е* на рис. 25 охватывает все предыдущие схемы.

Сравним схемы *в* и *е*. На них изображены температурные поля двухслойных форм. Различие между ними лишь в условиях теплового взаимодействия с окружающим воздухом: двухслойная форма на схеме *в* является неохлаждаемой. С этой позиции схема *е* более универсальна. Стоит предположить, что протяженность $l_ф$ формы бесконечно велика, и схема *е* превращается в схему *в*. Однако, далее, при толщине ε теплоизоляционного покрытия, весьма малой по сравнению с размером отливки, схема *е* становится идентичной схеме *д*. При одновременном предположении того и другого схема *е* становится схемой *г*. Наконец, полагая $l_ф = 0$, из схемы *е* получается схема *б*, и при $l_ф = 0$ и бесконечно большой толщине ε схема *е* превращается в схему *а*.

Исходя из аналогичных рассуждений, А. И. Вейник построил свою классификацию литейных форм для создания приближенных расчетов затвердевания отливки ([4], с. 41).

По А. И. Вейнику:

при $\frac{\varepsilon}{l_0} \gg 1$ и $\frac{l_ф}{l_0} = 0$ — массивная неохлаждаемая песчаная форма (схема *а* на рис. 25);

при $\frac{\varepsilon}{l_0} \ll 1$ и $\frac{l_ф}{l_0} \ll 1$ — тонкостенный кокиль (схема *д* на рис. 25);

при $\frac{\varepsilon}{l_0} \ll 1$ и $\frac{l_ф}{l_0} \approx 1$ — массивный охлаждаемый кокиль;

при $\frac{\varepsilon}{l_0} \approx 1$ и $\frac{l_ф}{l_0} \approx 1$ — двухслойная металлокерамическая форма (схема *е* на рис. 25).

Разумеется, что эта классификация неполная. Она, например, не охватывает металлическую массивную неохлаждаемую форму (схема *г* на рис. 25), оболочковую форму на схеме *б* и оболочковую форму с засыпкой (схема *в*). Классификацию, конечно, можно развить далее:

при $\frac{\varepsilon}{l_0} \ll 1$ и $\frac{l_ф}{l_0} \gg 1$ — металлическая массивная неохлаждаемая форма (схема *г*)

при $\frac{\varepsilon}{l_0} \approx 1$ и $\frac{l_ф}{l_0} = 0$ — оболочковая форма без засыпки (схема *б*);

при $\frac{\varepsilon}{l_0} \approx 1$ и $\frac{l_ф}{l_0} \gg 1$ — оболочковая форма с засыпкой (схема *в*).

Однако, как уже ясно читателю, эта классификация приводит к терминологическим неувязкам. Дело в том, что неметаллический слой толщиной ε был рассмотрен как слой, наносимый на форму. Такое представление исходит от практики литья в кокиль или под давлением, где на металлическую форму, уже имеющую необходимые конфигурацию и размеры, наносят слой краски и смазки. Металлокерамическая (двухслойная) форма на схеме *е* в этом смысле уже отличается от металлической. Футеровка, которую наносят на внутреннюю поверхность формы, намного толще слоя кокильной краски (она уже соизмерима с толщиной отливки: $\frac{\varepsilon}{l_0} \approx 1$) и необходимые конфигурацию и размеры придают уже футеровке, а не металлической форме. Металлическая же форма (по существу — каркас, жакет и т. п.) имеет лишь приближенные конфигурацию и размеры внутренней поверхности. Возникает вопрос, что в данном случае называть формой — неметаллическую футеровку, которая с точки зрения изложенного анализа теплового взаимодействия с отливкой является просто толстой краской, или металлический каркас, на который наносят футеровку. Формой был назван металлический каркас, и таким образом в классификации А. И. Вейника охвачены случаи, изображенные на схемах *г*—*е* рис. 25.

Выше сравнение схем *е* и *в* (рис. 25) привело нас к выводу, что их различают лишь условия взаимодействия с окружающим воздухом: на схеме *в* форма неохлаждаемая, если засыпку песчаной оболочки из песка или дроби рассматривать как форму, а оболочку — как футеровку. Но при описании схемы *в* формой названа сама оболочка (см. с. 129), и температурное поле в ней обозначено через T_4 $(x,\ t)$; засыпка из песка или дроби названа окружающей средой, и температурное поле в ней обозначено через $T_с$ $(x,\ t)$. Это название — оболочковая форма — принято в технологии и широко распространено на практике, ибо иначе ее и не назовешь, особенно в случае схемы *б* на рис. 25. Но, следуя классификации А. И. Вейника, оболочковая форма без засыпки (схема *б*) — неметаллический слой формы, соизмеримый по толщине с сечением отливки, а сама форма при этом отсутствует $\left(\frac{\varepsilon}{l_0} \approx 1;\ \frac{l_ф}{l_0} = 0\right)$.

Еще более непривычным образом представляется песчаная массивная форма: по классификации она — неметаллический слой бесконечной протяженности, сама форма отсутствует $\left(\frac{\varepsilon}{l_0} \gg 1;\ \frac{l_ф}{l_0} = 0\right)$.

Все сказанное, отнюдь, не порочит идеи классификации А. И. Вейника. Указанные терминологические неувязки — всего лишь результат принятой формализации элементов формы и способа анализа. Идея же рассмотренной классификации состоит в том, что из схемы *е*, являющейся наиболее универсальной, возможно, как частные случаи ее, получить все другие схемы, приведенные на рис. 25. Следовательно, если по схеме *е* составить систему дифференциальных уравнений теплопроводности и снабдить ее необходимыми краевыми условиями, то получится математическое описание всех рассмотренных схем нагрева литейных форм.

Вот эта система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} &= a_\varepsilon \frac{\partial^2 T_\varepsilon}{\partial x^2}; \quad x_0 < x < x_\varepsilon; \\ \frac{\partial T_4}{\partial t} &= a_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2}; \quad x_\varepsilon < x < x_ф; \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$q_0(t) = -\lambda_\varepsilon \frac{\partial T_\varepsilon(x_0,\ t)}{\partial x}; \qquad T_з(x_0,\ t) = T_\varepsilon(x_0,\ t); \tag{26}$$

$$-\lambda_\varepsilon \frac{\partial T_\varepsilon(x_\varepsilon,\ t)}{\partial x} = -\lambda_4 \frac{\partial T_4(x_\varepsilon,\ t)}{\partial x}; \qquad T_\varepsilon(x_\varepsilon,\ t) = T_4(x_\varepsilon,\ t); \tag{27}$$

$$-\lambda_4 \frac{\partial T_4(x_ф,\ t)}{\partial x} = \begin{cases} \alpha_с\,[T_4(x_ф,\ t) - T_с], \text{ если } x_ф \neq \infty; \\ 0 \text{ и } T_4(x_ф,\ t) = T_ф = \text{const}; \end{cases} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} T_\varepsilon(x,\ t_{зал}) &= T_н \varphi_\varepsilon(x); \\ T_4(x,\ t_{зал}) &= T_н \varphi_0(x), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где x_0, x_ε, $x_ф$ — координаты положения поверхности контакта отливки с первым слоем ε (футеровкой, краской и т. п.), этого слоя с формой и наружной поверхности формы с окружающей средой; $\varphi_\varepsilon(x)$ и $\varphi_0(x)$ — распределение относительной температуры в слое футеровки (краски) и в форме к моменту времени $t_{зал}$; $T_ф$ — начальная температура формы; остальные обозначения ясны из схемы *е* на рис. 25.

Система уравнений и условий (25)—(29) пригодна для описания теплового взаимодействия отливки с любой формой, изображенной на рис. 25, кроме, как мы увидим далее, схемы *в*. Действительно, эта система уравнений и условий описывает прогрев любой двухслойной формы: массивной или тонкостенной, охлаждающейся в окружающую среду по закону полной теплоотдачи. Так как формы на схемах *г* и *д* по существу двухслойные (краска + кокиль или смазка + пресс-форма), то система уравнений и условий (25)—(29) с очевидностью распространяется на схемы *г—е* (рис. 25). Если форма массивная неохлаждаемая, $x_ф = \infty$; если охлаждаемая, $x_ф \neq \infty$.

С не меньшей очевидностью система уравнений и условий (25)—(29) распространяется и на песчаные формы. В самом деле, песчаные формы, как правило, не имеют первого слоя ε. Если на внутреннюю поверхность формы и наносят краску (противопригарную или для диффузионного насыщения поверхности отливки легирующим элементом), то ее теплофизические свойства чаще всего не отличаются существенно от свойств самой формы. Поэтому для песчаных форм с большой определенностью можно принять $\varepsilon = 0$, т. е. $x_0 = x_\varepsilon$, и система уравнений и условий (25)—(29) упрощается: первое дифференциальное уравнение теплопроводности становится лишним (остается только одно — для формы); условия (26) и (27) объединяются в одно — в условие (24). Следовательно, если $\varepsilon = 0$ и $x_ф = \infty$, то форма песчаная массивная при $\varepsilon = 0$ и $x_ф \neq \infty$ — оболочковая форма без засыпки (схема *б*).

Читателю теперь понятно, что система (25)—(29) не может описать прогрев формы по схеме *в* на рис. 25. Не может потому, что система не предусматривает охлаждения формы в окружающую среду теплопроводностью. Возможно, естественно, учесть и такой вариант: требуется составить более полную систему, например, для трехслойной охлаждаемой в воздух формы. Но это рекомендуется читателю сделать *самостоятельно*. В дальнейших же построениях математических моделей процессов затвердевания отливок будем использовать систему (25)—(29).

38. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ

Построение математической модели затвердевания отливки уже не представляет труда. Необходимо лишь совместить систему уравнений и условий (17)—(19) с учетом (23) с системой (25)—(29):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \varkappa_1(t);\\
&\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{L_2 \rho_3}{c_2 \rho_2} \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \quad \varkappa_1(t) < x < \varkappa_3(t);\\
&\frac{\partial T_3}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2}; \quad \varkappa_3(t) < x < x_0;
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} = a_\varepsilon \frac{\partial^2 T_\varepsilon}{\partial x^2}; \quad x_0 < x < x_\varepsilon,\\
&\frac{\partial T_4}{\partial t} = a_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2}; \quad x_\varepsilon < x < x_ф;
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}
&T_1(x,\ t_{зал}) = T_н = \mathrm{const}; \quad \Psi(x,\ t_{зал}) = 0;\\
&\varkappa_1(t_{зал}) = x_0, \quad \varkappa_3(t_{зал}) = x_0;
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}
&T_\varepsilon(x,\ t_{зал}) = T_н \varphi_\varepsilon(x);\\
&T_4(x,\ t_{зал}) = T_н \varphi_0(x);
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\Psi = \Psi(T_2(x,\ t));$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(\varkappa_1,\ t)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(\varkappa_1\ t)}{\partial x}; \quad T_1(\varkappa_1,\ t) = T_2(\varkappa_2,\ t) = T_L; \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\lambda_2 \frac{\partial T_2(\varkappa_3,\ t)}{\partial x} - L_E \rho_3 [1 - \Psi(\varkappa_3,\ t)] \frac{d\varkappa_3}{dt} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(\varkappa_3,\ t)}{\partial x};\\
&\Psi(\varkappa_3,\ t) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 < C_0 < C_B;\\ 1 - \Psi_E, \text{ если } C_B < C_0 < C_E;\\ 0, \text{ если } C_0 = C_E; \end{cases}\\
&T_2(\varkappa_3\ t) = T_3(\varkappa_3,\ t) = T_E;
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\lambda_i \frac{\partial T_i(x_0,\ t)}{\partial x} = -\lambda_\varepsilon \frac{\partial T_\varepsilon(x_0,\ t)}{\partial x}; \quad T_i(x_0, t) = T_\varepsilon(x_0,\ t);\\
&\frac{\partial T_i(0,\ t)}{\partial x} = 0; \quad i = 1, 2 \text{ и } 3;\\
&-\lambda_\varepsilon \frac{\partial T_\varepsilon(x_\varepsilon,\ t)}{\partial x} = -\lambda_4 \frac{\partial T_4(x_\varepsilon,\ t)}{\partial x}; \quad T_\varepsilon(x_\varepsilon,\ t) = T_4(x_\varepsilon,\ t);\\
&-\lambda_4 \frac{\partial T_4(x_ф,\ t)}{\partial x} = \begin{cases} \alpha_с [T_4(x_ф,\ t) - T_с], \text{ если } x_ф \neq \infty;\\ 0 \text{ и } T_4(x_ф,\ t) = T_ф, \text{ если } x_ф = \infty. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Хотя системе уравнений и условий (30)—(36) и придана определенная универсальность и по типам литейных сплавов, и по характеру теплового взаимодействия затвердевающей отливки с формой, ее все же не следует считать общей. Прежде всего потому, что она составлена для отливки в виде неограниченной плиты; затем потому, что она охватывает лишь бинарные сплавы, каких в практике литья мало; наконец, потому, что мы не учли возможности затвердевания отливки в форме по схеме *в* на рис. 25; более того, на рис. 25 не отражены многие способы литья, реже, но используемые на практике.

По перечисленным причинам систему (30)—(36) не следует рассматривать как краевую задачу на затвердевание отливок, подлежащую решению. Да и решение задачи из-за конкретных сложностей, заложенных в ее формулировку, представляет чрезвычайные математические трудности, даже при использовании современных вычислительных средств. Поэтому назначение системы (30)—(36) — не более чем *математическая модель*, в которой нашли отражение *главные* черты процессов затвердевания реальных отливок, установленные на основе анализа прямых экспериментов. С помощью этой математической модели возможен анализ и приближенные расчеты процессов затвердевания отливок для ряда частных случаев литейных сплавов и способов литья, чаще других применяемых на практике. Но такой анализ и в дальнейшем приближенные расчеты будут наиболее плодотворны, если математическую модель (30)—(36) представить в обобщенных переменных.

39. ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Воспользуемся методом теории подобия. Важный вопрос—выбор характерных значений переменных (температуры и размера взаимодействующих между собой тел). Так как объектом исследования тепловой теории формирования отливки является затвердевающая отливка, то в качестве характерного значения температуры целесообразно назначить избыточную температуру $\vartheta_L = T_L - T_c$ начала кристаллизации сплава, а в качестве характерного размера — половину толщины плоской отливки l_0. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta_1}{\partial\tau} = \mathrm{K}_{a_1}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial X^2}; \quad 0 < X < \chi_1(\tau);\\
&\frac{\partial\Theta_2}{\partial\tau} = \mathrm{K}_{a_2}\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial X^2} + \frac{\mathscr{L}_2}{\mathrm{K}_{c_2}\mathrm{K}_{\rho_2}}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}; \quad \chi_1(\tau) < X < \chi_3(\tau);\\
&\frac{\partial\Theta_3}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Theta_3}{\partial X^2}; \quad \chi_3(\tau) < X < 1;
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta_\varepsilon}{\partial\tau} = \mathrm{K}_{a_\varepsilon}\frac{\partial^2\Theta_\varepsilon}{\partial X^2}; \quad 1 < X < \left(1 + \frac{\varepsilon}{l_0}\right);\\
&\frac{\partial\Theta_4}{\partial\tau} = \mathrm{K}_{a_4}\frac{\partial^2\Theta_4}{\partial X^2}; \quad \left(1 + \frac{\varepsilon}{l_0}\right) < X < \left(1 + \frac{\varepsilon}{l_0} + \frac{l_ф}{l_0}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где $\Theta_i = \frac{T_i - T_c}{T_L - T_c}$ — относительная температура или температурный фактор (i = 1, 2, 3, ε и 4); $X = x/l_0$ — относительная координата; $\chi_1 \equiv \frac{\varkappa_1}{l_0}$ и $\chi_3 \equiv \frac{\varkappa_3}{l_0}$ — относительные координаты положения фронтов начала и конца кристаллизации сплава; $\mathrm{K}_{c_2} \equiv$

$\equiv \frac{c_2}{c_3}$; $K_{\rho_2} \equiv \frac{\rho_2}{\rho_3}$ — относительные теплоемкость и плотность двухфазной зоны затвердевающей отливки; $K_{a_i} \equiv \frac{a_i}{a_3}$ — относительный коэффициент температуропроводности всех тел системы отливка — форма ($i = 1, 2, 3, \varepsilon$ и 4); $\tau \equiv \frac{a_3 t}{l_0^2}$ — число Фурье; $\mathcal{L}_2$ — относительная теплота кристаллизации сплава или число фазового перехода в интервале $T_L - T_S$:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{L_2}{c_3(T_L - T_{\text{c}})} .$$

Это новый критерий подобия процессов затвердевания. Он выявлен в результате приложения метода обобщенных переменных к системе (30) дифференциальных уравнений теплопроводности. Критерий $\mathcal{L}_2$ важен для характеристики процессов, сопровождающихся изменением агрегатного состояния вещества или фазовыми превращениями в нем.

Несколько слов о роли параметрического критерия K_{a_i} ($i = 1, 2, 3, \varepsilon$ и 4). Он построен в виде отношения коэффициента температуропроводности всех тел, участвующих в процессе теплообмена, к коэффициенту температуропроводности твердой отливки. Такой выбор сделан в связи с тем, что объект исследования — отливка. Критерий K_{a_i} как относительный коэффициент температуропроводности по своей величине может быть больше или меньше единицы; единице он равен только для твердой отливки.

Читатель, конечно, помнит, что коэффициент температуропроводности характеризует теплоинерционные свойства тела и является мерой скорости выравнивания температурного поля, т. е. уменьшения его неоднородности. Поэтому критерий K_{a_i} — мера скорости уменьшения неоднородности температурного поля в любом из взаимодействующих тел по сравнению со скоростью уменьшения неоднородности поля в твердой отливке. Если $K_{a_i} < 1$, то во всех взаимодействующих телах неоднородность поля будет больше по сравнению с неоднородностью поля в твердой отливке; при $K_{a_i} > 1$ — наоборот.

В дальнейшем критерий K_{a_i} будет использован именно в этом смысле для построения приближенных математических моделей затвердевания отливок конкретно в той или иной форме[1].

Теперь используем метод обобщенных переменных к условиям (32)—(36):

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_1(X, \mathrm{Fo}_0) = \Theta_{\text{н}} = \mathrm{const}; \quad \Psi = (X, \mathrm{Fo}_0) = 0; \\ \chi_1(\mathrm{Fo}_0) = 1, \quad \chi_3(\mathrm{Fo}_0) = 1; \end{array}\right\} \qquad (39)$$

---

[1] Смысл и назначение критериев K_{c_2} и K_{ρ_2} очевидны и не требуют пояснений. Заметим лишь, что для подавляющего большинства литейных сплавов они близки к единице (см. приложения VI и VII).

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_\varepsilon(X,\ \mathrm{Fo}_0)=\Theta_\text{н}\varphi_\varepsilon(X);\\&\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_0)=\Theta_\text{н}\varphi_0(X);\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\mathrm{K}_{\lambda_1}\frac{\partial\Theta_1(\chi_1\ \tau)}{\partial X}=-\mathrm{K}_{\lambda_2}\frac{\partial\Theta_2(\chi_1,\ \tau)}{\partial X};\\&\Theta_1(\chi_1,\ \tau)=\Theta_2(\chi_1,\ \tau)=1;\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\mathrm{K}_{\lambda_2}\frac{\partial\Theta_2(\chi_3,\ \tau)}{\partial X}-\mathscr{L}_E\left[1-\Psi(\chi_3,\ \tau)\right]\frac{d\chi_3}{d\tau}=-\frac{\partial\Theta_3(\chi_3,\ \tau)}{\partial X};\\&\Psi(\chi_3,\ \tau)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ 0<C_0<C_B;\\1-\Psi_E,\quad\text{если}\ C_B<C_0<C_E;\\0,\ \text{если}\ C_0=C_E;\end{cases}\\&\Theta_2(\chi_3,\tau)=\Theta_3(\chi_3,\ \tau)=\Theta_E;\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\mathrm{K}_{\lambda_i}\frac{\partial\Theta_i(1,\ \tau)}{\partial X}=-\mathrm{K}_{\lambda_\varepsilon}\frac{\partial\Theta_\varepsilon(1,\ \tau)}{\partial X};\quad\frac{\partial\Theta_i(0,\ \tau)}{\partial X}=0;\\&\Theta_i(1,\ \tau)=\Theta_\varepsilon(1,\ \tau);\quad i=1,\ 2,\ 3;\\&-\mathrm{K}_{\lambda_\varepsilon}\frac{\partial\Theta_\varepsilon\left(1+\frac{\varepsilon}{l_0},\ \tau\right)}{\partial X}=-\mathrm{K}_{\lambda_4}\frac{\partial\Theta_4\left(1+\frac{\varepsilon}{l_0},\ \tau\right)}{\partial X};\\&\Theta_\varepsilon\left(1+\frac{\varepsilon}{l_0},\ \tau\right)=\Theta_4\left(1+\frac{\varepsilon}{l_0},\ \tau\right);\\&-\frac{\partial\Theta_4\left(1+\frac{\varepsilon}{l_0}+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\ \tau\right)}{\partial X}=\\&=\begin{cases}\frac{l_0}{l_\text{ф}}\mathrm{Bi}_\text{c}\Theta_4\left(1+\frac{\varepsilon}{l_0}+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\ \tau\right),\ \text{если}\ \frac{\varepsilon}{l_0}+\frac{l_\text{ф}}{l_0}\neq\infty;\\0\ \text{и}\ \Theta_4\left(1+\frac{\varepsilon}{l_0}+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\ \tau\right)=0,\ \text{если}\ \frac{\varepsilon}{l_0}+\frac{l_\text{ф}}{l_0}=\infty,\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

где $\mathrm{K}_{\lambda_i}=\lambda_i/\lambda_3$ — относительный коэффициент теплопроводности ($i=1,2,3,\varepsilon,4$); $\mathrm{Bi}_\text{c}=\frac{\alpha_\text{c}}{\lambda_4}l_\text{ф}$ — критерий Био, характеризующий интенсивность теплоотдачи с внешней поверхности формы в окружающую среду (в воздух, например);

$$\mathrm{Fo}_0\equiv\frac{a_3t_\text{зал}}{l_0^2}\ —\tag{44}$$

критерий Фурье — относительное время заполнения (заливки) формы.

Помимо уже известных относительных переменных, параметров и критериев подобия, получен новый критерий — *критерий Фурье*. По своей структуре он аналогичен числу Фурье τ. Отличие состоит в том, что в состав Fo входит не независимая переменная

t — время, а заданное в начальных условиях значение момента времени $t_{зал}$ начала процесса затвердевания отливки.

Смысл параметрического критерия $К_{\lambda_i}$ понятен из его структуры, и читатель самостоятельно может сделать выводы о его назначении для анализа процессов затвердевания отливки.

Специально отметим следующее. Приложение метода обобщенных переменных к системе уравнений (31) теплопроводности и условиям (36), описывающим процесс прогрева формы отливкой, позволяет, как это ясно читателю, автоматически установить те параметрические критерии, с помощью которых А. И. Вейник построил свою классификацию литейных форм. Речь идет об отношениях ε/l_0 и $l_ф/l_0$. Теперь, основываясь на анализе системы уравнений (38) теплопроводности и условий (43), записанных в обобщенных переменных и критериях подобия, дадим другую классификацию литейных форм, непротиворечивую в терминологическом смысле. Очевидно, что

при $\frac{\varepsilon}{l_0}=0$ и $\frac{l_ф}{l_0}\gg 1$ — массивная неохлаждаемая песчаная форма (схема *а* на рис. 25);

при $\frac{\varepsilon}{l_0}=0$ и $\frac{l_ф}{l_0}\approx 1$ — оболочковая форма без засыпки ее песком или дробью (схема *б*);

при $\frac{\varepsilon}{l_0}\ll 1$ и $\frac{l_ф}{l_0}\gg 1$ — массивная неохлаждаемая металлическая форма (схема *г*);

при $\frac{\varepsilon}{l_0}\ll 1$ и $\frac{l_ф}{l_0}\approx 1$ — охлаждаемая металлическая форма (схема *д*);

при $\frac{\varepsilon}{l_0}\approx 1$ и $\frac{l_ф}{l_0}\approx 1$ — двухслойная (металлокерамическая) охлаждаемая форма (схема *е*).

Очевидно также, что в этой новой классификации удалось избежать и той искусственности, которая характерна для прежней: здесь форма называется формой, краска — краской и т. д. Новая классификация ограничена, например, потому, что в ней отсутствует оболочковая форма с засыпкой. Но эта форма, как мы уже отмечали, не учитывается системой (38) и условиями (43). Однако ее можно учесть, составив более полную систему уравнений и условий, или, наконец, допустив некоторую искусственность, рассмотреть вариант:

при $\frac{\varepsilon}{l_0}\approx 1$ и $\frac{l_ф}{l_0}\gg 1$ — массивная двухслойная неохлаждаемая (металлокерамическая) форма.

В дальнейшем будем широко использовать критерии ε/l_0 и $l_ф/l_0$ при построении приближенных математических моделей затвердевания отливки в той или иной конкретной форме (и, следовательно, для того или иного способа литья).

Таким образом, система уравнения и условий (37)—(43) является обобщенной математической моделью процессов затвердевания отливки, отражающей главные черты этих процессов. Она предназначена для общего анализа процесса в целом и для построения упрощенных моделей, пригодных для создания приближенных расчетов режимов тех или иных способов литья с целью получения отливок с заданными свойствами.

40. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ СПОСОБЫ ЛИТЬЯ

Для современного литейного производства характерно большое разнообразие видов и способов литья. При этом специализация способов литья в применении их к отдельным типам литых изделий является одной из ярких черт научно-технического прогресса литейного производства во всем мире.

Анализ данных отечественной и зарубежной практики убедительно показывает, что наиболее эффективным по производительности и экономичности оказывается тот способ литья, который лучше всех других соответствует специфике данного типа отливок (габаритные размеры, сложность конфигураций, литейный сплав) и требованиям к их качеству (точность размеров, качество поверхности, служебные свойства).

Неуклонное повышение требований, предъявляемых к качеству отливок и к производительности и экономичности процессов литья, привело к появлению, особенно в последние годы, значительного числа новых способов литья. Это — получение отливок в оболочковых формах, в формах, изготовленных по выплавляемым моделям, в формах, уплотненных прессованием под большим давлением. Это — литье вакуумным всасыванием, непрерывное литье в кристаллизатор и без кристаллизатора. Это — жидкая прокатка и жидкая штамповка; литье выжиманием жидкого металла, литье под низким давлением и много других.

Каждый из перечисленных способов литья имеет определенное назначение и, следовательно, может быть использован для определенной номенклатуры отливок. Выжиманием жидкого металла, например, возможно получить тонкостенные отливки крупногабаритных размеров панельного типа и типа оболочек; жидкой прокаткой — гладкие и профильные листы. Способ непрерывного литья может быть использован для получения прямолинейных профилей, труб и тому подобных изделий. Повышенные точность размеров отливок и качество их поверхности можно получить при литье в специальные формы (изготовленные по выплавляемым моделям, уплотненные под высоким давлением, в оболочковые формы, в пресс-формы при литье под давлением и т. п.), особенности изготовления, сборки и заполнения которых определяют номенклатуру отливок по типу конструкции, массе и роду сплава. Увеличить производительность труда, снизить себестоимость отливок и улучшить условия труда в литейных цехах возможно применением постоянных и полупостоянных форм, в частности за счет широкого применения металлических форм, особенности конструкции и эксплуатации которых также определяют тип отливок и род сплавов.

Такая специализация способов литья по назначению не только определяет тип отливок по конструкции, массе и роду сплава, но и позволяет успешно решить стоящие перед литейным производством задачи комплексной механизации и автоматизации. Действительно, практическое использование литья под давлением, в кокиль, выжиманием, вакуумным всасыванием и подобными способами, изготовление оболочковых форм, форм, уплотненных под высоким давлением и другими методами, требует создания специальных машин и автоматов, а включение этих способов литья в поток требует, следовательно, комплексной механизации и автоматизации производства в целом.

Совершенно ясно, что с течением времени таких способов литья, весьма эффективных при изготовлении определенного типа отливок, будет все больше и больше. Сейчас трудно указать возможные способы литья, однако, неизбежно, они должны быть развитием следующих основных видов литья: *литья в песчаные формы и литья в металлические формы.*

Первый вид литья наиболее *универсальный* и включает все способы изготовления разовых форм; специальными способами литья этого вида в изложенном выше смысле следует считать те, которые повышают точность размеров, качество поверхности и отливок. Второй вид не имеет такой универсальности, как первый, и поэтому является *особым* видом литья.

Для литья в металлические формы характерна высокая скорость охлаждения отливки. Эта особенность в сочетании с возможностью использовать давление во время заполнения формы (литье под давлением) и во время затвердевания отливок (штамповка из жидкого металла [1]) обеспечивает улучшение качества литого металла. Кроме того, высокая точность размеров и низкая шероховатость поверхности, достижимые при изготовлении металлических форм, позволяют получать отливки высоких точности размеров и качества поверхности, особенно при литье с применением давления и центробежном литье. Поэтому способы литья в металлические формы с применением давления являются *специальными способами.*

Намораживание как метод получения отливок можно осуществлять в металлических и неметаллических формах. Способы литья намораживанием наиболее рациональны и эффективны для получения весьма тонкостенных отливок типа оболочек и панелей. В этом смысле способы литья намораживанием — специальные способы литья. Это литье с выплеском, литье вакуумным всасыванием, окунанием; это литье выжиманием, жидкая штамповка, жидкая прокатка и др.

Способы литья намораживанием различны в зависимости от конфигурации и конструкции отливок. Однако для всех способов характерна одна общая черта процесса формирования отливок:

---

[1] По предложению П. Н. Бидули этот способ называется *прессованным литьем.*

последовательное затвердевание части расплава, залитого в форму. В этом смысле литье намораживанием — *особый* вид литья.

Таким образом, все многообразие способов литья сводится к двум видам: литье в песчаные и литье в металлические формы. Для построения основ теории литья в целом такого деления вполне достаточно, так как оно позволяет рассматривать главные стороны процесса формирования отливок в зависимости от условий ее теплообмена с неметаллической или металлической формой.

Для построения теории специальных способов литья необходимо, естественно, учитывать особенности, характерные для них. Это, однако, не может отразиться на принципиальных выводах общей теории.

41. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОБОБЩЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Итак, в современном литейном производстве все многообразие способов литья возможно представить двумя видами литья: в песчаные формы и в металлические. К такому, весьма важному для построения тепловой теории формирования отливки, выводу можно прийти и на основе полученной выше классификации форм (см. с. 140). Действительно, во всех случаях, когда $\frac{\varepsilon}{l_0} = 0$, речь может идти только о литье в песчаные формы; при $\frac{\varepsilon}{l_0} \ll 1$ — только о литье в металлические формы. Так как эта классификация является результатом анализа металлической модели (37)—(43), то для каждого вида литья возможно составить свою математическую модель затвердевания, которая, естественно, будет частным случаем модели (37)—(43).

Литье в песчаные формы

При $\varepsilon/l_0 = 0$ система дифференциальных уравнений (37) теплопроводности для отливки сохранится без изменений; из системы дифференциальных уравнений (38) теплопроводности остается только второе:

$$\frac{\partial \Theta_4}{\partial \tau} = \mathrm{K}_{a_4} \frac{\partial^2 \Theta_4}{\partial X^2}; \quad 1 < X < 1 + \frac{l_ф}{l_0}; \qquad (45)$$

начальное условие (39) для отливки сохранится, начальное условие (40) для формы примет вид

$$\Theta_4 (X, \mathrm{Fo}_0) = \Theta_н \varphi_0 (X); \qquad (46)$$

условия (41) и (42) теплового взаимодействия зон затвердевающей отливки не изменятся, а граничные условия (43) для отливки и формы упростятся:

$$-\mathrm{K}_{\lambda_i} \frac{\partial \Theta_i(1. \tau)}{\partial X} = -\mathrm{K}_{\lambda_4} \frac{\partial \Theta_4 (1, \tau)}{\partial X}; \quad \frac{\partial \Theta_i (0, \tau)}{\partial X} = 0; \qquad (47)$$

$$\Theta_i (1, \tau) = \Theta_4 (1, \tau); \; i = 1, 2, 3;$$

$$-\frac{\partial\Theta_4\left(1+\frac{l_{\text{ф}}}{l_0},\ \tau\right)}{\partial X}=\begin{cases}\frac{l_0}{l_{\text{ф}}}\,\mathrm{Bi}_{\text{с}}\,\Theta_4\left(1+\frac{l_{\text{ф}}}{l_0},\tau\right) \text{ если } \frac{l_{\text{ф}}}{l_0}\neq\infty;\\ 0 \text{ и } \Theta_4\left(1+\frac{l_{\text{ф}}}{l_0},\tau\right)=0, \text{ если } \frac{l_{\text{ф}}}{l_0}=\infty.\end{cases}\qquad(48)$$

Таким образом, математическая модель затвердевания отливок в песчаных формах представляется системой дифференциальных уравнений (37), (45) и условий (39), (46); (41), (42), (47) и (48).

В литературе известен один вариант этой математической модели. Он предложен немецким ученым С. Шварцем в 1931 г. для исследования процесса затвердевания слитка в изложнице в предположении, что между ними существует идеальный контакт. Конкретно С. Шварц рассмотрел затвердевание расплава, кристаллизующегося при постоянной температуре $T_{\text{кр}}$ в полуограниченном пространстве вследствие отвода теплоты в полуограниченную изложницу, в которую расплав залит мгновенно:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}=a_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2};\qquad \xi(t)<x<+\infty;$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t}=a_3\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2};\qquad 0<x<\xi(t);$$

$$\frac{\partial T_4}{\partial t}=a_4\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2};\qquad -\infty<x<0;$$

$$T_1(x;\ 0)=T_{\text{зал}}\equiv\mathrm{const};$$

$$T_4(x,\ 0)=T_{\text{ф}}\equiv\mathrm{const};$$

$$-\lambda_1\frac{\partial T_1(\xi,\ t)}{\partial x}+L\rho_3\frac{d\xi}{dt}=-\lambda_3\frac{\partial T_3(\xi,\ t)}{\partial x};$$

$$T_1(\xi,\ t)=T_3(\xi,\ t)=T_{\text{кр}}\equiv\mathrm{const};\qquad \xi(0)=0;$$

$$\frac{\partial T_1(\infty,\ t)}{\partial x}=0;\qquad T_1(\infty,\ t)=T_{\text{зал}}\equiv\mathrm{const};$$

$$-\lambda_i\frac{\partial T_i(0,\ t)}{\partial x}=-\lambda_4\frac{\partial T_4(0,\ t)}{\partial x};\qquad T_i(0,\ t)=T_4(0,\ t);\qquad i=1 \text{ и } 3;$$

$$\frac{\partial T_4(-\infty,\ t)}{\partial x}=0;\qquad T_4(-\infty,\ t)=T_{\text{ф}}\equiv\mathrm{const}.$$

Модель С. Шварца представлена в виде краевой задачи, для которой он впервые нашел точное решение. Мы предлагаем читателю решить ее самостоятельно. Она не намного сложнее задачи Д. Стефана, рекомендованной читателю в конце раздела I. И если читатель задачу Д. Стефана решил, то он без труда решит и эту.

При $\frac{\varepsilon}{l_0} \ll 1$ допустимы следующие соображения. Так как толщина краски, наносимой на внутреннюю поверхность кокиля, или смазки, которой покрывается внутренняя поверхность пресс-формы, весьма мала (как правило, доли миллиметра), то изменением теплосодержания слоя краски, т. е. кривизной распределения температуры по сечению слоя краски или смазки, возможно пренебречь. Если такое допущение принять, то вместо кривой $T_\varepsilon(x, t)$ на рис. 26 температурное поле по сечению слоя ε краски следует изобразить прямой, соединяющей точки $T_\varepsilon(x_0, t)$, x_0 и $T_\varepsilon(x_\varepsilon, t)$, x_ε (см. штриховую линию на рис. 26). Тогда необходимость в дифференциальном уравнении теплопроводности для Θ_ε в системе (38) отпадает — функция температурного поля может быть задана в виде

$$\Theta_\varepsilon(X, \tau) = \Theta_0(\tau) - \frac{l_0}{\varepsilon}[\Theta_0(\tau) - \Theta_{\text{п}}(\tau)](X - 1), \tag{49}$$

ибо $\frac{\varepsilon}{l_0} \ll 1$ и величиной $\frac{\varepsilon}{l_0}$ можно пренебречь. Следовательно, из системы (38) остается только второе дифференциальное уравнение, которое в силу $\frac{\varepsilon}{l_0} \ll 1$ возможно записать в форме (45). Далее с учетом выражения (49) упрощаются первое и третье из граничных условий (43):

$$-K_{\lambda_i}\frac{\partial\Theta_i(1, \tau)}{\partial X} = K_{\lambda_\varepsilon}\frac{\Theta_i(1, \tau) - \Theta_4(1, \tau)}{\frac{\varepsilon}{l_0}}; \quad i = 1,\ 2 \text{ и } 3;$$

$$K_{\lambda_\varepsilon}\frac{\Theta_i(1, \tau) - \Theta_4(1, \tau)}{\frac{\varepsilon}{l_0}} = -K_{\lambda_4}\frac{\partial\Theta_4(1, \tau)}{\partial X}; \quad i = 1,\ 2 \text{ и } 3.$$

Если отношение $\lambda_\varepsilon/\varepsilon$ обозначить через β, то

$$\beta \equiv \frac{\lambda_\varepsilon}{\varepsilon} \tag{50}$$

как *коэффициент тепловой проводимости* краски можно рассматривать в виде аналога коэффициента теплоотдачи от поверхности отливки к внутренней поверхности формы. При этом граничные условия IV рода формально превращаются в граничные условия III рода:

$$\left.\begin{aligned} -K_{\lambda_i}\frac{\partial\Theta_i(1, \tau)}{\partial X} &= \mathrm{Bi}_0[\Theta_i(1, \tau) - \Theta_4(1, \tau)]; \\ \frac{l_0}{l_{\text{ф}}}\mathrm{Bi}_{\text{ф}}[\Theta_i(1, \tau) - \Theta_4(1, \tau)] &= -\frac{\partial\Theta_4(1, \tau)}{\partial X}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

где $\mathrm{Bi}_0 \equiv \frac{\beta}{\lambda_3} l_0$ — критерий Био для отливки (характеризует относительную интенсивность охлаждения отливки через слой краски); $\mathrm{Bi}_{\text{ф}} \equiv \frac{\beta}{\lambda_4} l_{\text{ф}}$ — критерий Био для формы (характеризует относительную интенсивность нагревания формы отливкой через тот же слой краски).

Таким образом, математическая модель затвердевания отливок в металлических формах представляется системой дифференциальных уравнений (37), (45) и условий (39), (46), (41), (42), (51) и (48).

Переход к граничным условиям III рода значительно облегчает анализ процесса затвердевания отливки в металлических формах и в некоторых случаях позволяет найти удобные для приближенных расчетов упрощенные математические модели. В этом переходе, помимо отмеченного удобства, есть и другое не менее важное преимущество. Дело в том, что мы слишком схематизировали обстоятельства теплового взаимодействия отливки и металлической формы, приняв, что термическое сопротивление на поверхности их контакта обусловлено только теплоизоляционной краской для кокилей или смазкой для пресс-форм. В действительности все значительно сложнее. Слой пленки окисла, всегда присутствующего на поверхности металлических форм, также является термическим сопротивлением, которое складывается с термическим сопротивлением краски. Учесть величину термического сопротивления окисной пленки трудно, ибо, как правило, неизвестна ее толщина. Исключения составляют алюминиевые анодированные кокили, у которых слой Al_2O_3 создается преднамеренно операцией анодирования и толщина окисленного слоя контролируется.

Кроме термического сопротивления окислов на поверхности формы, к термическому сопротивлению краски прибавляется термическое сопротивление зазора, который неизбежно образуется между отливкой и формой. Он образуется из-за усадки отливки в процессе ее затвердевания и из-за увеличения размеров металлической формы вследствие ее нагрева теплотой отливки. Этот зазор заполняется газами, образующимися при выгорании летучих из краски или из смазки, и, конечно, воздухом, который попадает из окружающей среды. Он обладает, естественно, большим термическим сопротивлением. Учесть его также трудно и потому, что точно неизвестны состав газовоздушной смеси и ширина зазора; более того, ширина переменна в процессе затвердевания отливки[1].

Следовательно, то, что выше было названо коэффициентом β тепловой проводимости слоя краски, на самом деле является обратной величиной суммы термических сопротивлений краски, пленки окисла, газовоздушного зазора и всего того, что мы не учли и что оказывает сопротивление тепловому потоку на поверхности контакта отливки и формы. Выход из положения один: при-

---

[1] Метод расчета суммарного термического сопротивления краски, слоя окисла и газовоздушного зазора разработал А. И. Вейник. Читатель может ознакомиться с этим методом (см. [3], с. 63).

нять в качестве характеристики интенсивности теплообмена между отливкой и формой коэффициент β, рассматривая его как аналог коэффициента теплоотдачи, и договориться, что в дальнейшем будет найден несложный способ экспериментального определения коэффициента β для конкретных условий того или иного способа литья в металлическую форму.

Образование зазора между слитком и изложницей тщательно исследовал Г. П. Иванцов в 1953 г. Тогда же он изложил представления о тепловой проводимости β зазора и дал понятие о критерии Bi_0. Впервые задачу о теплообмене между отливкой и формой, разделенными слоем материала с низкой теплопроводностью, поставил (правда, приближенно) М. X. Лайтфут.

Граничные условия III рода для описания теплового взаимодействия отливки с металлической формой ввел А. И. Вейник в том же 1953 г., придав коэффициенту β смысл тепловой проводимости кокильной краски, и показал целесообразность оценки интенсивности этого взаимодействия критериями Bi_0 и $\mathrm{Bi}_ф$. Позже, в 1956 г., А. И. Вейник разработал теорию и метод экспериментального определения β.

Подводя итоги изложенному, можно заключить, что в результате анализа температурных полей затвердевающих отливок и температурных полей прогревающихся форм построена обобщенная математическая модель затвердевания. Она упрощена для двух видов литья, которые представляют все многообразие способов литья современного литейного производства с точки зрения целей и задач тепловой теории формирования отливки.

Тонкостенные отливки

Остался необсужденным еще один вопрос. Вопрос о том, насколько математическая модель, построенная для отливки в виде неограниченной плиты, может представлять все многообразие конфигураций машиностроительных отливок. На первый взгляд ответ ясный: плоских отливок очень мало. Но так ли это?

Сравним плоскую отливку (плиту) с простейшими неплоскими (полым бесконечным цилиндром и полым шаром, рис. 27).

Известно, что все поверхности, ограничивающие плиту, имеют радиус кривизны, равный бесконечной величине. Поэтому, если радиус кривизны боковых поверхностей плиты обозначить через r_0, то отношение $2l_0/r_0 = 0$. Следовательно, любую неплоскую отливку, у которой отношение толщины s ее тела к радиусу кривизны r_0 ее поверхности будет весьма малой величиной, можно приближенно рассматривать как плоскую, т. е. если

$$\frac{s}{r_0} \ll 1, \tag{52}$$

то отливка плоская.

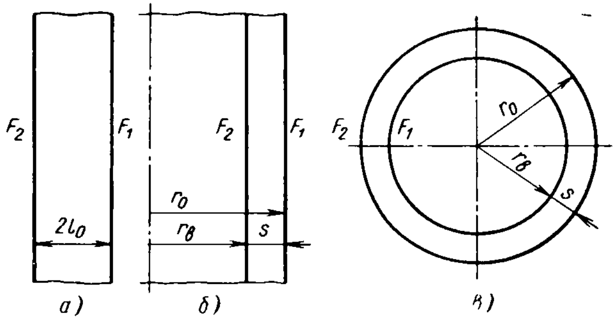


Рис. 27. Схемы для сравнения плоской, полой цилиндрической и полой сферической отливок

Теперь, на основе сравнения плиты (рис. 27, *а*) с полым цилиндром и полым шаром (рис. 27, *б* и *в*) оценим величину правой части неравенства (52).

Еще одно очевидное свойство плоской отливки в том, что у нее обе боковые поверхности F_1 и F_2 равны друг другу. Поэтому любую неплоскую отливку, у которой отношение

$$\frac{F_2}{F_1} \approx 1, \tag{53}$$

можно приближенно рассматривать как плоскую (обозначения ясны из рис. 27). Неравенство (52) и выражение (53) связаны между собой. Так, для полого цилиндра (втулки)

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 - \frac{s}{r_0};$$

для полого шара

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 - \frac{s}{r_0}\left(1 + \frac{r_{\text{в}}}{r_0}\right).$$

Допустим, что при приближенных расчетах затвердевания возможно пренебречь разницей, составляющей 10%, между площадями наружной F_1 и внутренней F_2 поверхностей тела отливки. Другими словами, примем, что при $F_2/F_1 = 0{,}9$ величина $F_1 \approx F_2$. Тогда для полого цилиндра $s/r_0 = 0{,}1$, а для полого шара $s/r_0 = 0{,}05$. Следовательно, можно условиться, что при

$$\frac{s}{r_0} < 0{,}1 \tag{54}$$

отливки тонкостенные, и в расчетах затвердевания они являются плоскими[1].

Напомним читателю, что пренебрегая меньшей чем 10% разницей площадей наружной и внутренней поверхности тела не-

---

[1] В дальнейшем на основе дополнительных соображений уточним правую часть неравенства (54).

плоской отливки, по существу договариваемся о возможности допустить такую же ошибку в расчетах тепловых потоков от затвердевающей отливки в форму через ту и другую поверхности ее тела.

В заключение дадим следующую справку: анализ номенклатуры литых деталей машиностроения и приборостроения показывает, что подавляющее большинство отливок удовлетворяет требованию (54); это — корпусные детали, детали арматуры, кронштейны, станины и т. п. Правда, соответствие требованию (54) нельзя понимать в буквальном смысле. На таких деталях, конечно, есть бобышки, приливы, утолщения, ребра и другие элементы, толщина которых отличается от толщины основного тела. Говоря о соответствии требованию (54), имеем ввиду толщину и радиусы кривизны поверхности основного тела (или среднюю толщину тела и средний радиус кривизны для детали в целом)[1].

42. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ОХЛАЖДЕНИЯ ЗАТВЕРДЕВШИХ ОТЛИВОК

В соответствии со структурной схемой (см. рис. 1) среди этапов технологического процесса литья, ответственных за формирование свойств отливки, нерассмотренными остались два: охлаждение затвердевшей отливки в форме и охлаждение отливки после ее выбивки из формы. Эти этапы являются важными не только потому, что они в основном определяют продолжительность технологического цикла изготовления отливки. Они важны еще и потому, что во время охлаждения отливки в ней возникают временные и, затем, остаточные напряжения, которые в определенных условиях могут привести к короблению отливки и даже к растрескиванию.

В данном параграфе будет рассмотрено упрощение обобщенной математической модели затвердевания, найденной в предыдущем параграфе для типичных частных случаев литья. Речь идет о системах дифференциальных уравнений (37), (38) и условиях (39)—(43), которые благодаря упрощению удается представить в виде краевых задач на охлаждение затвердевшей отливки в форме.

Что касается охлаждения отливки вне формы, т. е. после выбивки из формы, то обобщенная математическая модель для этого процесса, если он происходит при граничных условиях III рода (например, на воздухе), готова — см. краевую задачу (65-I).

Упрощение обобщенной математической модели затвердевания

Третье уравнение системы (37) описывает процесс распространения теплоты в затвердевшей части отливки (а после окончания затвердевания — в твердой отливке), а условия (43) при $i = 3$ —

---

[1] На вопрос о том, как рассчитывать затвердевание ребер, приливов и других элементов угловых сопряжений тела таких отливок, ответ будет дан позже (см. § 59, 61 и 62).

условия теплового взаимодействия затвердевшей части отливки (и после окончания затвердевания эвтектики — твердой отливки) с различными литейными формами. Следовательно, модель (37)—(43) охватывает и интересующий сейчас нас процесс охлаждения твердой отливки. Однако, если будут известны время t_3 окончания затвердевания и распределение температуры в отливке $f(X)$ и в форме $\varphi(X)$, $\varphi_3(X)$ в этот же момент времени, то математическая модель (37)—(43) может быть существенно упрощена:

$$\frac{\partial\Theta_3}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Theta_3}{\partial X^2};\quad 0<X<1; \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Theta_\varepsilon}{\partial\tau}=\mathrm{K}_{a_\varepsilon}\frac{\partial^2\Theta_\varepsilon}{\partial X^2};\quad && 1<X<1+\frac{\varepsilon}{l_0};\\ &\frac{\partial\Theta_4}{\partial\tau}=\mathrm{K}_{a_4}\frac{\partial^2\Theta_4}{\partial X^2};\quad && 1+\frac{\varepsilon}{l_0}<X<1+\frac{\varepsilon}{l_0}+\frac{l_\text{ф}}{l_0};\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_3(X,\ \mathrm{Fo}_3)=\Theta_E f(X);\\ &\Theta_\varepsilon(X,\ \mathrm{Fo}_3)=\Theta_E\varphi(X);\\ &\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_3)=\Theta_E\varphi_3(X),\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

где $\mathrm{Fo}_3=\frac{a_3t_3}{l_0^2}$ — критерий Фурье в момент окончания процесса затвердевания отливки.

Условия (40)—(42) теряют смысл; условия (43) сохраняются с небольшим изменением: первое и второе из них должно быть записано только для $i=3$.

Самым трудным в модели (55)—(57) и (43) при $i=3$ является предварительное определение времени t_3 и функций $f(X)$, $\varphi(X)$, $\varphi_3(X)$. Способы их определения будут изложены при решении конкретных задач исследования процесса охлаждения отливок в той или иной форме. Сейчас рассмотрим дальнейшее упрощение модели для песчаных и металлических форм как типичных представителей всего многообразия литейных форм.

Охлаждение в песчаных формах

Дальнейшее упрощение математической модели возможно осуществить для песчаных форм, т. е. для случая $\varepsilon/l_0=0$: уравнение (55) сохранится, в системе (56) останется второе уравнение, которое принимает вид (45); из начальных условий (57) останутся первое и третье:

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_3(X,\ \mathrm{Fo}_3)=\Theta_E f(X);\\ &\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_3)=\Theta_E\varphi_3(X);\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

граничные условия (43) при $i = 3$ и $\varepsilon/l_0 = 0$ примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\partial\Theta_3(1,\tau)}{\partial X} = -\mathrm{K}_{\lambda_4}\frac{\partial\Theta_4(1,\tau)}{\partial X};\quad \frac{\partial\Theta_3(0,\tau)}{\partial X} = 0;\\
&\Theta_3(1,\tau) = \Theta_4(1,\tau);\\
&-\frac{\partial\Theta_4\left(1+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\tau\right)}{\partial X} = \begin{cases}\frac{l_0}{l_\text{ф}}\mathrm{Bi}_c\Theta_4\left(1+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\tau\right), & \\ \qquad \text{если } \frac{l_\text{ф}}{l_0} \neq \infty; & \\ 0 \text{ и } \Theta_4\left(1+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\tau\right), & \\ \qquad \text{если } \frac{l_\text{ф}}{l_0} = \infty. & \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Таким образом, для песчаных форм математическая модель охлаждения отливки представляется системой дифференциальных уравнений и условий (55), (43), (58) и (59).

Охлаждение в металлических формах

Если, по-прежнему, при $\varepsilon/l_0 \ll 1$ принять линейное распределение (49) температуры по толщине кокильной краски и не учитывать ε/l_0 как величину, по крайней мере на порядок меньшую единицы, то математическая модель для металлических форм еще более упрощается: уравнение (55) сохранится; первым уравнением из системы (56) допустимо пренебречь, второе примет вид (45); из начальных условий (57) сохранятся первое и третье; граничные условия (43) при $i = 3$ преобразуются в (51) при $i = 3$ и (48):

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\partial\Theta_3(1,\tau)}{\partial X} = \mathrm{Bi}_0\left[\Theta_3(1,\tau) - \Theta_4(1,\tau)\right];\\
&\mathrm{Bi}_\text{ф}\left[\Theta_3(1,\tau) - \Theta_4(1,\tau)\right] = -\frac{l_\text{ф}}{l_0}\frac{\partial\Theta_4(1,\tau)}{\partial X};\quad \frac{\partial\Theta_3(0,\tau)}{\partial X} = 0;\\
&-\frac{\partial\Theta_4\left(1+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\tau\right)}{\partial X} = \begin{cases}\frac{l_0}{l_\text{ф}}\mathrm{Bi}_c\Theta_4\left(1+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\tau\right), & \\ \text{если } \frac{l_\text{ф}}{l_0} \neq \infty; & \\ 0 \text{ и } \Theta_4\left(1+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\tau\right), & \\ \text{если } \frac{l_\text{ф}}{l_0} = \infty. & \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Таким образом, для металлических форм математическая модель охлаждения отливки представляется системой дифференциальных уравнений (55), (43) и условий (58) и (60).

Охлаждение после выбивки из формы

После выбивки из формы отливки остывают, как правило, на воздухе. Если процесс теплоотвода от отливки в окружающую среду подчиняется закону полной теплоотдачи, то математическую модель охлаждения отливки вне формы можно представить в виде краевой задачи (65-I), в которой

$$\Theta(R,\ \mathrm{Fo}_4) = \Theta_{\text{выб}} f_1(R), \tag{61}$$

где Fo_4 — критерий Фурье в момент $t_{\text{выб}}$ выбивки отливки; $f_1(R)$ — функция, описывающая распределение относительной температуры отливки в момент ее выбивки из формы.

Математическая модель (65-I) пригодна для изучения процесса охлаждения отливки *любой* конфигурации после ее выбивки из любой формы.

В заключение заметим, что приведенные в этом параграфе модели не учитывают фазовых или структурных превращений, какие могут быть в отливках при их охлаждении ниже температуры солидуса литейных сплавов. Однако при необходимости модели можно уточнить. Это мы предоставляем читателю сделать самостоятельно.

43. УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

Предлагаемые упражнения и задачи завершают раздел о процессах затвердевания и охлаждения отливки и их математических моделях. Этот раздел составлен так, чтобы по возможности отчетливо показать «кухню» построения математических моделей сложных систем, определяющим в которых является процесс теплообмена. Главным, помимо необходимых знаний из теории теплообмена, теории подобия и математики, является знание *объекта* исследования. Это знание объекта достигается *только* на основе *эксперимента*, его анализа, обобщения его результатов с позиций металловедения, физики металлов, технологии литейного производства и, наконец, по интуиции, без которой, пожалуй, не было построено ни одной плодотворной модели процесса.

Если читатель хочет освоить упомянутую «кухню» построения математических моделей процессов затвердевания, он должен самостоятельно выполнить семь упражнений и решить две задачи. Но упомянем еще раз о том, что для их успешного выполнения потребуются знания по ряду известных читателю дисциплин.

Как и прежде, ответы не даны; там, где это надо, приведены указания или примечания.

Упражнение 1. Построить математическую модель прогрева трехслойной формы отливкой при условии, что первый слой неметаллический, а третий охлаждается в окружающую форму среду по закону полной теплоотдачи.

Примечание. Это упражнение уже предлагалось читателю (см. с. 135); если оно еще не выполнено, то сейчас его следует выполнить обязательно.

Упражнение 2. Построить математическую модель прогрева n-слойной формы при тех же условиях.

Упражнение 3. Дать математическое описание процесса затвердевания отливки в песчаной массивной форме; материал отливки — сплав с перитектикой.

Указание. Для выбора конкретного сплава рекомендуется рассмотреть «стальной» угол диаграммы состояния сплавов железа с углеродом; результаты экспериментального исследования температурных полей при затвердевании отливки из стали с 0,35% С приведены в книге Б. Б. Гуляева «Литейные процессы», с. 193.

Упражнение 4. Составить математическое описание процесса затвердевания отливки в охлаждаемой металлической форме; материал отливки — сплав с перитектикой и эвтектикой.

Указание. Для выбора конкретного сплава рассмотреть диаграмму состояния сплавов алюминия с никелем; температурные поля затвердевающей отливки из сплава алюминия с 34,6% Ni приведены в той же книге Б. Б. Гуляева (с. 169 .

Упражнение 5. Составить математическую модель процесса затвердевания отливки в трехслойной форме; материал отливки — сплав с перитектикой и эвтектикой.

Упражнение 6. Уточнить математическую модель (37)—(43) с использованием дифференциальных уравнений теплопроводности (30-I) для одномерного потока (см. с. 40).

Упражнение 7. Составить обобщенную математическую модель охлаждения отливки в форме и на воздухе после ее выбивки из формы с учетом структурных превращений, протекающих в сплаве ниже температуры солидуса.

Указание. В качестве примера сплава взять любую литейную сталь.

Задача 1. Найти точное решение задачи С. Шварца (см. с. 144).

Задача 2. Найти приближенное решение задачи С. Шварца методом А. И. Вейника (см. с. 59—63).

Указание. Величину показателей *n* параболических распределений температуры в расплаве, твердой корке и в форме установить при сравнении приближенного решения с точным (см. *задачу 1*).

Рекомендуемая литература

1. **Вайнгард У.** Введение в физику кристаллизации металлов. Пер. с англ. М., «Мир», 1967. 160 с.
2. **Вейник А. И.** Тепловые основы теории литья. М., Машгиз, 1953. 384 с.
3. **Вейник А. И.** Теория затвердевания отливки. М., Машгиз, 1960. 436 с.
4. **Вейник А. И.** Расчет отливки. М., «Машиностроение», 1964. 404 с.
5. **Гуляев Б. Б.** Литейные процессы. М.—Л., Машгиз, 1960. 416 с.
6. **Лахтин Ю. М., Леонтьева В. П.** Материаловедение. М., «Машиностроение». 1972. 511 с.
7. **Чалмерс Б.** Теория затвердевания. Пер. с англ. М., «Металлургия», 1968. 288 с.

Раздел III | ЗАТВЕРДЕВАНИЕ И ОХЛАЖДЕНИЕ ОТЛИВКИ В ПЕСЧАНЫХ ФОРМАХ

Глава 10. УПРОЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВКИ

При обсуждении обобщенной математической модели (37-II)—(43-II) уже обращали внимание на роль параметрического критерия K_{a_i}; (см. с. 138). В частности, речь шла о том, что в случаях, когда $\mathrm{K}_{a_i} < 1$, неоднородность температурного поля во всех телах ($i = 1, 2, \varepsilon$ и 4) больше неоднородности поля в твердой отливке. Это обстоятельство должно отличать процессы теплообмена отливок и песчаных форм (ибо, даже не обращаясь к справочникам, можно заранее заключить, что $a_4 < a_3$ и, следовательно, $\mathrm{K}_{a_i} < 1$). Естественно, что его необходимо учитывать при анализе результатов экспериментов и математической модели процесса затвердевания, представленной системой дифференциальных уравнений (37-II), (45-II) и условий (39-II), (46-II); (41-II), (42-II), (47-II) и (48-II).

44. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Прежде всего обратимся к таблицам значений теплофизических величин для литейных сплавов и формовочных смесей (см. приложения VI и VII, табл. 3—9 и 11). Эти данные являются результатом многих и тщательных экспериментов, и с них целесообразно начать анализ.

Первый вывод, который можно сделать, состоит в том, что для подавляющего большинства металлов и литейных сплавов $\mathrm{K}_{a_i} \approx 1$, $i = 1, 2$ и 3. И второй вывод:

$\mathrm{K}_{a_4} \ll 1.$

Действительно, для формовочных и стержневых смесей $a_4 = 2{,}6 \cdot 10^{-7} \div 7{,}0 \cdot 10^{-7}$ м²/с; для металлов и литейных сплавов $a_3 = 10^{-5} \div 6{,}1 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Следовательно, неоднородность температурного поля в отливках, затвердевающих в песчаных формах, должна быть пренебрежимо малой по сравнению с неоднородностью поля в самих песчаных формах.

Условимся неоднородность температурного поля характеризовать величинами температурных перепадов по сечению отливки

$\delta\vartheta_i = T_i(0,\ t) - T(x_0,\ t);\quad i = 1,\ 2$ и 3

и формы

$\delta\vartheta_4 = T_4(x_0,\ t) - T_4(x_ф,\ t).$

Покажем, что при литье в песчаные формы, как правило,

$$\frac{\delta\vartheta_i}{\delta\vartheta_4} \ll 1;\quad i = 1,\ 2 \text{ и } 3. \qquad (1)$$

На рис. 28 приведены некоторые результаты экспериментального исследования процесса затвердевания отливок в песчаной форме, выполненного Г. А. Анисовичем и Н. П. Жмакиным [1, с. 27 и 28]. Температурные поля на рис. 28, *а* зафиксированы при затвердевании чугунной отливки в сухой песчаной форме. Отливка — плита 300 × 300 × 100 мм. Форма за время затвердевания не прогрелась насквозь, т. е. форма — массивная неохлаждаемая. На рис. 28, *б* представлены температурные поля такой же, но стальной отливки, затвердевшей в аналогичных условиях. Величина $\delta\vartheta_i$ для чугунной отливки составляет 6—10 К (рис. 28, *в*), для стальной она больше: 7—42 К (рис. 28, *г*).

На рис. 29, *а* даны температурные поля в сухой песчаной форме, измеренные при повторении опытов Г. А. Анисовича и Н. П. Жмакина с чугунной отливкой. Очевидно, что $\delta\vartheta_4 = 1100 \div 1230$ К. В аналогичных опытах со стальной отливкой $\delta\vartheta_4 = 1380 \div 1540$ К. Следовательно, для чугунной отливки в сухой песчаной форме $\frac{\delta\vartheta_i}{\delta\vartheta_4} < 0{,}01$, для стальной это отношение меньше 0,03.

На рис. 29, *б* приведены температурные поля в оболочковой охлаждаемой форме, зафиксированные при затвердевании в ней алюминия. Отливка — плита 300 × 300 × 30 мм. Толщина оболочки 10 мм. В отливке измеряли температуру только в центре и на расстоянии 2 мм от ее поверхности. Наибольший температур-

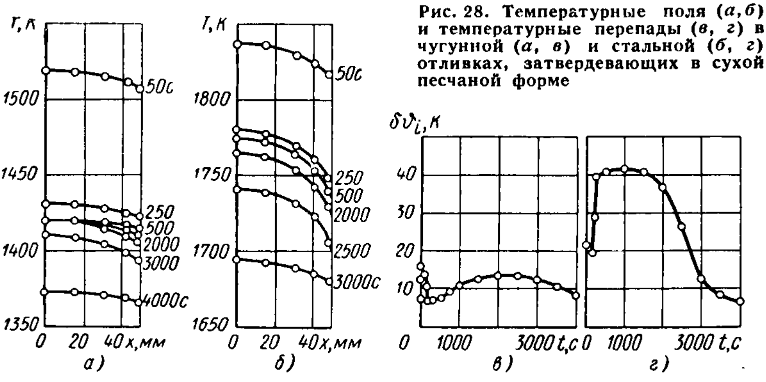


Рис. 28. Температурные поля (*а*, *б*) и температурные перепады (*в*, *г*) в чугунной (*а*, *в*) и стальной (*б*, *г*) отливках, затвердевающих в сухой песчаной форме

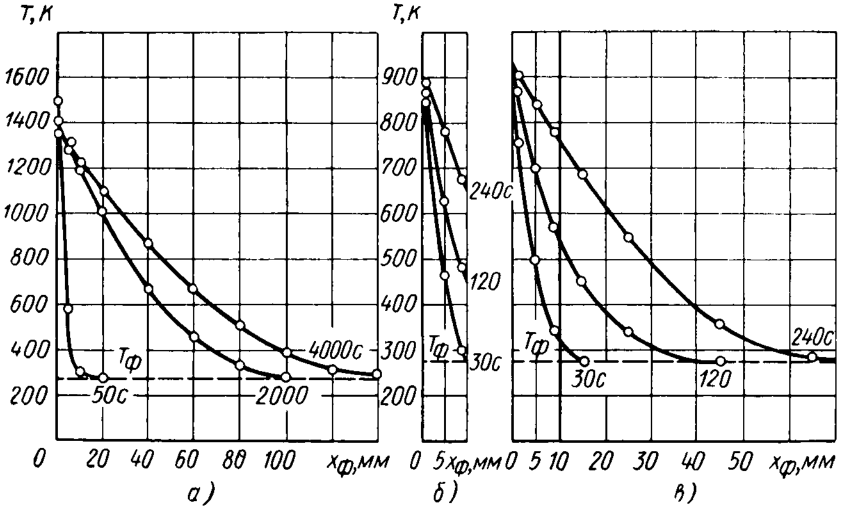


Рис. 29. Температурные поля в сухой песчаной массивной форме при литье чугуна (*а*), в оболочковой форме (*б*) и в оболочковой форме с засыпкой ее песком (*в*) при литье алюминия

ный перепад в отливке составил 2—3 К; наименьший температурный перепад в форме — 280 К. Следовательно, и для оболочковой охлаждаемой формы $\frac{\delta\vartheta_i}{\delta\vartheta_4} < 0{,}01$.

Таким образом, прогноз о весьма малой неоднородности температурного поля в отливках, затвердевающих в песчаных формах, сделанный на основе *анализа* критерия K_{a_4} в *обобщенной математической модели* (37-II)—(43-II), подтвердился *непосредственным* экспериментом.

Однако этот прогноз можно сделать более определенным в результате *исследования* математической модели. Учитывая чрезвычайные трудности такого исследования, мы остановимся на простейшем варианте — на задаче С. Шварца (см. с. 144). Так как читатель уже решил задачу С. Шварца из предыдущего раздела, то избежим подробности и рассмотрим случай затвердевания неперегретого расплава чистого металла (рис. 30). В формулировке

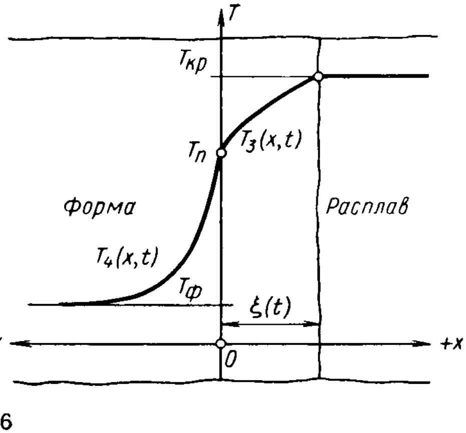


Рис. 30. Схема температурных полей к задаче С. Шварца для случая затвердевания неперегретого расплава

задачи выпадет первое дифференциальное уравнение теплопроводности, первое начальное условие изменится:

$$T_1(x,\ 0) = T_{\text{кр}} = \text{const};$$

дифференциальное уравнение затвердевания преобразуется к виду, в котором оно было впервые найдено Ламэ и Клапейроном:

$$L\rho_3 \frac{d\xi}{dt} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(\xi,\ t)}{\partial x}; \quad T_3(\xi,\ T) \equiv T_{\text{кр}}.$$

Решение этой задачи:

$$\frac{T_3 - T_{\text{п}}}{T_{\text{кр}} - T_{\text{п}}} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_3 t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_3 t}}\right)};$$

$$\frac{T_4 - T_{\text{ф}}}{T_{\text{п}} - T_{\text{ф}}} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{a_4 t}}\right),$$

где

$$\xi = m\sqrt{t}; \tag{2}$$

здесь m — коэффициент затвердевания, который вычисляется из следующего уравнения:

$$me^{\frac{m^2}{4a_3}} = \frac{2b_4}{\sqrt{\pi}L\rho_3}(T_{\text{п}} - T_{\text{ф}}); \tag{3}$$

$T_{\text{п}}$ — температура поверхности контакта отливки и формы; вычисляется из формулы

$$\frac{T_{\text{кр}} - T_{\text{п}}}{T_{\text{п}} - T_{\text{ф}}} = \frac{b_4}{b_3} \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_3}}\right).$$

Для наших прогнозов важна, собственно, последняя формула, которая непосредственно дает отношение температурного перепада $T_{\text{кр}} - T_{\text{п}}$ по сечению твердой части отливки к температурному перепаду $T_{\text{п}} - T_{\text{ф}}$ в форме. Так как функция ошибок Гаусса при положительном аргументе не может быть больше 1 и меньше 0, то, возвращаясь к прежним обозначениям температурных перепадов (при $i = 3$), получим

$$\frac{\delta\vartheta_3}{\delta\vartheta_4} \approx \frac{b_4}{b_3}. \tag{4}$$

Читателю ясно, что выбран самый невыгодный случай при $\operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_3}}\right) = 1$. Теперь обратимся к таблицам теплофизических величин (см. приложение VI и VII, табл. 3—9 и 11): для формовочных и стержневых смесей $b_4 = 10^3 \div 2{,}3 \cdot 10^3$ Вт·с$^{1/2}$/(м^2·К), для металлов и сплавов $b_3 = 1{,}4 \cdot 10^4 \div 3{,}7 \cdot 10^4$ Вт$\cdot c^{1/2}/(м^2 \cdot К)$. Следовательно,

$$\frac{\delta\vartheta_3}{\delta\vartheta_4} < 0{,}1,$$

т. е. то, что доказано непосредственным экспериментом! Поневоле вспомнишь слова К. Гельвеция: «Знание некоторых принципов легко возмещает незнание некоторых фактов.» . . .

Итак, можно сформулировать *первое допущение*: во всех случаях литья в песчаные формы, когда соблюдается неравенство (1), при построении приближенных математических моделей процесса затвердевания можно пренебрегать неоднородностью температурного поля в отливке по сравнению с неоднородностью поля в форме. Такое допущение позволяет, как убедимся далее, существенно облегчить создание простых и удобных для инженерных целей расчетов технологических режимов литья.

На рис. 29, *в* обращает внимание следующее: кривые температурных полей в оболочковой форме и в засыпке (на границе контакта формы и песка) практически не претерпевают разрыва непрерывности. Это означает, что оболочковую форму с засыпкой ее песком приближенно можно рассматривать как массивную неохлаждаемую форму (см. рис. 29, *а*). Как показывает анализ специальных экспериментов, керамические формы, полученные по выплавляемым моделям, если керамические оболочки укрепляют песком, также можно рассматривать как массивные неохлаждаемые. В этом состоит *второе допущение*. Оно еще более облегчает построение приближенных математических моделей процесса затвердевания отливок для многих способов литья, так как в дальнейшем все песчаные и керамические формы можно подразделить на две группы: массивные неохлаждаемые и тонкостенные охлаждаемые с внешней поверхности по закону полной теплоотдачи[1].

Заметим, что возможность второго допущения также легко предвидеть из анализа математической модели затвердевания отливки в двухслойной форме. Если читатель выполнил *упражнение 1*, рекомендованное в гл. 9, то он нашел критерии $К_{a_{41}}$ и $К_{a_{42}}$ (a_{41} — коэффициент температуропроводности первого слоя формы, a_{42} — второго слоя). Возможность второго допущения обусловливается $\varepsilon = 0$ (т. е. краска отсутствует, форма песчаная) и $К_{a_{41}} \approx К_{a_{42}}$.

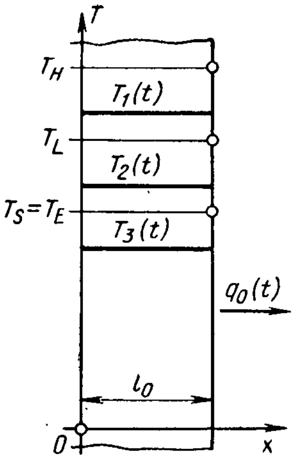
45. ПРИБЛИЖЕННАЯ СХЕМА ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

На рис. 31 изображена схема температурных полей в отливке. Как ясно читателю, учтено первое из сформулированных выше допущений: *температура по сечению отливки распределена одно-*

---

[1] Далее (см. § 66) мы убедимся в том, что такое деление форм охватывает сырые песчаные формы, формы, изготовленные из смесей, которые отверждаются в нагретой или холодной оснастке, и т. п.

Рис. 31. Схема температурных полей в отливке, затвердевающей в песчаной форме



родно и является функцией только времени в любой момент процесса затвердевания. Однако это лишь допущение. В действительности, между центром отливки и ее поверхностью *всегда* существует температурный перепад, равный $\delta\vartheta_i$, величиной которого было *условлено* пока пренебрегать.

Следовательно, при исследовании затвердевания эвтектического сплава или чистого металла отнюдь не следует предполагать объемную кристаллизацию расплава. Кристаллизация расплава чистых металлов и эвтектических сплавов будет происходить последовательно. Она начнется от поверхности формы, так как именно там температура расплава прежде всего достигнет температуры кристаллизации, и завершится в центре отливки, где температура кристаллизации достигается в последний момент процесса затвердевания расплава.

Объемная кристаллизация возможна при затвердевании сплавов типа твердых растворов. Однако ее можно считать объемной тогда и только тогда, когда

$$\frac{T_L - T_S}{\delta\vartheta_i} \gg 1, \tag{5}$$

т. е. когда интервал кристаллизации сплавов на много больше температурного перепада по сечению отливки. В противном случае кристаллизация будет протекать последовательно, и так, что перед фронтом твердой корки образуется двухфазная зона (см. с. 113—115).

Таким образом, принимая приближенную схему (рис. 31) процесса затвердевания отливок для способов литья, которые удовлетворяют условию (1), предположим, что *перегретый расплав охлаждается практически одновременно по всему объему и также по всему объему он достигает температуры ликвидуса данного сплава; если удовлетворяется и условие (5), то он кристаллизуется практически объемно, и, следовательно, одновременно по всему объему достигается температура солидуса; если рассматриваемый сплав — твердый раствор, то процесс затвердевания на этом заканчивается, если же сплав содержит эвтектику, то с момента достижения затвердевающим расплавом температуры солидус начинается последовательная кристаллизация эвтектики.*

Полученный вывод является формулировкой модели *малой интенсивности затвердевания отливки* в песчаной форме. Впервые ее предложил А. И. Вейник в 1953 г. [2].

На основе этой формулировки, которая является описанием модели на *полиморфном языке*, нетрудно дать *математическое* описание модели малой интенсивности затвердевания отливки как результат упрощения обобщенной математической модели (37-II)—(43-II).

Вначале преобразуем дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье для одномерного теплового потока:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

так как $a = \lambda/c\rho$, то

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

Учитывая, что согласно закону теплопроводности Фурье $q(x, t) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}$, получим

$$-c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Будем, по-прежнему, рассматривать симметрично охлаждаемую (или нагреваемую) неограниченную пластину, т. е. распространим дифференциальное уравнение Фурье на область $x \in [0, l_0]$; тогда

$$-c\rho\int_0^{l_0}\frac{\partial T}{\partial t}\,dx = \int_0^{l_0}\frac{\partial q}{\partial x}\,dx = \int_0^{l_0}dq,$$

следовательно,

$$-c\rho\int_0^{l_0}\frac{\partial T}{\partial t}\,dx = q(l_0, t) - q(0, t).$$

Так как пластина охлаждается симметрично, то $q(0, t) = 0$; величина $q(l_0, t)$ является поверхностной плотностью теплового потока с граничной поверхности плиты, т. е. $q(l_0, t) = q_0(t)$. Поэтому для симметрично охлаждающейся (или нагревающейся) плиты дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье принимает вид

$$-c\rho\int_0^{l_0}\frac{\partial T}{\partial t}\,dx = q_0(t) \tag{6}$$

или, в обобщенных переменных,

$$-\int_0^1 \frac{\partial\theta}{\partial\tau}\,dX = \mathfrak{q}_0(\tau), \tag{7}$$

которое далее будет широко использовано; в формуле (7)

$$\mathfrak{q}(\tau) \equiv \frac{l_0}{\lambda\,(T_{\text{н}} - T_{\text{с}})}\,q_0(t) \;— \tag{8}$$

относительная поверхностная плотность теплового потока с граничной поверхности плиты.

Далее, необходимо принять во внимание следующее. Если неоднородность температурного поля в отливке настолько мала, что ею согласно модели малой интенсивности затвердевания допустимо пренебрегать, то в обобщенной математической модели (37-II)—(43-II) области определения функций температурного поля в пространстве можно принять такими: $X \in [0, 1]$ для $\Theta_1(X, \tau)$, $X \in [0, 1]$ для $\Theta_2(X, \tau)$ и $X \in [\chi_E, 1]$ для $\Theta_3(X, \tau)$. Другими словами, первые два дифференциальных уравнения теплопроводности системы (37-II) распространяются на все сечение плоской отливки, третье лишь на ее полностью затвердевшую часть сечением $1 - \chi_E(\tau)$, где $\chi_E(\tau) \equiv \frac{\varkappa_E(t)}{l_0}$; $\varkappa_E(t)$ — расстояние от центра отливки до фронта затвердевания эвтектики.

Теперь каждое дифференциальное уравнение системы (37-II) будет «работать» как самостоятельное, в определенном интервале времени. Первое уравнение — от момента Fo_0 окончания заливки до момента τ_1 окончания отвода теплоты перегрева (т. е. до момента достижения расплавом температуры T_L); второе уравнение — от Fo_1 до момента τ_2 достижения температуры T_S (или в общем случае до T_E); наконец, третье уравнение — от Fo_2 до момента времени τ_3 окончательной кристаллизации эвтектики, где Fo_0, Fo_1 и Fo_2 — значения числа Фурье τ, которые теперь необходимо задать в начальных условиях для каждого дифференциального уравнения теплопроводности системы (37-II).

Строго говоря, дифференциальные уравнения теплопроводности системы (37-II) можно распространить на все сечение отливки в интервалах времени, несколько меньших, чем указано выше, по крайней мере, не захватывая границ интервалов: так, $\tau \in (\mathrm{Fo}_0, \mathrm{Fo}_1)$ для $\Theta_1(X, \tau)$, $\tau \in (\mathrm{Fo}_1, \mathrm{Fo}_2)$ для $\Theta_2(X, \tau)$ и т. д. Это строже, так как неоднородность температурного поля хотя и мала, но реально существует, и, следовательно, в начале, например, процесса кристаллизации твердого раствора должно наблюдаться *быстрое* перемещение от поверхности формы к центру отливки фронта $\chi_1(\tau)$ ликвидуса, т. е. $\chi_1(\tau)$ быстро принимает значение, равное нулю; в конце процесса то же произойдет с фронтом $\chi_3(\tau)$ солидуса.

Учитывая изложенное, запишем систему дифференциальных уравнений теплопроводности (37-II) в виде интегральных соотношений типа (7):

$$-K_{c_1}K_{\rho_1}\int\limits_0^1 \frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}\,dX = \mathfrak{q}_{01}(\tau);\qquad \tau > \mathrm{Fo}_0;$$

$$-K_{c_2}K_{\rho_2}\int\limits_0^1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}\,dX + \mathcal{L}_2\int\limits_0^1 \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\,dX = \mathfrak{q}_{02}(\tau);\qquad \tau > \mathrm{Fo}_1;$$

$$-\int\limits_0^1 \frac{\partial\theta_3}{\partial\tau}\,dX = \mathfrak{q}_{03}(\tau) - \frac{q(\varkappa_E,\,t)\,l_0}{\lambda_3(T_L - T_c)};\qquad \tau > \mathrm{Fo}_2,$$

где $\Psi = \Psi(\Theta_2(X,\tau))$ и, в соответствии с (8),

$$\mathfrak{q}_{0i}(\tau) \equiv \frac{q_{0i}(t)\,l_0}{\lambda_3(T_L - T_c)};\qquad i = 1,\ 2 \text{ и } 3.$$

Условия равенства тепловых потоков на границе фронтов начала и конца затвердевания изменятся. Условие (41-II) теряет смысл, так как $\varkappa_1(\tau) \approx 0$. Условие (42-II) преобразуется, ибо градиент температуры в двухфазной зоне $\frac{\partial\theta_2(\chi_3,\,\tau)}{\partial X}$ близок к нулю, а в твердой корке

$$-\frac{\partial\Theta_3(\chi_3,\,\tau)}{\partial X} \approx \frac{q(\varkappa_3,\,t)\,l_0}{\lambda_3(T_L - T_c)},$$

где $\varkappa_3(t) = \varkappa_E(t)$.

Следовательно, условие (42-II) примет вид

$$-q(\varkappa_E,\ t)\frac{l_0}{\lambda_3(L_L - T_c)} = \mathcal{L}_E\Psi_E\frac{d\chi_E}{d\tau}.$$

Так как условились пренебрегать неоднородностью температурного поля в отливке, то Θ_1, Θ_2 и Ψ являются функциями только времени, а $\Theta_3 \equiv \Theta_E \equiv \mathrm{const}$. Поэтому интегралы в левой части первых двух соотношений элементарно берутся, в третьем соотношении интеграл равен нулю. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}
&-K_{c_1}K_{\rho_1}\frac{d\Theta_1}{d\tau} = \mathfrak{q}_{01}(\tau);\quad \tau > \mathrm{Fo}_0;\\
&-K_{c_2}K_{\rho_2}\frac{d\Theta_2}{d\tau} + \mathcal{L}_2\frac{d\Psi}{d\tau} = \mathfrak{q}_{02}(\tau);\quad \tau > \mathrm{Fo}_1;\\
&-\mathcal{L}_E\Psi_E\frac{d\chi_E}{d\tau} = \mathfrak{q}_{03}(\tau);\quad \tau > \mathrm{Fo}_2.
\end{aligned}\right\}\qquad (9)$$

Таким образом, с учетом первого допущения, которое позволило сформулировать модель малой интенсивности затвердевания отливки, система уравнений (37-II) в частных производных распалась на три самостоятельных уравнения в обыкновенных производных. Каждое из них описывает самостоятельный процесс: первое — охлаждение перегретого расплава, второе — объемное затвердевание в интервале температуры, третье — последовательное затвердевание эвтектики. В этой связи начальное условие (39-II) распадается на три самостоятельных:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_1(\mathrm{Fo}_0)=\Theta_\text{н};\\ &\Theta_2(\mathrm{Fo}_1)=1;\quad \Psi(\mathrm{Fo}_1)=0;\\ &\Theta_3(\mathrm{Fo}_2)=\begin{cases}\Theta_S, \text{ если } \Psi_E=0;\\ \Theta_E \text{ и } \chi_E(\mathrm{Fo}_2)=1, \text{ если } \Psi_E\neq 0,\end{cases}\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где Fo_1 — результат решения первого дифференциального уравнения совокупности (9) для $\Theta_1(\tau)=1$; Fo_2 — результат решения второго уравнения для $\Theta_2(\tau)=\Theta_S$ при $\Psi_E=0$ или для $\Theta_2(\tau)=\Theta_E$ при $\Psi_E\neq 0$.

Совокупность дифференциальных уравнений (9) при начальных условиях (10) соответственно является математическим описанием модели малой интенсивности затвердевания отливки. Она получена как *частный случай* той части обобщенной математической модели (37-II)—(43-II), которая описывает процесс затвердевания расплава, т. е. (37-II), (39-II), (41-II), (42-II).

Конечно, дифференциальные уравнения совокупности (9) можно найти иначе; например, так, как это сделал А. И. Вейник в 1953 г. После формулировки модели малой интенсивности затвердевания отливки в том, примерно, виде, в каком она дана выше на с. 159, возможны следующие рассуждения.

В интервале времени $t_\text{зал}$ — t_1 происходит охлаждение перегретого расплава от температуры $T_\text{н}$ до T_L. Так как температура T_1 распределена по сечению равномерно и T_1 — функция только времени, то за промежуток времени dt температура расплава изменится на $-dT_1$ и теплосодержание плоской отливки, объем которой $V_0=l_0F_0$, уменьшится на $-c_1\rho_1l_0F_0\,dT_1$. Это уменьшение теплосодержания обусловлено отводом теплоты $dQ_0=q_0(t)F_0\,dt$ в форму.

Следовательно [1],

$$-c_1\rho_1l_0\,dT_1=q_0(t)\,dt$$

или, в обобщенных переменных,

$$-\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}\,d\Theta_1=q_{01}(\tau)\,d\tau,$$

---

[1] Знак минус перед dT_1 означает, что рассматривается процесс охлаждения; следовательно, положительному приращению аргумента t отвечает отрицательное приращение функции T_1.

т. е. получается первое дифференциальное уравнение из совокупности (9).

Аналогично А. И. Вейник нашел второе и третье уравнения. Не будем приводить эти элементарные выкладки. Читатель свободно может выполнить их самостоятельно.

Важнее отметить другое. Метод, который использовал А. И. Вейник, отличается чрезвычайной простотой и, главное, наглядностью. При его осуществлении четко выявляется физический смысл уравнений (9), и этот смысл хорошо усваивается. Однако метод А. И. Вейника находится в отрыве от дифференциальных уравнений теплопроводности Фурье, частным случаем которых, как было показано, являются уравнения (9). Уравнения же Фурье обязательно потребуются при анализе более сложных процессов, когда модель малой интенсивности недостаточна или ее вообще нельзя использовать, — например, при анализе процессов формирования кристаллического строения отливок, который будет изложен в части II учебного пособия. Что же касается физического смысла уравнений (9), то он понятен и при изложенном выше способе их получения, если читатель хорошо усвоил смысл уравнения Фурье и физические основания тех упрощений, которые привели к уравнениям (9).

Читатель все же может нам возразить. Дело в том, что вывод уравнений (9) по А. И. Вейнику на основе модели малой интенсивности затвердевания позволяет отвлечься (и это — важно) от подробностей реальной конфигурации отливки. Действительно, изменение теплосодержания, например, перегретого расплава в более общем виде равно — $c_1\rho_1V_0\,dT_1$, поэтому

$$-c_1\rho_1V_0\,dT_1=q_0(t)\,F_0\,dt;$$

$$-K_{c_1}K_{\rho_1}\frac{d\Theta_1}{d\tau}=\frac{l_0}{\mathfrak{R}}q_{01}(\tau),$$

где $\mathfrak{R}\equiv V_0/F_0$ — приведенный размер отливки (см. с. 62); отношение $l_0/\mathfrak{R}=1$ для плиты, 2 — для цилиндра и 3 — для шара.

Однако тот же результат можно получить и иначе. Представим математическую модель (37-II)—(43-II) затвердевания отливок обобщенными дифференциальными уравнениями Фурье типа (28-I) для одномерного потока. Если читатель выполнил *упражнение 6* в предыдущей главе, то ему понятно следующее:

$$F\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial r}\left(F\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

По аналогии с предыдущим

$$-c\rho F\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}F\right)$$

или

$$-c\rho \int_0^{r_0} \frac{\partial T}{\partial t} F\, dr = \int_0^{r_0} d\,(qF);$$

следовательно,

$$-c\rho \int_0^{r_0} \frac{\partial T}{\partial t} F(r)\, dr = q\,(r_0,\ t)\, F\,(r_0) - q\,(0,\ t)\, F\,(0).$$

Так как $q\ (r_0,\ t) = q_0\ (t)$ и $F\ (r_0) = F_0$, а $q\ (0,\ t) = 0$ и $F\ (0) \equiv 0$, то

$$-c\rho \int_0^{r_0} \frac{\partial T}{\partial t} F(r)\, dr = q_0\,(t)\, F_0.$$

Если пренебречь неоднородностью распределения температуры в теле, то T — функция только времени; поэтому

$$-c\rho \frac{dT}{dt} \int_0^{r_0} F(r)\, dr = q_0\,(t)\, F_0;$$

с учетом (23-I),

$$-c\rho V_0 \frac{dT}{dt} = q_0\,(t)\, F_0.$$

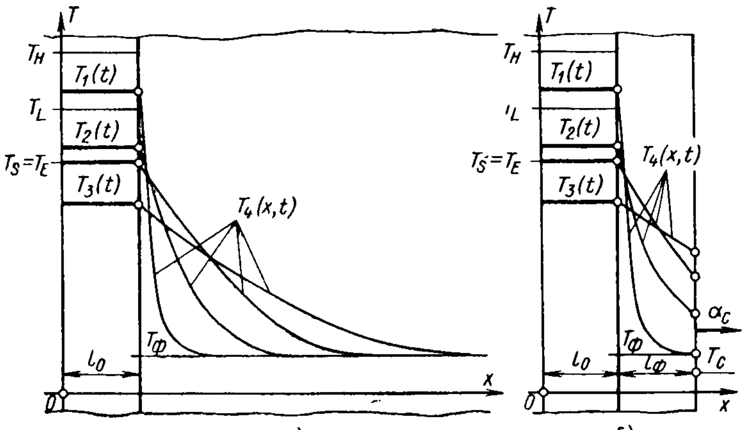
46. УПРОЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ

На рис. 32 изображены схемы температурных полей в отливке и в песчаных формах. Здесь учтено и второе допущение: *все многообразие песчаных и керамических форм представлено массивной неохлаждаемой формой, являющейся полуограниченным телом (рис. 32, а), и тонкостенной охлаждаемой с внешней поверхности по закону полной теплоотдачи (рис. 32, б).*

Второе допущение позволяет использовать ту часть обобщенной математической модели затвердевания отливки в песчаных формах (см. с. 143), которая описывает прогрев формы отливкой, т. е. дифференциальное уравнение (45-II) теплопроводности и условия (46-II)—(48-II) для всего многообразия песчаных и керамических форм[1]. Действительно, из граничного условия (48-II)

---

[1] Читателю должно быть ясно, что из этого многообразия исключаются оболочковые формы при засыпке их стальной дробью. Этот способ литья будет рассмотрен при анализе затвердевания отливок в металлокерамических формах.



а) б)

Рис. 32. Схемы температурных полей в отливке и формах:
а — массивная неохлаждаемая форма; *б* — тонкостенная песчаная форма

следует, что при $l_ф/l_0 = \infty$ рассматривается массивная неохлаждаемая форма, при $l_ф/l_0 \neq \infty$ — тонкостенная охлаждаемая.

Так как согласно первому допущению процесс затвердевания отливки расчленен на три стадии, которые описываются совокупностью дифференциальных уравнений (9) и начальных условий (10), то нагрев формы следует также рассматривать самостоятельно для каждой стадии. В этой связи, в системе (45-II)—(48-II) начальное условие (46-II) распадется на три самостоятельных:

$$\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_0) = \Theta_н\varphi_0(X);$$

$$\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_1) = \varphi_1(X);$$

$$\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_2) = \Theta_E\varphi_2(X),$$

где $\varphi_1(X)$ и $\varphi_2(X)$ — распределение температуры в форме в момент t_1 окончания отвода теплоты перегрева от расплава и в момент t_2 завершения затвердевания расплава в интервале температур $T_L - T_E$.

Граничные условия (47-II) примут вид

$$q_{01}(\tau) = -\frac{\mathrm{K}_{\lambda_4}}{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}\frac{\partial\Theta_4(1,\ \tau)}{\partial X};\quad \Theta_1(1,\ \tau) = \Theta_4(1,\ \tau);\quad \tau > \mathrm{Fo}_0;$$

$$q_{02}(\tau) = -\frac{\mathrm{K}_{\lambda_4}}{\mathrm{K}_{c_2}\mathrm{K}_{\rho_2}}\frac{\partial\Theta_4(1,\ \tau)}{\partial X};\quad \Theta_2(1,\ \tau) = \Theta_4(1,\ \tau);\quad \tau > \mathrm{Fo}_1;$$

$$q_{03}(\tau) = -\mathrm{K}_{\lambda_4}\frac{\partial\Theta_4(1,\ \tau)}{\partial X};\quad \Theta_E = \Theta_4(1,\ \tau);\quad \tau > \mathrm{Fo}_2.$$

Следовательно, математическая модель затвердевания отливки в песчаных формах с учетом принятых допущений представляется тремя упрощенными:

для охлаждения перегретого расплава

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta_4}{\partial\tau}=\mathrm{K}_{a_4}\frac{\partial^2\Theta_4}{\partial X^2};\quad 1<X<1+\frac{l_{\text{ф}}}{l_0};\quad \tau>\mathrm{Fo}_0;\\
&\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_0)=\Theta_{\text{н}}\varphi_0(X);\\
&\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}\frac{d\Theta_1}{d\tau}=\mathrm{K}_{\lambda_4}\frac{\partial\Theta_4(1,\ \tau)}{\partial X};\quad \Theta_1(\tau)=\Theta_4(1,\ \tau);\quad \tau>\mathrm{Fo}_0;\\
&\Theta_1(\mathrm{Fo}_0)=\Theta_{\text{н}}=\mathrm{const};\\
&-\frac{\partial\Theta_4\left(1+\frac{l_{\text{ф}}}{l_0},\ \tau\right)}{\partial X}=\begin{cases}0 \text{ и } \Theta_4(\infty,\ \tau)=0, \text{ если } \dfrac{l_{\text{ф}}}{l_0}=\infty;\\[2ex] \dfrac{l_0}{l_{\text{ф}}}\mathrm{Bi}_{\text{c}}\Theta_4\left(1+\dfrac{l_{\text{ф}}}{l_0},\ \tau\right), \text{ если } \dfrac{l_{\text{ф}}}{l_0}\neq\infty;\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

для затвердевания расплава в интервале температур ликвидуса и солидуса (эвтектики) сплава

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta_4}{\partial\tau}=\mathrm{K}_{a_4}\frac{\partial^2\Theta_4}{\partial X^2};\quad 1<X<1+\frac{l_{\text{ф}}}{l_0};\quad \tau>\mathrm{Fo}_1;\\
&\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_1)=\Theta_L\varphi_1(X);\\
&\mathrm{K}_{c_2}\mathrm{K}_{\rho_2}\frac{d\Theta_2}{d\tau}-\mathscr{L}_2\frac{d\Psi}{d\tau}=\mathrm{K}_{\lambda_4}\frac{\partial\Theta_4(1,\ \tau)}{\partial X};\quad \tau>\mathrm{Fo}_1;\\
&\Theta_2(\tau)=\Theta_4(1,\ \tau);\quad \Psi=\Psi(\tau);\\
&\Theta_2(\mathrm{Fo}_1)=1;\quad \Psi(\mathrm{Fo}_1)=0;\\
&-\frac{\partial\Theta_4\left(1+\frac{l_{\text{ф}}}{l_0},\ \tau\right)}{\partial X}=\begin{cases}0 \text{ и } \Theta_4(\infty,\ \tau)=0, \text{ если } \dfrac{l_{\text{ф}}}{l_0}=\infty;\\[2ex] \dfrac{l_0}{l_{\text{ф}}}\mathrm{Bi}_{\text{c}}\Theta_4\left(1+\dfrac{l_{\text{ф}}}{l_0},\ \tau\right), \text{ если } \dfrac{l_{\text{ф}}}{l_0}\neq\infty;\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

для затвердевания эвтектики

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta_4}{\partial\tau}=\mathrm{K}_{a_4}\frac{\partial^2\Theta_4}{\partial X^2};\quad 1<X<1+\frac{l_{\text{ф}}}{l_0};\quad \tau>\mathrm{Fo}_2;\\
&\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_2)=\Theta_E\varphi_2(X);\\
&\mathscr{L}_E\Psi_E\frac{d\chi_E}{d\tau}=\mathrm{K}_{\lambda_4}\frac{\partial\Theta_4(1,\ \tau)}{\partial X};\quad \Theta_E=\Theta_4(1,\ \tau);\quad \tau>\mathrm{Fo}_2;\\
&\Theta_2(\mathrm{Fo}_2)=\Theta_E \text{ и } \chi_E(\mathrm{Fo}_2)=1;\\
&-\frac{\partial\Theta_4\left(1+\frac{l_{\text{ф}}}{l_0},\ \tau\right)}{\partial X}=\begin{cases}0 \text{ и } \Theta_4(\infty,\ \tau)=0, \text{ если } \dfrac{l_{\text{ф}}}{l_0}=\infty;\\[2ex] \dfrac{l_0}{l_{\text{ф}}}\mathrm{Bi}_{\text{c}}\Theta_4\left(1+\dfrac{l_{\text{ф}}}{l_0},\ \tau\right), \text{ если } \dfrac{l_{\text{ф}}}{l_0}\neq\infty,\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

где $l_{\text{ф}}/l_0=\infty$ — соответствует варианту песчаной массивной неохлаждаемой формы (см. рис. 32, *а*); $l_{\text{ф}}/l_0\neq\infty$ — вариант песчаной тонкостенной охлаждаемой формы (см. рис. 32, *б*).

47. УПРОЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОХЛАЖДЕНИЯ ТВЕРДОЙ ОТЛИВКИ

Сформулированные выше допущения распространяются и на процесс охлаждения затвердевших отливок. Что касается охлаждения отливки до температуры выбивки, т. е. охлаждения в песчаных формах, то это ясно из предыдущего. А вот для процесса охлаждения отливки после ее выбивки, т. е. охлаждения на воздухе, справедливость указанных допущений надо доказать.

По сути дела, речь может идти только о первом допущении: о возможности пренебрегать неоднородностью температурного поля в отливке при ее охлаждении на воздухе. Исходя из обобщенной модели (65-I) и смысла критерия Био (см. с. 61—63), такая возможность существует в случаях, когда $\mathrm{Bi} < 0{,}1$.

Оценим толщину стальных и чугунных отливок, для которых $\mathrm{Bi} < 0{,}1$. Если принять температуру выбивки равной 800—1000 К, то согласно рис. 3 коэффициент теплоотдачи $\alpha = 50 \div 70$ Вт/(м^2·К) и из табл. 8 в приложении VI коэффициент теплопроводности $\lambda_3 = 42 \div 54{,}5$ Вт/(м·К). Следовательно, $\mathrm{Bi} = \frac{\alpha}{\lambda_3} l_0$ будет всегда меньше 0,1, если толщина чугунных и стальных отливок не превышает 100—120 мм. Для отливок из медных и алюминиевых сплавов этот предел составляет 200—250 мм (проверить!).

Читателю известно, что подавляющее большинство отливок для машиностроения и станкостроения имеет меньшую толщину.

Таким образом, упрощения, аналогичные предыдущим, возможно выполнить в обобщенной математической модели охлаждения твердой отливки в песчаной форме (с. 143) и в обобщенной математической модели (65-I), которая с учетом условия (61-II) описывает охлаждение отливки после выбивки. Получим:

для охлаждения отливки в форме

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Theta_4}{\partial \tau} = \mathrm{K}_{a_4} \frac{\partial^2 \Theta_4}{\partial X^2}; \quad 1 < X < 1 + \frac{l_ф}{l_0}; \quad \tau > \mathrm{Fo}_3;\\
&\Theta_4 (X,\ \mathrm{Fo}_3) = \begin{cases} \Theta_S \varphi_3 (X), \text{ если } \Psi_E = 0;\\ \Theta_E \varphi_3 (X), \text{ если } \Psi_E > 0; \end{cases}\\
&\frac{d\Theta_3}{d\tau} = \mathrm{K}_{\lambda_4} \frac{\partial \Theta_4 (1,\ \tau)}{\partial X}; \quad \Theta_3 (\tau) = \Theta_4 (1,\ \tau); \quad \tau > \mathrm{Fo}_3;\\
&\Theta_3 (\mathrm{Fo}_3) = \begin{cases} \Theta_S, \text{ если } \Psi_E = 0;\\ \Theta_E, \text{ если } \Psi_E > 0; \end{cases}\\
&-\frac{\partial \Theta_4 \left(1 + \frac{l_ф}{l_0},\ \tau\right)}{\partial X} = \begin{cases} 0 \text{ и } \Theta_4 (\infty,\ \tau) = 0, \text{ если } \frac{l_ф}{l_0} = \infty;\\ \frac{l_0}{l_ф} \mathrm{Bi}_с \Theta_4 \left(1 + \frac{l_ф}{l_0},\ \tau\right), \text{ если } \frac{l_ф}{l_0} \neq \infty. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

для охлаждения отливки после выбивки из формы

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{d\Theta_3}{d\tau}=\frac{l_0}{\mathfrak{R}}\,\mathrm{Bi_c}\,\Theta_3; \quad \tau>\mathrm{Fo}_4;\\&\Theta_3(\mathrm{Fo}_4)=\Theta_{\text{выб}},\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $\mathfrak{R}$ — приведенный размер отливки в силу $\mathrm{Bi} \ll 1$ (см. с. 61—62).

Заметим, что математическая модель (15) без труда получается из модели (14), если рассмотреть ее для $\tau > \mathrm{Fo}_4$, когда $l_ф = 0$, т. е. после удаления отливки из формы в момент $\tau = \mathrm{Fo}_4$ при $\Theta_3 = \Theta_{\text{выб}}$ (проверить!).

48. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВКИ НА ОСНОВЕ УПРОЩЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Упрощенные математические модели (11)—(15) являются краевыми задачами, для которых возможно найти аналитические точные или приближенные решения в виде функций $\Theta_1 = \Theta_1(\tau)$, $\Theta_2 = \Theta_2(\tau)$, $\chi_E = \chi(\tau)$, $\Theta_3 = \Theta_3(\tau)$, $\Theta_4 = \Theta_4(\tau)$ и с их помощью выполнить необходимый анализ процессов затвердевания и охлаждения отливок. Следовательно, методы анализа — это известные читателю методы исследования аналитических функций.

По сути дела, те упрощения, которые введены в обобщенную модель затвердевания отливки (37-II)—(43-II), и преследовали цель превратить ее в совокупность краевых задач, *доступных для аналитического решения*. Более того, так как была обоснована возможность упрощений без особой потери точности математической модели, решения краевых задач (11)—(15) явятся основой создания приближенных *расчетов режимов технологии литья в песчаные формы*; это, пожалуй, главная цель упрощений. Ибо *мало что стоит теория, в особенности теория технологического процесса, если она не будет иметь инженерного выхода в повседневную практику осуществления этого технологического процесса в современных условиях производства.*

В заключение данного параграфа еще раз подчеркнем, что расчленение математической модели (37-II)—(43-II) на пять упрощенных (11)—(15) является следствием тех допущений, которые обсуждены выше применительно к литью в песчаные формы. Конечно, с точки зрения общности результатов анализа процессов затвердевания и охлаждения отливки было бы полезным найти решение краевой задачи, в виде которой сформулирована модель (37-II)—(43-II). Но так как (и это уже отмечалось) решение ее даже численными методами представляет значительные трудности, можно попробовать найти решение менее полного варианта задачи, сохраняющего, однако, ее главные черты. Полезность такого пути читатель имел случай ощутить на примере задачи Шварца (см. с. 144), когда с помощью ее решения была дана оценка сравнительной неоднородности температурных полей в отливке и в форме (см. с. 157).

Кстати, задача Шварца — один из немногих вариантов математической модели (37-II)—(43-II), для которого возможно найти строгое аналитическое решение. И было бы непонятным, если бы эта возможность оказалась неиспользованной исследователями, занимавшимися проблемой затвердевания отливок и слитков. Исторически так и было: серьезные и планомерные исследования процесса затвердевания начались с момента появления решения Шварца, точнее — с момента появления кинетического уравнения затвердевания в виде формулы (2), которое в ряде книг и статей громко называют *«законом квадратного корня»* и которое до сих пор используют для анализа процесса затвердевания в песчаных и металлических формах.

Для того чтобы читатель смог оценить необходимость и полезность допущений, введенных в математическую модель (37-II)—(43-II), предлагаем краткий исторический обзор работ по теории затвердевания отливок.

Глава 11. «ЗАКОН КВАДРАТНОГО КОРНЯ», ИЛИ КРАТКИЙ ЭКСКУРС В ИСТОРИЮ ТЕОРИИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВОК И СЛИТКОВ

Формулу

$$\xi = m\sqrt{t}$$

называют «законом квадратного корня» затвердевания отливки. Впервые она была получена Ламэ и Клапейроном в 1831 г. для затвердевания полуограниченного пространства. Затем, в 1889 г. Стефан нашел ее при решении задачи о затвердевании льда в северных морях, т. е. тоже для полуограниченного пространства.

Кто впервые использовал закон квадратного корня для анализа затвердевания отливок и слитков, т. е. объектов, ограниченных по своим размерам, — установить может только специалист-историк. Но этот закон сыграл большую роль в становлении и развитии теории затвердевания отливок. Ниже отметим ряд важных моментов в истории использования закона квадратного корня, который то подтверждался теорией и экспериментом, то отвергался, то уточнялся многими и многими исследователями затвердевания отливок и слитков.

49. РАБОТЫ А. Л. ФЕЙЛДА, М. Х. ЛЯЙТФУТА И С. ШВАРЦА

Американский исследователь А. Л. Фейлд, пожалуй, был первым, кто придал закону квадратного корня форму рабочей формулы для анализа затвердевания слитков. В 1927 г. он сделал попытку решить задачу о затвердевании полуограниченного слитка, охлаждающегося в полуограниченной изложнице, при условии, что и слиток и изложница обладают одинаковыми теплофизическими свойствами. В 1929 г. английский исследователь М. Х. Ляйтфут по существу повторил попытку и сделал это удачно. Если А. Л. Фейлд пришел к закону квадратного корня путем логических рассуждений, то М. Х. Ляйтфут установил его так же строго, как Ламэ и Клапейрон в 1831 г. или Стефан в 1889 г.

В 1931 г. немецкий исследователь С. Шварц поставил и успешно решил свою, ставшую знаменитой задачу о затвердевании полуограниченного слитка в результате охлаждения его в полуограниченной изложнице при условии физически плотного контакта между слитком и изложницей (см. с. 144 и 157). Эта задача стала знаменитой потому, что в ней впервые после И. Стефана строго рассматривается охлаждение затвердевающего расплава при его тепловом взаимодействии с другим телом — изложницей. С точки зрения метода и результатов решения задачи ничего не изменилось, так как температура поверхности затвердевающего расплава по-прежнему осталась постоянной во времени (т. е. для затвердевающего вещества фактически сохранились простейшие граничные условия I рода, при которых была решена и задача Стефана). Но многих решение Шварца удовлетворяло, так как исчезла неопределенность при назначении температуры поверхности слитка, возникавшая при попытках использовать решение Стефана для расчетов. Читатель, который решил и задачу Стефана (задача 5 в разделе I), и задачу Шварца (задача 1 в разделе II), знает, что температура поверхности затвердевающего слитка по Шварцу просто вычисляется с учетом теплофизических свойств изложницы:

$$T_{п} - T_{ф} = \frac{T_{кр} - T_{ф}}{1 + \frac{b_4}{b_3}\,\mathrm{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_3}}\right)}. \qquad (16)$$

Все стало на свои места: кинетика затвердевания описывается простейшей и удобной формулой (2) — законом квадратного корня, коэффициент затвердевания m вычисляется из уравнения

$$L\rho_3 \frac{\sqrt{\pi}}{2} m = b_4 (T_{п} - T_{ф})\, e^{\frac{-m^2}{4a_3}} - \frac{b_1 (T_{зал} - T_{кр})\, e^{\frac{-m^2}{4a_1}}}{1 - \mathrm{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_1}}\right)} \qquad (17)$$

с учетом (16) в зависимости от перегрева расплава в момент начала заливки и его теплофизических характеристик, теплоты кристаллизации металла и его теплофизических характеристик, температуры изложницы и ее теплофизических характеристик, т. е. учтены как будто бы все обстоятельства реального процесса затвердевания слитков в изложницах.

Ряд исследователей успешно разрабатывает графические, графоаналитические и приближенные аналитические методы решения трансцендентного уравнения (17) для вычисления коэффициента m. А закон квадратного корня вошел в новую стадию своего развития — в стадию экспериментальной проверки и экспериментального определения коэффициента m, так как расчеты по (17) в большинстве случаев оказывались недостаточными.

50. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЗАКОНА

Л. Нельсон был, по-видимому, первым, кто уже в 1934 г. экспериментально методом А. С. Лаврова (методом выливания жидкого остатка) установил, что коэффициент m не остается неизменным в процессе затвердевания реального стального слитка: в начале процесса $m = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м/с$^{1/2}$, к концу процесса $m = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ м/с$^{1/2}$. Он нашел также, что коэффициент m зависит от размеров и конфигурации слитков и изложниц.

Вскоре, в 1935 г., Ч. Бриггс и Р. Гезелиус, которые впервые осуществили углубленное экспериментальное исследование затвердевания стальных отливок различной конфигурации в песчаных формах методом А. С. Лаврова, нашли, что закон квадратного корня хорошо описывает лишь начальную стадию процесса для шаров и параллелепипедов при $m = 6{,}5 \cdot 10^{-4} \div 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ м/с$^{1/2}$ в зависимости от их размеров.

Результаты Л. Нельсона, Ч. Бриггса и Р. Гезелиуса легко объяснимы: реальные слитки и отливки в виде параллелепипедов и шаров не являются аналогами полуограниченного тела, для которого найден закон квадратного корня. Но в 1934—1935 гг. для объяснения этих результатов авторы и их последователи избирали разнообразные предположения, основанные, как правило, на более или менее правдоподобных рассуждениях и умозрениях. Сейчас они кажутся странными, тем более, что в 1931 г. советский ученый Л. С. Лейбензон разработал оригинальный метод приближенного расчета затвердевания для неограниченной плиты, цилиндра и шара и чуть позже показал, что в начале процесса они ведут себя как полуограниченные тела.

Дальнейшие экспериментальные исследования были направлены на выяснение возможности использования закона квадратного корня для расчета затвердевания отливок и слитков из различных литейных сплавов и в различных формах. Использовали метод выливания жидкого остатка и термический анализ затвердевания по кривым охлаждения отливок. В СССР этой проблемой в 1936—1940 гг. занимались многие ученые и инженеры, среди них А. К. Жегалов, Ю. А. Нехендзи, Л. И. Леви, В. М. Тагеев, Б. Б. Гуляев, В. И. Лапицкий, А. С. Лившиц и др. [1]. Для ряда важных металлов и сплавов, размеров слитков и отливок, материалов изложниц и литейных форм найдены *средние значения коэффициента затвердевания.*

Особое внимание исследователей того периода было привлечено к учету влияния перегрева расплава в момент его заливки в форму на процесс затвердевания отливки или слитка. Дело в том, что из решения задачи Шварца, в частности из (17), следует уменьшение m с ростом перегрева. Однако, как показывала экспериментальная проверка, m уменьшается слишком быстро. Более того, из (17) получается, что $m = 0$, если

$$T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}} = (T_{\text{кр}} - T_{\text{ф}}) \frac{b_4}{b_1},$$

т. е. существует такой перегрев $T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}}$, при котором затвердевание не должно происходить вообще. И величина такого перегрева не так уж велика; например, для углеродистой стали в чугунной изложнице — это 150 К.

Таким образом, возникла ситуация: если перегрев, например, стали больше или равен 150 К, то слиток *никогда* не затвердеет; на практике слиток затвердевает при *любом* перегреве; следовательно, учет перегрева в коэффициенте m в соответствии с решением задачи Шварца для реальных условий затвердевания непригоден.

Читатель, выполнивший упражнение 2 в разделе I, легко объяснит причину этой ситуации. Действительно, если неограниченная плита толщиной $2l_0$ (назовем ее расплавом, залитым в форму) обменивается теплотой с полуограниченными телами (назовем их формой) в соответствии с граничным условием IV рода, то температура их контакта может быть выражена формулой

$$T_{\text{п}} - T_{\text{ф}} = (T_{\text{зал}} - T_{\text{ф}}) \left\{ \frac{1}{1 + \frac{b_4}{b_1}} - \frac{2\frac{b_4}{b_1}}{\left(1 + \frac{b_4}{b_1}\right)^2} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \frac{b_4}{b_1}}{1 + \frac{b_4}{b_1}} \right)^{n-1} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{nl_0}{\sqrt{a_1 t}} \right) \right] \right\}, \tag{18}$$

из которой очевидно, что температура $T_{\text{п}}$ поверхности уменьшается со временем и, следовательно, при любой температуре $T_{\text{зал}}$

---

[1] Читателю, заинтересовавшемуся историей изучения процессов затвердевания отливок и слитков, рекомендуем познакомиться с обзорами литературы по этому вопросу до 1950 г., которые приведены в книгах Б. Б. Гуляева [6] и Р. У. Раддла [12].

заливки достигнет температуры кристаллизации, т. е. слиток будет затвердевать при любом перегреве, что и наблюдается на практике. Теперь устремим l_0 в формуле (18) в бесконечность. Получим

$$T_{\text{п}} - T_{\text{ф}} = \frac{T_{\text{зал}} - T_{\text{ф}}}{1 + \frac{b_4}{b_1}},$$

т. е. температура контакта двух полуограниченных тел неизменна во времени. И ясно, что затвердевание расплава возможно лишь в случаях, когда $T_{\text{п}} < T_{\text{кр}}$. Если же начальная температура $T_{\text{зал}}$ расплава такова, что $T_{\text{п}} > T_{\text{кр}}$, то затвердевание полуограниченной массы расплава невозможно.

Итак, причина отмеченной ситуации состоит в том, что решение задачи С. Шварца справедливо только для полуограниченного слитка, а на практике и в эксперименте слитки и отливки всегда имеют конечные размеры. Необходимо, следовательно, переходить к задачам затвердевания конечных слитков и отливок. И естественно, М. Х. Ляйтфут, и С. Шварц, это понимали и в последующих статьях предприняли попытки приближенного решения задач для неограниченной плиты и неограниченного цилиндра. Однако полученные ими формулы были сложными и неточными и не пользовались успехом.

Экспериментаторы быстрее решили эту проблему. В небольшом исследовании Д. Чипмена и Д. Фондерсмита в 1937 г. впервые появилась новая форма записи закона квадратного корня:

$$\xi = m_0 \sqrt{t} - M, \tag{19}$$

где m_0 — коэффициент затвердевания неперегретого расплава; M — поправка, учитывающая влияние перегрева расплава на начало и ход процесса затвердевания.

Впоследствии закон квадратного корня в форме (19) подтвердился в более обширных экспериментальных исследованиях Р. У. Раддла (1950—1951 гг.) для литья в песчаные формы, Е. Марбурга (1953 г.) для литья слитков в изложницы и, несколько раньше, в теоретическом исследовании Н. И. Хворинова (1939—1940 гг.)

51. ИССЛЕДОВАНИЯ Н. И. ХВОРИНОВА

Теоретические исследования Н. И. Хворинова в области затвердевания слитков и отливок по своему значению стоят в одном ряду с исследованиями Д. Стефана и С. Шварца. В 1940 г. опубликована статья, суммирующая главные результаты. Рассмотрим три: учет перегрева расплава, так называемое правило Хворинова и учет конфигурации отливки в законе квадратного корня.

Учет перегрева расплава

Н. И. Хворинов использовал два способа.

Первый способ имел целью учесть перегрев в коэффициенте закона квадратного корня и при этом не допустить ситуации, которая возникает в решении С. Шварца. Н. И. Хворинов предложил теплоту перегрева расплава присоединить к теплоте кристаллизации металла и в этой связи отказаться от второго слагаемого в (17) для вычисления коэффициента m:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} m \left[L\rho_з + c_1\rho_1 (T_{зал} - T_{кр})\right] = \frac{b_з (T_{кр} - T_ф)\, e^{-\frac{m^2}{4a_з}}}{\frac{b_з}{b_4} + \mathrm{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_з}}\right)}. \qquad (20)$$

Далее, анализируя свои эксперименты о влиянии перегрева на продолжительность $t_з$ полного затвердевания плоских отливок в песчаных формах (рис. 33), он нашел, что результаты хорошо описываются законом квадратного корня при

$$t_з = \left(\frac{l_0}{m}\right)^2, \qquad (21)$$

если

$$m = \frac{m_0}{1 + \frac{c_1}{L}(T_{зал} - T_{кр})}. \qquad (22)$$

Действительно, график на рис. 33 можно представить уравнением прямой

$$\frac{\sqrt{t_з}}{\sqrt{t_з^*}} = 1 + B(T_{зал} - T_{кр}),$$

где $t_з^*$ — время полного затвердевания неперегретого расплава; B — тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс.

Так как $l_0 = m\sqrt{t_з} = m_0\sqrt{t_з^*}$, то

$$m = \frac{m_0}{1 + B(T_{зал} - T_{кр})};$$

согласно данным Н. И. Хворинова, $B = c_1/L$.

Заметим, что соотношение (22) просто получается из уравнения (20). При $T_{зал} - T_{кр} = 0$

$$m_0 e^{\frac{m_0^2}{4a_з}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{b_4}{L\rho_з} (T_п - T_ф)_0,$$

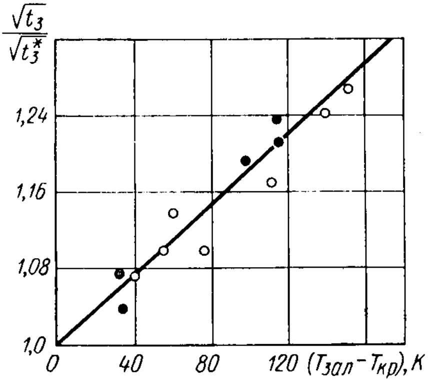


Рис. 33. Результаты эксперимента Н. И. Хворинова по анализу влияния перегрева на продолжительность затвердевания отливок в песчаной (●) и шамотных (○) формах

где $(T_п - T_ф)_0$ — температура поверхности слитка при затвердевании неперегретого расплава; эту температуру можно рассчитать по (16) для $m = m_0$.

При $T_{зал} - T_{кр} > 0$ из (20)

$$me^{\frac{m^2}{4a_3}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{b_4 (T_п - T_ф)}{L\rho_3 + c_1\rho_1 (T_{зал} - T_{кр})}.$$

Следовательно, с учетом (16)

$$me^{\frac{m^2}{4a_3}} = \frac{m_0 e^{\frac{m_0^2}{4a_3}}}{1 + \frac{c_1\rho_1}{L\rho_3}(T_{зал} - T_{кр})} \frac{\frac{b_3}{b_4} + \operatorname{erf}\left(\frac{m_0}{2\sqrt{a_3}}\right)}{\frac{b_3}{b_4} + \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_3}}\right)}.$$

Так как для большинства металлов и сплавов $\rho_1 \approx \rho_3$, а $a_3 = 10^{-5} \div 6{,}1 \cdot 10^{-6}$ м²/с (см. с. 154) и для песчаных форм $m = 6{,}5 \cdot 10^{-4} \div 10^{-3}$ м/с$^{1/2}$ (см. с. 172), то $m^2 \ll 4a_3$ и, конечно, $m_0^2 \ll 4a_3$. Тогда, $\exp(m^2/4a_3) \approx \exp(m_0^2/4a_3) \approx 1$. Величина $\operatorname{erf}(m/2\sqrt{a_3}) \approx \operatorname{erf}(m_0/2\sqrt{a_3}) \approx 0$ по сравнению с отношением b_3/b_4, которое для литья в песчаные формы более 10 (см. с. 158). В итоге получается соотношение (22).

Важно отметить, что соотношение (22) — экспериментальный факт, установленный для отливок конечных размеров. Поэтому присоединение теплоты перегрева к теплоте кристаллизации в уравнении (20), заимствованном из решения С. Шварца, является способом использовать закон квадратного корня для расчета затвердевания плоских отливок (типа плиты), например, в песчаных формах, так как при литье в песчаные формы максимально реализуется условие о физически плотном контакте отливки и формы.

Н. И. Хворинов нашел теоретическое подтверждение формуле (22) другим путем. Он рассмотрел уравнение теплового баланса плоской отливки и полуограниченной формы:

$$Q_{кр} = Q_ф,$$

где $Q_{кр} = \rho_3 [L + c_1 (T_{зал} - T_{кр})]\, l_0$ — теплота, отдаваемая отливкой в форму с единицы поверхности их контакта в результате полного затвердевания расплава; $Q_ф = c_4\rho_4 \int\limits_0^\infty (T_4 - T_ф) dx$ — теплота, аккумулируемая формой за время t_3.

Так как для полуограниченной формы (см. с. 157)

$$T_4 - T_ф = (T_п - T_ф)\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_4 t}}\right)\right],$$

то при $t = t_{\text{з}}$ величина $Q_{\text{ф}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} b_4 (T_{\text{п}} - T_{\text{ф}}) \sqrt{t_{\text{з}}}$. Следовательно,

$$t_{\text{з}} = \left\{ \frac{1{,}128 b_4 (T_{\text{п}} - T_{\text{ф}})\, l_0}{[L + c_1 \rho_1 (T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}})]\, \rho_{\text{з}}} \right\}^2 \tag{23}$$

или, сравнивая с (21),

$$m = \frac{1{,}128 b_4 (T_{\text{п}} - T_{\text{ф}})}{L \rho_{\text{з}} \left[1 + \frac{c_1}{L} (T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}}) \right]}; \tag{24}$$

при $T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}} = 0$ получается значение m_0:

$$m_0 = \frac{1{,}128 b_4}{L \rho_{\text{з}}} (T_{\text{п}} - T_{\text{ф}}); \tag{25}$$

следовательно, формула (24) является соотношением (22).

Если вдуматься в ход рассуждений Н. И. Хворинова, то можно увидеть, что он отказался от учета изменения теплосодержания затвердевшей части отливки (см. формулу для $Q_{\text{кр}}$), принял неизменной температуру поверхности контакта отливки с формой (см. формулу для $Q_{\text{ф}}$) и не делал различия между значением этой температуры при затвердевании перегретого и неперегретого расплава. Как ясно из вывода соотношения (22), перечисленные допущения оправданы, если рассматривать затвердевание отливки в песчаной форме, приняв, что

$$T_{\text{п}} - T_{\text{ф}} = \frac{T_{\text{кр}} - T_{\text{ф}}}{1 + \frac{b_4}{b_3}}. \tag{26}$$

Однако в сборнике статей Н. И. Хворинова [13] соотношение (22), представленное в виде формулы (24), предлагается для расчета коэффициента m в законе квадратного корня при всех случаях литья, если $T_{\text{п}} - T_{\text{ф}}$ брать из (16). Лишь в 1954 г., в своей последней книге Н. И. Хворинов упоминает о том, что (24) пригодна для литья в песчаные формы [1] и рекомендует $T_{\text{п}} - T_{\text{ф}}$ вычислять по формуле (26) [14, с. 34].

Второй способ учета перегрева в законе квадратного корня является модификацией первого, так как своими истоками он

---

[1] Если читатель захочет познакомиться с исследованием Н. И. Хворинова [14], то он обратит внимание, что в формуле, которой здесь присвоен номер 24, числовой множитель 1,158. В статье, опубликованной в 1940 г., стоит тот же множитель [13]. По-видимому, это опечатка. Выше, повторив выкладки Н. И. Хворинова, мы установили, что множитель равен $2/\sqrt{\pi}$, т. е. 1,128. Однако во многих книгах, где обсуждаются результаты Н. И. Хворинова, утверждается будто число 1,158 связано с тем, что в (24) к теплоте кристаллизации прибавлена теплота перегрева; см., например, Р. У. Раддл [12, с. 177].

имеет те же эксперименты, которые привели к соотношению (22). Если m из соотношения (22) подставить в формулу (21), то

$$t_з = \left\{\frac{l_0}{m_0}\left[1 + \frac{c_1}{L}(T_{зал} - T_{кр})\right]\right\}^2. \tag{27}$$

Анализ температурных полей в затвердевающем расплаве при литье в песчаные формы привел Н. И. Хворинова к заключению, что собственно затвердевание отливки начинается после почти полной потери расплавом перегрева. Поэтому влияние перегрева на начало и ход процесса затвердевания состоит в том, что в процесс вводится «вступительный период». Так как из (27) следует, что $l_0 = m_0 \sqrt{t_з} - l_0 \frac{c_1}{L}(T_{зал} - T_{кр})$, то в результате простейшей индукции для любого момента времени t

$$\xi = m_0 \sqrt{t} - l_0 \frac{c_1 (T_{зал} - T_{кр})}{L}. \tag{28}$$

Н. И. Хворинов назвал эту формулу модифицированным законом квадратного корня. Здесь важно отметить, что ее форма и смысл точно совпадают с эмпирической формулой (19), найденной Д. Чипменом и Д. Фондерсмитом.

Правило Хворинова

Это правило является результатом обобщения формулы (21) для расчета времени полного затвердевания отливки любой конфигурации.

В 1939 г. Н. И. Хворинов ввел понятие о приведенном размере отливки, который определяется отношением V_0/F_0. Так как приведенный размер неограниченной плиты $V_0/F_0 = l_0$, то (21) преобразуется к виду

$$t_з = \left(\frac{V_0}{F_0 m}\right)^2, \tag{29}$$

пригодному для отливки любой конфигурации.

Формула (29) выражает правило Н. И. Хворинова: «время полного затвердевания отливки пропорционально ее приведенному размеру».

В течение последующих 10—15 лет в литературе обсуждался вопрос о том, где применимо правило Н. И. Хворинова. Исследователи находили случаи безоговорочного соответствия результатов экспериментов формуле (29) и случаи отклонения от нее. Анализ литературы показывает, что соответствие наблюдалось всегда, когда речь шла о литье сталей или чугунов в песчаные формы или в окрашенные металлические. Это, кажется, понятно, так как приведенный размер является характеристикой конфигурации тела лишь в случае, когда неоднородность температурного поля в этом теле пренебрежимо мала (см. с. 61—63 и с. 79—80).

В 1950 г. Б. Б. Гуляев предложил свою формулу типа (29):

$$t_{\text{з}} = M\Phi r_0^2, \qquad (30)$$

где r_0 — половина толщины или радиус цилиндрической и сферической отливок; M — коэффициент материала отливки и формы, приведенный Б. Б. Гуляевым в табл. 11 [6, с. 62]; по существу коэффициент является обратной величиной квадрата коэффициента m затвердевания отливки; Φ — коэффициент формы, зависящий только от конфигурации отливки (для плиты 1; для цилиндра 0,76; для шара 0,47).

Очевидно, что формула (30) пригодна для расчета времени полного затвердевания отливок в условиях, когда неоднородностью температурного поля в них пренебрегать нельзя. Коэффициент Φ формы поэтому должен зависеть не только от конфигурации отливки, но и от интенсивности ее охлаждения в процессе затвердевания расплава. При весьма малой интенсивности охлаждения в песчаной форме, когда для характеристики конфигурации отливки пригодно отношение V_0/F_0, из сравнения (29) и (30) получаем, что $\Phi = 1$ для плиты, $\Phi = 0{,}25$ для цилиндра и $\Phi = 0{,}11$ для шара. При другой, большей интенсивности значения коэффициента Φ Б. Б. Гуляев нашел из эксперимента. При еще большей интенсивности охлаждения величины Φ будут другими.

Так, Н. Г. Гиршович и Ю. А. Нехендзи в 1956 г. придали формуле (29) следующий вид:

$$t_{\text{з}} = \mu_1\mu_2\left(\frac{\mathfrak{R}_0}{m_0}\right)^2,$$

где μ_1 и μ_2 — поправочные коэффициенты, учитывающие влияние конфигурации отливки и перегрева расплава при его заливке в форму [1].

Тогда же, решая на гидроинтеграторе задачу (37-II), (45-II), (39-II), (46-II); (41-II), (42-II), (47-II) и (48-II) при $l_{\text{ф}}/l_0 = \infty$ для плиты, а также аналогичные задачи для цилиндра и шара, нашли, что коэффициент μ_1 зависит от материала формы. Например, при литье стали получены следующие значения μ_1:

Форма	Плита	Цилиндр	Шар
Песчаная	1	0,9—1,0	0,7—1,1
Металлическая	1	2,0—2,6	2,8—3,2
Водоохлаждаемая	1	2,8—3,2	3,8—4,2

---

[1] **Гиршович Н. Г., Нехендзи Ю. А.** Аналитическое решение задач о затвердевании отливок различной конфигурации. — «Литейное производство», 1956, № 3, 4, 6, 12.

Если сравнить (30) с формулой Н. Г. Гиршовича и Ю. А. Нехендзи, то увидим, что

$$\Phi = \mu_1 \left(\frac{\mathfrak{R}_0}{r_0} \right)^2$$

и получаются следующие значения Φ:

Форма	Плита	Цилиндр	Шар
Песчаная	1	0,235—0,25	0,078—0,122
Металлическая	1	0,50—0,65	0,31—0,36
Водоохлаждаемая ...	1	0,70—0,80	0,42—0,47

Однако μ_1 не единственная поправка на влияние конфигурации отливки. Н. Г. Гиршович и Ю. А. Нехендзи нашли, что

$$\mu_2 = 1 + \varphi \frac{c_1}{L} (T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}}),$$

где φ зависит от конфигурации отливки и материала формы:

Форма	Плита	Цилиндр	Шар
Песчаная	1,74	1,23	1,07
Металлическая	0,65	0,35	0,16
Водоохлаждаемая	0	0	0

Учет конфигурации отливки в законе квадратного корня

Н. И. Хворинов применил индукцию модифицированного закона на основе только что рассмотренного правила: так как для плоской отливки $l_0 = V_0/\mathrm{F}_0$, то

$$\xi_э = m_0 \sqrt{t} - \mathfrak{R} \frac{c_1}{L} (T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}}), \tag{31}$$

где $\mathfrak{R}$ — приведенный размер отливки; $\xi_э$ — «плоскостной эквивалент» толщины корки затвердевшей части отливки произвольной конфигурации; по аналогии с приведенным размером

$$\xi_э = \frac{V}{F_0}, \tag{32}$$

если V — объем затвердевшей части отливки.

Например, для затвердевающего бесконечного цилиндра

$$\xi_э = \xi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\xi}{r_0} \right),$$

поэтому модифицированный закон квадратного корня (31) примет вид

$$\frac{\xi}{r_0} = 1 - \left\{ 1 - \frac{2}{r_0} \left[m_0 \sqrt{t} - \frac{r_0}{2} \frac{c_1}{L} (T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}}) \right] \right\}^{1/2},$$

ибо для цилиндра $\mathfrak{R} = r_0/2$.

Читатель, по-видимому, помнит: $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$; при этом ошибка будет меньше 2%, если $x < 0{,}3$. Следовательно, в случае затвердевания цилиндра

$$\xi \approx m_0 \sqrt{t} - \frac{r_0}{2} \frac{c_1}{L} (T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}})$$

при $(\xi/r_0) < 0{,}3$. Сравнивая полученную формулу с (28), придем к выводу, что значения их совпадают при $l_0 = r_0/2$ (т. е. при одинаковых приведенных размерах плиты и цилиндра) и что начало процесса затвердевания цилиндра подчиняется закону квадратного корня в том его виде, в каком он был найден в работах М. Х. Ляйтфута и С. Шварца для полуограниченного слитка. Экспериментально этот факт был установлен раньше (см. с. 172), но до исследования Н. И. Хворинова не находил обоснованного объяснения.

К аналогичным выводам нетрудно прийти и в отношении затвердевания шаровой отливки. Рекомендуем читателю необходимые выкладки выполнить самостоятельно.

Таким образом, главные результаты теоретического исследования Н. И. Хворинова в области затвердевания отливок сводятся к формулам (31), (32) и (25), (26), которые для дальнейшего необходимо несколько преобразовать:

$$V = \frac{1{,}128 b_4 F_0}{L\rho_3 \left(1 + \frac{b_4}{b_3}\right)} (T_{\text{кр}} - T_{\text{ф}}) (\sqrt{t} - \sqrt{t_1}), \tag{33}$$

где t_1 — время отвода перегрева от расплава;

$$t_1 = \left[\frac{c_1 \rho_3 \mathfrak{R} (T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}})}{1{,}128 b_4 (T_{\text{кр}} - T_{\text{ф}})} \left(1 + \frac{b_4}{b_3}\right)\right]^2. \tag{34}$$

52. ИТОГИ И ВЫВОДЫ

На этом остановимся в экскурсе в историю тепловой теории затвердевания отливок и слитков. Остановимся потому, что по существу история закона квадратного корня в его применении для анализа затвердевания отливок в песчаных формах заканчивается работами Н. И. Хворинова. Было еще несколько попыток усовершенствования закона, но на этом пути далее Н. И. Хворинова никто не ушел [1].

Если еще раз прочитать внимательно данную главу, вдуматься в те допущения, которые привели от формулы (2) к формулам (33) и (34), и сопоставить их с теми, какие были приняты в предыдущей главе при формулировке приближенных математических моделей затвердевания отливок, то мы увидим, что они одинаковы. Они сво-

---

[1] К закону квадратного корня вернемся еще раз при обсуждении способов асчета затвердевания отливок в металлических формах (см. раздел IV, § 76).

дятся к возможности пренебречь неоднородностью температурного поля в затвердевающей отливке и принять обычную песчаную форму, получаемую из малопрочных смесей, полуограниченным телом, имеющим с отливкой физически плотный контакт.

Исторически необходимость перечисленных допущений выявлялась в результате попыток использовать закон квадратного корня для анализа реального процесса затвердевания отливки в форме. Если учесть, что закон квадратного корня — решение задачи о затвердевании полуограниченной отливки, а реальный процесс затвердевания исследовался на отливках конечных размеров, то использование закона квадратного корня для анализа реального процесса затвердевания фактически означало *подгонку* закона к реальному процессу. Она осуществлялась только через коэффициент затвердевания m. Поэтому в некоторых работах коэффициент m получил ироническое название «коэффициента незнания»: величина его, по данным разных исследователей, различна и зависит от состава сплавов, размеров и конфигурации детали, условий литья, а также изменяется в процессе затвердевания каждой данной конкретной отливки.

Однако вряд ли следует разделять иронию тех авторов, которые называют коэффициент m коэффициентом незнания. Дело в том, что задача С. Шварца, решением которой явилась формула (2) закона квадратного корня применительно к условиям, отражающим в общих чертах обстоятельства теплообмена отливки и формы, *единственная*, которую в то время возможно было решить аналитически и точно. Естественно, что подгонять пришлось закон квадратного корня. И так как он давал связь между толщиной затвердевшей корки и временем, экспериментальные исследования были направлены на выяснение именно этой связи в реальных отливках. Следует подчеркнуть, что эти экспериментальные исследования увенчались определенным успехом: была найдена более удобная форма закона в виде (19), в которой устранено первое неудобство формулы (2) — учет влияния перегрева в коэффициенте m.

Оставалось второе неудобство: необходимость экспериментального определения двух величин в (19) — коэффициента m_0 и поправки M. Н. И. Хворинов своими расчетами показал (хотя сам признал это позже), что аналитическое определение их возможно, если рассматривать конечную отливку и пренебречь неоднородностью температурного поля в ней. При этом последнее явилось результатом экспериментального исследования температурных полей в отливке (см. с. 178). В итоге — формулы (25), (26) и (28) и правило Хворинова, т. е. (33) и (34).

В предыдущем параграфе при формулировке приближенных математических моделей исходили с самого начала из допущения возможности пренебрегать неоднородностью температурного поля в затвердевающей отливке. Причем приняли это допущение на основе оценки величины критерия K_{a_i} (см. с. 154). Анализ температурных полей потребовался лишь для подтверждения справедливости полученной оценки $К_{a_i}$.

Возникает естественный вопрос о том, почему исследователи 30-х годов не поступили так же. Возможен только один ответ. Критерий $К_{a_i}$ является результатом представления математической модели процесса затвердевания (37-II)—(43-II) в обобщенных переменных методами теории подобия. Теория подобия получила необходимое развитие в 1934—1935 гг., а орудием исследования стала значительно позже. В 30-х годах она вызывала к себе лишь скептическое отношение и не могла быть методом для исследования задач, решения которых не существовало.

Если это так, то возникает еще один вопрос: почему исследователи не прибегли сразу к анализу температурных полей. Для литья в песчаные формы он дал бы основания для того, чтобы пренебречь неоднородностью полей в отливке. Здесь, видимо, сказался «гипноз» закона квадратного корня, который установил связь между толщиной затвердевшей части отливки и временем. А, как мы уже отметили, экспериментаторы в своих исследованиях пытались выявить именно эту связь.

Таким образом, закон квадратного корня и его историю следует рассматривать как явление закономерное, обусловленное логикой развития знания о процессе затвердевания отливки. Но сейчас придерживаться этой логики нет небоходимости, так как процесс затвердевания может быть исследован на основе более полных математических моделей, а требующиеся расчетные формулы могут быть получены в результате упрощения этих моделей методами обобщенных переменных.

Использование теории подобия для анализа тепловых условий затвердевания отливок и слитков началось в 50-х годах. Наиболее серьезные работы в этом направлении выполнены Г. П. Иванцовым, Б. Б. Гуляевым, А. И. Вейником и А. А. Гухманом. Их теоретические и экспериментальные исследования заложили фундамент современной тепловой теории формирования отливки. В дальнейшем будем довольно часто обращаться к их результатам.

Глава 12. ОХЛАЖДЕНИЕ ПЕРЕГРЕТОГО РАСПЛАВА. РАСЧЕТ ЗАПОЛНЕНИЯ ФОРМЫ

Здесь и далее, включая § 65, с помощью упрощенных математических моделей (11)—(14) исследуется затвердевание расплава и охлаждение отливок в *массивных неохлаждаемых песчаных формах.*

Математические модели (11)—(14) представляют собой *краевые задачи* на прогрев формы теплотой отливки во время охлаждения перегретого расплава, залитого в форму, затвердевания расплава, полностью потерявшего перегрев, и охлаждения уже затвердевшей отливки. Поэтому исследование каждого из перечисленных процессов выполнено на основе аналитических (точных или приближенных) решений соответствующих краевых задач.

Рассмотрим кинетику охлаждения перегретого расплава с помощью математической модели (11).

53. ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ОХЛАЖДЕНИЯ ПЕРЕГРЕТОГО РАСПЛАВА, ЗАЛИТОГО В ФОРМУ

Представим математическую модель (11) для $l_ф = \infty$ в первоначальных переменных:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\vartheta_4}{\partial t}=a_4\frac{\partial^2\vartheta_4}{\partial x^2};\ l_0<x<\infty;\ t>t_{зал};\\&\vartheta_4(x,\ t_{зал})=\vartheta_н\varphi_0(x);\\&\vartheta_4(l_0,\ t_{зал})=\vartheta_н;\\&\vartheta_4(\infty,\ t)=0;\ \frac{\partial\vartheta_4(\infty,\ t)}{\partial x}=0;\\&\vartheta_4(l_0,\ t)=\vartheta_1(t);\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

$$\left.\begin{aligned}&c_1\rho_1 l_0\frac{d\vartheta_1(t)}{dt}=\lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(l_0,\ t)}{\partial x};\ t>t_{зал};\\&\vartheta_1(t_{зал})=\vartheta_н,\end{aligned}\right\}\qquad(36)$$

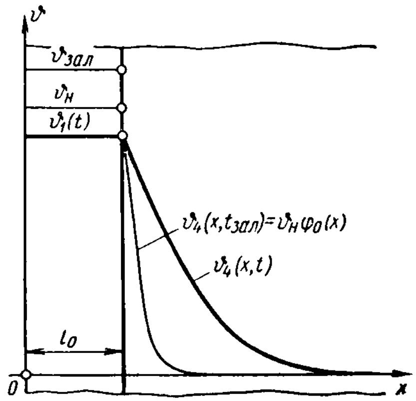
где $\vartheta = T - T_ф$, т. е. все температуры отливки и формы отсчитывают от температуры $T_ф$ формы, как от нуля; $\varphi_0(x)$ — функция распределения относительной температуры, установившейся в форме к концу ее заполнения; очевидно, что $\varphi_0(l_0) = 1$ и $\varphi_0(\infty) = 0$.

Из математической модели (11) выделена краевая задача (35), которая является известной из теории теплопроводности задачей на прогрев полуограниченного тела с начальным распределением температуры в нем по произвольному закону $\vartheta_4(x,\ t_{зал}) = \vartheta_н\varphi_0(x)$ при изменении температуры поверхности $\vartheta_4(l_0,\ t)$ по времени также по произвольному закону $\vartheta_1(t)$ (рис. 34).

Дифференциальное уравнение (36) связывает скорость изменения температуры перегретого расплава с поверхностной плотностью теплового потока в форму и является по своему смыслу *уравнением теплового баланса* охлаждающего расплава и прогревающейся формы.

Точное решение задачи (35) можно найти методами операционного исчисления. Однако оно будет решением в общем виде, и мы не сумеем его использовать для анализа кинетики охлаждения

Рис. 34. Схема к задаче (35) на прогрев формы теплотой перегретого расплава



перегретого расплава с помощью уравнения теплового баланса (36), ибо функция $\varphi_0(x)$ нам пока неизвестна. Дело в том, что охлаждение перегретого расплава в форме происходит в два этапа. Вначале расплав охлаждается за время $0 < t < t_{зал}$ заполнения формы, затем после окончания заполнения, т. е. при $t > t_{зал}$, охлаждение расплава продолжается. В первом этапе охлаждается *поток* перегретого расплава во время движения его по каналам литниковой системы и в полости формы. Во втором этапе охлаждается расплав, *залитый* в форму. Математическая модель (11) описывает только второй этап процесса охлаждения перегретого расплава, а о первом этапе нам известно еще очень мало: лишь то, что форма заполняется в течение времени $t_{зал}$ и температура расплава при этом снижается от $T_{зал}$ в момент начала заливки до $T_н$ в момент ее окончания. Если температуру $T_{зал}$ и время $t_{зал}$ заливки можно найти в справочниках по литейному производству, то величина $T_н$ неизвестна. Можно лишь предполагать, что $T_н$ одинакова во всем объеме расплава, залитого в форму, так как при заполнении происходит интенсивная вынужденная циркуляция расплава в полости формы.

Поэтому поступим так: пусть расплав заполняет форму мгновенно, т. е. $t_{зал} = 0$; тогда, естественно, $\varphi_0(x) = 0$, $\vartheta_н = \vartheta_{зал}$ и, следовательно, для задачи (35) можно найти точное решение, с помощью которого из уравнения теплового баланса (36) определяется закон охлаждения расплава.

Здесь читатель вправе поставить вопрос о том, насколько указанные условия соответствуют реальным при литье в песчаные формы. Конечно, это соответствие весьма приблизительное, так как мгновенное заполнение формы реально невозможно. Но известно, что время заполнения формы мало по сравнению со временем отвода теплоты перегрева от расплава. Следовательно, за время $t_{зал}$ уменьшение температуры расплава по сравнению с $T_{зал}$ и изменение распределения температуры в форме по сравнению с начальным, когда $T_ф \equiv \mathrm{const}$, незначительны и их допустимо, в первом приближении, не учитывать. Однако приведенные соображения выглядят не очень убедительно. Например, при литье массивных толстостенных отливок еще можно не учитывать время заполнения формы, а при литье тонкостенных отливок — наверняка нельзя. Поэтому рекомендуем читателю рассмотреть предложение исследовать вариант мгновенного заполнения формы как *математический эксперимент* на модели (11) для случая, когда $t_{зал} = 0$, и, следовательно, $\varphi_0(x) = 0$ и $\vartheta_н = \vartheta_{зал}$. Цель математического эксперимента — исследование кинетики охлаждения перегретого расплава, *залитого* в форму.

Формулировка краевой задачи (35) при $t_{зал} = 0$, $\varphi_0(x) = 0$ и $\vartheta_н = \vartheta_{зал}$ примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\vartheta_4}{\partial t} = a_4\frac{\partial^2\vartheta_4}{\partial x^2};\ l_0 < x < \infty;\ t > 0;\\
&\vartheta_4(x,\ 0) = 0;\\
&\vartheta_4(\infty,\ t) = 0;\ \frac{\partial\vartheta_4(\infty,\ t)}{\partial x} = 0;\\
&\vartheta_4(l_0,\ t) = \vartheta_1(t);\ \vartheta_1(0) = \vartheta_{зал}.
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Точное решение задачи (37) легко найти по теореме Дюамеля из операционного исчисления:

$$\vartheta_4(x,\ t) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \vartheta_1(t-u)\frac{\vartheta(x,\ u)}{\vartheta_{зал}}\,du,$$

если функция $\vartheta_1(t)$ и ее первая производная по времени кусочно-непрерывны и известна $\vartheta(x,\ t)$ — решение задачи (37) при постоянной температуре поверхности тела[1] $\vartheta_4(l_0,\ t)$, равной $\vartheta_{зал}$.

Первое условие может быть принято, так как $\vartheta_1(t)$ — температура охлаждающегося расплава в форме, т. е. функция, непрерывная по существу физического процесса. Что же касается второго условия, то в разделе I среди задач, рекомендованных читателю для самостоятельной проработки, задача 1 — как раз та, решение которой сейчас нам требуется. Читатель, конечно, без труда с нею справился. Поэтому приведем ее решение для $x \geqslant l_0$ и $t \geqslant 0$:

$$\vartheta(x,\ t) = \vartheta_{зал}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x-l_0}{2\sqrt{a_4 t}}\right). \quad (38)$$

Следовательно,

$$\vartheta_4(x,\ t) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \vartheta_1(t-u)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x-l_0}{2\sqrt{a_4 u}}\right)du. \quad (39)$$

Теперь используем $\vartheta_4(x,\ t)$ из формулы (39), которая является *точным* решением задачи (37), в уравнении теплового баланса

---

[1] По существу так можно сформулировать теорему Дюамеля. Если читатель не вспомнил ее, настоятельно рекомендуем прочитать еще раз § 48, гл. VII в книге А. В. Лыкова «Теплопроводность» (М., «Высшая школа», 1967. 392 с.).

(36). Вычислим частную производную функции $\vartheta_4(x, t)$ по x при $x = l_0$:

$$\frac{\partial \vartheta_4(l_0, t)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\vartheta_1(t-u)}{\sqrt{\pi a_4 u}}\, du.$$

Подставим ее в уравнение (36):

$$-c_1\rho_1 l_0\, d\vartheta_1(t) = \frac{b_4}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t \frac{\vartheta_1(t-u)}{\sqrt{u}}\, du \right] dt \right\}$$

и выполним интегрирование [1] в левой и правой частях от нуля до t:

$$\vartheta_1(t) = \vartheta_{\text{зал}} - \frac{b_4}{\sqrt{\pi} c_1\rho_1 l_0} \int_0^t \frac{\vartheta_1(t-u)}{\sqrt{u}}\, du, \tag{40}$$

так как в соответствии с начальным условием $\vartheta_1(0) = \vartheta_{\text{зал}}$.

В итоге получим интегральное уравнение для искомой функции $\vartheta_1(t)$. Будем решать это уравнение, применяя интегральное преобразование Лапласа:

$$\mathscr{L}[\vartheta_1(t)] - \mathscr{L}[\vartheta_{\text{зал}}] = -\frac{b_4}{\sqrt{\pi} c_1\rho_1 l_0} \mathscr{L}\left[\int_0^t \vartheta_1(t-u) \frac{1}{\sqrt{u}}\, du \right].$$

По теореме умножения изображений [2]

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t \vartheta_1(t-u) \frac{1}{\sqrt{u}}\, du \right] = \mathscr{T}(s) \sqrt{\frac{\pi}{s}},$$

так как $\mathscr{L}[\vartheta_1(t)] = \mathscr{T}(s)$; $\mathscr{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$. Учитывая, что $\mathscr{L}[\vartheta_{\text{зал}}] = \frac{1}{s}\vartheta_{\text{зал}}$, уравнение (40) для изображений входящих в него функций принимает вид

$$\mathscr{T}(s) - \frac{\vartheta_{\text{зал}}}{s} = -\frac{b_4}{c_1\rho_1 l_0} \frac{1}{\sqrt{s}} \mathscr{T}(s),$$

---

[1] Если интеграл в квадратных скобках обозначить $J(t)$, то правая часть уравнения в фигурных скобках примет вид $\frac{\partial J(t)}{\partial t} dt = dJ(t)$. При интегрировании правой части уравнения от 0 до t получим $\int_0^t dJ(t) = J(t)$, так как $J(t)$ при $t = 0$ равен нулю.

[2] Читатель, конечно, возобновил в памяти теорему Дюамеля. Поэтому он вспомнил и теорему умножения изображений, так как теорема Дюамеля доказывается с ее помощью.

откуда

$$\mathcal{T}(s) = \frac{\vartheta_{\text{зал}}}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s} + \frac{b_4}{c_1\rho_1 l_0}\right)}.$$

Переходя к оригиналу с помощью таблиц изображений функций, получим

$$\vartheta_1(t) = \vartheta_{\text{зал}} \exp\left(\frac{b_4^2 t}{(c_1\rho_1 l_0)^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{b_4\sqrt{t}}{c_1\rho_1 l_0}\right). \tag{41}$$

Формула (41) является *точным* решением задачи (36)—(37) на прогрев массивной песчаной формы теплотой перегретого расплава при литье толстостенных отливок, т. е. является решением задачи (35)—(36) при $\varphi_0(x) = 0$ и $t_{\text{зал}} = 0$. Другими словами, формула (41) представляет математическую модель (11) для случая $\varphi_0(x) = 0$ и $t_{\text{зал}} = 0$. На основе этой формулы просто выполнить необходимое исследование кинетики охлаждения перегретого расплава, залитого в форму.

Прежде всего, напомним читателю, что, как правило, перегрев расплавов многих литейных сплавов в момент начала заливки редко составляет величину, большую 15% от температуры T_L начала их затвердевания. Вычислим аргумент $A = \frac{b_4\sqrt{t}}{c_1\rho_1 l_0}$ в (41) для $\vartheta_1 = \vartheta_L$ и $\vartheta_{\text{зал}} = 1{,}15\ \vartheta_L$;

$$\frac{1}{1{,}15} = 0{,}87 = e^{A^2} \operatorname{erfc}(A)$$

и по таблицам экспоненты и функций Гаусса (см. приложение IX, табл. 16) $A \approx 0{,}13$. Это означает, что с ошибкой менее 1,5% функция $\exp(A^2) = 1$ и $\operatorname{erfc}(A) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}A$ (см. приложение III).

Следовательно, для расчета процесса охлаждения перегретого расплава формулу (41) можно заменить приближенной

$$\vartheta_1(t) = \vartheta_{\text{зал}}\left(1 - \frac{2b_4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}c_1\rho_1 l_0}\right). \tag{42}$$

На рис. 35 приведены графики кривых, рассчитанных по формулам (41) и (42). Они убеждают в допустимости такой замены.

Рассчитаем время t_1 полного охлаждения перегретого расплава чистого металла. Из (42) при $\vartheta_1 = \vartheta_{\text{кр}}$

$$t_1 = \left[\frac{c_1\rho_1 l_0 (T_{\text{зал}} - T_{\text{кр}})}{1{,}128 b_4 (T_{\text{зал}} - T_{\text{ф}})}\right]^2.$$

Сравнивая полученную формулу с (34), замечаем, что значения их практически совпадают, ибо для большинства литейных сплавов $\frac{T_{\text{кр}} - T_{\text{ф}}}{T_{\text{зал}} - T_{\text{ф}}} \approx 1$ и $\rho_1 \approx \rho_3$; для песчаных форм отноше-

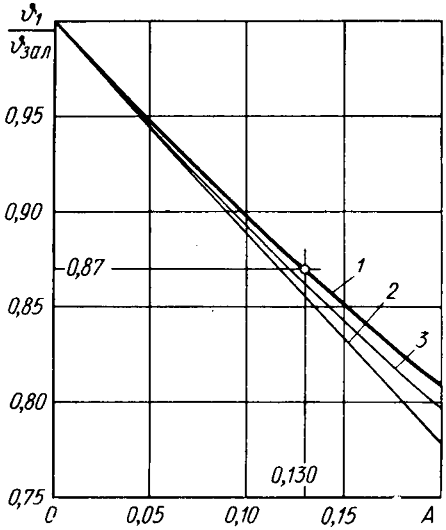


Рис. 35. Результаты расчета:

1 — по точной формуле (41); 2 — по приближенной (42); 3 — по (47) при $\vartheta_н = \vartheta_{зал}$ и $t_{зал} = 0$

ние $\frac{b_4}{b_3} < 0{,}1$ и приведенный размер $\mathfrak{R}$ плоской отливки равен l_0 — половине толщины ее тела. Это совпадение весьма важно, так как (34) является выражением экспериментального факта, который наблюдал Н. И. Хворинов при изучении затвердевания отливок в песчаных формах. Напомним читателю, что (34) исходит из (27), которая математически описывает опытные данные, приведенные на рис. 33.

Таким образом, приближенная формула (42) подтверждена экспериментально.

Продолжим исследование кинетики охлаждения перегретого расплава, залитого в форму. Теперь (42) сравним с (40). Очевидно, что (42) легко получается из (40), если в подынтегральном выражении ее первой части функцию ϑ_1 $(t - u)$ принять постоянной величиной и равной $\vartheta_{зал}$. Сделаем такую же замену в (39). Получим

$$\vartheta_4(x,\ t) = \vartheta_{зал}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x - l_0}{2\sqrt{a_4 t}}\right),$$

что совпадает с (38).

Следовательно, прогрев формы во время охлаждения перегретого расплава допустимо рассчитывать при простейших граничных условиях I рода, т. е. при ϑ_4 $(l_0,\ t) = \vartheta_0 \equiv \mathrm{const}$. Тогда

$$\vartheta_4\,(x,\ t) = \vartheta_0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x - l_0}{2\sqrt{a_4 t}}\right). \tag{43}$$

В этом состоит главный результат математического эксперимента на модели (11) при $t_{зал} = 0$. Его значение трудно переоценить, ибо он получен для процесса отвода теплоты перегрева в целом, т. е. формула (43) справедлива и для первого, и для второго этапов процесса. С помощью формулы (43) удается предельно упростить все дальнейшие расчеты.

Так, математическую модель (11) второго этапа можно представить уравнением (36) теплового баланса с начальным условием $\vartheta_1(t_{\text{зал}}) = \vartheta_{\text{н}}$ и уравнением (43) температурного поля в форме при $\vartheta_0 = \vartheta_{\text{н}}$:

$$\left.\begin{aligned} & -c_1\rho_1 l_0 \frac{d\vartheta_1(t)}{dt} = \frac{b_4\vartheta_{\text{н}}}{\sqrt{\pi t}}; \\ & \vartheta_1(t_{\text{зал}}) = \vartheta_{\text{н}}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

откуда

$$\vartheta_1(t) = \vartheta_{\text{н}}\left[1 - \frac{2b_4(\sqrt{t} - \sqrt{t_{\text{зал}}})}{\sqrt{\pi} c_1\rho_1 l_0}\right]. \tag{45}$$

В уравнении (44) теплового баланса температура ϑ_0 поверхности формы выбрана равной $\vartheta_{\text{н}}$. Поэтому она больше температуры $\vartheta_1(t)$ расплава и равна ей только в начальный момент времени $t_{\text{зал}}$. Так как формула (43) справедлива для всего интервала температуры расплава от $\vartheta_{\text{зал}}$ до ϑ_L, то возможно принять $\vartheta_0 = \vartheta_1(t)$ при $t \geqslant t_{\text{зал}}$. Тогда математическая модель (11) представляется несколько иным уравнением теплового баланса [1]:

$$\left.\begin{aligned} & -c_1\rho_1 l_0 \frac{d\vartheta_1(t)}{dt} = \frac{b_4\vartheta_1(t)}{\sqrt{\pi t}}; \\ & \vartheta_1(t_{\text{зал}}) = \vartheta_{\text{н}}; \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

откуда

$$\vartheta_1(t) = \vartheta_{\text{н}} \exp\left[-\frac{2b_4(\sqrt{t} - \sqrt{t_{\text{зал}}})}{\sqrt{\pi} c_1\rho_1 l_0}\right], \tag{47}$$

или учитывая, что аргумент экспоненты меньше 0,13, для расчетов можно воспользоваться лишь двумя первыми членами степенного ряда $e^{-A} \approx 1 - A + \frac{1}{2}A^2 - \ldots$ (см. приложение III). В итоге, получается (45).

Формула (45) описывает процесс охлаждения перегретого расплава, залитого в форму в течение времени $t_{\text{зал}}$. Очевидно, что при $t_{\text{зал}} = 0$ и, следовательно, при $\vartheta_{\text{н}} = \vartheta_{\text{зал}}$ формула (45) совпадает с найденной раньше формулой (42).

С помощью (45) легко определить время t_1 полного охлаждения перегретого расплава в песчаной форме для отливки любой конфигурации [2]. Если $\vartheta_1(t) = \vartheta_L$, то

$$t_1 = \left[\frac{c_1\rho_1\Re_0 \cdot (T_{\text{н}} - T_L)}{1{,}128 b_4 (T_{\text{н}} - T_{\text{ф}})} + \sqrt{t_{\text{зал}}}\right]^2. \tag{48}$$

---

[1] Этот вариант теплового баланса для расчета охлаждения перегретого расплава в песчаных формах впервые предложен А. И. Вейником в 1953 г. [2].

[2] Влияние конфигурации учитывается приведенным размером $\Re_0$ отливки, который в (48) поставлен вместо l_0 — половины толщины плоской отливки. Возможность такой замены показана Н. И. Хвориновым (см. с. 178). В дальнейшем этот вопрос будет обсужден специально.

Но для расчета времени t_1 по (48) необходимо знать значение $T_н$ и $t_{зал}$. К их определению сейчас и приступаем.

54. ОХЛАЖДЕНИЕ ПОТОКА ПЕРЕГРЕТОГО РАСПЛАВА В ФОРМЕ

Основой математической модели процесса охлаждения потока перегретого расплава в каналах литниковой системы и в полости формы во время ее заливки являются дифференциальное уравнение теплопереноса (18-I) Фурье-Кирхгофа и дифференциальные уравнения гидродинамики (уравнение сплошности потока и уравнение движения Навье—Стокса, см. приложение II).

Совместное решение этих уравнений удалось лишь для простейших задач *ламинарного* режима течения жидкости (см. гл. 2, с. 39). Из интересных для дальнейшего отметим две: для потока в круглом и щелевом каналах. Первая задача на охлаждение *стационарного* потока в круглой трубе при *граничном условии I рода* решена Л. Герцем в 1885 г., в 1910 г. независимо от него эту задачу решил В. Нуссельт. Вторая задача на охлаждение стационарного потока в щелевом канале при тех же граничных условиях решена в 1942 г. Г. Ханеманом и Л. Эретом [1].

Однако ни ту, ни другую невозможно использовать для анализа охлаждения потока перегретого расплава в песчаной форме. Главная причина состоит в том, что реально режим течения расплава в каналах литниковой системы и в полости формы — *турбулентный*; ламинарным он бывает только в полости формы и относительно редко (при заливке сифоном тонкостенных деталей).

В этом легко убедиться, если вспомнить, что ламинарное течение жидкости наблюдается при

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{\bar{w}d}{\nu} \leqslant 2300,$$

где $\bar{w}$ — средняя по сечению скорость потока; d — диаметр круглого или толщина щелевого канала; ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Оценим величину критерия Рейнольдса для потока расплава литейных сплавов в песчаной форме. Примем толщину питателей литниковой системы 5 мм и толщину тела отливки 60 мм. Это будут минимальный и максимальный размеры потока при литье машиностроительных деталей. Далее, определим скорость потока:

$$\bar{w} = \mu \sqrt{2gH}, \tag{49}$$

---

[1] Подробно с этими задачами и другими, о которых будет упомянуто далее, читатель может познакомиться в книгах С. С. Кутателадзе [8] и Г. Гребера, С. Эрка и У. Григулля [5].

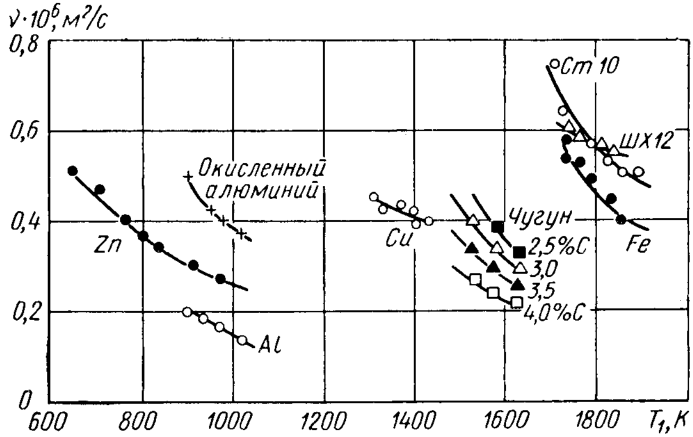


Рис. 36. Коэффициент кинематической вязкости расплавов металлов и сплавов

где H — гидростатический напор в стояке литниковой системы;

$$\mu = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{y_i}{d_i} + \sum_{i=1}^{m} \xi_j\right)^{-\frac{1}{2}};$$

здесь $\lambda_i \frac{y_i}{d_i}$ — потери напора на трение в i-м элементе литниковой системы или полости формы (λ — коэффициент потери на трение; y и d — протяженность и диаметр или толщина элементов); ξ_j — потери напора в j-м местном гидравлическом сопротивлении литниковой системы или полости формы.

Пусть гидравлический напор в стояке составляет 100 мм; это наименьший напор, встречающийся при литье в песчаные формы. По данным Б. Б. Гуляева наименьшая величина μ равна 0,48 [7, с. 138]. Следовательно, $\bar{w} = 0{,}67$ м/с.

На рис. 36 приведены данные различных исследователей, определивших коэффициент кинематической вязкости расплавов ряда металлов и сплавов в интервале реальных значений температуры их перегрева. Наибольшую величину вязкости имеет углеродистая сталь при температуре, близкой к температуре ликвидуса [1]. Примем $\nu = 0{,}75 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Итак, для течения расплава по питателям

$$\mathrm{Re} = \frac{0{,}67 \cdot 0{,}005}{0{,}75 \cdot 10^{-6}} \approx 4500.$$

---

[1] Заметим, что эта величина соответствует вязкости воды при температуре около 300 К.

По измерениям Б. В. Рабиновича при заливке сифоном скорость течения расплава в полости формы составляет 0,02—0,06 м/с [11, с. 367]. Примем $\overline{w}$ = 0,06 м/с. Тогда

$$\mathrm{Re} = \frac{0{,}06 \cdot 0{,}06}{0{,}75 \cdot 10^{-6}} \approx 4800,$$

т. е. режим течения расплава в условиях заливки формы турбулентный. Однако, если толщина тела отливки 10 мм, то $\mathrm{Re} = 800$; следовательно, режим заполнения полости формы может быть и ламинарным.

Теплообмен турбулентного потока жидкости со стенками канала, по которому она перемещается, изучен на основе приближенных математических моделей Л. Прандтля и О. Рейнольдса, уточненных экспериментально ими и другими исследователями. Для *стационарного* потока в круглом и щелевом каналах соответствующие формулы приведены в приложении IV. С их помощью можно рассчитать коэффициент теплоотдачи α_1 от перегретого расплава к стенкам канала при *постоянной* температуре их поверхности. Так как для металлических расплавов $\mathrm{Pr} \ll 1$, то

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Nu} = 5 + 0{,}21\,(\mathrm{Pr}\mathrm{Re})^{\frac{3}{4}} \\ &\text{или} \\ &\alpha_1 = 5\,\frac{\lambda_0}{d} + 0{,}21\,\sqrt[4]{\frac{(c_1\rho_1\overline{w})^3}{\lambda_0 d}}, \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

где λ_0 — молекулярная теплопроводность расплава (см. с. 110)

На рис. 37 приведены некоторые результаты экспериментального исследования Б. Б. Гуляева в области заполнения литейных

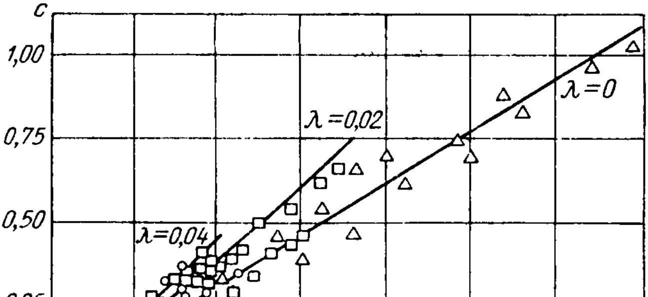


Рис. 37. Изменение пути потока по времени течения расплава углеродистой литейной стали в горизонтальном канале песчаной формы

форм. Им была измерена длина потока расплава во время заполнения горизонтального канала сечением 7×8 мм под напором стояка в 110 мм при литье углеродистой стали (0,36% C), чугуна (3,0% C) и силумина (11,5% Si). Для измерения пути потока по времени в песчаной форме по длине канала устанавливали восемь контактов, которые последовательно замыкались расплавом в момент достижения каждого из них потоком. Время между замыканиями контактов фиксировали осциллографом.

Кривые на рис. 37 Б. Б. Гуляев рассчитал по формуле (49) при $i = 1$ и различных значениях коэффициента λ потери напора на трение: для силумина 0; чугуна 0,02; стали 0,04. Очевидно, что в первом приближении течение расплава во время заполнения горизонтального канала в песчаной форме можно рассматривать как *стационарное.*

Итак, в большинстве случаев поток расплава в форме турбулентный; течение в горизонтальном канале, в первом приближении, стационарно. Поэтому формулу (50) допустимо использовать для приближенного исследования процесса охлаждения потока перегретого расплава в горизонтальном канале [1], *если температура внутренней поверхности канала в песчаной форме постоянна во время ее заполнения.*

Здесь уместно вспомнить, что предыдущее исследование кинетики охлаждения перегретого расплава, залитого в песчаную форму, привело к выводу о возможности с достаточной точностью рассчитывать прогрев формы при граничном условии I рода, когда температура ее внутренней поверхности принимается постоянной (см. с. 189). Получается, что последнее препятствие применению формулы (50) или аналогичных ей из приложения IV для анализа процесса охлаждения потока перегретого расплава преодолено. Но читатель должен возразить: предыдущее исследование показало, что температура поверхности формы может быть принята постоянной для расчета ее *прогрева* и это, отнюдь, не означает возможности принять ее постоянной для расчета *охлаждения* расплава. Читатель прав — это действительно так!

Остается один путь: вернуться к дифференциальному уравнению теплопереноса Фурье—Кирхгофа (18-I). Теперь это значительно проще. Было установлено, что течение расплава в горизонтальном канале формы под напором стояка можно приближенно считать стационарным, а режим течения в большинстве случаев — турбулентным. Следовательно, скорость w потока допустимо рассматривать распределенной однородно по сечению и принять постоянной по длине канала, определяемой по формуле (49); в тех случаях, когда режим течения расплава ламинарный, будем иметь в виду среднюю скорость $\bar{w}$ по сечению. Поэтому необ-

---

[1] Во всех тех редких случаях, когда режим течения расплава бывает ламинарным, допустимо использовать формулы, приведенные в приложении IV для $\mathrm{Re} < 2300$.

ходимость в дифференциальном уравнении движения жидкости Навье—Стокса отпадает.

Пусть расплав течет только в положительном направлении координатной оси y в плоской щели, толщина которой $s = 2l_к$ ($l_к$ — половина толщины канала) в направлении оси x намного меньше ее ширины в направлении оси z (рис. 38, *а*). Тогда уравнение (18-I) примет вид

$$c_1\rho_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial t}+\overline{w}\,\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)=\lambda_0\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}\right).$$

В связи с большими скоростями течения условимся пренебрегать локальной составляющей изменения теплосодержания расплава, т. е. положим $c_1\rho_1\frac{\partial T_1}{\partial t}\approx 0$, и величиной плотности теплового потока вдоль оси y, т. е. $\lambda_0\frac{\partial T_1}{\partial y}\approx 0$. Следовательно,

$$c_1\rho_1\overline{w}\,\frac{\partial T_1}{\partial y}=\lambda_0\,\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \qquad (51)$$

т. е. теплота от потока расплава отводится только в форму, в направлении оси x.

Скорость $\overline{w}$ течения расплава постоянна. Тогда $\frac{y_0}{\overline{w}_0} = t_0$ — время течения расплава до рассматриваемого сечения канала,

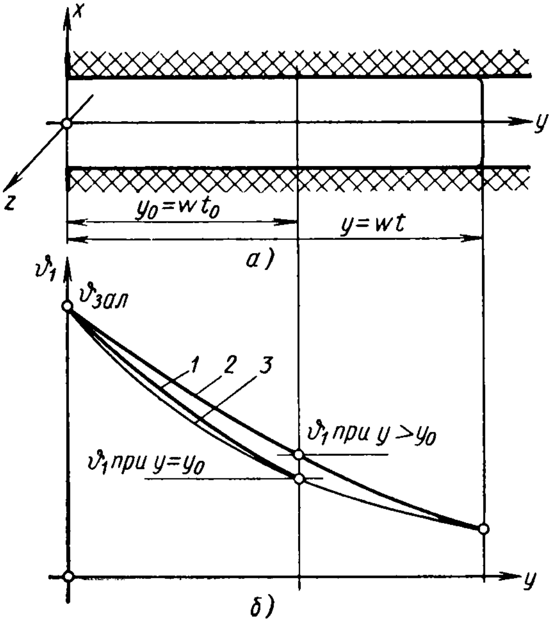


Рис. 38. Схема к анализу охлаждения потока перегретого расплава при его течении в горизонтальном щелевом канале песчаной формы:

а — щелевой канал; *б* — распределение температуры в соответствии с формулой (57) по длине потока: *1* — при $y = y_0$; *2* — при $y > y_0$; *3* — при $t_0 = t$ — температура на носике потока отстоящего от начала канала на расстоянии y_0 (рис. 38, *а*). Поэтому

$$c_1\rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t_0} = \lambda_0 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \qquad (52)$$

что аналогично дифференциальному уравнению теплопроводности Фурье, которое было использовано для составления математической модели (17-II) охлаждения перегретого расплава в незатвердевшей части отливки.

Дифференциальное уравнение (52) теплопереноса в потоке расплава можно представить в виде интегрального соотношения так, как это уже неоднократно делалось раньше (см. с. 160):

$$-c_1\rho_1 \int_0^{l_к} \frac{\partial T_1}{\partial t_0} dx = q_0(t_0), \qquad (53)$$

ибо поток в щелевом канале охлаждается симметрично относительно оси y и $q(0,\ t) = 0$; $q(l_к,\ t) = q_0(t)$ — поверхностной плотности теплового потока в форму в сечении канала, отстоящего от начала канала на расстояние y_0 (рис. 38, *а*). В соответствии с законом теплопроводности Фурье

$$q_0(t_0) = -\lambda_4 \frac{\partial T_4(l_к, t_0)}{\partial x},$$

если $T_4(x,\ t_0)$ — распределение температуры в форме в сечении канала y_0.

Так как форма в сечении канала y_0 прогревается столько времени, сколько расплав течет мимо этого сечения, то функцию $T_4(x,\ t_0)$ можно определить с помощью (43), представив ее в виде

$$\vartheta_4(x,\ t_0) = \vartheta_{зал} \operatorname{erfc}\left(\frac{x - l_к}{2\sqrt{a_4(t - t_0)}}\right); \qquad (54)$$

t — время течения расплава в канале формы (см. рис. 38, *а*); t_0 — время течения расплава до рассматриваемого сечения канала y_0. Здесь в качестве постоянной температуры ϑ_0 поверхности формы принята температура $\vartheta_{зал}$ заливки расплава. Это сделано по аналогии с предыдущим исследованием. Так, исследуя охлаждение перегретого расплава, залитого в форму, мы убедились, что расчет прогрева формы можно выполнить при $\vartheta_0 = \vartheta_н$ (см. с. 190), т. е. при значении начальной температуры расплава, залитого в формы. Сейчас также примем ϑ_0 равной начальному значению температуры расплава — величине $\vartheta_{зал}$, т. е. температуре расплава в момент начала заливки формы.

Теперь необходимо вспомнить о модели малой интенсивности охлаждения и затвердевания расплава в песчаной форме (см. с. 159). В соответствии с ней требуется пренебречь величиной температурного перепада по сечению потока, т. е. принять $T_1(0,\ t_0) \approx$

$\approx T_1(l_к,\ t_0)$. Тогда интеграл в левой части соотношения (53) вычисляется просто:

$$-c_1\rho_1 l_к \frac{dT_1}{dt_0} = q_0(t_0). \tag{55}$$

Таким образом, упрощенная математическая модель процесса охлаждения стационарного потока расплава в песчаной форме при турбулентном режиме его течения представляется обыкновенным дифференциальным уравнением с соответствующим начальным условием

$$\left.\begin{aligned} -c_1\rho_1 l_к \frac{d\vartheta_1}{dt_0} &= \frac{b_4\vartheta_{зал}}{\sqrt{\pi(t-t_0)}}; \quad t_0 > 0; \\ \vartheta_1(0) &= \vartheta_{зал} \equiv \mathrm{const}, \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

что аналогично математической модели (44) охлаждения расплава, залитого в форму. Следовательно,

$$\vartheta_1(t_0) = \vartheta_{зал}\left[1 - \frac{2b_4}{\sqrt{\pi c_1\rho_1 \Re_к}}\left(\sqrt{t} - \sqrt{t-t_0}\right)\right], \tag{57}$$

откуда [1]

$$\vartheta_н = \vartheta_{зал}\left[1 - \frac{2b_4}{\sqrt{\pi c_1\rho_1 \Re_к}}\left(\sqrt{t_{зал}} - \sqrt{t_{зал} - t_0}\right)\right], \tag{58}$$

т. е. интересующая нас $T_н$ легко рассчитывается для любого сечения канала, если известны время $t_{зал}$ и температура $T_{зал}$ заливки горизонтального канала; и, наоборот, легко рассчитать $t_{зал}$, если из технологических соображений задать температуру $T_{зал}$. Однако эти вопросы будут обсуждены позже.

Сейчас обратим внимание на формулу (57). При $t_0 = \mathrm{const}$ с увеличением t температура ϑ_1 расплава возрастает. Это означает, что в сечении канала, отстоящем от его начала на расстоянии y_0, температура расплава будет увеличиваться по мере течения потока мимо рассматриваемого сечения. На рис. 38, *б* в соответствии с формулой (57) изображено в виде схемы распределение температуры по длине потока в случаях, когда он прошел путь y_0 и $y > y_0$. Очевидно, что в сечении y_0 температура ϑ_1 повышается с увеличением y.

На первый взгляд, полученный результат кажется неожиданным. Но если читатель был свидетелем того, как жидкий металл «уходит» по разъему песчаной формы во время ее заливки, то он согласится, что полученный результат достаточно отражает действительную картину охлаждения потока в щелевом канале песчаной формы. Если перегретый расплав нашел себе путь по

---

[1] В (57), так же как и раньше в (48), влияние конфигурации канала учтено заменой $l_к$ приведенным размером $\Re_к$ сечения канала.

разъему песчаной формы, то в отличие от металлической формы он будет течь, пока уровень расплава в полости формы остается выше ее разъема. Поток расплава не затвердевает в разъеме, как это обычно бывает в металлической форме. При наблюдении за тем, как уходит жидкий металл по разъему песчаной формы, складывается впечатление, что со временем расплав становится как бы горячее; остановить поток удается только известными читателю средствами извне. Объяснить такое поведение расплава легко с помощью (57): если t_0 — время движения расплава по разъему формы до наружной ее поверхности, а t — время, в течение которого расплав уходит из формы, то температура расплава на выходе из формы действительно увеличивается, и тем больше чем дольше не принимают меры для остановки потока.

Таким образом, есть определенные основания для утверждения того, что формула (57), по крайней мере качественно, адекватна реальному процессу охлаждения потока перегретого расплава в горизонтальном канале песчаной формы.

Эти основания могут показаться читателю недостаточными, так как выше шла речь о наблюдении, а не о измерении температуры потока расплава в специально поставленном эксперименте. Для бóльшей убедительности на рис. 39 приведены схема такого специального эксперимента и результаты измерений температуры потока расплава силумина в горизонтальном канале песчаной формы при $T_{\text{зал}} = 1120$ К, $\overline{w} = 0{,}5$ м/с и $\mathfrak{R}_{\text{к}} = 3$ мм.

На схеме (рис. 39, *а*) указаны места установки термопар, которые соединены дифференциально, поэтому осциллограф Н-700 записывает разность температуры потока расплава в указанных сечениях канала. Из графика на рис. 39, *б* следует, что эта разница уменьшается со временем течения расплава по каналу.

Если принять, что температура у входа в канал близка к $\vartheta_{\text{зал}}$, то с помощью формулы (45) найдем разницу

$$\vartheta_{\text{зал}} - \vartheta_1 = \frac{1{,}13 b_4 \vartheta_{\text{зал}}}{c_1 \rho_1 \mathfrak{R}_{\text{к}}} \left(\sqrt{t} - \sqrt{t - \frac{y_0}{\overline{w}}} \right),$$

где y_0 — расстояние до второй термопары; $\overline{w}$ — скорость течения расплава в канале.

Очевидно, что формула (45) качественно согласуется с результатами экспериментов. Количественное совпадение результатов получено при $b_4 = 1{,}05 \times \times 10^3$ Вт·с$^{1/2}$/(м^2·К) (см. кривую на рис. 39, *б*).

Таким образом, наблюдениями типа тех, о которых шла речь выше, не следует пренебрегать, так как они также являются экспериментом, но пассивным, результаты которого выражены не цифрами измеренных величин, а словами обычного полиморфного языка.

В заключение еще одно неожиданное соображение. Формула (57) получена на основе модели малой интенсивности охлаждения затвердевающего расплава в песчаной форме. В соответствии с этой моделью в расчетах процесса охлаждения допустимо пренебрегать температурным перепадом по сечению отливки по сравнению с температурным перепадом в форме. В качестве меры отношения температурных перепадов принято отношение коэффициентов тепловой аккумуляции формы и отливки (см. с. 157). Оценим величину этого отношения для потока перегретого расплава, охлаждающегося в каналах песчаной формы.

Раньше (см. с. 110—111) уже было использовано представление о том, что коэффициент теплоотдачи можно рассматривать как коэффициент термической проводимости конечной вещественной среды. Учитывая структуру критерия Нуссельта, получим

$$\lambda_1 = \lambda_0 \, \mathrm{Nu},$$

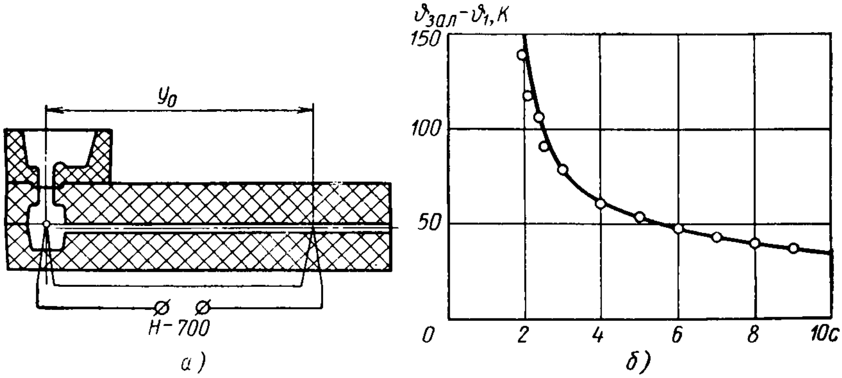


Рис. 39. Схема эксперимента (*а*) и результаты (*б*) измерения разницы температуры потока перегретого расплава в горизонтальном канале песчаной формы

если λ_1 — эффективный коэффициент теплопроводности *потока* расплава, учитывающий влияние вынужденного движения расплава в форме на перенос теплоты в этом расплаве.

Так как движение расплава не влияет существенно на c_1 и ρ_1, то

$$b_1 = b_0 \sqrt{\mathrm{Nu}}$$

и, следовательно,

$$\frac{b_4}{b_1} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Nu}}} \cdot \frac{b_4}{b_0},$$

где $b_0 = \sqrt{\lambda_0 c_1 \rho_1}$ — коэффициент тепловой аккумуляции неподвижного расплава (согласно табл. 8 в приложении VI величина $b_0 \approx b_3$).

Теперь ясно, что отношение коэффициентов тепловой аккумуляции песчаной формы и потока перегретого расплава заведомо на порядок меньше единицы, ибо $\frac{b_4}{b_3} \ll 1$ (см. с. 158), а $\mathrm{Nu} > 5$ согласно (50). Например, при течении расплава в полости формы толстостенной отливки $\mathrm{Re} = 4800$ (см. с. 193). Критерий Pr определим так: как и при вычислении Re, примем $\nu = 0{,}75 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, у большинства металлов и литейных сплавов $a_0 \approx a_3 \approx 10^{-5}$ м^2/с (см. с. 154), поэтому

$$\mathrm{Pr} = \frac{0{,}75 \cdot 10^{-6}}{10^{-5}} = 0{,}075.$$

По формуле (50)

$$\mathrm{Nu} = 5 + 0{,}21\,(4800 \cdot 0{,}075)^{3/4} \approx 21.$$

Отношение

$$\frac{b_4}{b_1} = 0{,}22\,\frac{b_4}{b_0}.$$

Обещанное неожиданное соображение заключается в следующем. Если $b_4 \approx b_0$, т. е. если речь идет о литье в металлическую форму, то при условии, что между расплавом и формой существует плотный контакт, модель малой интенсивности охлаждения и формула (57) могут оказаться применимыми для расчета заполнения металлической формы с большой скоростью. Действительно, плотный контакт следует ожидать при литье в неокрашенные металлические формы. Их, как правило, применяют при литье под давлением. Так как смазка, наносимая на поверхность пресс-формы, не является значительным термическим сопротивлением, то контакт между потоком расплава и пресс-формой можно считать достаточно плотным. Но при литье под давлением по сравнению с литьем под напором стояка значительно больше скорость течения расплава и значительно меньше толщина отливки. Пусть толщина стенки отливки 5 мм, скорость течения расплава 10 м/с, тогда $\mathrm{Re} = 66\,700$, $\mathrm{Pr} = 0{,}075$, $\mathrm{Nu} = 127$ и $\frac{b_4}{b_1} \approx$ $\approx 0{,}089$.

Следовательно, формулу (57) вполне законно применить для исследования процесса заполнения пресс-форм во время литья под давлением.

Этот весьма важный вывод будет использован для анализа формирования отливки при литье под давлением. А сейчас займемся расчетом заполнения песчаных форм.

55. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ЗАПОЛНЕНИЯ ФОРМЫ

Основной задачей расчета является определение времени заполнения формы данной конкретной отливки. Знание его необходимо для установления продолжительности этого важного этапа технологического процесса литья и для оценки важного параметра технологии отливки — площади поперечного сечения питателей.

Читатель безусловно, помнит, что в технологических курсах площадь $f_{\text{п}}$ сечения питателей проектируемой литниковой системы рассчитывают по формуле

$$f_{\text{п}} = \frac{G_0}{\rho_1 w_{\text{п}} t_{\text{зал}}}, \qquad (59)$$

где G_0 — масса отливки с припусками, напусками и прибылями; $w_{\text{п}}$ — средняя скорость истечения расплава из питателя в полость формы.

Скорость $w_{\text{п}}$ определяют с помощью формулы (49) для конкретных условий заполнения. Коэффициент μ в (49) зависит от конструкции литниковой системы.

По данным Б. Б. Гуляева, для литниковой системы, состоящей из стояка, шлакоуловителя и питателя, т. е. имеющей два поворота и два изменения сечения потока, коэффициент[1] $\mu =$ $= 0{,}48$.

Величину напора H в (49) определяют исходя из способа подвода расплава к отливке; на рис. 40 изображены две схемы заливки: снизу (сифоном) и сверху.

В первом случае (рис. 40, *а*) скорость $w_{\text{п}}$ истечения расплава из питателя переменна по времени:

$$\overline{w} = \mu \sqrt{2g(H_{\text{с}} - y)};$$

---

[1] Более подробные сведения о величине μ для различных литниковых систем читатель найдет в книге Б. В. Рабиновича [11].

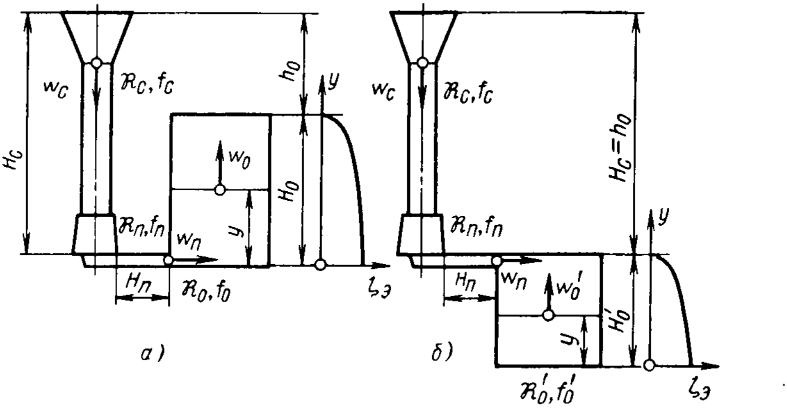


Рис. 40. Схема к расчету заполнения полости формы сифоном (*а*) и сверху (*б*) в разъем формы

поэтому средняя скорость $w_{\text{п}} = \frac{1}{2}(w_{\max} + w_{\min})$, где $w_{\max}$ — скорость истечения расплава в начале процесса заполнения, т. е. при $y = 0$, а $w_{\min}$ — в конце, т. е. при $y = H_0$. Тогда

$$w_{\text{п}} = \frac{1}{2}\mu\sqrt{2g}\,(\sqrt{H_{\text{с}}} + \sqrt{h_0}). \qquad (60)$$

Во втором случае (рис. 40, *б*) скорость $w_{\text{п}}$ истечения расплава постоянна во времени; следовательно,

$$w_{\text{п}} = \mu\sqrt{2gH_{\text{с}}}. \qquad (61)$$

Для третьего случая, который можно себе представить как последовательное сочетание двух схем на рис. 40 (это будет заливка в разъем формы), читатель без труда определит среднюю скорость самостоятельно[1].

Таким образом, средняя скорость $w_{\text{п}}$ заливки легко рассчитать по (60) и (61) или им аналогичным формулам.

Для расчета времени $t_{\text{зал}}$ заливки в технологической литературе чаще всего рекомендуется эмпирическая формула

$$t_{\text{зал}} = AG_0^m, \qquad (62)$$

где A и m — постоянные, числовые значения которых по данным различных исследователей находятся в широких пределах; так, если массу отливки измерять в кг и время заливки в с, то, по данным Ю. А. Нехендзи, $A = 1{,}50 \div 2{,}35$ и $m = 0{,}5$ для стали; у С. В. Руссияна $A = 1{,}11$, $m = 0{,}5$ и у Б. Б. Гуляева $A = 1{,}00 \div 1{,}35$, $m = 0{,}417$ для стали; у Б. В. Рабиновича; $A = 3{,}7$ и $m = 0{,}38$ для чугуна.

---

[1] В качестве упражнения рекомендуем читателю определить среднюю скорость $w_{\text{п}}$ для заливки через щелевую и этажную литниковую системы. В случае затруднений следует обращаться к книге Б. В. Рабиновича [11].

В ряде технологических руководств, учебников и монографий приводится иная формула:

$$t_{зал} = B s_0^n G_0^{m_1}, \tag{63}$$

где s_0 — толщина стенки отливки, мм; по Г. Дитерту $B = 1{,}19$, $n = 0{,}25$ и $m_1 = 0{,}5$ для чугуна; у К. А. Соболева $B = 2{,}0$ и $m_1 = n = 0{,}334$ для чугуна; у Г. М. Дубицкого $B = 1{,}5$, $m_1 = n = 0{,}334$ и у Н. И. Мищенко $B = 1{,}0$, $n = m_1 = 0{,}334$ для стали.

Очевидно, что до тех пор, пока выбор времени заполнения формы не приобретет ясного физического и технологического обоснования, весь расчет площади питателей по (59) для каждой конкретной отливки будет всегда вызывать сомнения.

Необходимые физическое и технологическое обоснования расчета времени заполнения формы, например снизу (рис. 40, *а*), возможно дать с помощью (57), допустив, что она справедлива и при течении расплава по вертикальным каналам.

Пусть $t_с$ — время течения расплава по стояку; $t_п$ — по питателю и $t_ф$ — в полости формы. Тогда, согласно (57), избыточная температура расплава на входе в питатель

$$\vartheta_1 = \vartheta_{зал}\left[1 - \frac{1{,}13b_4}{c_1\rho_1\Re_с}\left(\sqrt{t} - \sqrt{t - t_с}\right)\right]. \tag{64}$$

Очевидно, что наименьшая избыточная температура $\vartheta_с^*$ расплава на входе в питатель должна наблюдаться в момент $t = t_с$, т. е. у носика потока, когда он достиг входа в питатель. Следовательно, за время $t_с$ течения по стояку расплав у носика потока потеряет перегрев

$$\vartheta_{зал} - \vartheta_с^* = \frac{1{,}13b_4\vartheta_{зал}}{c_1\rho_1\Re_с}\sqrt{t_с}.$$

Рассуждая аналогично, найдем, что за время $t_п$ течения расплава по питателю он у носика потока дополнительно потеряет перегрев

$$\vartheta_с^* - \vartheta_п^* = \frac{1{,}13b_4\vartheta_{зал}}{c_1\rho_1\Re_п}\sqrt{t_п}$$

и за время $t_ф$ течения в полости формы расплав еще потеряет перегрев

$$\vartheta_п^* - \vartheta_к = \frac{1{,}13b_4\vartheta_{зал}}{c_2\rho_1\Re_0}\sqrt{t_ф}.$$

В целом потеря перегрева расплава у носика потока, поднимающегося в полости формы, в момент $t_{зал} = t_с + t_п + t_ф$ окончания ее заливки составит

$$\vartheta_{зал} - \vartheta_к = \frac{1{,}13b_4\vartheta_{зал}}{c_1\rho_1\Re_0}\left(1 + \frac{\Re_0}{\Re_с}\sqrt{\frac{t_с}{t_ф}} + \frac{\Re_0}{\Re_п}\sqrt{\frac{t_п}{t_ф}}\right)\sqrt{t_ф}, \tag{65}$$

где $\vartheta_к$ — избыточная температура расплава в верхней части полости формы в момент $t_{зал}$ окончания заливки; $\mathfrak{R}_с$, $\mathfrak{R}_п$, $\mathfrak{R}_0$ — соответственно приведенные размеры стояка, питателя и отливки.

Избыточную температуру расплава $\vartheta_с$ на входе в питатель в момент окончания заливки формы просто определить по формуле (64) при $t = t_{зал}$. Следовательно, избыточная температура расплава на выходе из питателя, т. е. на входе в полость формы (или, другими словами, в нижней части полости формы), будет [1]

$$\vartheta_п = \vartheta_{зал} \left\{ 1 - \frac{1{,}13 b_4 \sqrt{t_ф}}{c_1 \rho_1 \mathfrak{R}_0} \left[\frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_с} \sqrt{1 + \frac{t_с}{t_ф} + \frac{t_п}{t_ф}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_п} - \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_с} \right) \sqrt{1 + \frac{t_п}{t_ф}} - \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_п} \right] \right\}. \qquad (66)$$

К сожалению, формулы (65) и (66) нельзя использовать для расчетов при проектировании литниковых систем, даже простейших, состоящих из стояка, шлакоуловителя и питателей. Дело в том, что обе формулы требуют знания геометрических размеров всех элементов литниковой системы. Например, необходимо знать приведенные размеры $\mathfrak{R}_с$ и $\mathfrak{R}_п$, а для определения интервалов времени $t_с$, $t_п$ и $t_ф$ требуются другие размеры:

из уравнения сплошности стационарного потока

$$\left. \begin{aligned} t_с &= \frac{H_с f_с}{w_п f_п}; \\ t_п &= \frac{H_п}{w_п}; \\ t_ф &= \frac{V_0}{w_п t_п}, \end{aligned} \right\} \qquad (67)$$

где $f_с$ — площадь поперечного сечения стояка; $H_п$ — протяженность питателей.

Таким образом, формула (65) пригодна только для расчета температуры $\vartheta_{зал}$ заливки расплава в случае, когда литниковая система уже спроектирована. При этом требуется еще знание температуры $\vartheta_к$ расплава вверху полости формы в момент окончания заполнения.

Но не все обстоит так безнадежно. Если сравнить последнюю из формул (67) с (59), то легко убедиться в их идентичности. Это означает, что существующая практика проектирования литниковых систем для машиностроительных деталей при их литье в пес-

---

[1] Формула (66) получена с помощью (57) аналогично тому, как была получена (65). Во всех рассуждениях необходимо учитывать, что температура поверхности формы, согласно (57), всегда остается постоянной и равной $\vartheta_{зал}$.

Для наглядности расчета не учитывался шлакоуловитель как элемент литниковой системы. Но полагаем, что читатель самостоятельно уточнит формулы (65) и (66).

чаные формы допускает возможность не учитывать время заполнения литниковой системы по сравнению с временем заполнения самой полости формы. В свою очередь, это означает, что в формуле (65) $\frac{t_{\text{с}}}{t_{\text{ф}}} \ll 1$; $\frac{t_{\text{п}}}{t_{\text{ф}}} \ll 1$ и $t_{\text{ф}} \approx t_{\text{зал}}$. Тогда из (65) при $\vartheta_{\text{к}} = \vartheta_L$

$$t_{\text{зал}} = \left[\frac{c_1 \rho_1 (T_{\text{зал}} - T_L) \mathfrak{R}_0}{1{,}13 b_4 (T_{\text{зал}} - T_{\text{ф}})}\right]^2, \tag{68}$$

где вместо $\vartheta_{\text{к}}$ поставлена температура ϑ_L ликвидуса заливаемого сплава, так как, в конечном счете, нас интересует максимально допустимое время заливки, а ϑ_L — наименьшая допустимая температура расплава вверху формы в момент окончания заполнения.

Итак, время $t_{\text{зал}}$ заливки мы умеем рассчитывать приближенно по (68). Однако для расчета времени t_1 охлаждения расплава, залитого в форму, по (48) требуется знать $\vartheta_{\text{н}}$. В формуле (48) она принята постоянной. Поэтому условимся, что

$$\vartheta_{\text{н}} \approx \frac{1}{2} (\vartheta_{\text{п}} + \vartheta_L). \tag{69}$$

Для такого весьма грубого приближения в оценке $\vartheta_{\text{н}}$ есть некоторые основания. Во-первых, расплав в полости формы во время заполнения перемешивается струями из питателей. Во-вторых, при медленной заливке зеркало расплава будет заметно охлаждаться еще и за счет теплового излучения, что приведет к развитию естественной конвекции.

Теперь нетрудно представить себе приближенный теплогидравлический расчет литниковой системы с помощью формул (59), (60), (66) и (68): по (68) следует определить время заполнения формы, по (60) — среднюю скорость истечения расплава из питателя в полость формы и по (59) — площадь поперечного сечения питателей. Далее, руководствуясь известными читателю технологическими соображениями, необходимо выбрать конструкцию литниковой системы, назначить число и протяженность питателей, сечения и другие размеры стояка и шлакоуловителя. В заключение по (66) требуется вычислить $\vartheta_{\text{п}}$, с тем чтобы определить $\vartheta_{\text{н}}$ по (69) для расчета по (48) времени дальнейшего охлаждения расплава после заполнения формы.

Приведенная схема расчета до формулы (66) в точности повторяет схему, известную читателю из технологических дисциплин. Разница состоит лишь в том, что вместо эмпирической формулы (62) или (63) предлагается (68), найденная в результате приближенного теоретического анализа охлаждения расплава во время его течения по каналам литниковой системы и в полости формы. И, естественно, возникает вопрос об адекватности формул (62) и (68) или (63) и (68).

Ответить на этот вопрос относительно просто. Действительно, так как в формуле (68), несмотря на ее приближенный вывод, нашли отражение главные черты процесса охлаждения расплава во время заполнения формы, то она должна соответствовать эмпирической формуле, например (62), ибо в ней, несмотря на все ее недостатки, нашел отражение многолетний опыт большого числа литейных цехов. Из сравнения (62) и (68) следует, что их соответствие друг другу возможно, если существует связь между приведенным размером отливки и ее массой.

Анализ громадного числа деталей машин, отливаемых из чугунов и сталей, показывает, что между средней толщиной отливок и их массой действительно выявляется корреляция, которая выражается зависимостью

$$s_0 = DG_0^{m_2}, \tag{70}$$

где $D = 3{,}5 \div 10$; $m_2 = 0{,}15 \div 0{,}25$, если s_0 в мм и G_0 в кг.

Большинство машиностроительных отливок тонкостенны в тепловом смысле, т. е. их приведенный размер $\mathfrak{R}_0$ очень близок к половине l_0 средней толщины s_0 их тела (см. с. 147). Тогда (69) для средних значений D и m_2, т. е. при $D = 7{,}0$ и $m_2 = 0{,}2$, примет вид

$$t_{зал} = 14 \cdot 10^{-6} \left[\frac{c_1\rho_1(\Theta_{зал} - 1)}{1{,}13 b_4 \Theta_{зал}}\right]^2 G_0^{0,4}, \tag{71}$$

где $\Theta_{зал} = \dfrac{T_{зал} - T_ф}{T_L - T_ф}$ — относительная температура заливки.

Определенное соответствие между (62) и (68) в виде (71) уже достигнуто: показатель степени m в (62), по данным различных авторов, составляет 0,38—0,5 (см. с. 201), в (71) он равен 0,4. Интересно, что при подстановке s_0 из (70) в (63) при средних значениях D и m_2 получается формула (62), в которой $m = 0{,}4 \div 0{,}57$.

Постоянная A в (62) находится в пределах от 1,0 до 3,7; после подстановки s_0 из (70) в (63) при средних значениях D и m_2 получается (62), в которой $A = 1{,}63 \div 4{,}0$.

Оценим множитель перед степенью $G_0^{0,4}$ в (71). Пусть перегрев при заливке чугуна равен 100 К. Тогда $\Theta_{зал} = 1{,}09$ и $\Theta_{зал} - 1 = 0{,}09$. Из приложений VI и VII находим, что $b_4 = 1377$ Вт$\cdot$с$^{1/2}$/(м$^2\cdot$К); $c_1 = 837{,}4$ Дж/(кг$\cdot$К) и $\rho_1 = 7000$ кг/м^3. Следовательно, интересующий нас множитель равен 2,96.

Таким образом, можно заключить, что формула (68) получила в первом приближении экспериментальное подтверждение.

Однако это заключение обязывает нас доказать, что формула (68) справедлива не только для заливки сифоном, т. е. в случае, который выбран как пример расчета времени заполнения (см. рис. 40, *а*), но и в других случаях, применяющихся на практике.

Рассмотрим еще один пример — заливку сверху (рис. 40, *б*). Очевидно, что охлаждение потока расплава в каналах литниковой системы будет описываться теми же формулами. Для расчета

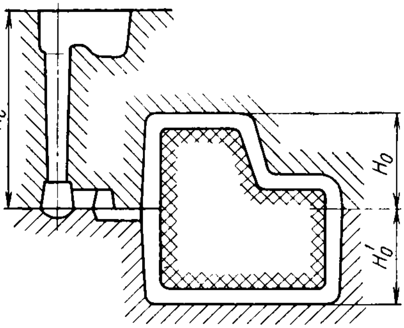


Рис. 41. Схема литниковой системы заливки коробчатой отливки в разъем формы

процесса охлаждения расплава в полости формы требуется другая математическая модель:

$$\left.\begin{aligned} &-c_1\rho_1\mathfrak{R}_0'\frac{d\vartheta_1}{dt}=\frac{b_4\vartheta_{\text{зал}}}{\sqrt{\pi\,(t-t_0)}};\\ &t_0>0;\ t>t_0;\\ &\vartheta_1\,(t_\text{с}+t_\text{п})=\vartheta_\text{п}^*, \end{aligned}\right\}\quad(72)$$

так как в данном случае время охлаждения потока расплава в любом сечении полости формы, отстоящем от дна на расстоянии y_0, равно времени прогрева формы в этом сечении, т. е. времени $t-t_0$ течения расплава мимо этого сечения. Следовательно, если в момент времени $t = t_\text{ф}$ температура расплава на дне формы равна ϑ_0, то при $t_0 = 0$

$$\vartheta_\text{п}^*-\vartheta_0=\frac{1,13b_4\vartheta_{\text{зал}}}{c_1\rho_1\mathfrak{R}_0'}\sqrt{t_\text{ф}};$$

если, по-прежнему, пренебрегать тепловыми потерями в литниковой системе, то $\vartheta_\text{п}^* \approx \vartheta_{\text{зал}}$ и $t_\text{ф} \approx t_{\text{зал}}$. Тогда

$$t_{\text{зал}}=\left[\frac{c_1\rho_1\,(T_{\text{зал}}-T_L)}{1,13b_4\,(T_{\text{зал}}-T_\text{ф})}\right]^2(\mathfrak{R}_0')^2,$$

так как согласно предыдущему расчету $\vartheta_0 = \vartheta_L$.

Итак, (68) справедлива и для заливки формы снизу.

Очевидно, что при заполнении формы в разъем

$$t_{\text{зал}}=[\mathfrak{R}_0^2+(\mathfrak{R}_0')^2]\left[\frac{c_1\rho_1\,(T_{\text{зал}}-T_L)}{1,13b_4\,(T_{\text{зал}}-T_\text{ф})}\right]^2,$$

или

$$t_{\text{зал}}=\left[\frac{c_1\rho_1\,(\Theta_{\text{зал}}-1)}{1,13b_4\Theta_{\text{зал}}}\right]^2\mathfrak{R}_{\text{ср}}^2,\qquad(73)$$

где $\mathfrak{R}_{\text{ср}}$ — среднее значение приведенного размера отливки.

Нетрудно рассчитать время заполнения формы коробчатой отливки (рис. 41). Здесь потребуется найти время заполнения нижней части формы, когда расплав течет по горизонтальному щелевому каналу, затем — время заполнения вертикальных стенок и, в заключение, время заполнения верхней части формы. Структура окончательной формулы будет такой же, как и (73), если пользоваться средним значением приведенного размера отливки или средней толщины тела[1].

---

[1] Этот расчет рекомендуется выполнить самостоятельно в качестве упражнения к данной главе.

56. УЧЕТ КОНФИГУРАЦИИ КАНАЛОВ ЛИТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ И ПОЛОСТИ ФОРМЫ ИХ ПРИВЕДЕННЫМИ РАЗМЕРАМИ

Конфигурация отливки в формуле (48) и конфигурация стояка, шлакоуловителя и питателя в последующих формулах учтены введением в них приведенного размера отливки и соответствующих элементов литниковой системы. Определенным основанием для этого являются правило Хворинова и совпадение (48) с (34), полученной из модифицированного закона квадратного корня (28), который найден Н. И. Хвориновым как результат экспериментального исследования процесса затвердевания перегретого расплава в песчаной форме.

Такое основание можно рассматривать как экспериментальное. Его было бы достаточно для практического использования полученных выше формул, если бы нам не было известно другого теоретического основания правила Хворинова: оно действительно только и только в случае малой интенсивности охлаждения отливки (см. с. 61 и 79). И здесь важно напомнить, что модель малой интенсивности охлаждения отливки в песчаной форме предусматривает возможность пренебрегать неоднородностью температурного поля в отливке по сравнению с неоднородностью поля в форме. Поэтому если отливка в песчаной форме охлаждается с *малой* интенсивностью, то форма прогревается с *большой* интенсивностью. В свою очередь, это означает, что в приведенном размере отливки учитывается влияние ее конфигурации на ход распространения теплоты только в отливке. В песчаной форме ход распространения теплоты будет зависеть не только от конфигурации и размеров ее полости, но и от термического сопротивления прогретой части формы

$$\frac{\zeta(t)}{\lambda_4},$$

где $\zeta(t)$ — глубина прогрева формы; она является функцией времени.

Теперь важно вспомнить смысл приведенного размера тела, в нашем случае — отливки (см. с. 62). Формально, приведенный размер отливки — это отношение ее объема к поверхности охлаждения. По существу он определяет размер плоского эквивалента для тела любой конфигурации, т. е. половину толщины бесконечной плиты. Следовательно, если мы хотим использовать (48) и последующие формулы в практических расчетах, необходимо убедиться в том, что, например, во время отвода теплоты перегрева от расплава термическое сопротивление формы для отливки сложной конфигурации равно термическому сопротивлению формы, но для плоской отливки, половина толщины которой равна приведенному размеру отливки сложной конфигурации. Так как речь может идти о формах из одного и того же материала, достаточно убедиться в равенстве глубины $\zeta(t)$ прогрева формы для отливки сложной конфигурации и $\zeta_э(t)$ для ее плоского эквивалента.

В качестве примера отливок сложной конфигурации рассмотрим тела, объем которых определяется (28-I) при $F(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{к} F_0$.

Прогрев формы для таких отливок можно исследовать с помощью математической модели, аналогичной модели (35), но в ее основе должно быть обобщенное дифференциальное уравнение (30-I) распространения теплоты

$$\left.\begin{aligned}
&r^{к}\frac{\partial\vartheta_4}{\partial t}=a_4\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{к}\frac{\partial\vartheta_4}{\partial r}\right);\quad r_0<r<\infty;\\
&\vartheta_4(r,\ 0)=0;\\
&\vartheta_4(r_0,\ t)=\vartheta_{зал}\equiv\mathrm{const};\\
&\frac{\partial\vartheta_4(\infty,\ t)}{\partial r}=0;\quad \vartheta_4(\propto,\ t)=0;
\end{aligned}\right\}\qquad(74)$$

граничное условие на поверхности нагрева выбрано простейшим из условий I рода, так как выше показана его допустимость для расчета прогрева формы во время охлаждения перегретого расплава.

Дифференциальное уравнение (36) теплового баланса охлаждающегося расплава и прогревающейся формы в рассматриваемом случае примет вид

$$\left.\begin{aligned}
&-c_1\rho_1\mathfrak{R}\frac{\partial\vartheta_1}{dt}=-\lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(r_0,\ t)}{\partial r};\\
&\vartheta_1(0)=\vartheta_{зал}\equiv\mathrm{const},
\end{aligned}\right\}\qquad(75)$$

где $\mathfrak{R}$ — приведенный размер соответствующих каналов литниковой системы или полости формы.

Краевую задачу на прогрев формы будем решать методом А. И. Вейника, так как он позволяет определить глубину прогрева ζ полуограниченного тела (см. с. 86).

Выразим температурное поле в форме формулой параболы n-го порядка:

$$\vartheta_4(r,\ t)=\vartheta_{зал}\left(1-\frac{r-r_0}{\zeta(t)}\right)^{n};\qquad(76)$$

в этой связи запишем иначе второе граничное условие задачи (74):

$$\frac{\partial\vartheta_4(r_0+\zeta,\ t)}{\partial r}=0;\quad \vartheta_4(r_0+\zeta,\ t)=0.\qquad(77)$$

Дифференциальное уравнение в задаче (74) представим интегральным соотношением

$$c_4\rho_4\int\limits_{r_0}^{r_0+\zeta} r^{к}\frac{\partial\vartheta_4}{\partial t}\,dr=-\int\limits_{r_0}^{r_0+\zeta}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\lambda_4\frac{\partial\vartheta_4}{\partial r}r^{к}\right)dr.$$

В итоге, из уравнения (75) теплового баланса с учетом формулы (76) для граничного условия (77) получим

$$\left.\begin{aligned} &-c_1\rho_1\mathfrak{R}\frac{d\vartheta_1}{dt}=\frac{nc_4\rho_4\vartheta_{\text{зал}}}{r_0^{\text{к}}\zeta^2}\frac{d\zeta}{dt}\int\limits_{r_0}^{r_0+\zeta} r^k(r-r_0)\left(1-\frac{r-r_0}{\zeta}\right)^{n-1}dr;\\ &\vartheta_1(0)=\vartheta_{\text{зал}}\equiv\text{const}. \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

Каналы литниковой системы могут быть уподоблены бесконечному цилиндру по правилу приближенного подобия, предложенному А. И. Вейником (см. с. 57). Поэтому прежде всего оценим ζ и $\zeta_э$ для цилиндра. Из (78) при $k = 1$

$$-(n+1)\frac{c_1\rho_1\mathfrak{R}}{c_4\rho_4\vartheta_{\text{зал}}}\frac{d\vartheta_1}{dt}=\left(1+\frac{2}{n+2}\frac{\zeta}{r_0}\right)\frac{d\zeta}{dt};\quad \vartheta_1(0)=\vartheta_{\text{зал}}.$$

Аналогичное выражение для плоского эквивалента этого бесконечного цилиндра нетрудно найти из (78) при $k = 0$ и $\zeta = \zeta_э$:

$$-(n+1)\frac{c_1\rho_1\mathfrak{R}}{c_4\rho_4\vartheta_{\text{зал}}}\frac{d\vartheta_1}{dt}=\frac{d\zeta_э}{dt};\quad \vartheta_1(0)=\vartheta_{\text{зал}}. \quad (79)$$

Так как левые части этих выражений равны, то

$$\zeta_э=\zeta\left(1+\frac{1}{n+2}\frac{\zeta}{r_0}\right). \quad (80)$$

Следовательно, глубину ζ прогрева формы от цилиндрического канала и глубину $\zeta_э$ прогрева формы от плоского эквивалента этого цилиндра можно принять равными друг другу лишь приближенно в случаях, когда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\zeta(t)}{r_0}\ll 1\\ &\text{или}\\ &\frac{\zeta(t)}{r_0}<0{,}3, \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

если, как и раньше, принять $n = 2$ (см. с. 88) и допустить ошибку в определении $\zeta_э$ по (80) меньше 10%.

В общем случае, т. е. и для шаровой отливки, формула (80) принимает вид (доказать!)

$$\zeta_э=\zeta\left[\left(1+\frac{\zeta}{r_0}\right)^k-\frac{k(n+1)}{n+2}\frac{\zeta}{r_0}\left(1+\frac{\zeta}{r_0}\right)^{k-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{k(k-1)(n+1)}{2(n+3)}\left(\frac{\zeta}{r_0}\right)^2\right]; \quad (82)$$

при этом в условии (81) можно сохранить оценку $\frac{\zeta(t)}{r_0} < 0{,}3$, если для шаровой отливки допустить ошибку в определении $\zeta_э$ по (82) меньше 15% (доказать!).

Очевидно, что условие (81) — то, при котором приведенные размеры каналов литниковой системы и отливки в формуле (48) и последующих формулах для расчета времени охлаждения перегретого расплава достаточно хорошо учитывают их конфигурацию.

Очевидно также, что r_0 в условии (81) в общем случае принимает смысл наименьшего радиуса кривизны поверхности охлаждения расплава в форме. Что касается величины $\zeta_э(t)$, то ее нетрудно определить по формуле, которая получена для прогрева полуограниченного тела при граничных условиях I рода (см. с. 87):

$$\zeta_э = \sqrt{2n(n+1)a_4 t}, \tag{83}$$

где $t = t_{зал}$ для периода заполнения формы и $t = t_1$ для всей стадии отвода теплоты перегрева от расплава.

Читатель, по-видимому, уже обратил внимание на то, что подстановка в (79) $\zeta_э$ из (83) при $\vartheta_1(t_{зал}) = \vartheta_н$ позволяет получить формулу, аналогичную (45):

$$\vartheta_1(t) = \vartheta_н\left[1 - \sqrt{\frac{2n}{n+1}}\,\frac{b_4(\sqrt{t} - \sqrt{t_{зал}})}{c_1\rho_1\mathfrak{R}}\right].$$

Разница между этой формулой и (45) в числовом множителе в первой части. Если $n = 1{,}75$, то оба множителя совпадают по числовому значению. Для практических расчетов можно принять $n = 2$. Тогда $\sqrt{\frac{2n}{n+1}} \approx 1{,}15$, что на 1,77% больше величины $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}13$.

Аналогично получается формула (57). Необходимо лишь в (79) вместо t поставить время t_0 охлаждения потока расплава, а в (83) — время $t - t_0$ прогрева формы этим потоком:

$$\zeta_э = \sqrt{2n(n+1)a_4(t - t_0)}. \tag{84}$$

На рис. 40 приведены графики, отражающие зависимость глубины $\zeta_э$ прогрева формы от высоты y ее полости к концу заливки. Графики построены на основе формулы (84) при $t = \frac{y}{w_0}$ и $t_0 = \frac{y_0}{w_0}$, из которой следует, что в нижней части полости формы ($y_0 = 0$) глубина прогрева наибольшая, в верхней ($y_0 = y$) она равна нулю. Эта неравномерность прогрева формы может привести к неодновременности затвердевания залитого расплава и, следовательно, к образованию усадочных дефектов в нижней части отливки, особенно при сифонной заливке. Избежать образования дефектов удается либо за счет повышения скорости заполнения формы, либо в результате увеличения конусности отливки.

Теперь выполним обещание, данное читателю на с. 129, и приведем более строгое определение понятия «массивной» формы. Очевидно, что форма является массивной, если в любой момент времени процесса формирования отливки

$$\frac{\zeta(t)}{l_{\text{ф}}} \ll 1. \tag{85}$$

57. УПРАЖНЕНИЯ

Здесь и далее отступим от уже принятого правила предлагать читателю задачи и упражнения только в конце каждого раздела. Отступление вызвано тем, что в данной и последующих главах рассмотрены самостоятельные стадии процесса формирования отливки и для усвоения методов и результатов расчета этих стадий промежуточные упражнения будут полезными. В конце раздела предложим читателю лишь задачи по расчету режимов литья в песчаные формы.

Итак, упражнения к гл. 12.

Упражнение 1. Доказать, что приближенная математическая модель (44) охлаждения расплава в песчаной форме может быть получена на основе допущения автомодельности процесса прогрева формы во время отвода теплоты перегрева от расплава.

Упражнение 2. Доказать, что математическая модель (46) охлаждения перегретого расплава, предложенная А. И. Вейником в 1953 г., основана на допущении приближенной автомодельности прогрева формы.

Упражнение 3. На примере решения задачи (74) методом А. И. Вейника показать, что этот метод (см. с. 208—209) основан на предположении приближенной в общем случае автомодельности процесса теплопроводности.

Указание. Понятие автомодельности имеет важное значение в теории подобия как основа упрощения исследования конкретного процесса. Формальным признаком автомодельности является вырождение критериев подобия. По существу автомодельность обусловлена физической обстановкой протекания исследуемого процесса, в которой эффекты, играющие важную роль в развитии этого процесса вообще, оказываются в данном конкретном случае малоощутимыми, и ими допустимо пренебречь[1]. При выполнении *упражнений 1—3* читателю необходимо сделать анализ физической обстановки процесса охлаждения расплава в песчаной форме и установить факт (полного или частичного) вырождения критериев подобия процесса.

Упражнение 4. Рассчитать $t_{\text{зал}}$ для отливки коробчатого сечения (см. рис. 41).

Упражнение 5. Исследовать адекватность теоретической формулы (68) эмпирическим формулам (62) и (63) для отливок, имеющих существенно разную массу, но одинаковый приведенный размер.

Указание. В качестве примера конкретной конфигурации отливок целесообразно рассматривать коробчатые детали (см. рис. 41) с одинаковым приведенным размером тела и разными габаритными размерами в плоскости чертежа.

---

[1] Для более обстоятельного изучения вопросов, связанных с анализом автомодельности, читателю следует обратиться к очень интересной книге А. А. Гухмана «Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена» (М., «Машиностроение», 1974. 328 с.).

Глава 13. ЗАТВЕРДЕВАНИЕ РАСПЛАВА ЛИТЕЙНЫХ СПЛАВОВ. РАСЧЕТ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ

Анализ процесса затвердевания расплава литейных сплавов в песчаной форме целесообразно начать с исследования кинетики затвердевания эвтектик. Эвтектические или почти эвтектические сплавы являются наиболее распространенными в литейном производстве. Примерами могут служить серые чугуны и силумины.

Как условились раньше, этот анализ затвердевания будем рассматривать применительно к литью в массивные неохлаждаемые песчаные формы, т. е. когда реализуется условие (85).

58. ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ РАСПЛАВА ЭВТЕКТИКИ. РАСЧЕТ СКОРОСТЕЙ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Представим математическую модель (13) для $l_ф = \infty$ в первоначальных переменных:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\vartheta_4}{\partial t} = a_4\frac{\partial^2\vartheta_4}{\partial x^2}; \quad l_0 < x < \infty, \quad t > t_1;\\
&\vartheta_4(x,\ t_1) = \vartheta_E\varphi_2(x);\\
&\vartheta_4(l_0,\ t) = \vartheta_E \equiv \text{const};\\
&\vartheta_4(\infty,\ t) = 0; \quad \frac{\partial\vartheta_4(\infty,\ t)}{\partial x} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

$$L_E\rho_3\frac{d\varkappa_E}{dt} = \lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(l_0,\ t)}{\partial x}; \quad t > t_1, \quad \varkappa_E(t_1) = l_0, \tag{87}$$

ибо для эвтектических сплавов $T_L - T_S = 0$, $\psi_E = 1$, и, следовательно, $t_2 = t_1$; величину t_1 рассчитывают по (48) с учетом (68) и (69).

Как и в случае исследования кинетики охлаждения перегретого расплава с помощью математической модели (11), здесь также выделяем краевую задачу (86) на прогрев полуограниченной формы при простейшем из граничных условий I рода, когда $\vartheta_4(l_0,\ t) = \vartheta_E \equiv \text{const}$ (рис. 42) и при произвольном начальном распределении температуры в форме $\vartheta_4(x,\ t) = \vartheta_E\varphi_2(x)$. Эта краевая задача известна из общей теории теплопроводности, и ее точное решение не представляет особого труда [1]. Однако не будем пользоваться решением именно этой задачи, так как ее можно еще более упростить без заметного ущерба точности исследования кинетики затвердевания расплава в песчаной форме.

---

[1] См., например, **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967, с. 71—72.

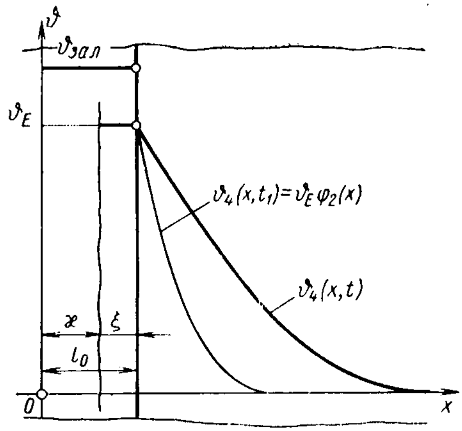


Рис. 42. Схема к задаче (86) на прогрев формы теплотой затвердевающего расплава эвтектики

Дело в том, что функция $\varphi_2(x)$ известна из предыдущих расчетов охлаждения перегретого расплава. Она выражается формулой (43), если в ней $t = t_1$ — время отвода теплоты перегрева от расплава и $\vartheta_0 = \vartheta_E$, так как согласно представлению приближенной автомодельности процесса прогрева формы, температура поверхности ϑ_0 в интервале от $\vartheta_{зал}$ до ϑ_L (в рассматриваемом случае до ϑ_E) может быть любой [1].

Читатель легко проверит, что формула (43) при $\vartheta_0 = \vartheta_E$ является решением задачи (86) для случая, когда $t > 0$ и $\vartheta_4(x, 0) = 0$. Следовательно, температурное поле прогревающейся формы выражается (43) при $\vartheta_0 = \vartheta_E$ и для $t \geqslant t_1$. Тогда математическая модель (86)—(87) затвердевания расплава эвтектик примет вид

$$L_E\rho_3\frac{d\varkappa_E}{dt} = -\frac{b_4\vartheta_E}{\sqrt{\pi t}};\quad t > t_1;$$

$$\varkappa_E(t_1) = l_0.$$

Умножим обе части этих равенств на F_0 — площадь поверхности охлаждения плоской отливки. Учитывая (см. рис. 42), что $\varkappa_E(t) = l_0 - \xi(t)$ и $\varkappa_E(t)F_0 = V_0 - V(t)$, где $V(t)$ — объем корки, затвердевшей на поверхности формы плоской отливки к моменту времени $t > t_1$, получим

$$L_E\rho_3\frac{dV}{dt} = \frac{b_4\vartheta_E F_0}{\sqrt{\pi t}};\quad t > t_1; \tag{88}$$

$$V(t_1) = 0,$$

откуда

$$V(t) = \frac{1{,}13 b_4 F_0}{L_E\rho_3}(T_E - T_ф)\left(\sqrt{t} - \sqrt{t_1}\right). \tag{89}$$

---

[1] Более подробных пояснений не дается, ибо мы уверены, что читатель успешно выполнил первые три упражнения, рекомендованные ему в конце предыдущего раздела.

Сравнение этой формулы с (33) показывает, что они практически совпадают, ибо для литья в песчаные формы $\frac{b_4}{b_3} \ll 1$. Так как формула (33) является математическим выражением *экспериментального факта*, который наблюдали Д. Чипмен и Д. Фондерсмит и затем Н. И. Хворинов (см. с. 174 и 178), то есть основание заключить, что *полученная формула (89) подтверждена экспериментально.*

Далее, если в реальных условиях литья во время затвердевания отливки произвольной конфигурации удовлетворяется условие (81) для $t = t_{\text{з}}$, то отношение $\frac{V}{F_0}$ можно рассматривать, в соответствии с предложением Н. И. Хворинова, как плоский эквивалент $\xi_{\text{э}}$ корки ξ, затвердевающей на поверхности формы этой отливки, т. е.

$$\xi_{\text{э}}(t) = \frac{1,13b_4}{L_E\rho_{\text{з}}}(T_E - T_{\text{ф}})(\sqrt{t} - \sqrt{t_1}), \tag{90}$$

где, например, для отливок, представляющих собой тела, объем которых определяется формулой (28-I) при $F(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^k F_0$,

$$\xi_{\text{э}} = \xi\left[1 \mp \frac{\xi}{r_0}\frac{k}{2} + \left(\frac{\xi}{r_0}\right)^2 \frac{k(k-1)}{6}\right]; \tag{91}$$

знак «—» относится к случаям затвердевания снаружи (от формы), знак «+» — изнутри (от стержня); r_0 в (91) и (81) определяется как радиус кривизны поверхности охлаждения отливки соответственно со стороны формы и стержня (доказать!).

Продолжительность $t_{\text{з}}$ затвердевания отливки эвтектического сплава в песчаной форме определяют из (90) при $\xi_{\text{э}}(t_{\text{з}}) = \mathfrak{R}_0$:

$$t_{\text{з}} = \left[\frac{L_E\rho_{\text{з}}\mathfrak{R}_0}{1,13b_4(T_E - T_{\text{ф}})} + \sqrt{t_1}\right]^2, \tag{92}$$

где t_1 вычисляют по (48) с учетом (68) и (69).

По (92) нетрудно выполнить расчет продолжительности затвердевания отдельных элементов отливки сложной конфигурации, так как подавляющее большинство отливок можно рассматривать в виде сочленения плоских, цилиндрических и шаровых ее частей со своим значением приведенного размера. Такой метод расчета впервые предложен Б. Б. Гуляевым в 1949 г. Читателю, должно быть, ясно, что этот метод реален только при малой интенсивности охлаждения, так как возможно пренебрегать тепловым взаимодействием отдельных элементов отливки.

Из (90) и (91) следует (доказать!)

$$\frac{\xi}{l_0} = \pm 1 \mp \left[1 \mp \frac{1,13b_4(k+1)\vartheta_E}{L_E\rho_{\text{з}}l_0}(\sqrt{t} - \sqrt{t_1})\right]^{\frac{1}{k+1}}; \tag{93}$$

верхние знаки сложения и вычитания относятся к случаям затвердевания снаружи, нижние — изнутри.

С помощью формул (90) и (93), которые описывают *кинетику затвердевания* расплава эвтектики в песчаной форме, определяются важные параметры процесса формирования отливки: *скорость затвердевания*: *объемная*, приведенная к единице поверхности охлаждения отливки,

$$U_э = \frac{b_4\vartheta_E}{L_E\rho_3\sqrt{\pi t}}; \quad t \geqslant t_1, \tag{94}$$

которая численно равна линейной скорости затвердевания эквивалентной плоской отливки, и *линейная*

$$U = \frac{b_4\vartheta_E}{L_E\rho_3\sqrt{\pi t}}\left[1 \mp \frac{2b_4\vartheta_E(k+1)}{\sqrt{\pi}L_E\rho_3 l_0}\left(\sqrt{t}-\sqrt{t_1}\right)\right]^{-\frac{k}{k+1}}. \tag{95}$$

На рис. 43 представлены графики кривых затвердевания (рис. 43, *а*) и скорости затвердевания (рис. 43, *б*), рассчитанные по (93)—(95), для плоской ($k = 0$), цилиндрической ($k = 1$) и шаровой ($k = 2$) отливок из силумина с характерным размером $l_0 = 15$ мм для $b_4 = 1{,}05 \cdot 10^3$ Вт$\cdot$с$^{1/2}$/(м$^2\cdot$К) и $T_{зал} = 950$ К. Обращает внимание существенная неоднородность хода процесса затвердевания отливок в песчаной форме, особенно цилиндрических и шаровых отливок, у которых линейная скорость затвердевания к концу процесса достигает бесконечно большой величины. Это означает, что в середине таких отливок затвердевание происходит весьма интенсивно. Действительно, из (93)—(95) следует, что

$$U = \frac{U_э}{\left(\frac{x}{l_0}\right)^k}, \tag{96}$$

где

$$U_э = \frac{2(k+1)(b_4\vartheta_E)^2}{l_0\left(\sqrt{\pi}L_E\rho_3\right)^2}\left[1 \mp \left(\frac{x}{l_0}\right)^{k+1} + \frac{1{,}13(k+1)\,b_4\vartheta_E}{L_E\rho_3 l_0}\sqrt{t_1}\right]^{-1}, \tag{97}$$

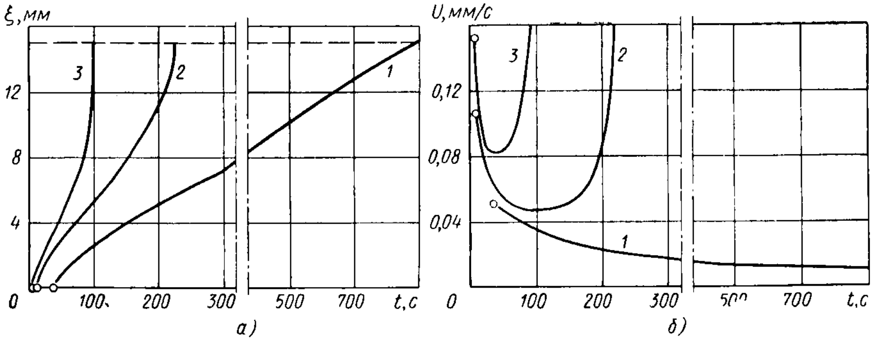


Рис. 43. Кинетика затвердевания (*а*) и изменения линейной скорости затвердевания (*б*) расплава силумина в форме для отливок:
1 — плоской; *2* — цилиндрической; *3* — шаровой

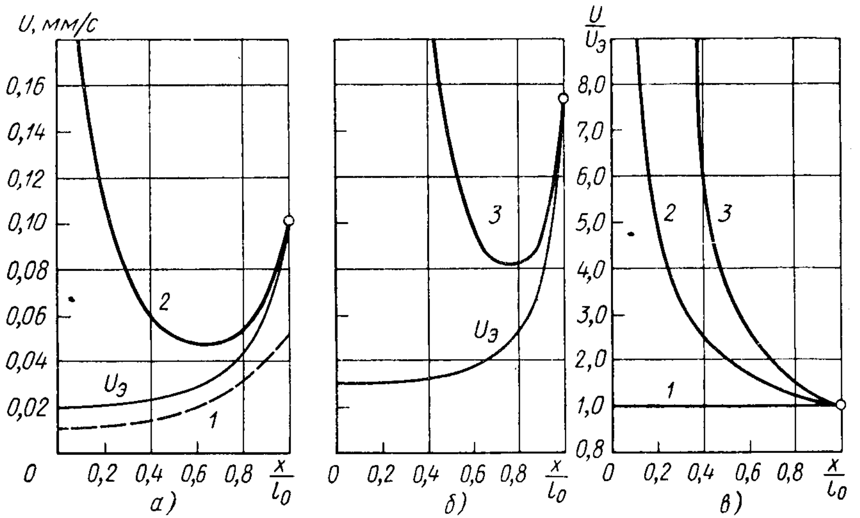


Рис. 44. Распределение линейной, объемной (*а* и *б*) и относительной (*в*) скорости затвердевания по сечению отливок:

1 — плоской; *2* — цилиндрической; *3* — шаровой

так как разность $l_0 - \xi$ можно представить как координату фронта корки $\varkappa_E$ или, что то же, координату x сечения тела отливки (продумать!). Результаты расчетов по (96) и (97) для тех же отливок из силумина приведены на рис. 44. График изменения скорости затвердевания для плоской отливки дан на рис. 44, *а* штриховой линией.

С помощью (94) и (95), следуя методу Б. Б. Гуляева, можно вычислить скорость затвердевания каждого элемента сложной отливки и, используя диаграммы, связывающие структуру тех или иных литых сплавов и их свойства с объемной или линейной скоростью затвердевания (типа изображенных на рис. 13—18), судить о неоднородности структуры и свойств по сечению основного тела отливки и каждого ее элемента. Наконец, с помощью (94)—(97) возможно решать обратные задачи, наиболее важные для литейного производства, — *задачи расчета основных технологических режимов литья* (перегрева в момент заливки, времени охлаждения формы и коэффициента ее тепловой аккумуляции) с целью получения отливок с желаемыми структурой и свойствами. Этот способ определения режимов литья для получения отливок с заданными свойствами впервые предложен Г. Ф. Баландиным в 1953 г.

59. АНАЛИЗ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ УГЛОВЫХ СОПРЯЖЕНИЙ ТЕЛА СЛОЖНОЙ ОТЛИВКИ

Угол в 90° является наиболее распространенным элементом сопряжений в реальных конструкциях сложной отливки — это L-, T- и X-образные пересечения тел, сопряжение бобышек с плоским телом, торцы бобышек, ребер и т. п.

Внутренний прямой угол отливки

Для начала рассмотрим затвердевание прямого внутреннего угла, без галтели.

Условимся форму, образующую этот угол, рассматривать как полуограниченное тело вдоль положительного направления координатных осей x и y и как неограниченное тело вдоль оси z. По-прежнему будем считать, что процесс охлаждения затвердевающего расплава протекает с весьма малой интенсивностью, а прогрев формы — с большой и только в положительном направлении осей x и y. Математическая модель затвердевания расплава эвтектики у внутреннего прямого угла отливки будет аналогична модели (86)—(87), но представить ее необходимо как двухмерную:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\vartheta_4}{\partial t}=a_4\left(\frac{\partial^2\vartheta_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vartheta_4}{\partial y^2}\right);\ t>0;\ 0<x<\infty;\ 0<y<\infty;\\
&\vartheta_4(x,\ y,\ 0)=0;\\
&\vartheta_4(0,\ y,\ t)=\vartheta_4(x,\ 0,\ t)=\vartheta_E\equiv\mathrm{const};\\
&\frac{\partial\vartheta_4(\infty,\ y,\ t)}{\partial x}=\frac{\partial\vartheta_4(x,\infty,\ t)}{\partial y}=0;\ \vartheta_4(\infty,y,t)=\vartheta_4(x,\infty,t)=0;
\end{aligned}\right\}\qquad(98)$$

$$\left.\begin{aligned}
&L_E\rho_3\frac{\partial\xi_m}{dt}=-\lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(x_0,\ y_0,\ t)}{\partial m};\quad t>t_1;\\
&\xi_m(x_0,\ y_0,\ t_1)=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(99)$$

где m — направление нормали к граничной поверхности формы; x_0, y_0 — координаты граничной поверхности; ξ_m — толщина затвердевшей корки вдоль нормали.

Краевая задача (98) на прогрев двухмерной полуограниченной формы сформулирована с учетом тех упрощений, которыми воспользовались выше при исследовании кинетики затвердевания плоской отливки (см. с. 213).

Эта задача знакома читателю (см. *задачу 2* в разделе I), и без дополнительных объяснений запишем ее решение:

$$\vartheta_4(x,\ y,\ t)=\vartheta_E\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_4t}}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{a_4t}}\right)\right].\qquad(100)$$

Уравнение граничной поверхности формы, совпадающей с координатной плоскостью $(+x,\ 0,\ z)$, может быть выражено в виде $y=0$.

Следовательно, направление нормали m к этой поверхности параллельно координатной оси y. Тогда уравнение (99) затвердевания для случая роста корки вдоль нормали к поверхности $y=0$ при $x_0=x$ примет вид

$$L_E\rho_3\frac{d\xi_y}{dt}=-\lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(x,\ 0,\ t)}{\partial y}.$$

С помощью (100) найдем, что для одной граничной поверхности угла

$$\left.\begin{aligned} &L_E\rho_3 \frac{d\xi_y}{dt} = \frac{b_4\vartheta_E}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_4 t}}\right); \quad t > t_1; \\ &\xi_y(x, t_1) = 0 \\ &\text{и} \\ &L_E\rho_3 \frac{d\xi_x}{dt} = \frac{b_4\vartheta_E}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{a_4 t}}\right); \quad t > t_1; \\ &\xi_x(y, t_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

для другой граничной поверхности угла.

Таким образом, (101) — математическая модель затвердевания внутреннего прямого угла (без галтели) отливки. Очевидно, что при $y = \infty$ и $x = \infty$ она полностью совпадает с моделью (88) затвердевания плоской отливки. При $y = x = 0$ скорость затвердевания равна нулю, т. е. *у вершины внутреннего угла без галтели расплав не затвердевает.* Вывод неожиданный, и поэтому необходимо обратиться к эксперименту. Тем более, что, по данным Н. И. Хворинова [13], у внутреннего прямого угла без галтели корка имеет профиль, описываемый радиусом

$$r = 3{,}0\xi,$$

где ξ — толщина корки, затвердевающая на большом удалении от кромки угла.

Это означает, что от острой кромки внутреннего угла растет корка, толщина которой

$$\xi_0 = 0{,}172\xi.$$

На рис. 45 приведена фотография разреза корки, затвердевшей около прямого угла, выполненного сухим стержнем; кромка угла имела галтель меньше 1 мм. Форма ступенчатой отливки залита расплавом АЛ2. Незатвердевший расплав вылит через 65 с после окончания заполнения. Ясно, что результаты эксперимента и анализа математической модели (101) совпадают.

Найдем профиль корки формы, которая затвердевает на поверхности $y = 0$. Из первого уравнения (101) следует

$$\xi_y(x, t) = \frac{1{,}13 b_4\vartheta_E}{L_E\rho_3} \sqrt{t} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_4 t}}\right) + \frac{c_4\rho_4 x\vartheta_E}{\pi L_E\rho_3} \times$$

$$\times \int_0^t \frac{\exp\left(\frac{-x^2}{4a_4 t}\right)}{\frac{x^2}{4a_4 t}} d\left(\frac{x^2}{4a_4 t}\right),$$

где для простоты дальнейшего анализа принято $t_1 = 0$.

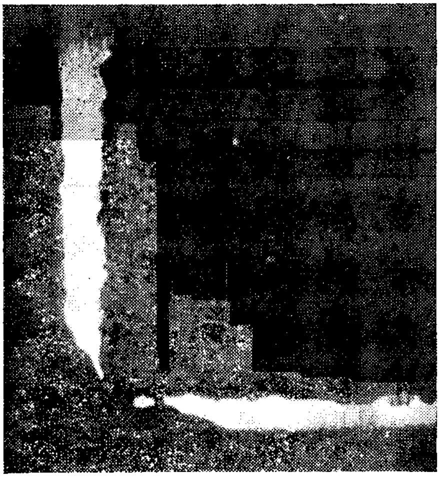


Рис. 45. Фотография разреза корки сплава АЛ2, затвердевшего у внешнего угла сухой песчаной формы

Очевидно, что в начальной стадии процесса затвердевания (т. е. для малых значений t) интеграл в правой части можно не учитывать. Тогда

$$\xi_y \approx \xi \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_4 t}}\right), \qquad (102)$$

так как множитель перед функцией $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_4 t}}\right)$ является толщиной ξ корки, затвердевшей за то же время t на большом удалении от вершины угла, где его влияние уже не сказывается (т. е. при $x \to \infty$).

На рис. 46 построена кривая профиля корки вдоль координатной оси x в соответствии с (102). Точно такой же профиль корки должен быть и вдоль оси y. Если теперь эту схему сравнить с профилем корки, полученным в эксперименте, то можно еще раз убедиться в достаточном совпадении модели (101) с реальным процессом.

Рассмотрим затвердевание внутреннего прямого угла с галтелью радиусом r_0. Для приближенной оценки толщины корки ξ_r

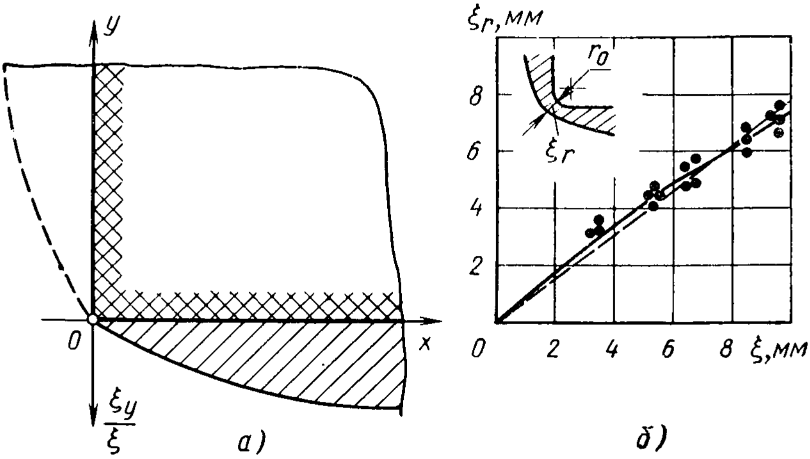


Рис. 46. Профиль затвердевающей корки (*а*), рассчитанной по формуле (102). Толщина корки (*б*) у внешнего угла формы с галтелью по данным Б. Б. Гуляева; кривая рассчитана по (103)

вдоль радиуса галтели примем, что корка от поверхности галтели растет так же, как и от поверхности цилиндрического стержня. Из (91) при $t_1 = 0$, $k = 1$, если взять нижние знаки сложения и вычитания, следует

$$\xi_r \approx r_0 \left[\left(1 + \frac{2\xi}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right], \tag{103}$$

где ξ — толщина корки, которая растет на большом удалении от вершины угла.

В случае $r_0 = 0$, т. е. для внутреннего прямого угла без галтели, эта формула хорошо согласуется с (102): толщина корки у кромки угла равна нулю.

На рис. 46, *б* приведены результаты опытов Б. Б. Гуляева по исследованию затвердевания угловых сопряжений тела отливки. Кривая ξ_r рассчитана по (103). Эта формула впервые получена Б. Б. Гуляевым в 1958 г. Она справедлива, естественно, при соблюдении условия (81).

Заметим, что по данным Н. И. Хворинова [13]

$$\xi_r = \xi + r_0;$$

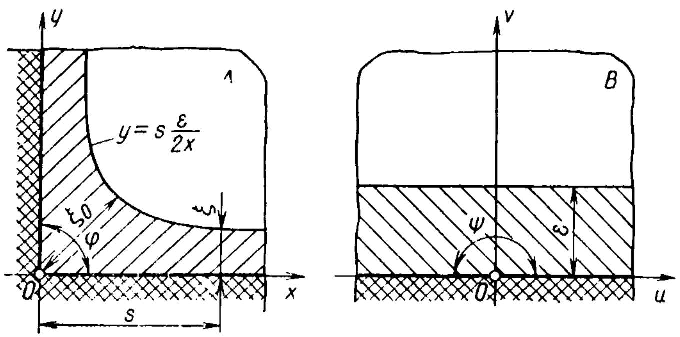
очевидно, что эта формула не согласуется с экспериментом Б. Б. Гуляева.

Внешний прямой угол отливки

Напомним, что отливка в целом и, следовательно, ее внешний угол охлаждаются с весьма малой интенсивностью теплоотдачи в форму. На этом основании при расчете затвердевания расплава пренебрегали неоднородностью распределения температуры по сечению твердой корки. Такой прием можно рассматривать как *первое приближение* к описанию реального процесса затвердевания.

Но возможно *второе приближение*, например, при анализе затвердевания плоской отливки температурное поле в твердой корке принять линейным. Так как линейное распределение температуры в неограниченной плоской стенке (корке) имеет место только при стационарной теплопередаче, то указанное второе приближение является *результатом допущения квазистационарности процесса теплопроводности в корке во время ее роста.* Это допущение впервые сформулировал и использовал для приближенных расчетов затвердевания плоских, цилиндрических и шаровых тел Л. С. Лейбензон в 1931 г.

Однако второе приближение существенно не уточняет уже выполненных расчетов затвердевания. В условиях весьма малой интенсивности отдача теплоты в форму, когда допустимо пренебрегать неоднородностью температурного поля по сечению всего тела отливки, учет этой неоднородности по сечению корки не должен заметно повлиять на тепловой баланс процесса затверде-



а) б)

Рис. 47. Схема, иллюстрирующая конформное отображение профиля твердой корки (*а*) у внутреннего угла формы, заданной в плоскости *А*, на профиль корки (*б*) у полуограниченной формы в плоскости *В*

вания. В то же время, представляя процесс теплопроводности в растущей корке квазистационарным, возможно использовать *методы конформных отображений* при приближенном расчете последовательного затвердевания отливок сложной конфигурации.

Применим конформное отображение для анализа последовательного затвердевания прямого внешнего угла отливки, так как другие методы, более точные, здесь весьма громоздки.

Напомним, что комплексная переменная $z = x + iy$, заданная в некоторой комплексной плоскости *А* (рис. 47, *а*), может быть отображена в другой комплексной плоскости *В* (рис. 47, *б*) комплексного переменного $w = u + iv$ с помощью *отображающей функции*

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{104}$$

Если эта функция является аналитической, т. е. удовлетворяет условиям Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

то она совершает *конформное* отображение.

Рассмотрим отображающую функцию

$$w = mz^2,$$

т. е.

$$w = m(x + iy)^2 \tag{105}$$

или

$$w = m(x^2 - y^2 + i2xy),$$

где m — множитель пропорциональности, являющийся действительной величиной.

Читатель легко проверит, что функция (105) аналитическая в смысле условий Коши—Римана. Функция (105) интересна тем, что она отображает границу прямого угла ($\varphi = 90^\circ$) в плоскости A (рис. 47, *а*) на прямую ($\psi = 180^\circ$) в плоскости B, совпадающую с координатной осью u (рис. 47, *б*) и симметрично расположенную относительно начала координат. В этом просто убедиться, если комплексные переменные z и w представить в нормальной форме:

$z = re^{i\varphi}$ и $w = \rho e^{i\psi}$.

Согласно отображающей функции (105),

$\rho e^{i\psi} = mr^2 e^{2i\varphi}$;

следовательно,

$\rho = mr^2$ и $\psi = 2\varphi$,

так как две комплексные величины равны друг другу, если их действительные и мнимые части порознь равны.

На плоскости B (рис. 47, *б*) проведем прямую $v = \varepsilon$ и найдем ее отображение на плоскости A. Для этого сравним уравнение (104) и отображающую функцию (105). Получим

$v = 2mxy$ и $u = m(x^2 - y^2)$;

при $v = \varepsilon$

$$y = \frac{\varepsilon}{2mx}. \qquad (106)$$

Пусть через прямые $v = 0$ и $v = \varepsilon$ перпендикулярно плоскости B проходят поверхности, ограничивающие твердое тело в виде неограниченной плиты толщиной ε (см. заштрихованную область на рис. 47, *б*). Сечение этой неограниченной плиты на плоскости A приобретает конфигурацию, ограниченную с внешней стороны прямыми $x = 0$ и $y = 0$, с внутренней стороны — кривой $y = \frac{\varepsilon}{2mx}$ (см. заштрихованную область на рис. 47, *а*).

Пусть, далее, на поверхностях плиты, сечение которой изображено на рис. 47, *б*, поддерживаются постоянные температуры: $\vartheta_E = \text{const}$ на верхней ($v = \varepsilon$) и $\vartheta_0 \equiv \text{const}$ на нижней ($v = 0$). Тогда, на плоскости A (рис. 47, *а*) прямые $x = 0$ и $y = 0$ — изотермы $\vartheta_0 \equiv \text{const}$, а кривая $y = \frac{\varepsilon}{2mx}$ — изотерма $\vartheta_E \equiv \text{const}$, так как для стационарного процесса теплопроводности существует *комплексный потенциал*

$$W(z) = \Phi(x, y) + i\Theta(x, y), \qquad (107)$$

который совпадает с уравнением (104); Φ — относительный тепловой поток и Θ — относительная температура являются сопряженными гармоническими функциями [1].

---

[1] Для более подробного изучения этого вопроса следует обратиться к учебному пособию М. А. Лаврентьева и Н. А. Шабата [10].

Теперь настало время вспомнить о сделанном нами допущении квазистационарности процесса теплопроводности в растущей корке при затвердевании расплава в условиях малой интенсивности его охлаждения в песчаной форме. Как ясно из только что изложенного, это допущение равносильно допущению о существовании комплексного потенциала (107) процесса теплопроводности в растущей корке, совпадающего с точностью до действительной постоянной с отображающей функцией (104). Возможность такого допущения означает, что уравнение (106) описывает границу корки, затвердевающей на поверхности формы внешнего угла отливки. Сравнение рис. 47, *а* с рис. 45, на котором приведен профиль корки, затвердевшей на поверхности формы, образующей внешний угол отливки из силумина, показывает определенное качественное совпадение результатов расчета и эксперимента.

Очевидно, что наибольшая толщина ξ_0 корки в плоскости *A* (рис. 47, *а*) будет вдоль биссектрисы прямого угла. Исходя из геометрических соображений, с учетом (106) при $y = x$,

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}.$$

Остается определить закон $\varepsilon(t)$ затвердевания расплава от плоской поверхности полуограниченной формы вдоль координатной оси v в плоскости *B* (рис. 47, *б*). Поступим так: примем, что существует некоторое расстояние s от вершины внешнего угла отливки вдоль, например, координатной оси x (рис. 47, *а*), на котором влияние угла на ход процесса затвердевания не сказывается, т. е. корка растет так, как это происходит при затвердевании плоской отливки — по закону $\xi(t)$, выраженному (93) при $k = 0$. Следовательно, если $x = s$, то $y = \xi(t)$ и согласно формуле (106) $\varepsilon = 2ms\xi$, т. е.

$$\xi_0 = \sqrt{2s\xi}.$$

Сравним эту формулу с результатами опытов Б. Б. Гуляева, представленных на рис. 48, *а*. Ясно, что связь между ξ_0 и ξ линейная. Такая же связь получается и из только что полученной формулы, если в ней принять $s = p\xi$.

В таком предположении нет ничего неожиданного. Действительно, по мере роста корки, т. е. с увеличением ξ, расстояние s *должно увеличиваться* — это во-первых. А во-вторых, если процесс теплопроводности в корке принят квазистационарным, то одновременно это означает, что процесс затвердевания принят *автомодельным*, т. е. граница фронта затвердевания перемещается параллельно самой себе. В рассматриваемом случае затвердевания внешнего угла отливки отношение $\frac{\xi_0}{\xi}$ должно быть постоян-

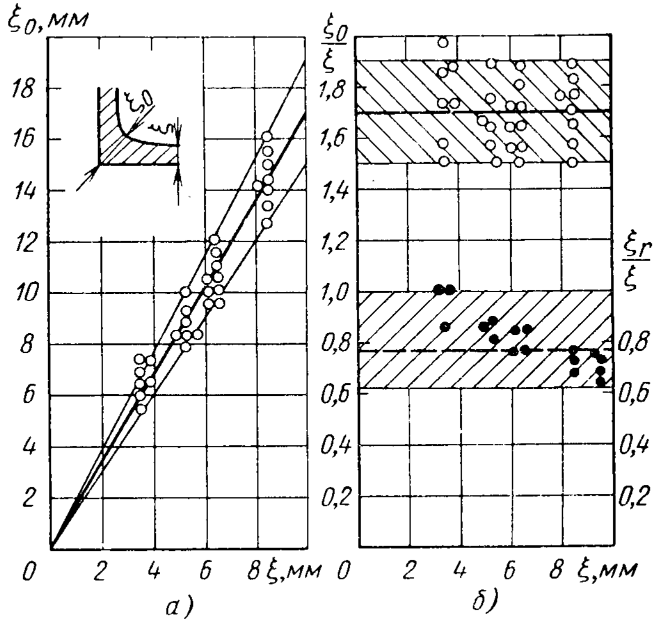


Рис. 48. Результаты опытов Б. Б. Гуляева, полученных при изучении затвердевания расплава у внутреннего угла песчаной формы:

а — абсолютное значение толщины корки по направлению биссектрисы прямого угла; *б* — относительная толщина корки

ной величиной в любой момент времени затвердевания. Следовательно, $s = p\xi$; тогда

$$\xi_0 = \sqrt{2p}\xi, \qquad (108)$$

где p — действительная постоянная величина.

На рис. 48, *б* результаты опытов Б. Б. Гуляева (рис. 48, *а*) перестроены. С ошибкой ±12% процесс затвердевания внешнего угла можно рассматривать как автомодельный. В формуле (108) $p = 1{,}2 \div 1{,}8$; в среднем $p = 1{,}5$.

Н. И. Хворинов в книге [13] приводит формулу для расчета радиуса r окружности, которая описывает профиль корки, затвердевающей у внешнего угла отливки:

$$r = 2{,}2\xi.$$

Эту формулу не трудно привести к виду (108):

$$\xi_0 = 2{,}32\xi,$$

т. е. получается $p = 2{,}7$, что не согласуется с результатами экспериментов Б. Б. Гуляева.

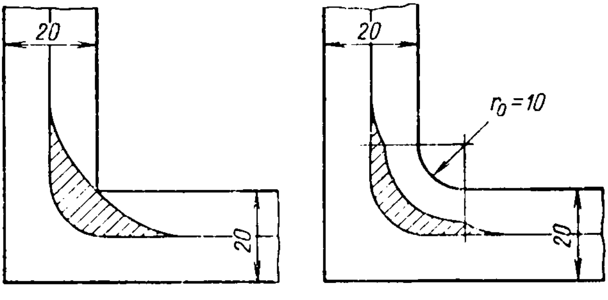
Уравнение (106) профиля корки, с учетом изложенного, принимает вид

$$y = p\frac{\xi^2}{x}; \quad \xi \leqslant x \leqslant p\xi. \tag{109}$$

Заметим, что процесс последовательного затвердевания далеко не всегда удается рассматривать как автомодельный, даже в том грубом приближении, как это мы только что сделали. Например, на рис. 46, *б*, где приведена зависимость ξ_r от ξ для затвердевания внутреннего угла с галтелью, ее как будто бы можно представить линейной (см. пунктир). Однако из рис. 48, *б*, после перестройки этого графика, следует, что отношение $\frac{\xi_r}{\xi}$ колеблется от 0,6 до 1,0, т. е. в пределах 40%. Поэтому мы и не использовали конформное отображение для приближенного расчета затвердевания внутреннего угла отливки.

Определение границ области возможного расположения усадочных дефектов в угловых сопряжениях отливки

В заключение покажем, что по (102), (103) и (109) можно рассчитать профиль корок к моменту окончания затвердевания плоских стенок, пересекающихся под прямым углом. На рис. 49 в качестве примера представлены результаты расчетов для *L*-образного сопряжения. Заштрихованные области являются теми, в которых к этому моменту сохранится незатвердевший расплав и в которых, следовательно, неизбежно образуются дефекты типа усадочных пор или рыхлот. Полученные результаты подтверждают известную из технологии полезность галтелей на внутренних углах: область сопряжения, в которой образуются усадочные дефекты, сокращается. Кроме того, так как со стороны внутрен-



а) *б*)

Рис. 49. Область вероятного расположения усадочных рыхлот в L-образном сопряжении тела отливки:

а — без галтели у внутреннего угла отливки; *б* — с галтелью r_0 = 10 мм него угла с галтелью растет корка, то, помимо указанного, увеличится сопротивление этого узла образованию горячих трещин.

Однако полезность расчетов по указанным формулам состоит и в том, что с их помощью можно рассчитать тот радиус галтели, при котором дефектная область сопряжения будет минимальной. Например, для случая, изображенного на рис. 49, *б*, при $r_0 = 20$ мм эта область наименьшая, хотя по правилу вписанных окружностей именно в таком сопряжении следует ожидать появления усадочных дефектов в большем объеме, чем в случае, изображенном на рис. 49, *а*. Полезность расчетов по (102), (103) и (109) состоит также и в том, что без особого труда можно определить размеры области поражения сопряжения усадочными порами или рыхлотой и, следовательно, размеры внутренних и наружных холодильников, необходимых для устранения этих дефектов.

60. ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ РАСПЛАВА ТВЕРДОГО РАСТВОРА. РАСЧЕТ СКОРОСТИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Представим математическую модель (12) для $l_ф = \infty$ в первоначальных переменных:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\vartheta_4}{\partial t} = a_4\frac{\partial^2\vartheta_4}{\partial x^2}; \quad l_0 < x < \infty; \quad t > t_1;\\
&\vartheta_4(x,\ t_1) = \vartheta_L\varphi_2(x);\\
&\vartheta_4(l_0,\ t) = \vartheta_2(t);\\
&\frac{\partial\vartheta_4(\infty,\ t)}{\partial x} = 0; \quad \vartheta_4(\infty,\ t) = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{110}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(c_2\rho_2\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t} - L_2\rho_3\frac{d\Psi}{dt}\right)l_0 = \lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(l_0,\ t)}{\partial x}; \quad t > t_1;\\
&\vartheta_2(t_1) = \vartheta_L \equiv \mathrm{const}; \quad \Psi(t_1) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Как и в предыдущих случаях, здесь из математической модели (12) выделим краевую задачу (110), которая, как ясно читателю, аналогична задаче (35). В отличие от нее для данной задачи можно найти решение, так как функцию $\varphi_2(x)$ допустимо задать формулой (43) при $t = t_1$ и $\vartheta_0 = \vartheta_L$. Конечно, это неточное выражение для функции $\varphi_2(x)$, ибо замена ϑ_0 на ϑ_L основывается на представлении о приближенной автомодельности процесса прогрева формы при изменении температуры ϑ_0 ее поверхности от $\vartheta_{зал}$ до ϑ_L (см. с. 189—190).

Читатель, по-видимому, уже обратил внимание, что здесь выбран тот же путь, каким мы шли при исследовании кинетики затвердевания расплава эвтектики (см. с. 212—213). Далее будем следовать им же, ибо однажды он привел нас к вполне удовлетворительным результатам анализа процесса затвердевания отливки. Иными словами, и здесь откажемся от точного решения задачи

(110) главным образом потому, что оно дает весьма сложную формулу, неудобную в инженерной практике: решение получается в квадратурах от бесконечного ряда.

Приближенное решение легко получить, если предположить, что процесс прогрева формы можно рассматривать как автомодельный при изменении температуры ϑ_0 ее поверхности от $\vartheta_{\text{зал}}$ до ϑ_S. О величине ошибки, возникающей при таком предположении, можно судить по кривым на рис. 35: она не превышает 5%, если разница $\vartheta_{\text{зал}} - \vartheta_S$ составляет 20% от величины $\vartheta_{\text{зал}}$. Следовательно, при $\vartheta_0 = \vartheta_L$ (43) является приближенным решением задачи (110) для $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ (t_2 — момент достижения расплавом ϑ_S). Тогда математическая модель затвердевания расплава твердого раствора в песчаной форме примет вид

$$-c_2\rho_2 l_0 \frac{d\vartheta_2}{dt} + L_2\rho_3 l_0 \frac{d\Psi}{dt} = \frac{b_4\vartheta_L}{\sqrt{\pi t}}; \quad t > t_1;$$

$$\vartheta_2(t_1) = \vartheta_L \equiv \text{const}; \quad \Psi(t_1) = 0.$$

Умножим обе части уравнения затвердевания на F_0; так как $l_0F_0 = V_0$ и $V_0\Psi(t) = V(t)$, то

$$\left.\begin{aligned}
&-c_2\rho_2V_0 \frac{d\vartheta_2}{dt} + L_2\rho_3V_0 \frac{d\Psi}{dt} = \frac{b_4\vartheta_L F_0}{\sqrt{\pi t}}; \quad t > t_1; \\
&\vartheta_2(t_1) = \vartheta_L \equiv \text{const}; \quad V(t_1) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

где $V(t)$ — объем твердой фазы, кристаллизующейся в расплаве при его охлаждении ниже ϑ_L.

Такое представление математической модели затвердевания расплава твердого раствора удобнее, так как в условиях весьма малой интенсивности охлаждения расплава в песчаной форме затвердевание будет *объемным* (см. с. 159).

Точное решение (112) в общем виде невозможно из-за неопределенности функции $\Psi(t)$. О способах нахождения этой функции шла речь раньше (см. с. 119—121). Наиболее простым способом является тот, который приводит к введенной А. И. Вейником функции $s(T_2)$ для спектральной эффективной теплоты кристаллизации сплава в интервале ϑ_L—ϑ_S:

$$s(T_2) = c_2 - \frac{\rho_3}{\rho_2} L_2\mu(T_2),$$

где $\mu(T_2) = \frac{d\Psi}{dT_2}$ — темп кристаллизации сплава (см. с. 119).

Тогда математическая модель (112) принимает весьма простой вид:

$$\left.\begin{aligned}
&-s(\vartheta_2)\rho_2V_0 \frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{b_4\vartheta_L F_0}{\sqrt{\pi t}}; \quad t > t_1; \\
&\vartheta_2(t_1) = \vartheta_L \equiv \text{const},
\end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

откуда

$$t_2 = \left[\frac{s_{\text{эф}}\rho_2\mathfrak{R}_0}{1,13b_4\,(T_L - T_{\text{ф}})} + \sqrt{t_1}\right]^2, \tag{114}$$

где $s_{\text{эф}} = \int\limits_{\vartheta_S}^{\vartheta_L} s(\vartheta_2)\,d\vartheta_2$ — *эффективная удельная теплота кристаллизации сплава в интервале* ϑ_L—ϑ_S; для ряда промышленных сплавов эта величина определена А. И. Вейником (см. приложение VI).

С помощью (114) легко рассчитать t_2 — *продолжительность* затвердевания отливки сплава типа твердого раствора. Если в реальных условиях литья для отливок произвольной конфигурации удовлетворяется условие (81) при $t = t_2$, то по (114) можно рассчитать t_2 и для таких отливок.

Сравнивая (114) с (92) и затем с (29), становится ясной причина универсальности закона квадратного корня и правила Н. И. Хворинова при использовании их для определения продолжительности затвердевания отливок. Действительно, структуры формул (92) и (114) одинаковы, несмотря на то, что первая получена для последовательного затвердевания отливки эвтектики, а вторая — для объемного затвердевания отливки из сплава, кристаллизующегося в интервале температуры. Более того, совпадение структур формул (92) и (114) является основанием для того, чтобы считать, что и *формула (114) подтверждена экспериментально* (см. с. 214).

Однако полученного результата пока недостаточно для исследования кинетики затвердевания расплава твердого раствора в условиях песчаной формы. Формула (114), хотя она подтверждена экспериментом, определяет только продолжительность затвердевания. Информации о том, каким путем шел процесс объемного затвердевания, она не дает, т. е. не дает представления о величине объема твердой зоны, появляющейся к любому моменту процесса затвердевания. Следовательно, главную характеристику процесса — скорость затвердевания отливки определить нельзя.

Выше уже отмечено, что точный расчет с помощью решения уравнения (112) невозможен из-за неопределенности функции $\Psi(t)$. Что понимается под неопределенностью функции $\Psi(t)$? Во-первых, то, что ее аналитическое выражение неизвестно, так как она пока может быть найдена только из диаграммы состояния и задана как $\Psi(T_2)$ в виде графика типа приведенного на рис. 23, *в* или в виде таблицы. И, во-вторых, реальные литейные сплавы являются многокомпонентными и для большинства из них нет диаграммы состояния.

Приближенный расчет возможен, если функцию $\Psi(t)$ задать приближенной формулой.

Зададим функцию $\Psi\ (T_2)$, так как $T_2\ (t)$. Выберем самый простой вариант:

$$\Psi\,(T_2) = \frac{T_L - T_2}{T_L - T_S}, \tag{115}$$

т. е. кривую, изображенную на рис. 23, *в*, заменим прямой, соединяющей начало координат с точкой $(1,1)$. Подставим $\Psi\ (T_2)$ из (115) в (112). Получим

$$-\rho_2 V_0 \left[c_2 + \frac{L_2 o_3}{\rho_2\,(\vartheta_L - \vartheta_S)}\right] \frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{b_4 F_0 \vartheta_L}{\sqrt{\pi t}}; \quad t > t_1;$$

$$\vartheta_2\,(t_1) = \vartheta_L \equiv \text{const}; \quad V\,(t_1) = 0,$$

откуда

$$t = \left[\frac{\rho_2 \mathfrak{R}_0 s_{\text{эф}} \left(\dfrac{T_L - T_2}{T_L - T_S}\right)}{1{,}13 b_4\,(T_L - T_{\text{ф}})} + \sqrt{t_1}\right]^2 \tag{116}$$

или, с учетом (115),

$$V\,(t) = \frac{1{,}13 b_4 F_0}{s_{\text{эф}}\rho_2}\,(T_L - T_{\text{ф}})\,(\sqrt{t} - \sqrt{t_1}), \tag{117}$$

где

$$s_{\text{эф}} = (T_L - T_S)\left[c_2 + \frac{L_2\rho_3}{\rho_2\,(T_L - T_S)}\right]. \tag{118}$$

Очевидно, что при $T_2 = T_S$ и $t = t_2$ из (116) получается (114). Однако это вовсе не означает, что (116) и, следовательно, (117) полно отражают кинетику объемного затвердевания отливки, так как функция $\Psi\ (T_2)$, заданная в виде (115), является весьма грубым приближением к действительной, изображенной, например, на рис. 23, *в*. Более того, экспериментальная проверка (116) или (117) не представляется возможной, ибо до сих пор нет надежных способов фиксирования начала объемной кристаллизации сплавов из-за эффекта «стояния ликвидуса» (см. с. 114) и, конечно, способов измерения объема твердой фазы при объемном затвердевании отливок.

Единственный путь проверки формулы (117) — это математический эксперимент на обобщенной математической модели, представленной уравнениями (37-II), (54-II) и условиями однозначности (39-II), (41-II), (46-II), (42-II), (47-II) и (48-II), с тем чтобы исключить все допущения, на основе которых была найдена приближенная модель (12), и предположение об автомодельности процесса прогрева формы, на основе которого получено уравнение (112). Само собою разумеется, что исследование кинетики затвердевания расплава твердого раствора на обобщенной модели возможно с помощью численного решения соответствующей краевой задачи на ЭЦВМ.

Представим обобщенную модель при $\Psi_E = 0$; $\Theta_1 (X, 0) = \Theta_{зал}$; $\Theta^* (X, 0) = 0$ и $\frac{l_ф}{l_0} = \infty$ в виде краевой задачи, удобной для численного решения:

$$S \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}; \quad 0 < X < 1; \tag{119}$$

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial \tau} = \mathrm{K}_{a_4} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial X^2}; \quad -\frac{l_ф}{l_0} < X < 0; \tag{120}$$

$$\Theta (X, 0) = \Theta_{зал}; \quad \Theta^* (X, 0) = 0; \tag{121}$$

$$\Theta^* \left(-\frac{l_ф}{l_0}, \tau\right) = 0; \tag{122}$$

$$\Theta (0, \tau) = \Theta^* (0, \tau); \tag{123}$$

$$\mathrm{K}_{\lambda_4} \frac{\partial \Theta^* (0, \tau)}{\partial X} = \frac{\partial \Theta (0, \tau)}{\partial X}; \tag{124}$$

$$\frac{\partial \Theta (1, \tau)}{\partial X} = 0. \tag{125}$$

Здесь введены незначительные допущения: принято, что $a_1 \approx a_2 \approx a_3 \approx a$, поэтому $\mathrm{K}_{a_1} \approx \mathrm{K}_{a_2} \approx 1$ и $\mathrm{K}_{a_4} = \frac{a_4}{a_3}$; соответственно, $\mathrm{K}_{\lambda_1} \approx \mathrm{K}_{\lambda_2} \approx 1$ и $\mathrm{K}_{\lambda_4} = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}$; а также $\mathrm{K}_{c_1} \approx \mathrm{K}_{c_2} \approx \approx 1$ и $\mathrm{K}_{c_4} = \frac{c_4}{c_3}$ и т. д.; и, как следствие, функции Θ_i ($i = 1, 2$ и 3) обозначены через $\Theta \equiv \frac{T - T_ф}{T_L - T_ф}$; функция $\Theta^* \equiv \frac{T_4 - T_ф}{T_L - T_ф}$. Кроме того, принято, что форма имеет ограниченную протяженность $l_ф$, которую определяют так, чтобы в любой момент процесса затвердевания расплава и его охлаждения от $\Theta_{зал}$ до любой заданной $\Theta < \Theta_S$ соблюдалось условие (85). Наконец, введен новый безразмерный параметр

$$S = \frac{s(T)}{c},$$

который можно вычислить по формуле

$$S = \begin{cases} 1 - \mathscr{L}_2 (T_L - T_ф)\, \mu (T), & \text{если } \Theta \in (\Theta_S, 1); \\ 1, & \text{если } \Theta \notin (\Theta_S, 1). \end{cases}$$

Важным при формулировке этой краевой задачи является выбор функции μ (T) темпа кристаллизации сплава или функции Ψ (T), так как $\mu = \frac{d\Psi}{dT}$. Более удачной по сравнению с формулой (115) будет следующая:

$$\Psi (T) = 1 - \left(\frac{T - T_S}{T_L - T_S}\right)^m; \quad m > 1; \tag{126}$$

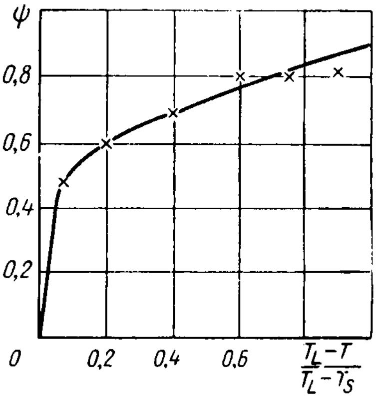


Рис. 50. Связь между относительным количеством твердой фазы и температурой расплава внутри интервала кристаллизации Бр.ОЦ 10-2

например, при $m = 3$ она достаточно хорошо отражает ход кривой на рис. 23, *в*. Тогда

$$S=\begin{cases} 1+m\mathscr{L}_2\dfrac{(\Theta-\Theta_S)^{m-1}}{(1-\Theta_S)^m}, & \text{если } \Theta\in(\Theta_S,\ 1); \\ 1, & \text{если } \Theta\notin(\Theta_S,\ 1). \end{cases} \qquad (127)$$

В специальной литературе читатель встретит различные способы аппроксимации функции Ψ (T): в виде уравнения регрессии или бесконечного степенного ряда, или, наконец, для расчетов на ЭЦВМ, в виде таблицы. Однако в рассматриваемом случае важно сохранить лишь соотношение между величинами темпа кристаллизации у ликвидуса и солидуса. Такое соотношение, когда $\mu_L \gg \mu_S$, достигается простой функцией (126). Она может произвести впечатление на читателя как слишком искусственная. Однако это только на первый взгляд. На самом деле, (126) при $m = 3$ хорошо аппроксимирует экспериментально найденную зависимость количества твердой фазы от температуры в интервале кристаллизации Бр.ОЦ 10-2 (рис. 50).

Задача (119)—(125) решалась на ЭЦВМ «Наири-К» методом прогонки неявной сеточной схемы.

Отрезок $\left[-\frac{l_ф}{l_0},\ 0\right]$ разделим на $n_ф$ частей с шагом $h_ф = \frac{1}{n_ф}$ (форма); отрезок $[0,\ 1]$ — на n_0 частей с шагом $h_t = \frac{l_ф}{l_0}\cdot\frac{1}{n_0}$

Запишем дифференциальные уравнения (119) и (120) в виде их конечно-разностного аналога (с. 67—68)

$$\frac{1}{\Delta\tau}\left(\Theta_{i,\,j+1}-\Theta_{i,\,j}\right)=\frac{1}{h_0^2S_i}\left(\Theta_{i+1,\,j+1}-2\Theta_{i,\,j+1}+\Theta_{i-1,\,j+1}\right);$$

$$\frac{1}{\Delta\tau}\left(\Theta^*_{i,\,j+1}-\Theta^*_{i,\,j}\right)=\frac{\mathrm{K}_{a_4}}{h_ф^2}\left(\Theta^*_{i+1,\,j+1}-2\Theta^*_{i,\,j+1}+\Theta^*_{i-1,\,j+1}\right).$$

Для конечно-разностного представления граничного условия (124) поступим так.

Разложим функцию Θ $(X,\ \tau)$ в интервале $[0,\ +h_0]$ в ряд Тейлора, сохранив в нем только три члена. Тогда при $X = +h_0$

$$\Theta\left(+h_0,\ \tau\right)=\Theta\left(0,\ \tau\right)+h_0\frac{\partial\Theta\left(0,\ \tau\right)}{\partial X}+\frac{h_0^2}{2}\cdot\frac{\partial^2\Theta\left(0,\ \tau\right)}{\partial X^2}+O\left(h_0^2\right),$$

где O (h_0^2) — сумма остальных членов ряда; она определяет порядок аппроксимации функции Θ $(X,\ \tau)$ тремя членами ряда в интервале $[0,\ +h_0]$.

Очевидно, что

$$\frac{\partial\Theta(0,\ \tau)}{\partial X} \approx \frac{1}{h_0}[\Theta(h_0,\ \tau) - \Theta(0,\ \tau)] - \frac{h_0}{2}\cdot\frac{\partial^2\Theta(0,\ \tau)}{\partial X^2};$$

так как из дифференциального уравнения (119) при $X = 0$

$$\frac{\partial^2\Theta(0,\ \tau)}{\partial X^2} = S\,\frac{\partial\Theta(0,\ \tau)}{\partial\tau},$$

то, с учетом конечно-разностного аналога для $\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}$, получим

$$\frac{\partial\Theta(0,\ \tau)}{\partial X} \approx \frac{1}{h_0}[\Theta(h_0,\ \tau + \Delta\tau) - \Theta(0,\ \tau + \Delta\tau)] -$$

$$- \frac{h_0 S(0)}{2\,\Delta T}[\Theta(0,\ \tau + \Delta\tau) - \Theta(0,\ \tau)].$$

Поступая далее аналогично, найдем, что в конечно-разностном виде граничное условие (124) выражается формулой

$$\frac{\mathrm{K}_{\lambda_4}}{h_\text{ф}}[\Theta^*(0,\ \tau + \Delta\tau) - \Theta^*(h_\text{ф},\ \tau + \Delta\tau)] +$$

$$+ \frac{h_\text{ф}\mathrm{K}_{\lambda_4}}{2\,\Delta\tau\mathrm{K}_{a_4}}[\Theta^*(0,\ \tau + \Delta\tau) - \Theta^*(0,\ \tau)] =$$

$$= \frac{1}{h_0}[\Theta(-h_0,\ \tau + \Delta\tau) - \Theta(0,\ \tau + \Delta\tau)] - \frac{h_0 S(0)}{2\,\Delta\tau}[\Theta(0,\ \tau + \Delta\tau) - \Theta(0,\ \tau)],$$

которая заменяет это граничное условие с порядком аппроксимации $O(\Delta\tau + h_0^2 + h_\text{ф}^2)$.

Граничное условие (125) выражается формулой

$$\frac{1}{h_0^2}[\Theta(1,\ \tau + \Delta\tau) - \Theta(1 - h_\text{c},\ \tau + \Delta\tau)] +$$

$$+ \frac{S(1)}{2\,\Delta\tau}[\Theta(1,\ \tau + \Delta\tau) - \Theta(1,\ \tau)] = 0$$

с порядком аппроксимации $O(\Delta\tau + h_0^2)$.

В индексных обозначениях конечно-разностное представление рассматриваемых уравнений и условий задачи (119)—(125) принимает вид

$$\sigma_\text{ф}\mathrm{K}_{a_4}\Theta_{i-1,\ j+1} - (1 + 2\sigma_\text{ф}\mathrm{K}_{a_4})\,\Theta_{i,\ j+1} + \sigma_\text{ф}\mathrm{K}_{a_4}\Theta_{i+1,\ j+1} = \Theta_{i,\ j};$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_\text{ф} - 1;$$

$$\sigma_0\mathrm{K}_{\lambda_4}\frac{h_0}{h_\text{ф}}\,\Theta_{n_\text{ф}-1,\ j+1} - \left(\sigma_0\mathrm{K}_{\lambda_4}\frac{h_0}{h_\text{ф}} + \frac{h_\text{ф}}{h_0}\cdot\frac{\mathrm{K}_{\lambda_4}}{\mathrm{K}_{a_4}} + \sigma_0 + S_{n_\text{ф}}\right)\Theta_{n_\text{ф},\ j+1} +$$

$$+ \sigma_0\Theta_{n_\text{ф}+1,\ j+1} = -\left(\frac{h_\text{ф}}{h_0}\cdot\frac{\mathrm{K}_{\lambda_4}}{\mathrm{K}_{a_4}} + S_{n_\text{ф}}\right)\Theta_{n_\text{ф},\ j};$$

$\sigma_0\Theta_{i-1,\ j+1} - (2\sigma_0 + S_i)\,\Theta_{i,\ j+1} + \sigma_0\Theta_{i+1,\ j+1} = -S_i\Theta_{i,\ j}$, где

$i = n_{\text{ф}} + 1,\ n_{\text{ф}} + 2,\ \ldots,\ n_{\text{ф}} + n_0 - 1;$

$$\sigma_0 \Theta_{n_{\text{ф}}+n_0-1,\ j+1} + \left(\sigma_0 + \frac{1}{2} S_{n_{\text{ф}}+n_0}\right) \Theta_{n_{\text{ф}}+n_0,\ j+1} =$$

$$= -\frac{1}{2} S_{n_{\text{ф}}+n_0} \Theta_{n_{\text{ф}}+n_0,\ j} \quad \text{и} \quad \Theta_{0,\ j+1} = 0.$$

Более компактно:

$$\left.\begin{aligned}
&A_i \Theta_{i-1,\ j+1} - B_i \Theta_{i,\ j+1} + C_i \Theta_{i+1,\ j+1} + D_i = 0;\\
&i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_{\text{ф}} + n_0 - 1;\\
&\Theta_{0,\ j+1} = 0\\
&\text{и}\\
&\Theta_{n_{\text{ф}}+n_0,\ j+1} = E\Theta_{n_{\text{ф}}+n_0-1,\ j+1} + F,
\end{aligned}\right\}$$

где A_i, B_i, C_i, D_i, E и F — числа, которые определяют по следующим формулам:

$A_i = \sigma_{\text{ф}} K_{a_4}; \quad B_i = 1 + 2\sigma_{\text{ф}} K_{a_4}; \quad C_i = \sigma_{\text{ф}} K_{a_4}; \quad D_i = \Theta_{i,\ j},$

если $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n_{\text{ф}} - 1$; при $i = n_{\text{ф}}$

$$A_{n_{\text{ф}}} = \sigma_0 K_{\lambda_4} \frac{h_0}{h_{\text{ф}}};$$

$$B_{n_{\text{ф}}} = \sigma_0 K_{\lambda_4} \frac{h_0}{h_{\text{ф}}} + \frac{h_{\text{ф}}}{h_0} \cdot \frac{K_{\lambda_4}}{K_{a_4}} + \sigma_0 + S_{n_{\text{ф}}};$$

$$C_{n_{\text{ф}}} = \sigma_0, \quad D_{n_{\text{ф}}} = \frac{h_{\text{ф}}}{h_0} \cdot \frac{K_{\lambda_4}}{K_{a_4}} + S_{n_{\text{ф}}}$$

и

$A_i = \sigma_0; \quad B_i = 2\sigma_0 + S_i; \quad C_i = \sigma_0; \quad D_i = S_i,$

если $i = n_{\text{ф}} + 1,\ n_{\text{ф}} + 2,\ \ldots,\ n_{\text{ф}} + n_0 - 1;$

$$E = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \frac{1}{2} S_{n_{\text{ф}}+n_0}}; \quad F = \frac{\frac{1}{2} S_{n_{\text{ф}}+n_0}}{\sigma_0 + \frac{1}{2} S_{n_{\text{ф}}+n_0}}.$$

На рис. 51 и 52 приведены графики, построенные по результатам численного решения этой системы для случая, когда $m = 3$; $\Theta_{\text{зал}} = 1{,}1$; $\Theta_L = 1$; $\Theta_S = 0{,}85$; $L_2 = 0{,}2$; $K_{a_4} = 0{,}08$; $K_{\lambda_4} = 0{,}03$; $l_{\text{ф}} = 6{,}3 l_0$, т. е. при $K_{b_4} = \frac{K_{\lambda_4}}{\sqrt{K_{a_4}}} = 0{,}106$.

По рис. 51, *а* просто определить продолжительность τ_2 затвердевания: $\tau_2 = 19{,}18$. Представляя приближенную формулу (114) с учетом (118) в безразмерном виде:

$$\tau_2 = \left(\frac{\mathscr{L}_2 + 1 - \Theta_S}{1{,}13 K_{b_4}} + \sqrt{\tau_1}\right)^2.$$

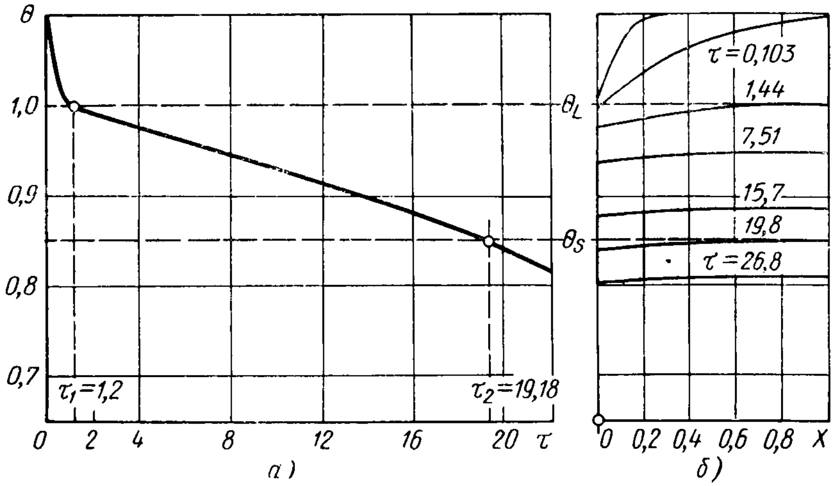


Рис. 51. Кривая охлаждения затвердевающего расплава (*а*) и температурные поля в затвердевающей отливке (*б*), построенные по результатам численного решения задачи (119)—(125)

для указанных числовых значений Θ_S, $\mathscr{L}_2$, K_{b_4} при $\tau_1 = 1{,}20$ получим, что $\tau_2 = 16{,}23$. Совпадение вполне удовлетворительное (ошибка меньше 15%).

Важно отметить, что, судя по рис. 51, *б*, неоднородность температурного поля в отливке во время ее затвердевания при $K_{b_4} = 0{,}106$, т. е. при $K_{b_4} \approx 0{,}1$, обнаруживается на графиках $\Theta(X, \tau)$.

Далее, на рис. 52, *а* приведена кинетическая кривая затвердевания, полученная в результате численного решения задачи. «Жирная» кривая рассчитана по формуле (117), которая в безразмерных переменных с учетом (118) имеет вид

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1{,}13 b_4 (\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_1})}{(\mathscr{L}_2 + 1 - \Theta_S)}. \qquad (128)$$

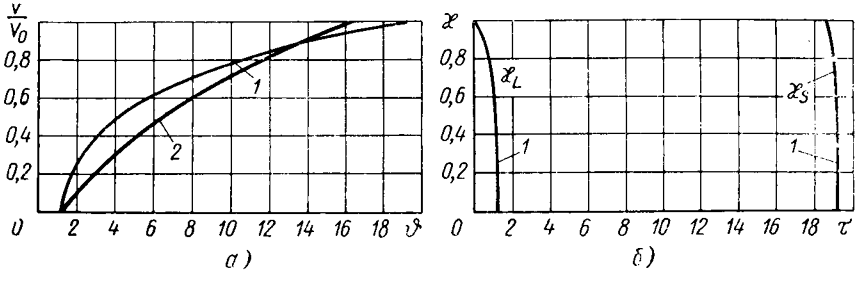


Рис. 52. Кинетика объемного затвердевания (*а*) и продвижения фронтов температуры ликвидуса и солидуса сплава (*б*), рассчитанных:

1 — по результатам численного решения задачи (119)—(125); *2* — по приближенной формуле (128)

Совпадение кривых можно улучшить, если уравнение (112) решить для $\Psi(T)$ из (126) при $m = 3$, как это принято и в численном решении[1].

Однако и достигнутый результат следует считать важным, так как он позволяет использовать (117) для анализа кинетики последовательного затвердевания расплава чистых металлов. Действительно, для чистого металла $T_L = T_S = T_{\text{кр}}$; следовательно,

$s_{\text{эф}} = \frac{\rho_3}{\rho_2} L$ и

$$V(t) = \frac{1{,}13 b_4 F_0}{L \rho_3} (T_{\text{кр}} - T_{\text{ф}}) (\sqrt{t} - \sqrt{t_1}), \qquad (129)$$

что полностью соответствует формуле (89), полученной для эвтектик. Поэтому все уже известное о кинетике процесса затвердевания и способах вычисления скоростей затвердевания отливки без каких-либо изменений следует перенести на чистые металлы.

В рассматриваемом случае затвердевания расплава твердых растворов возможно рассчитать только *объемную скорость затвердевания* отливки. Из (117)

$$U_{\text{э}} = \frac{b_4 (T_L - T_{\text{ф}})}{s_{\text{эф}} \rho_2 \sqrt{\pi t}}; \quad t \geqslant t_1, \qquad (130)$$

где $U_{\text{э}}$ — объемная скорость затвердевания, отнесенная к единице поверхности охлаждения отливки в форме.

В заключение подчеркнем, что $s_{\text{эф}}$ в формуле (114), которую рекомендуем для расчета времени t_2, является экспериментально определяемой величиной. Для ряда литейных сплавов она найдена А. И. Вейником (см. приложение VI).

Формула (118), по которой возможно рассчитать $s_{\text{эф}}$, получена при приближенном анализе кинетики объемного затвердевания расплава твердого раствора в предположении того, что функция $\Psi(T_2)$ выражается (115). Однако нетрудно убедиться, что та же формула получается и в случае, если функция $\Psi(T_2)$ выражена более точно[2], например, зависимостью (126). В этой связи, формулу (118) допустимо использовать для приближенного расчета $s_{\text{эф}}$ в тех случаях, когда в справочниках нет экспериментальных значений $s_{\text{эф}}$.

61. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ОТЛИВКИ НА КИНЕТИКУ И ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ЕЕ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

В расчетах кинетики и продолжительности процесса затвердевания влияние конфигурации отливки учитывали величиной ее приведенного размера. Основанием для этого служило правило

---

[1] Решение уравнения (112) для $\Psi(T)$ из (126) поручаем читателю в качестве упражнения к этому параграфу.

[2] Проверка этого утверждения предлагается читателю в качестве упражнения к данному параграфу.

Н. И. Хворинова (см. с. 178). Однако с момента опубликования (1939 г.) и до сих пор правило Н. И. Хворинова является предметом дискуссий. Одни исследователи его подтверждают непосредственными экспериментами, другие находят многочисленные случаи затвердевания отливок в песчаных формах, когда оно не соблюдается.

При анализе процесса охлаждения перегретого расплава (см. с. 209) внимание читателя уже было обращено на то, что приведенный размер отливки отражает влияние ее конфигурации на продолжительность отвода теплоты перегрева в песчаную форму, если выполняется условие (81). Как нетрудно проверить, это условие выполняется лишь для случаев, когда заливаемый расплав имеет не очень большой перегрев. Действительно, из уравнения (79)

$$\frac{\zeta_э}{r_0} = \frac{n+1}{k+1}\left(\frac{\Theta_{зал}-1}{K_{c_4}K_{\rho_4}\Theta_{зал}}\right),$$

так как $c_1\rho_1 \approx c_3\rho_3$. Анализ данных, приведенных в приложениях VI и VII, показывает, что произведение $K_{c_4}K_{\rho_4}$ для подавляющего числа литейных сплавов при их заливке в песчано-глинистые формы составляет 0,4—0,6. Если принять $K_{c_4}K_{\rho_4} = 0{,}5$ и $\Theta_{зал} = 1{,}1$, то при $n = 2$ и $k = 1$ (цилиндрическая отливка) $\frac{\zeta_э}{r_0} = 0{,}273$ и из (82) $\frac{\zeta}{r_0} = 0{,}26$; для $\Theta_{зал} = 1{,}15$ величина $\frac{\zeta}{r_0}$ составит 0,36.

Таким образом, приведенный размер отливки допустимо использовать только в расчетах заполнения формы перегретым расплавом, так как за время заполнения отводится лишь небольшая часть перегрева, который обычно составляет 15—20% от температуры ликвидуса сплава.

Во всех последующих стадиях процесса затвердевания (охлаждение залитого в песчаную форму расплава и его затвердевание в этой форме) приведенный размер отливки не учитывает, даже приближенно, влияние ее конфигурации. В этом легко убедиться, если рассмотреть, например, затвердевание расплава эвтектики в песчаной форме при литье без перегрева. Очевидно, что уравнение (75) теплового баланса для такого случая примет вид

$$L_E\rho_3\frac{1}{F_0}\cdot\frac{dV}{dt} = -\lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(r_0,\,t)}{\partial r}, \qquad V(0)=0.$$

Используя метод А. И. Вейника, получим (проверить!)

$$\frac{\zeta_э}{r_0} = \frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{\mathcal{L}_E}{K_{c_4}K_{\rho_4}},$$

где величина ζ_E связана (82) с действительной глубиной ζ прогрева формы цилиндрической ($k = 1$) или шаровой отливкой ($k = 2$).

В качестве эвтектического сплава выберем серый чугун, для которого $\mathcal{L}_E = 0{,}20$ и $K_{c_4}K_{\rho_4} = 0{,}5$ (см. приложения VI и VII). При $n = 2$ и $k = 1$ величина $\frac{\zeta_э}{r_0} = 0,72$ и из (82) отношение $\frac{\zeta}{r_0} = 0,67$!

Возникает любопытная ситуация. С одной стороны, только что было показано, что правило Н. И. Хворинова для расчетов процесса затвердевания использовать нельзя, но во всех расчетах, выполненных в этом разделе, использованы приведенный размер отливки или приведенная толщина твердой корки для учета влияния конфигурации отливки на кинетику и продолжительность затвердевания. С другой стороны, как уже известно, есть прямые экспериментальные доказательства того, что при литье в песчаные формы правило Н. И. Хворинова выполняется, и на этом основании оно использовано в расчетах затвердевания. Так, например, по данным Ч. Бриггса (1960 г.), отношение μ времени $t_ш$ затвердевания шаровой отливки ко времени $t_п$ затвердевания плоской отливки с одинаковым приведенным размером равно 1,04 при литье стали в песчаные формы; В. М. Голод (1970 г.) нашел, что при литье чугуна $\mu = 1,06$. И именно для случая литья чугуна условие (81) по оценкам, сделанным выше, не соблюдается. Не верить экспериментам, проведенным не так давно, оснований нет. Остается усомниться в правильности условия (81), так как оно найдено на основе приближенного решения задачи (74) методом А. И. Вейника.

Разобраться в причинах возникновения описанной ситуации важно потому, что реальные фасонные отливки, которые в целом по условию (54-II) признают в тепловом отношении как плоские, содержат различные бобышки и приливы. Они, как правило, являются цилиндрическими или сферическими телами, либо телами, какие, согласно критериям приближенного подобия А. И. Вейника (см. с. 58—59), аналогичны цилиндрам или сферам. Кроме того, при литье фасонных отливок часто возникает необходимость установки прибылей для питания «тепловых узлов» этих отливок, а прибыли, чаще всего, — сферические или цилиндрические тела.

Достоверный расчет времени затвердевания прибыли особенно нужен для проектирования экономичных прибылей. В современной технологии литья, например, сталей, бронз, алюминиевых сплавов масса прибылей составляет 50—100% от массы отливки. Ясно, что экономия расхода жидкого металла за счет сокращения массы прибылей даст весьма ощутимый экономический эффект.

Поступим так. Из всех краевых задач на прогрев песчаной формы, приближенное решение которых послужило основой анализа кинетики затвердевания отливок, точное решение возможно для задачи (86) на прогрев формы плоской или сферической отливкой. Необходимо лишь дифференциальное уравнение теплопроводности записать в общем виде уравнения (30-I), так, как это сделано в задаче (74). Тогда, с помощью подстановки

$$\vartheta_4(r,\ t) = r^{-\frac{k}{2}}\mathfrak{T}(r,\ t) \tag{131}$$

дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial t} = a_4\left[\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial r^2} + \frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)\frac{\mathfrak{T}}{r^2}\right]. \tag{132}$$

Для плоской ($k = 0$) и сферической ($k = 2$) отливок оно приводится к обычному виду уравнения Фурье:

$$\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial t} = a_4\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial r^2}. \tag{133}$$

Его точное решение при условиях однозначности задачи (86) тождественно решению для прогрева формы плоской отливкой ($k = 0$), а умноженное согласно (131) на $r^{-\frac{k}{2}}$ при $k = 2$ становится решением для прогрева формы шаровой отливкой, затвердевающей при постоянной температуре.

Найдем точное решение (133) для того же случая для которого выше получили оценку применимости правила Н. И. Хворинова по условию (81). В этой связи условия однозначности задачи (86) изменяется:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{T}(r,\ 0) = 0;\\ &\mathfrak{T}(r_0\ t) = r_0^{\frac{k}{2}}\vartheta_E;\\ &\frac{\partial\mathfrak{T}(\infty,\ t)}{\partial r} = 0; \quad \mathfrak{T}(\infty,\ t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{134}$$

С учетом подстановки (131) решение задачи (133)—(134) выражается формулой

$$\vartheta_4(r,\ t) = \vartheta_E\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{k}{2}}\operatorname{erfc}\left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{a_4t}}\right), \tag{135}$$

которая при $k = 0$, $r \equiv x$, $r_0 \equiv l_0$ и $\vartheta_0 \equiv \vartheta_E$ тождественна формуле (43), являющейся решением задачи (86) при $t_1 = 0$ и $\varphi_2(x) = 0$. Следовательно, математическая модель затвердевания неперегретого расплава эвтектики, залитого в форму для плоской и шаровой отливок, примет вид

$$L_E\rho_3\frac{1}{F_0}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{b_4\vartheta_E}{\sqrt{\pi t}} + \frac{k\lambda_4\Theta_E}{2r_0}; \quad t > 0; \quad V(0) = 0.$$

При $k = 0$ она тождественна математической модели (88) для плоской отливки, если $t_1 = 0$.

В результате получим

$$\frac{V(t)}{F_0} = \frac{1{,}13b_4\vartheta_E}{L_E\rho_3}\sqrt{t} + \frac{k}{2r_0}\cdot\frac{\lambda_4\vartheta_E}{L_E\rho_3}t,$$

откуда нетрудно определить время затвердевания для шаровой и для плоской отливок. Отношение $t_ш$ к $t_п$ при одинаковом приведенном размере равно (проверить!)

$$\mu = \left[\frac{1}{B}\left(\sqrt{1+2B}-1\right)\right]^2, \quad (136)$$

где $B = \frac{\pi k \mathscr{L}_E}{4(k+1)\,\mathrm{K}_{c_4}\mathrm{K}_{\rho_4}}$; для шаровой отливки $k = 2$.

Очевидно, что μ *всегда* меньше единицы. Лишь с ошибкой в 1% можно принять $\mu = 1$, если $B \leqslant 0{,}05$.

Таблица 4

Величина μ для металлов при литье в песчаные формы

Металл	Расчет по (136)	Эксперимент
Железо . . .	0,80	1,00—1,20
Медь	0,78	0,76—0,80
Алюминий . .	0,70	0,72—0,75
Цинк	0,62	0,62

В табл. 4 приведены результаты расчетов μ для различных металлов. Здесь же указаны значения μ, полученные многочисленными исследователями экспериментально.

Таким образом, условие (81) достаточно хорошо устанавливает предел применимости приведенного размера отливки как характеристики ее конфигурации: в расчетах затвердевания приведенный размер использовать нельзя. Однако при сопоставлении результатов расчетов с экспериментом выявляется (см. табл. 4), что они согласуются для высокотеплопроводных металлов. Для низкотеплопроводных металлов, примером которых служит железо, расхождение очень велико. Объяснить это можно только одним соображением: для железа и, следовательно, углеродистых сталей и чугунов принятая в расчетах модель весьма малой интенсивности охлаждения отливки в песчаной форме не соблюдается. Действительно, согласно данным, приведенным в приложениях VI и VII, для железа, сталей и чугунов критерий $\mathrm{K}_{b_4} = 0{,}10 \div 0{,}125$, что больше, чем необходимо для выполнения условия (1) модели весьма малой интенсивности охлаждения отливки в песчаной форме (см. с. 158).

Другими словами, заключение, приведенное на с. 189, 214 и 228, об экспериментальном подтверждении полученных выше формул в результате сопоставления их с (33), (34), найденными Н. И. Хвориновым как обобщение экспериментов на основе своего правила, является преждевременным. Дело в том, что наибольшее число исследований, в которых установлена справедливость правила Н. И. Хворинова, выполнено при литье сталей и чугунов в песчаные формы. И если бы было принято это обстоятельство во внимание, то простая *проверка адекватности модели* весьма малой интенсивности случаю затвердевания стальных или чугунных отливок в песчаных формах *не позволила* бы сделать такого категорического и *обобщенного утверждения.*

Заметим, что это самая распространенная ошибка при попытках использовать результаты локальных теорий для анализа природных процессов.

В рассматриваемом случае для сталей и чугунов при их затвердевании в песчаной форме $\text{К}_{b_4} \approx 0{,}1$, т. е. условие (1) не выполняется. Ясно, что для них необходимо построить другую локальную теорию на основе другой модели теплового взаимодействия отливки и формы, учитывающей неоднородность температурного поля и в отливке[1].

Наверняка, читатель поставит такой вопрос: не лучше ли сразу сделать все правильно?

Ответ на этот законный вопрос довольно прост. Во-первых, уже было подчеркнуто, что слепо верить совпадению результатов теории и эксперимента без проверки адекватности модели изучаемому процессу нельзя. Такая ошибка встречается довольно часто. Во-вторых, читателю все же повезло, так как при $\text{К}_{b_4} \approx 0{,}1$, несмотря на неадекватность модели, полученные формулы с использованием приведенного размера оказались довольно точными для практических расчетов, ибо в большинстве случаев литья сталей и чугунов $\mu = 1{,}00 \div 1{,}06$. Повезло нам, конечно, случайно. Но, как говорил Л. Пастер: «Счастливая случайность выпадает лишь на долю подготовленных умов». Читатель же на данном уровне изучения теории формирования отливки уже достаточно подготовлен для того, чтобы использовать эту счастливую случайность. Наконец, в третьих, формулы, полученные выше, легко уточнить для исследуемых условий литья, когда $\text{К}_{b_4} < 0{,}1$.

Наиболее простой способ необходимого уточнения следует из анализа того пути приближенного исследования кинетики охлаждения перегретого расплава, залитого в песчаную форму, и кинетики затвердевания расплава в этой форме, который был принят для математических моделей (11)—(13). Все исследование выполнено в предположении, что температурное поле в форме при прогреве ее плоской отливкой описывается формулой (43) при $\vartheta_0 = \vartheta_{\text{зал}}$ для процесса охлаждения потока перегретого расплава, при $\vartheta_0 = \vartheta_{\text{н}}$ для процесса охлаждения расплава, залитого в форму, при $\vartheta_0 = \vartheta_L$ для процесса объемного затвердевания расплава твердых растворов и при $\vartheta_0 = \vartheta_E$ для процесса последовательного затвердевания расплава эвтектик. Следовательно, для сферических отливок и отливок, им аналогичных по правилу приближенного подобия А. И. Вейника, формула (43) с учетом (131) примет вид

$$\vartheta_4(r,\ t) = \vartheta_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{k}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{r - r_0}{2\sqrt{a_4 t}}\right), \qquad (137)$$

---

[1] Например так, как это сделал О. Ю. Коцюбинский для плоской отливки [9, с. 16—19].

при $\vartheta_0 = \vartheta_E$ она совпадает с формулой (135), полученной в результате точного решения задачи на затвердевание расплава эвтектики. Тогда, в правой части дифференциальных уравнений (44), (46), (56), (72), (88), (112) и (113) теплового баланса вместо поверхностной плотности теплового потока от плоской отливки в форму

$$q_0(t) = \frac{b_4 \vartheta_0}{\sqrt{\pi t}}$$

при соответствующих значениях ϑ_0, для шаровой отливки следует подставить

$$q_0(t) = \vartheta_0 \left(\frac{b_4}{\sqrt{\pi t}} + \frac{\lambda_4 k}{2 r_0} \right)$$

при тех же значениях ϑ_0 и решить эти дифференциальные уравнения заново. Но так как интегрирование правой части этих уравнений всюду приводит к

$$\int_{t_i}^{t} q_0(t)\,dt = 1{,}13 b_4 \vartheta_0 \left(\sqrt{t} - \sqrt{t_i}\right) \left[1 + \frac{k\sqrt{\pi a_4}}{4 r_0} \left(\sqrt{t} - \sqrt{t_i}\right)\right] \qquad (138)$$

($i = 0$, 1, 2 и $i =$ зал, при соответствующих значениях ϑ_0), то во всех формулах, полученных в результате решения перечисленных дифференциальных уравнений, т. е. в (45), (47), (57), (89), (90) и (117), выражение $1{,}13 b_4 \left(\sqrt{t} - \sqrt{t_i}\right) \vartheta_0$ следует умножить на выражение, заключенное в квадратные скобки в правой части (138).

Рекомендуем читателю выполнить эти преобразования самостоятельно и заодно с помощью расчетов убедиться в том, что такое уточнение в (57) не требуется, так как во время охлаждения потока перегретого расплава приведенные размеры каналов литниковой системы и отливки достаточно хорошо отражают влияние их конфигураций.

Разумеется, что после преобразования (45), (47), (89), (90) и (117) с их помощью следует рассчитать объемную и линейную скорости затвердевания шаровых отливок. Этот расчет также поручаем читателю.

Остается один вопрос: как быть с цилиндрическими отливками? На этот вопрос наиболее простой ответ дал Э. М. Гольдфарб. Он обратил внимание на то, что в дифференциальном уравнении (132) теплопроводности вычитаемым в квадратных скобках можно пренебречь, если рассматривать прогрев формы на больших расстояниях от поверхности отливки[1]. В этом случае уравнение (132)

---

[1] **Гольдфарб Э. М.** Теплотехника металлургических процессов. М., «Металлургия», 1967, с. 294.

приводится к виду (133), и, следовательно, (137) и (138) при $k = 1$ можно использовать для приближенных расчетов затвердевания и цилиндрических отливок.

62. РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ

Подавляющее большинство широко применяемых литейных сплавов имеет интервал кристаллизации твердого раствора и содержит определенное количество Ψ_E эвтектики. Условимся называть их в дальнейшем *эвтектикосодержащими* сплавами.

Для расчета времени затвердевания отливки эвтектикосодержащих сплавов необходимо воспользоваться математическими моделями (12) и (13) при $\Psi_E \neq 0$. Выше сделан анализ процесса затвердевания на основе этих моделей порознь, т. е. только для твердых растворов и только для эвтектик. По-видимому, их совместный анализ можно выполнить теми же методами, какие уже использованы выше для соответствующих моделей. В результате получим, что время $t_з$ затвердевания отливки будет определяться такой же формулой, как и (114), в которой $s_{эф}$ либо экспериментально найденная величина, либо рассчитанная по формуле, аналогичной (118):

$$s_{эф} = (T_L - T_E)\left[c_2 + \frac{(1 - \Psi_E)\, L_2 \rho_3}{\rho_2 (T_L - T_E)} + \frac{\Psi_E L_E \rho_3}{\rho_2 (T_L - T_E)}\right]. \tag{139}$$

Кроме того, с учетом результатов выполненного анализа влияния конфигурации отливки на продолжительность ее затвердевания формула для расчета времени $t_з$ примет вид

$$t_з = \mu \left\{ \frac{\mathfrak{R}_0 \left[s_{эф}\rho_2 + c_1\rho_1 \left(\frac{T_{зал} - T_L}{T_{зал} - T_ф} \right) (T_L - T_ф) \right]}{1{,}13 b_4 (T_L - T_ф)} \right\}^2 \tag{140}$$

при

$$\mu = \begin{cases} \left[\frac{1}{B} \left(\sqrt{1 + 2B} - 1 \right) \right]^2, & \text{если } \mathrm{K}_{b_4} < 0{,}1; \\ 1, & \text{если } \mathrm{K}_{b_4} \approx 0{,}1, \end{cases}$$

где

$$B = \frac{\pi k}{4(k+1)} \cdot \frac{1}{\mathrm{K}_{c_4} \mathrm{K}_{\rho_4}} \left[\mathrm{K}_{c_1} \mathrm{K}_{\rho_1} \left(1 - \frac{1}{\Theta_{зал}} \right) + \mathrm{K}_{c_2} \mathrm{K}_{\rho_2} (1 - \Theta_E) + \right.$$

$$\left. + (1 - \Psi_E)\, \mathscr{L}_2 + \Psi_E \Theta_E \mathscr{L}_E \right],$$

если $s_{эф}$ вычислена по формуле (139), или

$$B = \frac{\pi k}{4(k+1)} \cdot \frac{1}{\mathrm{K}_{c_4} \mathrm{K}_{\rho_4}} \left[S_{эф} \mathrm{K}_{\rho_2} + \mathrm{K}_{c_1} \mathrm{K}_{\rho_1} \left(1 - \frac{1}{\Theta_{зал}} \right) \right],$$

если $s_{эф}$ определена экспериментально (см. приложение VI).

Введенный здесь новый критерий

$$S_{эф} \equiv \frac{s_{эф}}{c_3 (T_L - T_ф)} \tag{141}$$

по смыслу аналогичен $\mathscr{L}$ и учитывает все источники тепловыделения при кристаллизации эвтектикосодержащих сплавов.

Очевидно, что μ в (140) имеет смысл поправочного коэффициента, учитывающего конфигурацию отливки, который предложен Н. Г. Гиршовичем и Ю. А. Нехендзи (см. с. 179). Но формула для определения коэффициента μ пригодна *только* при $К_{b_4} \leqslant 0{,}1$.

Таким образом, формула (140) является универсальной для расчета времени затвердевания отливок из любых литейных сплавов, кристаллизующихся в песчаной форме (проверить!).

63. УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 1. Доказать существование комплексного потенциала

$$W(z) = \Phi(x, y) + i\Theta(x, y)$$

для стационарного двухмерного температурного поля.

Упражнение 2. Рассчитать затвердевание внутреннего угла отливки методом конформного отображения. Дать анализ результатов в сравнении с точным решением.

Указание. В качестве отображающей функции принять

$$w(z) = mz^{\frac{2}{3}}.$$

Упражнение 3. Рассчитать затвердевание внешнего и внутреннего углов отливки методом А. И. Вейника при $n = 2$.

Упражнение 4. Определить область поражения усадочными дефектами для Т- и Х-образных сопряжений тела отливки.

Упражнение 5. Доказать, что (114) при $s_{эф}$ из (118) справедлива для любой функции $\Psi(T_2)$.

Указание. В качестве примера формулы, выражающей функцию $\Psi(T_2)$ в общем виде, можно принять (126).

Упражнение 6. Найти решение (112) для $\Psi(T_2)$ из (126); построить кривую $\frac{V}{V_0}$ от τ при $m = 3$ и сравнить ее с кривой *2* на рис. 54, *а*.

Упражнение 7. Определить время затвердевания отливки в виде неограниченного цилиндра и сферической отливки из эвтектикосодержащего сплава методом А. И. Вейника. Результаты сравнить с формулой (140).

Указание. Рассмотреть случай литья без перегрева; распределение температуры в форме принять в виде параболы по формуле (76) при $\vartheta_{зал} = \vartheta_L$.

Глава 14. РАСЧЕТ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВОК

Достоверный и простой расчет продолжительности охлаждения отливок имеет очень важное значение для практики проектирования и эксплуатации литейных цехов, литейных конвейеров и автоматических линий. Продолжительность остывания отливок после их затвердевания определяет протяженность охладительной ветви конвейеров механизированных и автоматизированных линий формовки, заливки, выбивки. Знание продолжительности охлаждения отливок в форме позволяет строго планировать оборот опок и загрузку кессонов в цехах крупного литья. Наконец, умение рассчитать время остывания дает возможность выбить отливку из формы при той наибольшей температуре, когда опасность образования в ней остаточных напряжений уже миновала.

64. ОХЛАЖДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ОТЛИВКИ В ФОРМЕ

Рассмотрим фасонные отливки, конфигурация которых удовлетворяет условию (54-II), т. е. отливки плоские в тепловом смысле.

Представим математическую модель (14) процесса охлаждения отливки в форме для $l_ф = \infty$ и $\Psi_E \neq 0$ в первоначальных переменных:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \vartheta_4}{\partial t} = a_4 \frac{\partial^2 \vartheta_4}{\partial x^2}; \quad l_0 < x < \infty; \quad t > t_3;\\
&\vartheta_4(x,\ t_3) = \vartheta_E \varphi_3(x);\\
&\frac{\partial \vartheta_4(\infty,\ t)}{\partial x} = 0; \quad \vartheta_4(\infty,\ t) = 0;\\
&\vartheta_4(l_0,\ t) = \vartheta_3(t);
\end{aligned}\right\} \qquad (142)$$

$$\left.\begin{aligned}
&c_3 \rho_3 l_0 \frac{d\vartheta_3}{dt} = \lambda_4 \frac{\partial \vartheta_4(l_0,\ t)}{\partial x}; \quad t > t_3;\\
&\vartheta_3(t_3) = \vartheta_4(l_0,\ t_3) = \vartheta_E \equiv \text{const}.
\end{aligned}\right\} \qquad (143)$$

Выделенная из математической модели (14) краевая задача (142) на прогрев полуограниченной формы уже известна из предыдущих расчетов — это задача (110). Функция $\varphi_3(x)$ может быть найдена из (43), если, как для задачи (110), предположить, что прогрев формы во время охлаждения перегретого расплава и затвердевания его в интервале $T_L - T_E$ происходил при неизменной температуре на ее поверхности, равной $T_E = \text{const}$. Но такое приближенное представление функции $\varphi_3(x)$ не делает задачу (142) проще (см. с. 212). Ее решение получается только в квадратурах от бесконечного ряда [1], что при практических расчетах продолжительности охлаждения отливки приводит к известным трудностям.

Будем искать приближенное решение задачи (142) методом А. И. Вейника, который дает возможность получить простую и удобную формулу для расчета времени остывания отливки. Однако главное не в преодолении вычислительных трудностей. Дело в том, что в процессе охлаждения температура отливки уменьшается от

---

[1] Решение задачи (142) при этом выражении для $\varphi_3(x)$ найдено О. Ю. Коцюбинским в 1957 г. [9, с. 14—20].

солидуса (эвтектики) сплава до заданной температуры выбивки, т. е. в 2—3 раза. Следовательно, за время охлаждения существенно изменяются величины теплофизических характеристик отливки и формы (см. приложения VI и VII, табл. 3—11). Например, удельная теплоемкость чугуна уменьшается в 1,5 раза, коэффициент тепловой аккумуляции песчаной формы — в 2,5 раза. Метод А. И. Вейника позволяет учесть влияние переменных теплофизических характеристик, так как показатель n степени параболы, с помощью которого приближенно описывается температурное поле в форме, можно определить экспериментально.

Итак, пусть температурное поле в форме описывается параболой

$$\frac{\vartheta_4(x,\ t)}{\vartheta_3(t)} = \left(1 - \frac{x - l_0}{\zeta(t)}\right)^n. \tag{144}$$

Тогда (рис. 53) функция

$$\varphi_3(x) = \left(1 - \frac{x - l_0}{\zeta_3}\right)^n$$

и граничное условие задачи (142) примет вид

$$\frac{\partial\vartheta_4(l_0 + \zeta,\ t)}{\partial x} = 0; \quad \vartheta_4(l_0 + \zeta,\ t) = 0.$$

С учетом (144) уравнение (143) теплового баланса охлаждающейся отливки и прогревающейся формы еще более упрощается:

$$\left.\begin{aligned} &-c_3\rho_3 l_0 \frac{d\vartheta_3}{dt} = \lambda_4 \frac{n}{\zeta}\,\vartheta_3; \quad t > t_3; \\ &\vartheta_3(t_3) = \vartheta_E \equiv \text{const}, \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

где ζ может быть найдена непосредственно из схемы на рис. 53.

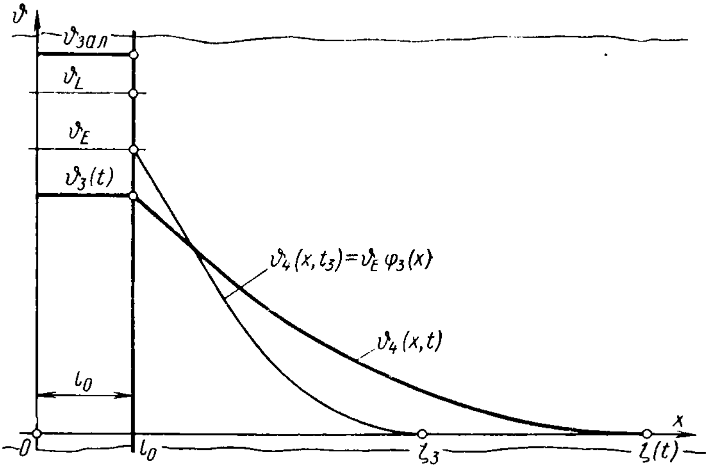


Рис. 53. Схема к задаче (142) на прогрев формы теплотой охлаждающейся отливки при ее решении методом А. И. Вейника

Действительно, так как температурное поле в форме описывается параболой, то количество теплоты, аккумулированное формой к моменту времени t, равно

$$\frac{1}{n+1} c_4 \rho_4 \zeta F_0 \vartheta_3.$$

В свою очередь, оно равно количеству теплоты, потерянному отливкой за то же время, т. е.

$$c_1 \rho_1 l_0 F_0 (\vartheta_{\text{зал}} - \vartheta_L) + c_2 \rho_2 l_0 F_0 (\vartheta_L - \vartheta_E) + (1 - \Psi_E) L_2 \rho_3 l_0 F_0 +$$
$$+ \Psi_E L_E \rho_3 l_0 F_0 + c_3 \rho_3 l_0 F_0 (\vartheta_E - \vartheta_3).$$

Следовательно,

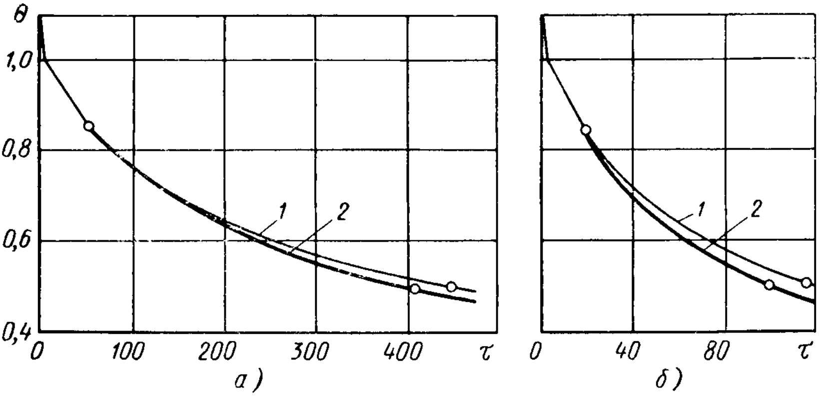
$$\zeta = (n+1) l_0 \frac{1}{K_{c_4} K_{\rho_4}} \left\{ \left(\frac{\Theta_E}{\Theta_3} - 1 \right) + \frac{1}{\Theta_3} [K_{c_1} K_{\rho_1} (\Theta_{\text{зал}} - 1) + \right.$$
$$\left. + K_{c_2} K_{\rho_2} (1 - \Theta_E) + (1 - \Psi_E) \mathcal{L}_2 + \Psi_E \mathcal{L}_E] \right\}.$$

Теперь подставим ζ в уравнение (145). Получим

$$t = 2 \left(\frac{c_3 \rho_3 l_0}{\sqrt{\frac{2n}{n+1}}\, b_4} \right)^2 \left[\left(\frac{\Theta_E}{\Theta_3} - 1 \right) (1 + D) + \ln \left(\frac{\Theta_3}{\Theta_E} \right) \right] + t_3, \qquad (146)$$

где

$$D = \frac{1}{\Theta_E} [K_{c_1} K_{\rho_1} (\Theta_{\text{зал}} - 1) + K_{c_2} K_{\rho_2} (1 - \Theta_E) +$$
$$+ (1 + \Psi_E) \mathcal{L}_2 + \Psi_E \mathcal{L}_E \Theta_E],$$



а) б)

Рис. 54. Кривые охлаждения плоской отливки в форме с $K_{b_4} = 0{,}05$ (*а*) и с $K_{b_4} = 0{,}106$ (*б*), рассчитанные:

1 — по результатам численного решения задачи (119)—(125); *2* — по формуле (146)

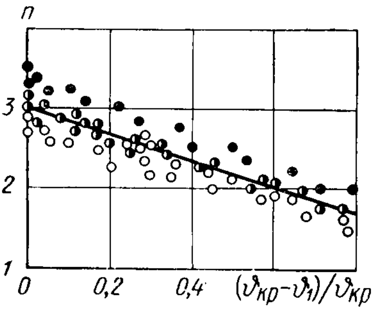


Рис. 55. Зависимость средних значений показателя n от относительной температуры плоской отливки из различных сплавов:

○ — алюминиевые сплавы; ● — сталь; ◐ — чугун (по Г. А. Анисовичу и Н П. Жмакину)

или

$$D = \frac{1}{\Theta_E}[K_{c_1}K_{\rho_1}(\Theta_{зал} - 1) + S_{эф}K_{\rho_2}],$$

если $s_{эф}$ определяется экспериментально.

Формула (146) — искомая приближенная формула для расчета продолжительности охлаждения отливки с момента начала заливки расплава в форму до любой заданной температуры $T_з$ выбивки. По существу время $t_з$ в (146) является *продолжительностью технологического цикла изготовления отливки*. Именно оно определяет, например, протяженность участков заливки и охлаждения на механизированных и автоматических литейных линиях.

Формула (146), несмотря на ее простоту и те упрощения, на основе которых она получена, довольно точно описывает процесс охлаждения отливки в песчаной форме. На рис. 54 сопоставлены результаты расчета по этой формуле и численного решения задачи (119)—(125) при $\Theta_{зал} = 1,1$; $\Theta_L = 1,0$; $\Theta_S = 0,85$; $\mathscr{L}_2 = 0,2$ для $K_{a_4} = 0,04$ и $K_{\lambda_4} = 0,01$; следовательно, $K_{b_4} = 0,05$ (рис. 54, *а*), и для $K_{a_4} = 0,08$, $K_{\lambda_4} = 0,03$ и, следовательно, $K_{b_4} = 0,106$ (рис. 54, *б*); в формулах (126) и (127) $m = 3$. Совпадение вполне удовлетворительное, даже для случаев, когда $K_{b_4} \approx 0,1$.

Показатель степени n выбран по графику на рис. 55. Этот график построен на основе многих экспериментов, выполненных Г. А. Анисовичем и Н. П. Жмакиным при исследовании охлаждения стальных, чугунных отливок и отливок из алюминиевых сплавов в песчаных формах ([1], с. 30—32). В расчетах по (146) принято $n = 2,75$, так как сопоставление с результатами численного решения задачи (119)—(125) сделано для $1,0 \leqslant \Theta_з \leqslant 0,5$ (см. рис. 54).

Таким образом, необходимость решения задачи (142) удалось миновать. В таком простом виде это удается только для плоской отливки, а также для всех фасонных отливок, конфигурация которых удовлетворяет условию (54-II), т. е. для всех плоских отливок в тепловом смысле.

65. ОХЛАЖДЕНИЕ НЕПЛОСКОЙ ОТЛИВКИ В ФОРМЕ

В качестве примера неплоских отливок рассмотрим такие, объем которых определяется равенством (23-I) при $F(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^k F_0$, т. е. бесконечный цилиндр и шар.

Математическая модель (14) примет вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial t}=a_4\left[\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial r^2}+\frac{k}{2}\left(1-\frac{k}{2}\right)\frac{\mathfrak{T}}{r^2}\right];\quad r_0<r<\infty;\quad t>t_3;\\&\mathfrak{T}(r,\ t_3)=\vartheta_E r^{\frac{k}{2}}\varphi_3(r);\\&\frac{\partial\mathfrak{T}(\infty,\ t)}{\partial r}=0;\quad \mathfrak{T}(\infty,\ t)=0;\\&\mathfrak{T}(r_0,\ t)=r_0^{\frac{k}{2}}\vartheta_3(t);\end{aligned}\right\}\qquad(147)$$

$$\left.\begin{aligned}&c_3\rho_3\frac{d\vartheta_3(t)}{dt}=\lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(r_0,\ t)}{\partial r};\quad t>t_3;\\&\vartheta_3(t_3)=\vartheta_4(r_0,\ t_3)=\vartheta_E\equiv\text{const},\end{aligned}\right\}\qquad(148)$$

где

$$\vartheta_4(r,\ t)=r^{-\frac{k}{2}}\mathfrak{T}(r,\ t).\qquad(149)$$

Удачное приближенное решение задачи (147) нашел П. Г. Новиков в 1955 г. Единственное допущение, которое он использовал, состоит в предположении того, что фронт затвердевания отливки продвигается с постоянной скоростью. На основе этого допущения он нашел удобную функцию $\varphi_3(r)$. Однако конечные формулы получились очень громоздкими, и для практических расчетов П. Г. Новиков построил графики кривых, связывающих температуру отливок с относительным временем $\tau=\frac{a_3t}{r_0^2}$ для различного перегрева стали и чугуна и разных классов отливок (рис. 56): I — плоская отливка в тепловом смысле ($k=0$); II — цилиндрические ($k=1$) и III — сферические отливки ($k=2$).

Для плоской отливки можно сопоставить результаты расчетов времени τ по приближенной формуле (146) и графикам П. Г. Новикова. Так как расчет по (146) выполнен при $\mathscr{L}_2=0{,}2$ и $\mathrm{K}_{b_4}=0{,}106$ (см. рис. 54, *а*), что соответствует серому чугуну, то $\Theta_{\text{зал}}=1{,}1$; $\Theta_L=1$; $\Theta_з=0{,}5$ для чугуна отвечают значениям $T_{\text{зал}}=1320$; $T_L=T_S=1200$ и $T_з=600^\circ$ С. По графикам П. Г. Новикова $\tau=95$. Совпадение с расчетом по приближенной формуле вполне удовлетворительное.

Для вычисления абсолютного значения времени t остывания отливки по найденной с помощью графиков П. Г. Новикова величине числа Фурье τ требуется знать величину характерного размера r_0 отливки. Если это отливки, которые в тепловом смысле относятся к I классу, то

$$r_0=\frac{V_0}{F_0}.$$

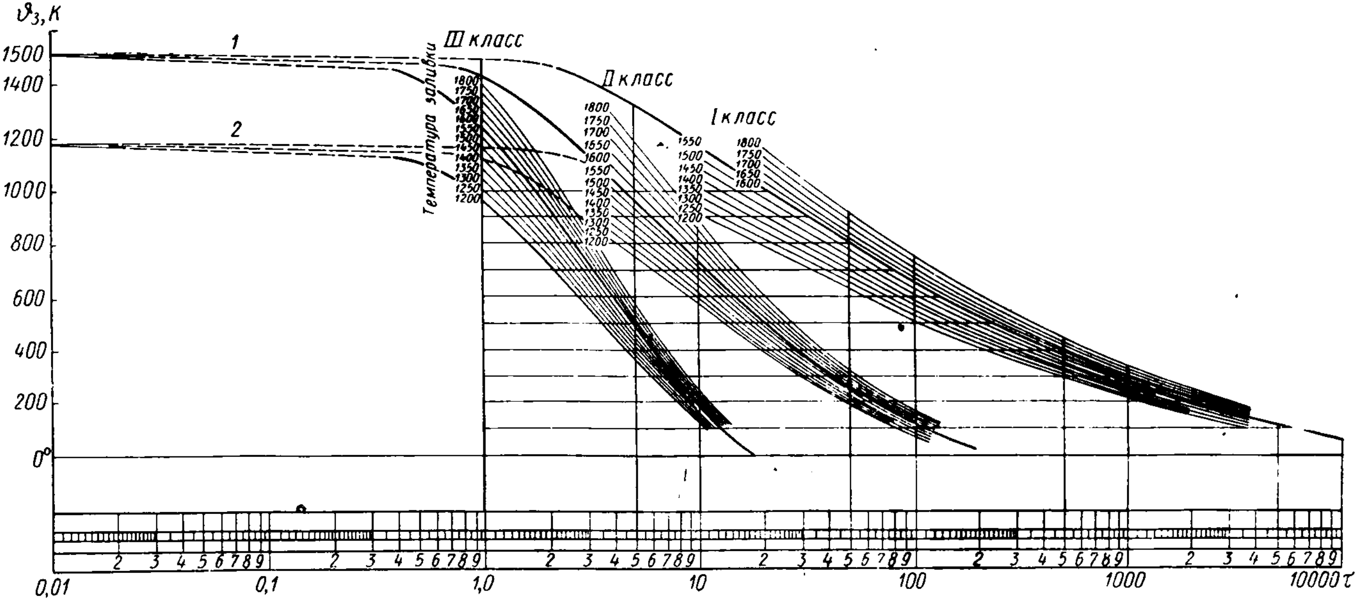


Рис. 56. Кривые охлаждения отливок, рассчитанные П. Г. Новиковым:
1 — из углеродистых сталей; 2 — из чугунов

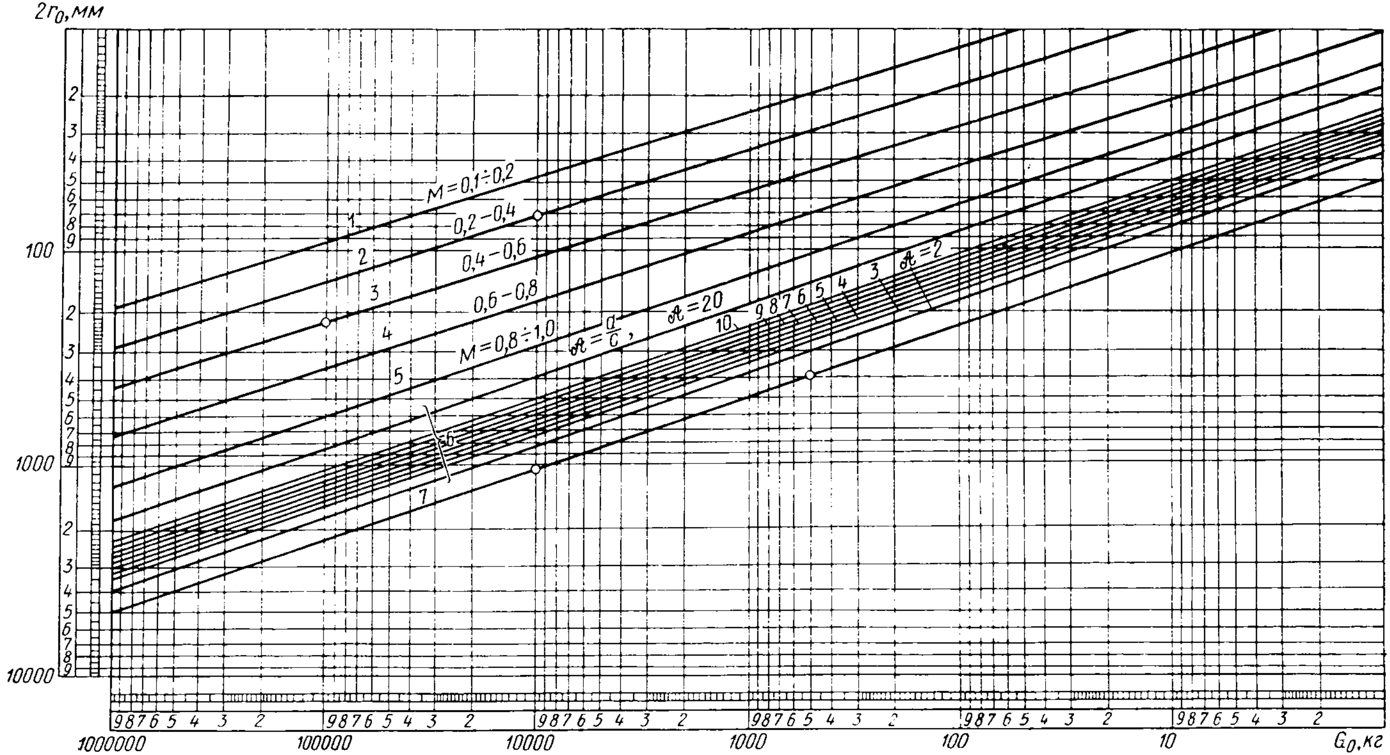
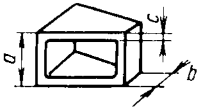
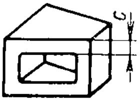
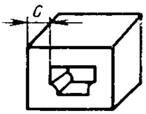
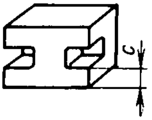
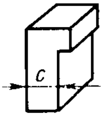
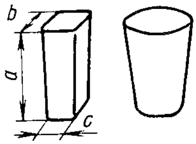


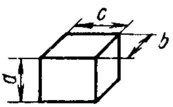
Рис. 57. Связь между характерным размером отливок и их массой для очень тонкостенных (*1*), тонкостенных (*2*), утолщенных (*3*), толстостенных (*4*), очень толстостенных (*5*), цилиндрических (*6*) и сферических (*7*) по П. Г. Новикову

Таблица 5

Классификация отливок по группам их массивности

Класс	Группа отливок		Примеры отливок
I $a \approx b > c$	Очень тонкостенные $M = 0{,}1 \div 0{,}2$		Детали сельскохозяйственных машин, тракторов; рамы, тележки вагонов; крышки, патрубки, корпуса гидротурбин, газовых турбин; мульды
	Тонкостенные $M = 0{,}2 \div 0{,}4$		Корпуса редукторов; блоки цилиндров; корпуса подшипников; рабочие колеса гидротурбин; маховики; шестерни с немассивными спицами; матрицы штампов
	Утолщенные стенки $M = 0{,}4 \div 0{,}6$		Корпуса цилиндров, крупных турбин; траверсы прессов; цилиндры прессов, формовочных машин; ковши экскаваторов
	Толстостенные $M = 0{,}8 \div 1{,}0$		Литые детали прокатных машин; станины кузнечных машин; обоймы подшипников; арматура
	Очень толстостенные $M \approx 1{,}0$		Лопасти гидротурбин; основания; плиты подшаботные; сплошные колеса, маховики, шестерни; рамы сплошные
II $a > b \approx c$	Отливки в виде цилиндров, призм или их комбинаций $M = 1{,}0$; $\mathscr{A} = \frac{a}{c}$		Валики прокатные; валы; слитки; колеса с массивными спицами; прибыли; литниковые системы тяжелых отливок

Продолжение табл. 5

Класс	Группа отливок		Примеры отливок
III $a \approx b \approx c$	Отливки типа шаров, кубов или их комбинаций $M = 1$		Подушки прокатных станов; бабы копров; шаботы; стулья молотов; штампы; бабы молотов; прибыли

Однако к I классу относятся не только тепловые аналоги бесконечных плит, но и конечные плиты. Поэтому П. Г. Новиков ввел понятие массивности отливок I класса:

$$M = \frac{V_0}{V_г}, \tag{150}$$

где $V_г$ — объем, рассчитанный по габаритному параллелепипеду, в который вписывается данная отливка.

В зависимости от массивности отливки I класса разделены на пять групп (табл. 5), для которых П. Г. Новиков нашел эмпирическую связь между их массой G_0 и характерным размером r_0 (рис. 57). Эти графики, построенные в логарифмических координатах, являются результатом анализа громадной номенклатуры отливок для машиностроения, станкостроения, транспорта, сельского хозяйства и энергетики. Как в табл. 5, так и на рис. 57 приведены отливки II и III классов с $M = 1$, при этом отливки II класса на рис. 57 разделены на 10 групп в зависимости от величины отношения

$$\mathscr{A} = \frac{a}{c}, \tag{151}$$

где a — наибольший размер; c — наименьший размер отливки при условии, что $c \approx b$ (табл. 5).

Как ясно читателю, табл. 5 построена с учетом правила приближенного подобия А. И. Вейника (см. с. 57).

Работать с графиками П. Г. Новикова очень просто. Например, для чугунной отливки цилиндра формовочной машины при $M = 0{,}42$ и $G_0 = 100$ кг величина $2r_0 = 30$ мм (рис. 57). Если температура выбивки 600° С, то по рис. 56 при $T_{зал} = 1350°$ величина $\tau = 650$. Для чугуна $a_з = 0{,}05$ м^2/ч, поэтому $t = 3{,}0$ ч.

66. ОХЛАЖДЕНИЕ ОТЛИВКИ В НЕМАССИВНОЙ ФОРМЕ

В подавляющем большинстве песчаные формы изготовляют в опоках. При формовке на машинах или автоматах их изготовляют только в опоках, стремясь максимально использовать их объем.

Это означает, что толщина формы может и не удовлетворять (85) для любого момента времени технологического цикла изготовления отливки, т. е. песчаную форму в опоках следует рассматривать и как *немассивную* (*охлаждаемую*).

Оценим глубину ζ прогрева формы плоской отливкой толщиной l_0 за время t_3, т. е. за время охлаждения перегретого расплава литейного сплава и его затвердевания. Для этого воспользуемся формулами на с. 236 при $k = 0$, просуммируем их и внесем очевидное изменение:

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{n+1}{K_{c_4}K_{\rho_4}}\left(1 - \frac{1}{\Theta_{\text{зал}}} + S_{\text{эф}}\right). \tag{152}$$

Согласно табличным данным в приложениях VI и VII, у большинства литейных сплавов $K_{c_1}K_{\rho_1} \approx K_{c_2}K_{\rho_2} \approx 1$; $K_{c_4}K_{\rho_4} = 0{,}4 \div 0{,}6$ и $S_{\text{эф}} = 0{,}2 \div 0{,}8$. При $\Theta_{\text{зал}} = 1{,}2$ и $n = 2$ глубина ζ составит две—четыре толщины тела отливки.

Как правило, при машинном изготовлении песчаной формы для большинства машиностроительных отливок расстояние от стенки модели до стенки опоки редко бывает меньше четырех-пяти толщин стенки отливки. Поэтому чаще всего процессы охлаждения перегретого расплава и затвердевания отливки происходят в условиях, когда форма может быть рассмотрена как массивная, неохлаждаемая, т. е. условие (85) удовлетворяется при $t \leqslant t_3$. Но процесс охлаждения затвердевшей отливки происходит уже в немассивной форме, которая со стороны опоки отдает теплоту окружающему ее воздуху.

Расчет охлаждения отливки в форме

Пусть в момент времени $t = t^* > t_3$ глубина прогрева формы плоской отливки равна толщине формы (рис. 58, *а*). Температуру отливки в этот момент (ϑ_3^* на рис. 58, *а*) определяем по формуле

$$\vartheta_3^* = \frac{\vartheta_L}{1 + \frac{\text{K}_{c_4}\text{K}_{\rho_4}}{n+1}\cdot\frac{l_{\text{ф}}}{l_0}}\left[\Theta_E + \text{K}_{\rho_2}S_{\text{эф}} + \text{K}_{c_1}\text{K}_{\rho_1}(\Theta_{\text{зал}} - 1)\right] \tag{153}$$

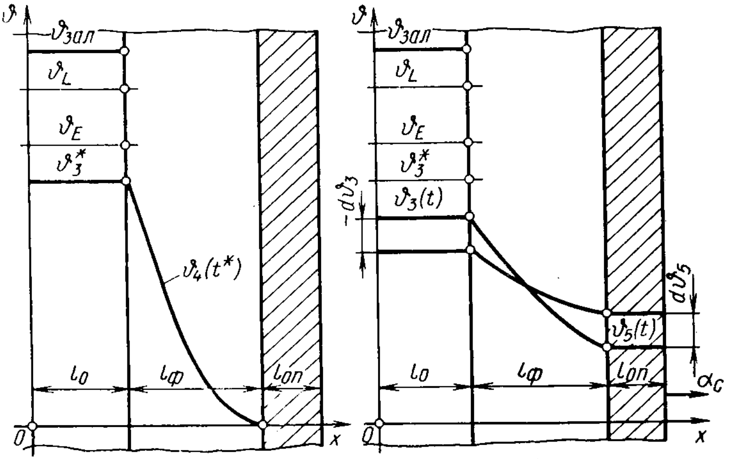
[см. с. 246, если $s_{\text{эф}}$ из формулы (139) и $\zeta = l_{\text{ф}}$].

Время t^* вычислим по формуле (146) при $\vartheta_3 = \vartheta_3^*$:

$$t^* = 2\left(\frac{c_3\rho_3 l_0}{\sqrt{\frac{2n}{n+1}}\,b_4}\right)^2\left\{\left(\frac{\Theta_E}{\Theta_3^*} - 1\right)\left[\text{K}_{c_1}\text{K}_{\rho_1}(\Theta_{\text{зал}} - 1) + \text{K}_{\rho_2}S_{\text{эф}}\right] + \right.$$

$$\left. + \ln\frac{\Theta_3^*}{\Theta_E}\right\} + t_3. \tag{154}$$

Дальнейшее охлаждение отливки будет происходить при отдаче теплоты от опоки в окружающую ее среду. Примем, что в связи с высокой теплопроводностью материала опоки (как



а) б)

Рис. 58. Схемы к расчету охлаждения отливки в песчаной немассивной охлаждаемой форме:

а — этап охлаждения в массивной форме; *б* — этап охлаждения с учетом отдачи теплоты в окружающую среду

правило, это чугун или сталь) неоднородность температурного поля в стенке опоки несущественна. Так как в этом случае $\frac{l_ф}{l_0} \neq \infty$, то математическая модель (14) в первоначальных переменных примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\vartheta_4}{\partial t} = a_4\frac{\partial^2\vartheta_4}{\partial x^2}; \quad l_0 < x < l_0 + l_ф; \quad t > t^*;\\ &\vartheta_4(x,\ t^*) = \vartheta_3^*\varphi^*(x);\\ &-\lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(l_0 + l_ф,\ t)}{\partial x} = \alpha_с\vartheta_4(l_0 + l_ф,\ t);\\ &\vartheta_4(l_0,\ t) = \vartheta_3(t); \end{aligned}\right\} \qquad (155)$$

$$\left.\begin{aligned} &c_3\rho_3 l_0\frac{d\vartheta_3}{dt} = \lambda_4\frac{\partial\vartheta_4(l_0,\ t)}{\partial x}; \quad t > t^*;\\ &\vartheta_3(t^*) = \vartheta_4(l_0,\ t^*) = \vartheta_3^*. \end{aligned}\right\} \qquad (156)$$

Будем искать решение методом А. И. Вейника, аналогично тому, как мы уже сделали это для задачи (142)—(143).

Согласно схеме на рис. 58, *б* за время dt при $t > t^*$ отливка будет терять теплоту

$$-c_3\rho_3 l_0 F_0\, d\vartheta_3,$$

равную теплоте, аккумулируемой песчаной формой,

$$c_4\rho_4 l_ф F_0\left[\frac{1}{n+1}(d\vartheta_3 - d\vartheta_5) + d\vartheta_5\right] + c_5\rho_5 l_{оп} F_0\, d\vartheta_5,$$

если $\vartheta_4(x, t)$ для $x \in [l_0, l_ф]$ описывать параболой порядка n, и отдаваемой с поверхности опоки в воздух

$$\alpha_c \vartheta_5 F_0 \, dt,$$

если теплоотдача происходит по закону Ньютона.

Из схемы на рис. 58, *б* следует также, что

$$-c_3 \rho_3 l_0 \, d\vartheta_3 = \lambda_4 \frac{n}{l_ф} (\vartheta_3 - \vartheta_5) \, dt.$$

В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\left(c_3\rho_3 l_0 + \frac{c_4\rho_4 l_ф}{n+1}\right)\frac{d\vartheta_3}{dt} + \\ &+ \left(\frac{n}{n+1} c_4\rho_4 l_ф + c_5\rho_5 l_{оп}\right)\frac{d\vartheta_5}{dt} + \alpha_c\vartheta_5 = 0; \\ &c_3\rho_3 l_0 \frac{d\vartheta_5}{dt} + \frac{\lambda_4 n}{l_ф}(\vartheta_3 - \vartheta_5) = 0; \quad t > t^* \end{aligned}\right\} \qquad (157)$$

со следующими начальными условиями:

$$\vartheta_3(t^*) = \vartheta_3^*; \quad \vartheta_5(t^*) = \vartheta_5^*.$$

Для случая, изображенного на рис. 58, *б*, $\vartheta_5^* = 0$. Решением этой системы являются выражения

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_3 &= \frac{M_1 N_1 + P_1}{M(N_1 - N_2)} \exp[N_1(t - t^*)] + \\ &+ \frac{M_1 N_1 + P_1}{M(N_2 - N_1)} \exp[N_2(t - t^*)]; \\ \vartheta_4 &= \frac{M_2 N_1 + P_2}{M(N_1 - N_2)} \exp[N_1(t - t^*)] + \\ &+ \frac{M_2 N_2 + P_2}{M(N_2 - N_1)} \exp[N_2(t - t^*)], \end{aligned}\right\} \qquad (158)$$

в которых

$$P_1 = \frac{nb_4^2}{\frac{l_ф}{l_0} K_{c_4} K_{\rho_4}} \left(\frac{1}{n} \mathrm{Bi}_c + 1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{l_ф}{l_0} K_{c_4} K_{\rho_4}\right) \vartheta_3^* + \frac{M_2 \alpha_c}{\mathrm{Bi}_c (c_3 \rho_3 l_0)^2};$$

$$P_2 = \frac{nb_4^2}{\frac{l_ф}{l_0} K_{c_2} K_{\rho_4}} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{l_ф}{l_0} K_{c_4} K_{\rho_4}\right) \vartheta_3^* + \frac{M_2}{(c_3 \rho_3 l_0)^2}\right];$$

$$M_1 = M\vartheta_3^* \quad \text{и} \quad M_2 = M\vartheta_5^*;$$

$$M = (c_3 \rho_3 l_0)^2 \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{l_ф}{l_0} K_{c_4} K_{\rho_4} + \frac{l_{оп}}{l_0} K_{c_5} K_{\rho_5}\right);$$

параметры N_1 и N_2 вычисляют как корни квадратного характеристического уравнения

$$MN^2 + PN + C = 0,$$

где $C = \frac{n\alpha_c^2}{\mathrm{Bi}_c}$ и $P = \frac{nb_4^2}{\frac{l_ф}{l_0} \mathrm{K}_{c_4} \mathrm{K}_{\rho_4}} \left(\frac{1}{n} \mathrm{Bi}_c + 1 + \frac{l_ф}{l_0} \mathrm{K}_{c_4} \mathrm{K}_{\rho_4} + \right.$

$\left. + \frac{l_{оп}}{l_0} \mathrm{K}_{c_5} \mathrm{K}_{\rho_5} \right).$

Анализ решений (158) показывает, что с уменьшением толщины $l_ф$ формы скорость охлаждения отливки заметно увеличивается, так как возрастает температура ϑ_5 опоки и, следовательно, теплоотдача от ее наружной поверхности в окружающую среду. Исходя из этого вывода, нетрудно прийти к идее создания *металлокерамической формы* (см. с. 132).

Скорость охлаждения отливки можно увеличить и за счет повышения коэффициента α_c теплоотдачи от опоки в окружающую среду. Исходя из этого вывода, который, как ясно читателю, является также результатом анализа выражений (158), следует способ принудительного охлаждения отливки обдувкой формы воздухом в охладительной галерее литейного конвейера.

Способы принудительного охлаждения отливок в форме

Начнем с широко известного способа — с обдувки формы воздухом в охладительной галерее литейного конвейера. Из формул (158) следует, что этот способ тем эффективнее, чем меньше отношение $\frac{l_ф}{l_0}$ и больше коэффициент теплоотдачи α_c. Исследования Г. А. Анисовича и Н. П. Жмакина показали, что при отношении $\frac{l_ф}{l_0} \leqslant 1$ и $\alpha_c = 60$ Вт/(м$^2 \cdot$К) возможно в 2 раза уменьшить продолжительность охлаждения отливки. Заметим, что реально песчаная форма, полученная уплотнением смеси в опоках, имеет $\frac{l_ф}{l_0} > 2{,}0$. Коэффициент $\alpha_c = 60$ Вт/(м$^2 \cdot$К) достигается при обдувке формы воздухом со скоростью потока 10—11 м/с, а эта скорость в 2 раза больше той, о которой в прогнозах погоды говорят: «ветер умеренный». Таким образом, обдувка формы в охладительной галерее литейного конвейера может быть эффективной лишь в исключительных случаях. Как правило, она эффективна при литье в металлокерамические формы, для которых $\frac{l_ф}{l_0} < 1$ (обычно 0,2—0,5).

Второй способ — установка в форму охладителей в виде труб или специальных воздуховодов (рис. 59). Этот способ реален для крупных отливок, формуемых в кессонах, где возможен ста-

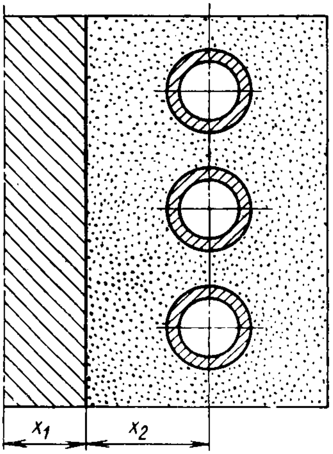


Рис. 59. Расположение охлаждающих труб в форме у поверхности отливки

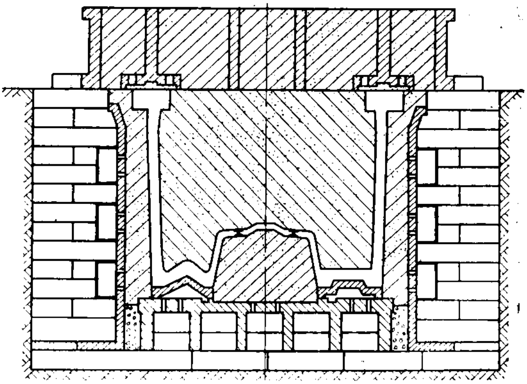


Рис. 60. Формовка станины продольно-строгального станка в охлаждаемом кессоне

ционарный монтаж воздуховодов и их подключение к пневмосистеме цеха.

Третий способ — продувка формы воздухом. Он, как и второй, применим для крупных форм. Используют и сочетание второго и третьего способов (рис. 60), так как удается значительно сократить продолжительность охлаждения отливки до заданной температуры выбивки из формы. Так, по данным А. И. Вейника, Р. К. Гринкевича, Г. А. Анисовича и др. чугунная станина массой 7000 кг в обычных условиях охлаждается до 570 К в течение 45 ч; использование охлаждаемого кессона с продувкой формы воздухом уменьшает продолжительность охлаждения до 12 ч.

Таким образом, для массового или крупносерийного производства единственным способом сокращения технологического цикла изготовления отливок является применение тонкостенных форм: песчаных (типа оболочковых) или металлических, футерованных изнутри (так называемых металлокерамических). Сейчас они начинают свой путь широкого внедрения, но вряд ли вытеснят массивные песчаные формы, особенно в безопочном исполнении. Скорее всего они найдут область эффективного использования, как это было и с другими перспективными способами формообразования.

67. ОХЛАЖДЕНИЕ ОТЛИВОК ПОСЛЕ ИХ ВЫБИВКИ ИЗ ФОРМЫ

Представим математическую модель (15) в первоначальных переменных:

$$-c_{\text{з}}\rho_{\text{з}}\mathfrak{R}_0\frac{d\vartheta_{\text{з}}}{dt}=\alpha_{\text{c}}\vartheta_{\text{з}};\quad t>t_{\text{выб}};\qquad \vartheta_{\text{з}}(t_{\text{выб}})=\vartheta_{\text{выб}}.$$

Решение этого дифференциального уравнения очевидно:

$$t = \frac{1}{\alpha_\text{с}} c_\text{з} \rho_\text{з} \Re_0 \ln \frac{\vartheta_\text{выб}}{\vartheta_\text{з}} + t_\text{выб}. \tag{159}$$

С помощью полученной формулы можно определить продолжительность t охлаждения отливки до заданной температуры $\vartheta_\text{з} < \vartheta_\text{выб}$, если известно числовое значение коэффициента теплоотдачи $\alpha_\text{с}$. Для случаев конвективного охлаждения $\alpha_\text{с}$ рассчитывают по формулам, приведенным в приложении IV. При охлаждении по закону полной теплоотдачи необходимо учитывать и тепловое излучение (см. с. 33—35).

68. УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 1. Найти приближенное решение задачи (147)—(149) методом А. И. Вейника. Результат решения сравнить с графиками П. Г. Новикова на рис. 56.

Указание: 1) принять

$$\mathfrak{T}(r, t) = \mathfrak{T}(r_0, t)\left(1 - \frac{r - r_0}{\zeta(t)}\right)^n$$

при n из графика на рис. 55;

2) для решения воспользоваться предложением Э. М. Гольдфарба пренебречь вторым слагаемым в правой части уравнения теплопроводности Фурье.

Упражнение 2. Перестроить графики П. Г. Новикова на рис. 56 в безразмерных координатах Θ, τ, приняв

$$\Theta \equiv \frac{T(t) - T_\text{ф}}{T_\text{кр} - T_\text{ф}},$$

если $T_\text{ф} = 20°$ С.

Упражнение 3. На основании графиков П. Г. Новикова на рис. 57 найти такое значение $\Theta(t)$, ниже которого правило Н. И. Хворинова не реализуется для стальных и чугунных отливок, охлаждающихся в песчаной форме.

Глава 15. ПРИМЕР РАСЧЕТА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВКИ

В этой главе рассмотрим приложения тепловой теории формирования отливки к анализу технологии литья в песчаные формы. Основное внимание будет уделено расчету технологических режимов литья ($T_\text{зал}$, $t_\text{зал}$, $f_\text{п}$, $t_\text{ц}$, b_4, $l_\text{ф}$, $T_\text{выб}$), а также оценке свойств отливки (ее структуры, механических свойств, пораженности усадочными дефектами) и состава сплава.

69. ТЕХНОЛОГИЯ ФОРМЫ

На рис. 61 приведена схема продольного разреза формы для отливки стола фрезерного станка из чугуна СЧ 18-36. Масса стола 420 кг, габаритные размеры 250×500×1000 мм, средняя толщина тела 30 мм. Стол представляет собой коробчатую конструкцию,

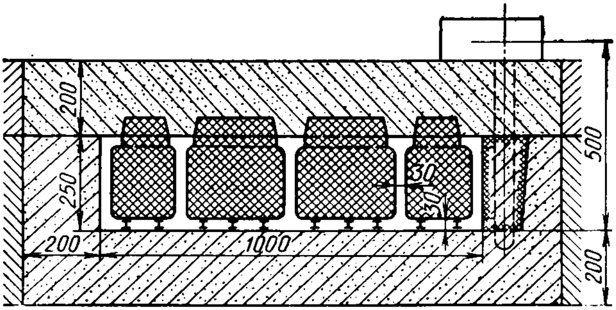


Рис. 61. Схема продольного разреза формы для отливки стола фрезерного станка

заребренную изнутри: одно продольное и три поперечных ребра высотой соответственно 220 и 190 мм; толщина ребер 30 мм.

Расположение отливки в форме, разъем формы, конструкция и крепление стержней, место подвода расплава и схема конструкции литниковой системы показаны на рис. 61. Читатель, как опытный уже технолог, вряд ли предложет другой, более удачный вариант.

Способ изготовления формы — любой и, естественно, зависит от масштаба производства и технического уровня конкретного цеха. В этой связи на рис. 61 не показана конструкция опок, а литниковая система приведена в виде схемы, из которой ясно, что расплав в полость формы подводится сифоном с короткой стороны отливки.

70. РАСЧЕТ ЗАПОЛНЕНИЯ ФОРМЫ РАСПЛАВОМ

Для расчета времени заполнения воспользуемся эмпирической формулой (62), соответствие которой теоретическому анализу процесса заполнения полости формы доказано в § 55. Итак,

$$t_{\text{зал}} = 3{,}6G_0^{0,4} = 3{,}6\cdot 420^{0,4} \approx 40 \text{ с}.$$

Площадь питателя определим по формуле (59). Так как для нее требуется знание скорости истечения расплава из питателя, то согласно формуле (49)

$$w_{\text{п}} = \mu\sqrt{2gH} = 0{,}48\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5} \approx 1{,}5 \text{ м/с},$$

ибо $H = 0{,}5$ м (см. рис. 61) и $\mu = 0{,}48$ для литниковой системы с двумя поворотами потока расплава (см. с. 192). Итак,

$$f_{\text{п}} = \frac{G_0}{\rho_1 w_{\text{п}} t_{\text{зал}}} = \frac{4{,}2\cdot 10^5}{6{,}95\cdot 150\cdot 40} \approx 10 \text{ см}^2.$$

Теперь, оценим потери перегрева носиком потока расплава во время заполнения полости формы. Воспользуемся (65) и условимся, что в литниковой системе тепловых потерь нет (или они пренебрежимо малы — так сконструирована литниковая система!). Тогда

$$\Delta\vartheta = \frac{1,13b_4}{c_1\rho_1\Re_0}(T_{\text{зал}} - T_{\text{ф}})\sqrt{t},$$

где t — время течения расплава в полости формы.

Очевидно, что при сифонной заливке расплав будет течь сначала в нижней полости формы сечением 30×500 мм; при этом скорость потока

$$w_1 = \frac{150 \cdot 10}{3 \cdot 50} = 10 \text{ см/с},$$

а время течения на пути 1000 мм равно 100 : 10 = 10 с. Следовательно, к концу заполнения нижней части полости формы на носике потока будет потерян перегрев

$$\Delta\vartheta = \frac{1,13 \cdot 1377 \cdot 1350}{838 \cdot 6950 \cdot 0,015}\sqrt{10} = 70 \text{ К},$$

так как для чугуна c_1 = 838 Дж/(кг·К), b_4 = 1377 Вт·с$^{1/2}$/(м^2·К), ρ_1 = 6950 кг/м^3 (см. приложение VI), а для рассматриваемой отливки $\Re_0$ = 0,015 м; температура заливки выбрана равной 1643 К и температура формы 293 К.

Дальнейшее заполнение формы происходит за счет подъема расплава снизу вверх по ребрам и вертикальным стенкам со скоростью

$$w_1 = \frac{4,8\sqrt{2gH'}\,10}{5 \cdot 3 \cdot 50 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 100} = 0,8 \text{ см/с},$$

так как H' = 0,37 м (см. рис. 61), а 5 (3·50) = 750 см^2 — площадь поперечных вертикальных каналов (две стенки и три ребра) и 3 (3·100) = 900 см^2 — площадь продольных вертикальных каналов (две стенки и одно ребро). Время течения расплава по вертикальным каналам на пути 250 мм равно 25 : 0,8 = 31 с.

Наибольшие потери перегрева будут на носике потока в конце заливки в месте полости формы, противоположном от расположения питателя. Поэтому

$$\Delta\vartheta = \frac{1,13b_4}{c_1\rho_1}(T_{\text{зал}} - 70 - T_{\text{ф}})\sqrt{t},$$

т. е.

$$\Delta\vartheta = \frac{1,13 \cdot 1377 \cdot 1280}{838 \cdot 6950 \cdot 0,015}\sqrt{31} = 117 \text{ К}.$$

Следовательно, максимальная потеря перегрева в момент окончания заливки составит 187 К и должна наблюдаться в верхнем левом углу отливки (см. рис. 61). Так как $T_{\text{зал}}$ = 1643 К, то в этом месте температура расплава должна быть равной 1456 К, что меньше, чем $T_{кр}$ чугуна ($T_{кр} = 1473$ К, см. приложение VI).

Есть два выхода из положения. Первый — увеличение температуры заливки, но для чугуна ваграночной плавки она уже на верхнем пределе; кроме того, повышение $T_{зал}$ приведет, как известно, к интенсивному развитию усадочных дефектов (рыхлот, пористости), а также пригара. Второй путь — сделать этажную литниковую систему, подав расплав и в верхнюю часть полости формы (см. рис. 61); это уменьшит потери перегрева, так как на зеркало расплава, поднимающегося по вертикальным каналам, будет подводиться расплав с температурой, близкой к $T_{зал}$.

Само собой разумеется, что место подвода расплава целесообразно рассредоточить: расплав лучше подвести в продольные стенки и заливку вести в два стояка и четыре питателя.

71. РАСЧЕТ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ

Продолжительность $t_з$ затвердевания отливки определим по (92), в которой t_1 — из (48) с учетом (69) при $T_п \approx T_{зал}$:

$$T_н = \frac{1}{2}(T_{зал} - T_{кр}) = \frac{1}{2}(1643 + 1473) = 1558 \text{ К};$$

$$t_1 = \left(\frac{838 \cdot 7000 \cdot 0{,}015 \cdot 85}{1{,}13 \cdot 1377 \cdot 1275} + \sqrt{40}\right)^2 = 103 \text{ с};$$

$$t_з = \left(\frac{215\,000 \cdot 7000 \cdot 0{,}015}{1{,}13 \cdot 1377 \cdot 1200} + \sqrt{103}\right)^2 = 550 \text{ с}.$$

На рис. 62, *а* приведена кривая изменения скорости затвердевания тела отливки в зависимости от времени; расчет выполнен по (95) при $k = 0$:

$$U = \frac{1377 \cdot 1180}{\sqrt{\pi} \cdot 215\,000 \cdot 7500 \sqrt{t}}; \quad t \geqslant 103 \text{ с};$$

$$U = \frac{0{,}577}{\sqrt{t}}; \quad t \geqslant 103 \text{ с},$$

где U в мм/с.

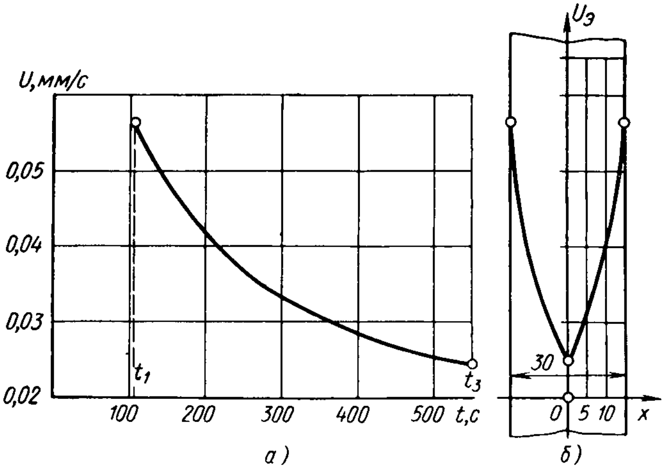
На рис. 62, *б* по (97) при $k = 0$ построено распределение скорости затвердевания по сечению тела отливки:

$$U_э = \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}13 \cdot 1377 \cdot 1180}{215\,000 \cdot 7500}\right)^2 \frac{1}{(0{,}015 - x) + \frac{1{,}13 \cdot 1377 \cdot 1180}{215\,000 \cdot 7500}\sqrt{103}}$$

или

$$U_э = \frac{0{,}057}{1 + 0{,}0875\,(15 - x)},$$

где $U_э$ в мм/с.



а) б)

Рис. 62. Изменение линейной скорости затвердевания тела отливки (*а*); распределение линейной скорости затвердевания в теле отливки (*б*)

Распределение скорости затвердевания неоднородно: в центре тела скорость более чем в 2 раза меньше скорости у поверхности. Поэтому интересно выяснить степень неоднородности структуры и свойств чугуна в теле отливки. Воспользуемся структурной диаграммой на рис. 18.

Пусть ваграночный чугун содержит 3,2% С. Тогда, для марки СЧ 18-36 отношение $\frac{C_{св}}{C_{об}} = 0,125$. Так как средняя скорость затвердевания равна 0,0342 мм/с, то по диаграмме С + Si = 5,2%. Следовательно, у поверхности отливки ($U_э = 0,057$ мм/с) структура: перлит + графит + 20% феррита (твердость *HB* 220); в центре тела ($U_э = 0,0245$ мм/с) структура: перлит + графит + + 60% феррита (твердость *HB* 160).

Таким образом, должны получить отливки с пестрой (перлит + + 40% феррита + графит) структурой, со средними значениями $\sigma_в = 180$ Н/мм^2 и $\sigma_{из} = 350$ Н/мм^2, но с твердостью около *HB* 220. Химический состав чугуна определяется С + Si = 5,2% при 3,2% С с помощью известных читателю соотношений.

72. ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВКИ

Продолжительность охлаждения затвердевшей отливки в форме рассчитаем по (146), представив ее для литья чугуна в виде

$$t = 2\left(\frac{c_з \rho_з \mathfrak{R}_0}{\sqrt{\frac{2n}{n+1}\, b_4}}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\Theta_з} - 1\right)(1 + D) + \ln \Theta_з\right] + t_з,$$

где

$$D = \left[\text{К}_{c_1}\text{К}_{\rho_1}(\Theta_{\text{зал}} - 1) + \frac{L_E}{c_{\text{з}}(T_{\text{кр}} - T_{\text{ф}})}\right];$$

$$\Theta \equiv \frac{T - T_{\text{ф}}}{T_{\text{кр}} - T_{\text{ф}}}.$$

В рассматриваемом случае $\Theta_{\text{зал}} = \frac{1350}{1180} = 1,145$, поэтому

$$D = \left[\frac{838 \cdot 7000}{560 \cdot 7500}(1,145 - 1) + \frac{215\,000}{560 \cdot 1180}\right] = 0,528.$$

Примем температуру выбивки отливки из формы 673 К; следовательно, $\Theta_{\text{з}} = \frac{380}{1180} = 0,322$ и, согласно рис. 55, $n = 1,9$. Тогда,

$$t = 2\left(\frac{560 \cdot 7500 \cdot 0,015}{1,13 \cdot 1377}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{0,322} - 1\right)(1 + 0,528) - 1,13\right] + 550 =$$
$$= 7450 \text{ с}.$$

Точно такой же результат получен по графикам П. Г. Новикова (см. рис. 56). При $\vartheta_{\text{зал}} = 1350$ К и $\vartheta_{\text{з}} = 400$ К величина $\tau = 350$. Для чугуна $a_{\text{з}} = 1,1 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Следовательно,

$$t = \tau \frac{l_0^2}{a_{\text{з}}} = 350 \frac{2,25 \cdot 10^{-4}}{1,1 \cdot 10^{-5}} \approx 7500 \text{ с}.$$

Таким образом, *продолжительность технологического цикла изготовления отливки стола массой 420 кг составляет 2 ч*, если форма является массивной неохлаждаемой, т. е. полубесконечна в тепловом отношении.

Проверим по условию (85):

$$\zeta = \sqrt{2n(n + 1)a_4 t} = \sqrt{2 \cdot 1,9(1,9 + 1) \cdot 2,64 \cdot 10^{-7} \cdot 7,5 \cdot 10^3} =$$
$$= 0,155 \text{ м},$$

так как для формы $a_4 = 2,64 \cdot 10^{-7}$ м²/с. Следовательно, форма неохлаждаемая: $l_{\text{ф}} > \zeta$ к моменту выбивки [1].

73. ЗАДАЧИ

В этом параграфе читателю предложено пять задач, решить которые возможно при глубоком усвоении и понимании материала, изложенного в этом разделе. Предлагаемые задачи требуют от читателя проявления определенного

---

[1] В выполненных расчетах не делали различия между свойствами формы и стержня, приняв их одинаковыми. На практике, конечно, это не так. Поэтому предлагаем читателю после решения задачи 1 в § 73 сделать такой же расчет при разных b_4 для сырой формы и сухих стержней. Способ учета влияния влажности на величину b_4 формы читатель найдет у Г. А. Анисовича и Н. П. Жмакина ([1], с. 52—66).

творчества — их нельзя решить, пользуясь каким-либо рецептом, например ходом расчета, приведенного в предыдущем параграфе. В этом нет ничего особенного, так как любая технологическая задача при ее решении, в том числе и теоретическими методами, требует творческого подхода.

1. Рассчитать продолжительность затвердевания отливки из серого чугуна, залитого с перегревом. Отливка в тепловом отношении плоская. Наружная поверхность ее находится в контакте с сырой песчано-глинистой формой; внутренняя конфигурация отливки оформляется сухим стержнем.

Указание. В качестве примера взять схему на рис. 61, форму и стержень принять полубесконечными телами с коэффициентами тепловой аккумуляции соответственно $b_ф$ и $b_с$; при этом $b_ф \gg b_с$.

2. Рассчитать продолжительность затвердевания и охлаждения стальной отливки (сталь 30Л) в тонкостенной оболочковой форме (без засыпки ее песком или дробью). Отливка в тепловом смысле плоская.

Указание. При $t \geqslant t_1$ распределение температуры в форме принять линейным; толщины формы $l_ф < l_0$ и по абсолютной величине такова, что изменением ее теплосодержания допустимо пренебречь.

3. Рассчитать продолжительность затвердевания отливки в футерованной металлической форме (металлокерамической форме). Отливка цилиндрическая. Материал отливки — серый чугун.

Указание. Распределение температуры по сечению слоя футеровки принять линейным; контакт футеровки и металлической формы принять физически плотным; изменением теплосодержания футеровки пренебречь; металлическая форма во время затвердевания отливки — массивная, неохлаждаемая.

4. Доказать, что результаты, полученные при решении задачи 3, распространяются на случай литья в оболочковую форму с засыпкой ее металлической дробью.

Указание. По аналогии с песчаной формой ввести понятие коэффициента тепловой аккумуляции металлической дроби в засыпке; предложить способ экспериментального определения этого коэффициента.

5. Решить задачу 2 для случая, когда наружная поверхность отливки находится в контакте с футерованной металлической формой.

Рекомендуемая литература

1. **Анисович Г. А., Жмакин Н. П.** Охлаждение отливки в комбинированной форме. М., «Машиностроение», 1969. 136 с.
2. **Вейник А. И.** Тепловые основы теории литья. М., Машгиз, 1953. 384 с.
3. **Вейник А. И.** Теория затвердевания отливки. М., Машгиз, 1960. 436 с.
4. **Вейник А. И.** Расчет отливки, М., «Машиностроение», 1964. 404 с.
5. **Гребер Г., Эрк С., Григулль У.** Основы учения о теплообмене. Пер. с нем., М., Изд-во иностр. лит., 1958. 568 с.
6. **Гуляев Б. Б.** Затвердевание и неоднородность стали. Под ред. Ю. А. Нехендзи. М.—Л., Металлургиздат, 1950. 228 с.
7. **Гуляев Б. Б.** Литейные процессы. М.—Л., Машгиз, 1960. 416 с.
8. **Кутателадзе С. С.** Основы теории теплообмена. М., Машгиз, 1957. 384 с.
9. **Коцюбинский О. Ю.** Коробление чугунных отливок от остаточных напряжений. М., «Машиностроение», 1965. 175 с.
10. **Лаврентьев М. А., Шабат Н. А.** Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973. 736 с.
11. **Рабинович Б. В.** Литейная гидравлика. М., «Машиностроение», 1966. 424 с.
12. **Раддл Р. У.** Затвердевание отливок. Пер. с англ. М., Машгиз, 1960. 392 с.
13. **Хворинов Н. И.** Затвердевание отливок. Пер. с нем. и чешск. М., Изд-во иностр. лит., 1955. 198 с.
14. **Хворинов Н. И.** Кристаллизация и неоднородность стали. Пер. с чешск. М., Машгиз, 1958. 392 с.

Раздел IV

ЗАТВЕРДЕВАНИЕ И ОХЛАЖДЕНИЕ ОТЛИВКИ В КОКИЛЕ

Глава 16. УПРОЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВКИ

Обобщенная математическая модель процесса затвердевания отливки в металлической форме, окрашенной изнутри так, что $\frac{\varepsilon}{l_0} \ll 1$, представлена системой дифференциальных уравнений (37-II), (45-II) теплопроводности Фурье и условий (39-II), (46-II), (41-II), (42-II), (51-II) и (48-II). Напишем эту математическую модель в виде, удобном для дальнейшего анализа:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta_1}{\partial\tau} = \mathrm{K}_{a_1}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial X^2}; \quad 0 < X < \chi_1(\tau);\\
&\frac{\partial\Theta_2}{\partial\tau} = \chi_{a_2}\frac{\partial\Theta_2}{\partial X^2} + \frac{\mathscr{L}_2}{K_{c_2}K_{\rho_2}}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}; \quad \chi_1(\tau) < X < \chi_3(\tau);\\
&\frac{\partial\Theta_3}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Theta_3}{\partial X^2}; \quad \chi_3(\tau) < X < 1;
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\Theta_4}{\partial\tau} = \mathrm{K}_{a_4}\frac{\partial^2\Theta_4}{\partial X^2}; \quad 1 < X < 1 + \frac{l_\text{ф}}{l_0}; \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_1(X,\ \mathrm{Fo}_0) = \Theta_\text{н} \equiv \mathrm{const}; \quad \Psi(X,\ \mathrm{Fo}_0) = 0;\\
&\chi_1(\mathrm{Fo}_0) = 1; \quad \chi_3(\mathrm{Fo}_0) = 1;\\
&\Theta_4(X,\ \mathrm{Fo}_0) = \Theta_\text{н}\varphi_0(X);
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$-\mathrm{K}_{\lambda_1}\frac{\partial\Theta_1(\chi_1,\tau)}{\partial X} = -\mathrm{K}_{\lambda_2}\frac{\partial\Theta_2(\chi_1,\tau)}{\partial X}; \quad \Theta_1(\chi_1,\ \tau) = \Theta_2(\chi_1,\ \tau) = 1; \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\mathrm{K}_{\lambda_2}\frac{\partial\Theta_2(\chi_3,\ \tau)}{\partial X} - \mathscr{L}_E[1 - \Psi(\chi_3,\ \tau)]\frac{d\chi_3}{d\tau} = -\frac{\partial\Theta_3(\chi_3,\tau)}{dX};\\
&\Theta_2(\chi_3,\ \tau) = \Theta_3(\chi_3,\ \tau) = \Theta_E;
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &-\mathrm{K}_{\lambda_i}\frac{\partial\Theta_i(1,\tau)}{\partial X}=\mathrm{Bi}_0\,[\Theta_i(1,\ \tau)-\Theta_4(1,\ \tau)];\quad i=1,\ 2 \text{ и } 3;\\ &-\frac{l_0}{l_\text{ф}}\mathrm{Bi}_\text{ф}[\Theta_i(1,\ \tau)-\Theta_4(1,\ \tau)]=+\frac{\partial\Theta_4(1,\tau)}{\partial X};\quad i=1,\ 2 \text{ и } 3; \end{aligned}\right\}\tag{6}$$

$$-\frac{\partial\Theta_4\left(1+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\ \tau\right)}{\partial X}=\begin{cases}\frac{l_0}{l_\text{ф}}\mathrm{Bi}_\text{c}\Theta_4\left(1+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\ \tau\right), \text{ если } \frac{l_\text{ф}}{l_0}\neq\infty;\\ 0 \text{ и } \Theta_4\left(1+\frac{l_\text{ф}}{l_0},\ \tau\right)=0, \text{ если } \frac{l_\text{ф}}{l_0}=\infty,\end{cases}\tag{7}$$

где

$$\Psi(\chi_3,\ \tau)=\begin{cases}1, \text{ если } 0\leqslant C_0\leqslant C_B \text{ (см. рис. 23)};\\ 1-\Psi_E, \text{ если } C_B<C_0<C_E;\\ 0, \text{ если } C_0=C_E.\end{cases}$$

74. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Прежде всего обратимся к таблицам теплофизических свойств литейных сплавов и кокильных красок и обмазок (см. приложения VI и VIII). Из этих таблиц следует, что $\lambda_3 = 0{,}3\cdot10^2\div3{,}3\times\times10^2$ Вт/(м·К) и $\lambda_\varepsilon = 1{,}2\cdot10^{-1} - 4{,}6\cdot10^{-1}$ Вт/(м·К), т. е.

$$\mathrm{K}_{\lambda_\varepsilon}⋘ 1. \tag{8}$$

Если толщину кокильной краски принять в пределах, наиболее часто применяемых на практике ($\varepsilon = 0{,}2\div1{,}0$ мм, что читателю известно из технологических дисциплин), то для отливок с $l_0 = 5\div20$ мм реально неравенство

$$\frac{l_0}{\varepsilon}\mathrm{K}_{\lambda_\varepsilon}<0{,}1. \tag{9}$$

Как уже ясно читателю, произведение $\frac{l_0}{\varepsilon}\mathrm{K}_{\lambda_\varepsilon}=\mathrm{Bi}_0$. Поэтому неравенство (8) равносильно условию

$$\mathrm{Bi}_0\ll 1, \tag{10}$$

при котором интенсивность охлаждения отливки во время ее затвердевания в металлической форме, окрашенной изнутри, весьма мала (см. с. 61—63).

Непосредственными расчетами Bi_0 нетрудно проверить, *что условие (10) реализуется на практике при литье в металлические формы подавляющего большинства тонкостенных деталей машин и приборов из алюминиевых, магниевых, медных сплавов и в ряде случаев из чугунов.*

Из предыдущего анализа процесса затвердевания отливки в песчаной форме известно, что при весьма малой интенсивности охлаждения отливки в ней допустимо пренебречь неоднородностью температурного поля. Условие (10) утверждает это допущение однозначно и для процесса затвердевания отливки в окрашенной изнутри металлической форме.

Действительно, в результате исследования охлаждения неограниченной плиты при ее взаимодействии с окружающей средой в соответствии с граничными условиями III рода (см. § 22 и 25) установлено, что критерий Био характеризует относительную интенсивность процесса теплоотдачи от поверхности плиты в окружающую среду и является приближенной мерой отношения температурного перепада внутри плиты к температурному напору на границе ее контакта с окружающей средой (см. с. 62—79). Для отливки, затвердевающей в окрашенной изнутри металлической форме, температурный перепад

$$\delta\vartheta_i = T_i(0,\ t) - T_i(l_0,\ t);\quad i = 1,\ 2 \text{ и } 3;$$

температурный напор на границе контакта этой отливки с окружающей средой определяется величиной, к которой отнесен коэффициент $\beta = \frac{\lambda_\varepsilon}{\varepsilon}$ тепловой проводимости краски в граничных условиях (6), т. е. разностью температуры поверхности отливки и внутренней поверхности формы:

$$\Delta\vartheta_0 = T_i(l_0,\ t) - T_4(l_0,\ t),\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно, условие (10) приближенно представляется условием

$$\frac{\delta\vartheta_i}{\Delta\vartheta_0} \ll 1;\quad i = 1,\ 2 \text{ и } 3, \qquad (11)$$

которое по смыслу аналогично условию (1-III) для отливки, затвердевающей в песчаной форме. Оно означает, что при соблюдении условия (10) и *для литья в металлические формы неоднородность температурного поля в затвердевающей отливке весьма мала* по сравнению с разностью температур контактирующих поверхностей отливки и формы, и ею в математической модели (1)—(7) допустимо пренебречь.

Другими словами, *при соблюдении условия (10) и при литье в металлические формы справедлива известная модель весьма малой интенсивности охлаждения затвердевающей отливки*. Математическое описание этой известной модели будет выражаться теми же уравнениями и условиями, что и для литья в песчаные формы: совокупностью дифференциальных уравнений (9-III) и начальными условиями (10-III), где, однако, согласно первому граничному условию (6)

$$q_{0i}(\tau) = \mathrm{Bi}_0\,[\Theta_i(1,\ \tau) - \Theta_4(1,\ \tau)];\quad i = 1,\ 2,\ 3. \qquad (12)$$

Читатель, по-видимому, уже обратил внимание на то, что в определенных условиях все, только что сказанное, справедливо и для самой формы, так как она металлическая, а следовательно,

$\lambda_3 \approx \lambda_4$ и $K_{\lambda_4} \approx 1$. Поэтому по отношению к форме реально неравенство (9) в виде

$$\frac{l_ф}{\varepsilon} K_{\lambda_\varepsilon} : K_{\lambda_4} < 0,1, \tag{13}$$

если наложить очевидное ограничение на толщину стенки формы

$$\frac{l_ф}{l_0} \leqslant 1, \tag{14}$$

при котором получается, что

$$\mathrm{Bi}_ф \ll 1 \tag{15}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta\vartheta_4}{\Delta\vartheta_0} \ll 1, \tag{16}$$

где $\delta\vartheta_4 = T_4(l_0, t) - T_4(l_0 + l_ф, t)$.

Условие (15) утверждает справедливость модели весьма малой интенсивности нагревания металлической формы теплотой отливки через слой краски, обладающей таким коэффициентом теплопроводности, когда

$$K_{\lambda_\varepsilon} : K_{\lambda_4} \lll 1. \tag{17}$$

Назовем окрашенную изнутри металлическую форму, удовлетворяющую условиям (14) и (15), кокилем. Кокиль тонкостенный, если $\frac{l_ф}{l_0} < 1$.

По существу закончен анализ экспериментальных данных. В качестве таких использованы экспериментально найденные и сведенные в таблицы данные о λ_3, λ_4, λ_ε; величины толщин кокильной краски, применяемых на практике (т. е. найденных экспериментально), толщин отливок, которые преимущественно получают литьем в металлические формы, и, наконец, толщин стенок кокилей, которые также используют на практике (в любом справочнике по кокильному литью читатель найдет, что $l_ф = 0,5 \div 2,0 l_0$). Анализ именно этих экспериментальных данных *с помощью математической модели (1)—(7)* позволил установить условия (10) и (15) теплового взаимодействия отливки и кокиля, которые, во-первых, из всего многообразия металлических форм выделяют кокили и, во-вторых, предельно *упрощают указанную математическую модель процесса затвердевания отливки в кокиле*, так как и для отливки, и для кокиля неоднородность температурных полей допустимо не учитывать при дальнейших расчетах режимов технологии.

В начале предыдущего раздела, где речь шла о затвердевании отливки в песчаной форме, было сделано точно также (см. § 44); однако для большей убедительности на рис. 28 приведены резуль-

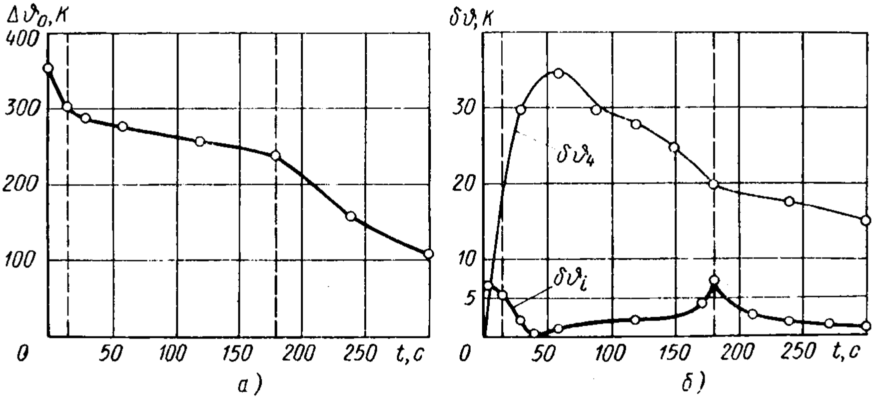


Рис. 63. Изменения температурного напора на границе контакта отливки и формы (*а*) и температурных перепадов в отливке и в форме (*б*) во время затвердевания цинка в кокиле

таты непосредственных измерений температурного перепада в отливке. Здесь, для читателей, у которых все еще живо недоверие к такому методу анализа экспериментальных данных, результаты непосредственных измерений температурных перепадов в отливке и кокиле в процессе их теплового взаимодействия приведены на рис. 63: отливка плоская, материал отливки — цинк Ц1, материал кокиля — чугун СЧ 18-36, толщина кокильной краски 0,6 мм, толщина кокиля 15 мм, толщина отливки 30 мм. Очевидно, что во время затвердевания отливки (момент начала и конца затвердевания на рис. 63 отмечены штриховыми линиями) условия (10) и (15) действительно соблюдаются; условие (15) нарушается только при глубоком охлаждении твердой отливки.

75. УПРОЩЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВКИ

На рис. 64 изображена схема температурных полей в отливке и кокиле. Здесь учтены оба принятых выше допущения: неоднородность температурных полей не учитывается ни в отливке, ни в кокиле.

Второе допущение, являющееся следствием условия (15), позволяет существенно упростить ту часть математической модели (1)—(7), которая описывает прогрев металлической формы через слой кокильной краски. Действительно, представим, как это делали уже неоднократно, дифференциальное уравнение (2) теплопроводности в виде интегрального соотношения в первоначальных переменных:

$$-c_4\rho_4 \int_{l_0}^{l_0+l_\text{ф}} \frac{\partial T_4}{\partial t}\,dx = q(l_0+l_\text{ф},\ t) - q_i(l_0,\ t);\quad t>0,$$

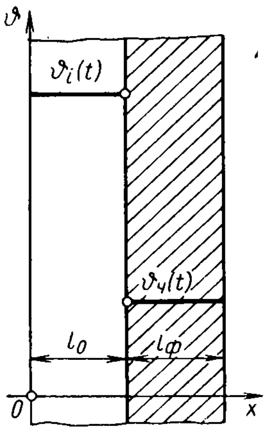


Рис. 64. Схема температурных полей в отливке и кокиле

где из граничных условий (7) для $\frac{l_{\text{ф}}}{l_0} \neq \infty$

$$q(l_0 + l_{\text{ф}},\ t) = \alpha_{\text{c}}\,[T_4(l_0 + l_{\text{ф}},\ t) - T_{\text{c}}]$$

и из второго граничного условия (6)

$$q_i(l_0,\ t) = \beta\,[T_i(t) - T_4(l_0,\ t)].$$

Так как для весьма малой интенсивности прогрева кокиля неоднородность температурного поля в нем несущественна, т. е. $T_4(l_0,\ t) \approx T_4(l_0 + l_{\text{ф}},\ t)$, то

$$-c_4\rho_4 l_{\text{ф}} \frac{dT_4}{dt} = \alpha_{\text{c}}(T_4 - T_{\text{c}}) - \beta(T_i - T_4);$$

$$i = 1,\ 2,\ 3$$

при начальном условии (3), если его записать в виде

$$T_4(t_{\text{зал}}) = T_{\text{ф}} = \text{const},$$

где $T_{\text{ф}}$ — начальная температура кокиля.

В обобщенных переменных

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\text{K}_{a_4}}\frac{d\Theta_4}{d\tau}\left(\frac{l_{\text{ф}}}{l_0}\right)^2 = \text{Bi}_{\text{ф}}(\Theta_i - \Theta_4) - \text{Bi}_{\text{c}}\Theta_4;\ i = 1,\ 2,\ 3;\\ &\Theta_4(\text{Fo}) = \Theta_{\text{ф}} = \text{const}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Затвердевание расплава литейных сплавов в кокиле

Очевидно, что математическая модель (1)—(7) с учетом условий (10) и (15) представляется тремя упрощенными:

для охлаждения перегретого расплава

$$\left.\begin{aligned} &-\text{K}_{c_1}\text{K}_{\rho_1}\frac{d\Theta_1}{d\tau} = \text{Bi}_0(\Theta_1 - \Theta_4);\quad \tau > \text{Fo}_0;\\ &\Theta_1(\text{Fo}_0) = \Theta_{\text{н}};\\ &\frac{1}{\text{K}_{a_4}}\left(\frac{l_{\text{ф}}}{l_0}\right)^2\frac{d\Theta_4}{d\tau} = \text{Bi}_{\text{ф}}(\Theta_1 - \Theta_4) - \text{Bi}_{\text{c}}\Theta_4;\ \tau > \text{Fo}_0;\\ &\Theta_4(\text{Fo}_0) = \Theta_{\text{ф}}; \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

для затвердевания расплава в интервале температуры ликвидуса и солидуса (эвтектика) сплава

$$\left.\begin{aligned} &-\text{K}_{c_2}\text{K}_{\rho_2}\frac{d\Theta_2}{d\tau} + \mathscr{L}_2\frac{d\Psi}{d\tau} = \text{Bi}_0(\Theta_2 - \Theta_4);\quad \tau > \text{Fo}_1;\\ &\Theta_2(\text{Fo}_1) = 1;\quad \Psi(\text{Fo}_1) = 0; \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{K_{a_4}}\left(\frac{l_ф}{l_0}\right)^2\frac{d\Theta_4}{d\tau}=Bi_ф(\Theta_2-\Theta_4)-Bi_c\,\Theta_4;\quad \tau>Fo_1;\\&\Theta_4(Fo_1)=\Theta_{ф1};\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

для затвердевания расплава эвтектики

$$\left.\begin{aligned}&-\Psi_E\mathscr{L}_E\frac{d\chi_E}{d\tau}=Bi_0(\Theta_E-\Theta_4);\quad \tau>Fo_2;\\&\Theta_2(Fo_2)=\Theta_E,\ \chi_E(Fo_2)=1;\\&\frac{1}{K_{a_4}}\left(\frac{l_ф}{l_0}\right)^2\frac{d\Theta_4}{d\tau}=Bi_ф(\Theta_E-\Theta_4)-Bi_c\,\Theta_4;\quad \tau>Fo_2;\\&\Theta_4(Fo_2)=\Theta_{ф2},\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

где $\Theta_{ф1}$, $\Theta_{ф2}$ — соответственно относительная температура формы после отвода теплоты перегрева от расплава и после затвердевания его в интервале $T_L—T_E$.

Соотношение между Bi_0 и $Bi_ф$ очевидно:

$$\frac{Bi_0}{Bi_ф}=\frac{l_0}{l_ф}K_{\lambda_1}.\qquad(22)$$

Охлаждение твердой отливки в кокиле

Принятые выше допущения распространяются и на процесс охлаждения отливки с момента ее полного затвердевания. Поэтому упрощенную математическую модель охлаждения твердой отливки в кокиле возможно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{d\Theta_3}{d\tau}=Bi_0(\Theta_3-\Theta_4);\quad \tau>Fo_3;\\&\Theta_3(Fo_3)=\begin{cases}\Theta_S, & \text{если } \Psi_E=0;\\ \Theta_E, & \text{если } \Psi_E>0;\end{cases}\\&\frac{1}{K_{a_4}}\left(\frac{l_ф}{l_0}\right)^2\frac{d\Theta_4}{d\tau}=Bi_ф(\Theta_3-\Theta_4)-Bi_c\Theta_4;\\&\Theta_4(Fo_3)=\Theta_{ф3},\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

где $\Theta_{ф3}$ — относительная температура кокиля в момент окончания затвердевания отливки.

Затвердевание и охлаждение отливки в тонкостенном кокиле

Упрощенные математические модели (19)—(21) и (23) описывают процессы затвердевания отливки в кокилях при $\frac{l_ф}{l_0}\approx 1$ и $\frac{l_ф}{l_0}<1$.

Во втором случае, т. е. в тонкостенном кокиле, когда $\frac{l_ф}{l_0}<1$, модели можно еще более упростить. Действительно, если $\frac{l_ф}{l_0}<1$

и $\left(\frac{l_ф}{l_0}\right)^2 \approx 0$, то левая часть во втором дифференциальном уравнении моделей (19)—(21) и (23) становится пренебрежимо мала. Физически это понятно, так как изменение теплосодержания тонкостенного кокиля в процессе его нагрева несущественно по сравнению с изменением теплосодержания затвердевающей отливки, если $l_0 > l_ф$. Следовательно,

$$\Theta_4 = \Theta_i \frac{\mathrm{Bi}_ф}{\mathrm{Bi}_ф + \mathrm{Bi}_с}; \quad i = 1,\ 2 \text{ и } 3.$$

Тогда, *для охлаждения перегретого расплава*

$$-\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1} \frac{d\Theta_1}{d\tau} = \frac{\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_с}{\mathrm{Bi}_ф + \mathrm{Bi}_с}\Theta_1; \quad \tau > \mathrm{Fo}_0; \tag{24}$$

$$\Theta_1(\mathrm{Fo}_0) = \Theta_н;$$

для затвердевания расплава в интервале температуры ликвидуса и солидуса (эвтектика) сплава

$$-\mathrm{K}_{c_2}\mathrm{K}_{\rho_2} \frac{d\Theta_2}{d\tau} + \mathscr{L}_2 \frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_с}{\mathrm{Bi}_ф + \mathrm{Bi}_с}\Theta_2; \quad \tau > \mathrm{Fo}_1; \tag{25}$$

$$\Theta_2(\mathrm{Fo}_1) = 1; \quad \Psi(\mathrm{Fo}_1) = 0;$$

для затвердевания расплава эвтектики

$$-\Psi_E\mathscr{L}_E \frac{d\chi_E}{d\tau} = \frac{\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_с}{\mathrm{Bi}_ф + \mathrm{Bi}_с}\Theta_E; \quad \tau > \mathrm{Fo}_2; \tag{26}$$

$$\Theta_2(\mathrm{Fo}_2) = \Theta_E; \quad \chi_E(\mathrm{Fo}_2) = 1;$$

для охлаждения твердой отливки

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\Theta_3}{d\tau} = \frac{\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_с}{\mathrm{Bi}_ф + \mathrm{Bi}_с}\Theta_3; \quad \tau > \mathrm{Fo}_3; \\ &\Theta_3(\mathrm{Fo}_3) = \begin{cases} \Theta_S, & \text{если } \Psi_E = 0; \\ \Theta_E, & \text{если } \Psi_E > 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Затвердевание и охлаждение отливки в массивном кокиле

Здесь, подчиняясь установившейся терминологии, расширим понятие о кокиле.

Назовем кокилем охлаждаемую металлическую форму, окрашенную изнутри так, что процесс охлаждения и затвердевания расплава в ней происходит с весьма малой интенсивностью. Такое определение кокиля, естественно, включает металлическую форму с $\frac{l_ф}{l_0} > 1$.

Следовательно, *кокиль массивный*, если $\frac{l_ф}{l_0} > 1$, но соблюдается условие (10).

Это означает, что для массивного кокиля условие (15) не соблюдается. В силу соотношения (22)

$$\mathrm{Bi}_ф > 0{,}1 \text{ и } \frac{\delta\vartheta_4}{\Delta\vartheta_0} > 0,\ 1,$$

т. е. неоднородностью температурного поля в массивном кокиле пренебрегать уже нельзя. В свою очередь, это означает, что математическая модель нагревания металлической формы во время всех стадий затвердевания расплава и охлаждения твердой отливки можно представить только так, как и в обобщенной модели (1)—(7), т. е. дифференциальным уравнением (2) и условиями (3), (6) и (7) при $\frac{l_ф}{l_0} \neq \infty$.

Заметим, что для краевой задачи (2), (3), (6) и (7) при $\frac{l_ф}{l_0} \neq \infty$ точного аналитического решения еще не найдено. Выход из положения предложил А. И. Вейник в 1953 г. Его идея сводится к следующему.

Представим себе, что металлическая форма изолирована с внешней поверхности; тогда вся теплота, отдаваемая отливкой, будет аккумулироваться только формой. При этом через бесконечно большой промежуток времени и отливка, и форма преобретут одинаковую температуру $T_к$, которую А. И. Вейник назвал *средней калориметрической температурой* системы отливка—форма. Найти ее для изолированной снаружи формы нетрудно,

$V_0 c_3 \rho_3 (T_{зал} - T_к) + \rho_3 s_{эф} V_0$ —

теплота, которую потеряет отливка к моменту достижения температуры $T_к$, если, конечно, принять $c_1\rho_1 \approx c_2\rho_2 \approx c_3\rho_3$:

$V_ф c_4 \rho_4 (T_к - T_ф)$ —

теплота, которую форма аккумулирует к тому же моменту времени; следовательно, в безразмерных переменных

$$\Theta_к = \frac{\Theta_{зал} + S_{эф} + \mathrm{K}_{c_4}\Theta_ф \frac{G_ф}{G_0}}{1 + \mathrm{K}_{c_4} \frac{G_ф}{G_0}}. \qquad (28)$$

Теперь, допустимо представить, что отливка охлаждается в некую окружающую среду с температурой $T_к$ и коэффициентом теплоотдачи β_0; в то же время форма нагревается той же средой, но с коэффициентом теплоотдачи $\beta_ф$. Очевидно, что в любой момент времени для плоской отливки

$$\beta_0 [T_i (l_0, t) - T_к] = \beta_ф [T_к - T_4 (l_0, t)] = \beta [T_i (l_0, t) - T_4 (l_0, t)];$$

$i = 1$, 2 и 3,

откуда

$$\beta_0 = \beta \frac{\Theta_i (1, \tau) - \Theta_4 (1, \tau)}{\Theta_i (1, \tau) - \Theta_к}; \quad \beta_ф = \beta \frac{\Theta_i (1, \tau) - \Theta_4 (1, \tau)}{\Theta_к - \Theta_4 (1, \tau)};$$

$i = 1$, 2 и 3

или при $\tau = 0$

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 &= \beta \frac{\Theta_{\text{зал}} - \Theta_{\text{ф}}}{\theta_{\text{зал}} - \theta_{\text{к}}}; \\ \beta_{\text{ф}} &= \beta \frac{\Theta_{\text{зал}} - \Theta_{\text{ф}}}{\Theta_{\text{к}} - \Theta_{\text{ф}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

С учетом соотношений (28) и (29) математическая модель (1)—(7) при $\frac{l_{\text{ф}}}{l_0} \neq \infty$ существенно упрощается, так как вместо дифференциального уравнения (2) и граничных условий (6) и (7) достаточно записать лишь одно условие III рода:

$$-\mathrm{K}_{\lambda_i} \frac{\partial \Theta_i (1, \tau)}{\partial X} = \mathrm{Bi}_{00} [\Theta_i (1, \tau) - \Theta_{\text{к}}]; \quad i = 1, 2 \text{ и } 3, \qquad (30)$$

где $\mathrm{Bi}_{00} = \frac{\beta_0}{\lambda_3} l_0$.

Конечно, это условие справедливо, если в реальных условиях литья $\Theta_{\text{к}} \equiv \text{const}$. На самом деле $\Theta_{\text{к}}$ уменьшается со временем из-за охлаждения металлической формы в окружающую среду. Если $Q_{\text{с}}(t)$ — количество теплоты, которое к моменту времени t отводится с внешней поверхности формы, то

$$\Theta_{\text{к}} = \frac{1}{1 + \mathrm{K}_{c_4} \frac{G_{\text{ф}}}{G_0}} \left[\Theta_{\text{зал}} + S_{\text{эф}} + \Theta_{\text{ф}} \mathrm{K}_{c_4} \frac{G_{\text{ф}}}{G_0} - \frac{Q_c(\tau)}{G_0 c_3 (T_L - T_{\text{с}})}\right].$$

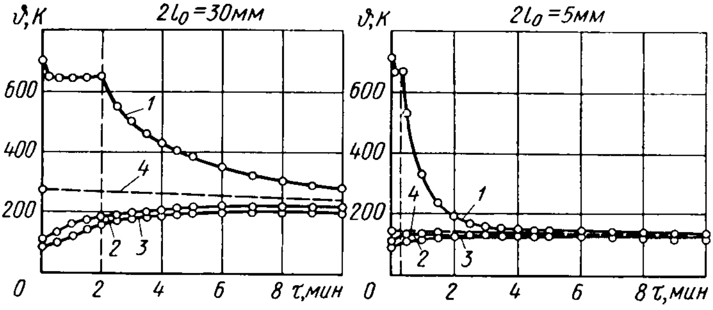
Поэтому граничное условие (30) для математической модели (1), (3)—(5) затвердевания отливки в металлической форме можно принять в случае, когда потеря теплоты в окружающую среду заметно не влияет на величину $\Theta_{\text{к}}$, т. е. в случае, когда

$$\frac{Q(\tau)}{G_0 c_3 (T_L - T_{\text{с}})} \ll \Theta_{\text{зал}} + S_{\text{эф}} + \Theta_{\text{ф}} \mathrm{K}_{c_4} \frac{G_{\text{ф}}}{G_0}, \qquad (31)$$

или для заданной массы G_0 отливки, когда $G_{\text{ф}} \gg G_0$ (или для плоских отливок $l_{\text{ф}} \gg l_0$).

На рис. 65 приведены опыты А. И. Вейника с плоскими алюминиевыми отливками, залитыми в чугунную металлическую форму толщиной 30 мм; $T_{\text{зал}} = 973$ К; $T_{\text{ф}} = 373$ К и $T_{\text{с}} = 293$ К. Очевидно, что, начиная с $\frac{l_{\text{ф}}}{l_0} = 10$, изменение $T_{\text{к}}$ со временем можно не учитывать. Более того, в начальной стадии процесса охлаждения отливки, т. е. во время ее затвердевания, изменение $T_{\text{к}}$ невелико, и при $\frac{l_{\text{ф}}}{l_0} > 1$ (рис. 65, *а*) им допустимо пренебрегать. Этот вывод следует из неравенства (31), если при $\tau \leqslant \tau_3$ и $G_{\text{ф}} \geqslant G_0$ оно сохраняет смысл.

Таким образом, процесс затвердевания в массивном кокиле $\left(\frac{l_{\text{ф}}}{l_0} > 1\right)$ можно рассматривать как процесс, происходящий



а)   б)

Рис. 65. Кривые изменения температуры центра (*1*) алюминиевой отливки, внутренней (*2*) и наружной (*3*) поверхностей кокиля и средней калориметрической температуры системы отливка—кокиль (*4*) во время затвердевания и охлаждения отливки при:

а) $l_ф = 2l_0$; *б*) $l_ф = 12l_0$

при охлаждении отливки в окружающую среду с коэффициентом теплоотдачи β_0 и температурой $T_к$, найденными по (28) и (29). Так как для процесса затвердевания отливки в массивном кокиле сохраняется условие (10), то математическая модель (1), (3)—(5), (30) после ее упрощения с учетом весьма малой интенсивности затвердевания отливки принимает вид, аналогичный моделям (24)—(26):

для охлаждения перегретого расплава

$$-\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}\frac{d\Theta_1}{d\tau}=\mathrm{Bi}_{00}(\Theta_1-\Theta_{к1});\quad \tau>\mathrm{Fo}_0; \tag{32}$$

$$\Theta_1(\mathrm{Fo}_0)=\Theta_н;$$

$$\Theta_{к1}=\frac{\Theta_{зал}+\mathrm{K}_{c_4}\mathrm{K}_{\rho_4}\Theta_ф\dfrac{V_ф}{V_0}}{1+\mathrm{K}_{c_4}\mathrm{K}_{\rho_4}\dfrac{V_ф}{V_0}},$$

так как на стадии отвода теплоты перегрева учитывать влияние теплоты кристаллизации сплава на $\Theta_к$ не следует;

для затвердевания расплава в интервале температуры ликвидуса и солидуса (эвтектика) сплава

$$-\mathrm{K}_{c_2}\mathrm{K}_{\rho_2}\frac{d\Theta_2}{d\tau}+\mathscr{L}_2\frac{d\Psi}{d\tau}=\mathrm{Bi}_{00}(\Theta_2-\Theta_к);\quad \tau>\mathrm{Fo}_1; \tag{33}$$

$$\Theta_2(\mathrm{Fo}_1)=1;\quad \Psi(\mathrm{Fo}_1)=0;$$

для затвердевания расплава эвтектики

$$-\Psi_E\mathscr{L}_E\frac{d\chi_E}{d\tau}=\mathrm{Bi}_{00}(\Theta_E-\Theta_к);\quad \tau>\mathrm{Fo}_2; \tag{34}$$

$$\Theta_2(\mathrm{Fo}_2)=\Theta_E;\quad \chi_E(\mathrm{Fo}_2)=1,$$

где $\Theta_к$ следует рассчитывать по (28);

для охлаждения затвердевшей отливки

$$-\frac{d\Theta_з}{d\tau}=\mathrm{Bi}_{00}\,[\Theta_з-\Theta_к(\tau)];\quad \tau>\mathrm{Fo}_з;$$

$$\Theta_з(\mathrm{Fo}_з)=\begin{cases}\Theta_S, & \text{если } \Psi_E=0;\\ \Theta_E, & \text{если } \Psi_E>0,\end{cases}$$

где $\Theta_к(\tau)$ необходимо рассчитывать с учетом охлаждения кокиля в окружающую среду (см. стр. 274).

Охлаждение отливки после выбивки

Принципиально, условия охлаждения отливки после ее выбивки из кокиля не должны отличаться от условий, какие возникают при охлаждении отливок, выбитых из песчаных форм. Поэтому воспользуемся математической моделью (15-III):

$$-\frac{d\Theta_з}{d\tau}=\frac{l_0}{\Re_0}\mathrm{Bi}_с\,\Theta_з;\quad \tau>\mathrm{Fo}_4;$$

$$\Theta_з(\mathrm{Fo}_4)=\Theta_{выб}.$$

Читателю, конечно, ясно, что она является частным случаем математических моделей (23), (27) и только что написанной для охлаждения затвердевшей отливки в различных кокилях (следует положить $l_ф=0$ и рассмотреть охлаждение отливки, начиная с момента ее выбивки).

76. ЕЩЕ РАЗ О ЗАКОНЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Закон квадратного корня в виде

$$\xi=m\sqrt{t}$$

при экспериментальной проверке неоднократно подтверждался и для литья в металлические формы (см. с. 172—174).

Однако из условий (10) и (15) следует, что при литье в кокиль его нельзя найти, если отливка охлаждается с весьма малой интенсивностью, а форма с весьма малой интенсивностью нагревается. Более того, закон квадратного корня нельзя обнаружить и при большой интенсивности нагрева формы, если за время затвердевания отливки средняя калориметрическая температура $T_к$ изменяется незначительно. Например, для последовательного затвердевания неперегретого расплава эвтектики, согласно математической модели (34) при $\Psi_E=1$ и $\mathrm{Fo}_2=0$,

$$\xi=\frac{\beta_0}{L_E\rho_з}(T_E-T_к)\,t.$$

Нетрудно показать, что закон квадратного корня при литье в металлические формы возможно обнаружить в следующих трех случаях теплового взаимодействия плоской отливки и формы:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Bi}_0 \ll 1,\ \mathrm{Bi}_ф \gg 1;\\ \mathrm{Bi}_0 \gg 1,\ \mathrm{Bi}_ф \ll 1;\\ \mathrm{Bi}_0 \gg 1,\ \mathrm{Bi}_ф \gg 1.\end{array}\right\} \qquad (35)$$

Первый случай характерен для литья под давлением, когда весьма тонкостенная отливка затвердевает в весьма массивной пресс-форме ($l_0 \ll l_ф$), которая за время затвердевания не прогревается насквозь. Учитывая смысл критерия Био, при $\mathrm{Bi}_ф \gg 1$ температурный напор на границе контакта пресс-формы с отливкой пренебрежимо мал по сравнению с температурным перепадом по сечению тела пресс-формы, т. е.

$$\left.\begin{array}{l}T_i(t) - T_4(l_0,\ t) \ll T_4(l_0,\ t) - T_4(\infty,\ t);\quad i = 1,\ 2\ \text{и}\ 3,\\ \text{или}\\ T_i(t) \approx T_4(l_0,\ t),\end{array}\right\} \qquad (36)$$

что, как ясно читателю, является приближенным аналогом условий литья в песчаные формы, но для $b_3 \approx b_4$. Этот аналог тем точнее, чем меньше не относительная, а действительная разница температуры $T_i\ (t)$ отливки и температуры $T_4\ (l_0,\ t)$ поверхности пресс-формы, т. е. чем больше β для смазок пресс-форм.

Определенное сходство условий теплового взаимодействия отливки и формы при литье в песчаные формы и под давлением уже отмечено на примере анализа процесса заполнения формы расплавом (см. с. 200). Сейчас эта аналогия найдена и для других этапов затвердевания отливки.

Вторая группа неравенств (35) характерна для литья толстостенных отливок в тонкостенные металлические формы, например для непрерывного литья слитков, вакуумного всасывания, литья в водоохлаждаемые формы и т. п. Согласно этим неравенствам, соотношения (36) принимают иной вид:

$$\left.\begin{array}{l}T_i(0,\ t) - T_i(l_0,\ t) \gg T_i(l_0,\ t) - T_4(t);\quad i = 1,\ 2\ \text{и}\ 3\\ \text{или}\\ T_i(l_0,\ t) \approx T_4(t).\end{array}\right\} \qquad (37)$$

Другими словами, и здесь речь идет о вырождении граничных условий III рода в граничные условия I рода; в первом случае — для прогрева полубесконечной формы, во втором — для охлаждения затвердевающего расплава. В первом случае коэффициент m в законе квадратного корня будет определяться свойствами формы отводить теплоту от отливки (коэффициент b_4); во втором — свойствами затвердевающей отливки проводить теплоту от ее центра к поверхности контакта с формой (коэффициент λ_i и размер отливки l_0).

Третья группа неравенств (35) чаще всего наблюдается при литье слитков в изложницы, т. е. когда толстостенная отливка затвердевает в толстостенной форме. Соотношения (36) и (37) для этого случая как бы совместятся:

$$\left.\begin{array}{l} T_i(0,\ t)-T_i(l_0,\ t)\gg T_i(l_0,\ t)-T_4(l_0,\ t); \\ T_i(l_0,\ t)-T_4(l_0,\ t)\ll T_4(l_0,\ t)-T_4(l_0+l_\text{ф},\ t) \\ \text{или} \\ T_i(l_0,\ t)\approx T_4(l_0,\ t), \end{array}\right\} \quad (38)$$

Здесь, как ясно читателю, идет речь о вырождении граничных условий III рода в граничные условия IV рода. Если во время затвердевания форма не прогреется насквозь ($l_\text{ф}\to\infty$ при $t\leqslant t_з$), то для затвердевания неперегретого расплава коэффициент m можно рассчитать по (3-III), т. е. можно воспользоваться решением задачи Шварца.

Из анализа трех случаев следует, что закон квадратного корня тем точнее будет описывать процесс затвердевания отливок в металлических формах, чем точнее приближенные равенства в соотношениях (36)—(38). В свою очередь, это означает, что все отклонения, какие были зафиксированы при экспериментальной проверке применимости закона квадратного корня для литья плоских отливок в металлические формы, объясняются прежде всего отклонением от указанных равенств, строго говоря, — отклонением от приближенного равенства в последнем соотношении температурных перепадов и напора, так как во время интенсивного изучения закона квадратного корня способов литья, которым соответствуют первые две группы неравенств (35), либо еще не существовало, либо они еще не получили промышленного развития. По существу закон квадратного корня с самого начала был использован для анализа процесса затвердевания слитков в изложницах (см. с. 172—173).

В заключение этого дополнительного экскурса в историю закона квадратного корня заметим, что проблемы, так или иначе, но успешно решенные при применении закона для исследования затвердевания отливок в песчаных формах, остались проблемами при изучении затвердевания слитков в изложницах. Это — учет влияния перегрева расплава и, главное, конфигурации слитков в законе квадратного корня. И если влияние перегрева в первом приближении возможно учесть в той форме закона, какую ему придали Д. Чипмен и Д. Фондерсмит, то конфигурацию слитка с помощью правила Н. И. Хворинова учесть невозможно, ибо слиток затвердевает при большой интенсивности теплообмена с изложницей. Необходимо решить задачи типа (1)—(7) для данной конфигурации слитка. Такие задачи приближенными методами решены Л. С. Лейбензоном и позднее Г. П. Иванцовым и А. И. Вейником.

С использованием гидроинтегратора эти задачи более точно решены Н. Г. Гиршовичем и Ю. А. Нехендзи в 1956 г. [4]. Напомним, что они нашли

$$t_3 = \mu_1\mu_2\mu_3\left(\frac{\mathfrak{R}_0}{m_0}\right)^2.$$

Коэффициент μ_5 учитывает влияние термического сопротивления зазора между отливкой и формой:

$$\mu_3 = 1 + \frac{2}{\mathrm{Bi}_0}.$$

Очевидно, что при отсутствии зазора между отливкой и формой $\mathrm{Bi}_0 \to \infty$ и $\mu_3 = 1$. Поэтому при первом обсуждении закона квадратного корня в формуле Н. Г. Гиршовича и Ю. А. Нехендзи μ_3 отсутствует.

Поправочные коэффициенты μ_1 и μ_2, учитывающие влияние конфигурации отливки и величины перегрева расплава, приведены раньше (см. с. 179—180).

Глава 17. ОХЛАЖДЕНИЕ ПЕРЕГРЕТОГО РАСПЛАВА. РАСЧЕТ ЗАПОЛНЕНИЯ КОКИЛЯ

Здесь и далее, включая § 87, мы будем рассматривать охлаждение и затвердевание расплава литейных сплавов в кокиле на основе упрощенных математических моделей (19)—(21) и (32)—(34), т. е. понимая, как условились, под термином «кокиль» охлаждаемую металлическую форму, в которой отливка затвердевает с весьма малой интенсивностью.

Здесь и далее анализ охлаждения и затвердевания расплава в кокиле дадим в той же последовательности, в какой это сделано для литья в песчаные формы. И понятно, что этот анализ будет кратким — все основные идеи и методы уже рассмотрены и главное внимание будет уделено тому, что отличает литье в кокиль.

77. ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ОХЛАЖДЕНИЯ ПЕРЕГРЕТОГО РАСПЛАВА, ЗАЛИТОГО В КОКИЛЬ

Как и при исследовании кинетики охлаждения перегретого расплава, залитого в песчаную форму, и в этом случае начнем с математического эксперимента, положив в математической модели (19) $\mathrm{Fo}_0 = 0$; следовательно, $\Theta_1(0) = \Theta_{\text{зал}}$ и $\Theta_4(0) = \Theta_{\text{ф}}$. Иными словами, рассмотрим охлаждение перегретого расплава, залитого в кокиль мгновенно. Информационную и познавательную ценность такого эксперимента читатель уже имел возможность оценить (см. с. 186—190).

Итак, пусть

$$\left.\begin{aligned}
&-\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}\frac{d\Theta_1}{d\tau}=\mathrm{Bi}_0\,(\Theta_1-\Theta_4);\quad \tau>0;\\
&\frac{1}{\mathrm{K}_{a_4}}\left(\frac{l_ф}{l_0}\right)^2\frac{d\Theta_4}{d\tau}=\mathrm{Bi}_0\,(\Theta_1-\Theta_4)-\mathrm{Bi}_c\Theta_4;\quad \tau>0;\\
&\Theta_1(0)=\Theta_{зал};\quad \Theta_4(0)=\Theta_ф.
\end{aligned}\right\}\qquad (39)$$

Эту краевую задачу, представленную системой линейных однородных дифференциальных уравнений в обыкновенных производных первого порядка с соответствующими начальными условиями, решить не очень трудно известными читателю методами. Изберем простейший: преобразуем систему (39) к одному уравнению

$$\frac{d^2\Theta_1}{d\tau^2}+\left[\frac{\mathrm{Bi}_0}{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}+\left(\frac{l_0}{l_ф}\right)^2\mathrm{K}_{a_4}\mathrm{Bi}_ф+\left(\frac{l_0}{l_ф}\right)^2\mathrm{K}_{a_4}\mathrm{Bi}_c\right]\frac{d\Theta_1}{d\tau}+$$

$$+\frac{\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_c}{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}\mathrm{K}_{a_4}\left(\frac{l_0}{l_ф}\right)^2\Theta_1=0,$$

но второго порядка; его решение выражается функцией

$$\Theta_1=A\mathrm{e}^{k_1\tau}+B\mathrm{e}^{k_2\tau},\qquad (40)$$

где k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения

$$k^2+pk+q=0,\qquad (41)$$

в котором

$$p=\mathrm{Bi}_0\left[\frac{1}{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}+\frac{\left(\frac{l_0}{l_ф}\right)}{\mathrm{K}_{c_4}\mathrm{K}_{\rho_4}}+\frac{\mathrm{Bi}_c}{\mathrm{Bi}_0}\mathrm{K}_{a_4}\left(\frac{l_0}{l_ф}\right)^2\right];$$

$$q=\frac{\mathrm{K}_{a_4}}{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_c\left(\frac{l_0}{l_ф}\right)^2.$$

Вторую искомую функцию Θ_4 получим из первого уравнения задачи (39) с учетом найденной Θ_1:

$$\Theta_4=A\left(1+k_1\frac{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}{\mathrm{Bi}_0}\right)\mathrm{e}^{k_1\tau}+B\left(1+k_2\frac{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}{\mathrm{Bi}_0}\right)\mathrm{e}^{k_2\tau};\qquad (42)$$

постоянные A и B определим по начальным условиям этой задачи:

$$A=\frac{\Theta_{зал}\left(1+k_2\frac{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}{\mathrm{Bi}_0}\right)-\theta_ф}{(k_2-k_1)\frac{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}{\mathrm{Bi}_0}};$$

$$B=-\frac{\Theta_{зал}\left(1+k_1\frac{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}{\mathrm{Bi}_0}\right)-\Theta_ф}{(k_2-k_1)\frac{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}{\mathrm{Bi}_0}}.\qquad (43)$$

На рис. 66 представлены результаты расчетов по (40) для $\frac{l_ф}{l_0} = 0{,}5$ (кривая *1*), $\frac{l_ф}{l_0} = 1{,}0$ (кривая *2*) и $\frac{l_ф}{l_0} = 2{,}0$ (кривая *3*) при $\mathrm{Bi}_0 = 0{,}1$; $\mathrm{Bi}_с = 0{,}1$; $\mathrm{Bi}_ф = 0{,}1$; $\Theta_{зал} = 1{,}15$; $\Theta_ф = 0{,}1$; $K_{c_1}K_{\rho_1} \approx 1$ и $K_{a_1} \approx 1$. Диапазон $0{,}5 \leqslant \frac{l_ф}{l_0} \leqslant 2{,}0$ охватывает чаще всего встречающиеся на практике соотношения толщин отливки и кокиля. Разница между кривыми на рис. 66 во время отвода теплоты перегрева от расплава невелика. При $\Theta_1 = 1{,}0$ она составляет $\pm 5\%$ относительно времени отвода теплоты перегрева от расплава в случае, когда $\frac{l_ф}{l_0} = 1{,}0$. Это обстоятельство приводит к мысли о возможности воспользоваться более простой математической моделью (32) для массивного кокиля.

Дело в том, что (40), имея в виду ее использование для практических расчетов, неудобна, так как требуется большая вычислительная работа по определению корней k_1 и k_2 из (41) и коэффициентов A и B из (43). Более простая модель (32) даст и более простые расчетные формулы. Действительно, для $\mathrm{Fo}_0 = 0$ и $\Theta_1(0) = \Theta_{зал}$

$$\Theta_1 = (\Theta_{зал} - \Theta_{к1}) \exp\left(-\frac{\mathrm{Bi}_{00}\tau}{K_{c_1}K_{\rho_1}}\right), \tag{44}$$

где

$$\mathrm{Bi}_{00} = \mathrm{Bi}_0 \frac{\Theta_{зал} - \Theta_ф}{\Theta_{зал} - \Theta_{к1}};$$

$$\Theta_{к1} = \frac{\Theta_{зал} - K_{c_4}K_{\rho_4}\Theta_ф \frac{l_ф}{l_0}}{1 + K_{c_4}K_{\rho_4} \frac{l_ф}{l_0}}. \tag{45}$$

В табл. 6 приведены результаты расчетов по (40) и (44) для тех же значений $\frac{l_ф}{l_0}$, $\Theta_{зал}$, $\Theta_ф$ и Bi_0, при которых построены кривые на рис. 66. Как и следовало ожидать, наибольшее расхождение наблюдается при $\frac{l_ф}{l_0} = 0{,}5$, наилучшее совпадение — при $\frac{l_ф}{l_0} = 2$. Однако за время отвода теплоты перегрева максимальная ошибка от такого приближения не превышает $\pm 6\%$ относительно времени охлаждения расплава в случае, когда $\frac{l_ф}{l_0} = 1{,}0$.

В табл. 6 для $\frac{l_ф}{l_0} = 2$ приведены результаты расчета по (44) при $\Theta_{к1} = \Theta_к$ из (28), рекомендованной А. И. Вейником. Расхождение с результатами расчетов по (40) невелико. Но это для массивного кокиля. Для кокиля с $\frac{l_ф}{l_0} = 1$ расхождение уже заметно

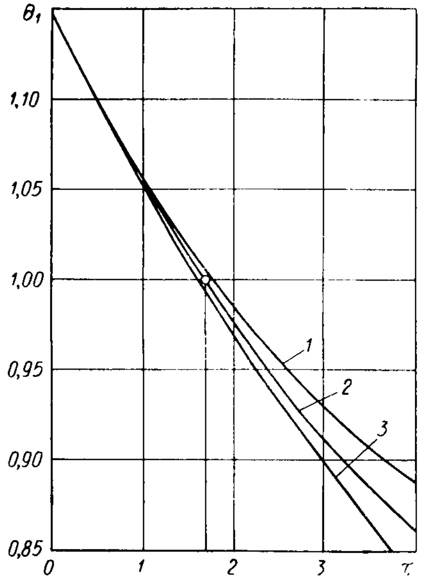


Рис. 66. Расчет охлаждения перегретого расплава по (40) при:

1) $\frac{l_ф}{l_0} = 0,5$; 2) $\frac{l_ф}{l_0} = 1$; 3) $\frac{l_ф}{l_0} = 2$

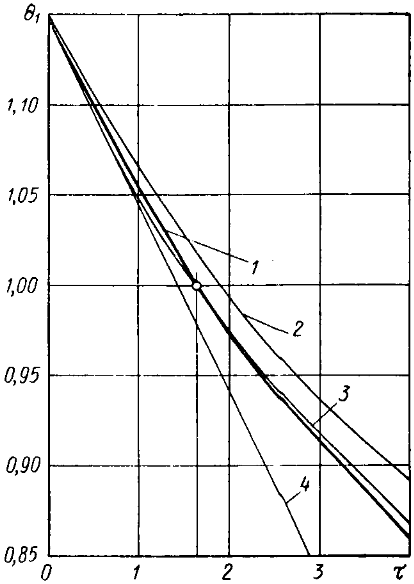


Рис. 67. Сопоставление результатов расчета охлаждения перегретого расплава при $\frac{l_ф}{l_0} = 1,0$:

1 — по (40); 2 — по (44) при $\Theta_к$ из (28); 3 — при $\Theta_к = \Theta_{к1}$ из (45); 4 — по (55)

(рис. 67, кривые *1* и *2*), а для тонкостенного кокиля с $\frac{l_ф}{l_0} = 0,5$ оно достигает 30% за время отвода теплоты перегрева. Следовательно, на стадии охлаждения перегретого расплава в (28) теплоту кристаллизации сплава учитывать нельзя: на этой стадии (см. кривую *3* на рис. 67) $\Theta_к = \Theta_{к1}$ из (45).

Учитывая изложенное, а также формальное сходство математических моделей (32) и (24) охлаждения перегретого расплава в массивном и тонкостенных кокилях, возможно еще более широкое обобщение.

Очевидно, что

$$\Theta_1 = (\Theta_{зал} - \tilde{\Theta}) \exp\left(-\frac{\tilde{\mathrm{Bi}}\tau}{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}}\right) + \tilde{\Theta}, \tag{46}$$

где

$$\tilde{\mathrm{Bi}} = \begin{cases} \mathrm{Bi}_0 \dfrac{\Theta_{зал} - \Theta_ф}{\Theta_{зал} - \Theta_{к1}}, & \text{если } 0,5 \leqslant \dfrac{l_ф}{l_0} \leqslant 10; \\ \dfrac{\mathrm{Bi}_0 \mathrm{Bi}_c}{\mathrm{Bi}_ф + \mathrm{Bi}_c}, & \text{если } \dfrac{l_ф}{l_0} < 0,5; \end{cases} \tag{47}$$

Таблица 6

Относительная температура Θ_1, рассчитанная по формулам (40) и (44)

τ	$\frac{l_ф}{l_0}=0,5$		$\frac{l_ф}{l_0}=1,0$		$\frac{l_ф}{l_0}=2,0$		
	(40)	(44)	(40)	(44)	(40)	(44	(44) при $\Theta_{K_1}=\Theta_K$ из (28)
0	1,150	1,150	1,150	1,150	1,150	1,150	1,150
0,5	1,095	1,101	1,098	1,093	1,100	1,100	1,101
1,0	1,054	1,059	1,055	1,048	1,052	1,052	1,055
1,5	1,017	1,023	1,012	1,009	1,009	1,008	1,002
2,0	0,984	0,912	0,974	0,975	0,968	0,969	0,977
4,0	0,882	0,905	0,861	0,868	0,835	0,830	0,839

$$\tilde{\Theta}=\begin{cases}\Theta_{к1}, & \text{если } 0,5\leqslant\frac{l_ф}{l_0}\leqslant 10;\\ 0, & \text{если } \frac{l_ф}{l_0}<0,5,\end{cases}\qquad(48)$$

так как при $\frac{l_ф}{l_0}>10$ металлическую форму следует рассматривать как массивную неохлаждаемую (см. с. 129), для которой должна быть другая математическая модель нагревания (см. с. 265—266).

Математический эксперимент закончен. Главный его результат заключается в формуле (46). Она является решением дифференциального уравнения, аналогичного дифференциальному уравнению в математической модели (32). Поэтому для расчета продолжительности охлаждения перегретого расплава, залитого в кокиль, допустимо воспользоваться следующей моделью:

$$-K_{c_1}K_{\rho_1}\frac{d\Theta_1}{d\tau}=\widetilde{Bi}\,(\Theta_1-\tilde{\Theta});\quad \tau>Fo_0;\qquad(49)$$

$$\Theta_1(Fo_0)\equiv\Theta_н=\mathrm{const},$$

если, как и прежде, принять, что температура $\Theta_н$ расплава в момент Fo_0 окончания заполнения формы одинакова во всем залитом объеме и больше температуры Θ_L ликвидуса данного сплава. Получим

$$\Theta_1=(\Theta_н-\tilde{\Theta})\exp\left[-\frac{\widetilde{Bi}\,(\tau-Fo_0)}{K_{c_1}K_{\rho_1}}\right]+\tilde{\Theta},\qquad(50)$$

откуда при $\Theta_1=\Theta_L$

$$\tau_1=\frac{K_{c_1}K_{\rho_1}}{\widetilde{Bi}}\ln\left(\frac{\Theta_н-\tilde{\Theta}}{1-\tilde{\Theta}}\right)+Fo_0\qquad(51)$$

или в первоначальных переменных

$$t_1 = \frac{\Re_0}{\tilde{\beta}} c_1\rho_1 \ln\left(\frac{T_н - \tilde{T}}{T_L - \tilde{T}}\right) + t_{зал}, \qquad (52)$$

где

$$\tilde{T} = \begin{cases} \dfrac{(T_{зал} - T_с) - \dfrac{c_4\rho_4}{c_3\rho_3}(T_ф - T_с)\dfrac{V_ф}{V_0}}{1 + \dfrac{c_4\rho_4}{c_3\rho_3}\dfrac{V_ф}{V_0}} + T_с, & \text{если } 0{,}5 \leqslant \dfrac{l_ф}{r_0} \leqslant 10; \\ T_с, & \text{если } \dfrac{l_ф}{r_0} < 0{,}5; \end{cases}$$

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} \beta\dfrac{T_{зал} - T_ф}{T_{зал} - \tilde{T}}, & \text{если } 0{,}5 \leqslant \dfrac{l_ф}{r_0} \leqslant 10; \\ \dfrac{\beta\alpha_с}{\beta + \alpha_с}, & \text{если } \dfrac{l_ф}{r_0} < 0{,}5. \end{cases}$$

В формуле (52) введен приведенный размер $\Re_0$ и характерный размер r_0 отливки для учета влияния ее конфигурации на продолжительность охлаждения расплава, залитого в кокиль. Этот шаг оправдан исследованием, которое было выполнено при анализе охлаждения неограниченной плиты для граничных условий III рода (см. с. 76—80). Очевидно, что до тех пор, пока $\tilde{T}$ остается постоянной величиной, а $\mathrm{Bi}_0 < 0{,}1$, приведенный размер отливки однозначно характеризует ее конфигурацию. Однако более подробно обсудим это положение при исследовании затвердевания расплава, залитого в кокиль.

78. ОХЛАЖДЕНИЕ ПОТОКА ПЕРЕГРЕТОГО РАСПЛАВА В КОКИЛЕ

Рассмотрим стационарный поток перегретого расплава при турбулентном режиме его течения в плоском горизонтальном щелевом канале, образованном двумя половинками кокиля.

Здесь, так же как и при анализе течения перегретого расплава в каналах песчаной формы (см. с. 191—193), можно было бы привести экспериментальное обоснование того, что режим течения расплава в каналах кокиля турбулентный, а поток в первом приближении можно принять стационарным. Однако поручаем это обоснование читателю в качестве первого упражнения к этой главе. Само собой разумеется, что от читателя не требуется проведения специального экспериментального исследования (хотя оно было бы чрезвычайно полезным!). Необходимое обоснование следует сделать на основе тех опытных данных, которые содержатся в литературе, рекомендованной к данному разделу учебного пособия.

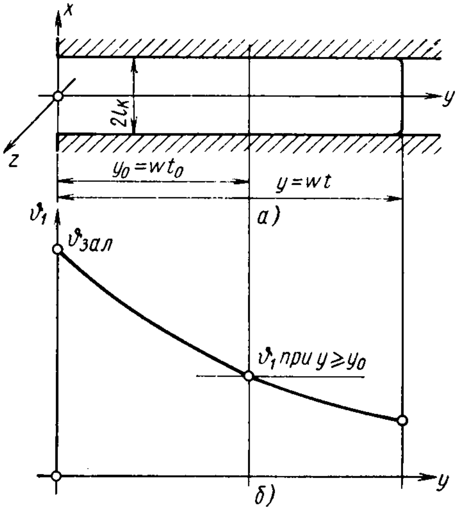


Рис. 68. Схема к анализу охлаждения потока перегретого расплава при его течении в горизонтальном канале:

а — щелевой канал; *б* — распределение температуры по длине потока в соответствии с (54)

Итак, пусть плоский щелевой канал в кокиле ориентирован относительно системы координат в соответствии с рис. 68, *а*; при этом высота щели равна $2l_к$ и намного меньше, чем ее размер в направлении оси z. Пусть расплав перемещается с постоянной скоростью w вдоль положительного направления оси y. Тогда упрощенную математическую модель охлаждения стационарного потока расплава при турбулентном режиме его течения можно представить следующим дифференциальным уравнением и соответствующим начальным условием:

$$\left.\begin{aligned} &-c_1\rho_1 l_к \frac{d\vartheta_1}{dt_0} = \tilde{\beta}\,(\vartheta_1 - \tilde{\vartheta}); \quad t_0 > 0; \\ &\vartheta_1(t_0) = \vartheta_{зал} = \text{const}, \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

где t_0 — время течения расплава до рассматриваемого сечения канала y_0.

Из (53) следует, что

$$\vartheta_1 = (\vartheta_{зал} - \tilde{\vartheta})\exp\left(-\frac{\tilde{\beta}\,t_0}{c_1\rho_1 l_к}\right) + \tilde{\vartheta}. \qquad (54)$$

На рис. 68, *б* приведен график, соответствующий (54). Если сравнить эту схему с изображенной на рис. 38, *б*, то легко установить разницу в процессах охлаждения потока расплава в каналах кокиля и песчаной формы: в кокиле температура потока в любом данном сечении y_0 канала остается неизменной во все время течения расплава, в песчаной форме она увеличивается. Последнее уже было объяснено тем, что в песчаной форме по мере ее прогрева расплавом, текущим мимо рассматриваемого сечения канала, плотность теплового потока от расплава уменьшается. В кокиле плотность теплового потока от расплава остается неизменной до тех пор, пока $\tilde{\vartheta}$ сохраняется постоянной. Выше показано, что во время охлаждения перегретого расплава величина $\tilde{\vartheta} \equiv \text{const}$.

Убедиться в справедливости схемы на рис. 68, *б* и, следовательно, формулы (54) можно, наблюдая за тем, как «уходит» расплав по разъему кокиля во время его заливки. Этот дефект заполнения металлических форм стал весьма редким, так как все сопрягающиеся части формы сейчас изготовляют с большой точностью. Однако в тех редких случаях, когда возникает коробление или между половинками кокиля попадает остаток от заусенца отливки, расплав уходит, но не так, как в песчаной форме: в зазоре по разъему кокиля расплав течет короткое время и быстро затвердевает. С помощью (54) это легко объяснить. Действительно, если протяженность зазора по разъему кокиля y_0, скорость течения расплава w и его остановка происходит при температуре $\vartheta_{\text{ост}}$ на носике потока, то расплав перестает уходить из кокиля в момент времени t_1^*, когда температура ϑ_1 расплава, залитого в форму, будет равна [1]

$$\vartheta_1^* = (\vartheta_{\text{ост}} - \tilde{\vartheta}) \exp\left(+ \frac{\tilde{\beta} y_0}{c_1 \rho_1 l_{\text{к}} w}\right) + \tilde{\vartheta};$$

из (52) при $\vartheta_1 = \vartheta_1^*$

$$t_1^* = \frac{c_1 \rho_1 \mathfrak{R}_0}{\tilde{\beta}} \ln\left(\frac{\vartheta_{\text{в}} - \tilde{\vartheta}}{\vartheta_1^* - \tilde{\vartheta}}\right) + t_{\text{зал}}.$$

Таким образом, формула [54] *получила экспериментальное подтверждение.*

Конечно, и здесь, так же как и при аналогичном исследовании для литья в песчаные формы, возможно привести результаты специальных опытов. Однако читатель уже неоднократно убеждался в том, что при правильной формулировке математической модели, основанной на широком обобщении других опытов (в данном случае это опыты, приведшие к закону теплоотдачи Ньютона и к модели малой интенсивности охлаждения расплава в кокиле), специальные эксперименты, подтверждающие результаты анализа этой математической модели, не требуются. В данном случае ценным является и то наблюдение за уходом расплава из формы, о котором только что шла речь. Такое наблюдение есть пассивный качественный эксперимент, пренебрегать которым нет оснований. Достаточно вспомнить аналогичный анализ ухода расплава из песчаной формы (см. с. 197—198).

Для практического использования формулу (54) можно упростить. Если экспоненту в правой части формулы разложить в степенной ряд и учесть только два первых его члена, то

$$\vartheta_1 = (\vartheta_{\text{зал}} - \tilde{\vartheta}) \left(1 - \frac{\tilde{\beta} t_0}{c_1 \rho_1 \mathfrak{R}_{\text{к}}}\right) + \tilde{\vartheta}. \tag{55}$$

---

[1] Читателю известно, что поток расплава литейных сплавов останавливается при температуре, чуть меньшей ϑ_L. Согласно гипотезе Ю. А. Нехендзи и А. М. Самарина о нулевой жидкотекучести, $\vartheta_{\text{ост}} = 0{,}8\,(\vartheta_L - \vartheta_S) + \vartheta_S = 0{,}8\vartheta_L + 0{,}20\vartheta_S$.

На рис. 67 построен график по формуле (55) в безразмерных переменных. Он выражается прямой, которая при $\Theta_1 \geqslant 1{,}05$ мало отклоняется от кривой *3*, рассчитанной по (40).

Читатель, конечно, уже обратил внимание на то, что без всякого объяснения в (55) введен приведенный размер $\Re_к$ канала для учета его реальной конфигурации, отличной от плоской щели. Необходимое обоснование этой замены будет приведено в дальнейшем (см. с. 295—296). А сейчас займемся расчетом заполнения расплавом кокиля.

79. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ЗАПОЛНЕНИЯ КОКИЛЯ

Основной задачей расчета является определение продолжительности $t_{зал}$ заливки кокиля расплавом.

В повседневной практике литья, например, чугуна в кокиль используют известную эмпирическую формулу, построенную так же, как и для случая литья в песчаные формы:

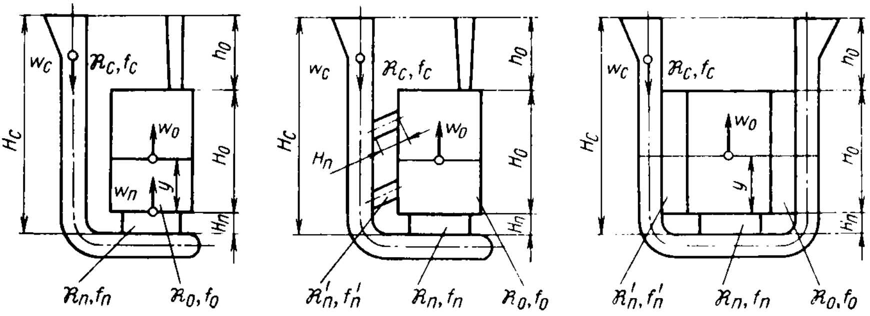
$$t_{зал} = A_к G_0^{m_к}, \qquad (56)$$

где $A_к$ и $m_к$ — постоянные величины, числовые значения которых находятся в широких пределах: $A_к = 4{,}5 \div 12{,}5$ и $m_к = 0{,}25 \div 0{,}40$, в зависимости от способа и места подвода расплава в полость формы.

Имея в виду положительный опыт приближенного теплового расчета $t_{зал}$ песчаной формы (см. с. 200—206), выполним такой же расчет для кокиля с литниковой системой заданной конструкции.

В качестве примера рассмотрим сифонную заливку (рис. 69, *а*). Пусть $t_с$ — продолжительность течения расплава по стояку, $t_п$ — по питателю и $t_ф$ — в полости формы. Тогда, согласно (55), избыточная температура расплава на входе в питатель

$$\vartheta_с = (\vartheta_{зал} - \tilde{\vartheta})\left(1 - \frac{\tilde{\beta} t_с}{c_1 \rho_1 \Re_с}\right) + \tilde{\vartheta},$$



а)　б)　в)

Рис. 69. Схема литниковых систем в кокилях:
а — сифонная; *б* — этажная; *в* — щелевая

если, разумеется, предположить, что (55) справедлива и для вертикального канала. Эта температура будет оставаться неизменной во время заполнения кокиля при условии, конечно, что $\vartheta_{зал}$ в течение $t_{зал}$ сохраняется постоянной.

Аналогично, избыточная температура на выходе из питателя

$$\vartheta_п=(\vartheta_с-\tilde{\vartheta})\left(1-\frac{\tilde{\beta}t_п}{c_1\rho_1\mathfrak{R}_п}\right)+\tilde{\vartheta}$$

будет неизменной при сохранении того же условия.

Очевидно, что к концу заполнения кокиля температура расплава в верхней части полости формы

$$\vartheta_к=(\vartheta-\tilde{\vartheta})\left(1-\frac{\tilde{\beta}t_ф}{c_1\rho_1\mathfrak{R}_0}\right)+\tilde{\vartheta}.$$

Если при конструировании литниковой системы поставить задачу обеспечения минимальной потери в ней теплоты расплавом, то согласно полученным формулам решение этой задачи возможно за счет увеличения приведенного размера $\mathfrak{R}_с$ стояка, так как $t_с$ не зависит от конструктора сифонной системы, и за счет уменьшения $t_п$, так как $\mathfrak{R}_п$ не может быть больше приведенного размера $\mathfrak{R}_0$ отливки; уменьшение же времени течения расплава по питателю достигается сокращением его протяженности $H_п$. Для такой конструкции литниковой системы, как это следует из полученных формул, $\vartheta_{зал}\approx\vartheta_п$, т. е.

$$\vartheta_{зал}-\vartheta_к=(\vartheta_{зал}-\tilde{\vartheta})\frac{\tilde{\beta}t_ф}{c_1\rho_1\mathfrak{R}_0},$$

где $t_ф\approx t_{зал}$, ибо $t_с\ll t_ф$ и $t_п\ll t_ф$.

Если условиться, что в момент окончания заполнения формы температура $\vartheta_к\approx\vartheta_L$, то

$$t_{зал}=\frac{c_1\rho_1(\vartheta_{зал}-\vartheta_L)}{\tilde{\beta}(\vartheta_{зал}-\tilde{\vartheta})}\mathfrak{R}_0, \qquad (57)$$

или с учетом (70-III)

$$t_{зал}=D\frac{c_1\rho_1}{\tilde{\beta}}\left(\frac{\Theta_{зал}-1}{\Theta_{зал}-\tilde{\Theta}}\right)G_0^{m_2}. \qquad (58)$$

что совпадает с (56) при $A_к=D\frac{c_1\rho_1}{\tilde{\beta}}\left(\frac{\Theta_{зал}-1}{\Theta_{зал}-\tilde{\Theta}}\right)$.

При использовании m_2 из (70-III) расхождение в показателях степени G_0 в (56) и (58) будет заметным. Объясняется это тем, что (70-III) получена для машиностроительных отливок, изготовляемых в песчаных формах, для которых наибольшее значение $m_2=0,25$ (толстостенные отливки). В кокиль в большинстве своем отливаются еще более толстостенные чугунные детали, для которых среднее значение m_2 близко к $^1/_3$. При необходимости можно установить и для кокильных отливок зависимость типа (70-III). Но и такого сопоставления теоретической формулы (57) с эмпирической (56) достаточно, чтобы заключить об их адекватности[1]. Однако все это справедливо при условии минимальных тепловых потерь потока расплава в литниковой системе.

Как уже было отмечено, уменьшить потери теплоты в сифонной литниковой системе можно за счет увеличения массивности стояка и сокращения протяженности питателя. Из технологических дисциплин читателю известно и другое. Например, использование огнеупорных обмазок (уменьшение β) специально для литниковых систем, и особенно применение этажных и щелевых питателей (рис. 69, *б* и *в*).

80. УПРАЖНЕНИЯ

Дальнейшее изложение материала данной главы по своему существу должно повторять гл. 12. Поэтому предлагаем ряд упражнений, выполнив которые, читатель, выявит специфику расчета заполнения кокиля расплавом.

Упражнение 1. На основе анализа рекомендуемой к этой главе литературы дать экспериментальное обоснование принятым в § 78 допущениям того, что режим течения перегретого расплава в кокиле турбулентный, а поток расплава в горизонтальном канале — стационарный.

Упражнение 2. Определить температуру на носике потока перегретого расплава в горизонтальном канале для комбинированной формы, т. е. в канале, образованном кокилем и песчаным стержнем.

Упражнение 3. Доказать адекватность формулы (57) эмпирическим формулам и номограммам, рекомендуемым в справочной литературе для определения $t_{зал}$ при литье в кокиль алюминиевых, магниевых и медных сплавов.

Упражнение 4. Оценить продолжительность заполнения кокиля для коробчатой отливки при условии, что ее внутренняя поверхность образуется песчаным стержнем.

Упражнение 5. Найти минимальный радиус кривизны стержня, при котором математическую модель типа (49) можно использовать для расчета охлаждения перегретого расплава в кокилях с металлическими стержнями.

Глава 18. ЗАТВЕРДЕВАНИЕ РАСПЛАВА ЛИТЕЙНЫХ СПЛАВОВ И ОХЛАЖДЕНИЕ ОТЛИВКИ

Расчет продолжительности затвердевания и охлаждения отливки

Изучив предыдущую главу, читатель имел случай убедиться в том, что ход анализа процесса охлаждения перегретого расплава в кокиле аналогичен выбранному для случая литья в песчаные формы. Анализ процессов затвердевания расплава литейных

---

[1] Читателю предлагается самостоятельно доказать адекватность формулы (57) тем эмпирическим формулам и номограммам, с помощью которых на практике рассчитывают $t_{зал}$ при литье алюминиевых и магниевых сплавов в кокиль.

сплавов и охлаждения отливки будет также аналогичным приведенному в гл. 13 и 14. Отличаться будут только конечные результаты — расчетные формулы.

В этой связи, *анализ затвердевания и охлаждения отливки в кокиле поручаем читателю выполнить самостоятельно.* В последующих параграфах приводятся математические модели и необходимые указания, и, лишь в ряде случаев, — конечные расчетные формулы для самоконтроля.

81. ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ. РАСЧЕТ СКОРОСТЕЙ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Исследование кинетики затвердевания расплава литейных сплавов необходимо выполнить на основе упрощенных математических моделей (20), (25) и (33) для сплавов, кристаллизующихся в интервале температур T_L—T_S (или T_L—T_E), соответственно в кокиле, тонкостенном кокиле и массивном кокиле, и на основе (21), (26) и (34) для эвтектик в тех же случаях. Однако, используя предложение А. И. Вейника об оценке средней калориметрической температуры $T_к$ системы отливка—форма, эти математические модели возможно совместить так же, как это сделано в § 77: в результате исследования кинетики охлаждения перегретого расплава нам удалось три модели (19), (24) и (32) выразить одной — (49).

Затвердевание расплава твердого раствора

Упрощенные математические модели (20), (25) и (33) допустимо представить одной

$$-\mathrm{K}_{c_2}\mathrm{K}_{\rho_2}\frac{d\Theta_2}{d\tau}+\mathscr{L}_2\frac{d\Psi}{d\tau}=\tilde{\mathrm{Bi}}\,(\Theta_2-\tilde{\Theta});\quad \tau>\mathrm{Fo}_1; \tag{59}$$

$$\Theta_2(\mathrm{Fo}_1)=1;\quad \Psi(\mathrm{Fo}_1)=0;$$

где

$$\tilde{\mathrm{Bi}}=\begin{cases}\mathrm{Bi}_0\dfrac{\Theta_{зал}-\Theta_ф}{\Theta_{зал}-\Theta_к}, & \text{если } 0{,}5\leqslant\dfrac{l_ф}{l_0}\leqslant 10;\\[2ex] \dfrac{\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_c}{\mathrm{Bi}_0+\mathrm{Bi}_c}, & \text{если } \dfrac{l_ф}{l_0}<0{,}5;\end{cases} \tag{60}$$

$$\tilde{\Theta}=\begin{cases}\Theta_к, & \text{если } 0{,}5\leqslant\dfrac{l_ф}{l_0}\leqslant 10;\\[2ex] 0, & \text{если } \dfrac{l_ф}{l_0}<0{,}5;\end{cases} \tag{61}$$

$\Theta_к$ следует рассчитывать по (28), т. е. с *учетом выделения теплоты кристаллизации.*

В связи с тем что функция $\Psi(t)$ для реальных сплавов неизвестна, в уравнение (59) следует ввести спектральную эффективную теплоту кристаллизации сплава

$$s(T_2) = c_2 - \frac{\rho_3}{\rho_2} L_2 \mu (T_2).$$

Тогда (59) примет вид

$$-S \mathrm{K}_{\rho_2} \frac{d\Theta_2}{d\tau} = \tilde{\mathrm{Bi}} (\Theta_2 - \tilde{\Theta}); \quad \tau > \mathrm{Fo}_1, \tag{62}$$

$$\Theta_2 (\mathrm{Fo}_1) = 1,$$

где, согласно (127-III),

$$S = 1 + m\mathscr{L}_2 \frac{(\Theta_2 - \Theta_S)^{m-1}}{(1 - \Theta_S)^m}; \quad m \geqslant 1, \tag{63}$$

если функцию $\Psi(T_2)$ аппроксимировать с помощью (126-III).

С помощью модели (62), учитывая (60), (61) и (63), можно исследовать кинетику затвердевания расплава твердого раствора в кокиле. Например, при $m = 1$ связь количества твердой фазы со временем процесса объемного затвердевания сплава в интервале T_L—T_S выражается следующей зависимостью:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1 - \tilde{\Theta}}{1 - \Theta_S} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\tilde{\mathrm{Bi}} (\tau - \mathrm{Fo}_1)}{\mathrm{K}_{\rho_2} \left(1 + \frac{\mathscr{L}_2}{1 - \Theta_S} \right)} \right] \right\}; \tag{64}$$

для малых значений интервала кристаллизации

$$\frac{V}{V_0} \approx \frac{\tilde{\mathrm{Bi}} (1 - \tilde{\Theta}) (\tau - \mathrm{Fo}_1)}{\mathrm{K}_{\rho_2} (\mathscr{L}_2 + 1 - \Theta_S)} \tag{65}$$

и при $T_L = T_S = T_{\text{кр}}$, т. е. для чистых металлов,

$$\frac{V}{V_0} \approx \frac{\tilde{\mathrm{Bi}}}{\mathscr{L} \mathrm{K}_{\rho_2}} (1 - \tilde{\Theta}) (\tau - \mathrm{Fo}_1). \tag{66}$$

При объемном затвердевании расплава в кокиле возможно вычислить только объемную скорость затвердевания отливки

$$U_э = \frac{\tilde{\mathrm{Bi}} (1 - \tilde{\Theta}_L) a_3}{\mathrm{K}_{\rho_2} (\mathscr{L}_2 + 1 - \Theta_S)\, l_0} \exp \left[- \frac{\tilde{\mathrm{Bi}} (\tau - \mathrm{Fo}_1)}{\mathrm{K}_{\rho_2} \left(1 + \frac{\mathscr{L}_2}{1 - \Theta_S} \right)} \right] \tag{67}$$

и т. д.

В случаях, когда аппроксимация (63) невозможна, целесообразно ввести эффективную удельную теплоту кристаллизации сплава

$$s_{эф} = \int\limits_{T_S}^{T_L} s(T_2)\, dT_2;$$

тогда

$$-\frac{S_{эф}}{1-\Theta_S}\mathrm{K}_{\rho_2}\frac{d\Theta_2}{d\tau}=\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{i}\,(\Theta_2-\tilde{\Theta});\ \tau>\mathrm{Fo}_1; \tag{68}$$

$$\Theta_2(\mathrm{Fo}_1)=1,$$

но в этом виде уравнение (64) пригодно лишь при расчете времени t_2 затвердевания сплава в интервале T_L—T_S (или T_L—T_E):

$$\tau_2=\frac{S_{эф}\mathrm{K}_{\rho_2}}{(1-\Theta_S)}\ln\left(\frac{1-\tilde{\Theta}}{\Theta_S-\tilde{\Theta}}\right)+\mathrm{Fo}_1. \tag{69}$$

Числовые значения $s_{эф}$ для ряда сплавов приведены в приложении VI.

Конечно, для весьма приближенного исследования кинетики затвердевания можно использовать и модель (68); получим

$$\frac{V}{V_0}=\frac{1-\tilde{\Theta}}{1-\Theta_S}\left\{1-\exp\left[-\frac{\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{i}\,(1-\Theta_S)(\tau-\mathrm{Fo}_1)}{\mathrm{K}_{\rho_2}S_{эф}}\right]\right\} \tag{70}$$

и т. д.

Все полученные уравнения и формулы пригодны для исследования кинетики затвердевания плоских отливок. Но их можно использовать и для отливок произвольной конфигурации, если критерий $\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{i}$ умножить на отношение $\frac{l_0}{\mathfrak{R}_0}$ ($\mathfrak{R}_0$ — приведенный размер отливки).

Затвердевание расплава эвтектики

Упрощенные математические модели (21), (26) и (34) допустимо представить одной:

$$\Psi_E\mathscr{L}_E\frac{d\chi_E}{d\tau}=\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{i}\,(\Theta_E-\tilde{\Theta});\quad \tau>\mathrm{Fo}_2; \tag{71}$$

$$\chi_E(\mathrm{Fo}_2)=1,$$

где $\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{i}$ и $\tilde{\Theta}$ выражены соотношениями (60) и (61).

При затвердевании только эвтектики, т. е. при $\Psi_E=1$ и $\mathrm{Fo}_2=\mathrm{Fo}_1$,

$$\xi_э=\frac{\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{i}\,l_0}{\mathscr{L}_E}(1-\tilde{\Theta})(\tau-\mathrm{Fo}_1), \tag{72}$$

так как $1-\varkappa_E=\frac{\xi_э}{l_0}$. Связь между $\xi_э$ и ξ для отливок в виде, бесконечного цилиндра и шара выражается формулой (91-III), поэтому для таких отливок

$$\frac{\xi}{l_0}=\pm1\mp\left[1\mp\frac{\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{i}}{\mathscr{L}_E}(1-\tilde{\Theta})(k+1)(\tau-\mathrm{Fo}_1)\right]^{\frac{1}{k+1}}. \tag{73}$$

Соответственно скорость затвердевания отливки *объемная*:

$$U_э = \frac{\tilde{\mathrm{Bi}} a_з}{\mathscr{L}_E l_0}(1 - \tilde{\Theta}) \tag{74}$$

и *линейная*:

$$U = \frac{\tilde{\mathrm{Bi}} a_з}{\mathscr{L}_E l_0}(1 - \tilde{\Theta}) \left[1 \mp \frac{\tilde{\mathrm{Bi}}}{\mathscr{L}_E}(k + 1)(1 - \tilde{\Theta})(\tau - \mathrm{Fo}_1)\right]^{-\frac{k}{k+1}}. \tag{75}$$

Распределение линейной скорости затвердевания по сечению тела отливки выражается формулой (96-III), в которой $U_э$ следует взять из (74).

Продолжительность затвердевания эвтектического сплава в кокиле

$$\tau_з = \frac{\mathscr{L}_E \mathfrak{R}_0}{\tilde{\mathrm{Bi}} l_0 (1 - \tilde{\Theta})} + \mathrm{Fo}_1. \tag{76}$$

Эта формула пригодна для отливок любой конфигурации.

Затвердевание угловых сопряжений

Расчет профиля твердой корки при затвердевании *внешнего* угла отливки из эвтектических сплавов допустим по формуле (109-III), полученной при конформном отображении границы контакта угла отливки и формы из комплексной плоскости A на комплексную плоскость B (см. рис. 47), с помощью отображающей функции $w = mz^2$. Пределы изменения величины p в (109-III) необходимо найти из эксперимента. Однако допустимость использования (109-III) целиком зависит от того, насколько возможно (без больших погрешностей) пренебречь изменением температуры поверхности отливки во время роста корки при квазистационарном представлении процесса теплопроводности в твердой корке для граничных условий III рода. Очевидно, что возможность пренебрегать изменением температуры поверхности затвердевающей отливки определяется интенсивностью теплоотдачи в форму через слой кокильной краски: чем меньше Bi_0, тем больше оснований для использования формулы (109-III). Эту предельную величину Bi_0 и требуется установить количественно.

Расчет профиля твердой корки при затвердевании *внутреннего* угла отливки целесообразно выполнить аналогично тому, как

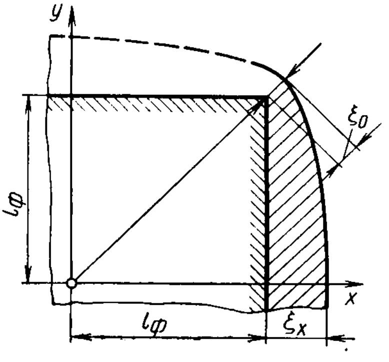


Рис. 70. Схема профиля твердой корки, затвердевающей у внешнего угла кокиля

это сделано для литья в песчаные формы, но с использованием решения задачи (77-I). Рассмотрим затвердевание расплава эвтектики около призматического неограниченного стержня размером $2l_ф \times 2l_ф$ (рис. 70). Тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_4}{\partial t} = a_4\left(\frac{\partial^3 T_4}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2}\right);\ t > 0;\\
&-l_ф < x < +l_ф;\quad -l_ф < y < +l_ф;\\
&T_4(x, y, 0) = T_ф;\\
&\mp \lambda_4 \frac{\partial T_4(\pm l_ф, y, t)}{\partial y} = \beta_ф[\tilde{T} - T_4(\pm l_ф, y, t)];\\
&\mp \lambda_4 \frac{\partial T_4(x, \pm l_ф, t)}{\partial y} = \beta_ф[\tilde{T} - T_4(x \pm l_ф, t)];
\end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mp L_E \rho_3 \frac{d\varkappa_E}{dt} = \beta_ф[\tilde{T} - T_4(x_0, y_0, t)] = \beta_0(T_E - \tilde{T});\\
&\pm \varkappa_E(x_0, y_0, 0) = \pm l_ф,
\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

т. е. стержень прогревается средой с температурой $\tilde{T} > T_ф$ и коэффициентом теплоотдачи $\beta_ф$; стержень расположен симметрично относительно координатных осей x и y и так, что его стороны параллельны этим осям (рис. 70).

Читателям, выполнившим *упражнение 1* в разделе I, ясно, что решением задачи (77) будет произведение решений задачи (77-I) для неограниченных плит при их взаимно перпендикулярном расположении в рассматриваемой координатной системе. Так как $\mathrm{Bi}_ф \ll 1$ и, следовательно, $\mathrm{Bi}_{ф0} \ll 1$, то в (93-I) можно принять $n = 1$, т. е.

$$\frac{T(x, y, t) - T_ф}{\tilde{T} - T_ф} \approx 1 - D_1^2 \cos\mu_1 \frac{x}{l_ф} \cos\mu_1 \frac{y}{l_ф}\, e^{-2\mu_1\tau}.$$

С помощью уравнения (78) при $x = +l_ф$ и $y_0 = y$ найдем

$$L_E\rho_3\, d\varkappa_E(y, t) = \beta_ф(\tilde{T} - T_ф) D_1^2 \cos\mu_1 \cos\mu_1 \frac{y}{l_ф}\, e^{-2\mu_1\tau}\, dt$$

и

$$\xi_x = \frac{\beta_ф l_ф^2 D_1^2}{2\mu_1 a_4 L_E \rho_3}(\tilde{T} - T_ф)\cos\mu_1 \cos\mu_1 \frac{y}{l_ф}(1 - e^{-2\mu_1\tau}). \qquad (79)$$

Толщину ξ_0 корки вдоль биссектрисы угла найдем при $y = +l_ф$:

$$\xi_0 \approx \frac{\beta_ф l_ф^2 D_1^2}{2\mu_1 a_4 L_E \rho_3}(\tilde{T} - T_ф)\cos^2\mu_1 (1 - e^{-2\mu_1\tau}). \qquad (80)$$

Пусть $\mathrm{Bi}_{ф0} = 0,1$; тогда $\mu_1 = 0,311$, $\cos^2 \mu_1 \approx 0,9$, $D_1^2 \approx 1,03$ и

$$\xi_0 \approx \frac{1,50\beta_ф l_ф^2}{L_E \rho_з a_4} (\tilde{T} - T_ф)\left[1 - \exp\left(-\frac{0,622 a_4 t}{l_ф^2}\right)\right].$$

При этом для малых значений времени t

$$\xi_0 \approx \frac{0,93\beta_ф}{L_E \rho_з} (\tilde{T} - T_ф) t,$$

или с учетом (29), если расплав залит без перегрева,

$$\xi_0 \approx \frac{0,93\beta_0}{L_E \rho_з} (T_E - \tilde{T}) t,$$

т. е. в начале затвердевания корка у острого внутреннего угла растет так же, как и у поверхности кокиля плоской отливки, далее, с увеличением времени затвердевания, у острого угла замедляется (рис. 70). *В этом отличие формирования отливки в кокиле по сравнению с песчаной формой.*

Затвердевание внутреннего угла с галтелью и при литье в кокиль допустимо оценивать по приближенной формуле (103-III).

82. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ОТЛИВКИ НА КИНЕТИКУ И ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ЕЕ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

До сих пор влияние конфигурации литой детали на ход процесса охлаждения перегретого расплава и его дальнейшее затвердевание в кокиле учитывали приведенным размером отливки. Однако на примере аналогичного исследования для литья в песчаные формы было установлено, что приведенный размер отливки является далеко недостаточной характеристикой ее конфигурации (см. § 56, 61). Поэтому необходим специальный анализ условий, при которых правило Н. И. Хворинова допустимо использовать для расчета затвердевания отливок в кокиле.

Учет конфигурации отливки ее приведенным размером

При литье в кокиль и *охлаждение отливки, и нагревание формы происходит с весьма малой интенсивностью.* Это означает возможность пренебрегать неоднородностью температурных полей и в отливке, и в форме, а следовательно, использовать приведенный размер отливки и кокиля для учета их конфигураций в исследовании кинетики и в расчетах продолжительности затвердевания отливок в кокиле. Во время исследования приближенного решения задачи (65-I) в § 22 (см. с. 62) впервые обратили внимание на то, что при охлаждении тела с малой интенсивностью отношение $\frac{V_0}{F_0}$

характеризует его конфигурацию. Второй раз к этому вопросу вернулись позже, в § 45 на с. 164—165, где шла речь именно о приведенном размере отливки как о характеристике ее конфигурации в условиях весьма малой интенсивности охлаждения.

Более обстоятельный анализ можно выполнить с помощью математической модели (1)—(7), записав ее на основе обобщенного дифференциального уравнения теплопроводности (30-I) или с помощью математической модели, которую читатель построил при выполнении упражнения 6 к разделу II.

Расчет времени затвердевания отливки

Продолжительность затвердевания отливок в общем виде, т. е. отливок из сплавов, содержащих эвтектику, нетрудно рассчитать с помощью математических моделей (49), (59) или (72) и (71) при $t_{зал} = 0$ и $\Psi_E < 1$.

Получим

$$\tau_4 = \frac{\Re_0}{\tilde{\mathrm{Bi}}\, l_0}\left[\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}\ln\left(\frac{\Theta_{зал} - \tilde\Theta}{1 - \tilde\Theta}\right) + \right.$$

$$\left. + (1 - \Psi_E)\frac{\mathrm{K}_{\rho_2}(\mathscr{L}_2 + 1 - \Theta_E)}{(1 - \Theta_E)}\ln\left(\frac{1 - \tilde\Theta}{\Theta_E - \tilde\Theta}\right) + \Psi_E\frac{\mathscr{L}_E\Theta_E}{\Theta_E - \tilde\Theta}\right], \quad (81)$$

если $s_{эф}$ определена с помощью (63), или

$$\tau_3 = \frac{\mathrm{K}_{c_1}\mathrm{K}_{\rho_1}\Re_0}{\tilde{\mathrm{Bi}}\, l_0}\ln\left(\frac{\Theta_{зал} - \tilde\Theta}{1 - \tilde\Theta}\right) + \frac{S_{эф}\mathrm{K}_{\rho_2}\Re_0}{\tilde{\mathrm{Bi}}\,(1 - \Theta_E)\, l_0}\ln\left(\frac{1 - \tilde\Theta}{\Theta_E - \tilde\Theta}\right), \quad (82)$$

если $s_{эф}$ определена экспериментально (см. приложение VI).

83. РАСЧЕТ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ОХЛАЖДЕНИЯ ОТЛИВКИ

Достоверная оценка времени охлаждения отливки после ее затвердевания необходима для получения годной литой заготовки (например, чугунной без отбела) или деталей из алюминиевых и магниевых сплавов без поражения их горячими трещинами. Наконец, определение продолжительности охлаждения отливки в кокиле требуется для извлечения из нее стержней, прежде чем их «заклинит» в отливке. И т. д.

Охлаждение в кокиле

Расчет необходимо построить на основе математической модели (23) для кокиля или (27) для тонкостенного кокиля; для массивного кокиля модель записана на с. 276: при $\Theta_з(\mathrm{Fo}_з) = \Theta_E \equiv \mathrm{const}$

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\Theta_з}{d\tau} = \mathrm{Bi}_{00}\,[\Theta_з - \Theta_к(\tau)]; \quad \tau > \mathrm{Fo}_з; \\ &\Theta_з(\mathrm{Fo}_з) = \Theta_E \equiv \mathrm{const}. \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Однако если температура выбивки мало отличается от температуры эвтектики сплава, то все три модели можно представить одной типа (83):

$$-\frac{d\Theta_3}{d\tau} = \tilde{\mathrm{Bi}}\,(\Theta_3 - \tilde{\Theta}); \quad \tau > \mathrm{Fo}_3; \tag{84}$$

$$\Theta_3\,(\mathrm{Fo}_3) = \Theta_E \equiv \mathrm{const},$$

где $\tilde{\mathrm{Bi}}$ и $\tilde{\Theta}$ выражены соотношениями (60) и (61).

Поэтому

$$\tau \approx \frac{1}{\tilde{\mathrm{Bi}}} \ln \left(\frac{\Theta_E - \tilde{\Theta}}{\Theta_3 - \tilde{\Theta}} \right) + \mathrm{Fo}_3. \tag{85}$$

Читателю необходимо сравнить (85) с формулами, которые он получит в результате решения задач (23), (27) и (83).

Охлаждение после выбивки

С учетом замечания, которое было сделано на с. 257 о математической модели (15-III) охлаждения отливки после ее выбивки, формула для расчета продолжительности остывания отливки вне формы остается той же. В обобщенных переменных формула (159-III) примет вид

$$\tau = \frac{\mathfrak{R}_0}{l_0\,\mathrm{Bi}_c} \ln \left(\frac{\Theta_{\text{выб}}}{\Theta_3} \right) + \mathrm{Fo}_4. \tag{86}$$

84. УПРАЖНЕНИЯ

Читатель может возразить: ведь вся гл. 19 дана как упражнение, зачем же еще? Но гл. 18 — это упражнение по проторенной дорожке раздела III! А теперь упражнения на *сообразительность*. . .

Упражнение 1. Определить продолжительность затвердевания плоской отливки из эвтектикосодержащего сплава при литье в комбинированную форму (стержень песчаный).

Упражнение 2. Оценить радиус галтели внутреннего угла отливки, при котором не будет усадочной рыхлоты, если этот угол образуется металлическим стержнем.

Упражнение 3. То же, если угол образуется песчаным стержнем.

Упражнение 4. Определить профиль твердой корки у внутреннего угла отливки методом конформного отображения, используя отображающую функцию $w\,(z) = mz^{\frac{2}{3}}$.

Упражнение 5. Рассчитать затвердевание внешнего и внутреннего углов отливки методом А. И. Вейника, приняв $n = 1$ для отливки.

Упражнение 6. Исследовать кинетику затвердевания полой цилиндрической отливки из эвтектического сплава (внутренняя полость образуется песчаным стержнем).

Упражнение 7. Определить продолжительность охлаждения такой же отливки из эвтектикосодержащего сплава.

Глава 19. ПРИМЕР РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ РЕЖИМОВ ЛИТЬЯ В КОКИЛЬ

Рассмотрим только ту часть примера, которая относится к выбору $T_{зал}$, $T_ф$, сорта кокильной краски, ее толщины ε и характеристики химического состава чугуна для предотвращения поверхностного отбела детали. Все остальные параметры технологического режима литья рекомендуем читателю рассчитать самостоятельно.

85. РАСЧЕТ ЗАПОЛНЕНИЯ КОКИЛЯ. СХЕМА КОНСТРУКЦИИ ЛИТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ

На рис. 71 показана муфта для продольно-строгального станка и кокиль, в котором эта муфта отливается. Внутренняя полость муфты выполнена двумя песчаными стержнями. В верхнем из них находятся дождевая литниковая система и выпоры.

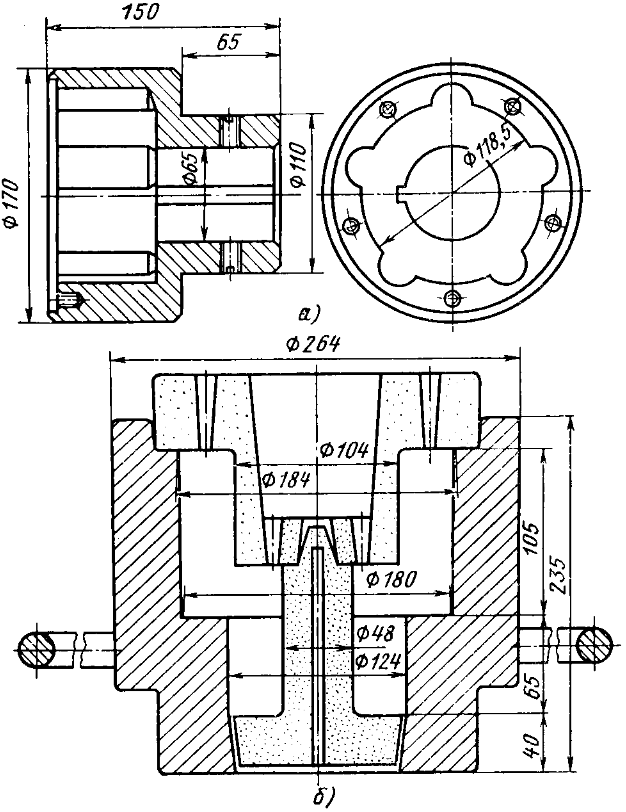


Рис. 71. Муфта (*а*) и продольный разрез кокиля для отливки муфты (*б*)

Толщина кокиля 40 мм; толщина отливки 40 мм. Масса отливки 18,4 кг; масса кокиля 57 кг. Материал отливки — синтетический чугун СЧ 21-40; материал кокиля — ваграночный чугун СЧ 16-32.

Для читателя, выполнившего упражнения 2 и 4 к гл. 17 этого раздела, не представит труда рассчитать заполнение кокиля через указанную на схеме (рис. 71, *б*) литниковую систему и определить сечение питателей, а также их число, если будут известны $T_{зал}$, $T_ф$, β и коэффициент тепловой аккумуляции песчаного стержня. Последний можем задать из приложения VII, табл. 11: $b_с = 1377$ Вт$\cdot$с$^{1/2}$/(м$^2\cdot$К); все остальное предстоит определить из условия задачи — не допустить поверхностный отбел отливки.

86. РАСЧЕТ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОТЛИВКИ. ВЫБОР СКОРОСТИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

В структурной диаграмме на рис. 16 для синтетического чугуна СЧ 21-40 примем: отношение C/Si = 1,25 и углеродный эквивалент $C_э = C + 0{,}31\,(Si + P) = 4{,}15\%$. Поверхностный отбел будет исключен, если скорость $U_э$ затвердевания отливки у внешней ее поверхности не превысит 0,790 мм/с.

Согласно (74),

$$U_э = \frac{\tilde{\mathrm{Bi}}\,a_з}{\mathscr{L}_E l_0}(1 - \tilde{\Theta}).$$

Для серого чугуна $a_з = 1{,}1\cdot10^{-5}$ м^2/с; $c_з = 560$ Дж/(кг$\cdot$К); $\rho_з = 7500$ кг/м^3; $L_E = 2{,}15\cdot10^5$ Дж/кг; $\lambda_з = 42$ Вт/(м$\cdot$К); $T_{кр} = 1473$ К; $T_с = 293$ К.

Для чугуна индукционной плавки выберем $T_{зал} = 1623$ К.

Из приведенной формулы

$$\tilde{\mathrm{Bi}}\,(1 - \tilde{\Theta}) = \frac{0{,}32\cdot0{,}2\cdot7{,}9\cdot10^{-5}}{1{,}1\cdot10^{-5}} = 0{,}459.$$

С учетом (28), (60) и (61)

$$(1 - \tilde{\Theta}) = 0{,}647 - 0{,}756\Theta_ф;$$

$$\tilde{\mathrm{Bi}} = \mathrm{Bi}_0\,\frac{1{,}125 - \Theta_ф}{0{,}478 - 0{,}756\Theta_ф}$$

и, следовательно,

$$\beta = \frac{453{,}7 - 717{,}6\Theta_ф}{(1{,}225 - \Theta_ф)(0{,}647 - 0{,}756\Theta_ф)}.$$

Примем начальную температуру формы $T_ф = 473$ К. Тогда $\Theta_ф = 0{,}167$ и $\beta = 668$ Вт/(м$^2\cdot$К). Выберем кокильную краску № 8 (приложение VIII, табл. 16) с $\lambda_\varepsilon = 0{,}407$ Вт/(м$\cdot$К); следовательно, толщина ε краски составит около 0,6 мм. Примем $\varepsilon = 1$ мм, т. е. $\beta = 407$ Вт/(м$\cdot$К).

Определим величину критерия Био для отливки:

$$\mathrm{Bi}_0 = \frac{407}{42} 0{,}02 \approx 0{,}097.$$

Очевидно, что условия затвердевания рассматриваемой отливки со стороны кокиля соответствуют необходимым для модели весьма малой интенсивности теплообмена отливки и кокиля. Дальнейшие расчеты заполнения кокиля расплавом, затвердевания его и охлаждения отливки в кокиле можно вести по формулам, полученным в этом и предыдущем разделах.

87. РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ ВЫБИВКИ ОТЛИВКИ ИЗ КОКИЛЯ

Как правило, чугунные отливки выбивают при высокой температуре: $T_{\text{выб}} = 1127 \div 1173$ К. Следовательно, $\Theta_3 (\mathrm{Fo}_4) = 0{,}71 \div 0{,}75$ и расчет времени $t_{\text{выб}}$ допустимо выполнить по (85), учитывая, что одновременно отливка затвердевает и охлаждается со стороны песчаного стержня. Это учесть нетрудно, если читатель выполнил упражнения 1 и 6 к гл. 18.

88. ЗАДАЧИ

1. Рассчитать продолжительность технологического цикла формирования плоской (в теплом отношении) отливки в тонкостенном водоохлаждаемом кокиле. Материал отливки — сплав АЛ4.

Указания: 1) толщину отливки принять из условия $\mathrm{Bi}_0 = 0{,}1$; 2) толщину отливки принять из условия $\mathrm{Bi}_0 = 0{,}5$; неоднородность температурного поля учесть приближенно методом А. И. Вейника (см. книгу «Теория затвердевания отливки» [2]).

2. Рассчитать продолжительность выдержки полой цилиндрической отливки после ее затвердевания в кокиле, обеспечивающую минимальное усилие извлечения стержня; стержень стальной полый, охлаждаемый потоком воздуха; материал отливки — сплав АЛ2.

Указание. Толщину отливки, кокиля и стержня принять из условий $\mathrm{Bi}_0 \ll 1$ и $\mathrm{Bi}_{\text{ф}} \ll 1$; величину коэффициента трения принять по справочнику О. А. Беликова и др. «Кокильное литье» [1].

3. Найти коэффициент β для элементов массового кокиля, с тем чтобы в $\perp$-образных сопряжениях отливки не было усадочной рыхлоты.

Указание. Кокиль должен быть покрашен одним составом краски; допускается различная толщина краски; рекомендовать технически реальный путь такого окрашивания кокиля.

Рекомендуемая литература

1. **Беликов О. А.** и др. Кокильное литье. М., «Машиностроение», 1969. 419 с.
2. **Вейник А. И.** Теория затвердевания отливки. М., Машгиз, 1960. 436 с.
3. **Вейник А. И.** Кокиль. М., «Машиностроение», 1971. 352 с.
4. **Гиршович Н. Г., Нехендзи Ю. А.** Формирование качества стальных отливок. Ч. II. Процессы затвердевания и кристаллизации. М., НТО Машпром, 1962. 100 с.
5. **Головин С. Я.** Особые виды литья. М.—Л., Машгиз, 1959. 462 с.
6. **Специальные** виды литья. Под ред. Г. Ф. Баландина и Л. С. Константинова. М., «Машиностроение», 1970. 224 с. Авт.: Ю. А. Степанов, М. Г. Анучина, Г. Ф. Баландин, Л. С. Константинов.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В РАЗНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\nabla^2 T,$$

где $\nabla^2 T$ — оператор Лапласа для функции T.

В декартовой системе координат (x, y и z)

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

В системе цилиндрических координат (r, φ и z)

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z} r\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right];$$

для кругового цилиндра

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right];$$

для бесконечного кругового цилиндра

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right],$$

или

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}.$$

В системе сферический координат (r, φ и θ)

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right];$$

для шара

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right].$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

В декартовой системе координат

Уравнение неразрывности (сплошности) потока несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}=0;$$

уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости Навье—Стокса

$$\left.\begin{aligned}\frac{dw_x}{dt}&=\nu\,\nabla^2 w_x-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x};\\ \frac{dw_y}{dt}&=\nu\,\nabla^2 w_y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x};\\ \frac{dw_z}{dt}&=\nu\,\nabla^2 w_z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+g,\end{aligned}\right\}$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости; ∇^2 — оператор Лапласа; ρ — плотность жидкости; $\frac{d}{dt}$ — полная производная по времени; p — давление в рассматриваемой точке потока; g — ускорение силы тяжести.

В системе цилиндрических координат

Уравнение сплошности:

$$\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial w_z}{\partial z}+\frac{w_r}{r}=0;$$

уравнения движения:

$$\frac{dw_r}{dt}=\nu\,\nabla^2 w_r-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r};$$

$$\frac{dw_\varphi}{dt}=\nu\,\nabla^2 w_\varphi-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi};$$

$$\frac{dw_z}{dt}=\nu\,\nabla^2 w_z-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z},$$

где

$$\frac{dw_r}{dt}=\frac{\partial w_r}{\partial z}+w_r\,\frac{\partial w_r}{\partial r}+w_\varphi\,\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial z}-\frac{w_\varphi^2}{r};$$

$$\frac{dw_\varphi}{dt}=\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}+w_r\,\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi}+w_\varphi\,\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi}+w_z\,\frac{\partial w_\varphi}{\partial z}+\frac{w_r w_\varphi}{r},$$

$$\frac{dw_z}{dt}=\frac{\partial w_z}{\partial t}+w_r\,\frac{\partial w_z}{\partial r}+w_\varphi\,\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_z}{\partial \varphi}+w_z\,\frac{\partial w_z}{\partial z};$$

$$\nabla^2 w_r=\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w_r}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{w_r}{r^2};$$

$$\nabla^2 w_\varphi=\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial \varphi}-\frac{w_\varphi}{r^2};$$

$$\nabla^2 w_z=\frac{\partial^2 w_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w_z}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_z}{\partial r}.$$

III. РАЗЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Алгебраические функции:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots;$$

$$\frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots;$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!}\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

Тригонометрические функции:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots;$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{3\cdot 5} + \frac{17x^7}{3^2\cdot 5\cdot 7} + \cdots;$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2\cdot 5} - \frac{2x^5}{3^3\cdot 5\cdot 7} + \cdots.$$

Гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots;$$

$$\operatorname{th} x = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} - 2e^{-6x} + \cdots;$$

$$\operatorname{cth} x = 1 + 2e^{-2x} + 2e^{-4x} + 2e^{-6x} + \cdots.$$

Экспоненциальные и логарифмические функции:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots;$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots;$$

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right);$$

$$\ln x = 2\left\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right\}.$$

Функция ошибок Гаусса:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du;$$

для малых значений функции

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots\right);$$

для больших значений

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \cdots\right).$$

Для функции ошибок Гаусса известно

$\operatorname{erf} x = -\operatorname{erf}(-x)$; $\operatorname{erf} 0 = 0$;

$\operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$; $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$;

$\frac{d}{dx}(\operatorname{erf} x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}$; $\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{erf} x) = -\frac{4x}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}$ и т. д.

IV. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ И СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ

Ламинарное течение $\mathrm{Re} < 2300$

В круглой трубе

$$\alpha_к = 1{,}61\left(\frac{\lambda^2 \bar{w} c\rho}{yd}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{при} \quad y \leqslant 0{,}08\,\frac{\bar{w}d^2}{a};$$

$$\alpha_к = 3{,}65\,\frac{\lambda}{d} \quad \text{при} \quad y > 0{,}08\,\frac{\bar{w}d^2}{a},$$

где $\bar{w}$ — средняя скорость потока; y — длина исследуемого участка трубы от входа в нее; d — диаметр трубы.

В безразмерных переменных и критериях подобия эти формулы принимают вид

$$\mathrm{Nu} = 1{,}61\left(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,\frac{d}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{при} \quad \frac{y}{d} \leqslant 0{,}08\,\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}};$$

$$\mathrm{Nu} = 3{,}65 \quad \text{при} \quad \frac{y}{d} > 0{,}08\,\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}},$$

где $\mathrm{Nu} \equiv \frac{\alpha_к d}{\lambda}$ — число Нуссельта; $\mathrm{Re} \equiv \frac{\bar{w}d}{\nu}$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Pr} \equiv \frac{\nu}{a}$ — критерий Прандтля.

В плоской щели:

$$\mathrm{Nu} = 1{,}85\left(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,\frac{s}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{при} \quad \frac{y}{s} \leqslant 0{,}014\,\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}};$$

$$\mathrm{Nu} = 7{,}60 \quad \text{при} \quad \frac{y}{s} > 0{,}014\,\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}},$$

где s — ширина щели.

Обтекание пластины:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}67\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad \mathrm{Pr} \geqslant 0{,}5;$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 1{,}1\left[(1-\mathrm{Pr})^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad \mathrm{Pr} \ll 1,$$

где $\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{\overline{\alpha}_{\text{к}} z}{\lambda}$; $\mathrm{Re} = \frac{w_0 z}{\nu}$; $\alpha_{\text{к}}$ — средний на длине z коэффициент теплоотдачи; z — расстояние от передней кромки пластины; w_0 — скорость набегающего потока.

Обтекание шара:

$$\mathrm{Nu} = 2 + 0{,}03\,\mathrm{Pr}^{0{,}33}\,\mathrm{Re}^{0{,}54} + 0{,}35\,\mathrm{Pr}^{0{,}36}\,\mathrm{Re}^{0{,}58};$$

при весьма малых значениях Re

$$\mathrm{Nu} = 2.$$

Турбулентное течение (Re > 5000)

В круглой трубе:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}023\,\mathrm{Pr}^{0{,}4}\,\mathrm{Re}^{0{,}8} \quad \text{при} \quad 0{,}6 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 3010^3 \quad \text{и} \quad \frac{y}{d} \geqslant 50;$$

$$\mathrm{Nu} = 5 + 0{,}021\,(\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re})^{0{,}75} \quad \text{при} \quad \mathrm{Pr} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{y}{d} \geqslant 30.$$

В плоской щели применяют эти же формулы, но вместо d в Nu и Re следует подставить ширину s щели.

Обтекание пластины:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}035\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{Re}^{0{,}8} \quad \text{при} \quad \mathrm{Pr} \geqslant 0{,}5;$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}59\,(\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re})^{0{,}61} \quad \text{при} \quad \mathrm{Pr} \ll 1.$$

Свободная конвекция в неограниченном объеме:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = C\,(\mathrm{Pr}\,\mathrm{Gr})^n,$$

где

$$\overline{\mathrm{Nu}} \equiv \frac{\overline{\alpha}_{\text{к}} l}{\lambda};$$

$\mathrm{Gr} \equiv \frac{g l^3}{\nu a}\,\gamma\,\Delta T$ — критерий Грасгофа; l — характерный размер обтекаемого тела: для вертикальной пластины и трубы — высота омываемого участка; для шара и горизонтальной трубы — их диаметр; для горизонтальной плиты — ее наименьший размер; γ — коэффициент объемного расширения жидкости; ΔT — температурный напор на границе обтекаемого тела; C и n (табл. 1).

Таблица 1

Значения C и n

Pr Gr	C	n
Меньше 10^{-3}	0,45	0
От 10^{-3} до $5 \cdot 10^2$	1,18	1/8
От $5 \cdot 10^2$ до $2 \cdot 10^7$	0,54	1/4
Свыше $2 \cdot 10^7$	0,135	1/3

При $\mathrm{Pr} \ll 1$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}53\,(\mathrm{Pr}^2\mathrm{Gr})^{\frac{1}{4}}.$$

V. КОЭФФИЦИЕНТ СТЕПЕНИ ЧЕРНОТЫ ПОВЕРХНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ

Таблица 2

Материал	T, К	ε
Полированный алюминий	500—850	0,039—0,057
Литой окисленный алюминий	470—870	0,11—0,192
Литая полированная сталь	1040—1310	0,52—0,56
Шлифованная сталь	1210—1370	0,55—0,61
Окисленная сталь	470—870	0,8
Обработанный чугун	1100—1260	0,60—0,70
Окисленный чугун	470—870	0,64—0,78
Окись железа	770—1470	0,85—0,95
Прокатанная обработанная латунь	300	0,2
Окисленная латунь	470—870	0,61—0,59
Прокатанная обработанная медь	300	0,72
Окисленная медь	470—870	0,57—0,87
Окись меди	1070—1370	0,66—0,54
Расплавленная медь	1350—1550	0,11—0,13
Окисленный никель	470—870	0,37—0,48
Окисленный свинец	300	0,28
Хром	370—1270	0,08—0,26
Окисленный цинк	670	0,11
Асбестовый картон	300	0,93—0,945
Асбестовая бумага	300	0,95—0,963
Плавленый кварц	300	0,93
Ацетиленовая сажа	370—540	0,95

VI. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ И ЛИТЕЙНЫХ СПЛАВОВ

Таблица 3

Железо, чугуны и углеродистые стали

Материал	T_L, К	T_S или T_E, К	L, кДж/кг	$\psi_E L_E$, кДж/кг	$c_з$, Дж/(кг·К)	c_1, Дж/(кг·К)	$s_{эф}$, кДж/кг
Железо	1808	1808	272	—	695	922	272
Серый чугун	1473	1470	—	215	560	838	263
Углеродистая сталь (усредненные свойства)	1770	1720	258	—	753	920	294
Углеродистая сталь, содержащая углерода, %:							
0,12	1793	1758	264	—	753	920	289
0,25	1785	1753	264	—	753	920	290
0,35	1778	1733	259	—	753	920	289
0,60	1758	1703	255	—	753	920	292
0,80	1733	1643	251	—	753	920	311

Таблица 4

Медь и медные сплавы

Материал	T_L, К	T_S или T_E, К	L, кДж/кг	$\psi_E L_E$, кДж/кг	$c_з$, Дж/(кг·К)	c_1, Дж/(кг·К)	$s_{эф}$, кДж/кг
Медь	1356	1356	214	—	440	545	214
Бронза (10% Sn)	1260	1100	257	—	420	500	350
Латунь (10% Zn)	1320	1305	221	—	390	410	274

Таблица 5

Цинк и цинковые сплавы

Материал	T_L, К	T_S или T_E, К	L, кДж/кг	$\psi_E L_E$, кДж/кг	$c_з$, Дж/(кг·К)	c_1, Дж/(кг·К)	$s_{эф}$, кДж/кг
Цинк	692	692	105	—	419	502	105
Сплав с 11% Al	703	655	82	53	494	591	160
Сплав с 17% Al	773	655	153	—	536	637	190

Таблица 6

Алюминий и алюминиевые сплавы

Материал	T_L, К	T_S или T_E, К	L, кДж/кг	$\psi_E L_E$, кДж/кг	c_s, Дж/(кг·К)	c_l, Дж/(кг·К)	$s_{эф}$, кДж/кг
Алюминий	933	933	390	—	1090	1290	390
Алюминиево-кремниевые сплавы	870	840	170	195	1080	1275	460
Алюминиево-медные сплавы	910	780	360	—	1000	1200	535
Алюминиево-цинковые сплавы	860	825	240	80	1000	1180	375
Алюминиево-магниевые сплавы	840	720	360	—	1100	1290	570

Таблица 7

Стандартные алюминиевые сплавы

Сплав	T_L, К	T_S или T_E, К	L, кДж/кг	$\psi_E L_E$, кДж/кг	c_s, Дж/(кг·К)	c_l, Дж/(кг·К)	$s_{эф}$, кДж/кг
АЛ1	909	783	372	—	1047	1244	505
АЛ2	864	850	160	208	1085	1286	374
АЛ3	888	821	322	47	1014	1194	483
АЛ4	867	840	172	194	1077	1274	457
АЛ6	831	884	371	—	1060	1261	476
АЛ7	911	784	369	—	1056	1249	539
АЛ8	878	793	367	—	1106	1295	480
АЛ9	889	843	281	90	1085	1282	446
АЛ10	873	773	333	34	1043	1265	499
АЛ11	858	824	243	81	997	1182	374
АЛ12	914	781	362	—	1010	1198	536
АЛ13	895	858	373	—	1089	1286	455
АЛ14В	873	822	291	70	1081	1265	378
АЛ15В	883	788	253	109	1039	1232	499
АЛ16В	888	802	363	—	1039	1223	446
АЛ17В	890	802	294	62	1031	1219	485
АЛ18	903	773	345	17	1022	1244	516
АЛ19	917	808	355	20	1047	1249	527
АЛ22	843	718	362	—	1106	1290	575

Таблица 8

Некоторые физические свойства металлов и сплавов

Материал	$\rho_з$, кг/м³	ρ_1, кг/м³	$\lambda_з$, Вт/(м·К)	λ_0, Вт/(м·К)	$a_з$, м²/с	a_0, м²/с	$b_з$, Вт·с$^{\frac{1}{2}}$/(м²·К)	b_0, Вт·с$^{\frac{1}{2}}$/(м²·К)	$\alpha_{ТВ}\cdot 10^6$
Алюминий	2700	2380	213	104	$8{,}3\cdot 10^{-5}$	$4{,}0\cdot 10^{-5}$	$2{,}3\cdot 10^4$	$2{,}8\cdot 10^4$	24,0
Железо	7860	6900	87	23,3	$6{,}1\cdot 10^{-6}$	$3{,}68\cdot 10^{-6}$	$1{,}7\cdot 10^4$	$1{,}2\cdot 10^4$	11,9
Магний	1740	1570	131	84	$7{,}2\cdot 10^{-5}$	$6{,}0\cdot 10^{-5}$	$1{,}8\cdot 10^4$	$1{,}4\cdot 10^4$	25,7
Медь	8920	8300	320	290	$4{,}3\cdot 10^{-5}$	$4{,}0\cdot 10^{-5}$	$3{,}7\cdot 10^4$	$3{,}0\cdot 10^4$	16,4
Цинк	7140	6700	102	58	$3{,}4\cdot 10^{-5}$	$1{,}83\cdot 10^{-6}$	$1{,}7\cdot 10^4$	$1{,}35\cdot 10^4$	32,5
Углеродистая сталь	7500	7000	54,5	23,3	$5{,}6\cdot 10^{-6}$	$3{,}9\cdot 10^{-6}$	$1{,}4\cdot 10^4$	$1{,}11\cdot 10^4$	11,4
Серый чугун	7200	6950	42	16,7	$1{,}7\cdot 10^{-5}$	$2{,}7\cdot 10^{-6}$	$1{,}4\cdot 10^4$	$1{,}1\cdot 10^4$	10,4
Оловянная бронза	8800	8100	64	42	$1{,}7\cdot 10^{-6}$	$2{,}0\cdot 10^{-6}$	$1{,}5\cdot 10^4$	$1{,}3\cdot 10^4$	18,5
Латунь цинковая	8600	8000	195	101	$3{,}6\cdot 10^{-5}$	$2{,}1\cdot 10^{-5}$	$2{,}7\cdot 10^4$	$2{,}1\cdot 10^4$	18,4
Алюминиево-кремниевые сплавы	2500	2200	104	83	$4{,}7\cdot 10^{-5}$	$3{,}4\cdot 10^{-5}$	$2{,}0\cdot 10^4$	$2{,}5\cdot 10^4$	25,0
Алюминиево-медные сплавы	3200	2700	215	102	$8{,}3\cdot 10^{-5}$	$4{,}1\cdot 10^{-5}$	$3{,}0\cdot 10^4$	$2{,}1\cdot 10^4$	20,0

Таблица 9

Физические свойства металлов

Металл	$T_{кр}$, К	$\rho_з$, кг/м³	ρ_1, кг/м³	$c_з$, Дж/(кг·К)	c_1, Дж/(кг·К)	$\lambda_з$, Вт/(м·К)	λ_0, Вт/(м·К)	$a_з$, м²/с	a_0, м²/с	$b_з$, $Вт\cdot с^{\frac{1}{2}} \Big/ (м^2\cdot К)$	b_0, $Вт\cdot с^{\frac{1}{2}} \Big/ (м^2\cdot К)$	L, кДж/кг	$\alpha_{тв}\cdot 10^6$
Ванадий . .	1 993	5 900	—	502	—	34,8	—	$1{,}17\cdot 10^{-5}$	—	$1{,}02\cdot 10^4$	—	—	—
Висмут . .	544	9 300	10 100	125	138	7,67	17,1	$6{,}12\cdot 10^{-6}$	—	$0{,}31\cdot 10^4$	—	52	13,4
Вольфрам .	3 653	19 300	—	135	—	151	—	$5{,}84\cdot 10^{-5}$	—	$6{,}27\cdot 10^4$	—	191	4,3
Кадмий . .	593,9	8 650	8 000	234	265	91,8	44,4	$4{,}5\cdot 10^{-5}$	$2{,}11\cdot 10^{-5}$	$1{,}36\cdot 10^4$	$0{,}97\cdot 10^4$	55,1	29,8
Кобальт . .	1 765	8 900	—	456	854	95,4	—	$2{,}3\cdot 10^{-5}$	—	$1{,}95\cdot 10^4$	—	228	12,1
Литий . . .	452	534	507	3 560	4 186	71,0	37,6	$3{,}42\cdot 10^{-5}$	$1{,}78\cdot 10^{-5}$	$0{,}37\cdot 10^4$	$0{,}28\cdot 10^4$	665	60
Молибден	2 873	10 200	—	255	310	137	—	$5{,}2\cdot 10^{-5}$	—	$2{,}22\cdot 10^4$	—	—	—
Никель . .	1 726	8 900	—	448	670	82,5	—	$1{,}15\cdot 10^{-5}$	—	$1{,}83\cdot 10^4$	—	308,5	13,7
Олово . . .	504,9	7 310	6 980	240	255	61,0	32,5	$3{,}45\cdot 10^{-5}$	$1{,}86\cdot 10^{-5}$	$1{,}02\cdot 10^4$	$0{,}78\cdot 10^4$	60,2	22,4
Свинец . .	600,3	11 337	10 300	130	113	33,5	16,3	$2{,}23\cdot 10^{-5}$	$1{,}39\cdot 10^{-5}$	—	$0{,}44\cdot 10^4$	26,5	29,5
Серебро . .	1 233,5	10 500	9 400	236	289	416	—	$1{,}58\cdot 10^{-5}$	—	$3{,}2\cdot 10^4$	$0{,}74\cdot 10^4$	105	18,9
Хром . . .	2 103	7 100	—	460	—	—	—	—	—	—	—	132,7	6,1

VII. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФОРМОВОЧНЫХ И СТЕРЖНЕВЫХ СМЕСЕЙ

Таблица 10

Типовые смеси для отливок из разных сплавов

№ смеси	Материал отливки	λ_4, Вт/(м·К)	c_4, Дж/(кг·К)	ρ_4, кг/м³	a_4, м²/с	b_4, $\text{Вт}\cdot\text{с}^{\frac{1}{2}} / (\text{м}^2\cdot\text{К})$
1	Сталь	0,947	1740	1600	$3{,}39\cdot10^{-7}$	1628
2	Чугун	0,705	1670	1600	$2{,}64\cdot10^{-7}$	1377
3	Медные сплавы	0,660	1590	1600	$2{,}58\cdot10^{-7}$	1300
4	Алюминиевые сплавы . .	0,510	1100	1600	$2{,}89\cdot10^{-7}$	950
5	Цинковые сплавы . . .	0,475	845	1600	$3{,}5\cdot10^{-7}$	803

Таблица 11

Некоторые формовочные и стержневые смеси

№ смеси	Состав смеси	T, К	ρ_4, кг/м³	c_4, Дж/(кг·К)	λ_4, Вт/(м·К)	a_4, м²/с	b_4, $\text{Вт}\cdot\text{с}^{\frac{1}{2}} / (\text{м}^2\cdot\text{К})$
1	Формовочная песчано-глинистая сухая (10% глины) . . .	290—1790	1650	1080	1,28	$7{,}0\cdot10^{-7}$	1600
2	То же, с маршалитом (30%)	290—1790	1680	—	—	—	2300
3	Формовочная песчано-глинистая сухая (5% глины, 20% асбестовой крошки)	290—930	1550	1060	0,54	$3{,}28\cdot10^{-7}$	938
4	Стержневая сухая (0,5% сульфидной барды, 19% древесных опилок) . . .	290—1570	1600	1670	0,705	$2{,}64\cdot10^{-7}$	1377
5	То же, сырая (10% влажности)	290—1570	1760	—	—	—	1820
6	Стержневая сухая с 40% чугунных опилок	290—1570	1910	1152	1,33	$5{,}89\cdot10^{-7}$	1720
7	То же, с 20% чугунных опилок	290—1570	1750	1360	1,05	$4{,}25\cdot10^{-7}$	1600
8	Быстротвердеющая (9% крепителя СГБ-422)	600—1790	1600	1280	1,08	$5{,}5\cdot10^{-7}$	1520

Продолжение табл. 11

№ смеси	Состав смеси	T, К	ρ_4, кг/м³	c_4, Дж/(кг·К)	λ_4, Вт/(м·К)	a_4, м²/с	b_4, $\text{Вт}\cdot\text{с}^{\frac{1}{2}} / (\text{м}^2\cdot\text{К})$
9	Хромомагнезитовая жидкостекольная (6% жидкого стекла)	290—1850	2700	1980	2,56	$4{,}78\cdot10^{-7}$	3700
10	Кварцевый сухой песок	290	1500	795	0,326	$2{,}74\cdot10^{-7}$	620
11	То же, влажный . .	290	1650	2100	1,13	$4{,}9\cdot10^{-7}$	1970

В табл. 10 и 11 приведены значения b_4 для сухих формовочных и стержневых смесей (исключение составляют смеси № 2, табл. 11 и № 5, табл. 12). Однако влияние влажности, если необходимо найти b_4 для сырых смесей, можно учесть с помощью формулы

$$b_{эф} = b_4 \frac{T_i - T_{исп}}{T_i - T_{ф}} \sqrt{1 + (n + 1)\,\mathscr{L}_{исп}},$$

где T_i — температура отливки ($i = 1$, 2 и 3); для упрощения расчетов можно принять, что $T_1 = T_{зал}$, $T_2 = T_L$ и $T_3 = T_E$; $T_{исп}$ — температура испарения влаги; n — выбирают по графику на рис. 55 в зависимости от T_i; b_4 — коэффициент тепловой аккумуляции сухой смеси из табл. 10 и 11; $\mathscr{L}_{исп}$ — относительная теплота парообразования; $\mathscr{L}_{исп} = \dfrac{uL_{вл}}{c_4\,(T_i - T_{исп})}$; здесь u — влажность смеси (отношение массы воды, содержащейся в сырой смеси, к массе сухой смеси); $L_{вл}$ — теплота парообразования.

С помощью этих формул можно определить $b_{эф}$ для смесей, содержащих в качестве связующих вещества, при деструкции (газификации) которых во время нагревания выделяется скрытая теплота: например, синтетические смолы, используемые при изготовлении оболочковых форм, стержней и форм в горячей или холодной оснастке и т. п. Тогда в формулах: b_4 — коэффициент тепловой аккумуляции сухого песка; n — содержание смолы; $L_{вл}$ — скрытая теплота, выделяющаяся при деструкции смолы; $T_{исп}$ — температура газификации смолы.

VIII. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОКИЛЬНЫХ КРАСОК

Исходные материалы

Материал	λ_g, Вт/(м·К)
Маршалит	0,17
Огнеупорная глина	0,12
Коллоидальный графит . .	0,46
Прокаленный асбест	0,17
Жидкое стекло	0,14
Мел	0,93
Прокаленный тальк . . .	0,41
Окись цинка	0,84
Вода	0,58

Трехкомпонентные 20%-ные краски
(3% жидкого стекла, 77% по массе воды)

Состав	λ_g, Вт/(м·К)
Мел	0,174
Прокаленный асбест	0,171
Прокаленный тальк	0,207
Асбест в порошке	0,218
Окись цинка	0,296
Серебристый графит . . .	0,452
Коллоидальный графит . .	0,525

Таблица 12

Краски на основе мела и графита (3% по массе жидкого стекла)

№ краски	Состав, % по массе			λ_g, Вт/(м·К)
	Мел	Коллоидальный графит	Вода	
1	10	—	87,0	0,260
2	10	2,5	84,5	0,304
3	10	5,0	82,0	0,337
4	10	7,5	79,5	0,342
5	10	10	77,0	0,346
6	7,5	10	79,5	0,390
7	5,0	10	82,0	0,400
8	2,5	10	84,5	0,510
9	—	10	97,0	0,343

Таблица 13

Многокомпонентные типовые краски

№ краски	Состав, % по массе								λ_g, (Вт/(м·К)
	Маршалит	ГБ	Огнеупорная глина	Графит	Прокаленный асбест	Древесные мелкие опилки	Жидкое стекло	Вода	
1	—	100	—	—	—	—	—	—	0,46
2	4,4	—	12,5	25	—	0,6	7,5	50	0,33
3	19,4	—	12,5	10	—	0,6	7,5	50	0,20
4	32,0	—	6,2	—	—	1,3	10,5	50	0,16
5	26,9	—	12,5	2,5	—	0,6	7,5	50	0,14
6	7,5	—	10,0	4	20	—	8,5	50	0,14
7	6,9	—	25,0	10	—	0,6	7,5	50	0,12

Таблица 14

Многокомпонентные типовые краски

№ краски	Состав, % по массе										λ_ε, Вт/(м·К)
	Мел	Коллоидальный графит	Окись цинка	Прокаленный тальк	Прокаленный асбест	Двуокись титана	Борная кислота	Сырой в порошке асбест	Жидкое стекло	Вода	
1	12,4	1,7	—	—	—	—	—	—	3,3	82,6	0,175
2	20,0	—	—	5,0	—	—	1,0	—	—	74,0	0,210
3	—	—	9,0	—	28,0	—	—	—	6,0	57	0,268
4	5,0	—	—	—	30,0	—	—	—	4,0	61	0,190
5	—	—	—	—	25,0	—	—	—	5,0	70	0,213
6	15,0	—	—	—	—	—	—	—	3,0	82	0,198
7	2,0	4,0	—	—	—	4,0	—	—	4,0	86	0,341
8	—	—	3,0	—	6,0	—	—	—	6,0	85	0,274
9	—	—	—	—	—	—	—	10	10,0	80	0,193
10	—	—	—	12,0	—	—	—	—	3,0	85	0,256
11	—	—	5,0	—	—	—	—	—	3,0	92	0,190

Таблица 15

Многокомпонентные типовые краски

№ краски	Состав, % по массе									λ_ε, Вт/(м·К)
	Мел	Прокаленный тальк	Окись цинка	Двуокись титана	Прокаленный асбест	Коллоидальный графит	Борная кислота	Жидкое стекло	Вода	
1	21,0	7,0	—	—	—	—	0,7	—	71,3	0,210
2	5,5	—	—	—	34,5	—	—	5,5	54,5	0,267
3	10,0	—	—	—	13,0	—	—	7,0	70,0	0,267
4	21,0	—	—	—	—	—	—	4,5	74,5	0,279
5	—	—	5,5	—	12,0	—	—	12,5	70,0	0,337
6	4,3	—	—	8,4	—	8,4	—	8,4	70,5	0,360
7	—	20,5	—	—	—	—	—	5,0	74,5	0,396
8	8,0	—	5,5	4,0	—	—	—	4,5	78,0	0,407
9	—	—	6,7	—	—	—	—	4,5	88,9	0,525

IX. КРУГОВЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ ОШИБОК ГАУССА (ФУНКЦИЯ КРАМПА)

Таблица 16

x	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{th}\, x$	$\mathrm{erf}\,(x)$
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,0000
0,01	0,01000	0,99995	0,01000	1,01005	0,99005	0,01000	1,00005	0,01000	0,0113
0,02	0,02000	0,99980	0,02000	1,02020	0,98020	0,02000	1,00020	0,02000	0,0226
0,03	0,03000	0,99955	0,03001	1,03045	0,97045	0,03000	1,00045	0,02999	0,0338
0,04	0,03999	0,99920	0,04002	1,04081	0,96079	0,04001	1,00080	0,03998	0,0451
0,05	0,04998	0,99875	0,05004	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996	0,0564
0,06	0,05996	0,99820	0,06007	1,06184	0,94176	0,06004	1,00180	0,05993	0,0676
0,07	0,06994	0,99755	0,07011	1,07251	0,93239	0,07006	1,00245	0,06989	0,0789
0,08	0,07991	0,99680	0,08017	1,08329	0,92312	0,08009	1,00320	0,07983	0,0901
0,09	0,08988	0,99595	0,09024	1,09417	0,91393	0,09012	1,00405	0,08976	0,1013
0,10	0,09983	0,99500	0,10033	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967	0,1125
0,11	0,10978	0,99396	0,11045	1,11628	0,89583	0,11022	1,00606	0,10956	0,1236
0,12	0,11971	0,99281	0,12058	1,12750	0,88692	0,12029	1,00721	0,11943	0,1348
0,13	0,12963	0,99156	0,13074	1,13883	0,87810	0,13037	1,00846	0,12927	0,1459
0,14	0,13954	0,99022	0,14092	1,15027	0,86936	0,14046	1,00982	0,13909	0,1569
0,15	0,14944	0,98877	0,15114	1,16183	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889	0,1680
0,16	0,15932	0,98723	0,16138	1,17351	0,85214	0,16068	1,02183	0,15865	0,1790
0,17	0,16918	0,98558	0,17166	1,18530	0,84366	0,17082	1,01448	0,16838	0,1900
0,18	0,17903	0,98384	0,18197	1,19722	0,83527	0,18097	1,01624	0,17808	0,2009
0,19	0,18886	0,98200	0,19232	1,20925	0,82696	0,19115	1,01810	0,18775	0,2118

Продолжение табл. 16

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\operatorname{erf}(x)$
0,20	0,19867	0,98007	0,20271	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738	0,2227
0,21	0,20846	0,97803	0,21314	1,23368	0,81058	0,21155	1,02213	0,20697	0,2335
0,22	0,21823	0,97590	0,22362	1,24608	0,80252	0,22178	1,02430	0,21652	0,2443
0,23	0,22798	0,97367	0,23414	1,25860	0,79453	0,23203	1,02657	0,22603	0,2550
0,24	0,23770	0,97134	0,24472	1,27125	0,78663	0,24231	1,02894	0,23550	0,2657
0,25	0,24740	0,96891	0,25534	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492	0,2763
0,26	0,25708	0,96639	0,26602	1,29693	0,77105	0,26294	1,03399	0,25430	0,2869
0,27	0,26673	0,96377	0,27676	1,30996	0,76338	0,27329	1,03667	0,26362	0,2974
0,28	0,27636	0,96106	0,28755	1,32313	0,75578	0,28367	1,03946	0,27291	0,3079
0,29	0,28595	0,95824	0,29841	1,33643	0,74826	0,29408	1,04235	0,28213	0,3183
0,30	0,29552	0,95534	0,30934	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131	0,3286
0,31	0,30506	0,95233	0,32033	1,36343	0,73345	0,31499	1,04844	0,30044	0,3389
0,32	0,31457	0,94924	0,33139	1,37713	0,72615	0,32549	1,05164	0,30951	0,3491
0,33	0,32404	0,94604	0,34252	1,39097	0,71892	0,33602	1,05495	0,31852	0,3593
0,34	0,33349	0,94275	0,35374	1,40495	0,71177	0,34659	1,05836	0,32748	0,3694
0,35	0,34290	0,93937	0,36503	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638	0,3794
0,36	0,35227	0,93590	0,37640	1,43333	0,69768	0,36783	1,06550	0,34521	0,3893
0,37	0,36162	0,93233	0,38786	1,44773	0,69073	0,37850	1,06923	0,35399	0,3992
0,38	0,37092	0,92866	0,39941	1,46228	0,68386	0,38921	1,07307	0,36271	0,4090
0,39	0,38019	0,92491	0,41105	1,47698	0,67706	0,39996	1,07702	0,37136	0,4187
0,40	0,38942	0,92106	0,42279	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	0,4284
0,41	0,39861	0,91712	0,43463	1,50682	0,66365	0,42158	1,08523	0,38847	0,4380

0,42	0,40776	0,91309	0,44657	1,52196	0,65705	0,43246	1,08950	0,39693	0,4475
0,43	0,41678	0,90897	0,45862	1,53726	0,65051	0,44337	1,09388	0,40532	0,4569
0,44	0,42594	0,90475	0,47078	1,55271	0,64404	0,45434	1,09837	0,41364	0,4662
0,45	0,43497	0,90045	0,48306	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42190	0,4755
0,46	0,44395	0,89605	0,49545	1,58407	0,63128	0,47640	1,10768	0,43008	0,4847
0,47	0,45289	0,89157	0,50797	1,59999	0,62500	0,48750	1,11250	0,43820	0,4937
0,48	0,46178	0,88699	0,52061	1,61607	0,61878	0,49865	1,11743	0,44624	0,5027
0,49	0,47063	0,88233	0,53339	1,63232	0,61263	0,50984	1,12247	0,45422	0,5117
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	0,5205
0,51	0,48818	0,87274	0,55936	1,66529	0,60050	0,53240	1,13289	0,46995	0,5292
0,52	0,49688	0,86782	0,57256	1,68203	0,59452	0,54375	1,13827	0,47770	0,5379
0,53	0,50553	0,86281	0,58592	1,69893	0,58860	0,55516	1,14377	0,48538	0,5465
0,54	0,51414	0,85771	0,59943	1,71601	0,58275	0,56663	1,14938	0,49299	0,5549
0,55	0,52269	0,85252	0,61311	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052	0,5633
0,56	0,53119	0,84726	0,62695	1,75067	0,57121	0,58973	1,16094	0,50798	0,5716
0,57	0,53963	0,84190	0,64097	1,76827	0,56553	0,60137	1,16690	0,51536	0,5798
0,58	0,54802	0,83646	0,65517	1,78604	0,55990	0,61307	1,17297	0,52267	0,5879
0,59	0,55636	0,83094	0,66956	1,80399	0,55433	0,62483	1,17916	0,52990	0,5959
0,60	0,56464	0,82534	0,68414	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705	0,6039
0,61	0,57287	0,81965	0,69892	1,84043	0,54335	0,64854	1,19189	0,54413	0,6117
0,62	0,58104	0,81388	0,71391	1,85893	0,53794	0,66049	1,19844	0,55113	0,6194
0,63	0,58914	0,80803	0,72911	1,87761	0,53259	0,67251	1,20510	0,55805	0,6270
0,64	0,59720	0,80210	0,74454	1,89648	0,52729	0,68459	1,21189	0,56490	0,6346
0,65	0,60519	0,79608	0,76020	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167	0,6420
0,66	0,61312	0,78999	0,77610	1,93479	0,51685	0,70897	1,22582	0,57836	0,6494

Продолжение табл. 16

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\operatorname{erf}(x)$
0,67	0,62099	0,78382	0,79225	1,95424	0,51171	0,72126	1,23297	0,58498	0,6566
0,68	0,62879	0,77757	0,80866	1,97388	0,50662	0,73363	1,24025	0,59152	0,6638
0,69	0,63654	0,77125	0,82534	1,99372	0,50158	0,74607	1,24765	0,59798	0,6708
0,70	0,64422	0,76484	0,84229	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437	0,6778
0,71	0,65183	0,75836	0,85953	2,03399	0,49164	0,77117	1,26282	0,61068	0,6847
0,72	0,65938	0,75181	0,87707	2,05443	0,48675	0,78384	1,27059	0,61691	0,6914
0,73	0,66687	0,74517	0,89492	2,07508	0,48191	0,79659	1,27849	0,62307	0,6981
0,74	0,67429	0,73847	0,91309	2,09594	0,47711	0,80941	1,28652	0,62915	0,7047
0,75	0,68164	0,73169	0,93160	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515	0,7112
0,76	0,68892	0,72484	0,95045	2,13828	0,46767	0,83530	1,30297	0,64108	0,7175
0,77	0,69614	0,71791	0,96967	2,15977	0,46301	0,84838	1,31139	0,64693	0,7238
0,78	0,70328	0,71091	0,98926	2,18147	0,45841	0,86153	1,31994	0,65271	0,7300
0,79	0,71035	0,70385	1,00925	2,20340	0,45384	0,87478	1,32862	0,65841	0,7361
0,80	0,71736	0,69671	1,02964	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404	0,7421
0,81	0,72429	0,68950	1,05046	2,24791	0,44486	0,90152	1,34638	0,66959	0,7480
0,82	0,73115	0,68222	1,07171	2,27050	0,44043	0,91503	1,35547	0,67507	0,7538
0,83	0,73793	0,67488	1,09343	2,29332	0,43605	0,92863	1,36468	0,68048	0,7595
0,84	0,74464	0,66746	1,11563	2,31637	0,43171	0,94233	1,37404	0,68581	0,7651
0,85	0,75128	0,65998	1,13833	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107	0,7707
0,86	0,75784	0,65244	1,16156	2,36316	0,42316	0,97000	1,39316	0,69626	0,7761
0,87	0,76433	0,64483	1,18532	2,38691	0,41895	0,98398	1,40293	0,70137	0,7814
0,88	0,77074	0,63715	1,20966	2,41090	0,41478	0,99806	1,41284	0,70642	0,7867

0,89	0,77707	0,62941	1,23460	2,43513	0,41066	1,01224	1,42289	0,71139	0,7918
0,90	0,78333	0,62161	1,26016	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630	0,7969
0,91	0,78950	0,61375	1,28637	2,48432	0,40252	1,04090	1,44342	0,72113	0,8019
0,92	0,79560	0,60582	1,31326	2,50929	0,39852	1,05539	1,45390	0,72590	0,8068
0,93	0,80162	0,59783	1,34087	2,53451	0,39455	1,06998	1,46453	0,73059	0,8116
0,94	0,80756	0,58979	1,36923	2,55998	0,39063	1,08468	1,47530	0,73522	0,8163
0,95	0,81342	0,58168	1,39838	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978	0,8209
0,96	0,81919	0,57352	1,42836	2,61170	0,38289	1,11440	1,49729	0,74428	0,8254
0,97	0,82489	0,56530	1,45920	2,63794	0,37908	1,12943	1,50851	0,74870	0,8299
0,98	0,83050	0,55702	1,49096	2,66446	0,37531	1,14457	1,51988	0,75307	0,8342
0,99	0,83603	0,54869	1,52368	2,69123	0,37158	1,15983	1,53141	0,75736	0,8385
1,00	0,84147	0,54030	1,55741	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	0,8427
1,01	0,84683	0,53186	1,59221	2,74560	0,36422	1,19069	1,55491	0,76576	0,8468
1,02	0,85211	0,52337	1,62813	2,77319	0,36059	1,20630	1,56689	0,76987	0,8508
1,03	0,86730	0,51482	1,66524	2,80107	0,35701	1,22203	1,57904	0,77391	0,8548
1,04	0,86240	0,50622	1,70361	3,82992	0,35345	1,23788	1,59134	0,77789	0,8586
1,05	0,86742	0,49757	1,74332	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181	0,8624
1,06	0,87236	0,48887	1,78442	2,88637	0,34646	1,26996	1,61641	0,78566	0,8661
1,07	0,87720	0,48012	1,82703	2,91538	0,34301	1,28619	1,62919	0,78946	0,8698
1,08	0,88196	0,47133	1,87122	2,94468	0,33960	1,30254	1,64214	0,79320	0,8733
1,09	0,88663	0,46249	1,91709	2,97427	0,33622	1,31903	1,65525	0,79688	0,8768
1,10	0,89121	0,45360	1,96476	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050	0,8802
1,11	0,89570	0,44466	2,01434	3,03436	0,32956	1,35240	1,68196	0,80406	0,8835
1,12	0,90010	0,43568	2,06596	3,06485	0,32628	1,36929	1,69557	0,80757	0,8868
1,13	0,90441	0,42666	2,11975	3,09566	0,32303	1,38631	1,70934	0,81102	0,8900

Продолжение табл. 16

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\operatorname{erf}(x)$
1,14	0,90863	0,41759	2,17588	3,12677	0,31982	1,40347	1,72329	0,81441	0,8931
1,15	0,91276	0,40849	2,23450	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775	0,8961
1,16	0,91680	0,39934	2,29580	3,18993	0,31349	1,43822	1,75171	0,82104	0,8991
1,17	0,92075	0,39015	2,35998	3,22199	0,31037	1,45581	1,76618	0,82427	0,9020
1,18	0,92461	0,38092	2,42727	3,25437	0,30728	1,47355	1,78083	0,82745	0,9048
1,19	0,92837	0,37166	2,49790	3,28708	0,30422	1,49143	1,79565	0,83058	0,9076
1,20	0,93204	0,36236	2,57215	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365	0,9103
1,21	0,93562	0,35302	2,65033	3,35348	0,29820	1,52764	1,82584	0,83668	0,9130
1,22	0,93910	0,34365	2,73275	3,38718	0,29523	1,54598	1,84121	0,83965	0,9155
1,23	0,94249	0,33424	2,81982	3,42123	0,29229	1,56447	1,85676	0,84258	0,9181
1,24	0,94579	0,32480	2,91193	3,45561	0,28938	1,58311	1,87250	0,84546	0,9205
1,25	0,94898	0,31532	3,00957	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828	0,9229
1,26	0,95209	0,30582	3,11327	3,52542	0,28365	1,62088	1,90454	0,85106	0,9252
1,27	0,95510	0,29628	3,22363	3,56085	0,28083	1,64001	1,92084	0,85380	0,9275
1,28	0,95802	0,28672	3,34135	3,59664	0,27804	1,65930	1,93734	0,85648	0,9297
1,29	0,96084	0,27712	3,46721	3,63279	0,27527	1,67876	1,95403	0,85913	0,9319
1,30	0,96356	0,26750	3,60210	3,66930	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172	0,9340
1,31	0,96618	0,25785	3,74708	3,70617	0,26982	1,71818	1,98800	0,86428	0,9361
1,32	0,96872	0,24818	3,90335	3,74342	0,26714	1,73814	2,00528	0,86678	0,9381
1,33	0,97115	0,23848	4,07231	3,78104	0,26448	1,75828	2,02276	0,86925	0,9400
1,34	0,97348	0,22875	4,25562	3,81904	0,26185	1,77860	2,04044	0,87167	0,9419
1,35	0,97572	0,21901	4,45522	3,85743	0,25924	1,79809	2,05833	0,87405	0,9438

1,36	0,97786	0,20924	4,67344	3,89619	0,25666	1,81977	2,07643	0,87639	0,9456
1,37	0,97991	0,19945	4,91306	3,93535	0,25411	1,84062	2,09473	0,87869	0,9473
1,38	0,98185	0,18964	5,17744	3,97490	0,25158	1,86166	2,11324	0,88095	0,9490
1,39	0,98730	0,17981	5,47069	4,01485	0,24908	1,88289	2,13196	0,88317	0,9507
1,40	0,98545	0,16997	5,79789	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535	0,9523
1,41	0,98710	0,16010	6,16536	4,09596	0,24414	1,92591	2,17005	0,88749	0,9539
1,42	0,98865	0,15023	6,58112	4,13712	0,24171	1,94770	2,18942	0,88960	0,9554
1,43	0,99010	0,14033	7,05547	4,17870	0,23931	1,96970	2,20900	0,89167	0,9569
1,44	0,99146	0,13042	7,60183	4,22070	0,23693	1,99188	2,22881	0,89370	0,9583
1,45	0,99271	0,12050	8,23810	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569	0,9597
1,46	0,99387	0,11057	8,98861	4,30596	0,23224	2,03686	2,26910	0,89765	0,9611
1,47	0,99492	0,10063	9,88737	4,34924	0,22993	2,05965	2,28958	0,89958	0,9624
1,48	0,99588	0,09067	10,98338	4,39295	0,22764	2,08265	2,31029	0,90147	0,9637
1,49	0,99674	0,08071	12,34986	4,43710	0,22537	2,10586	2,33123	0,90332	0,9649
1,50	0,99749	0,07074	14,10142	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515	0,9661
1,60	0,99957	—0,02920	—34,23254	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167	0,9763
1,70	0,99166	—0,12884	—7,69660	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93541	0,9838
1,80	0,97385	—0,22720	—4,28626	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681	0,9891
1,90	0,94630	—0,32329	—2,92710	6,68589	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624	0,9928
2,00	0,90930	—0,41615	—2,18504	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403	0,9953
2,10	0,86321	—0,50485	—1,70985	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045	0,9970
2,20	0,80850	—0,58850	—1,37382	9,02501	0,11080	4,45711	4,56791	0,97574	0,9981
2,30	0,74571	—0,66628	—1,11921	9,97418	0,10026	4,93696	5,03722	0,98010	0,9989

Продолжение табл. 16

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\operatorname{erf}(x)$
2,40	0,67546	—0,73739	—0,91601	11,02318	0,09072	5,46623	5,55695	0,98367	0,9993
2,50	0,59847	—0,80114	—0,74702	12,18249	0,08208	6,05020	6,13229	0,98661	0,9996
2,60	0,51550	—0,85689	—0,60160	13,46374	0,07427	6,69473	6,76901	0,98903	0,9998
2,70	0,42738	—0,90407	—0,47273	14,87973	0,06721	7,40626	7,47347	0,99101	0,9999
2,80	0,33499	—0,94222	—0,35553	16,44465	0,06081	8,19192	8,25273	0,99263	0,9999
2,90	0,23925	—0,97096	—0,24641	18,17415	0,05502	9,05956	9,11458	0,99396	1,0000
3,00	0,14112	—0,98999	—0,14255	20,08554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505	1,0000
3,10	0,04158	—0,99914	—0,04162	22,19795	0,04505	11,07645	11,12150	0,99595	1,0000
3,20	—0,05837	—0,99829	0,05847	24,53253	0,04076	12,28665	12,28665	0,99668	1,0000
3,30	—0,15775	—0,98748	0,15975	27,11264	0,03688	13,53788	13,57476	0,99728	1,0000
3,40	—0,25554	—0,96680	0,26432	29,96410	0,03337	14,96536	14,99874	0,99777	1,0000
3,50	—0,35078	—0,93646	0,37459	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818	1,0000
3,60	—0,44252	—0,89676	0,49347	36,59823	0,02732	18,28546	18,31278	0,99851	1,0000
3,70	—0,52984	—0,84810	0,62473	40,44730	0,02472	20,21129	20,23601	0,99878	1,0000
3,80	—0,61186	—0,79097	0,77356	44,70118	0,02237	22,33941	22,36178	0,99900	1,0000
3,90	—0,68777	—0,72593	0,94742	49,40245	0,02024	24,69110	24,71135	0,99918	1,0000
4,00	—0,75680	—0,65364	1,15782	54,59815	0,01832	27,28992	27,80823	0,99933	1,0000
4,10	—0,81828	—0,57482	1,42353	60,34029	0,01657	30,16186	30,17843	0,99945	1,0000

4,20	—0,87158	—0,49026	1,77778	66,68633	0,01500	33,33567	33,35066	0,99955	1,0000
4,30	—0,91617	—0,40080	2,28585	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963	1,0000
4,40	—0,95160	—0,30733	3,09632	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970	1,0000
4,50	—0,97753	—0,21080	4,63733	90,01713	0,01111	45,00301	45,01412	0,99975	1,0000
4,60	—0,99369	—0,11215	8,86018	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980	1,0000
4,70	—0,99992	—0,01239	80,71280	109,9472	0,00910	54,96904	54,97813	0,99983	1,0000
4,80	—0,99616	0,08750	—11,38487	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99986	1,0000
4,90	—0,98245	0,18651	—5,26749	134,2898	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989	1,0000
5,00	—0,95892	0,28366	—3,38052	148,4132	0,00674	74,20321	74,20995	0,99991	1,0000
5,10	—0,92581	0,37798	—2,44939	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993	1,0000
5,20	—0,88345	0,46852	—1,88464	181,2722	0,00552	90,63336	90,63888	0,99994	1,0000
5,30	—0,83227	0,55437	—1,50128	200,3368	0,00499	100,1659	100,1709	0,99995	1,0000
5,40	—0,77276	0,63469	—1,21754	221,4064	0,00452	110,7009	110,7055	0,99996	1,0000
5,50	—0,70554	0,70867	—0,99558	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99997	1,0000
5,60	—0,63127	0,77557	—0,81394	270,4264	0,00370	135,2114	135,2150	0,99997	1,0000
5,70	—0,55069	0,83471	—0,65973	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998	1,0000
5,80	—0,46460	0,88552	—0,52467	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998	1,0000
5,90	—0,37388	0,92748	—0,40311	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99999	1,0000
6,00	—0,27942	0,96017	—0,29101	403,4288	0,00248	201,7132	201,7156	0,99999	1,0000

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

Раздел III

ЗАТВЕРДЕВАНИЕ И ОХЛАЖДЕНИЕ ОТЛИВКИ В ПЕСЧАНЫХ ФОРМАХ

Раздел IV

ЗАТВЕРДЕВАНИЕ И ОХЛАЖДЕНИЕ ОТЛИВКИ В КОКИЛЕ

Геннадий Федорович Баландин

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОТЛИВКИ

Редактор издательства **Ю. Л. Маркиз**

Технический редактор **А. И. Захарова** Корректоры **А. П. Озерова и О. Е. Мишина**

Переплет художника **Е. В. Бекетова**

Сдано в набор 27/I 1976 г. Подписано к печати 20/V 1976 г. Т-06755.
Формат 60×90 1/16 Бумага типографская № 1.
Усл. печ. л. 20,5 Уч.-изд л. 21,5
Цена 99 коп. Тираж 12 000 экз. Заказ № 725

Издательство «Машиностроение», 107885, Москва, Б-78, 1-й Басманный пер., 3

Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10