С. В. БОЯРШИНОВ

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ МАШИН

«Допущено Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов машиностроительных
специальностей вузов»

МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1973

Б86
УДК 621.01 (075)

Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин. Учебное пособие для студентов вузов, «Машиностроение», 456 с.

В книге изложены методы расчета на прочность и жесткость основных элементов машиностроительных конструкций — тонкостенных стержней, толстостенных цилиндров, дисков, колец, оболочек.

Пособие предназначено для студентов машиностроительных специальностей втузов. Оно будет полезно также инженерам, занимающимся расчетами машин на прочность.

Ил. 250, табл. 16, список лит. 29 назв.

Рецензенты: кафедра «Сопротивление материалов» ХПИ им. В. И. Ленина, проф. д-р техн. наук С. Н. Соколов

$Б \frac{314-005}{038\ (01)-73}\ 5-73$

Сергей Владимирович Бояршинов

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ МАШИН

Редактор издательства *Л. П. Рыжова*

Технический редактор *А. И. Захарова* Корректор *Л. В. Асташенок*

Художник *В. Б. Торгашов*

Сдано в набор 31/I 1973 г. Подписано к печати 25/X 1973 г. Т-15935. Формат 60×90[1]/[16]. Бумага тип. № 3. Печ. л. 28,5. Уч.-изд. л. 28,7. Тираж 25 000 экз. Заказ № 688. Цена 1 р. 11 к.

Издательство «Машиностроение» Москва, Б-78, 1-й Басманный пер., 3

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136 Ленинград, Гатчинская ул., 26

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль расчетов на прочность в современном машиностроении становится все более ответственной, а сами расчеты — все более сложными. Решение большинства задач, выдвигаемых практикой в области прочности, стало доступным лишь высококвалифицированным специалистам.

Напряженное состояние деталей конструкций, их прочность и жесткость рассматриваются в курсе «Строительная механика машин». Строительная механика в широком смысле слова включает также такие разделы, как устойчивость элементов конструкций, колебания и удар, выносливость при циклически изменяющихся нагрузках, пластичность и ползучесть и т. д. В данный курс эти разделы не вошли, так как в настоящее время они выделились в самостоятельные дисциплины и по ним читаются специальные курсы.

Основное внимание в курсе уделено тонкостенным элементам (тонкостенным стержням, пластинам, дискам, оболочкам). Это объясняется тем, что тонкостенные элементы широко применяются в машиностроительных конструкциях, в то же время теория напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов более сложна, чем теория напряженного состояния бруса, и потому в курсе «Сопротивление материалов» почти не рассматривается.

Первые работы, посвященные исследованию напряженного состояния тонкостенных элементов, появились в прошлом столетии, однако основное развитие наука о напряженном состоянии тонкостенных стержней, пластин и оболочек получила лишь в последние десятилетия.

Большой вклад в эту науку внесли советские ученые. По существу все основные идеи в теории тонкостенных стержней и оболочек, высказанные за последние 40 лет, принадлежат советской науке. Эти идеи изложены в работах В. З. Власова, А. Л. Гольденвейзера, А. И. Лурье, В. В. Новожилова, А. А. Уманского и др.

Литература по расчетам элементов конструкций на прочность и жесткость весьма обширна, однако материал, относящийся к курсу «Строительная механика машин», разбросан по разным источникам и во многих случаях изложен на уровне, доступном лишь достаточно опытным читателям. В данной книге основные разделы курса изложены на уровне, доступном для широкого круга читателей, и пояснены большим количеством примеров.

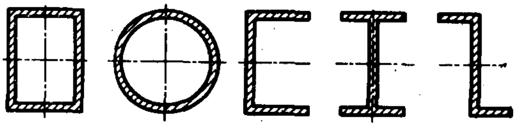
Глава 1

ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 1. Некоторые общие вопросы теории тонкостенных стержней

Тонкостенные стержни широко применяются в машиностроении в качестве элементов рам, ферм и т. п., а также в качестве подкрепляющих элементов в конструкциях, составленных из пластин и оболочек, или как самостоятельные детали машин. Поперечное сечение тонкостенного стержня, называемое иначе его профилем, имеет вид, подобный показанным на рис. 1.1.

Форма профиля определяется конфигурацией его средней линии, делящей толщину стенки пополам. Тонкостенные профили могут быть замкнутые (рис. 1.1, *а, б*) и незамкнутые или открытые (рис. 1.1, *в, г, д*).



а) *б)* *в)* *г)* *д)*

Рис 1.1

Стержень можно считать тонкостенным, если толщина стенки, по крайней мере, в 5—10 раз меньше, чем ширина профиля. К тонкостенным стержням относятся стандартные прокатные профили — угольники, двутавры, швеллеры и т. п. Типичными примерами тонкостенных стержней являются гнутые профили, применяемые в авиастроении.

Применяя тонкостенные стержни в конструкциях, необходимо иметь в виду, что их поведение при нагружении существенно отличается от поведения брусьев сплошного поперечного сечения, в особенности в случае незамкнутого (открытого) профиля (рис. 1.1, *в, г, д*).

В стержне сплошного поперечного сечения характер распределения нагрузок по торцу оказывает влияние на напряженное состояние только непосредственно вблизи торца; уже на небольшом расстоянии от торца (порядка поперечного размера бруса) распределение напряжений определяется только равнодействующей сил, приложенных к торцу (принцип Сен-Венана). Для тонкостенных стержней открытого профиля это положение несправедливо; здесь характер распределения нагрузок по торцу стержня оказывает влияние на напряженное состояние на гораздо большем протяжении, обычно практически по всей длине стержня. Для иллюстрации на рис. 1.2 показаны два бруса, один сплошного поперечного сечения, другой — двутаврового. Оба бруса нагружены по торцу одинаковыми силами. В брусе сплошного сечения заданная система сил вызывает только местные напряжения вблизи торца, и на небольшом расстоянии от торца напряжения практически обращаются в ноль. В брусе двутаврового сечения приложенные силы вызывают существенные напряжения и деформации по всей длине.

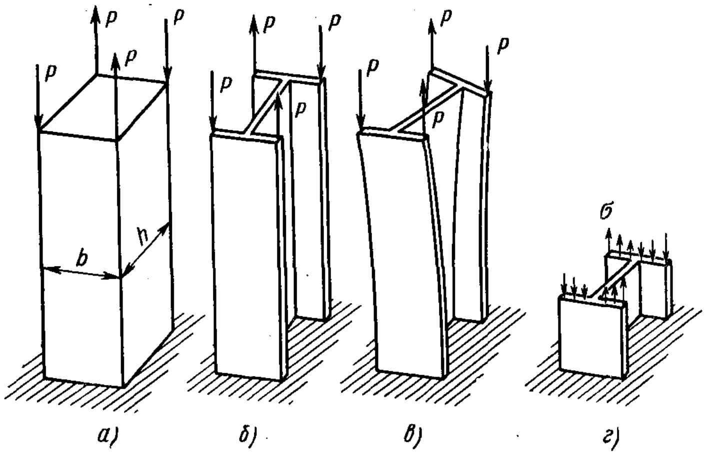


Рис. 1.2

Это объясняется тем, что стенка, соединяющая полки, имеет малую крутильную жесткость и почти не препятствует каждой полке изгибаться самостоятельно, как показано на рис. 1.2, *в*. Такая деформация стержня носит название изгибно-крутильной. Нормальные напряжения в поперечном сечении в этом случае распределяются, как показано на рис. 1.2, *г;* они образуют самоуравновешенную систему сил.

Вторая существенная особенность стержней открытого профиля состоит в том, что при свободном кручении они имеют малую крутильную жесткость; при этом закручивание обычно сопровождается сильным искажением плоскости поперечного сечения, называемым депланацией. Если, например, сравнить углы закручивания трубы замкнутого профиля (рис. 1.3, *а*) и незамкнутого (рис. 1.3, *б*), то при отношении $\frac{\delta}{D} = \frac{1}{40}$ труба незамкнутого профиля закручивается приблизительно в 1200 раз больше. При этом кручение трубы незамкнутого профиля сопровождается сильным искажением плоскости поперечного сечения, как показано на рис. 1.3, *в*. Картина деформации при кручении незамкнутого тонкостенного стержня, однако, совершенно изменяется, если на торцы будут наложены связи, не допускающие искажения их плоскости (например, если торцы стержня будут приварены к жестким плитам). В этом случае на торцах возникнет система взаимоуравновешенных, нормальных напряжений, и крутильная жесткость воз-

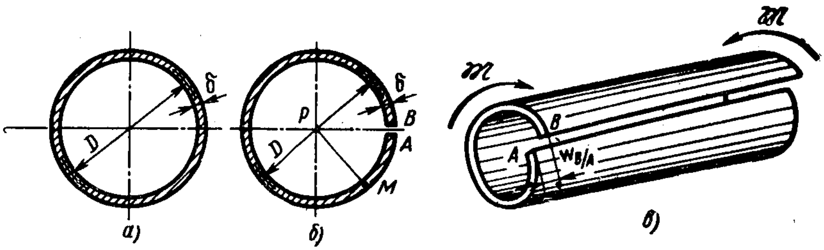


Рис. 1.3

растет в несколько раз. Такой вид кручения называется стесненным.

Общая теория расчета тонкостенных стержней, учитывающая отмеченные выше их особенности, разработана В. З. Власовым, А. А. Уманским и другими авторами [10, 21, 26].

Приступая к изучению теории кручения тонкостенных стержней, прежде всего напомним некоторые общие положения, касающиеся распределения напряжений при кручении.

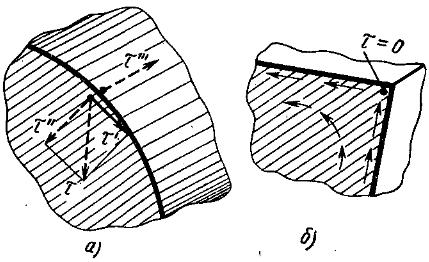


Рис. 1.4

1. Касательные напряжения в поперечном сечении бруса в точках, расположенных у контура сечения, всегда направлены по касательной к контуру. Действительно, если напряжение было бы направлено под углом к контуру, то его можно было бы разложить на две составляющие τ' и τ'' (рис. 1.4, *а*). По закону парности касательных напряжений напряжению τ'' должно соответствовать равное ему напряжение τ''' на наружной поверхности. Но так как наружная поверхность свободна от напряжений, то $\tau''' = 0$; следовательно, τ'' также равно нулю и остается только касательное напряжение τ', направленное вдоль контура.

2. Касательные напряжения в точках, расположенных вблизи выступающих углов, равны нулю (рис. 1.4, *б*). Это положение доказывается аналогично.

На основании указанных положений можно составить некоторое представление о характере распределения касательных напряжений в поперечном сечении бруса при кручении. Еще более ясное представление о распределении напряжений можно получить, используя аналогии кручения с некоторыми другими физическими явлениями.

Широко применяются две аналогии кручения: гидродинамическая и мембранная.

Согласно гидродинамической аналогии, распределение касательных напряжений подобно распределению скоростей жидкости при ее вращательном движении в сосуде такой же формы, как поперечное сечение бруса. Это следует из аналогии уравнений, описывающих оба эти явления.

На рис. 1.5 в качестве примера изображен сосуд прямоугольной формы. При вращательном движении жидкости вектор скорости в контурных точках будет направлен вдоль контура (рис. 1.5, *а*). Наибольшей величины скорость будет достигать в точках, расположенных посредине длинных сторон прямоугольника. В угловых точках, а также в центре скорость будет равна нулю. Именно такое распределение касательных напряжений имеет место при кручении прямоугольного бруса. Сказанное будет справедливо и при любой другой форме поперечного сечения.

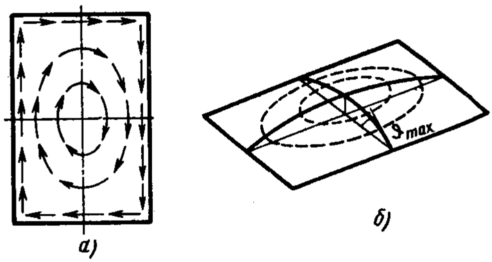


Рис. 1.5

Остановимся на другой важной аналогии кручения, известной под названием мембранной. Представим себе рамку, имеющую такую же форму контура, как и поперечное сечение бруса. На рамку натянута тонкая резиновая или мыльная пленка. При действии на пленку равномерного давления ее плоскость переходит в выпуклую поверхность. Если натяжение пленки постоянно по плоскости и изгибная жесткость мембраны пренебрежимо мала, то уравнение упругой поверхности мембраны подобно уравнению, определяющему функцию напряжений в задаче о кручении. Из сопоставления уравнений следует, что угол наклона нормали в каждой точке выпуклой поверхности пропорционален величине касательного напряжения в соответствующей точке поперечного сечения; горизонтали поверхности (линии одинакового прогиба) соответствуют траекториям касательных напряжений (т. е. линиям, вдоль которых направлены касательные напряжения).

Объем, ограниченный поверхностью, пропорционален жесткости бруса на кручение.

Мембранную аналогию широко применяют для экспериментального определения величины напряжений и крутильной жесткости брусьев сложного поперечного сечения. При этом используют следующие зависимости:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \vartheta \frac{M_{\text{кр}}}{J_{\text{кр}}} \frac{2T}{p}; \\ \theta &= \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{кр}}}; \\ J_{\text{кр}} &= v \frac{4T}{p}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

где ϑ — измеренный угол наклона пленки, рад;
τ — касательное напряжение;
G — модуль сдвига;
θ — относительный угол закручивания;
T — натяжение пленки, Н/см;
p — давление, Н/см^2;
v — объем, ограниченный упругой поверхностью мембраны (определяемый экспериментально).

Величину $\frac{T}{p}$, входящую в приведенные формулы, определяют опытным путем на круглой мембране с использованием известных значений напряжений и крутильной жесткости бруса круглого поперечного сечения.

В качестве примера на рис. 1.5, *б* изображена выпуклая поверхность мембраны прямоугольного контура. Как можно видеть, наибольшей величины угол наклона $\vartheta_{\max}$ достигает в точке, расположенной посредине длинной стороны прямоугольника. В угловых же точках и в центре прямоугольника угол наклона нормали равен нулю.

Рассмотрим вопрос о положении центра кручения и о депланации (искажения плоскости) поперечного сечения.

Центром кручения будем называть точку в поперечном сечении, через которую проходит продольная ось и вокруг которой происходит поворот одного поперечного сечения относительно другого.

При свободном кручении в пределах малых деформаций положение центра кручения остается неопределенным. Это объясняется тем, что любую продольную ось, проходящую через произвольную точку поперечного сечения, можно принять за неподвижную и считать, что в пределах малых деформаций она не искривляется. При перенесении центра кручения из одной точки в другую добавляется лишь некоторый поворот бруса как жесткого целого относительно поперечных осей.

Обозначим через θ угол закручивания, отнесенный к единице длины бруса, и через w — перемещение произвольной точки сечения в направлении оси бруса. На рис. 1.6, *а* и *б* показан бесконечно малый элемент закрученного бруса, выделенный двумя поперечными и двумя продольными сечениями. На рис. 1.6, *в* тот же элемент изображен в плане — сплошными линиями до деформации и штриховыми — после деформации. Точки A и A_1 элемента до и после деформации совмещены. Вследствие депланации точка D получает осевое смещение относительно точки A, равное dw, и переходит в точку D_1. При этом отрезок AD поворачивается в плоскости DAB на угол $\alpha = \frac{dw}{ds}$.

Определим перемещение точки B. При закручивании бруса поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого на угол $d\varphi = \theta dz$ вокруг некоторой точки P. При этом точка B получает смещение по окружности $BB_1 = \rho\theta dz$ и переходит в по-

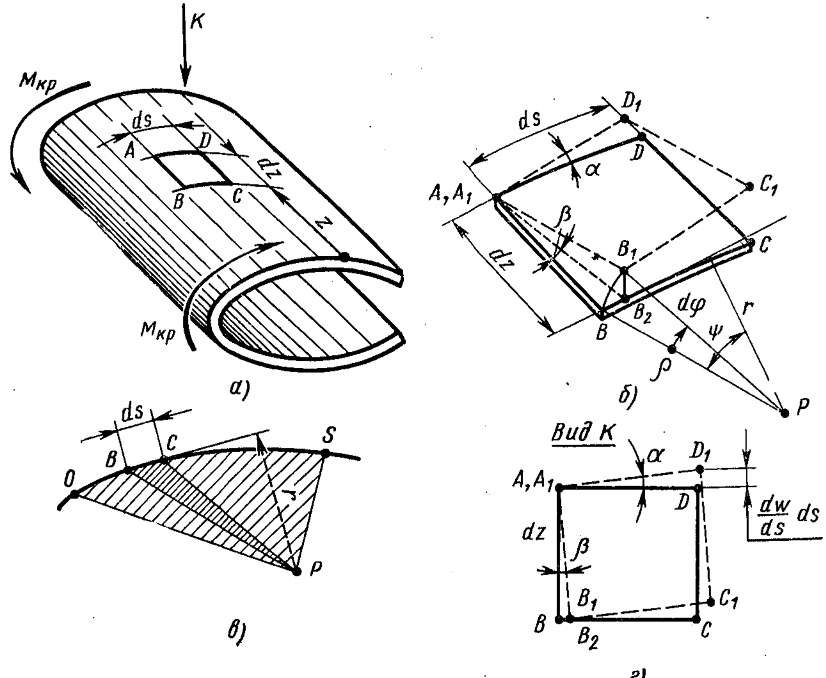


Рис. 1.6

ложение B_1 (рис. 1.6, *б* и *в*). Перемещение точки B в плоскости, касательной к контуру, равно проекции отрезка BB_1 на направление касательной

$$BB_2 = BB_1 \cos\psi,$$

но

$$\cos\psi = \frac{r}{\rho},$$

где r — длина перпендикуляра, опущенного из точки P на касательную к контуру.

Следовательно,

$$BB_2 = \rho\theta\, dz \frac{r}{\rho} = \theta r\, dz.$$

Разделив это перемещение на $AB = dz$, получим угол поворота отрезка AB в касательной плоскости:

$$\beta = \theta r.$$

Очевидно, что разность углов β и α представляет собой изменение прямого угла DAB, т. е. угловую деформацию

$$\gamma = \beta - \alpha.$$

Подставив значения углов α и β и выразив угловую деформацию по закону Гука, получим следующую зависимость:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \theta r - \frac{dw}{ds}$$

или

$$dw = -\frac{\tau ds}{G} + \theta r\, ds. \tag{1.2}$$

Здесь через τ обозначено касательное напряжение в поперечном сечении по направлению касательной к контуру.

Величина rds, равная удвоенной площади треугольника с основанием ds и высотой r (рис. 1.6, *г*), представляет собой элемент так называемой секториальной площади

$$rds = d\omega. \tag{1.3}$$

Используя обозначение (1.3) и интегрируя (1.2) по контуру в пределах от 0 до s, найдем величину осевого смещения точки S контура

$$w_S = \int_0^s \left[-\frac{\tau ds}{G} + \theta\, d\omega\right] = -\frac{1}{G}\int_0^s \tau\, ds + \theta\omega_S. \tag{1.4}$$

Функция $w(s)$ характеризует депланацию контура. Величина ω_S называется секториальной площадью и равна удвоенной площади сектора OPS (рис. 1.6, *в*). Будем считать эту величину положительной, если при обходе контура от точки O к точке S движение совершается по часовой стрелке (относительно полюса P).

Некоторая неопределенность величины смещения w, связанная с произвольностью выбора центра кручения P и начала отсчета O, отражает возможность перемещения бруса как жесткого целого в продольном направлении и поворота его относительно поперечных осей.

Перемещение w отсчитывается от плоскости, перпендикулярной продольной оси, проходящей через точку P (в деформированной системе) и заключающей в себе начало отсчета O. При изменении положения точек P и O положение этой плоскости изменяется.

Следует заметить, что зависимости (1.2) и (1.4) справедливы для любого поперечного сечения, в том числе и для сплошного. В последнем случае под τ следует понимать составляющую напряжения по направлению касательной к выбранному контуру s.

§2. Свободное кручение тонкостенных стержней замкнутого и незамкнутого профиля

Кручение называется свободным, если депланация сечения ничем не стеснена.

В случае круглого поперечного сечения, сплошного или полого, а также в некоторых частных случаях некруглого сечения депланации при кручении не возникает. В этих случаях кручение всегда будет свободным независимо от связей, наложенных на торцы.

При свободном кручении в поперечных сечениях действуют только касательные напряжения. Нормальные напряжения отсутствуют, так как депланация всех сечений одинакова, и удлинения продольных волокон равны нулю.

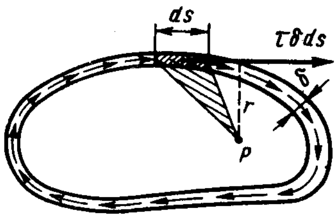


Рис. 1.7

Теория свободного кручения тонкостенных стержней достаточно полно рассматривается в курсе «Сопротивление материалов», поэтому ограничимся лишь тем, что приведем основные результаты.

На рис. 1.7 изображен тонкостенный замкнутый профиль с контуром произвольной формы. Толщина стенки δ вдоль контура может быть переменной. Если толщина стенки мала, то с достаточной степенью точности можно считать, что касательные напряжения по толщине стенки постоянны и во всех точках направлены параллельно средней линии контура сечения. Вдоль контура напряжения из-

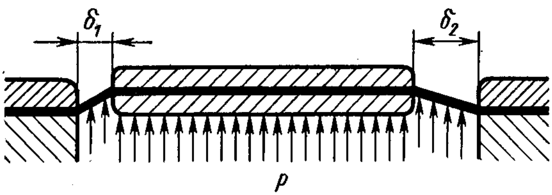


Рис. 1.8

меняются так, что произведение величины напряжения на толщину стенки δ остается постоянным:

$$\tau\delta = \text{const}. \tag{1.5}$$

Справедливость этих положений легко доказать, используя гидродинамическую аналогию. К тем же выводам относительно характера распределения напряжений τ можно прийти, используя мембранную аналогию; при этом наружный контур мембраны надо считать неподвижным, а внутренний — прикрепленным к жесткой пластине, которая может перемещаться поступательно в вертикальном направлении, как показано на рис. 1.8.

Напряжение в произвольной точке контура связано с крутящим моментом зависимостью

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2f\delta}. \qquad (1.6)$$

Наибольшей величины напряжение достигает там, где толщина стенки наименьшая:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{2f\delta_{min}} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}; \qquad (1.7)$$

здесь $W_{кр}$ — момент сопротивления кручению

$$W_{кр} = 2f\delta_{min}; \qquad (1.8)$$

f — площадь контура по средней линии.

Угол закручивания на единицу длины стержня вычисляется по следующей формуле:

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_{кр}}, \qquad (1.9)$$

где $J_{кр}$ — геометрический фактор жесткости при кручении в см^4,

$$J_{кр} = 4f^2 \frac{1}{\oint \frac{ds}{\delta}}. \qquad (1.10)$$

При постоянной толщине стенки формула (1.10) упрощается:

$$J_{кр} = 4f^2 \frac{\delta}{S}, \qquad (1.10а)$$

где S — периметр профиля по средней линии.

Формулу (1.9) обычно выводят, рассматривая энергию деформации стержня. Однако более просто ее можно получить, используя зависимость (1.2). Поскольку осевое перемещение w в каждой точке контура имеет одно единственное значение, то интеграл от dw по замкнутому контуру должен быть равен нулю:

$$\oint dw = 0; \quad \oint \left[-\frac{M_{кр}}{2f\delta} \cdot \frac{ds}{G} + \theta\, d\omega \right] = 0.$$

Отсюда, с учетом равенства $\oint d\omega = 2f\delta$ нетрудно получить формулу (1.9).

Приведем пример определения депланации при свободном кручении стержня замкнутого профиля.

Пример 1.1. Коробчатый стержень (рис. 1.9, *а*) нагружен крутящим моментом $M_{кр} = 100$ Н·м. Определить депланацию поперечного сечения.

Дано: $\delta = 2{,}5$ мм; $H = 20\delta$; $B = 10\delta$; $l = 1$ м; $G = 8 \cdot 10^6$ Н/см^2.

Площадь контура сечения $f = BH = 200\delta^2$ см^2.

Периметр контура $S = 2B + 2H = 60\delta$ см.

Момент сопротивления кручению $W_{кр} = 2f\delta = 400\delta^3 = \frac{25}{4}$ см^3.

Геометрический фактор жесткости при кручении

$$J_{кр}=\frac{4f^2\delta}{S}=\frac{8}{3}10^3\delta^4=\frac{125}{12}\text{ см}^4.$$

Касательное напряжение (постоянное по контуру) $\tau=\frac{M_{кр}}{W_{кр}}=1600$ Н/см².

Угол закручивания на единицу длины $\theta=\frac{M_{кр}}{GJ_{кр}}=12\cdot10^{-5}$ рад/см $=$ $=0{,}69$ град/м.

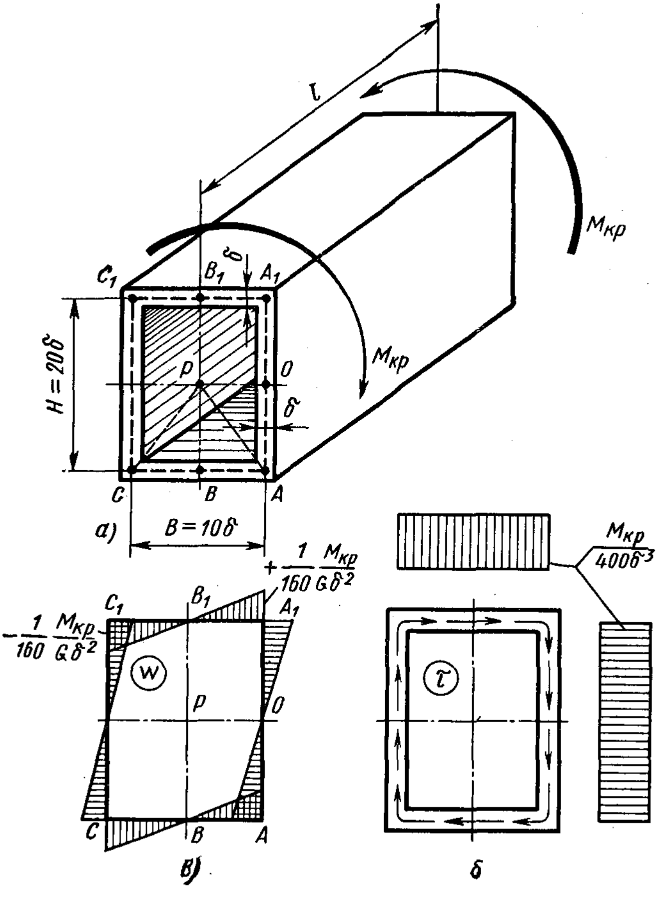


Рис. 1.9

Для определения депланации сечения поместим полюс P в центре сечения и выберем начало отсчета секториальной площади в точке O.

Запишем координаты ряда точек и значения секториальной площади ω: для точки O

$$s_O=0;\quad \omega_O=0;$$

для точки A

$$s_A=\frac{H}{2}=10\delta=2{,}5\text{ см};\quad \omega_A=2f_{\Delta OPA}=50\delta^2=\frac{25}{8}\text{ см}^2;$$

для точки B

$$s_B = s_A + \frac{B}{2} = 15\delta = 3{,}75 \text{ см}; \quad \omega_B = \omega_A + 2f_{\Delta\, APB} = 100\delta^2 = \frac{50}{8} \text{ см}^2;$$

для точки C:

$$s_C = s_B + \frac{B}{2} = 20\delta = 5 \text{ см}; \quad \omega_C = \omega_B + 2f_{\Delta BPC} = 150\delta^2 = \frac{75}{8} \text{ см}^2.$$

Осевые смещения точек сечения вычислим по формуле (1.4):
в точке O

$$w_O = 0;$$

в точке A

$$w_A = -\frac{\tau s_A}{G} + \theta\omega_A = -\frac{1}{160}\frac{M_{\text{кр}}}{G\delta^2} = -12{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ см};$$

в точке B

$$w_B = -\frac{\tau s_B}{G} + \theta\omega_B = 0;$$

в точке C

$$w_C = -\frac{\tau s_C}{G} + \theta\omega_C = +\frac{1}{160}\frac{M_{\text{кр}}}{G\delta^2} = 12{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$$

Эпюра осевых смещений приведена на рис. 1.9, *в*.

Осевые смещения, связанные с депланацией сечения, играют существенную роль при стесненном кручении, когда депланация торцов не может происходить свободно. В этом случае напряжения и деформации могут сильно отличаться от соответствующих величин при свободном кручении. Исследование стесненного кручения имеет особенно большое значение для открытых профилей. Для замкнутых профилей этот вопрос менее существенен, так как напряжения, возникающие за счет стеснения депланации, не велики и при удалении от места стеснения депланации быстро затухают.

Теория стесненного кручения замкнутых профилей изложена в работе [21]. В некоторых случаях депланация тонкостенных замкнутых профилей вообще не возникает, следовательно, не может быть и стесненного кручения. В частности, не дает депланации замкнутый профиль постоянной толщины, контур которого представляет собой многоугольник, описанный около круга. Действительно, для такого профиля

$$r = \frac{d}{2} = \text{const}; \quad f = \frac{Sr}{2}; \quad \tau = \frac{M_{\text{кр}}}{2f\delta} = \text{const};$$

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}} S}{G4f^2\delta}; \quad \omega = rs,$$

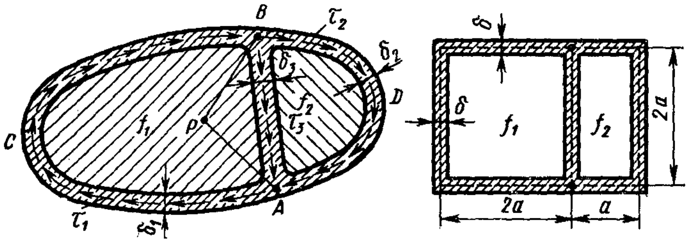
где S — периметр, а s — координата произвольной точки, отсчитываемая вдоль контура.

Подставив эти величины в уравнение (1.4), найдем, что осевое смещение в произвольной точке равно нулю.

Также не дает депланации прямоугольный замкнутый профиль, у которого толщина стенки на коротких сторонах меньше, чем на длинных сторонах, во столько же раз, во сколько B меньше H (B и H — малая и большая стороны прямоугольника).

Остановимся кратко на вопросе о кручении стержней многосвязного замкнутого профиля.

На рис. 1.10, *а* в качестве примера показан трехсвязный профиль. Примем, что на участке ACB толщина постоянна и равна δ_1, длина дуги S_1 и напряжение τ_1. Аналогично на участке BDA: δ_2; S_2; τ_2 и в переборке BA — δ_3, S_3 и τ_3. Из условия постоянства



а) *б)*

Рис. 1.10

циркуляции касательного напряжения следует, что τ_1, τ_2 и τ_3 связаны соотношением

$$\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2 + \tau_3\delta_3. \qquad (1.11)$$

Выбрав произвольно полюс P (рис. 1.10, *а*), вычислим крутящий момент

$$M_{кр} = \int_{S_1} \tau_1\delta_1\, ds_1 r + \int_{S_2} \tau_2\delta_2\, ds_2 r + \int_{S_3} \tau_3\delta_3\, ds_3 r =$$

$$= \tau_1\delta_1 \int_{S_1} ds_1 r + \tau_2\delta_2 \int_{S_2} ds_2 r + \tau_3\delta_3 \int_{S_2} ds_3 r.$$

Но

$$\int_{S_1} ds_1 r = \omega_1 = 2f_{PACB}; \quad \int_{S_2} ds_2 r = \omega_2 = 2f_{PBDA}; \quad \int_{S_3} ds_3 r = \omega_3 = 2f_{PBA}.$$

И, кроме того,

$$f_{PACB} + f_{PBA} = f_1; \quad f_{PBDA} - f_{PBA} = f_2,$$

где f_1 и f_2 — площади левой и правой области соответственно.

Следовательно,

$$M_{кр} = \tau_1\delta_1 (2f_1 - 2f_{PBA}) + \tau_2\delta_2 (2f_2 + 2f_{PBA}) + \tau_3\delta_3 2f_{PBA},$$

или с учетом соотношения (1.11)

$$M_{кр} = \tau_1\delta_1 2f_1 + \tau_2\delta_2 2f_2. \qquad (1.12)$$

Еще два уравнения, необходимые для определения τ_1, τ_2, τ_3, получим, применив зависимость (1.4) к замкнутым контурам $ACBA$

и $ABDA$:

$$-\int\limits_0^{S_1}\frac{\tau_1\,ds_1}{G}-\int\limits_0^{S_3}\frac{\tau_3\,ds_3}{G}+\theta 2f_1=0 \quad \text{или} \quad \tau_1 S_1+\tau_3 S_3=2f_1 G\theta; \quad (1.13)$$

$$-\int\limits_{S_3}^{0}\frac{\tau_3\,ds_3}{G}-\int\limits_0^{S_2}\frac{\tau_2\,ds_2}{G}+\theta 2f_2=0 \quad \text{или} \quad -\tau_3 S_3+\tau_2 S_2=2f_2 G\theta. \quad (1.14)$$

Решение системы уравнений (1.11)—(1.14) приводит к следующим зависимостям:

$$\tau_1=\frac{[S_3\delta_2(f_1+f_2)+S_2\delta_3 f_1]\,M_{\text{кр}}}{2S_3\delta_1\delta_2(f_1+f_2)^2+2\delta_3\delta_1 S_2 f_1^2+2\delta_3\delta_2 S_1 f_2^2}; \quad (1.15)$$

$$\tau_2=\frac{[S_3\delta_1(f_1+f_2)+S_1\delta_3 f_2]\,M_{\text{кр}}}{2S_3\delta_1\delta_2(f_1+f_2)^2+2\delta_3\delta_1 S_2 f_1^2+2\delta_3\delta_2 S_1 f_2^2}; \quad (1.16)$$

$$\tau_3=\frac{\tau_1\delta_1-\tau_2\delta_2}{\delta_3}; \quad (1.17)$$

$$\theta=\frac{\tau_1 S_1+\tau_2 S_2}{2G(f_1+f_2)}. \quad (1.18)$$

Пример 1.2. Поперечное сечение стержня изображено на рис. 1.10, б. Определить напряжения при свободном кручении.

В данном случае $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta$;

$$S_1=6a;\quad S_2=4a;\quad S_3=2a;\quad f_1=4a^2;\quad f_2=2a^2.$$

По формулам (1.15)—(1.18) найдем

$$\tau_1=\frac{7}{80}\frac{M_{\text{кр}}}{a^2\delta};\quad \tau_2=\frac{6}{80}\frac{M_{\text{кр}}}{a^2\delta};\quad \tau_3=\frac{1}{80}\frac{M_{\text{кр}}}{a^2\delta};$$

$$\theta=\frac{11}{160}\frac{M_{\text{кр}}}{Ga^3\delta}.$$

Для сравнения укажем, что величина напряжения при кручении того же профиля, но без переборки, $\tau=\frac{M_{\text{кр}}}{12a^2\delta}$, что на 5% меньше, чем τ_1. Следовательно, установка переборки приводит к небольшому увеличению максимального напряжения.

Величина угла закручивания профиля с переборкой на 1% меньше, чем профиля без переборки.

Если переборка установлена точно посредине профиля, так что $S_1=S_2$, $f_1=f_2$, то крутящий момент полностью передается на наружную оболочку и переборка остается ненапряженной.

Приведенное решение приближенное, так как в нем не учтена переменность напряжения по толщине стенки и не отражен характер напряженного состояния в узловых точках, где около входящих углов возникает концентрация напряжений.

Перейдем к рассмотрению теории свободного кручения тонкостенных стержней открытого профиля.

Вначале рассмотрим свободное кручение тонкой полосы прямоугольного сечения. Тонкая полоса представляет собой простейший тонкостенный брус незамкнутого профиля и может рассматриваться как элемент более сложных незамкнутых сечений (двутавр, швеллер и т. д.).

Распределение касательных напряжений по поперечному сечению полосы показано на рис. 1.11. Наибольшей величины напряжение достигает в точках, расположенных вдоль длинной стороны прямоугольника, и по длине стороны имеет примерно постоянное значение.

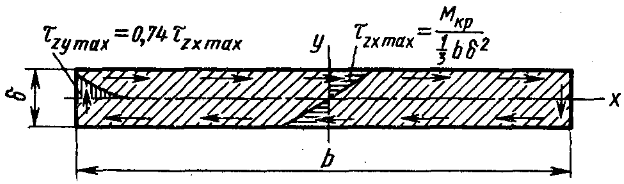


Рис. 1.11

Решение задачи о чистом кручении тонкой полосы (при $b \gg \delta$), выполненное методами теории упругости, приводит к следующим зависимостям:

$$\theta=\frac{M_{кр}}{GJ_{кр}}; \tag{1.19}$$

$$\tau_{zx\,\max}=\frac{M_{кр}}{W_{кр}}, \tag{1.20}$$

где $J_{кр}$ — геометрический фактор жесткости полосы при кручении

$$J_{кр}=\frac{1}{3}\,b\delta^3; \tag{1.21}$$

$W_{кр}$ — момент сопротивления кручению полосы;

$$W_{кр}=\frac{1}{3}\,b\delta^2. \tag{1.22}$$

Формулу для $\tau_{\max}$ можно написать также в следующем виде:

$$\tau_{zx\,\max}=G\theta\delta. \tag{1.23}$$

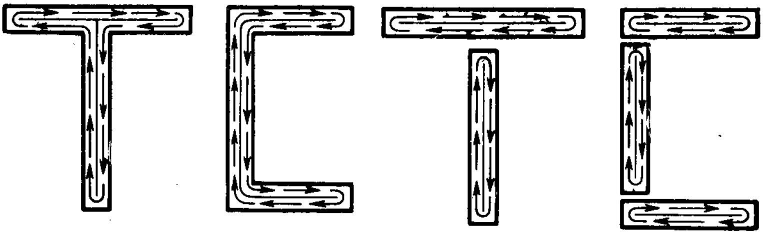
Величина напряжения $\tau_{zy\,\max}$ в точке, расположенной посредине короткой стороны:

$$\tau_{zy\,\max}=0{,}74\tau_{zx\,\max}. \tag{1.24}$$

Несмотря на то, что область, в которой действуют напряжения τ_{zy}, невелика, доля воспринимаемого ими момента значительна, так как эти напряжения образуют пару сил с большим плечом.

Чтобы составить представление о распределении касательных напряжений при свободном кручении сложных незамкнутых профилей (рис. 1.12, *а* и *б*), воспользуемся мембранной аналогией. Представим себе выпуклую поверхность пленки натянутой на контур заданной формы. Горизонтали этой поверхности, соответствующие траекториям касательных напряжений, имеют форму, показанную стрелками на рис. 1.12, *а* и *б*. Напряжение как бы обегает весь контур сечения. В точках же, расположенных на средней линии, напряжение равно нулю.

Для вывода расчетных зависимостей рассматриваемые профили представляют в виде нескольких отдельных полос, которые закручиваются на одинаковый угол (рис. 1.12, *в* и *г*). Законность такого разделения можно обосновать с помощью той же мембранной аналогии. Действительно, если представить себе выпуклую поверхность пленки, натянутой на заданный контур и на такой же контур, разделенный на отдельные прямоугольники, то можно увидеть, что при малой толщине стенки форма поверхности и углы наклона



а)   б)   в)   г)

Рис. 1.12

пленки будут практически одинаковыми, за исключением областей, близких к перемычкам. Следовательно, значения наибольших напряжений для обоих контуров будут приблизительно одни и те же. Также приблизительно одинаковыми будут и значения геометрического фактора жесткости кручения $J_{кр}$, так как последний пропорционален объему, ограниченному поверхностью пленки. Приняв, что этот объем для заданного профиля равен сумме соответствующих объемов для отдельных прямоугольников, придем к заключению, что геометрический фактор жесткости $J_{кр}$ для заданного профиля равен сумме соответствующих величин для отдельных прямоугольников:

$$J_{кр} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{3} b_i \delta_i^3. \qquad (1.25)$$

Для профиля, состоящего из прямоугольных и трапециевидных полосок, можно написать более общую формулу:

$$J_{кр} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{3} b_i \delta_{i\,ср}^3 \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_i b_i}{\delta_{i\,ср}}\right)^2\right], \qquad (1.26)$$

где $\delta_{i ср}$ — средняя толщина; k_i — уклон; $k_i = \frac{\delta_{i2} - \delta_{i1}}{b_i}$.

Угол закручивания незамкнутого профиля на единицу длины

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_{кр}}. \tag{1.27}$$

Экспериментальная проверка приведенных зависимостей показала, что фактическая жесткость сложных профилей приблизительно на 10% выше вычисленной по формуле (1.25), поэтому иногда в формулу (1.25) вводят поправочный коэффициент α:

$$J_{кр} = \alpha \sum_{1}^{n} \frac{1}{3} b_i \delta_i^3. \tag{1.28}$$

Для двутавровых сечений рекомендуется принимать $\alpha = 1{,}2$; для швеллеров $\alpha = 1{,}12$; для сварных двутавров с поперечными стенками при шаге $t = 3h$ $\alpha \approx 1{,}5$.

Вычислив $J_{кр}$ и θ, с помощью зависимости (1.23) можно определить и максимальное напряжение для каждого прямоугольника. Очевидно, что самое большое напряжение будет в том прямоугольнике, ширина которого наибольшая. Следовательно, для профиля в целом можно написать

$$\tau_{max} = G\theta\delta_{max} = \frac{M_{кр}\delta_{max}}{J_{кр}} \tag{1.29}$$

или

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}, \tag{1.30}$$

где

$$W_{кр} = \frac{J_{кр}}{\delta_{max}}. \tag{1.31}$$

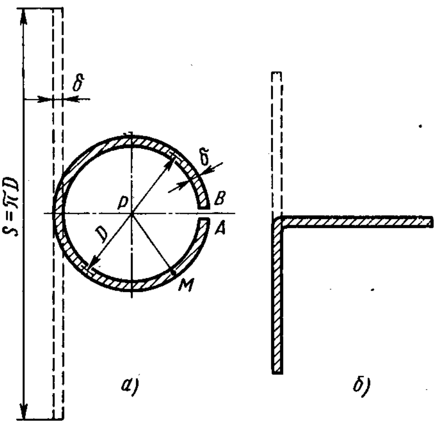


Рис. 1.13

Отметим некоторые особенности гнутых незамкнутых профилей. Такие профили имеют постоянную по контуру толщину δ и могут быть развернуты в прямую полосу шириною S, как показано штриховой линией на рис. 1.13, *а* и *б*.

Используя метод мембранной аналогии, нетрудно показать, что величины касательных напряжений и значения геометрического фактора жесткости при кручении заданного профиля и полосы с размерами поперечного сечения $S \times \delta$ будут соответственно равны. Поэтому при расчете на свободное кручение рассматриваемых профилей можно использовать зависимости (1.20)—(1.23), подставив в них вместо b развернутую длину контура S.

Рассмотрим вопрос о депланации сечения тонкостенных стержней незамкнутого профиля. Так как касательные напряжения в точках средней линии контура равны нулю, то согласно зависимости (1.2):

$$dw = \theta\, d\omega. \tag{1.32}$$

Выбрав произвольно полюс P и начало отсчета O и проинтегрировав уравнение (1.32) в пределах от 0 до s, найдем осевое смещение произвольной точки контура

$$w_s = \theta\omega_s. \tag{1.33}$$

Неопределенность величины смещения, связанная с произвольностью выбора полюса P и начала отсчета O, отражает возможность перемещения и поворота бруса как жесткого целого.

Зависимость (1.33) показывает, что осевое смещение точек контура подчиняется закону распределения секториальных площадей. Для иллюстрации этой зависимости приведем несколько простых примеров.

Пример 1.3. Определить относительное перемещение точек A и B профиля, изображенного на рис. 1.13, *а*.

Совместим полюс P с центром окружности, а начало отсчета секториальной площади — с точкой A. При движении вдоль контура от точки A к точке B радиус PM покрывает площадь f, равную площади круга $\frac{\pi D^2}{4}$.

Учитывая, что секториальная площадь равна удвоенной площади f, получим

$$\omega_{B/A} = \frac{\pi D^2}{2}.$$

Тогда по формуле (1.33)

$$w_{B/A} = \theta\omega_{B/A} = \theta\,\frac{\pi D^2}{2}.$$

После подстановки значений $\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{кр}}}$ и $J_{\text{кр}} = \frac{1}{3}\pi D\delta^3$ получим

$$w_{B/A} = \frac{3}{2}\,\frac{M_{\text{кр}}D}{G\delta^3}.$$

Отметим, что при определении перемещения $w_{B/A}$ выбор полюса не имеет значения, так как при любом положении полюса секториальная площадь $\omega_{B/A}$ равна удвоенной площади круга.

Пример 1.4. Определить угол закручивания, наибольшее напряжение и депланацию сечения стержня, профиль которого изображен на рис. 1.14.

Дано: $\delta = 2{,}5$ мм; $H = 20\delta$; $B = 10\delta$; $l = 1$ м; $G = 8\cdot 10^6$ Н/см², $\mathfrak{M} = 100$ Н·м.

Геометрический фактор жесткости

$$J_{\text{кр}} = \frac{1}{3}S\delta^3 = 20\delta^4 = \frac{5}{64}\ \text{см}^4.$$

Угол закручивания на единицу длины

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{кр}}} = \frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}} = 16\cdot 10^{-3}\ \text{рад/см} \cong 92\ \text{град/м}$$

и наибольшее напряжение

$$\tau_{\max} = G\theta\delta = 32\cdot 10^3\ \text{Н/см}^2.$$

Сопоставив полученные значения со значениями для аналогичного замкнутого профиля (см. рис. 1.9), можно увидеть, что угол закручивания для незамкнутого профиля получается приблизительно в 130 раз больше, чем для замкнутого, а напряжение τ_{max} больше в 20 раз..

Для определения депланации выберем положение полюса P и начала отсчета O в одной и той же точке, как показано на рис. 1.14, *б*. Построим эпюру секториаль-

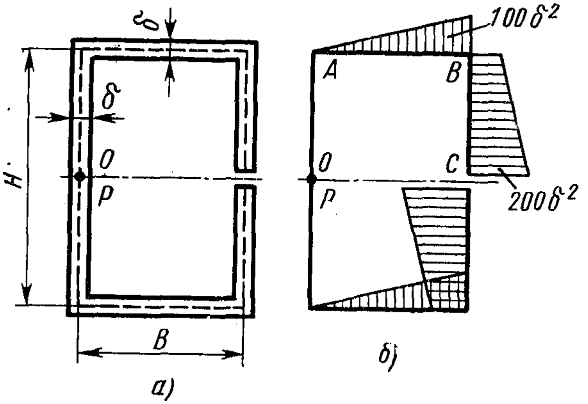


Рис. 1.14

ной площади. На каждом участке эпюра будет линейной, так как расстояние r от полюса до касательной к контуру в пределах участка остается постоянным.

Для участка OA $r = 0$ и $\omega = 0$.

Для участка OB $r = \frac{H}{2} = 10\delta$. При движении от A к B радиус-вектор покрывает площадь f_{PAB} треугольника PAB, равную $50\delta^2$. Секториальная площадь равна удвоенной площади f_{PAB}, т. е. $\omega_B = 100\delta^2$.

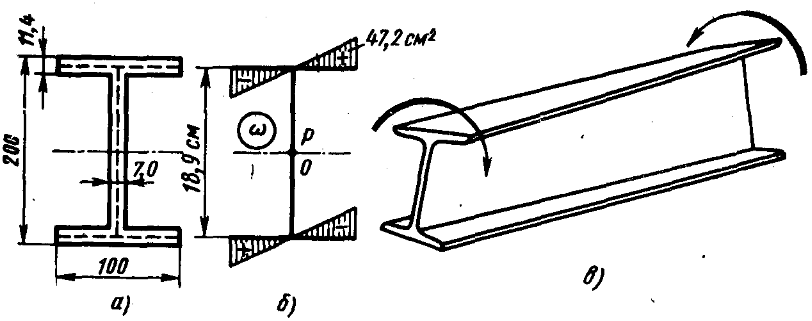


Рис. 1.15

Аналогично, для участка BC $r = B = 10\delta$, $\omega_C = \omega_B + 2f_{BPC} = 200\delta^2$. Эпюра ω показана на рис. 1.14, *б*.

Так как осевое смещение пропорционально секториальной площади, то эпюра осевого смещения подобна эпюре ω. Наибольшей величины смещение (по отношению к точке O) достигает в точке C:

$$w_C = \theta\omega_C = \frac{10M_{кр}}{G\delta^2} = 0{,}2 \text{ см}.$$

При одинаковых значениях крутящего момента величина наибольшего осевого смещения в этом случае получается в 1600 раз больше, чем в случае замкнутого профиля.

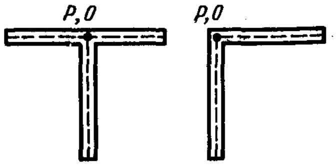
Распределение осевых смещений, показанное на эпюре рис. 1.14, *б*, соответствует тому случаю, когда за неподвижную образующую принята образующая, проходящая через точку O.

Пример 1.5. Определить депланацию сечений, возникающую при свободном кручении двутавра № 20 (рис. 1.15, *а*).

На рис. 1.15, *б* показан «скелет» двутавра; отмечено положение полюса P и начала отсчета O и построена эпюра секториальной площади ω.

Наибольшей величины осевое смещение достигает в угловых точках

$$w_{\max} = \theta\omega_{\max} = 47{,}2 \cdot \theta \text{ см.}$$



а) б)

Рис. 1.16

Характер деформации двутавра при чистом кручении показан на рис. 1.15, *в*.

Отметим, что брусья, имеющие тавровое или угловое сечение (рис. 1.16, *а* и *б*), при чистом кручении не дают депланации. Действительно, если поместить полюс P и начало отсчета O в узловой точке, то для всех точек сечения получим секториальную площадь, равную нулю, а следовательно, будут равны нулю и осевые смещения w.

§ 3. Секториальные характеристики тонкостенных профилей

В § 1 было дано определение секториальной площади ω, как удвоенной площади сектора, ограниченного частью контура OS и двумя радиусами PO и PS, проведенными из полюса P (см. рис. 1.6). Каждой точке контура соответствует определенное значение

$$\omega_S = \int_0^s r\,ds, \tag{1.34}$$

где s — координата точки S, отсчитываемая от точки O вдоль контура. Знак секториальной площади считается положительным, если при движении по контуру от O до S радиус-вектор вращается по часовой стрелке.

Выберем систему координат x, y с началом в точке P и выразим ω через декартовы координаты x и y. Согласно чертежу (рис. 1.17)

$$r = KM - ML = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

и, кроме того,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds};$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Подставив эти величины под знак интеграла в уравнение (1.34), получим

$$\omega = \int_0^s (y\,dx - x\,dy). \tag{1.35}$$

Величина секториальной площади зависит от трех параметров, а именно, от двух координат полюса P и от положения начала отсчета O.

Выясним, как изменяется секториальная площадь при переносе полюса из одной точки в другую.

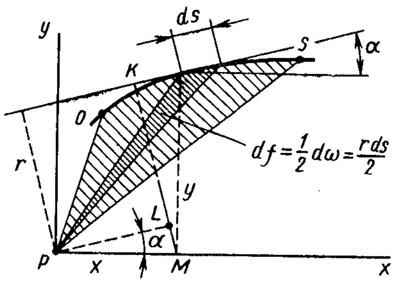


Рис. 1.17

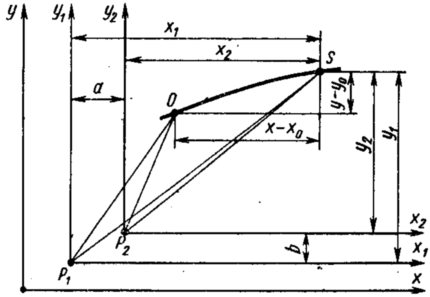


Рис. 1.18

Пусть P_1 — первоначальное положение полюса; P_2 — новое положение полюса (рис. 1.18), тогда

$$x_2 = x_1 - a;$$

$$y_2 = y_1 - b;$$

$$\omega_2 = \int_0^s (y_2\,dx - x_2\,dy) = \int_0^s [(y_1 - b)\,dx - (x_1 - a)\,dy] =$$

$$= \int_0^s (y_1\,dx - x_1\,dy) - b\int_0^s dx + a\int_0^s dy.$$

Формула для пересчета секториальной площади при переносе полюса принимает вид

$$\omega_2 = \omega_1 - b\,(x - x_0) + a\,(y - y_0), \qquad (1.36)$$

где a и b — координаты нового полюса относительно первоначального;

x и y — координаты рассматриваемой точки S;

x_0 и y_0 — координаты начала отсчета O.

Система осей, относительно которой берутся координаты x, y, x_0, y_0, может быть произвольной, но параллельной осям x_1, y_1 и x_2, y_2 (см. рис. 1.18).

Из уравнения (1.36) следует, что при переносе полюса из одной точки в другую секториальная площадь ω изменяется на величину, линейно зависящую от координат x и y точки S. Это изменение секториальной площади соответствует осевым перемещениям точек сечения, возникающим при повороте стержня как жесткого целого относительно осей x и y. При изменении положения начала отсчета O секториальная площадь изменяется на постоянную величину, что соответствует перемещению стержня как жесткого целого в направлении его оси. Кроме секториальной площади ω, в дальнейшем нам потребуются следующие секториальные характеристики тонкостенных профилей:

секториально-статический момент площади профиля, см^4

$$S_\omega = \int_F \omega dF; \tag{1.37}$$

секториально-линейные моменты площади профиля, см^5

$$S_{\omega x} = \int_F \omega x\, dF; \tag{1.38}$$

$$S_{\omega y} = \int_F \omega y\, dF; \tag{1.39}$$

секториальный момент инерции профиля, см^6

$$J_\omega = \int_F \omega^2\, dF. \tag{1.40}$$

Величины S_ω, $S_{\omega x}$, $S_{\omega y}$ могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Величина J_ω всегда положительна (или равна нулю, если для всех точек профиля $\omega \equiv 0$).

Для гнутых профилей, имеющих постоянную толщину стенки δ:

$$S_\omega = \delta \int_s \omega\, ds; \tag{1.37а}$$

$$S_{\omega x} = \delta \int_s \omega x\, ds; \tag{1.38а}$$

$$S_{\omega y} = \delta \int_s \omega y\, ds; \tag{1.39а}$$

$$J_\omega = \delta \int_s \omega^2\, ds. \tag{1.40а}$$

Для стандартных прокатных профилей значения секториального момента инерции приводятся в справочной литературе [23]. При стесненном кручении центр кручения, а также начало отсчета секториальной площади не могут быть выбраны произвольно. В § 4 будет показано, что эти точки должны быть выбраны так, чтобы секториально-линейные моменты, а также секториально-статический момент были равны нулю, т. е.

$$S_{\omega x} = \int_F \omega x\, dF = 0; \tag{1.41}$$

$$S_{\omega y} = \int_F \omega y\, dF = 0; \tag{1.42}$$

$$S_\omega = \int_F \omega\, dF = 0. \tag{1.43}$$

Выполнение условий (1.41), (1.42) зависит только от выбора координат полюса. В дальнейшем центром кручения тонкостенного профиля будем называть полюс P, при котором выполняются условия (1.41) и (1.42).

Выполнение третьего из написанных условий зависит от выбора начала отсчета O. Если эпюра секториальной площади построена при полюсе, совмещенном с центром кручения, и при начале отсчета, выбранном так, чтобы выполнялось также условие (1.43), то такая эпюра называется эпюрой главной секториальной площади.

Для расчетов тонкостенных стержней на стесненное кручение требуется эпюра главной секториальной площади. На основании этой эпюры вычисляется главный секториальный момент инерции J_ω, который входит в расчетные зависимости. Отметим, что условия (1.41), (1.42) и (1.43) должны выполняться при любой системе осей координат, т. е. оси x, y не обязательно должны быть главными и центральными, однако для упрощения расчетов будем пользоваться центральными осями координат, удовлетворяющими условию

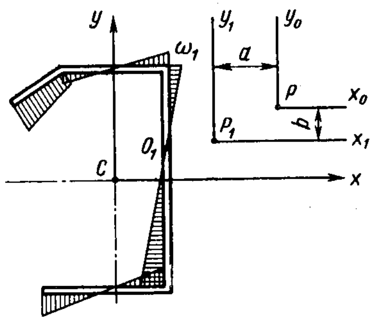


Рис. 1.19

$$\int_F dFx = 0; \qquad \int_F dFy = 0.$$

Выведем формулу для вычисления координат центра кручения. Пусть задан некоторый тонкостенный профиль (рис. 1.19). Оси координат x и y проведем через центр тяжести профиля C. Далее, задавшись произвольно положением полюса P_1 и начала отсчета O_1, построим эпюру секториальной площади ω_1.

Кроме эпюры ω_1, целесообразно построить еще эпюры переменных x и y, чтобы иметь возможность вычислять геометрические и секториальные характеристики перемножением эпюр по правилу Верещагина.

Предположим, что искомый центр кручения профиля находится в точке P, расположенной на расстоянии a и b от произвольного выбранного полюса P_1. Тогда секториальная площадь, соответствующая полюсу P, согласно уравнению (1.36):

$$\omega_0 = \omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0).$$

Эта секториальная площадь должна удовлетворять равенствам (1.41) и (1.42):

$$\int_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)]\, y\, dF = 0;$$

$$\int_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)]\, x dF = 0.$$

Раскрыв скобки и приняв во внимание, что

$$\int_F y^2 dF = J_x; \quad \int_F x^2 dF = J_y; \quad \int_F xy dF = J_{xy};$$

$$\int_F \omega_1 y dF = S_{\omega_1 y}; \quad \int_F \omega_1 x dF = S_{\omega_1 x};$$

$$\int_F x dF = S_y = 0; \quad \int_F y dF = S_x = 0$$

(так как оси x, y — центральные), преобразуем уравнения к виду

$$S_{\omega_1 y} - bJ_{xy} + aJ_x = 0;$$

$$S_{\omega_1 x} - bJ_y + aJ_{xy} = 0.$$

В результате решения этой системы уравнений определяются искомые координаты центра кручения:

$$a = \frac{-S_{\omega_1 y} J_y + S_{\omega_1 x} J_{xy}}{J_x J_y - J^2_{xy}}; \tag{1.44}$$

$$b = \frac{S_{\omega_1 x} J_x - S_{\omega_1 y} J_{xy}}{J_x J_y - J^2_{xy}}. \tag{1.45}$$

Положение начала отсчета O_1 в данном случае не играет роли, так как секториальные характеристики $S_{\omega x}$ и $S_{\omega y}$ при изменении начáла отсчета не изменяются (если x и y — центральные оси). Действительно, выбрав другое начало отсчета, получим значение секториальной площади, отличающееся от прежнего на постоянную величину:

$$\omega_2 = \omega_1 + C.$$

Подставив это выражение под знак интегралов $S_{\omega x}$ и $S_{\omega y}$, получим

$$S_{\omega_2 x} = \int_F \omega_2 x dF = \int_F \omega_1 x dF + C \int_F x dF;$$

$$S_{\omega_2 y} = \int_F \omega_2 y dF = \int_F \omega_1 y dF + C \int_F y dF.$$

Но так как $\int_F x dF = 0$ и $\int_F y dF = 0$, то $S_{\omega_2 x} = S_{\omega_1 x}$ и $S_{\omega_2 y} = S_{\omega_1 y}$.

Формулы (1.44) и (1.45) упрощаются, если оси x и y не только центральные, но и главные; в этом случае $J_{xy} = 0$ и тогда

$$a = -\frac{S_{\omega_1 y}}{J_x}; \tag{1.44a}$$

$$b = \frac{S_{\omega_1 x}}{J_y}. \tag{1.45a}$$

Для несимметричных профилей применение формул (1.44а) и (1.45а) обычно не приводит к упрощению решения, так как необходимо дополнительно определять положение главных осей и вычислять главные моменты инерции.

Рассмотрим вопрос о выборе начала отсчета секториальной площади. Предположим, что мы определили координаты центра кручения и построили эпюру секториальной площади, приняв за полюс центр кручения и взяв произвольное начало отсчета. Обозначим эту секториальную площадь через ω_0. Очевидно, что эпюра ω_0 будет удовлетворять условиям (1.41) и (1.42), но не будет удовлетворять условию (1.43).

Чтобы удовлетворялось также и последнее условие, надо подобрать другое начало отсчета. Учитывая, что при переносе начала отсчета секториальная площадь изменяется на постоянную величину, можно написать

$$\omega = \omega_0 + C,$$

где ω — новое значение секториальной площади, удовлетворяющее условию (1.43).

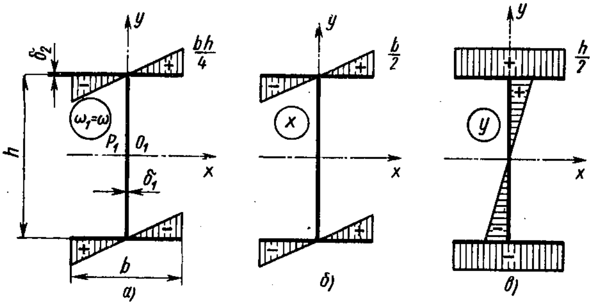


Рис. 1.20

Подставив ω в уравнение (1.43), получим

$$\int_F \omega dF = \int_F (\omega_0 + C)\, dF = S_{\omega_0} + CF = 0,$$

откуда

$$C = -\frac{S_{\omega_0}}{F}. \qquad (1.46)$$

Найденную постоянную величину C следует добавить к ординатам построенной ранее эпюры ω_0. В результате получатся значения главной секториальной площади, удовлетворяющей всем трем условиям (1.41), (1.42) и (1.43).

Рассмотрим несколько примеров определения секториальных характеристик сечения.

1. **Двутавровый профиль.** Выбрав полюс P и начало отсчета O в центре тяжести, строим эпюру секториальной площади ω_1 (рис. 1.20, *а*).

Далее строим эпюры координат x и y (рис. 1.20, *б* и *в*). Так как эпюра ω_1 обратно симметрична относительно обеих осей, а эпюры x и y — симметричные, то интегралы $S_{\omega_1 x} = \int_F ds\delta\omega_1 x$ и $S_{\omega_1 y_1} = \int_F ds\delta\omega_1 y$ равны нулю. Следовательно, выбранный полюс является центром кручения.

Секториально статический момент $S_{\omega_1}=\int_F ds\delta\omega_1$ в данном случае также равен нулю, следовательно, эпюра ω_1 есть эпюра главной секториальной площади ω.

Пользуясь этой эпюрой, вычислим главный секториальный момент инерции J_ω. Для вычисления J_ω, а также моментов инерции J_x, J_y, J_{xy} тонкостенного профиля целесообразно использовать правило Верещагина. Согласно этому правилу, интеграл от произведения двух функций, из которых одна линейная, равен произведению площади эпюры первой функции на данном участке на ординату второй (линейной) функции, взятую под центром тяжести первой эпюры. Если обе эпюры прямолинейные, то можно брать площадь любой из двух эпюр и умножать на ординату оставшейся эпюры. На тех участках, где площадь эпюры лежит частично по одну и частично по другую сторону от нулевой линии, следует взять каждую часть отдельно или произвести «расслоение» эпюры, т. е.

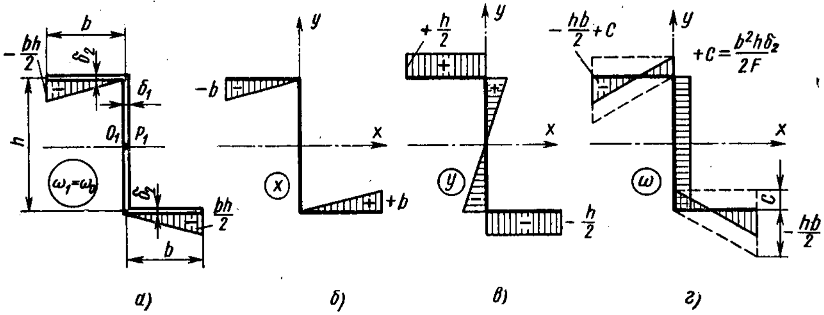


Рис. 1.21

представить ее в виде суммы более простых эпюр. Величину J_ω, представляющую собой интеграл вида

$$J_\omega=\int_S \omega^2\delta dz,$$

следует вычислять перемножением эпюры ω на саму себя. Для двутавра получим

$$J_\omega=4\delta_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{bh}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{bh}{4}\right)=\frac{\delta_2 b^3h^2}{24}.$$

2. **Зетообразный профиль.** Эпюра ω_1, а также эпюры x и y для этого профиля представлены на рис. 1.21, *а, б* и *в*. Перемножив эти эпюры по правилу Верещагина, найдем $S_{\omega_1 x}=0$ и $S_{\omega_1 y}=0$. Следовательно, согласно уравнениям (1.44) и (1.45), $a=0$ и $b=0$, т. е. центр кручения совпадает с центром тяжести профиля. Далее вычислим S_{ω_1} и F:

$$S_{\omega_1}=\int_F dF\omega_1=\delta_2\left(-\frac{bh}{2}\right)\frac{b}{2}2=-\frac{b^2h\delta_2}{2};\quad F=2\delta_2 b+\delta_1 h;$$

по формуле (1.46) определим величину C:

$$C=-\frac{S_\omega}{F}=\frac{b^2h^2\delta_2}{2(2\delta_2 b+\delta_1 h)}.$$

Добавив величину C к ординатам эпюры ω_1, получим эпюру ω главной секториальной площади (рис. 1.21, *г*). На горизонтальных полках эпюру ω целесообразно расслоить, т. е. представить в виде суммы двух эпюр, как показано на рис. 1.21, г штриховыми линиями. Применяя правило Верещагина, найдем

$$J_\omega = \delta_1 hC^2 + 2\left[\frac{1}{2}\, b\, \frac{bh}{2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{bh}{2} - C\right) + bC\left(C - \frac{bh}{4}\right)\right]\delta_2 =$$

$$= \delta_1 hC^2 + \delta_2\left[\frac{b^3h^2}{6} + 2bC^2 - b^2hC\right].$$

3. **Тавровый и угловой профили** (см. рис. 1.16). Если расположить полюс на пересечении сторон профиля, то секториальная площадь для любой точки контура будет равна нулю. В этом случае условия (1.41), (1.42), (1.43) выполняются при любых осях x и y. Центр кручения таких профилей лежит в узловой точке и главная секториальная площадь для всех точек контура равна нулю. Главный секториальный момент инерции также равен нулю.

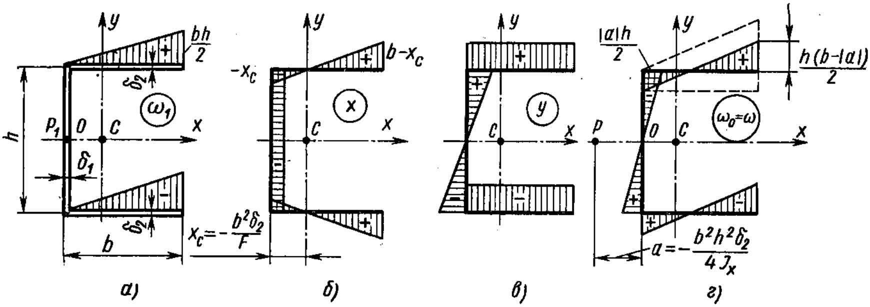


Рис. 1.22

4. **Швеллер.** Выбрав полюс P_1 и начало отсчета O и определив положение центра тяжести C, строим эпюры ω_1, x и y (рис. 1.22, *а*, *б* и *в*).

Перемножив эпюры по правилу Верещагина, получим

$$S_{\omega_1 x} = \int_F \omega_1 x dF = 0;$$

$$S_{\omega_1 y} = \int_F \omega_1 y dF = \frac{b^2h^2\delta_2}{4};$$

$$J_x = \int_F y^2 dF = \frac{\delta_1 h^3}{12} + 2\delta_2 b\,\frac{h^2}{4};$$

$$J_y = \int_F x^2 dF = 2\,\frac{\delta_2 b^3}{3} - (\delta_1 h + 2\delta_2 b)\,x_C^2.$$

Так как в данном случае оси x и y — главные и центральные, то для определения расстояний a и b используем формулы (1.44а) и (1.45а):

$$a = -\frac{S_{\omega_1 y}}{J_x} = -\frac{b^2h^2\delta_2}{4J_x} = -\frac{3b^2\delta_2}{\delta_1 h + 6b\delta_2};$$

$$b = \frac{S_{\omega_1 x}}{J_y} = 0.$$

При $\delta_1 = \delta_2$

$$a = -\frac{3b^2}{h + 6b}.$$

Положение центра кручения P швеллера показано на рис. 1.22, *г*; там же приведена эпюра секториальной площади, построенная при полюсе, совмещенном с центром кручения.

Так как эта эпюра обратносимметрична относительно оси x, то

$$\int_F \omega_0 dF = 0 \text{ и } C = 0.$$

Следовательно, эта эпюра является эпюрой главной секториальной площади.

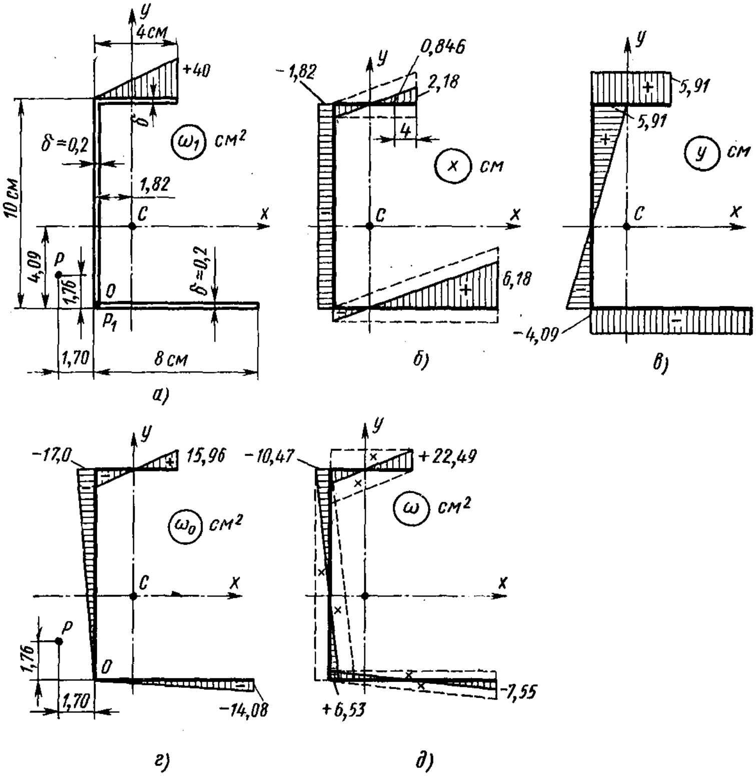


Рис. 1.23

Умножение эпюры ω на саму себя по правилу Верещагина дает величину J_ω:

$$J_\omega = \delta_1 2\left(\frac{h^2 a}{8}\right)\frac{ah}{3} + \delta_2\left[\frac{b^2 h}{4}\left(\frac{bh}{3} - \frac{|a|h}{2}\right) + \frac{bh|a|}{2}\left(\frac{h|a|}{2} - \frac{bh}{4}\right)\right]2.$$

5. **Несимметричный профиль** (рис. 1.23, *а*). Координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{4\cdot 2 + 8\cdot 4}{4+10+8} = 1,82 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{10\cdot 5 + 4\cdot 10}{4+10+8} = 4,09 \text{ см}.$$

Выбрав полюс P_1 и начало отсчета O в нижней угловой точке, построим эпюру ω_1 (рис. 1.23, *а*), а также эпюры x и y (рис. 1.23, *б* и *в*).

Перемножив эпюры, получим

$$S_{\omega_1 x}=0{,}2\,\frac{4\cdot 40}{2}\cdot 0{,}846=13{,}52\ \text{см}^5;$$

$$S_{\omega_1 y}=0{,}2\,\frac{4\cdot 40}{2}\cdot 5{,}91=94{,}56\ \text{см}^5.$$

Вычислим моменты инерции профиля:

$$J_x=\frac{0{,}2\cdot 10^3}{3}+0{,}2\cdot 4\cdot 10^2-0{,}2\cdot 22\cdot 4{,}09^2=73{,}1\ \text{см}^4;$$

$$J_y=\frac{0{,}2\cdot 4^3}{3}+\frac{0{,}2\cdot 8^3}{3}-0{,}2\cdot 22\cdot 1{,}82^2=23{,}9\ \text{см}^4;$$

$$J_{xy}=0{,}2\cdot 4\cdot 2\cdot 10-0{,}2\cdot 22\cdot 4{,}09\cdot 1{,}82=-16{,}8\ \text{см}^4.$$

По формулам (1.44) и (1.45) определим расстояния до центра кручения:

$$a=\frac{-S_{\omega_1 y}J_y+S_{\omega_1 x}J_{xy}}{J_xJ_y-J_{xy}^2}=-1{,}70\ \text{см};$$

$$b=\frac{S_{\omega_1 x}J_x-S_{\omega_1 y}J_{xy}}{J_xJ_y-J_{xy}^2}=1{,}76\ \text{см}.$$

Эти расстояния следует отложить от полюса P_1 по направлениям координатных осей (рис. 1.23, *г*). Заметим, что если координаты центра кручения этого профиля определять относительно главных осей сечения по формулам (1.44а) и (1.45а), то решение будет более сложным.

Далее строим эпюру ω_0 при полюсе P, совмещенном с центром кручения, при прежнем начале отсчета O (рис. 1.23, *г*) и вычисляем $S\omega_0$, F и C:

$$S_{\omega_0}=\int\limits_F \omega_0 dF=0{,}2\left[-\frac{17\cdot 10}{2}+\frac{-17+15{,}96}{2}\,4-\frac{14{,}08\cdot 8}{2}\right]=-28{,}68\ \text{см}^4;$$

$$F=0{,}2\cdot 22=4{,}4\ \text{см}^2;$$

$$C=-\frac{S_{\omega_0}}{F}=\frac{28{,}68}{4{,}4}=6{,}52\ \text{см}^2.$$

Добавив величину C к ординатам эпюры ω_0, получим эпюру главной секториальной площади ω (рис. 1.23, *д*).

Умножение этой эпюры на саму себя дает величину главного секториального момента инерции профиля

$$J_\omega=\int\limits_F \omega^2 dF=0{,}2\left[22{,}49\cdot 4\cdot 6{,}01-\frac{1}{2}32{,}96\cdot 4\cdot 0{,}527+10{,}47\cdot 10\cdot 1{,}97+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}10\cdot 17\cdot 0{,}863-6{,}53\cdot 8\cdot 0{,}51+\frac{1}{2}8\cdot 14{,}08\cdot 2{,}85\right]=185{,}4\ \text{см}^6.$$

§ 4. Стесненное кручение тонкостенных стержней незамкнутого профиля

Стесненное кручение возникает в тех случаях, когда невозможна свободная депланация поперечных сечений; в частности, при одном или двух жестко закрепленных торцах или при наличии нескольких участков с неодинаковой депланацией сечений. В поперечных сечениях стержня при стесненном кручении возникают не только касательные, но и нормальные напряжения. Поведение бруса при стесненном кручении сильно отличается от его поведения при свободном кручении. В первую очередь это выражается в том, что сильно уменьшается угол закручивания бруса, т. е. возрастает его эффективная крутильная жесткость. Во-вторых, распределение напряжений в поперечных сечениях при стесненном кручении зависит не только от величины равнодействующей сил, приложенных к торцу, но также и от характера их распределения по торцу.

Теория расчета на стесненное кручение тонкостенных стержней незамкнутого профиля основывается на следующих основных допущениях:

1. *Форма контура поперечного сечения считается неизменной* (гипотеза жесткого контура). Это значит, что расстояние между любыми двумя точками поперечного сечения в процессе деформации остается постоянным (без учета эффекта поперечной деформации за счет нормальных напряжений в продольном направлении).

Гипотеза жесткого контура хорошо соблюдается только для прямых стержней; у стержней с криволинейной осью искажение формы контура может быть существенным и должно учитываться в расчетах.

2. *Деформация сдвига в точках срединной поверхности профиля* принимается равной нулю. При свободном кручении эта гипотеза выполняется точно, поскольку в точках срединной поверхности касательные напряжения отсутствуют. При стесненном кручении эта гипотеза выполняется приближенно, так как в точках, расположенных на срединной поверхности, возникают вторичные касательные напряжения. Эти напряжения, однако, невелики и поэтому деформацией сдвига в срединной поверхности можно пренебречь.

Из зависимости (1.4) на основании второй гипотезы следует, что осевые перемещения, возникающие в результате депланации сечения, связаны с относительным углом закручивания θ той же зависимостью, что и при свободном кручении, т. е.

$$w = \theta\omega. \tag{1.47}$$

Величина θ, однако, не постоянна по длине, как при свободном кручении, а является некоторой функцией z (координата z отсчитывается вдоль оси стержня).

Рассмотрим элементарный участок dz продольного волокна (рис. 1.24). Удлинение элемента dz равно разности перемещений его концов

$$\Delta(dz) = \left(w + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz\right) - w.$$

Следовательно, относительная продольная деформация

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d\theta}{dz}\,\omega, \tag{1.48}$$

здесь $w = w(z, s)$; $\theta = \theta(z)$ и $\omega = \omega(s)$.

По деформации определяется нормальное напряжение в поперечном сечении

$$\sigma_\omega = \varepsilon_z E = E \frac{d\theta}{dz} \omega. \qquad (1.49)$$

В данном случае используется формула закона Гука для одноосного напряженного состояния, так как нормальные напряжения в направлениях, перпендикулярных оси бруса, равны нулю. По толщине стенки напряжение σ_ω считается постоянным ввиду тонкостенности. Величина напряжения σ_ω остается пока неопределенной, так как положение полюса P и начала отсчета O секториальной площади не установлено. Чтобы устранить эту неопределенность, рассмотрим равновесие отсеченной части бруса, изображенной на рис. 1.24. Взяв сумму проекций всех сил на ось z и сумму моментов относительно осей x и y, получим три уравнения:

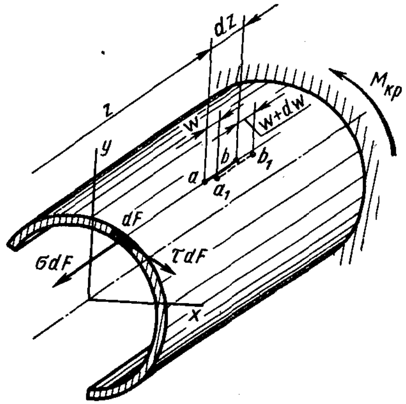


Рис. 1.24

$$N = \int_F \sigma dF = 0; \quad M_x = \int_F \sigma dF y = 0;$$

$$M_y = \int_F \sigma dF x = 0.$$

После подстановки под знаки интегралов выражения (1.49) и сокращения на постоянный множитель $E \frac{d\theta}{dz}$, придем к следующим трем равенствам:

$$\int_F \omega dF = 0; \quad \int_F \omega y dF = 0; \quad \int_F \omega x dF = 0.$$

Нетрудно убедиться, что эти три равенства совпадают с условиями (1.41), (1.42), (1.43), которым должна удовлетворять главная секториальная площадь. Следовательно, в уравнениях (1.48), (1.49) под ω следует подразумевать главную секториальную площадь.

Введем новую величину B, называемую бимоментом:

$$B = \int_F \sigma dF \omega. \qquad (1.50)$$

На основании зависимости (1.49) бимомент B (1.50) можно представить в виде

$$B = \int_F E \frac{d\theta}{dz} \omega^2 dF = E \frac{d\theta}{dz} \int_F \omega^2 dF.$$

Интеграл в правой части последнего равенства представляет собой главный секториальный момент инерции J_ω. Следовательно,

$$B = \frac{d\theta}{dz} E J_\omega. \tag{1.51}$$

Бимомент B измеряется в Н·см^2 и представляет собой внутренний силовой фактор, аналогичный обычным внутренним силовым факторам, таким, например, как изгибающий момент, и отличается от последнего тем, что он соответствует самоуравновешенной системе внутренних нормальных напряжений (см. рис. 1.2, *г*). Поэтому бимомент не может быть найден методом сечений. Слово бимомент означает двойной момент; по своему действию он эквивалентен двум противоположно направленным парам сил, расположенным в двух параллельных плоскостях.

Как показывает зависимость (1.51), величина бимомента пропорциональна первой производной от крутки θ.

Чтобы получить окончательную формулу для нормальных напряжений стесненного кручения, выразим величину $E\frac{d\theta}{dz}$ из уравнения (1.51) через бимомент и подставим в уравнение (1.49); в результате получим

$$\sigma_\omega = \frac{B}{J_\omega}\omega. \tag{1.52}$$

Эта формула устанавливает зависимость между нормальным напряжением стесненного кручения σ_ω и бимоментом B; по своей структуре она аналогична формуле для определения нормальных напряжений при изгибе.

Следует заметить, что формула (1.52) применима не только при стесненном кручении, но вообще в тех случаях, когда в поперечном сечении тонкостенного стержня возникает бимомент, в частности, при нагружении осевыми силами, приложенными к торцу, как показано на рис. 1.2, *б*. Вычислим интеграл (1.50) по верхнему торцу этого стержня. Напряжение σ на торце всюду равно нулю, за исключением четырех малых площадок ΔF по углам, где приложены силы P. На каждой из этих площадок $\int\limits_{\Delta F} \sigma dF = \pm P$. Учитывая, что значение главной секториальной площади в угловых точках равно $\pm\frac{bh}{4}$, получим

$$B = \int\limits_F \sigma dF\omega = 2(-P)\frac{bh}{4} + 2P\left(-\frac{bh}{4}\right) = -Pbh.$$

Так как бимомент в данном случае отличен от нуля, то согласно зависимости (1.51) $\frac{d\theta}{dz} \neq 0$. Следовательно, в стержне возникнет кручение. Такой вид деформации называется изгибно-крутильной (подробнее см. § 6, пример 1.9).

Обратимся теперь к вопросу о вторичных касательных напряжениях при стесненном кручении. Эти напряжения возникают вследствие переменности нормальных напряжений σ_ω по длине стержня. Для определения касательных напряжений стесненного кручения напишем уравнение равновесия части стержня, выделенной двумя поперечными сечениями, отстоящими на dz одно от другого, и продольным сечением CD, взятым на некотором конечном расстоянии от края (см. рис. 1.25, грань AB совпадает с краем).

Обозначим через f площадь граней AD и BC, т. е. площадь отсеченной части поперечного сечения.

В грани AD возникает нормальное напряжение σ_ω. В грани CB возникает такое же напряжение, но с приращением $\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z}dz$, обу-

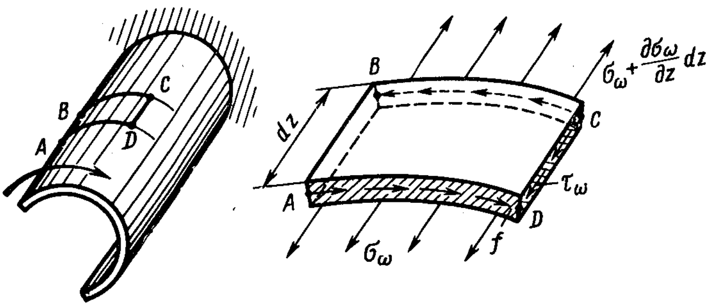


Рис. 1.25

словленным приращением координаты z. Интегрируя напряжения по площади f граней AD и CB, получим силы N_f и $(N_f + dN_f)$, отличающиеся одна от другой на величину

$$dN_f = \int_f \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} dz dF.$$

Эта избыточная сила уравновешивается касательным напряжением τ_ω в продольной грани CD. Ввиду тонкостенности бруса можно считать, что напряжение τ_ω равномерно распределено по толщине стенки. Следовательно,

$$\int_f \left(\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} dz\right) dF = \tau_\omega \delta dz,$$

откуда

$$\tau_\omega = \frac{1}{\delta} \int_f \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} dF.$$

После подстановки выражения σ_ω, согласно равенству (1.49), окончательно получим

$$\tau_\omega = \frac{E}{\delta} \frac{d^2\theta}{dz^2} \int \omega dF. \tag{1.53}$$

Напряжение τ_ω действует в продольной грани CD, но по закону парности касательных напряжений такое же напряжение действует и в поперечном сечении (в грани AD).

Вдоль грани AD напряжение τ_ω переменно и в точке A обращается в ноль, так как парное ему касательное напряжение в свободной грани AB отсутствует. Знак напряжения τ_ω зависит от того, какой край профиля принят за начало отсчета площади f. Если напряжение положительно, это значит, что оно направлено от края, принятого за начало отсчета.

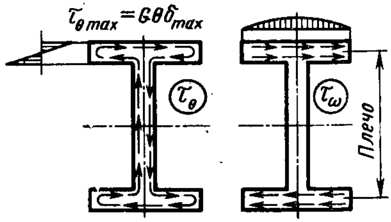


Рис. 1.26

Анализируя зависимость (1.53), можно установить, что касательные напряжения стесненного кручения сравнительно невелики и поэтому в расчете на прочность их можно не учитывать. Следовательно, исходное предположение об отсутствии деформаций сдвига в точках срединной поверхности выполняется удовлетворительно. Однако вообще пренебречь напряжениями τ_ω нельзя, так как они действуют на большом плече и дают крутящий момент, соизмеримый с крутящим моментом, создаваемым касательными напряжениями свободного кручения.

Для иллюстрации на рис. 1.26 показано распределение касательных напряжений стесненного и свободного кручения в двутавровом профиле. Напряжения стесненного кручения приводятся к паре сил с плечом приблизительно равным высоте двутавра, в то время как напряжения свободного кручения образуют момент с плечом, соизмеримым с толщиной стенки.

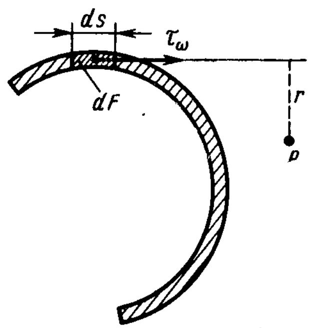


Рис. 1.27

Вычислим величину крутящего момента, воспринимаемого стержнем за счет касательных напряжений стесненного кручения:

$$M_\omega = \int_F \tau_\omega dF r.$$

За точку, относительно которой берется момент, примем центр кручения P (рис. 1.27). В данном случае точка приведения не имеет значения, так как главный вектор касательных напряжений равен нулю, т. е. эти напряжения приводятся к паре. Подставив под знак интеграла выражение (1.53), вынесем постоянные величины E и $\frac{d^2\theta}{dz^2}$ за знак интеграла

$$M_\omega = \int_F \left[E \frac{d^2\theta}{dz^2} \frac{1}{\delta} \int_t \omega dF\right] \delta\, dsr = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_F \left[\int_t \omega dF\right] d\omega.$$

Этот интеграл возьмем по частям

$$M_\omega = E\frac{d^2\theta}{dz^2}\left[\omega\int_F \omega\, dF - \int_F \omega^2\, dF\right].$$

Первый интеграл равен нулю , так как ω — главная секториальная площадь. Второй интеграл представляет собой секториальный момент инерции J_ω. Следовательно,

$$M_\omega = -\frac{d^2\theta}{dz^2}EJ_\omega. \qquad (1.54)$$

Выразив отсюда произведение $E\frac{d^2\theta}{dz^2}$ и подставив в выражение (1.53), получим следующую зависимость для τ_ω:

$$\tau_\omega = -\frac{M_\omega S'_\omega}{J_\omega \delta}, \qquad (1.55)$$

где $S'_\omega = \int_f \omega\, dF$ — секториально статический момент площади f.

Заметим, что M_ω составляет только часть полного крутящего момента. Вторую часть крутящего момента составляет момент свободного кручения M_θ, пропорциональный θ.

Следовательно, при стесненном кручении стержня в поперечном сечении возникают три силовых фактора: крутящий момент свободного кручения M_θ; крутящий момент стесненного кручения M_ω; бимомент B. Этим силовым факторам соответствуют напряжения τ_θ, τ_ω, σ_ω.

Формулы для вычисления перечисленных величин даны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Силовой фактор	Формула	Напряжение
Крутящий момент свободного кручения	$M_\theta = GJ_{кр}\theta$	$\tau_\theta = \frac{M_\theta}{J_{кр}}\delta = G\theta\delta$
Крутящий момент стесненного кручения	$M_\omega = -EJ_\omega\theta''$	$\tau_\omega = -\frac{M_\omega S'_\omega}{J_\omega\delta}$
Бимомент	$B = EJ_\omega\theta'$	$\sigma_\omega = \frac{B\omega}{J_\omega}$

Все эти величины легко определяются, если известна функция $\theta(z)$. Последняя может быть найдена из условия равенства суммы крутящих моментов стесненного и свободного кручения полному крутящему моменту

$$M_\theta + M_\omega = M_{кр}.$$

Подставив в это равенство значения M_θ и M_ω, получим дифференциальное уравнение относительно θ:

$$GJ_{\text{кр}}\theta - EJ_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} = M_{\text{кр}}$$

или

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\alpha^2 \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{кр}}}, \tag{1.56}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_{\text{кр}}}{EJ_\omega}}. \tag{1.57}$$

Величина α называется изгибно-крутильной характеристикой поперечного сечения стержня. Для стандартных прокатных профилей таблицы величин α приводятся в справочной литературе [24].

Запишем общий интеграл дифференциального уравнения (1.56):

$$\theta = A_1 e^{\alpha z} + A_2 e^{-\alpha z} + \bar{\theta}. \tag{1.58}$$

Первые два слагаемых представляют собой общее решение однородного дифференциального уравнения; последний член $\bar{\theta}$ есть частное решение уравнения с правой частью. С помощью формул Эйлера, связывающих гиперболические и показательные функции, можно преобразовать выражение (1.58) к более простому виду

$$\theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z + \bar{\theta}, \tag{1.59}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий. Частное решение $\bar{\theta}$ зависит от заданной нагрузки. Так, например, если суммарный крутящий момент по длине бруса постоянен или изменяется прямопропорционально координате z, то частное решение уравнения (1.56) имеет вид

$$\bar{\theta} = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{кр}}}. \tag{1.60}$$

Более сложные законы изменения крутящего момента по длине бруса на практике встречаются редко, поэтому они в данной книге не рассматриваются.

Если к стержню приложены несколько моментов (рис. 1.28), то стержень следует разбить на участки, для каждого из которых будет свое выражение функции θ, а также свои постоянные интегрирования. Эти постоянные должны определяться из граничных условий на торцах (два условия), а также из условий сопряжения участков. Последние состоят в том, что на границе двух соседних участков (например, участки I и II рис. 1.28) должны быть непрерывны функция, определяющая осевые смещения w (депланация), и функция, определяющая нормальные напряжения стесненного кручения σ_ω. Следовательно, согласно уравнениям (1.47), (1.51), (1.52), не должны иметь разрывов сама функция θ и ее первая производная. Поскольку момент чистого кручения M_θ пропорционален θ, он также не должен иметь разрывов. Отсюда следует, что скачкообразное изменение крутящего момента на величину $\mathfrak{M}$ происходит только за счет момента стесненного кручения M_ω [см. уравнения (1.54)], поэтому на границе участков должна скачкообразно изменяться вторая производная функции θ на величину

$$-\frac{\mathfrak{M}}{EJ_\omega}=-\alpha^2\frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}}.$$

Чтобы не определять большого количества постоянных, применяют метод начальных параметров. Этот метод позволяет получить постоянные интегрирования, одинаковые для всех участков, т. е. всего две постоянные C_1 и C_2. Последние целесообразно выразить через некоторые величины в начальном сечении стержня, а именно через относительный угол закручивания θ_0, бимомент B_0 и крутящий момент $M_{\text{кр}0}$. Так как две из этих трех величин обычно бывают известны, задача определения постоянных фактически сводится к решению одного уравнения с одним неизвестным, составляемого на основании граничных условий в конечном сечении стержня.

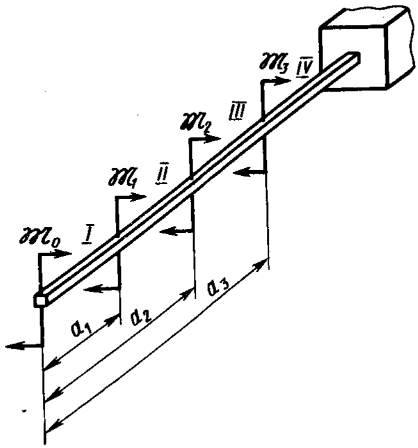


Рис. 1.28

Согласно методу начальных параметров выражение функции θ записывается таким образом, чтобы для каждого следующего участка полностью повторилось выражение функции θ предыдущего участка и добавлялись только новые слагаемые, учитывающие нагрузки, приложенные на границе участков.

Эти слагаемые подбираются так, чтобы условия сопряжения участков удовлетворялись при одних и тех же значениях постоянных, что достигается добавлением к частному решению некоторой части общего решения соответствующего однородного уравнения.

Поясним сказанное на примере стержня, изображенного на рис. 1.28.

Запишем функцию θ для первого участка [см. формулы (1.59), (1.60)]

$$\theta_{\text{I}}=C_1\operatorname{sh}\alpha z+C_2\operatorname{ch}\alpha z+\frac{\mathfrak{M}_0}{GJ_{\text{кр}}}.$$

Функцию θ для второго участка представим в следующем виде:

$$\theta_{\text{II}}=\theta_{\text{I}}+\bar{\theta}_{\text{II}}.$$

Очевидно, что $\bar{\theta}_{II}$ должна быть выбрана так, чтобы на втором участке удовлетворялось дифференциальное уравнение (1.56) и чтобы при переходе через границу участков (при $z = a_1$) сама функция θ и ее первая производная были непрерывными, так как ω и σ_ω — непрерывны, а вторая производная изменялась скачком на величину $-\frac{\alpha^2\mathfrak{M}_1}{GJ_{кр}}$.

Всем этим условиям удовлетворяет выражение

$$\bar{\theta}_{II} = \frac{\mathfrak{M}_1}{GJ_{кр}} - \frac{\mathfrak{M}_1}{GJ_{кр}} \operatorname{ch}[\alpha(z-a_1)].$$

Второе слагаемое этого выражения представляет собой некоторую часть общего решения однородного уравнения; следовательно, добавление этого слагаемого влияет только на величину постоянных интегрирования. В данном случае это слагаемое подобрано так, чтобы условия сопряжения участков выполнялись при одних и тех же постоянных C_1 и C_2.

Точно так же можно рассмотреть условия сопряжения второго, третьего и последующих участков. В результате получим следующее общее (универсальное) выражение для всех участков стержня (см. рис. 1.28):

$$\theta = \underbrace{\underbrace{\underbrace{C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z + \frac{\mathfrak{M}_0}{GJ_{кр}}}_{\text{I уч.}} + \frac{\mathfrak{M}_1}{GJ_{кр}}[1 - \operatorname{ch}\alpha(z-a_1)]}_{\text{II уч.}} + \frac{\mathfrak{M}_2}{GJ_{кр}}[1 - \operatorname{ch}\alpha(z-a_2)]}_{\text{III уч.}} + \dots \qquad (1.61)$$

Рассмотрим более подробно вопрос о граничных условиях, используемых для определения постоянных C_1 и C_2.

Если торец стержня свободен, то на торце $\sigma = 0$, следовательно, согласно уравнениям (1.51), (1.52), $B = 0$ и $\frac{d\theta}{dz} = 0$.

Если торец стержня жестко заделан, то невозможна депланация, следовательно, $\omega = 0$ и $\theta = 0$ (см. зависимость (1.47).

Осевые смещения и относительный угол закручивания равны также нулю в сечении, равноудаленном от концов стержня при приложении к нему нагрузки, симметричной относительно середины стержня.

При нагружении стержня внешним моментом, равномерно распределенным по длине (рис. 1.29, *а*), внутренний крутящий момент изменяется по длине согласно закону $M_{кр} = mz$. В этом случае частное решение можно получить по формуле (1.60), т. е.

$$\bar{\theta} = \frac{mz}{GJ_{кр}}.$$

Если же распределенная моментная нагрузка начинается на расстоянии a от торца (рис. 1.29, *б*), то ее целесообразно представить как совокупность бесконечно большого числа бесконечно малых внешних моментов и по аналогии с выражением (1.61) записать θ в следующем виде:

$$\theta = \underbrace{\underbrace{C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z +}_{\text{I уч.}} \int\limits_a^z \frac{m d\zeta}{GJ_{\text{кр}}}(1 - \operatorname{ch}\alpha(z-\zeta))}_{\text{II уч.}} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z}_{\text{I уч.}} + \frac{m}{GJ_{\text{кр}}}\left[(z-a) - \frac{1}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha(z-a)\right]}_{\text{II уч.}}.$$

Пример 1.6. Вычислить напряжения и угол закручивания двутавра № 20 (рис. 1.30); длина $l = 1$ м, один торец двутавра жестко заделан; на другом —

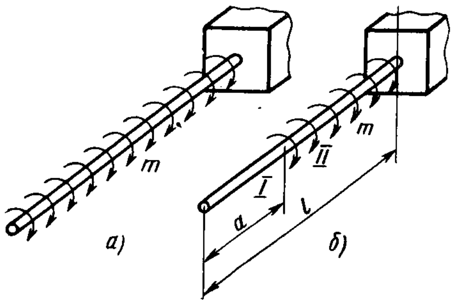


Рис. 1.29

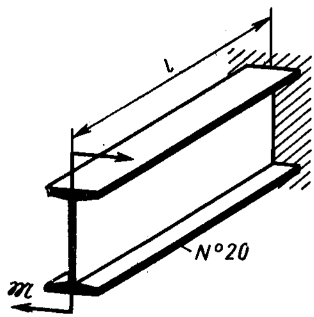


Рис. 1.30

приложен момент $\mathfrak{M} = 500$ Н·м. Размеры сечения и эпюры секториальной площади показаны на рис. 1.31, *а* и *б*. Определим характеристики профиля:

$$J_{\text{кр}} = \sum_i^n \frac{1}{3} b_i \delta_i^3 = \frac{1}{3}[2 \cdot 10 \cdot 1{,}14^3 + 17{,}7 \cdot 0{,}7^3] = 11{,}9 \text{ см}^4;$$

$$J_\omega = \int\limits_F \omega^2 dF = 1{,}14 \cdot 4\left(5\frac{47{,}2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 47{,}2\right) = 16\,900 \text{ см}^6;$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_{\text{кр}}}{EJ_\omega}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^6 \cdot 11{,}9}{2 \cdot 10^7 \cdot 16{,}9 \cdot 10^3}} = 1{,}68 \cdot 10^{-2} \text{ 1/см}; \quad \alpha l = 1{,}68.$$

Используя зависимости (1.59), (1.60), запишем выражение функции θ:

$$\theta = C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z + \frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из граничных условий:
1) при $z = 0$, $\sigma = 0$, следовательно, $B = 0$ и $\theta' = 0$; 2) при $z = l$, $w = 0$, следовательно, $\theta = 0$.

Из первого условия

$$C_1=0$$

и из второго условия

$$C_2=-\frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}\operatorname{ch}\alpha l}.$$

После подстановки постоянных имеем

$$\theta=\frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha l}\right].$$

Далее определяем:

$$M_\theta=GJ_{\text{кр}}\theta=\mathfrak{M}\left[1-\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha l}\right];$$

$$M_\omega=M_{\text{кр}}-M_\theta=\mathfrak{M}\frac{\operatorname{ch}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha l};$$

$$B=-\frac{EJ_\omega}{GJ_{\text{кр}}}\mathfrak{M}\alpha\frac{\operatorname{sh}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha l}=-\frac{\mathfrak{M}}{\alpha}\frac{\operatorname{sh}\alpha z}{\operatorname{ch}\alpha l}.$$

При $z=0$

$$M_\theta=\mathfrak{M}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha l}\right)=\mathfrak{M}\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}1{,}68}\right)=0{,}64\ \mathfrak{M};$$

$$M_\omega=0{,}36\mathfrak{M};\quad B=0.$$

При $z=l$ $\theta=0$; $M_\theta=0$; $M_\omega=\mathfrak{M}$;

$$B=-\frac{\mathfrak{M}}{\alpha}\frac{\operatorname{sh}\alpha l}{\operatorname{ch}\alpha l}=-\frac{\mathfrak{M}}{1{,}68\cdot10^{-2}}\cdot\frac{2{,}59}{2{,}78}=-55{,}4\mathfrak{M}\ H\cdot\text{см}^2.$$

Эпюры M_θ, M_ω и B по длине бруса приведены на рис. 1.32.

Вычислим напряжения, возникающие в двутавре; для этого используем формулы (1.20), (1.55), (1.52). На свободном конце при $z=0$; $\sigma_\omega=0$

$$\tau_{\theta\max}=\frac{M_\theta\delta_{\max}}{J_{\text{кр}}}=$$

$$=\frac{0{,}64\cdot5\cdot10^4\cdot1{,}14}{11{,}9}=3060\ H/\text{см}^2.$$

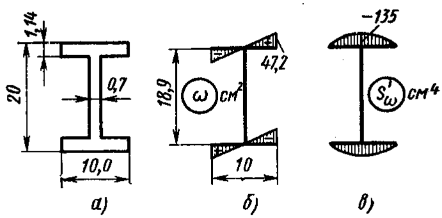


Рис. 1.31

Для определения касательных напряжений стесненного кручения вначале построим эпюру $S'_\omega=\int\limits_F\omega dF$ (см. рис. 1.31, *в*). Знак S'_ω зависит от выбранного направления обхода контура (при построении эпюры, приведенной на рис. 1.31, *в*, обход контура начат от верхнего левого угла).

Наибольшее напряжение τ_ω возникает в середине полки, где

$$S'_\omega=11{,}4\frac{(-47{,}2)\,5}{2}=-135\ \text{см}^4;$$

$$\tau_\omega=-\frac{M_\omega S'_\omega}{J_\omega\delta}=-\frac{0{,}36\cdot5\cdot10^4\,(-135)}{16\,900\cdot1{,}14}=130\ \text{Н/см}^2.$$

Так как $\tau_{\omega\max}>0$, то это значит, что оно направлено от начала обхода контура, т. е. в верхней полке — слева направо.

Вычислим напряжения в сечении у заделки (при $z = l$):

$$\tau_{\omega\,\max} = -\frac{M_\omega S'_\omega}{J_\omega \delta} = -\frac{5 \cdot 10^4 (-135)}{16\,900 \cdot 1{,}14} = 350\ \text{Н/см}^2;$$

$$\sigma_{\omega\,\max} = \frac{B\omega_{\max}}{J_\omega} = -\frac{55{,}4 \cdot 5 \cdot 10^4 (\pm 47{,}2)}{16\,900} = \mp 7750\ \text{Н/см}^2;$$

$$\tau_\theta = 0\ (\text{так как}\ M_\theta = 0).$$

Эпюры напряжений $\sigma_\text{в}$ и τ_ω по сечению подобны эпюрам ω и S'_ω (рис. 1.31, *б* и *в*).
Угол закручивания

$$\varphi = \int_0^l \theta dz = \frac{\mathfrak{M} l}{GJ_\text{кр}}\left[1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\alpha l \cdot \operatorname{ch} \alpha l}\right] = 0{,}446\,\frac{\mathfrak{M} l}{GJ_\text{кр}} = 2{,}34 \cdot 10^{-2}\ \text{рад}.$$

Полученные значения угла закручивания и наибольшего касательного напряжения в 2,3 и 1,6 раза меньше соответствующих величин при свободном кручении. Вместе с тем при стесненном кручении в двутавре возникают значительные нормальные напряжения, тогда как при свободном кручении они отсутствуют.

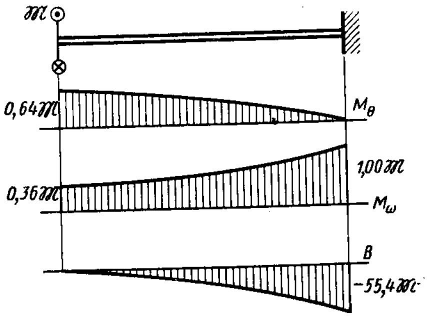


Рис. 1.32

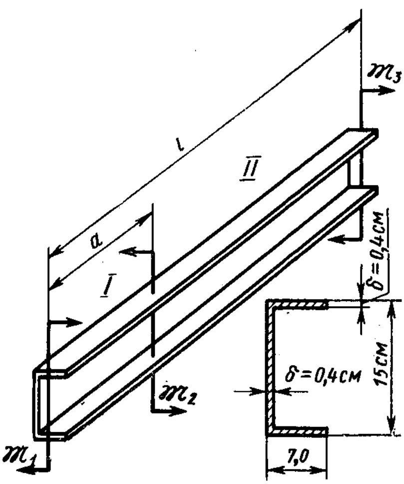


Рис. 1.33

Пример 1.7. Вычислить внутренние силовые факторы и угол закручивания стального швеллера, изображенного на рис. 1.33.

Дано $\mathfrak{M}_1 = 50$ Н·м; $\mathfrak{M}_2 = 150$ Н·м; $\mathfrak{M}_3 = 100$ Н·м; $l = 120$ см; $a = 40$ см.

В данном случае стесненное кручение возникает из-за различной депланации сечений I и II участка.

Определив положение центра кручения, построим эпюры главной секториальной площади ω и S'_ω (рис. 1.34).

Вычислим характеристики профиля:

$$J_\text{кр} = \frac{1}{3}[14{,}6 + 2 \cdot 6{,}8]\,0{,}4^3 = 0{,}60\ \text{см}^4;\quad J_\omega = 2000\ \text{см}^6;$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_\text{кр}}{EJ_\omega}} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ 1/\text{см};\quad \alpha l = 1{,}32;$$

$$\alpha a = 0{,}44;\quad \alpha(l - a) = 0{,}88.$$

Запишем выражение относительного угла закручивания по формуле (1.61):

$$\theta = C_1 \operatorname{sh}(\alpha z) + C_2 \operatorname{ch} \alpha z + \frac{\mathfrak{M}_1}{GJ_{\text{кр}}} - \frac{\mathfrak{M}_2}{GJ_{\text{кр}}} \cdot [1 - \operatorname{ch} \alpha (z-a)].$$

Из граничных условий определим C_1 и C_2:

$$\text{при } z=0 \ \sigma=0; \ \frac{d\theta_{\text{I}}}{dz}=0; \ C_1=0;$$

$$\text{при } z=l \ \sigma=0; \quad \frac{d\theta_{\text{II}}}{dz}=0;$$

$$\alpha C_2 \operatorname{sh} \alpha l + \frac{\mathfrak{M}_2}{GJ_{\text{кр}}} \alpha \operatorname{sh} \alpha (l-a) = 0,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{\mathfrak{M}_2}{GJ_{\text{кр}}} \frac{\operatorname{sh} \alpha (l-a)}{\operatorname{sh} \alpha l}.$$

После подстановки числовых значений получим

$$\theta = -17{,}97 \cdot 10^{-4} \operatorname{ch} \alpha z + 10{,}4 \cdot 10^{-4} - 31{,}2 \cdot 10^{-4} (1 - \operatorname{ch} \alpha (z-a)) \text{ рад/см}.$$

$$\underbrace{-17{,}97 \cdot 10^{-4} \operatorname{ch} \alpha z + 10{,}4 \cdot 10^{-4}}_{\text{I уч.}}$$

$$\underbrace{-17{,}97 \cdot 10^{-4} \operatorname{ch} \alpha z + 10{,}4 \cdot 10^{-4} - 31{,}2 \cdot 10^{-4} (1 - \operatorname{ch} \alpha (z-a))}_{\text{II уч.}}$$

По θ определим силовые факторы и угол закручивания:

$$M_\theta = GJ_{\text{кр}}\theta; \quad M_\omega = M_{\text{кр}} - M_\theta;$$

$$B = EJ_\omega \theta'; \quad \varphi = \int_z^l \theta(\zeta)\, d\zeta \ (z < \zeta < l).$$

За начало отсчета угла принят правый конец швеллера. Эпюры этих величин по длине стержня представлены на рис. 1.35. По найденным силовым факторам нетрудно вычислить напряжения.

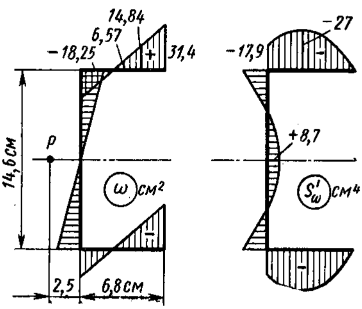


Рис. 1.34

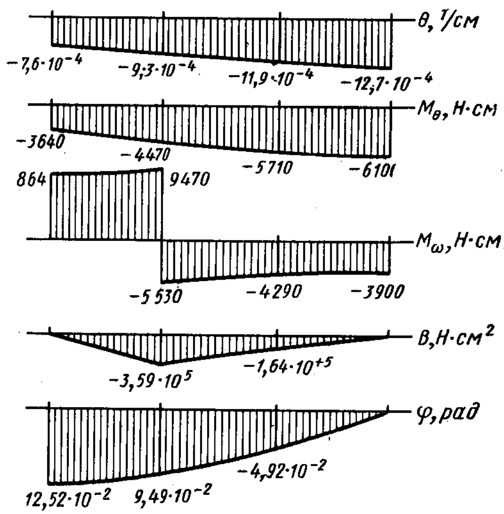


Рис. 1.35

§ 5. Поперечный изгиб открытых тонкостенных профилей

При поперечном прямом изгибе в сечениях стержня возникают два силовых фактора — поперечная сила Q и изгибающий момент M_x. Этим силовым факторам соответствуют напряжения $\tau_и$ и $\sigma_и$.

Если ось бруса — прямая, то контур поперечного сечения искажается незначительно; следовательно, для вычисления напряжений $\sigma_и$ и $\tau_и$ можно применять обычные формулы теории изгиба:

$$\sigma_и = \frac{M_x}{J_x} y; \tag{1.62}$$

$$\tau_и = \frac{QS'_x}{J_x b}. \tag{1.63}$$

Так как брус тонкостенный, то можно считать, что напряжения $\sigma_и$ и $\tau_и$ постоянны по толщине δ и изменяются только вдоль средней

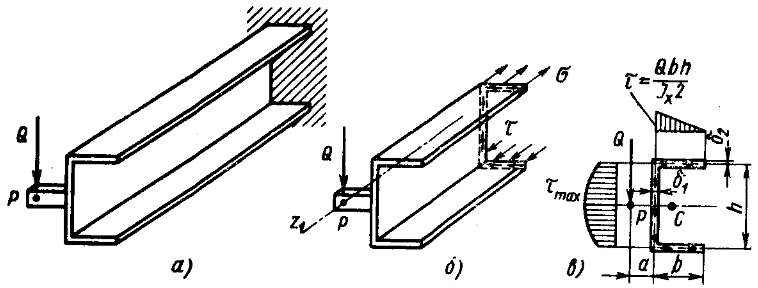


Рис. 1.36

линии контура. Поэтому под y следует понимать ординату соответствующей точки средней линии. Если поперечная нагрузка расположена произвольно по отношению к оси стержня, то кроме изгибающего момента и поперечной силы в поперечных сечениях может возникнуть еще и крутящий момент. Для того, чтобы последний был равен нулю, необходимо, чтобы линия действия поперечной нагрузки проходила через определенную точку поперечного сечения, называемую центром изгиба.

Для профилей, имеющих две оси симметрии, например для двутавра, центр изгиба совпадает с центром тяжести профиля. Для несимметричных профилей центр изгиба и центр тяжести не совпадают.

Рассмотрим, например, швеллер (рис. 1.36, *а*). Предположим, что центр изгиба находится в точке P и что линия действия нагрузки проходит через эту точку. Тогда стержень закручиваться не будет и, следовательно, в поперечных сечениях будут действовать только напряжения поперечного изгиба σ и τ, определяемые по формулам (1.62) и (1.63). Отсечем часть бруса (рис. 1.36, *б*) и возьмем сумму моментов всех сил относительно оси z, проходящей через точку P. Поперечная нагрузка относительно этой оси момента не дает (плечо равно нулю); нормальные напряжения, действующие в поперечном сечении, также не дают момента, так как они параллельны оси. Отсюда следует, что сумма моментов касательных напряжений $\tau_и$ относительно оси z равна нулю.

На основании сказанного можно заключить, что центр изгиба есть точка, относительно которой сумма моментов касательных напряжений поперечного изгиба равна нулю.

На рис. 1.36, *в* показано распределение касательных напряжений $\tau_и$ в швеллере. Возьмем сумму моментов этих напряжений относительно точки P и приравняем ее нулю; при этом учтем, что рав-

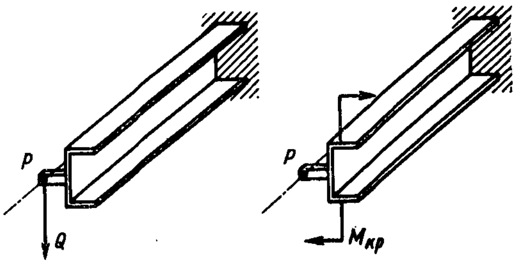


Рис. 1.37

нодействующая напряжений в вертикальной стенке равна Q, а в горизонтальной полке

$$\int_0^b \tau\delta_2 dx = \int_0^b \frac{Qx\delta_2^2 h dx}{J_x\delta_2 2} = \frac{Qb^2h\delta_2}{4J_x},$$

тогда

$$2\frac{Qb^2h\delta_2}{4J_x}\cdot\frac{h}{2} - Qa = 0,$$

откуда

$$a = \frac{b^2h^2\delta_2}{4J_x}.$$

Эта координата центра изгиба точно совпадает с найденной в § 3 координатой центра кручения швеллера (см. рис. 1.22, *г*). Такое совпадение не случайно. Покажем, что центр изгиба всегда совпадает с центром кручения. Для этого используем принцип взаимности работ. Нагрузим стержень последовательно: вначале крутящим моментом $M_{кр}$, а затем силой Q, приложенной в центре изгиба P (рис. 1.37). Так как сила Q брус не закручивает, то работа крутящего момента на перемещении от силы Q равна нулю. Теперь произведем нагружение в обратном порядке; при этом, согласно принципу взаимности работ, работа силы Q на перемещении от момента $M_{кр}$ также должна быть равна нулю. Отсюда следует, что при нагружении моментом $M_{кр}$ точка P не перемещается, т. е. эта точка является центром кручения.

Рассмотрим более общий случай поперечного изгиба тонкостенного открытого профиля, когда в поперечных сечениях возникают два изгибающих момента M_x и M_y и две поперечные силы Q_x и Q_y.

Если оси x и y — главные центральные, то напряжения определяются по формулам:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x; \tag{1.64}$$

$$\tau = \frac{1}{\delta}\left[\frac{Q_y S'_x}{J_x} + \frac{Q_x S'_y}{J_y}\right], \tag{1.65}$$

где S'_x и S'_y — статические моменты отсеченной части поперечного сечения относительно осей x и y. Знак этих статических моментов зависит от выбора начала обхода контура. Знак напряжения τ также зависит от выбора начала обхода. Если τ положительно, это значит, что оно направлено от края, который принят за начало отсчета (моменты M_x и M_y считаются положительными, если при положительных координатах x и y они вызывают напряжения растяжения; силы Q_x и Q_y считаются положительными, если $\frac{dM_x}{dz} > 0$, $\frac{dM_y}{dz} > 0$).

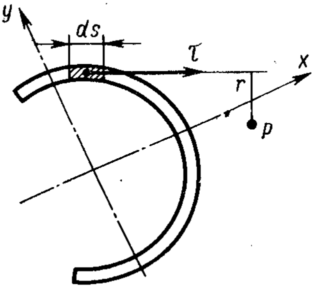


Рис. 1.38

Предположим, что точка P есть центр изгиба (рис. 1.38). Тогда сумма моментов касательных напряжений относительно этой точки должна быть равна нулю, т. е.

$$\int_F \tau\delta \, dsr = 0.$$

Подставив в это уравнение выражение (1.65), а также учитывая, что

$$dsr = d\omega; \; S'_x = \int_f y dF; \; S'_y = \int_f x dF,$$

получим

$$\int_F \left[\frac{Q_y}{J_x} \int_f y dF + \frac{Q_x}{J_y} \int_f x dF\right] d\omega = 0.$$

Вынесем постоянные величины за знак интеграла и выполним интегрирование по частям:

$$\frac{Q_y}{J_x}\left[\omega \int_F y \, dF - \int_F \omega y \, dF\right] + \frac{Q_x}{J_y}\left[\omega \int_F x \, dF - \int_F \omega x \, dF\right] = 0.$$

Так как оси x и y — центральные, то $\int\limits_F x dF = 0$ и $\int\limits_F y dF = 0$ и, следовательно,

$$-\frac{Q_y}{J_x}\int\limits_F \omega y\, dF - \frac{Q_x}{J_y}\int\limits_F \omega x\, dF = 0.$$

Чтобы последнее равенство выполнялось при любых значениях Q_x и Q_y, необходимо, чтобы

$$\int\limits_F \omega y\, dF = 0; \qquad (1.66)$$

$$\int\limits_F \omega x\, dF = 0. \qquad (1.67)$$

Полученные два условия позволяют определить положение центра изгиба. Нетрудно убедиться, что эти условия полностью совпадают с условиями (1.42) и (1.41), определяющими положение центра кручения. Это еще раз подтверждает, что центр изгиба и центр кручения есть одна и та же точка. Следовательно, изложенная методика определения центра кручения [см. зависимости (1.44), (1.45), (1.44a) (1.45a)] полностью применима для определения центра изгиба.

Следует отметить аналогию между формулами для напряжений при поперечном изгибе и при стесненном кручении (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Напряжение	Поперечный изгиб	Стесненное кручение
Нормальное	$\sigma_и = \frac{M}{J_x} y$	$\sigma_\omega = \frac{B}{J_\omega}\omega$
Касательное	$\tau_и = \frac{QS'_x}{J_x\delta}$	$\tau_\omega = -\frac{M_\omega S'_\omega}{J_\omega\delta}$

§ 6. Общий случай нагружения тонкостенных стержней незамкнутого профиля

При произвольном нагружении тонкостенного стержня в поперечных сечениях могут возникать следующие силовые факторы: нормальная сила N, поперечные силы Q_x и Q_y, изгибающие моменты M_x и M_y, крутящий момент $M_{кр}$, равный сумме крутящего момента стесненного кручения M_ω и момента свободного кручения M_θ, и бимомент B.

Первые шесть силовых факторов определяются, как обычно, методом сечений. Последние три зависят от θ (см. формулы табл. 1.1). Относительный угол закручивания, в свою очередь, определяется интегрированием уравнения (1.56) и может быть представлен в виде выражения (1.61).

Нормальное напряжение в поперечном сечении определяется как сумма напряжений от каждого силового фактора в отдельности:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B}{J_\omega} \omega. \tag{1.68}$$

Эта формула приближенная, так как она основана на предположении, что осевые перемещения w складываются из перемещений, определяемых законом плоских сечений и законом секториальных площадей. В действительности распределение напряжений может подчиняться более сложному закону (например, вблизи торцов). На некотором удалении от торцов формула (1.68) дает хорошее приближение к действительности, так как местные напряжения, зависящие от условий на торцах, быстро затухают (кроме напряжений, определяемых бимоментом B).

При оценке прочности тонкостенных стержней существенное значение могут иметь также касательные напряжения. В каждой точке сечения касательные напряжения складываются из четырех составляющих: τ_θ, τ_ω, τ_{Q_x}, τ_{Q_y}. Наибольшее напряжение возникает в одной из контурных точек:

$$\tau = \pm \frac{M_\theta \delta}{J_{\text{кр}}} - \frac{M_\omega S'_\omega}{J_\omega \delta} + \frac{Q_x S'_y}{J_y \delta} + \frac{Q_y S'_x}{J_x \delta}. \tag{1.69}$$

Остановимся кратко на вопросе об определении перемещений в общем случае нагружения.

Перемещение произвольной точки сечения в поперечном направлении можно легко вычислить, если будут известны составляющие смещения центра кручения u_0 и v_0 и угол поворота сечения φ. Смещения u_0 и v_0 связаны с изгибающими моментами M_x и M_y уравнениями:

$$\frac{d^2 u_0}{dz^2} = -\frac{M_y}{EJ_y}; \tag{1.70}$$

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x}. \tag{1.71}$$

Последние отличаются от обычных дифференциальных уравнений упругой линии лишь тем, что здесь рассматривается ось, проходящая через центр изгиба, а не через центр тяжести сечения. Интегрирование уравнений (1.70) и (1.71) производится обычным порядком.

Зависимости (1.68)—(1.71) написаны в предположении, что оси x и y — главные оси поперечного сечения. Положительные направления смещений u_0 и v_0 совпадают с положительными направлениями осей x и y.

При весьма малой толщине стенки жесткость профиля при свободном кручении становится исчезающе малой, так как она пропорциональна кубу толщины δ. В этом случае тонкостенный стержень перестает сопротивляться свободному кручению и при незакрепленных торцах превращается в механизм (рис. 1.39, *а*).

Чтобы профиль мог воспринимать крутящий момент, необходимо или наложить связи, запрещающие депланацию какого-либо сечения (рис. 1.39, *б*), или запретить относительный поворот каких-либо двух поперечных сечений (рис. 1.39, *в*).

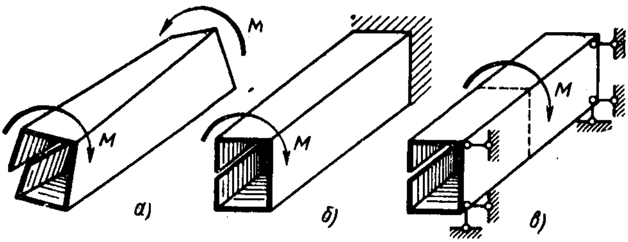


Рис. 1.39

Для профиля с весьма малой крутильной жесткостью второй член дифференциального уравнения (1.56) может быть отброшен; в результате получается следующее упрощенное уравнение:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = -\frac{M_{\text{кр}}}{EJ_\omega}. \tag{1.72}$$

Интегрирование этого уравнения не представляет трудностей. Получающиеся при интегрировании две произвольные постоянные определяются, как обычно, из граничных условий на торцах.

Уравнение (1.72) можно применять, если параметр αl не превышает некоторого предельного значения. Для консольных стержней, например, рекомендуется $\alpha l \leqslant 0{,}5$.

Отметим, что для часто встречающихся расчетных схем в справочной литературе приводятся готовые выражения для M_θ, M_ω и B [24].

В более сложных случаях нагружения решение может быть получено методом наложения табличных решений.

Пример 1.8. Определить напряжения в балке, нагруженной, как показано на рис. 1.40, *а*.

Силы $P = 20\,000$ Н расположены в плоскости вертикальной стенки. Размеры поперечного сечения, а также положение центра изгиба показаны на чертеже. Эпюры главной секториальной площади ω и S'_ω представлены на рис. 1.40, *б* (построение эпюры S'_ω начато от нижнего края).

Характеристики поперечного сечения:

$J_x = 394$ см^4; $J_\omega = 2000$ см^6; $J_{\text{кр}} = 0{,}6$ см^4; $\alpha = 0{,}011$ 1/см.

Эпюры M_x, Q_y и $M_{\text{кр}}$ приведены на рис. 1.41 (крутящий момент вычисляется как произведение силы на плечо относительно центра изгиба). Согласно выражению (1.61), относительный угол закручивания

$$\underbrace{\underbrace{\theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z - \frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}}}_{\text{I уч}} + \frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}} [1 - \operatorname{ch} \alpha (z - a)]}_{\text{II уч.}}.$$

Граничные условия:

при

$$z = 0, \quad \frac{d\theta_{\text{I}}}{dz} = 0 \text{ (так как } \sigma = 0 \text{ и } B = 0);$$

при

$$z = l/2, \quad \theta_{\text{II}} = 0 \quad \text{(так как по симметрии } w = 0).$$

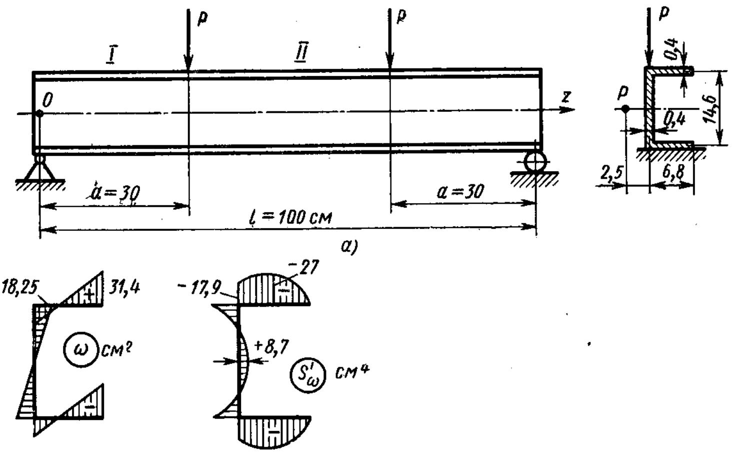
Из этих условий определяются постоянные C_1 и C_2:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}} \frac{\operatorname{ch} \alpha \left(\frac{l}{2} - a\right)}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2}} = 0{,}887 \frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}}.$$

Окончательное выражение относительного угла закручивания

$$\theta = \frac{\mathfrak{M}}{GJ_{\text{кр}}} \left\{ \underbrace{\underbrace{\frac{\operatorname{ch} \alpha \left(\frac{l}{2} - a\right)}{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2}} \operatorname{ch} \alpha z - 1}_{\text{I уч}} + [1 - \operatorname{ch} \alpha (z - a)]}_{\text{II уч.}} \right\}.$$

Далее вычисляются $M_\theta = GJ_{\text{кр}}\theta$; $M_\omega = M_{\text{кр}} - M_\theta$; $B = EJ_\omega \theta'$ (эпюры см. рис. 1.41).



б)

Рис. 1.40

Нормальные напряжения вычисляются по формулам (1.52) и (1.62).

Эпюры нормальных напряжений по сечению при $z = a$ представлены на рис. 1.42. Как можно заметить, напряжение от бимомента в данном случае значительно превышает напряжение от изгибающего момента.

Вычислим касательные напряжения при $z = a$:

$$M_\theta = -3160 \text{ Н} \cdot \text{см}; \quad M_\omega = -46\,840 \text{ Н} \cdot \text{см}; \quad Q = 20\,000 \text{ Н};$$

$$\tau_\theta = \frac{M_\theta}{J_{\text{кр}}}\delta = -\frac{3160}{0,6}0,4 = 2100 \text{ Н/см}^2;$$

$$\tau_{\omega\max} = -\frac{M_\omega S'_\omega}{J_\omega \delta} = -\frac{(-46\,840)(-27)}{2000 \cdot 0,4} = -1580 \text{ Н/см}^2,$$

знак минус указывает на то, что это напряжение направлено к краю, принятому за начало отсчета:

$$\tau_{Q_y\max} = \frac{Q_y S'_x}{J_x \delta} = \frac{20\,000\,(6,8 \cdot 0,4 \cdot 7,3 + 7,3 \cdot 0,4 \cdot 3,65)}{394 \cdot 0,4} = 3870 \text{ Н/см}^2.$$

Эпюры этих напряжений показаны на рис. 1.42.

Пример 1.9. [21]. Вычислить напряжения в швеллере, изображенном на рис. 1.43. Дано: $P = 50\,000$ Н; $l = 1$ м. Размеры поперечного сечения указаны на чертеже; там же приведена эпюра главной секториальной площади. Характеристики профиля:

$$F = 19,5 \text{ см}^2; \quad J_x = 823 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 79 \text{ см}^4; \quad J_\omega = 3720 \text{ см}^6;$$

$$J_{\text{кр}} = 3,82 \text{ см}^4; \quad \alpha = \sqrt{\frac{GJ_{\text{кр}}}{EJ_\omega}} =$$

$$= 0,02027 \text{ 1/см}.$$

Силовые факторы в сечении швеллера:

$$M_x = 5 \cdot 10^4 \cdot 7,55 = 378 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$M_y = 5 \cdot 10^4 \cdot 1,75 = 87\,500 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$N = 50\,000 \text{ Н}.$$

Бимомент в торцовом сечении

$$B_0 = P\omega_A = 5 \cdot 10^4\,(-20,16) =$$

$$= -10^6 \text{ Н} \cdot \text{см}^2.$$

Так как в данном случае крутящий момент отсутствует, то согласно уравнению (1.59)

$$\theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z;$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \alpha C_1 \operatorname{ch} \alpha z + \alpha C_2 \operatorname{sh} \alpha z.$$

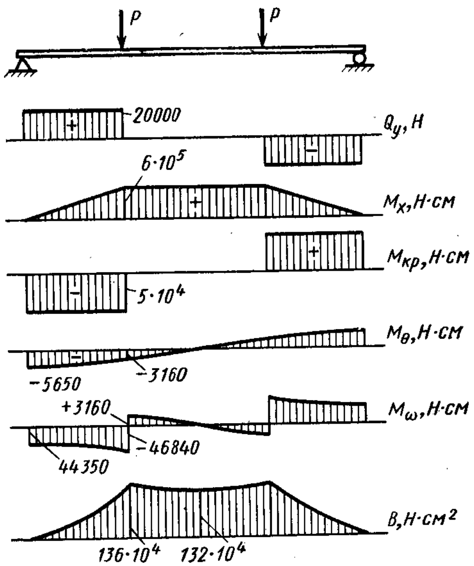


Рис. 1.41

Из граничных условий найдем постоянные C_1 и C_2:

при

$$z = 0, \quad EJ_\omega \frac{d\theta}{dz} = B_0; \quad EJ_\omega \alpha C_1 = B_0; \quad C_1 = \frac{B_0}{\alpha EJ_\omega};$$

при

$$z = \frac{l}{2} \quad \theta = 0; \quad C_2 = -C_1 \frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}} = -\frac{B_0}{\alpha EJ_\omega} \frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}.$$

Следовательно,

$$\theta=\frac{B_0}{EJ_\omega\alpha}\left[\operatorname{sh}\alpha z-\frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}\operatorname{ch}\alpha z\right];\quad \varphi_{\max}=\int_0^{l/2}\theta\,dz=\frac{B_0}{GJ_{\text{кр}}}\left[1-\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}\right];$$

$$M_\theta=GJ_{\text{кр}}\theta=B_0\alpha\left[\operatorname{sh}\alpha z-\frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}\operatorname{ch}\alpha z\right];\quad M_\omega=-M_\theta;$$

$$B=EJ_\omega\frac{d\theta}{dz}=B_0\left[\operatorname{ch}\alpha z-\frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha l}{2}}\operatorname{sh}\alpha z\right].$$

Эпюры этих величин по длине швеллера, построенные при значениях параметров $\alpha = 0{,}02027$ 1/см, $\alpha l = 2{,}027$, приведены на рис. 1.44.

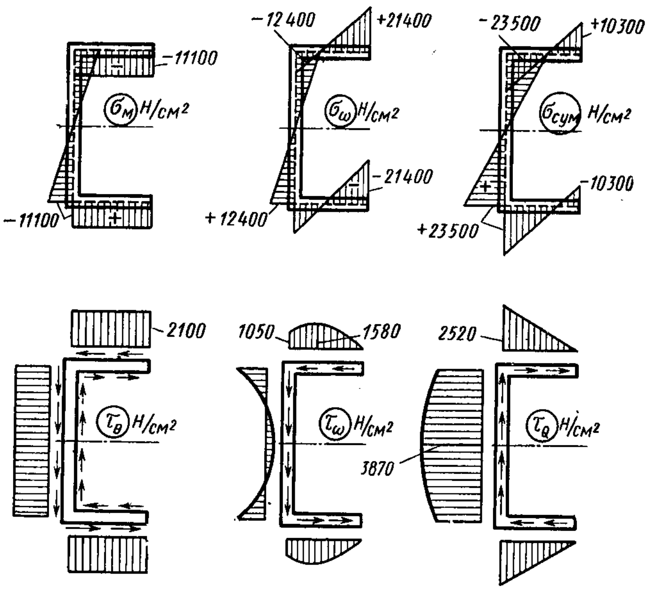


Рис. 1.42

Нормальные напряжения в поперечных сечениях швеллера вычисляют по формуле (1.68).

Эпюры распределения напряжений по сечению вблизи торца швеллера приведены на рис. 1.45. В скобках указаны значения напряжений, подсчитанные по формуле теории внецентренного растяжения без учета бимомента.

Пример 1.10. Тонкостенный стержень коробчатого незамкнутого профиля, жестко заделанный одним концом (рис. 1.46, *а*), находится под действием сил тяжести. Определить напряжения в стержне и вертикальное перемещение центра профиля на свободном торце. Положение центра кручения *P* профиля показано на рис. 1,46, *а*. На рис. 1.46, *б* изображена эпюра главной секториальной площади.

Характеристики профиля:

$$J_{кр}=\frac{200}{3}\,\delta^4\ \text{см}^4;\quad J_\omega=1632\cdot10^5\cdot\delta^6\ \text{см}^6;\quad F=200\delta^2\ \text{см}^2;$$

$$\alpha=4{,}04\cdot10^{-4}\ 1/\text{см};\quad \alpha l=0{,}485;\quad J_x=1{,}08\cdot10^5\delta^4\ \text{см}^4.$$

Поскольку центр тяжести и центр кручения не совпадают, под действием сил тяжести возникает равномерно распределенный крутящий момент интенсивности

$$m=q\left(a+\frac{1}{2}B\right)=46{,}7\ q\delta\ \text{Н}\cdot\text{см/см},$$

где q — вес на единицу длины стержня.

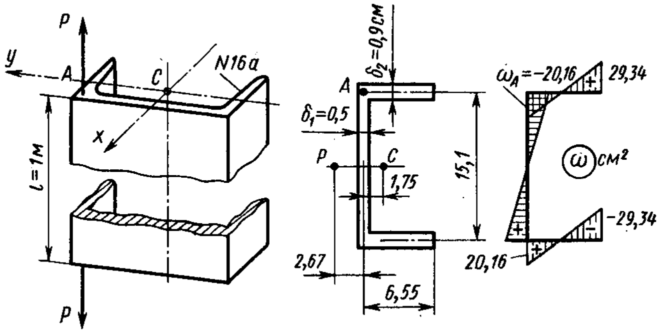


Рис. 1.43

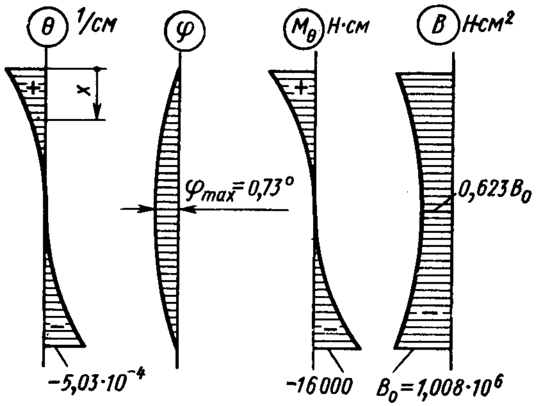


Рис. 1.44

Если через γ обозначить удельный вес материала, то

$$q=\gamma F=\gamma\delta^2 200\ \text{Н/см}.$$

Схема нагружения стержня приведена на рис. 1,46, *в*. Нагрузка q создает в сечении около заделки изгибающий момент

$$M=\frac{ql^2}{2}=1{,}44\cdot10^8\gamma\delta^4\ \text{Н}\cdot\text{см}.$$

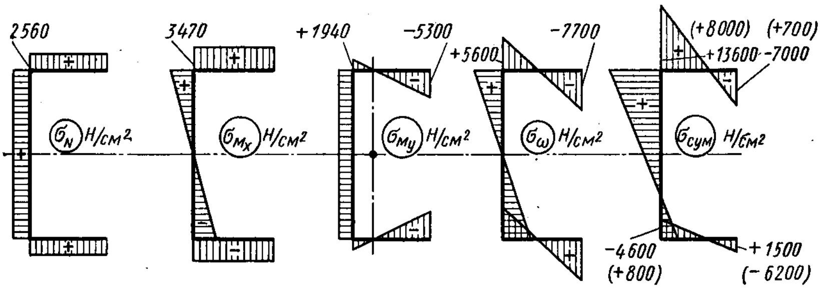


Рис. 1.45

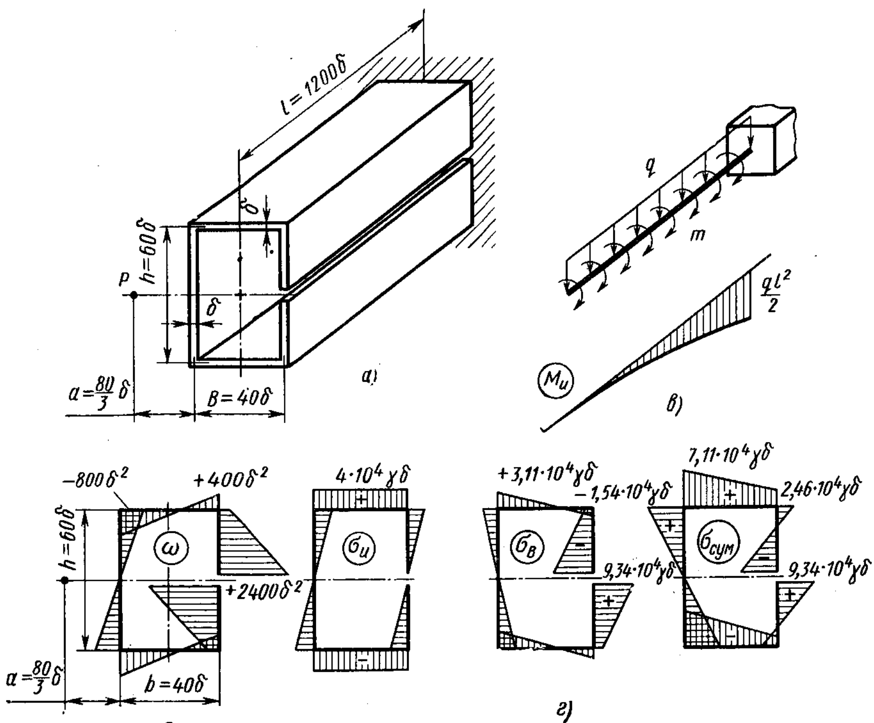


Рис. 1.46

Наибольшее напряжение изгиба

$$\sigma_{\text{и}\max}=\frac{M}{J_x}\frac{h}{2}=4\cdot 10^4\gamma\delta \text{ Н/см}^2.$$

Перемещение конца стержня за счет изгиба

$$v_{\text{и}}=\frac{ql^4}{8EJ_x}=4{,}8\cdot 10^8\frac{\gamma\delta^2}{E}\text{ см}.$$

Согласно формулам (1.59), (1.60)

$$\theta=C_1\operatorname{sh}\alpha z+C_2\operatorname{ch}\alpha z+\frac{mz}{GJ_{\text{кр}}}.$$

Используя граничные условия, найдем постоянные интегрирования:
при

$$z=0\quad \sigma=0;\ B=0;\ \frac{d\theta}{dz}=0;$$

при

$$z=l\quad w=0;\quad \theta=0,$$

отсюда

$$C_1=-\frac{m}{\alpha GJ_{\text{кр}}};\ C_2=\frac{m}{\alpha GJ_{\text{кр}}}\frac{\operatorname{sh}\alpha l-\alpha l}{\operatorname{ch}\alpha l}.$$

После подстановки значений постоянных выражение для θ принимает вид

$$\theta=\frac{m}{\alpha GJ_{\text{кр}}}\left[-\operatorname{sh}\alpha z+\frac{\operatorname{sh}\alpha l-\alpha l}{\operatorname{sh}\alpha l}\operatorname{ch}\alpha z+\alpha z\right].$$

Далее вычислим бимомент в сечении у заделки при $z=l$:

$$B=EJ_\omega\theta'$$

и нормальное напряжение стесненного кручения

$$\sigma_\omega=\frac{B}{J_\omega}\omega=E\omega\theta'=0{,}111\frac{Em\omega}{GJ_{\text{кр}}}.$$

На рис. 1.46, *г* приведены эпюры нормальных напряжений от изгибающего момента, от бимомента и суммарных напряжений. Влияние бимомента на величину напряжений в данном случае весьма значительное.

Вычислим угол закручивания профиля

$$\varphi=\int_0^l\theta\,dz=\frac{m}{\alpha^2GJ_{\text{кр}}}\left[1-\frac{1+\alpha l\operatorname{sh}\alpha l}{\operatorname{ch}\alpha l}+\frac{(\alpha l)^2}{2}\right]=0{,}15\cdot 10^8\frac{\gamma\delta}{E}.$$

Вследствие закручивания стержня центр торцового сечения получает дополнительное вертикальное перемещение

$$v_{\text{кр}}=\varphi\left(a+\frac{1}{2}B\right)=7{,}0\cdot 10^8\frac{\gamma\delta^2}{E}.$$

Это перемещение складывается с перемещением от изгиба и в результате получается полное перемещение

$$v=v_{\text{и}}+v_{\text{кр}}=11\cdot 10^8\frac{\gamma\delta^2}{E}\text{ см}.$$

Как показывают цифры, перемещение от закручивания преобладает.

Рассмотрим один пример на применение упрощенного дифференциального уравнения (1.72).

Пример 1.11. Определить внутренние силовые факторы в стержне зетобразного профиля, нагруженном двумя моментами, как показано на рис. 1.47. Дано: $a = 30$ см; $\mathfrak{M}_2 = 2\mathfrak{M}_1$.

По заданным размерам вычислим характеристики профиля

$$J_{кр} = 256 \cdot 10^{-6}\ см^4;\quad J_\omega = 4{,}04\ см^6;\quad \alpha = 5 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{см};\quad \alpha l = 0{,}45.$$

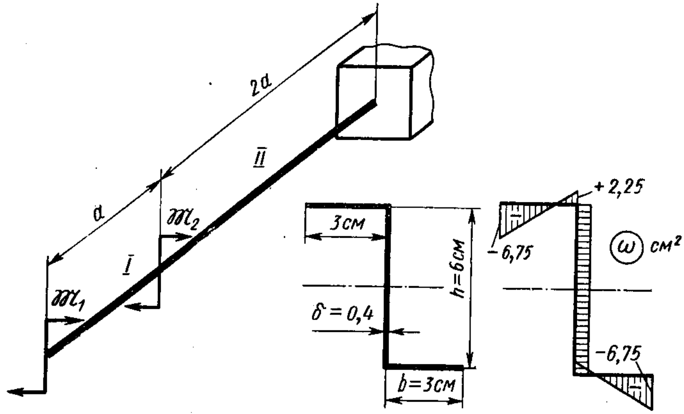


Рис. 1.47

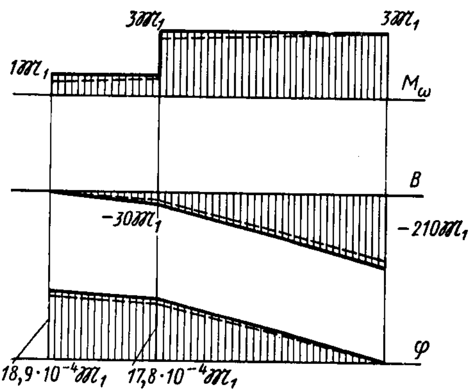


Рис. 1.48

Так как $\alpha l < 0{,}5$, то для решения задачи можно использовать упрощенное уравнение (1.72). Применительно к данному случаю это уравнение записывается в следующем виде:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = -\frac{\mathfrak{M}_1}{EJ_\omega} - \frac{\mathfrak{M}_2}{EJ_\omega}(z-a)^0.$$

Множитель $(z - a)^0 = 1$ добавлен для того, чтобы постоянные интегрирования на обоих участках были одинаковые (аналогично тому, как это делается при интегрировании дифференциального уравнения изогнутой оси балки).

Интегрируя это уравнение дважды, получим

$$\frac{d\theta}{dz}=C-\frac{\mathfrak{M}_1 z}{EJ_\omega}-\frac{\mathfrak{M}_2}{EJ_\omega}(z-a);$$

$$\theta=D+Cz-\frac{\mathfrak{M}_1 z^2}{2EJ_\omega}-\frac{\mathfrak{M}_2}{EJ_\omega}\frac{(z-a)^2}{2}.$$

Из граничных условий найдем постоянные:

при

$$z=0\quad \theta_{\mathrm{I}}'=0,\quad \text{откуда}\quad C=0;$$

при

$$z=3a\quad \theta_{\mathrm{II}}=0,\quad \text{откуда}\quad D=\frac{17}{2}\frac{\mathfrak{M}_1 a^2}{EJ_\omega}.$$

Следовательно,

$$\underbrace{\underbrace{\theta=\frac{17}{2}\frac{\mathfrak{M}_1 a^2}{EJ_\omega}-\frac{\mathfrak{M}_1 z^2}{2EJ_\omega}}_{\text{I уч.}}-\frac{\mathfrak{M}_2}{EJ_\omega}\frac{(z-a)^2}{2}.}_{\text{II уч.}}$$

Далее можно определить силовые факторы:

$$M_\theta=CJ_{\text{кр}}\theta;\quad M_\omega=M_{\text{кр}}-M_\theta;\quad B=EJ_\omega\theta'.$$

Эпюры этих величин показаны на рис. 1.48 сплошными линиями. Штриховыми линиями для сравнения показаны эпюры, полученные в результате более точного решения.

Глава 2 ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫЕ ТОЛСТОСТЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ

§ 1. Вывод основных зависимостей

Задача о напряжениях и деформациях в толстостенном цилиндре при постоянных по длине внутреннем и наружном давлениях, известная под названием задачи Ляме, рассматривается в курсе „Сопротивление материалов". В данной главе эта задача рассмотрена более подробно, причем основное внимание уделено вопросам, связанным с техническими приложениями задачи Ляме. Рассмотрен также случай неравномерного осесимметричного нагрева толстостенного цилиндра.

Введем обозначения: r_1 и r_2 — внутренний и наружный радиусы цилиндра; r — текущий радиус; p_1 и p_2 — внутреннее и наружное давления; t_1 и t_2 — температура на внутренней и на наружной поверхности.

Тепловое состояние предполагается стационарным (температура во времени постоянна). В этом случае тепловой поток Q, проходящий через произвольный цилиндрический слой, не зависит от радиуса r. Уравнение теплопроводности для бесконечно тонкого цилиндрического слоя можно записать в следующем виде:

$$Q=\frac{\lambda\, dt 2\pi r l}{dr},$$

где λ — коэффициент теплопроводности;
dr и $2\pi r l$ — толщина и площадь поверхности слоя;
dt — перепад температур в слое.

Разделив переменные и обозначив $\frac{Q}{2\pi l\lambda}=C_1$, получим дифференциальное уравнение $dt=C_1\frac{dr}{r}$,

интегралом которого является выражение $t=C_1 \ln r+C_2$.

Постоянные C_1 и C_2 определим по граничным условиям: при $r=r_1$ $t=t_1$; при $r=r_2$ $t=t_2$.

Окончательно

$$t=t_2+(t_1-t_2)\frac{\ln\frac{r}{r_2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}. \tag{2.1}$$

Следовательно, при стационарном тепловом режиме температура t изменяется по толщине стенки по логарифмическому закону. При исследовании напряженного состояния неравномерно нагретого цилиндра первое слагаемое в выражении (2.1) можно отбросить, так как оно соответствует равномерному нагреву, не вызывающему напряжений. Поэтому в дальнейшем будем считать, что температура изменяется по радиусу согласно закону

$$t = T\frac{\ln\frac{r}{r_2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}, \tag{2.2}$$

где $T = t_1 - t_2$.

Влияние осесимметричного неравномерного нагрева на напряженное состояние цилиндра объясняется тем, что внутренние более

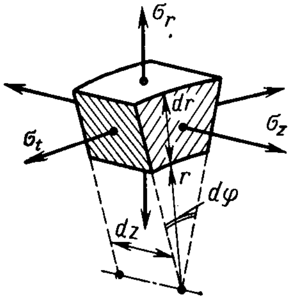


Рис. 2.1

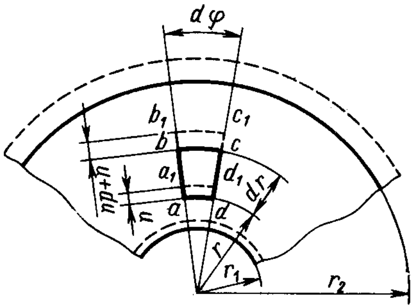


Рис. 2.2

нагретые слои, стремясь расшириться, давят на наружные и вызывают их растяжение. В свою очередь, наружные слои, сопротивляясь растяжению, вызывают сжатие внутренних слоев.

В общем случае в произвольной точке стенки цилиндра возникает трехосное напряженное состояние. По граням элемента объема (рис. 2.1) действуют нормальные напряжения: σ_r — радиальное, σ_t — окружное и σ_z — осевое. Касательные напряжения ввиду осевой симметрии и постоянства давлений и температуры по длине равны нулю.

Составим уравнение равновесия выделенного элемента объема. Взяв сумму проекций всех сил на направление радиуса, получим

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_t = 0. \tag{2.3}$$

Другие уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

Чтобы получить недостающие уравнения для определения неизвестных напряжений, рассмотрим деформации элемента объема. На рис. 2.2 показано положение элемента до и после нагружения. Обозначим через u радиальное перемещение произвольной точки стенки цилиндра, тогда относительные удлинения в радиальном и окружном направлениях будут определяться следующими выражениями:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}. \tag{2.5}$$

Исключив из равенств (2.4) и (2.5) перемещение u, получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{d(\varepsilon_t r)}{dr} - \varepsilon_r = 0. \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) называется иначе уравнением неразрывности, так как деформация материала без образования разрывов возможна только в том случае, если деформации ε_t и ε_r удовлетворяют этому уравнению.

Выразим деформации через напряжения. Уравнения обобщенного закона Гука с учетом температурных составляющих деформации записываются в следующем виде:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \mu\frac{\sigma_t}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} + \alpha t; \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} - \mu\frac{\sigma_r}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} + \alpha t; \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu\frac{\sigma_r}{E} - \mu\frac{\sigma_t}{E} + \alpha t. \tag{2.9}$$

Модуль упругости E, изменяющийся с изменением температуры, будем считать постоянным, что допустимо, если температура не превышает 300° С.

Поскольку все величины по длине цилиндра постоянны, поперечные сечения цилиндра остаются плоскими; следовательно, деформация ε_z от радиуса r не зависит, т. е.

$$\frac{d\varepsilon_z}{dr} = 0. \tag{2.10}$$

Выразим σ_z из уравнения (2.9):

$$\sigma_z = \varepsilon_z E + \mu\sigma_r + \mu\sigma_t - \alpha E t. \tag{2.11}$$

Подставив выражения (2.7), (2.8) и (2.11) в уравнение совместности деформаций (2.6) и выполнив несложные преобразования, с учетом равенств (2.3) и (2.10), получим уравнение совместности деформаций в напряжениях:

$$\frac{d(\sigma_t r)}{dr} - \sigma_r = -\frac{E\alpha r}{(1-\mu)}\frac{dt}{dr}. \tag{2.12}$$

Уравнения (2.3) и (2.12) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными. Преобразуем их к одному уравнению с одним неизвестным. Из уравнения (2.3) выразим σ_t:

$$\sigma_t = r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r. \tag{2.13}$$

Подставив σ_t в уравнение (2.12), получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно напряжения σ_r:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3\frac{1}{r}\cdot\frac{d\sigma_r}{dr}=-\frac{E\alpha}{(1-\mu)r}\cdot\frac{dt}{dr}. \tag{2.14}$$

Проинтегрировав это уравнение и определив по граничным условиям на внутренней и наружной поверхностях постоянные интегрирования, найдем напряжение σ_r, после чего по уравнениям (2.11) и (2.13) можно определить напряжения σ_t и σ_z. При определении напряжения σ_z следует учитывать, что $\varepsilon_z = \text{const}$, а также что при отсутствии осевой силы в цилиндре

$$N=\int\limits_F \sigma_z\,dF=0. \tag{2.15}$$

Перейдем к рассмотрению основных частных случаев.

§ 2. Напряжения и деформации в толстостенном цилиндре при действии внутреннего и наружного давления

Если неравномерный нагрев отсутствует, то дифференциальное уравнение (2.14) превращается в однородное:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3\frac{1}{r}\cdot\frac{d\sigma_r}{dr}=0. \tag{2.16}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma_r=A-\frac{B}{r^2}, \tag{2.17}$$

где A и B — неопределенные постоянные.

Подставив в равенство (2.13) выражение (2.17), найдем окружное напряжение

$$\sigma_t=A+\frac{B}{r^2}, \tag{2.18}$$

и из уравнения (2.11) определим осевое напряжение

$$\sigma_z=\varepsilon_z E+\mu 2A=\text{const}. \tag{2.19}$$

Так как осевое напряжение постоянно, то на основании условия (2.15) можно заключить, что в данном случае σ_z равно нулю.

Осевое напряжение может возникнуть тогда, когда на цилиндр дополнительно действует осевая сила N. В этом случае

$$\sigma_z=\frac{N}{F}=\frac{N}{\pi(r_2^2-r_1^2)}. \tag{2.19a}$$

Радиальное перемещение произвольной точки сечения цилиндра определяется по уравнениям (2.5), (2.8). При $t=0$

$$u=\varepsilon_t r=r\left(\frac{\sigma_t}{E}-\mu\frac{\sigma_r}{E}-\mu\frac{\sigma_z}{E}\right), \tag{2.20}$$

или с учетом выражений (2.17) и (2.18):

$$u=A\frac{1-\mu}{E}r+B\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\mu\sigma_z}{E}r. \tag{2.21}$$

Содержащиеся в уравнениях (2.17) — (2.21) постоянные интегрирования A и B находят согласно граничным условиям на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. Запишем граничные условия:

при

$$r = r_1 \quad \sigma_r = -p_1;$$

при

$$r = r_2, \quad \sigma_r = -p_2.$$

Эти условия приводят к системе двух уравнений, решение которой дает

$$A = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}; \tag{2.22}$$

$$B = \frac{(p_1 - p_2)\, r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \tag{2.23}$$

После внесения значений постоянных формулы (2.17), (2.18), (2.21) принимают следующий вид:

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2)\, r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)\, r^2}; \tag{2.24}$$

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2)\, r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)\, r^2}; \tag{2.25}$$

$$u = \frac{(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \frac{(1-\mu)}{E}\, r + \frac{(p_1 - p_2)\, r_1^2 r_2^2 (1+\mu)}{(r_2^2 - r_1^2)\, E} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\mu \sigma_z r}{E}. \tag{2.26}$$

Формулы (2.24), (2.25) и (2.26) известны под названием формул Ляме.

Заметим, что если величины напряжений σ_r, σ_t и σ_z найдены, то радиальное перемещение наиболее просто определяется по уравнению (2.20).

Если цилиндр имеет днища, то при действии на днища внутреннего и наружного давления возникает осевая сила

$$N = p_1 \pi r_1^2 - p_2 \pi r_2^2$$

и соответственно напряжение

$$\sigma_z = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \tag{2.27}$$

Это напряжение численно равно постоянной A, т. е. первому слагаемому в формулах (2.24) и (2.25).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Первый частный случай. На цилиндр действует только внутреннее давление, т. е. $p_1 = p$, $p_2 = 0$.

В этом случае, согласно формулам (2.24), (2.25) и (2.27),

$$\sigma_r = p\, \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right); \tag{2.28}$$

$$\sigma_t = p\, \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right); \tag{2.29}$$

$$\sigma_z = p\, \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}. \tag{2.30}$$

Эпюры распределения напряжений по радиусу приведены на рис. 2.3. Наиболее напряженная точка находится на внутренней поверхности. В этой точке

$$\sigma_r = -p = \sigma_3; \qquad (2.28а)$$

$$\sigma_t = p\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2} = \sigma_1; \qquad (2.29а)$$

$$\sigma_z = p\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2} = \sigma_2. \qquad (2.30а)$$

Если материал цилиндра пластичный, то эквивалентное напряжение вычисляют согласно гипотезе прочности энергии формоизменения:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}.$$

В данном случае

$$\sigma_{экв} = \frac{p\sqrt{3}}{\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)}. \qquad (2.31)$$

Если в рабочих условиях в цилиндре не должно возникать пластических деформаций, то необходимо, чтобы эквивалентное напряжение не превышало допускаемого напряжения

$$\sigma_{экв} = \frac{p\sqrt{3}}{\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)} \leqslant [\sigma],$$

откуда

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{1}{1-\frac{p\sqrt{3}}{[\sigma]}}. \qquad (2.32)$$

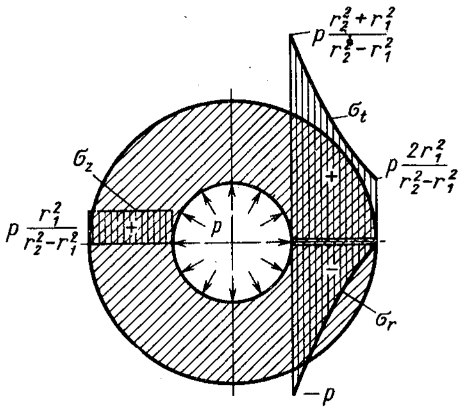


Рис. 2.3

Анализируя зависимость (2.32), можно увидеть, что при $p = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ отношение $\frac{r_2}{r_1}$ обращается в бесконечность. Следовательно при $p > \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$ эквивалентное напряжение во внутренних точках цилиндра будет больше допускаемого напряжения при сколь угодно большой толщине стенки. Если же давление превысит величину $p_т = \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}}$, то во внутренних точках неизбежно возникнет пластическая деформация.

Это, однако, не значит, что при больших давлениях подобрать размеры цилиндра вообще невозможно. Пластическая деформация представляет опасность только тогда, когда она распространяется на всю толщину стенки.

При высоком внутреннем давлении расчет цилиндра на прочность ведут по предельной нагрузке. За предельное давление принимают такое внутреннее давление, при котором пластическая деформация распространяется на всю толщину стенки. Величина предельного внутреннего давления определяется методами теории пластичности. Так, например, для цилиндра с днищами, изготовленного из пластичного материала, не обладающего упрочнением, предельное внутреннее давление определяют по следующей формуле:

$$p_{\text{пр}}=\frac{2\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{2.33}$$

Задавшись некоторым коэффициентом запаса прочности n, можно по заданному давлению p вычислить требуемое предельное давление

$$p_{\text{пр}}=pn,$$

затем по зависимости (2.33) найти $\ln\frac{r_2}{r_1}$ и далее радиус r_2. Таким образом, можно подобрать размеры трубы на любое внутреннее давление.

Пример 2.1. Определить толщину стенки стального цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления. Дано $r_1 = 2$ см; $\sigma_{\text{т}} = 2{,}4\cdot10^4$ Н/см². Расчет произвести для двух значений давления: $p = 6000$ Н/см² и $p = 12\,000$ Н/см².

При $p = 6000$ Н/см² расчет выполним двумя методами.

1. По методу допускаемых напряжений.

Примем коэффициент запаса по пределу текучести $n_{\text{т}} = 2$. Тогда $[\sigma]=\frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}}=1{,}2\cdot10^4$ Н/см².

По формуле (2.32)

$$\frac{r_2}{r_1}=\sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma]-p\sqrt{3}}}=2{,}72,$$

откуда $r_2 = 2{,}72\, r_1 = 5{,}44$ см.

2. По предельной нагрузке.

Коэффициент запаса n по предельной нагрузке возьмем равным трем, тогда предельное давление

$$p_{\text{пр}}=np=18\,000 \text{ Н/см}^2.$$

Подставив значения $p_{\text{пр}}$ и $\sigma_{\text{т}}$ в формулу (2.33), получим

$$1{,}8\cdot10^4=\frac{2{,}4\cdot10^4\cdot2}{\sqrt{3}}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

откуда

$$\ln\frac{r_2}{r_1}=0{,}65;\quad \frac{r_2}{r_1}=1{,}92;\quad r_2\cong 2r_1=4 \text{ см}.$$

Сравнение результатов показывает, что расчет по методу допускаемых напряжений дает завышенное значение толщины стенки. Применение этого метода в данном случае нецелесообразно.

При $p = 12\,000$ Н/см² выполнить расчет цилиндра по методу допускаемых напряжений невозможно.

Расчет по предельной нагрузке дает следующие результаты: при $n = 3$

$$p_{пр}=np=3,6 \cdot 10^4 \text{ Н/см}^2.$$

По формуле (2.33)

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{p_{пр}\sqrt{3}}{2\sigma_т} = \frac{3,6 \cdot 10^4 \sqrt{3}}{2 \cdot 2,4 \cdot 10^4} = 1,3,$$

откуда

$$\frac{r_2}{r_1}=3,67; \quad r_2=3,67\, r_1 \cong 7,4 \text{ см}.$$

Зависимости (2.32), (2.33) справедливы, если материал цилиндра пластичный. Если же материал хрупкий, прочность цилиндра должна оцениваться по коэффициенту запаса, вычисленному как отношение предела прочности материала к эквивалентному напряжению. Последнее определяется по главным напряжениям на основании соответствующей теории прочности (например, теории прочности Мора).

В некоторых конструкциях толстостенные трубы работают в условиях, не допускающих возникновения остаточных деформаций (например, стволы огнестрельного оружия). Величину давления до которого цилиндр будет работать упруго, можно повысить различными способами. Один из способов, называемый автоскреплением состоит в том, что после изготовления цилиндр опрессовывают высоким внутренним давлением, вызывающим начальную пластическую деформацию. При нагружении рабочим давлением такой цилиндр будет работать упруго до более высокого давления, чем неопрессованный цилиндр. Расчет автоскрепленных цилиндров рассматривается в курсе теории пластичности.

Другой способ состоит в применении составных цилиндров, изготовленных из двух или трех труб, насаженных одна на другую с натягом. Расчет таких составных цилиндров изложен в § 3.

Второй частный случай. На цилиндр действует только наружное давление ($p_1 = 0$ и $p_2 = p$). По формулам (2.24), (2.25), (2.27) получим

$$\sigma_r = -p\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right); \tag{2.34}$$

$$\sigma_t = -p\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1+\frac{r_1^2}{r^2}\right); \tag{2.35}$$

$$\sigma_z = -\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}. \tag{2.36}$$

Соответствующие эпюры напряжений приведены на рис. 2.4. Анализируя эпюры, легко установить, что наиболее напряженными точками также являются внутренние.

При уменьшении диаметра внутреннего отверстия, т. е. при $r_1 \to 0$, окружное напряжение в наружных точках стремится к величине $-p$, а во внутренних точках к $-2p$.

Сопоставим эти значения с соответствующими значениями для сплошного цилиндра, нагруженного наружным давлением. В сплошном цилиндре окружное напряжение всюду равно — p. Следовательно, около малого центрального отверстия окружное напряжение возрастает вдвое. Это резкое возрастание около малого отверстия является типичным примером концентрации напряжения.

Если материал пластичный, то при статическом нагружении концентрация напряжений не приводит к снижению прочности, так как по мере развития пластической деформации концентрация напряжений сглаживается.

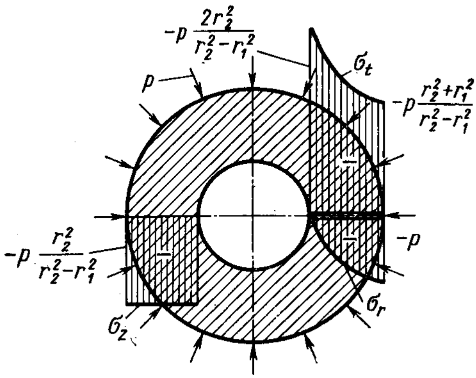


Рис. 2.4

Третий частный случай. Внутреннее и наружное давление одинаковые ($p_1 = p_2 = p$). В этом случае $\sigma_r = -p$; $\sigma_t = -p$ и $\sigma_z = -p$, т. е. все три напряжения равны между собой и не зависят ни от r, ни от отношения радиусов $\frac{r_1}{r_2}$. При стремлении радиуса r_1 к нулю в пределе получим распределение напряжений в сплошном цилиндре.

Отметим, что формулы Ляме справедливы также и в том случае, когда давления p_1 и p_2 изменяются по длине по линейному закону. Это нетрудно доказать, рассмотрев уравнения теории упругости.

§ 3. Расчет посадок с гарантированным натягом. Составные цилиндры

Рассмотрим задачу о напряжениях, возникающих при посадке одного цилиндра на другой с натягом. Натягом Δ называется разность диаметров посадочных поверхностей наружного и внутреннего цилиндра (рис. 2.5).

Введем обозначения:

b и c — радиусы наружного цилиндра;

a и $b+\frac{1}{2}\Delta$ — радиусы внутреннего цилиндра;

l — длина, одинаковая для обоих цилиндров;

E_1 и E_2 — модули упругости внутреннего и наружного цилиндра;

μ_1 и μ_2 — коэффициенты Пуассона соответственно.

Чтобы соединить цилиндры, наружный цилиндр обычно нагревают; при этом он расширяется и его можно свободно надеть на внутренний цилиндр. После охлаждения наружный цилиндр плотно охватывает внутренний цилиндр и в результате получается надежное соединение. В некоторых случаях вместо нагревания наружного цилиндра применяют охлаждение внутреннего цилиндра в жидком азоте или запрессовывают один цилиндр в другой без нагревания или охлаждения (с применением смазки).

При одинаковой длине соединяемых цилиндров контактное давление $p_к$ равномерно распределено по посадочной поверхности. Величина этого давления может быть определена из уравнения совместности деформаций.

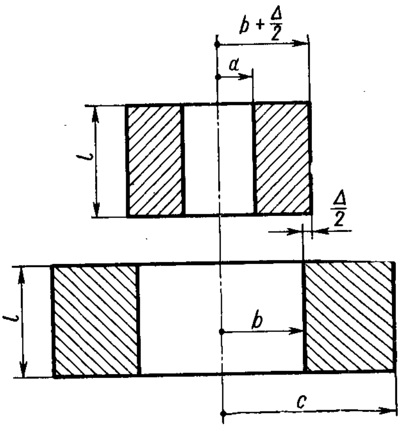


Рис. 2.5

Обозначим через $|u_1|$ уменьшение радиуса посадочной поверхности внутреннего цилиндра и через u_2 — увеличение радиуса посадочной поверхности наружного цилиндра. Очевидно, что сумма $|u_1|$ и u_2 должна быть равна половине натяга. Так как $|u_1| = -u_1$ и $|u_2| = u_2$, то

$$-u_1 + u_2 = \frac{\Delta}{2}. \qquad (2.37)$$

Применив для наружного цилиндра формулы (2.28) и (2.29) и подставив в них $p = p_к$, $r_1 = b$, $r_2 = c$ и $r = b$, получим следующие значения напряжений в точках, расположенных на посадочной поверхности:

$$\sigma_r = -p_к; \quad \sigma_t = p_к \frac{c^2+b^2}{c^2-b^2}; \quad \sigma_z = 0.$$

Изменение радиуса посадочной поверхности u_2 вычислим по формуле (2.20):

$$u_2 = \frac{b}{E_2}(\sigma_t - \mu_2\sigma_r) = \frac{bp_к}{E_2}\left(\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2} + \mu_2\right).$$

Аналогично определяется изменение радиуса посадочной поверхности внутреннего цилиндра. По зависимостям (2.34), (2.35) и (2.20) при $r_1 = a$, $r_2 \cong b$, $p = p_к$ и $r = b$ найдем

$$\sigma_r = -p_к; \quad \sigma_t = -p_к \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}; \quad \sigma_z = 0$$

и

$$u_1 = \frac{b}{E_1}[\sigma_t - \mu_1\sigma_r] = \frac{bp_к}{E_1}\left(-\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \mu_1\right).$$

Подставив выражения u_1 и u_2 в уравнение (2.37) и решив его относительно контактного давления $p_к$, получим

$$p_к = \frac{\Delta}{2b\left[\frac{1}{E_1}\left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - \mu_1\right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2} + \mu_2\right)\right]}. \qquad (2.38)$$

При одинаковом материале внутреннего и наружного цилиндра

$$p_к = \frac{\Delta E}{2b\left[\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \frac{c^2+b^2}{c^2-b^2}\right]} \tag{2.39}$$

или

$$p_к = \frac{\Delta E\,(c^2-b^2)(b^2-a^2)}{4b^3\,(c^2-a^2)}. \tag{2.39а}$$

Иногда формулу (2.39) записывают также в виде

$$p_к = \frac{\Delta E}{2b}\cdot\frac{1}{\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}}, \tag{2.39б}$$

где $k_1 = \frac{a}{b}$ и $k_2 = \frac{b}{c}$ — коэффициенты толстостенности внутреннего и наружного цилиндра.

Формулы (2.38), (2.39) применяют для расчета прессовых посадок цилиндров при одинаковой длине сопрягаемых деталей. Эти формулы справедливы при условии, что натяг не очень велик и деформации в цилиндре только упругие. Кроме того, необходимо иметь в виду, что величина натяга, определяемая по замерам деталей до запрессовки, всегда несколько больше, чем величина действительного натяга, так как после обработки на поверхности деталей остаются неровности (гребешки), которые обминаются при запрессовке. Разница между действительным и измеренным натягом зависит от шероховатости поверхности и определяется по эмпирической формуле

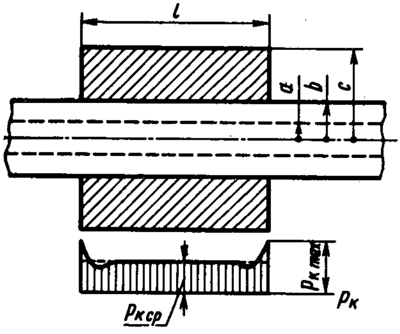


Рис. 2.6

$$\Delta_{изм} - \Delta = 1{,}2\,(R_1 + R_2),$$

где R_1 и R_2 — максимальные высоты микронеровностей сопрягаемых поверхностей. Числовые значения величины R следующие:

Класс чистоты поверхности	6	7	8
Максимальная высота микронеровностей R, мкм	10	6	3

При различной длине сопрягаемых деталей контактное давление распределяется по посадочной поверхности неравномерно. Выступающие концы более длинной детали увеличивают контактное давление у краев посадочной поверхности, т. е. вызывают концентрацию напряжений. Точного решения задачи о распределении контактного давления не получено. Приближенное среднее значение контактного давления можно определить, приняв, что давление распределено равномерно. Для случая посадки короткой втулки на длинный вал (рис. 2.6) формула для среднего давления аналогична формуле (2.38) и отличается только тем, что в знаменатель введен поправочный коэффициент $\varkappa$, зависящий от отношения длины посадочной поверхности l к ее диаметру $d_к$:

$$p_к=\frac{\Delta}{2b\left[\frac{\varkappa}{E_1}\left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}-\mu_1\right)+\frac{1}{E_2}\left(\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2}+\mu_2\right)\right]}. \qquad (2.40)$$

Числовые значения коэффициента $\varkappa$ в зависимости от отношения l/d при различной толстостенности внутренней детали k_1 даны на рис. 2.7.

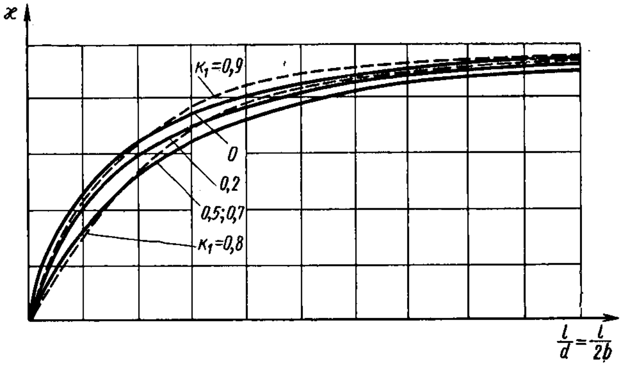


Рис. 2.7

Пример 2.2. Определить напряжения, возникающие при прессовой посадке полого цилиндра на сплошной вал. Диаметры вала и цилиндра:

$d = 2b = 100$ мм; $d_1 = 2b = 100$ мм; $d_2 = 2c = 180$ мм. Модуль упругости материала $E = 2\cdot 10^7$ Н/см².

Натяг $\Delta = 0{,}05$ мм.

Контактное давление определяем по формуле (2.39):

$$p_к=\frac{2\cdot 10^7\cdot 0{,}005}{2\cdot 5\left(1+\frac{9^2+5^2}{9^2-5^2}\right)}=3460 \text{ Н/см}^2.$$

Напряжение во внутреннем (сплошном) цилиндре

$$\sigma_r=\sigma_t=-p_к=-3460 \text{ Н/см}^2.$$

Напряжение в наружном цилиндре [см. формулы (2.28) и (2.29)] при $r = b = 5$ см; $\sigma_r = -3460$ Н/см²; $\sigma_t = 6540$ Н/см²;
при $r = c = 9$ см; $\sigma_r = 0$; $\sigma_t = 3090$ Н/см².

Эквивалентное напряжение в наиболее напряженной точке (на внутренней поверхности наружного цилиндра)

$$\sigma_{экв}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_t-\sigma_r)^2+\sigma_t^2+\sigma_r^2\right]}=8800 \text{ Н/см}^2.$$

Приведенный пример показывает, что даже при сравнительно малом натяге возникают значительные напряжения. Отсюда следует, что детали, предназначенные для соединения с натягом, должны изготовляться с большой точностью, так как даже небольшое отклонение от номинальной величины натяга может привести к снижению прочности соединения.

Остановимся на особенностях расчета составных цилиндров. Составные цилиндры из двух и более труб, посаженных один на другой с натягом, находят применение в машиностроении в тех случаях, когда требуется, чтобы деформации были упругими при возможно большем значении внутреннего давления.

За счет натяга в составном цилиндре возникают начальные напряжения, характер распределения которых по поперечному сечению показан на рис. 2.8, *а*. При этом в наружном цилиндре воз-

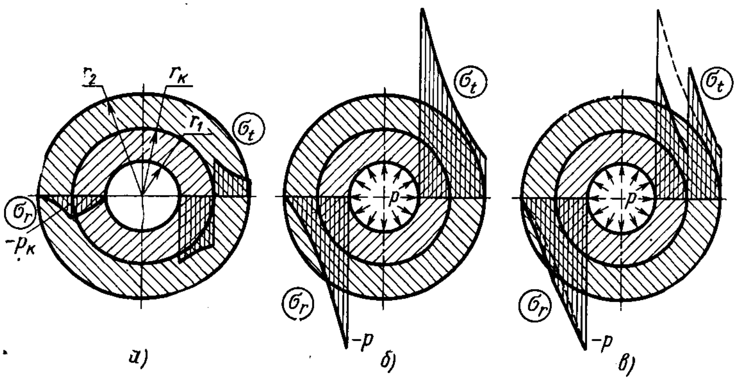


Рис. 2.8

никает растягивающее окружное напряжение, а во внутреннем — сжимающее. При приложении внутреннего рабочего давления на начальные напряжения накладываются рабочие напряжения (рис. 2.8, *б*), в результате получаются суммарные напряжения (рис. 2.8, *в*). В точках, расположенных на внутренней поверхности составного цилиндра, суммарное окружное напряжение получается меньше, чем в тех же точках целого цилиндра, в то время как в наружных точках окружные напряжения, наоборот, возрастают. Оптимальное значение контактного давления $p_к$ и соответствующего ему натяга можно определить из условия равнопрочности внутреннего и наружного цилиндра, а оптимальное значение радиуса контактной поверхности — из условия наибольшего снижения эквивалентного напряжения в опасной точке.

Согласно этим условиям оптимальный радиус контактной поверхности

$$r_к = \sqrt{r_1 r_2}. \tag{2.41}$$

Оптимальная величина контактного давления при выполнении условия (2.41):

$$p_к = \frac{p}{2}\,\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \tag{2.42}$$

Натяг, соответствующий этому контактному давлению:

$$\Delta=\frac{2pr_{\text{к}}}{E}. \tag{2.42.а}$$

Остановимся более подробно на вопросе определения величины натяга, соответствующего заданному начальному контактному давлению. В случае двухслойной трубы эта задача решается с помощью зависимостей (2.38), (2.39). Другой, более простой, способ определения требуемого натяга состоит в следующем.

Если контактное давление задано, то по формулам Ляме вычисляют напряжения в точках, расположенных на посадочных поверхностях внутренней и наружной трубы. После этого по формуле (2.20) определяют радиальные перемещения u_1 (для внутренней трубы) и u_2 (для наружной трубы). Разность этих перемещений (взятых с учетом их знаков) равна половине натяга Δ, следовательно,

$$\Delta=2u_2-2u_1. \tag{2.43}$$

Такой метод особенно удобен для расчета натягов трехслойных цилиндров.

Пример 2.3. Определить величины натягов для цилиндра, составленного из трех стальных труб:

1-я труба $r_{11}=4$ см $\quad r_{12}=8$ см
2-я » $r_{21}=8$ » $\quad r_{22}=11$ »
3-я » $r_{31}=11$ » $\quad r_{32}=14$ »

Величина контактного давления на обеих контактных поверхностях задана одинаковой и равной $p_{\text{к}1}=p_{\text{к}2}=3000$ Н/см².

Вычислим напряжения:

Для 1-й трубы: $p_1=0$; $p_2=p_{\text{к}1}=3000$ Н/см²;
при $r=r_{12}=8$ см $\quad \sigma_{r12}=-p_{\text{к}}=-3000$ Н/см²;

$$\sigma_{t12}=-p_{\text{к}}\frac{r_{12}^2+r_{11}^2}{r_{12}^2-r_{11}^2}=-5000\ \text{Н/см}^2.$$

Для 2-й трубы: $p_1=p_2=3000$ Н/см²;
при $r=r_{21}=8$ см $\quad \sigma_{t21}=\sigma_{r21}=-3000$ Н/см²;
при $r=r_{22}=11$ см $\quad \sigma_{t22}=\sigma_{r22}=-3000$ Н/см².

Для 3-й трубы: $p_1=3000$ Н/см²; $p_2=0$;
при $r=r_{31}=11$ см $\quad \sigma_{r31}=-3000$ Н/см²;

$$\sigma_{t31}=p_{\text{к}}\frac{r_{32}^2+r_{31}^2}{r_{32}^2-r_{31}^2}=12\,700\ \text{Н/см}^2.$$

По формуле (2.20) определим перемещения точек, расположенных на поверхностях контакта (σ_z считаем равным нулю). Для первой контактной поверхности

$$u_{12}=\frac{r_{12}}{E}(\sigma_{t12}-\mu\sigma_{r12})=-\frac{32\,800}{E}=-0{,}00164\ \text{см};$$

$$u_{21}=\frac{r_{21}}{E}(\sigma_{t21}-\mu\sigma_{r21})=-\frac{16\,800}{E}=-0{,}00084\ \text{см}.$$

Для второй контактной поверхности

$$u_{22}=\frac{r_{22}}{E}(\sigma_{t22}-\mu\sigma_{r22})=-\frac{23\,100}{E}=-0{,}001155\ \text{см};$$

$$u_{31}=\frac{r_{31}}{E}(\sigma_{t31}-\mu\sigma_{r31})=\frac{149\,600}{E}=0{,}00748\ \text{см}.$$

Соответствующие натяги:

$$\Delta_1 = 2u_{21} - 2u_{12} = \frac{32\,000}{E} = 16 \cdot 10^{-4}\ \text{см} = 16\ \text{мкм};$$

$$\Delta_2 = 2u_{31} - 2u_{22} = \frac{345\,400}{E} = 172 \cdot 10^{-4}\ \text{см} = 172\ \text{мкм}$$

$$(E = 2 \cdot 10^7\ \text{Н/см}^2;\quad \mu = 0{,}3).$$

Найденные значения натягов обеспечивают заданные контактные давления, однако вопрос о том, являются ли эти контактные давления оптимальными, остается неисследованным. Также остается невыясненным, насколько удачно выбраны радиусы посадочных поверхностей. Для выяснения этих вопросов следует варьировать значениями радиусов и величинами контактных давлений и выбрать такие, при которых эквивалентное напряжение будет наименьшим.

При этом исследовании напряжений удобно применять графический метод, позволяющий быстро найти напряжения и видеть,

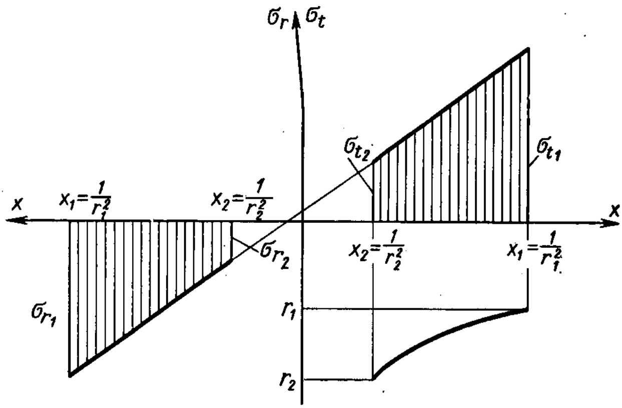


Рис. 2.9

как влияет изменение того или иного параметра на распределение напряжений.

Графический метод [21] основан на замене переменной r новой переменной:

$$x = \frac{1}{r^2}. \tag{2.44}$$

Формулы Ляме (2.17) и (2.18) принимают вид

$$\sigma_r = A - Bx; \tag{2.45}$$

$$\sigma_t = A + Bx. \tag{2.46}$$

Равенства (2.45) и (2.46) представляют собой уравнения прямых, отличающиеся одно от другого только знаком углового коэффициента. Возьмем системы координат x, σ_t и x, σ_r и расположим их таким образом, чтобы начало координат и оси ординат были совмещены (рис. 2.9), а оси абсцисс направлены в противоположные стороны. Тогда прямые, построенные по уравнениям (2.45) и (2.46), на этих осях будут продолжением одна другой. Так как переменная x не может иметь отрицательных значений, то участок прямой, расположенный слева от начала координат, будет относиться только к напряжению σ_r, а участок, расположенный справа, — к напряжению σ_t. Предположим, что заданы радиусы r_1 и r_2 и давления p_1 и p_2 и требуется определить напряжения. Вычислим $x_1=\frac{1}{r_1^2}$ и $x_2=\frac{1}{r_2^2}$ и отложим их вправо и влево от начала координат (см. рис. 2.9). Радиальные напряжения во внутренних и наружных точках равны соответственно внутреннему и наружному давлениям, взятым со знаком минус, т. е.

$$\sigma_{r1}=-p_1;\quad \sigma_{r2}=-p_2.$$

Отложив от точек x_1 и x_2 в координатной системе x, σ_r ординаты, соответствующие напряжениям $\sigma_{r1}=-p_1$ и $\sigma_{r2}=-p_2$, и соединив полученные точки прямой линией, получим эпюру напряжений $\sigma_r(x)$. Продолжение этой прямой в область, расположенную справа от начала координат, дает эпюру напряжений $\sigma_t(x)$. Эти эпюры характеризуют изменение напряжений по переменной $x=\frac{1}{r^2}$ (точки прямых, расположенные ближе к началу координат, соответствуют наружным точкам цилиндра, а точки, удаленные от начала координат, — внутренним точкам цилиндра).

Пример 2.4. Определить графическим способом напряжения, возникающие при соединении двух цилиндров с помощью прессовой посадки. Заданы значения радиусов r_1, r_2 и $r_к$ и контактное давление $p_к$.

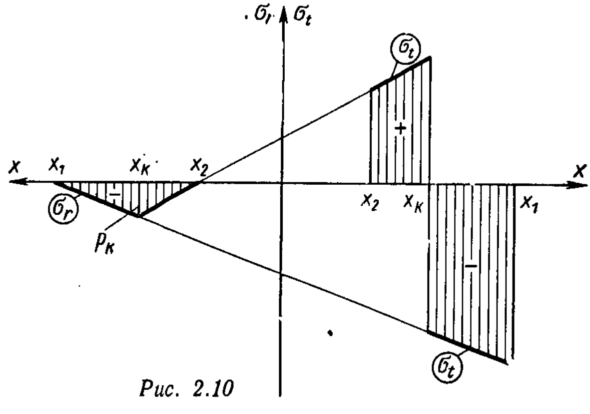


Рис. 2.10

Отложим вправо и влево от начала координат отрезки $x_1=\frac{1}{r_1^2}$; $x_к=\frac{1}{r_к^2}$; $x_2=\frac{1}{r_2^2}$ (рис. 2.10). В левой части графика от точек x_1, $x_к$, x_2 отложим по вертикали отрезки, равные напряжениям σ_{r1}, $\sigma_{rк}$ и σ_{r2}, и соединим полученные точки прямыми линиями. В данном случае $\sigma_{r1}=0$, $\sigma_{rк}=-p_к$ и $\sigma_{r2}=0$. Эпюра напряжений $\sigma_r(x)$ имеет вид треугольника (левая сторона графика, см. рис. 2.10).

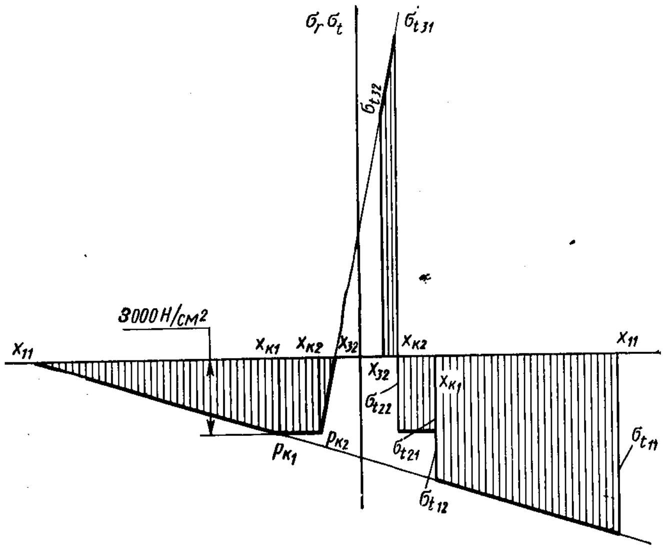


Рис. 2.11

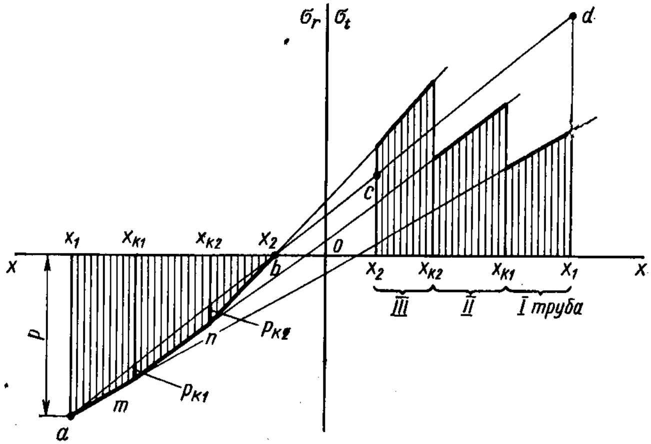


Рис. 2.12

Продолжив наклонные участки эпюры $\sigma_r(x)$ в область, расположенную справа от начала координат, получим эпюру напряжений $\sigma_t(x)$. Ординаты этой эпюры при $x = x_1$, $x = x_к$ и $x = x_2$ определяют в соответствующем масштабе напряжения σ_t во внутренних и наружных точках первого и второго цилиндра.

Пример 2.5. Определить графическим способом посадочные напряжения в трехслойном цилиндре, рассмотренном в примере 2.3.

Значения переменной x в граничных точках:

$$x_{11} = \frac{1}{r_{11}^2} = 625 \cdot 10^{-4}\ 1/\text{см}^2;\quad x_{к1} = \frac{1}{r_{к1}^2} = 156{,}2 \cdot 10^{-4}\ 1/\text{см}^2;$$

$$x_{к2} = \frac{1}{r_{к2}^2} = 82{,}7 \cdot 10^{-4}\ 1/\text{см}^2;\quad x_{32} = \frac{1}{r_{32}^2} = 51{,}1 \cdot 10^{-4}\ 1/\text{см}^2.$$

Графическое определение напряжений для этого случая показано на рис. 2.11.

При определении оптимальных значений радиусов и натягов целесообразно построить вначале график, соответствующий рабочему внутреннему давлению p для сплошной трубы (прямая $abcd$, рис. 2.12). Затем, задавшись значениями $x_{к1}$, $x_{к2}$, $p_{к1}$ и $p_{к2}$, отложить от прямой ab в соответствующих точках выбранные контактные давления. Соединив полученные точки m и n с точками a и b, получим эпюры результирующих радиальных напряжений (линия $amnb$). Продолжение наклонных прямых am, mn, nb в область, расположенную справа от начала координат, дает эпюру результирующих окружных напряжений. На рис. 2.12 эпюры результирующих напряжений заштрихованы.

Это построение дает наглядное представление о том, насколько удачно выбраны радиусы посадочных поверхностей и контактные давления, и позволяет видеть, каковы окружные напряжения в каждой из трех труб, а также позволяет оценить эффект замены однослойного цилиндра трехслойным.

§ 4. Температурные напряжения в толстостенных цилиндрах

В стационарном тепловом режиме температура распределяется по толщине стенки цилиндра по логарифмическому закону [см. равенство (2.2)]. Подставив выражение (2.2) в правую часть уравнения (2.14), получим

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3\frac{1}{r}\cdot\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{E\alpha T}{(1-\mu)\ln\frac{r_1}{r_2}}\cdot\frac{1}{r^2}. \tag{2.47}$$

Общее решение этого дифференциального уравнения можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения (2.15) и частного решения уравнения с правой частью (2.47):

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\ln\frac{r}{r_2}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}. \tag{2.48}$$

Постоянные A и B, как и ранее, определяют по граничным условиям. Поскольку напряжения от внутреннего и наружного давлений можно определять независимо от температурных напряжений, примем, что в данном случае давления равны нулю. Тогда граничные условия будут следующие:
при

$$r = r_1 \quad \sigma_r = 0;$$

при

$$r = r_2 \quad \sigma_r = 0.$$

На основании этих условий

$$A = -\frac{TE\alpha}{2(1-\mu)} \cdot \frac{r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)}; \quad B = -\frac{TE\alpha}{2(1-\mu)} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}. \tag{2.49}$$

В результате подстановки постоянных выражение радиального напряжения (2.48) принимает вид

$$\sigma_r = \frac{T\alpha E}{2(1-\mu)} \left[-\frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{(r_2^2 - r^2)\, r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)\, r^2} \right]. \tag{2.50}$$

Напряжение σ_t определяется на основании уравнения (2.13):

$$\sigma_t = \frac{T\alpha E}{2(1-\mu)} \left[\frac{1 - \ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} - \frac{(r_2^2 - r^2)\, r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)\, r^2} \right]. \tag{2.51}$$

Для определения третьего напряжения σ_z необходимо вначале найти деформацию ε_z. Для этого используем дополнительное условие равенства нулю осевой силы в цилиндре

$$N = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z 2\pi r \, dr = 0.$$

Подставив под знак интеграла выражение (2.11) и выполнив интегрирование с учетом зависимостей (2.10), (2.50), (2.51), а затем решив полученное равенство относительно ε_z, получим

$$\varepsilon_z = -\alpha T \left[\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \right]. \tag{2.52}$$

Выражение напряжения σ_z (2.11) принимает следующий вид:

$$\sigma_z = \frac{T\alpha E}{2(1-\mu)} \left[\frac{1 - 2\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \tag{2.53}$$

На рис. 2.13 приведены эпюры напряжений σ_r, σ_t, σ_z, построенные на основании зависимостей (2.50), (2.51), (2.53) (перепад температур T принят положительным). Наибольшие напряжения возникают во внутренних точках. Для оценки величины этих напряжений приведем числовой пример.

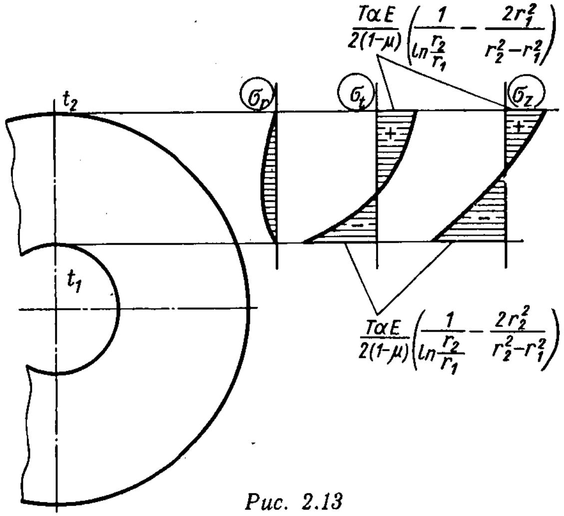


Рис. 2.13

Пример 2.6. Дано: $r_2 = 3r_1$; $T = t_1 - t_2 = 40°$ C; $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см²; $\mu = 0{,}3$; $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/град (сталь). Вычислим напряжения в точках, расположенных на внутренней поверхности:

$$\sigma_r = \sigma_z = \frac{T\alpha E}{2(1-\mu)}\left[\frac{1}{\ln\frac{r_2}{r_1}} - \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right] = -9240 \text{ Н/см}^2; \quad \sigma_r = 0.$$

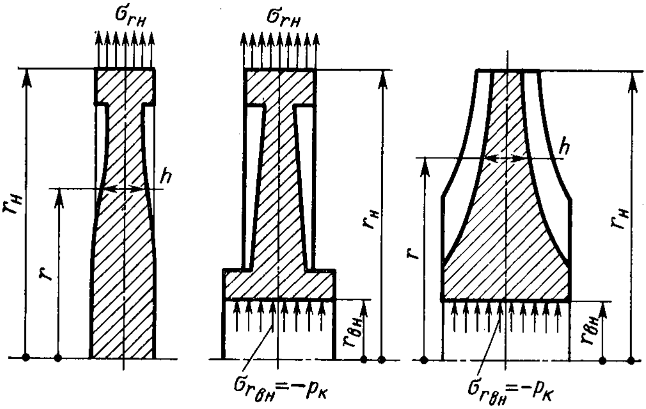
Как можно видеть, даже при сравнительно малом перепаде температур напряжения достигают весьма больших величин.

При большом перепаде температур напряжения в цилиндре могут превысить предел текучести материала. В этом случае выведенные зависимости неприменимы. Если же перепад невелик, но температуры t_1 и t_2 высокие, выведенными зависимостями можно пользоваться; необходимо только подставлять в них значение модуля упругости, соответствующее средней температуре стенки цилиндра. При одновременном нагружении цилиндра внутренним и наружным давлением и неравномерном нагреве напряжения можно вычислять отдельно и затем суммировать.

Глава 3 **НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ДИСКАХ ПРИ ВРАЩЕНИИ И НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ**

§ 1. Вывод основных уравнений

Диски рабочих колес турбин и турбокомпрессоров относятся к числу наиболее ответственных деталей машин. При вращении и неравномерном нагреве в дисках возникают окружные и радиальные напряжения σ_t и σ_r. Кроме этих основных напряжений, в дисках могут возникать также напряжения за счет осесимметричного изгиба под действием сил, перпендикулярных их плоскости и напряжения концентрического кручения за счет передаваемого диском крутящего момента. Однако напряжения изгиба и кручения обычно имеют второстепенное значение. Эти напряжения могут быть определены независимо от напряжений растяжения. В настоящей главе изгиб и кручение дисков не рассматриваются.



а) *б)* *в)*

Рис. 3.1

На рис. 3.1, *а* и *б* изображены диски машин осевого типа (т. е. машин, в которых рабочее тело — газ или жидкость — движется в осевом направлении). Эти диски могут быть сплошными (рис. 3.1, *а*) или с центральным отверстием (рис. 3.1, *б*). Толщина дисков h

обычно бывает переменной по радиусу. По наружной поверхности эти диски нагружены напряжением $\sigma_{r\text{н}}$, создаваемым центробежными силами рабочих лопаток и узлов их крепления. По внутренней поверхности диска с центральным отверстием действует контактное давление $p_\text{к}$ от напряженной посадки на вал. Кроме того, по всему объему диска действуют массовые силы инерции, возникающие при его вращении.

Согласно принципу Даламбера, всякое тело, движущееся с ускорением, можно рассматривать как неподвижное, добавив к реально действующим силам фиктивные силы инерции. Последние равны произведению масс на ускорения и направлены в сторону, обратную ускорениям. В данном случае при вращении диска все его точки испытывают центростремительное ускорение. Следовательно, силы инерции направлены по радиусу от центра. Интенсивность этих сил q равна произведению плотности материала на ускорение $\omega^2 r$, т. е.

$$q = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r, \tag{3.1}$$

где g — ускорение силы тяжести, см/с^2;

γ — удельный вес, Н/см^3.

В дисках машин радиального типа (т. е. машин, в которых газ или жидкость движется в радиальном направлении) рабочие лопатки изготовляют обычно за одно целое с диском (рис. 3.1, *в*). При расчете таких дисков считают, что лопатки сами не воспринимают нагрузки, а только увеличивают инерционную нагрузку на диск. Интенсивность инерционной нагрузки в этом случае возрастает в отношении $\frac{F'}{F}$ (где $F = 2\pi rh$ — площадь сечения тела диска цилиндрической поверхностью радиуса r; $F' = 2\pi rh + zF_\text{л}$ — та же площадь, включая площадь сечения лопаток; z — число лопаток; $F_\text{л}$ — площадь сечения одной лопатки). Таким образом, интенсивность инерционной нагрузки для дисков машин радиального типа

$$q = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r\left[1 + \frac{zF_\text{л}}{2\pi rh}\right]. \tag{3.2}$$

Радиальное напряжение $\sigma_{r\text{н}}$ у таких дисков отсутствует, так как наружный край свободен.

Температурные напряжения в дисках зависят от заданного поля температур. Последнее устанавливается в каждом отдельном случае на основании анализа теплового режима. Логарифмический закон распределения температур, справедливый при осесимметричном стационарном нагреве длинных полых цилиндров, в данном случае не применим из-за теплообмена диска с окружающей средой по торцовым поверхностям. При значительном перепаде температур необходимо также учитывать переменность по радиусу модуля упругости и характеристик прочности материала. Для стали, например, при повышении температуры от 20 до 500° С модуль упругости снижается приблизительно на 40%.

Инженерная теория расчета дисков основана на следующих основных допущениях:

1. Нормальные напряжения в плоскостях, параллельных срединной плоскости диска, считаются равными нулю, т. е. напряженное состояние рассматривается как плоское (двухосное).

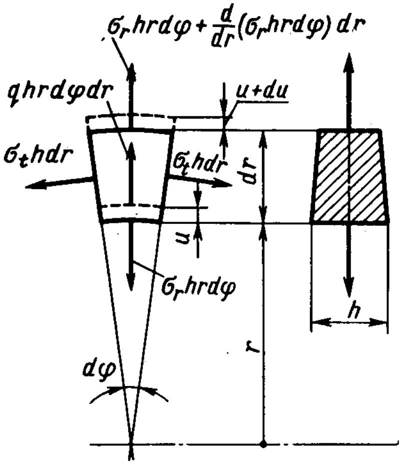


Рис. 3.2

2. Температура t, а также напряжения σ_r и σ_t постоянны по толщине диска, т. е. являются функциями только текущего радиуса r.

Эти допущения были обоснованы путем сопоставления приближенного решения с точным, полученным для некоторых частных случаев.

Основные исходные уравнения для вращающихся неравномерно нагретых дисков аналогичны соответствующим уравнениям для толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним и внешним давлениями. В частности выражения деформаций ε_r и ε_t через радиальное перемещение u (2.4) и (2.5) полностью остаются в силе. Также остается справедливым уравнение совместности деформаций (2.6).

С учетом нагрева зависимости закона Гука для двухосного напряженного состояния можно записать в виде

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t) + \theta; \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) + \theta, \tag{3.4}$$

где $\theta = \theta(r)$ — температурная деформация;

$$\theta = \alpha(t - t_0). \tag{3.5}$$

Подставив выражения (3.3) и (3.4) в уравнение (2.6), получим уравнение совместности деформации в напряжениях

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r)\right] + \frac{1+\mu}{E}(\sigma_t - \sigma_r) + r\frac{d\theta}{dr} = 0. \tag{3.6}$$

Второе уравнение с неизвестными σ_r и σ_t составляется на основании условий равновесия элемента объема диска. Оно отличается от соответствующего уравнения (2.1) наличием дополнительного слагаемого, учитывающего силы инерции.

Выделив бесконечно малый элемент объема диска (рис. 3.2) и приравняв нулю сумму проекций всех сил на направление радиуса, получим

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r hr) - \sigma_t h + qrh = 0. \tag{3.7}$$

Уравнения (3.6) и (3.7) представляют собой разрешающие уравнения вращающихся неравномерно нагретых дисков. В некоторых частных случаях эти уравнения интегрируются в квадратурах. В более общем случае уравнения решаются численными методами с применением ЭЦВМ или приближенно.

§ 2. Вращающиеся неравномерно нагретые диски постоянной толщины при постоянных по радиусу характеристиках упругости E и μ

При $h = \text{const}$, $E = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ уравнения (3.6) и (3.7) упрощаются и принимают вид

$$r\frac{d}{dr}(\sigma_t - \mu\sigma_r) + (1+\mu)(\sigma_t - \sigma_r) + Er\frac{d\theta}{dr} = 0; \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r) - \sigma_t + \frac{\gamma\omega^2 r^2}{g} = 0. \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.9)

$$\sigma_t = \frac{d}{dr}(\sigma_r r) + \frac{\gamma\omega^2 r^2}{g} \tag{3.10}$$

подставим в уравнение (3.8); в результате получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно σ_r:

$$r\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3\frac{d\sigma_r}{dr} = -(3+\mu)\frac{\gamma\omega^2 r}{g} - E\frac{d\theta}{dr}. \tag{3.11}$$

Используя тождество

$$r\frac{d^2\sigma_r}{dr} + 3\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(\sigma_r r^2)\right],$$

запишем уравнение (3.11) в виде

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\sigma_r r^2)\right] = -(3+\mu)\frac{\gamma\omega^2 r}{g} - E\frac{d\theta}{dr}. \tag{3.12}$$

Проинтегрировав уравнение (3.12) дважды, получим

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2 r^2}{8g} - \frac{ET}{r^2}; \tag{3.13}$$

здесь A и B — постоянные интегрирования.

Величина T представляет собой интеграл вида

$$T = \int_{r_1}^{r} \hat{r}\theta\, d\hat{r}, \tag{3.14}$$

где $r_1 \leqslant \hat{r} \leqslant r$.

Нижний предел интегрирования постоянный, влияющий только на величину констант A и B, целесообразно принять равным внутреннему радиусу диска, так как в этом случае интеграл (3.14) при $r = r_1$ обращается в нуль, и уравнения граничных условий несколько упрощаются.

Напряжение σ_t определяется по соотношению (3.10), которое при подстановке в него выражения (3.13) принимает вид

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{(1+3\mu)\gamma\omega^2 r^2}{8g} + \frac{ET}{r^2} - E\theta. \qquad (3.15)$$

Постоянные интегрирования A и B в каждом частном случае определяются по граничным условиям на наружной и на внутренней поверхностях диска (или в центре диска).

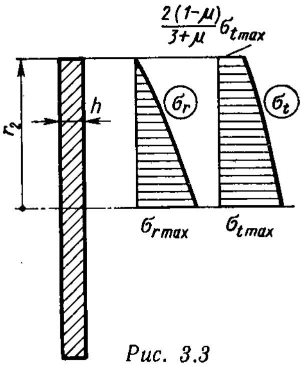


Рис. 3.3

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Сплошной вращающийся диск (без центрального отверстия) постоянной толщины; неравномерный нагрев отсутствует (рис. 3.3). Граничные условия:

в центре диска при $r = 0$, на основании симметрии, $\sigma_r = \sigma_t$;

на наружной поверхности при $r = r_2$ $\sigma_r = 0$.

Из этих условий с учетом выражений (3.13) и (3.15) при $\theta = 0$ и $T = 0$ найдем

$$B = 0; \qquad A = \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2 r_2^2}{8g}.$$

Формулы для напряжений (3.13) и (3.15) в этом случае принимают вид

$$\sigma_r = \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2}{8g}(r_2^2 - r^2); \qquad (3.16)$$

$$\sigma_t = \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2}{8g}\left(r_2^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2\right). \qquad (3.17)$$

Эпюры напряжений, построенные по зависимостям (3.16) и (3.17), приведены на рис. 3.3. Наибольшие напряжения возникают в центре диска

$$\sigma_{r\,\max} = \sigma_{t\,\max} = \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2 r_2^2}{8g}.$$

Следует отметить, что при заданном удельном весе γ напряжения зависят только от окружной скорости $v = \omega r_2$. Так, например, для диска из стали с удельным весом $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^{-2}$ Н/см³ при $\mu = 0{,}3$ наибольшее напряжение

$$\sigma_{r\,\max} = \sigma_{t\,\max} = \frac{(3+\mu)\gamma v^2}{8g} = 3{,}28 v^2.$$

В частности, при $r_2 = 20$ см и $n = 20\,000$ об/мин окружная скорость

$$v = \frac{\pi r_2 n}{30} \doteq 420 \text{ м/с}$$

и напряжения

$$\sigma_{r\,\max} = \sigma_{t\,\max} = 58 \cdot 10^3 \text{ Н/см}^2.$$

Для каждого материала можно установить предельно допустимую окружную скорость. Тогда работоспособность диска можно оценивать, сопоставляя фактическую окружную скорость с допустимой.

2. Диск постоянной толщины с центральным отверстием; неравномерный нагрев отсутствует (рис. 3.4). Если края диска свободны, то граничные условия следующие:

при

$$r = r_1 \quad \sigma_r = 0;$$

при

$$r = r_2 \quad \sigma_r = 0.$$

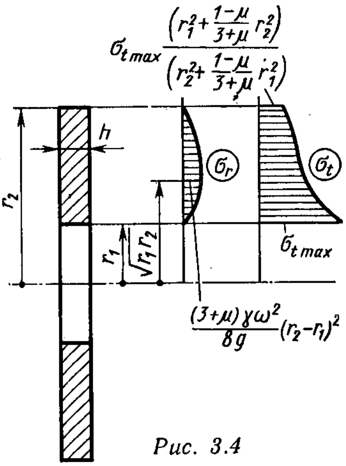


Рис. 3.4

С учетом зависимости (3.13) при $\theta = 0$ и $T = 0$ эти условия приводят к двум уравнениям, решение которых дает значения постоянных:

$$A = \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2(r_2^2 + r_1^2)}{8g};$$

$$B = \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2 r_1^2 r_2^2}{8g}.$$

Формулы (3.13) и (3.15) для напряжений в данном случае принимают вид

$$\sigma_r = \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2}{8g}\left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2\right); \tag{3.18}$$

$$\sigma_t = \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2}{8g}\left(r_2^2 + r_1^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right). \tag{3.19}$$

Эпюры напряжений для кольцевого диска приведены на рис. 3.4. Наибольшее напряжение возникает в точках диска, расположенных на внутренней поверхности:

$$\sigma_{t\,\max} = \frac{(3+\mu)\gamma\omega^2}{4g}\left[r_2^2 + \frac{1-\mu}{3+\mu}r_1^2\right]. \tag{3.19a}$$

При стремлении радиуса отверстия к нулю это напряжение стремится к величине, равной $\frac{(3+\mu)\gamma\omega^2 r_2^2}{4g}$. Сравнивая эту величину с величиной напряжения в центре сплошного диска, можно увидеть, что около малого центрального отверстия возникает концентрация напряжений (коэффициент концентрации равен 2).

Отметим еще другой предельный случай, когда $r_1 \to r_2 \to r$, т. е. когда диск вырождается в тонкое кольцо. По формуле (3.19) при $r_1 = r_2 = r$ найдем $\sigma_t = \frac{\gamma\omega^2 r^2}{g}$. Эту величину можно также легко получить непосредственно из уравнения равновесия половины кольца.

3. Диск постоянной толщины находится в условиях неравномерного нагрева; вращение отсутствует.

Основная трудность определения термических напряжений заключается в установлении поля температур. Предположим, что температура изменяется по радиусу согласно закону

$$t = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{r_2^2} r^2.$$

Тогда температурная деформация

$$\theta = (t - t_0)\alpha = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{r_2^2} r^2.$$

Учитывая, что равномерный нагрев диска не вызывает напряжений, первое слагаемое в написанном выражении можно отбросить и считать, что температурная деформация подчиняется следующей зависимости:

$$\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{r_2^2} r^2.$$

По формуле (3.14)

$$T = \int_0^r \theta \hat{r}\, d\hat{r} = \int_0^r \frac{\theta_2 - \theta_1}{r_2^2} \hat{r}^3\, d\hat{r} = \frac{(\theta_2 - \theta_1) r^4}{4 r_2^2}.$$

Подставив T и θ в выражения (3.13) и (3.15), найдем

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{E(\theta_2 - \theta_1) r^2}{4 r_2^2};$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3E(\theta_2 - \theta_1) r^2}{4 r_2^2}.$$

Постоянные интегрирования A и B определим по граничным условиям.

В случае сплошного диска:

при

$$r = 0 \quad \sigma_r = \sigma_t;$$

при

$$r = r_2 \quad \sigma_t = 0.$$

Согласно этим условиям

$$B = 0; \quad A = \frac{E(\theta_2 - \theta_1)}{4}.$$

Тогда

$$\sigma_r = \frac{E(\theta_2 - \theta_1)}{4}\left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right); \tag{3.20}$$

$$\sigma_t = \frac{E(\theta_2 - \theta_1)}{4}\left(1 - 3\frac{r^2}{r_2^2}\right). \tag{3.21}$$

Эпюры напряжений по радиусу приведены на рис. 3.5. При $t_2 - t_0 = 700°$; $t_1 - t_0 = 200°$ С; $\alpha = 15 \cdot 10^{-6}$ 1/град; $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см²; $\theta_2 - \theta_1 = (t_2 - t_1)\, \alpha = 75 \cdot 10^{-4}$; напряжение σ_t в наружных точках

$$\underset{(r=r_2)}{\sigma_t} = -\frac{E(\theta_2-\theta_1)}{2} = -\frac{2 \cdot 10^7 \cdot 75 \cdot 10^{-4}}{2} = 75 \cdot 10^3 \text{ Н/см}^2.$$

Выполненный расчет основан на допущении, что модуль упругости материала имеет постоянное значение. В действительности величина модуля упругости зависит от температуры. Расчет диска с учетом переменности модуля упругости по радиусу рассмотрен в § 4.

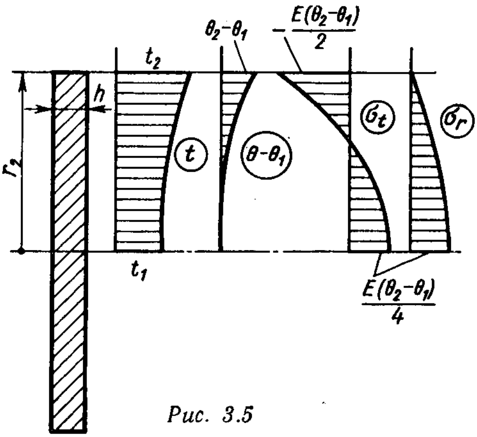


Рис. 3.5

Отметим еще случай, когда кроме вращения и неравномерного нагрева на внутренней и наружной поверхностях имеются заданные напряжения σ_{r1} и σ_{r2}. Значения напряжений σ_r и σ_t в произвольной точке диска в этом случае можно определить, сложив напряжения, вычисленные по зависимостям (3.16) — (3.21), и напряжения, вычисленные по формулам Ляме.

Можно также определить значения суммарных напряжений непосредственно по зависимостям (3.13) и (3.15), используя граничные условия:

при

$$r = r_1 \quad \sigma_r = \sigma_{r1};$$

при

$$r = r_2 \quad \sigma_r = \sigma_{r2}.$$

Формулы (3.16) — (3.19), выведенные для тонких дисков, иногда применяют для расчета длинных сплошных или полых вращающихся барабанов. Распределение напряжений в длинном барабане, строго говоря, отличается от распределения напряжений в тонком диске. Если в диске напряженное состояние — плоское ($\sigma_z = 0$), то в барабане оно объемное ($\sigma_z \neq 0$). Относительная осевая деформация ε_z в диске переменна по радиусу, а в барабане — постоянна (поперечные сечения в длинном барабане остаются плоскими).

Формулы для напряжений в длинном вращающемся барабане имеют вид

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} - \frac{\gamma\omega^2 r^2 (3-2\mu)}{8g(1-\mu)}; \tag{3.22}$$

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} - \frac{\gamma\omega^2 r^2 (1+2\mu)}{8g(1-\mu)}. \tag{3.23}$$

Для цилиндра с отверстием при граничных условиях:

$$r = r_1, \quad \sigma_r = 0;$$

$$r = r_2, \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_r = \frac{\gamma\omega^2 (3-2\mu)}{8g(1-\mu)} \left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right); \tag{3.24}$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma\omega^2 (3-2\mu)}{8g(1-\mu)} \left(r_2^2 + r_1^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{1+2\mu}{3-2\mu} r^2 \right); \tag{3.25}$$

при $r = r_1$

$$\sigma_{t\ \max} = \frac{(3-2\mu)\gamma\omega^2}{(1-\mu)4g} \left(r_2^2 + \frac{1-2\mu}{3-2\mu} r_1^2 \right). \tag{3.25a}$$

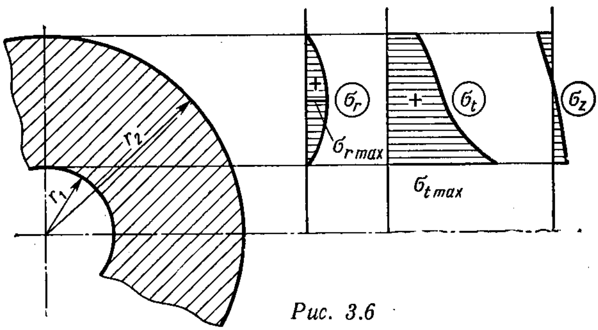


Рис. 3.6

Для цилиндра без отверстия при граничных условиях:

$$r = 0, \quad \sigma_r = \sigma_t;$$

$$r = r_2, \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_r = \frac{\gamma\omega^2 (3-2\mu)}{8g(1-\mu)} [r_2^2 - r^2]; \tag{3.26}$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma\omega^2 (3-2\mu)}{8g(1-\mu)} \left[r_2^2 - \frac{1+2\mu}{3-2\mu} r^2 \right]; \tag{3.27}$$

при $r = 0$

$$\sigma_{r\ \max} = \sigma_{t\ \max} = \frac{3-2\mu}{1-\mu} \frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{8g}. \tag{3.27a}$$

Осевое напряжение σ_z и осевая деформация ε_z во вращающемся цилиндре при условии отсутствия осевой силы определяются по зависимостям:

$$\sigma_z = \frac{\gamma\omega^2 \mu}{4g(1-\mu)} [r_2^2 + r_1^2 - 2r^2]; \tag{3.28}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\gamma\omega^2 \mu}{2gE} (r_2^2 + r_1^2). \tag{3.29}$$

На рис. 3.6 и 3.7 представлены эпюры напряжений для полого и сплошного вращающихся цилиндров. Сравнение этих эпюр с эпюрами для тонкого диска (см. рис. 3.3 и 3.4) показывает, что разница в значениях напряжений незначительная. Так, например, при отно-

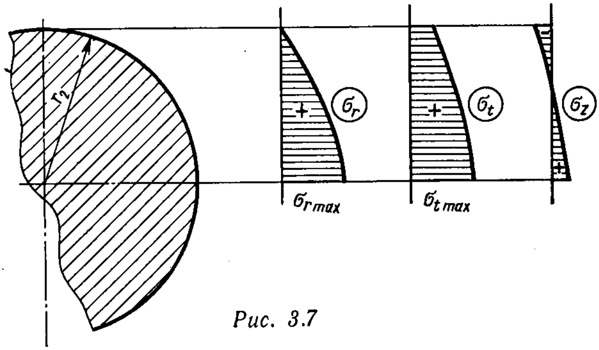


Рис. 3.7

шении $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$ наибольшее окружное напряжение в длинном цилиндре составляет

$$\sigma_{t\,\max} = 6{,}97\,\frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{8g},$$

а в тонком диске

$$\sigma_{t\,\max} = 6{,}75\,\frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{8g}.$$

При отношении $\frac{r_1}{r_2} = 0$, т. е. в сплошном цилиндре,

$$\sigma_{t\,\max} = 3{,}43\,\frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{8g},$$

в то время как в сплошном диске

$$\sigma_{t\,\max} = 3{,}30\,\frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{8g}.$$

Эти результаты показывают, что применение формул, выведенных для дисков, для расчета вращающихся цилиндров или барабанов не приводит к большой погрешности.

§ 3. Диски равно́го сопротивления и конические диски

Диски турбомашин часто делают переменной толщины, утолщающимися к центру. Это позволяет получить более равномерное распределение напряжений.

Иногда применяют диски равного сопротивления или так называемые равнопрочные диски (рис. 3.8), в которых напряжения σ_r и σ_t одинаковы по величине и постоянны по радиусу

$$\sigma_t = \sigma_r = \sigma_0 = \text{const} \tag{3.30}$$

(предполагается, что неравномерный нагрев отсутствует).

Выясним, как должна изменяться толщина диска равного сопротивления по радиусу. Подставив значения напряжений (3.30) в общие уравнения (3.6) и (3.7) и приняв $\theta = 0$ и $q = \frac{\gamma\omega^2 r}{g}$, увидим, что уравнение совместности деформаций (3.6) удовлетворяется тождественно, а уравнение равновесия (3.7) принимает вид

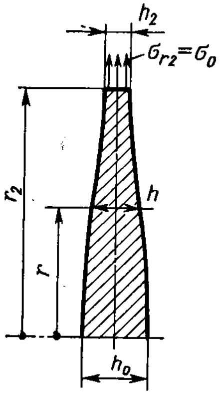


Рис. 3.8

$$\sigma_0 r \frac{dh}{dr} + \frac{\gamma\omega^2 r^2}{g} h = 0. \tag{3.31}$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\ln h = -\frac{\gamma\omega^2 r^2}{2g\sigma_0} + C. \tag{3.32}$$

Для определения постоянной C используем условие на наружной поверхности: при $r = r_2$ толщина диска равна заданной толщине h_2:

$$\ln h_2 = -\frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{2g\sigma_0} + C,$$

откуда

$$C = \ln h_2 + \frac{\gamma\omega^2 r_2^2}{2g\sigma_0}.$$

С учетом значения постоянной C равенство (3.32) принимает вид

$$\ln \frac{h}{h_2} = \frac{\gamma\omega^2 (r_2^2 - r^2)}{2g\sigma_0}$$

или

$$h = h_2 e^{A(r_2^2 - r^2)}, \tag{3.33}$$

где

$$A = \frac{\gamma\omega^2}{2g\sigma_0}.$$

Толщину диска в центре найдем, приняв $r = 0$:

$$h_0 = h_2 e^{A r_2^2}. \tag{3.34}$$

Отметим, что диск равного сопротивления не может иметь свободный наружный край, а также не может быть сделан с центральным отверстием или со ступицей, так как в этом случае невозможно обеспечить выполнение граничных условий. Часто диски равного сопротивления изготовляют с наружным ободом (рис. 3.9); при этом обычно бывают известны ширина обода $h_н$, радиальное напряжение на его наружной поверхности $\sigma_{r\text{н}}$, радиусы $r_\text{н}$ и r_2, а также величина допустимого напряжения в полотне диска σ_0. Неизвестными являются толщины h_2 и h_0. Чтобы найти h_2, необходимо составить уравнение совместности деформаций, учитывающее равенство радиальных перемещений на наружной поверхности диска и внутренней поверхности обода.

Рассматривая обод как кольцо, нагруженное силами инерции, а также радиальными напряжениями на наружной и внутренней по-

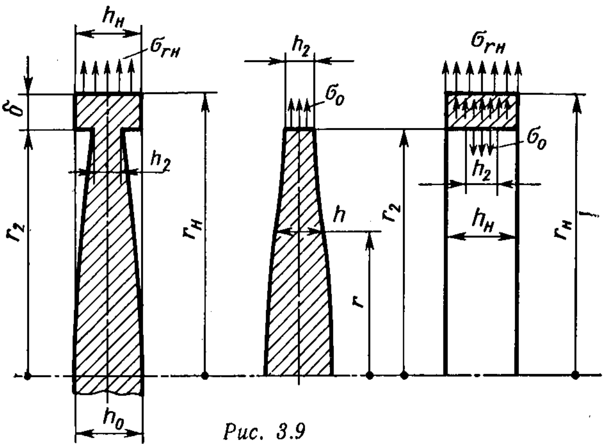


Рис. 3.9

верхности $\sigma_{r\text{н}}$ и σ_0, вычислим возникающее в нем окружное напряжение. Запишем уравнение равновесия половины кольца

$$\sigma_{r_\text{н}} 2h_\text{н} r_\text{н} - \sigma_0 2h_2 r_2 + \int\limits_{r_2}^{r_\text{н}} \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r\,dr\,2rh_\text{н} = 2\sigma_{t\,\text{об}} F_\text{об},$$

откуда

$$\sigma_{t\,\text{об}} = \frac{1}{F_\text{об}}\left[\sigma_{r\text{н}} h_\text{н} r_\text{н} - \sigma_0 h_2 r_2 + \frac{\gamma\omega^2 h_\text{н}\,(r_\text{н}^3 - r_2^3)}{g3}\right],$$

где

$$F_\text{об} = h_\text{н}\,(r_\text{н} - r_2).$$

По напряжению $\sigma_{t\,\text{об}}$ определим окружную деформацию и радиальное перемещение

$$\varepsilon_{t\,\text{об}} = \frac{\sigma_{t\text{об}}}{E}; \quad u_\text{об} = \varepsilon_{t\,\text{об}} r_2$$

или

$$u_\text{об} = \frac{r_2}{EF_\text{об}}\left[\sigma_{r\text{н}} h_\text{н} r_\text{н} - \sigma_0 h_2 r_2 + \frac{\gamma\omega^2 h_\text{н}\,(r_\text{н}^3 - r_2^3)}{g3}\right]. \qquad (3.35)$$

Это перемещение следует приравнять перемещению точек наружной поверхности диска, которое также определим по окружной деформации. Напряженное состояние в диске — двухосное:

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_0.$$

Окружная деформация $\varepsilon_{t\text{д}} = \frac{\sigma_0}{E} - \mu \frac{\sigma_0}{E}$.

Радиальное перемещение

$$u_\text{д} = \varepsilon_{t\text{д}} r_2 = \frac{\sigma_0 (1-\mu) r_2}{E}. \tag{3.36}$$

Приравняв $u_{\text{об}}$ и $u_\text{д}$, получим уравнение, содержащее только одну неизвестную величину h_2. После того, как толщина h_2 будет найдена, можно по зависимости (3.34) определить толщину h_0 в центральной точке диска. При большой толщине обода напряженное состояние в нем целесообразно рассматривать как двухосное, тогда для вычисления напряжений в ободе следует применять формулы Ляме и формулы для вращающихся дисков постоянной толщины (3.18), (3.19).

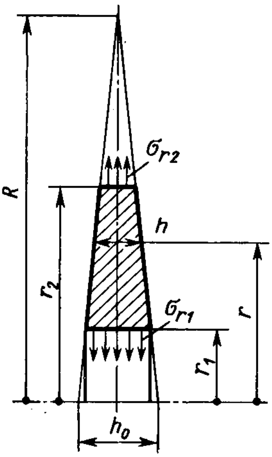


Рис. 3.10

Рассмотрим напряженное состояние конических дисков при вращении (при отсутствии неравномерного нагрева).

Конические диски или диски прямолинейного профиля широко применяют на практике, так как они более просты в изготовлении по сравнению с дисками равного сопротивления. В то же время напряжения в коническом диске распределяются более благоприятно, чем в диске постоянной толщины.

Введем обозначения:

R — радиус окружности пересечения образующих (рис. 3.10);

$\rho = \frac{r}{R}$ — безразмерный текущий радиус;

$h = h_0(1 - \rho)$ — толщина диска на радиусе r ($h = h_0$ при $r = 0$);

$N_r = \sigma_r h$ — интенсивность радиальной внутренней силы, Н/см.

Используя принятые обозначения и считая E и μ постоянными, можно преобразовать уравнение совместности деформаций (3.6) и уравнение равновесия (3.7) к одному уравнению с одной неизвестной:

$$\rho(1-\rho)\frac{d^2N_r}{d\rho^2} + (3-2\rho)\frac{dN_r}{d\rho} + (1-\mu)N_r =$$

$$= -(3+\mu)\frac{\gamma\omega^2R^2h_0}{g}\rho(1-\rho)^2. \tag{3.37}$$

Уравнение (3.40) есть частный случай гипергеометрического дифференциального уравнения Гаусса. Решается оно в гипергеометрических функциях. Практическое решение уравнения (3.37) не представляет трудности, так как для гипергеометрических функций составлены таблицы. Вычислив функцию N_r, можно затем перейти к определению напряжений:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= A\psi_1 + B\psi_2 + \frac{\gamma\omega^2 R^2}{g}\psi_3;\\ \sigma_t &= A\varphi_1 + B\varphi_2 + \frac{\gamma\omega^2 R^2}{g}\varphi_3,\end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

где A и B — постоянные интегрирования;

ψ_1, ψ_2, ψ_3, φ_1, φ_2, φ_3 — функции безразмерного радиуса ρ.

Таблицы этих функций, вычисленные при $\mu = 0{,}3$, приведены в работе [17]. Для определения постоянных A и B используют граничные условия на внутренней и наружной поверхностях диска. Кольцевой диск:

$$\text{при } r = r_1 \quad \sigma_r = \sigma_{r1};$$
$$\text{при } r = r_2 \quad \sigma_r = \sigma_{r2}.$$

Диск, не имеющий центрального отверстия:

$$\text{при } r = 0 \quad \sigma_r = \sigma_t;$$
$$\text{при } r = r_2 \quad \sigma_r = \sigma_{r2}.$$

Более подробно вопросы расчета конических дисков как с плоской срединной поверхностью, так и с конической срединной поверхностью рассмотрены в книге [12]. Там же приведены таблицы специальных функций.

На наружном краю конического диска обычно имеется цилиндрический обод. Центральную часть диска изготовляют сплошной или со ступицей для посадки на вал. Для быстрого определения напряжений в конических дисках, имеющих ступицу и наружный обод, удобно пользоваться таблицами [4].

§ 4. Расчет дисков переменной толщины методом начальных параметров с применением способа двух расчетов

Рассмотрим диск переменной толщины, представленный на рис. 3.11, *а*. На внутренней поверхности действует радиальное напряжение $\sigma_{r\,\text{вн}}^{\prime} = -p_1$ за счет напряженной посадки на вал; на наружной поверхности — радиальное напряжение $\sigma_{r\text{н}}$, вызываемое силами инерции лопаток. Это напряжение можно считать равномерно распределенным по поверхности

$$\sigma_{r\text{н}} = \frac{Pz}{2\pi r_\text{н} h_\text{н}}, \tag{3.39}$$

где $P = \frac{G_\text{л}\omega^2 r_\text{л}}{g}$ — сила инерции одной лопатки;

$G_\text{л}$ — вес лопатки;

$r_\text{л}$ — расстояние от оси вращения до центра тяжести;

z — число лопаток.

Кроме того, по всему объему диска действуют массовые силы инерции, интенсивность которых $q = \frac{\gamma\omega^2 r}{g}$, а также имеет место неравномерный осесимметричный нагрев.

Приступая к расчету, следует по заданному закону распределения температуры, пользуясь справочными данными, построить графики изменения по радиусу температурной деформации $\theta = t\alpha$, модуля упругости E и коэффициента Пуассона μ (рис. 3.11, *г*, *д*, *е*).

Заданный диск при расчете аппроксимируется ступенчатым диском (рис. 3.11, *б*). На каждом участке толщина h_i, а также модуль упругости E_i и коэффициент Пуассона μ_i считаются постоянными

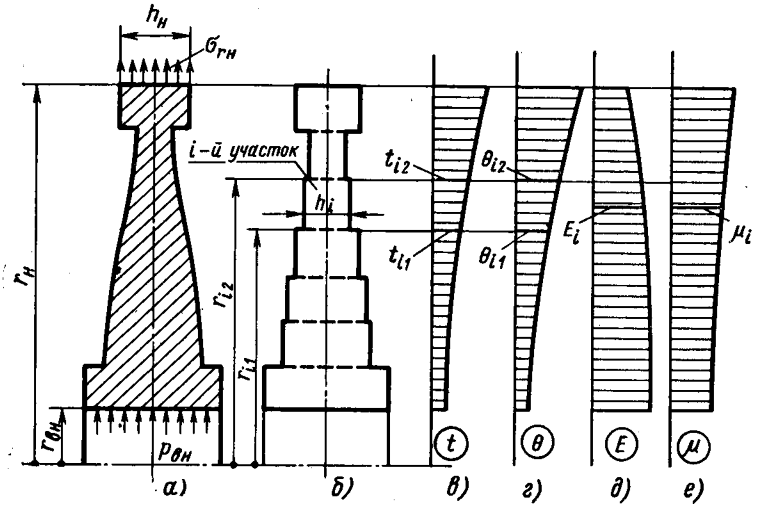


Рис. 3.11

и равными средним значениям на данном участке. Число участков, на которые разбивается диск, зависит от геометрии диска и от желаемой точности расчета. Поскольку величины h_i, E_i и μ_i приняты постоянными, для определения напряжений σ_r и σ_t на i-м участке можно воспользоваться зависимостями (3.13) и (3.15):

$$\sigma_{ri} = A_i - \frac{B_i}{r^2} - \frac{(3+\mu)\,\gamma\omega^2 r^2}{8g} - \frac{E_i T}{r^2}; \tag{3.40}$$

$$\sigma_{ti} = A_i + \frac{B_i}{r^2} - \frac{(1+3\mu)\,\gamma\omega^2 r^2}{8g} + \frac{E_i T(r)}{r^2} - E_i\theta. \tag{3.41}$$

Запишем еще выражение для окружной относительной деформации в произвольной точке i-го участка:

$$\varepsilon_{ti} = \left(\frac{u}{r}\right)_i = \frac{\sigma_{ti} - \mu\sigma_{ri}}{E_i} + \theta \tag{3.42}$$

или, с учетом зависимостей (3.40) и (3.41):

$$\left(\frac{u}{r}\right)_i = \frac{A_i(1-\mu)}{E_i} + \frac{B_i(1+\mu)}{E_i r^2} - \frac{\gamma\omega^2 r^2}{8gE_i}(1-\mu_i^2) + \frac{T(1+\mu)}{r^2}. \quad (3.43)$$

Постоянные интегрирования A_i и B_i для различных участков различны. Чтобы не определять большое количество постоянных, применяют метод начальных параметров. Согласно этому методу постоянные интегрирования выражают через некоторые параметры (напряжения, перемещения), соответствующие начальной (внутренней) точке диска.

В результате задача определения постоянных сводится к отысканию только двух параметров, причем один из них обычно бывает заранее известен согласно граничным условиям на внутренней поверхности или в центральной точке.

Рассмотрим произвольный i-й участок диска. Внутренний и наружный радиусы обозначим соответственно r_{i1} и r_{i2}. Все величины, относящиеся к внутренним точкам участка, будем обозначать двойным индексом $i1$, а к наружным — $i2$.

Применив зависимости (3.40) и (3.43) к начальной точке участка, получим

$$\frac{\sigma_{ri1}}{E_i} = \frac{A_i}{E_i} - \frac{B_i}{E_i r_{i1}^2} - \frac{(3+\mu_i)\gamma\omega^2 r_{i1}^2}{8gE_i} - \frac{T_{i1}}{r_{i1}^2};$$

$$\left(\frac{u}{r}\right)_{i1} = \frac{A_i(1-\mu_i)}{E_i} + \frac{B_i(1+\mu_i)}{E_i r_{i1}^2} - \frac{(1-\mu_i^2)\gamma\omega^2 r_{i1}^2}{8gE_i} + \frac{T_{i1}}{r_{i1}^2}(1+\mu_i).$$

Аналогичные выражения можно написать для наружной точки участка

$$\frac{\sigma_{ri2}}{E_i} = \frac{A_i}{E_i} - \frac{B_i}{E_i r_{i2}^2} - \frac{(3+\mu_i)\gamma\omega^2 r_{i2}^2}{8gE_i} - \frac{T_{i2}}{r_{i2}^2};$$

$$\left(\frac{u}{r}\right)_{i2} = \frac{A_i(1-\mu_i)}{E_i} + \frac{B_i(1+\mu_i)}{E_i r_{i2}^2} - \frac{(1-\mu_i^2)\gamma\omega^2 r_{i2}^2}{8gE_i} + \frac{T_{i2}(1+\mu_i)}{r_{i2}^2}.$$

Определив из первых равенств A_i и B_i и подставив их во вторые два равенства, получим уравнения для определения $\frac{u}{r}$ и $\frac{\sigma_r}{E}$ в конце i-го участка по их значениям в начале участка:

$$\left(\frac{u}{r}\right)_{i2} = \left(\frac{u}{r}\right)_{i1}\frac{1}{2}\left[(1-\mu_i) + \frac{(1+\mu_i)r_{i1}^2}{r_{i2}^2}\right] + \frac{\sigma_{ri1}}{E_i}\frac{1}{2}(1-\mu_i^2)\left(1-\frac{r_{i1}^2}{r_{i2}^2}\right) - \frac{\gamma\omega^2 r_{i2}^2}{8gE_i}(1-\mu_i^2)\left(1-\frac{r_{i1}^2}{r_{i2}^2}\right)^2 + \frac{T_{i2}-T_{i1}}{r_{i2}^2}(1+\mu_i); \quad (3.44)$$

$$\frac{\sigma_{ri2}}{E_i} = \left(\frac{u}{r}\right)_{i1}\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_{i1}^2}{r_{i2}^2}\right) + \frac{\sigma_{ri1}}{E_i}\frac{1}{2}\left[(1+\mu_i) + \frac{(1-\mu_i)r_{i1}^2}{r_{i2}^2}\right] - \frac{\gamma\omega^2 r_{i2}^2}{8gE_i}\left[-2(1+\mu_i)\frac{r_{i1}^2}{r_{i2}^2} - (1-\mu_i)\frac{r_{i1}^4}{r_{i2}^4} + (3+\mu_i)\right] - \frac{T_{i2}-T_{i1}}{r_{i2}^2}. \quad (3.45)$$

Примем за основные переменные безразмерные величины

$$X_1 = \frac{u}{r}; \tag{3.46}$$

$$X_2 = \frac{\sigma_r h_i}{E_н h_н}, \tag{3.47}$$

где $E_н$, $h_н$ — модуль упругости и толщина в наружной точке диска.

Величины X_1 и X_2 при переходе от одного участка к другому — непрерывны. Действительно, на основании условия силового взаимодействия между участками

$$h_i \sigma_{ri2} = h_{(i+1)} \sigma_{r(i+1)1},$$

следовательно,

$$X_{2i2} = X_{2(i+1)1}. \tag{3.48}$$

Также непрерывно радиальное перемещение u, откуда

$$X_{1i2} = X_{1(i+1)1}. \tag{3.49}$$

Уравнения (3.44), (3.45) позволяют определить значения X_1, X_2 в конце участка по их значениям в начале участка.

Введем обозначения:

$$\frac{r_{i1}}{r_{i2}} = \lambda_i; \quad \frac{\gamma \omega^2 r_н^2}{8 g E_н} = K; \tag{3.50}$$

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{uu}(\lambda) &= \frac{1}{2}[1 - \mu + (1 + \mu)\lambda^2]; \quad \psi_{\sigma u}(\lambda) = \frac{1}{2}(1 - \lambda^2);\\
\psi_{u\sigma}(\lambda) &= \frac{1}{2}(1 - \mu^2)(1 - \lambda^2);\\
\psi_{\sigma\sigma}(\lambda) &= \frac{1}{2}[1 + \mu + (1 - \mu)\lambda^2];\\
\psi_{u\omega}(\lambda) &= (1 - \mu^2)(1 - \lambda^2);\\
\psi_{\sigma\omega}(\lambda) &= 3 + \mu - 2(1 + \mu)\lambda^2 - (1 - \mu)\lambda^4,
\end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

тогда уравнения (3.44), (3.45) можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
X_{1i2} &= \psi_{uu}(\lambda_i) X_{1i1} + \frac{E_н h_н}{E_i h_i} \psi_{u\sigma}(\lambda_i) X_{2i1} -\\
&- K \frac{E_н r_{i2}^2}{E_i r_н^2} \psi_{u\omega}(\lambda_i) + \frac{(T_{i2} - T_{i1})(1 + \mu)}{r_{i2}^2};\\
X_{2i2} &= \frac{E_i h_i}{E_н h_н} \psi_{\sigma u}(\lambda_i) X_{1i1} + \psi_{\sigma\sigma}(\lambda_i) X_{2i1} -\\
&- K \frac{r_{i2}^2 h_i}{r_н^2 h_н} \psi_{\sigma\omega}(\lambda_i) - \frac{(T_{i2} - T_{i1}) E_i h_i}{r_{i2}^2 E_н h_н}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

Эти уравнения можно представить в матричной форме

$$X_{i2} = L_i X_{i1} + R_i; \tag{3.53}$$

здесь $X_{i1} = \begin{pmatrix} X_{1i1} \\ X_{2i1} \end{pmatrix}$; $X_{i2} = \begin{pmatrix} X_{1i2} \\ X_{2i2} \end{pmatrix}$ — матрицы-столбцы значений безразмерных функций X_1 и X_2 в начальной и в конечной точках i-го участка;

L_i — матрица перехода от начала к концу участка;

$$L_i = \begin{pmatrix} \psi_{uu}(\lambda_i) & \frac{E_{\text{н}} h_{\text{н}}}{E_i h_i} \psi_{u\sigma}(\lambda_i) \\ \frac{E_i h_i}{E_{\text{н}} h_{\text{н}}} \psi_{\sigma u}(\lambda_i) & \psi_{\sigma\sigma}(\lambda_i) \end{pmatrix}; \tag{3.54}$$

R_i — матрица-столбец слагаемых, учитывающих инерционную нагрузку и неравномерный нагрев;

$$R_i = \begin{pmatrix} -K \frac{E_{\text{н}} r_{i2}^2}{E_i r_{\text{н}}^2} \psi_{u\omega}(\lambda_i) + \frac{(T_{i2} - T_{i1})(1+\mu)}{r_{i2}^2} \\ -K \frac{h_i r_{i2}^2}{h_{\text{н}} r_{\text{н}}^2} \psi_{\sigma\omega}(\lambda_i) - \frac{(T_{i2} - T_{i1}) E_i h_i}{r_{i2}^2 E_{\text{н}} h_{\text{н}}} \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Матрицу-столбец

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

будем называть вектором напряженно-деформированного состояния в данной точке диска. Зная компоненты вектора X, можно по зависимостям (3.46), (3.47) найти u и σ_r и далее по равенству (3.42) определить σ_t:

$$\sigma_t = \mu\sigma_r + \frac{u}{r} E_i - \theta E_i. \tag{3.57}$$

За начальные параметры примем составляющие вектора X в начальной точке

$$\left.\begin{aligned} X_{111} &= \left(\frac{u}{r}\right)_{11}; \\ X_{211} &= \frac{\sigma_{r11} h_1}{E_{\text{н}} h_{\text{н}}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.58}$$

Если бы оба начальных параметра были нам известны, то, пользуясь уравнением (3.53) и учитывая условие сопряжения участков

$$X_{i2} = X_{(i+1)1}, \tag{3.59}$$

можно было бы определить вектор X во всех точках диска. В действительности, однако, граничные условия на внутренней поверхности диска позволяют определить только один начальный параметр. Так, если задано контактное посадочное давление $p_{\text{вн}}$, то известно напряжение $\sigma_{r11} = -p_{\text{вн}}$ и $X_{211} = -\frac{p_{\text{вн}} h_1}{E_{\text{н}} h_{\text{н}}}$. Второй же начальный параметр должен быть определен из граничного условия на наружной поверхности диска. Чтобы преодолеть эту трудность, применяют способ двух расчетов.

Искомый вектор напряженного состояния X представляют в виде суммы двух векторов

$$X = \overline{X}C + \overline{\overline{X}}, \tag{3.60}$$

$\overline{X}$ — вектор состояния первого расчета;

$\overline{\overline{X}}$ — вектор состояния второго расчета;

C — неопределенный коэффициент.

Вектор $\overline{\overline{X}}$ второго расчета вычисляют с учетом сил инерции, неравномерного нагрева и внутреннего давления, но при нулевом значении неизвестного начального параметра. Вектор состояния в начальной точке в этом расчете

$$\overline{\overline{X}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{p_{вн} h_1}{E_н h_н} \end{pmatrix}. \tag{3.61}$$

Вектор $\overline{X}$ первого расчета вычисляют без учета вращения и неравномерного нагрева, т. е. при $R_i = 0$. При этом второй начальный параметр принимают за нуль, а первый (неизвестный) — за единицу, таким образом

$$\overline{X}_{1\hat{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

Суммарный вектор X (3.60), очевидно, удовлетворяет граничному условию на внутренней поверхности диска. Для того чтобы он удовлетворял также граничному условию на наружной поверхности диска, необходимо соответствующим образом подобрать коэффициент C. Выполнив оба расчета, получим следующие значения вектора X в наружной точке:

$$X_н = \begin{pmatrix} \overline{X}_{1н} C + \overline{\overline{X}}_{1н} \\ \overline{X}_{2н} C + \overline{\overline{X}}_{2н} \end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

Если радиальное напряжение в наружной точке $\sigma_{rн}$ задано, то вторая составляющая вектора X в этой точке известна:

$$X_{2н} = \frac{\sigma_{rн}}{E_н},$$

следовательно,

$$\overline{X}_{2н} C + \overline{\overline{X}}_{2н} = \frac{\sigma_{rн}}{E_н}. \tag{3.64}$$

Определив отсюда коэффициент C и выполнив суммирование согласно равенству (3.60), получим ряд значений вектора X, по которым найдем напряжения σ_r и σ_t и перемещение u в ряде точек.

Рассмотренная методика относится к кольцевому диску, т. е. диску, имеющему центральное отверстие. Если же заданный диск сплошной, т. е. без центрального отверстия, то граничные условия в центре будут иными. Величина напряжения в центральной точке в этом случае неизвестна, но известно, что напряжения σ_r и σ_t одинаковые.

Согласно этому условию с учетом равенства (3.57) между начальными параметрами существует следующая зависимость:

$$\sigma_{r11}(1-\mu)=\left(\frac{u}{r}\right)_{11}E_1-\theta_{11}E_1$$

или

$$X_{2\,1\,\hat{1}}\frac{(1-\mu)E_{\text{н}}h_{\text{н}}}{E_ih_i}=X_{1\,1\,\hat{1}}-\theta_{1\,\hat{1}}. \qquad (3.65)$$

Вектор состояния, удовлетворяющий этой зависимости, в первом расчете в начальной точке целесообразно принять равным

$$\overline{X}_{11}=\begin{pmatrix}(1-\mu)\dfrac{E_{\text{н}}h_{\text{н}}}{E_1h_1}\\ 1\end{pmatrix},$$

а во втором расчете

$$\overline{\overline{X}}_{1\hat{1}}=\begin{pmatrix}\theta_{11}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Тогда при любом C равенство (3.65) будет выполняться.

В остальном расчет сплошного диска ничем не отличается от расчета кольцевого диска.

В табл. 3.1 приведены числовые значения функций $\psi_{uu}(\lambda)$, $\psi_{u\sigma}(\lambda)$ и т. д.

Поясним изложенный метод следующим примером.

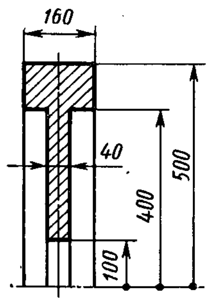


Рис. 3.12

Пример 4.1. Частота вращения диска, изображенного на рис. 3.12, $n=4000$ об/мин; материал — сталь, $E=2\cdot10^7$ Н/см², $\mu=0{,}3$; неравномерный нагрев отсутствует.

Радиальные напряжения на внутренней и на наружной поверхности диска равны нулю. По заданным размерам вычислим $\lambda_1=\dfrac{r_{11}}{r_{12}}=0{,}25$; $\lambda_2=\dfrac{r_{21}}{r_{22}}=0{,}8$.

Выполним первый расчет (в этом расчете вращение не учитывается). В начале первого участка

$$\overline{X}_{11}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

В конце первого и в начале второго участка

$$\overline{X}_{12}=\overline{X}_{2\hat{1}}=L_1\overline{X}_{11}=\begin{pmatrix}\psi_{uu}(\lambda_1) & \dfrac{h_{\text{н}}}{h_1}\psi_{u\sigma}(\lambda_1)\\ \dfrac{h_1}{h_{\text{н}}}\psi_{\sigma u}(\lambda_1) & \psi_{\sigma\sigma}(\lambda_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}3906 & 4\cdot0{,}4266\\ \dfrac{1}{4}\,0{,}4687 & 0{,}6719\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}3906\\0{,}1172\end{pmatrix}.$$

Таблица 3.1

λ	$\psi_{\sigma\sigma}(\lambda)$	$\psi_{\sigma u}(\lambda)$	$\psi_{u\sigma}(\lambda)$	$\psi_{uu}(\lambda)$	$\psi_{\sigma\omega}(\lambda)$	$\psi_{u\omega}(\lambda)$
0	0,65	0,50000	0,45500	0,3500	3,3000	0,91000
0,05	0,6509	0,49875	0,45386	0,3516	3,2935	0,90545
0,1	0,6535	0,49500	0,45045	0,3565	3,2739	0,89189
0,15	0,6579	0,48875	0,44476	0,3646	3,3412	0,86951
0,20	0,6640	0,48000	0,43680	0,3760	3,1949	0,83866
0,25	0,6719	0,46875	0,42656	0,3906	3,1348	0,79980
0,30	0,6815	0,45500	0,41405	0,4085	3,0603	0,75357
0,35	0,6929	0,43875	0,39926	0,4296	2,9710	0,70070
0,40	0,7060	0,42000	0,3822	0,4540	2,8661	0,64210
0,45	0,7209	0,39875	0,36286	0,4816	2,7448	0,57876
0,50	0,7375	0,37500	0,34125	0,5125	2,6062	0,51188
0,55	0,7559	0,34875	0,31736	0,5466	2,4495	0,44272
0,60	0,7760	0,32000	0,2912	0,5840	2,2733	0,37274
0,65	0,7979	0,28875	0,26276	0,6246	2,0766	0,30349
0,70	0,8215	0,25500	0,23205	0,6685	1,8579	0,23669
0,75	0,8469	0,21875	0,19906	0,7156	1,6160	0,17417
0,80	0,8740	0,18000	0,1638	0,7660	1,3493	0,11794
0,85	0,9029	0,13875	0,12626	0,8196	1,0561	0,07007
0,90	0,9335	0,09500	0,08645	0,8765	0,7347	0,03276
0,95	0,9659	0,04875	0,04436	0,9366	0,3834	0,00865
1,00	1	0	0	1	0	0

При вычислении принято $\mu = 0,3$.

В конце второго участка

$$X_{22} = L_2 X_{21} = \begin{pmatrix} \psi_{uu}(\lambda_2) & \psi_{u\sigma}(\lambda_2) \\ \psi_{\sigma u}(\lambda_2) & \psi_{\sigma\sigma}(\lambda_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3906 \\ 0,1172 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,766 & 0,1638 \\ 0,180 & 0,874 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3906 \\ 0,1172 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3184 \\ 0,1727 \end{pmatrix}.$$

Выполним второй расчет

$$K = \frac{\gamma\omega^2 r_{\text{н}}^2}{8gE_{\text{н}}} = 2,18 \cdot 10^{-4}.$$

В начале первого участка

$$\overline{\overline{X}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ так как } p_{\text{вн}} = 0.$$

В конце первого и в начале второго участка

$$\overline{\overline{X}}_{12} = \overline{\overline{X}}_{21} = L_1 \overline{\overline{X}}_{11} + R_1 = \begin{pmatrix} -2,18 \cdot 10^{-4} \cdot 0,8^2 \cdot 0,7998 \\ -2,18 \cdot 10^{-4} \frac{1}{4} 0,8^2 \cdot 3,1348 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1116 \\ -0,1092 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

В конце второго участка

$$\overline{\overline{X}}_{22} = L_2 \overline{\overline{X}}_{21} + R_2 = \begin{pmatrix} 0,766 & 0,1638 \\ 0,180 & 0,874 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,1116 \\ -0,1092 \end{pmatrix} 10^{-3} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -2,18 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1179 \\ -2,18 \cdot 10^{-4} \cdot 1,349 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,129 \\ -0,410 \end{pmatrix} 10^{-3}.$$

Из граничного условия на наружной поверхности определим C:

$$X_{222}=\overline{X}_{222}C+\overline{\overline{X}}_{222}=0{,}1727C-0{,}410\cdot 10^{-3}=0;\quad C=2{,}37\cdot 10^{-3}.$$

Окончательно получим:
в начале первого участка при $r=r_{11}=10$ см

$$X_{11}=\begin{pmatrix}2{,}37\cdot 10^{-3}\\ 0\end{pmatrix};\quad \left(\frac{u}{r}\right)_{11}=2{,}37\cdot 10^{-3};$$

$$u_{11}=2{,}37\cdot 10^{-2}\ \text{см};\quad \sigma_{r11}=0;$$

$$\sigma_{t11}=\left(\frac{u}{r}\right)_{11}E=4{,}74\cdot 10^{4}\ \text{Н/см}^2;$$

при $r=40$ см

$$X_{12}=X_{21}=\begin{pmatrix}0{,}3906\\ 0{,}1172\end{pmatrix}2{,}37\cdot 10^{-3}+\begin{pmatrix}-0{,}1116\\ -0{,}1092\end{pmatrix}10^{-6}=\begin{pmatrix}0{,}8164\\ 0{,}1688\end{pmatrix}10^{-3};$$

$$\left(\frac{u}{r}\right)_{12}=\left(\frac{u}{r}\right)_{21}=0{,}8164\cdot 10^{-3};\quad u_{12}=u_{21}=3{,}27\cdot 10^{-2}\ \text{см};$$

$$\frac{\sigma_r h_i}{E_{\text{н}} h_{\text{н}}}=0{,}1688\cdot 10^{-3};$$

$$\sigma_{r12}=0{,}1688\cdot 10^{-3}\cdot\frac{h_{\text{н}}}{h_1}E=1{,}35\cdot 10^{4}\ \text{Н/см}^2;$$

$$\sigma_{r21}=0{,}1688\cdot 10^{-3}E=0{,}338\cdot 10^{4}\ \text{Н/см}^2;$$

$$\sigma_{t12}=\mu\sigma_{r12}+\left(\frac{u}{r}\right)_{12}E=2{,}04\cdot 10^{4}\ \text{Н/см}^2;$$

$$\sigma_{t21}=\mu\sigma_{r21}+\left(\frac{u}{r}\right)_{21}E=1{,}73\cdot 10^{4}\ \text{Н/см}^2;$$

в наружных точках при $r=50$ см

$$X_{22}=\begin{pmatrix}0{,}3184\\ 0{,}1727\end{pmatrix}2{,}37\cdot 10^{-3}+\begin{pmatrix}-0{,}129\\ -0{,}410\end{pmatrix}10^{-3}=\begin{pmatrix}0{,}346\\ 0{,}280\end{pmatrix}10^{-3};$$

$$\left(\frac{u}{r}\right)_{22}=0{,}627\cdot 10^{-3};\quad u_{22}=3{,}14\cdot 10^{-2}\ \text{см};$$

$$\left(\frac{\sigma_r}{E}\right)_{22}=0;\quad \sigma_{r22}=0;$$

$$\sigma_{t22}=\left(\frac{u}{r}\right)_{22}E=1{,}254\cdot 10^{4}\ \text{Н/см}^2.$$

Эпюры σ_r и σ_t приведены на рис. 3.13.

Изложенный метод расчета применим также к дискам машин радиального типа, для которых интенсивность инерционной нагрузки определяется формулой (3.2). В этом случае все приведенные зависимости остаются справедливыми, за исключением выражения (3.55) для R_i, которое заменяется следующим:

$$R_i=\begin{pmatrix}-\dfrac{1-\mu^2}{2E_i}(Q_{i2}-Q_{i1})+\dfrac{1-\mu^2}{2E_i r_{i2}^2}(J_{i2}-J_{i1})+\dfrac{(T_{i2}-T_{i1})(1+\mu)}{r_{i2}^2}\\ -\dfrac{(1+\mu)}{2E_{\text{н}}}\dfrac{h_i}{h_{\text{н}}}(Q_{i2}-Q_{i1})-\dfrac{(1-\mu)h_i}{2E_{\text{н}}r_{i2}^2 h_{\text{н}}}(J_{i2}-J_{i1})-\dfrac{(T_{i2}-T_{i1})E_i h_i}{r_{i2}^2 E_{\text{н}} h_{\text{н}}}\end{pmatrix},\quad (3.66)$$

где

$$Q=\int_{r_1}^{r} q\,dr; \qquad (3.67)$$

$$J=\int_{r_1}^{r} qr^2\,dr; \qquad (3.68)$$

Q — площадь графика $q(r)$;
J — момент инерции этой площади относительно центра;
T — статический момент площади графика $\theta(r)$ относительно центра.

Интегралы в формулах (3.67), (3.68), (3.14) удобно вычислять, разбив графики функций $q(r)$ и $\theta(r)$ (рис. 3.14) на ряд узких полосок и суммируя соответствующие произведения.

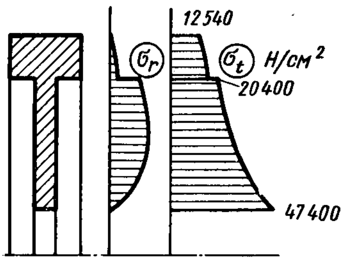


Рис. 3.13

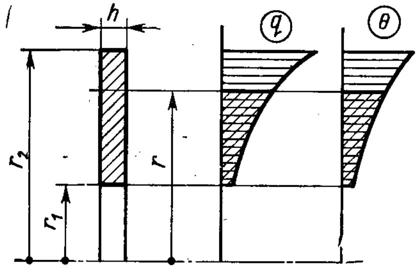


Рис. 3.14

Для расчета дисков переменной толщины по методу начальных параметров с применением ЭЦВМ исходные уравнения деформаций (2.4), (2.5), упругости (3.3), (3.4) и равновесия (3.7) целесообразно привести к двум дифференциальным уравнениям первого порядка с двумя неизвестными.

Исключив из уравнений (3.3), (3.4) σ_t и подставив ε_r и ε_t согласно зависимостям (2.4), (2.5), получим первое уравнение

$$\frac{du}{dr}=-\mu\frac{u}{r}+\frac{(1-\mu^2)}{E}\sigma_r+(1+\mu)\,\theta. \qquad (3.69)$$

Аналогично из равенств (3.4) и (3.7) выводится второе уравнение с теми же неизвестными u и σ_r:

$$\frac{d(\sigma_r h)}{dr}=-\frac{\sigma_r h(1-\mu)}{r}+\frac{uEh}{r^2}-qh-\frac{Eh\theta}{r}. \qquad (3.70)$$

Так как при использовании ЭЦВМ уравнения необходимо представить в безразмерных переменных, введем безразмерный радиус

$$\rho=\frac{r}{r_{\text{н}}}, \qquad (3.71)$$

а в качестве основных переменных примем безразмерные величины $X_1=\frac{u}{r}$ и $X_2=\frac{\sigma_r h}{E_{\text{н}}h_{\text{к}}}$ [см. уравнения (3.46) и (3.47)]. При переходе к безразмерным переменным уравнения (3.69), (3.70) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX_1}{d\rho} &= -\frac{(1+\mu)}{\rho}X_1+\frac{(1-\mu^2)\,E_{\text{н}}h_{\text{н}}}{Eh}X_2+\frac{(1+\mu)\,\theta}{\rho};\\ \frac{dX_2}{d\rho} &= -\frac{(1-\mu)}{\rho}X_2+\frac{Eh}{E_{\text{н}}h_{\text{н}}\rho}X_1-\frac{Eh\theta}{E_{\text{н}}h_{\text{н}}\rho}-\frac{qhr_{\text{н}}}{E_{\text{н}}h_{\text{н}}}.\end{aligned}\right\} \tag{3.72}$$

Эту систему уравнений можно записать сокращенно в матричной форме

$$\frac{dX}{d\rho} = MX+R, \tag{3.73}$$

где $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ — вектор напряженно-деформированного состояния в произвольной точке диска;

M — матрица 2×2;

$$M=\begin{pmatrix}-\dfrac{1+\mu}{\rho} & \dfrac{(1-\mu^2)\,E_{\text{н}}h_{\text{н}}}{\rho\quad Eh}\\ -\dfrac{1-\mu}{\rho} & \dfrac{Eh}{E_{\text{н}}h_{\text{н}}\rho}\end{pmatrix}; \tag{3.74}$$

R — матрица-столбец слагаемых, учитывающих силы инерции и неравномерный нагрев;

$$R=\begin{pmatrix}\dfrac{\theta\,(1+\mu)}{\rho}\\ -\dfrac{Eh\theta}{E_{\text{н}}h_{\text{н}}\rho}-\dfrac{qhr_{\text{н}}}{E_{\text{н}}h_{\text{н}}}\end{pmatrix}. \tag{3.75}$$

Уравнение (3.73) решается на ЭЦВМ по стандартной программе способом двух расчетов. Вектор X представляется в виде суммы [см. уравнение (3.60)]. Вектор первого расчета $\bar{X}$ вычисляется без учета сил инерции и неравномерного нагрева (т. е. при $R=0$) при начальном значении (3.62).

Вектор второго расчета $\bar{\bar{X}}$ вычисляется с учетом вращения и неравномерного нагрева при начальном значении (3.61). Неопределенный множитель C определяется согласно условию (3.64).

В каждом случае диапазон изменения независимой переменной от $\rho=\rho_1=\frac{r_1}{r_{\text{н}}}$ до $\rho = 1$ разбивают на некоторое количество интервалов, и в оперативную память машины вводят значения элементов матриц (3.74) и (3.75) в узловых точках. Этот процесс, однако, требует сравнительно большой затраты времени, а также большого объема оперативной памяти машины. Поэтому более целесообразно аппроксимировать элементы матриц некоторыми функциями безразмерного радиуса ρ и последние ввести в программу машины.

После того, как первый и второй расчеты выполнены и коэффициент C найден, вычисляется вектор X. Это можно сделать или с помощью зависимости (3.60), или, более просто, еще раз просчитать на машине во всем диапазоне от $\rho = \rho_1$ до $\rho = 1$, приняв вектор X в начальной точке равным действительному его значению:

для кольцевого диска

$$X_{11} = \begin{pmatrix} C \\ -\dfrac{p_{\text{вн}} h_1}{E_{\text{н}} h_{\text{н}}} \end{pmatrix}; \tag{3.76}$$

для сплошного диска

$$X_{11} = \begin{pmatrix} (1-\mu)\dfrac{E_{\text{н}} r_{\text{н}}}{E_1 h_1} C + \theta_1 \\ C \end{pmatrix}. \tag{3.77}$$

После того, как X во всех точках диска определен, по его компонентам вычисляют σ_r и u, а по зависимости (3.57) — напряжение σ_t.

§ 5. Метод последовательных приближений

Этот метод используется для поверочного расчета дисков переменной толщины при произвольной зависимости интенсивности нагрузки q от радиуса с учетом переменности по радиусу модуля упругости E и температурной деформации $\theta = \alpha (t - t_0)$. Расчет диска по этому методу производится с помощью ЭЦВМ.

Сущность метода состоит в том, что основные дифференциальные уравнения (3.6) и (3.7) преобразуются в интегральные уравнения, которые затем решаются методом последовательных приближений. При этом возможны различные варианты метода в зависимости от вида интегральных уравнений. Рассмотрим метод, разработанный Р. С. Киносáшвили. Поскольку при изменении температуры коэффициент Пуассона μ изменяется незначительно, в данном расчете он принимается постоянным.

Записав дифференциальное уравнение равновесия (3.7) в виде

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r h) + \frac{(\sigma_r - \sigma_t) h}{r} + qh = 0$$

и проинтегрировав в пределах от $r_{\text{вн}}$ до r, получим

$$\sigma_r h - \sigma_{r_{\text{вн}}} h_{\text{вн}} + \int_{r_{\text{вн}}}^{r} \frac{(\sigma_r - \sigma_t)\hat{h} d\hat{r}}{\hat{r}} + \int_{r_{\text{вн}}}^{r} q\hat{h} d\hat{r} = 0,$$

откуда

$$\sigma_r = \frac{1}{h}\left[\int_{r_{\text{вн}}}^{r} \frac{(\sigma_t - \sigma_r)\hat{h} d\hat{r}}{\hat{r}} - R(r) + \sigma_{r_{\text{вн}}} h_{\text{вн}}\right], \tag{3.78}$$

где $r_{\text{вн}} \leqslant \hat{r} \leqslant r$;

$\hat{h}$ — толщина диска на окружности радиуса $\hat{r}$.

Через $R(r)$ обозначена известная функция радиуса

$$R(r)=\int\limits_{r_{\text{вн}}}^{r}\hat{q}\hat{h}d\hat{r}. \tag{3.79}$$

Преобразуем теперь уравнение совместности деформации (3.6). К левой части уравнения добавим и вычтем величину $r\frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma_r}{E}\right)$, затем, перегруппировав слагаемые, умножим почленно на r^{μ}. В результате уравнение примет вид

$$r^{1+\mu}\frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma_t-\sigma_r}{E}\right)+(1+\mu)\,r^{\mu}\left(\frac{\sigma_t-\sigma_r}{E}\right)=$$
$$=-r^{1+\mu}(1-\mu)\frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma_r}{E}\right)-r^{1+\mu}\frac{d\theta}{dr}.$$

Перепишем уравнение, представив левую часть в виде производной

$$\frac{d}{dr}\left[r^{(1+\mu)}\left(\frac{\sigma_t-\sigma_r}{E}\right)\right]=-r^{(1+\mu)}(1-\mu)\frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma_r}{E}\right)-r^{(1+\mu)}\frac{d\theta}{dr},$$

и проинтегрируем в пределах от $r_{\text{вн}}$ до r:

$$r^{(1+\mu)}\left(\frac{\sigma_t-\sigma_r}{E}\right)-r_{\text{вн}}^{(1+\mu)}\left(\frac{\sigma_{t_{\text{вн}}}-\sigma_{r_{\text{вн}}}}{E_{\text{вн}}}\right)=$$
$$=-(1-\mu)\int\limits_{r_{\text{вн}}}^{r}\hat{r}^{(1+\mu)}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma_r}{E}\right)\right]d\hat{r}-\int\limits_{r_{\text{вн}}}^{r}\hat{r}^{(1+\mu)}\frac{d\theta}{d\hat{r}}\,d\hat{r}.$$

Интегралы в правой части уравнения берутся по частям. Решив уравнение относительно разности $(\sigma_t-\sigma_r)$, получим

$$\sigma_t-\sigma_r=-(1-\mu)\,\sigma_r+\frac{(1-\mu^2)\,E}{r^{1+\mu}}\int\limits_{r_{\text{вн}}}^{r}\frac{\sigma_r\hat{r}^{\mu}}{E}d\hat{r}+K(r)+\frac{E}{r^{1+\mu}}A, \tag{3.80}$$

где

$$K(r)=\frac{(1+\mu)E}{r^{1+\mu}}\int\limits_{r_{\text{вн}}}^{r}\theta r^{\mu}\,dr-E\theta+\frac{r_{\text{вн}}^{(1+\mu)}}{r^{(1+\mu)}}E\theta_{\text{вн}}; \tag{3.81}$$

$$A=\frac{r_{\text{вн}}^{(1+\mu)}}{E_{\text{вн}}}\left(\sigma_{t_{\text{вн}}}-\mu\sigma_{r_{\text{вн}}}\right). \tag{3.82}$$

Система интегральных уравнений (3.78) и (3.80) содержит две неизвестные функции σ_r и $(\sigma_t-\sigma_r)$.

Рассмотрим решение этой системы методом последовательных приближений. Прежде чем приступить к решению, следует выбрать ряд значений радиуса в пределах от $r_{\text{вн}}$ до $r_{\text{н}}$ и составить таблицу функций q, θ, E, h, $R(r)$ и $K(r)$. Интегралы, входящие в эти функции, вычисляются численным способом.

Изложим вначале методику расчета кольцевого диска. В нулевом приближении примем радиальное напряжение во всех точках диска равным нулю.

Положив в правой части уравнения (3.80) $\sigma_r = 0$, получим первое приближение для разности напряжений

$$(\sigma_t - \sigma_r)_\mathrm{I} = K(r) + \frac{E}{r^{1+\mu}} A_\mathrm{I}, \tag{3.83}$$

где A_I — постоянная первого приближения.

Величина A_I остается пока неизвестной.

Радиальное напряжение первого приближения определяется в результате подстановки выражения (3.83) в интегральное уравнение (3.78):

$$\sigma_r = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{r_\text{вн}}^{r} \frac{K(r)\,h\,d\hat{r}}{\hat{r}} + A_\mathrm{I} \int\limits_{r_\text{вн}}^{r} \frac{Eh\,d\hat{r}}{\hat{r}^{2+\mu}} - R(r) + \sigma_{r_\text{вн}} h_\text{вн}\right]. \tag{3.84}$$

Здесь через $\sigma_{r_\text{вн}}$ обозначено радиальное напряжение на внутренней поверхности, которое принимается равным заданному.

Для определения постоянной A_I используем граничное условие на наружной поверхности при $r = r_\text{н}$, $(\sigma_r)_\mathrm{I} = \sigma_{r_\text{н}}$. Согласно этому условию с учетом уравнения (3.89) найдем

$$A_\mathrm{I} = \frac{\sigma_{r_\text{н}} h_\text{н} - \sigma_{r_\text{вн}} h_\text{вн} + R(r_\text{н}) - \int\limits_{r_\text{вн}}^{r_\text{н}} \frac{K(r)\,h\,dr}{r}}{\int\limits_{r_\text{вн}}^{r_\text{н}} \frac{Eh\,dr}{r^{2+\mu}}}. \tag{3.85}$$

Внеся A_I в правую часть равенства (3.84), получим радиальное напряжение в первом приближении, а из соотношения (3.83) определим окружное напряжение в первом приближении $(\sigma_t)_\mathrm{I}$.

Дальнейший порядок расчета следующий. Напряжение $(\sigma_r)_\mathrm{I}$ вносим в интегральное уравнение (3.80) и получаем разность напряжений во втором приближении

$$(\sigma_t - \sigma_r)_\mathrm{II} = -(1-\mu)(\sigma_r)_\mathrm{I} + \frac{(1-\mu^2)E}{r^{1+\mu}} \int\limits_{r_\text{вн}}^{r} \times$$

$$\times \frac{(\sigma_r)_\mathrm{I}\, r^{\mu}}{E}\, dr + K(r) + \frac{E}{r^{1+\mu}} A_\mathrm{II}, \tag{3.86}$$

где A_II — постоянная второго приближения.

Эту разность подставляем в уравнение (3.78) и получаем радиальное напряжение во втором приближении $(\sigma_r)_\mathrm{II}$. Постоянную величину A_II снова находим согласно граничному условию на наружной поверхности, после чего вычисляем $(\sigma_r)_\mathrm{II}$, $(\sigma_t - \sigma_r)_\mathrm{II}$ и $(\sigma_t)_\mathrm{II}$.

Таким же образом определяем напряжения в третьем и последующих приближениях. Практика расчетов показывает, что второе приближение, обычно, дает достаточно высокую степень точности (о степени точности можно судить, сравнивая два последовательных приближения).

Порядок расчета сплошных дисков (без центрального отверстия) несколько отличается от изложенного, так как величина напряжения $\sigma_{r_{вн}}$ в центре диска заранее неизвестна, но известно, что в центральной точке напряжения σ_r и σ_t равны.

Для того чтобы при решении численным методом функции не обращались в бесконечность при $r = 0$, сплошной диск заменяют диском с малым центральным отверстием $r_{вн} \cong \frac{1}{20} r_н$ и принимают на его внутренней поверхности $\sigma_{r_{вн}} = \sigma_{t_{вн}}$.

Порядок расчета диска в этом случае — следующий. Задавшись $(\sigma_r)_0 = 0$, по уравнению (3.80) определяют разность напряжений в первом приближении

$$(\sigma_t - \sigma_r)_{\mathrm{I}} = K(r) + \frac{E}{r^{1+\mu}} A_{\mathrm{I}}.$$

Так как при $r = r_{вн}$, $K(r_{вн}) = 0$ и $(\sigma_t - \sigma_r) = 0$, то $A_{\mathrm{I}} = 0$ и

$$(\sigma_t - \sigma_r)_{\mathrm{I}} = K(r).$$

Это значение разности напряжений вносят в уравнение (3.78) и получают $(\sigma_r)_{\mathrm{I}}$. Затем, согласно граничному условию на наружной поверхности, определяют напряжение во внутренней точке $(\sigma_{r_{вн}})_{\mathrm{I}}$.

Аналогично находят второе приближение. Подставив $(\sigma_r)_{\mathrm{I}}$ в уравнение (3.80), определяют $(\sigma_t - \sigma_r)_{\mathrm{II}}$. Поскольку при $r = r_{вн}$, $(\sigma_t - \sigma_r) = 0$ и $K(r_{вн}) = 0$

$$A_{\mathrm{II}} = \frac{(1-\mu)(\sigma_{r_{вн}})_{\mathrm{I}} r_{вн}^{1+\mu}}{E_{вн}}.$$

Разность $(\sigma_t - \sigma_r)_{\mathrm{II}}$ вносят в уравнение (3.78) и получают $(\sigma)_{r\mathrm{II}}$. Значение напряжения в центре $(\sigma_{r_{вн}})_{\mathrm{II}}$ снова находят согласно граничному условию на наружной поверхности. По разности $(\sigma_t - \sigma_r)_{\mathrm{II}}$ и радиальному напряжению $(\sigma_r)_{\mathrm{II}}$ вычисляют $(\sigma_t)_{\mathrm{II}}$. Также определяют третье и последующие приближения.

Пример 4.2. Определим этим методом напряжения в ступенчатом диске, изображенном на рис. 3.14. Этот же диск был рассчитан по способу двух расчетов — см. пример 4.1.

Исходные данные: $r_н = 50$ см; $r_{вн} = 10$ см; $h_1 = 4$ см; $h_2 = 16$ см; $n = 4000$ об/мин; $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^{-2}$ Н/см³; $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см²; $\mu = 0{,}3$. Неравномерный нагрев, а также напряжения на внутренней и наружной поверхности отсутствуют.

На рис. 3.15, *а*, *б*, *в* изображен профиль диска и приведены графики функций q и $R(r)$. Функция $K(r)$ в данном случае равна нулю. Эпюры напряжений σ_r и σ_t первого и второго приближения представлены на рис. 3.15, *г* и *д*. Следует заметить, что числовые значения ординат в некоторой степени зависят от того, на сколько участков был разделен диск.

Сравнение эпюр рис. 3.15, ∂ с эпюрами рис. 3.13 показывает, что второе приближение отличается от точного решения не более чем на пять процентов (в большинстве точек отклонения еще меньше).

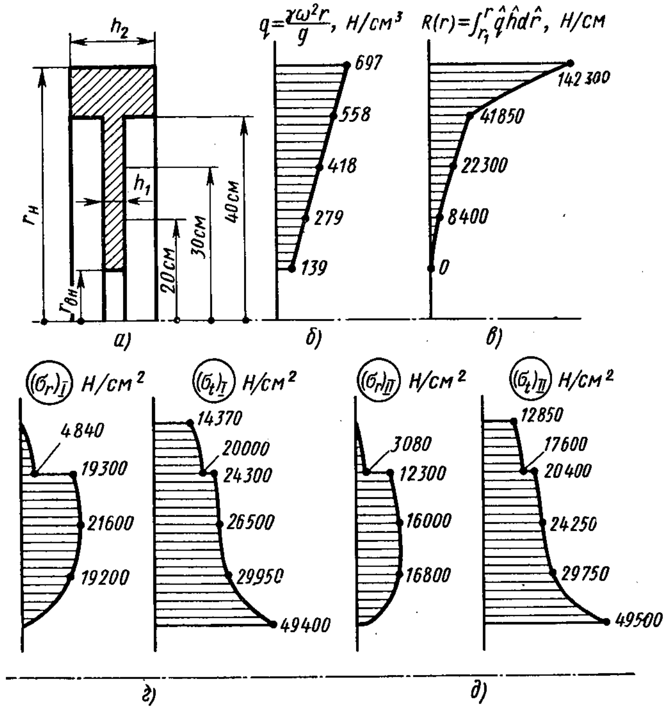


Рис. 3.15

§ 6. Посадочные напряжения в дисках, определение освобождающего и разрушающего числа оборотов

При установке диска на вал обычно применяют соединения с натягом. Величина контактного давления, действующего на внутренней посадочной поверхности диска, зависит в первую очередь от величины натяга. В условиях эксплуатации под влиянием центробежных сил и неравномерного нагрева контактное давление уменьшается и при достаточно большой скорости вращения вообще может обратиться в нуль. Частота вращения, при которой контактное давление становится равным нулю, называется освобождающим числом оборотов.

Для надежного закрепления диска на валу необходимо, чтобы рабочее число оборотов было меньше освобождающего числа оборотов, по крайней мере, на 15—30%.

Определим зависимость контактного давления от величины натяга, от скорости вращения и от неравномерного нагрева.

Предположим, что диск заданного профиля (рис. 3.16) посажен на вал с натягом Δ. Задано осесимметричное поле распределения температур в рабочих условиях, а также рабочая угловая скорость

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Запишем уравнение совместности деформаций диска и вала

$$u_{д} - u_{в} = \frac{\Delta}{2}, \tag{3.87}$$

где $u_{в}$ и $u_{д}$ — радиальные перемещения точек посадочной поверхности вала и диска соответственно. Эти перемещения считаются положительными, если они направлены от центра.

Каждое перемещение $u_{в}$ и $u_{д}$ можно представить в виде суммы трех составляющих: от посадочного давления (с индексом p), за счет вращения (с индексом ω) и от неравномерного нагрева (с индексом t). Уравнение (3.87) соответственно принимает вид

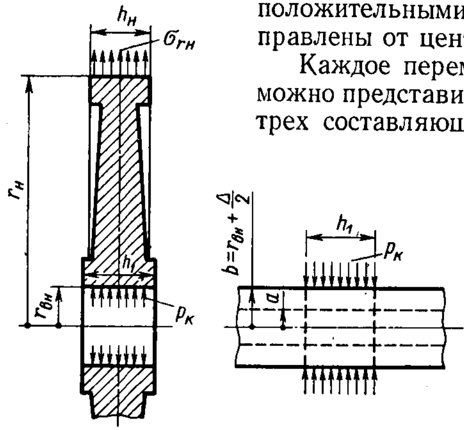


Рис. 3.16

$$u_{дp} + u_{д\omega} + u_{дt} - u_{вp} - u_{в\omega} - u_{вt} = \frac{\Delta}{2}. \tag{3.87а}$$

При расчете соединения диска с валом могут встретиться следующие задачи:

1. Определение требуемого натяга по заданному контактному давлению в эксплуатационных условиях.

2. Определение контактного давления в рабочих условиях по заданному натягу.

3. Определение освобождающего числа оборотов.

В первой задаче контактное давление $p_к$, частота вращения n об/мин, а также поле температур $t(r)$ заданы; следовательно, можно вычислить все шесть перемещений и по уравнению (3.87а) определить натяг. В этом расчете можно вычислить сразу суммарные перемещения, однако практически более удобно вычислить отдельно u_p, u_ω и u_t с тем, чтобы иметь возможность определить освобождающее число оборотов.

Перемещения точек посадочной поверхности вала за счет контактного давления определяют по формуле Ляме:

$$u_{вр} = -\varkappa \frac{p_к b}{E_в}\left[\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_в\right], \tag{3.88}$$

где $E_в$ и $\mu_в$ — упругие постоянные материала вала;

b — наружный радиус вала;

k_1 — коэффициент толстостенности вала; для полого вала $k_1 = \frac{a}{b}$ (см. рис. 3.17); для сплошного $k_1 = 0$).

$\varkappa$ — коэффициент, зависящий от отношения длины посадочной поверхности к диаметру вала (см. рис. 2.7).

При посадке нескольких дисков вплотную коэффициент $\varkappa$ можно принять равным единице.

Перемещения точек вала за счет вращения и нагрева соответственно

$$u_{в\omega} = \frac{\gamma\omega^2 b^3}{4gE_в}\left[1 - \mu_в + (3+\mu_в)k_1^2\right]; \tag{3.89}$$

$$u_{вt} = b\theta_в = b\alpha t_{вн}. \tag{3.90}$$

По объему вала температура считается постоянной и равной температуре посадочной поверхности диска.

Перемещения точек посадочной поверхности диска могут быть определены одним из методов, изложенных в § 4 и 5. В частности можно использовать метод начальных параметров с применением способа двух расчетов. В этом случае, чтобы определить отдельно три составляющие перемещения $u_{др}$, $u_{д\omega}$ и $u_{дt}$, необходимо выполнить три вторых расчета; первый же расчет достаточно сделать только один. В этих расчетах необходимо учитывать переменность модуля упругости по радиусу.

Для решения второй задачи, т. е. для определения контактного давления по заданному натягу следует вычислить отдельно перемещения $u_{в\omega}$, $u_{вt}$, $u_{д\omega}$, $u_{дt}$, затем по уравнению (3.87 *а*) найти разность $u_{др} - u_{вр}$ и по разности определить контактное давление $p_к$. При этом практически удобно применить следующий прием: задавшись произвольно каким-либо давлением p^*, вычисляют соответствующее значение разности $u_{др}^* - u_{вр}^*$. Затем, учитывая, что давление и перемещения $u_{др}$ и $u_{вр}$ связаны линейной зависимостью, определяют

$$p_к = p^* \frac{u_{др} - u_{вр}}{u_{др}^* - u_{вр}^*}.$$

Если требуется найти контактное давление, возникающее только за счет натяга (без учета вращения и неравномерного нагрева), разность $u_{др} - u_{вр}$ следует приравнять половине натяга Δ.

Определение освобождающего числа оборотов производится аналогично. Так как при освобождающем числе оборотов $p_к = 0$, то перемещения $u_{др}$ и $u_{вр}$ равны нулю.

Вычислив $u_{дt}$ и $u_{вt}$, можно по уравнению (3.87) найти разность $(u_{д\omega_0} - u_{в\omega_0})$ по этой разности определить $\omega_{осв}$. Учитывая, что перемещения пропорциональны квадрату угловой скорости, целесообразно вначале вычислить разность $(u^*_{\text{д}\omega} - u^*_{\text{в}\omega})$, при некоторой произвольной угловой скорости ω^*, а затем определить $\omega_{\text{осв}}$

$$\omega_{\text{осв}} = \omega^* \sqrt{\frac{u_{\text{д}\omega_0} - u_{\text{в}\omega_0}}{u^*_{\text{д}\omega} - u^*_{\text{в}\omega}}}.$$

Рассмотрим методику расчета дисков по разрушающим оборотам [4].

При определении разрушающего числа оборотов диск рассматривают в состоянии, предшествующем его разрушению. При этом предполагают, что при разрушающих оборотах окружное напряжение в радиальном сечении диска всюду равно пределу длительной прочности $\sigma_{\text{дл}}$. Если диск нагрет неравномерно, то величина $\sigma_{\text{дл}}$ переменна по радиусу. Зная закон распределения температуры, а также располагая зависимостью $\sigma_{\text{дл}}$ от температуры, нетрудно построить график зависимости $\sigma_{\text{дл}}$ (r).

Далее рассматривают равновесие половины диска при разрушающих оборотах (рис. 3.17). При этом учитывают массовые силы инерции по всему объему диска, а также напряжение на наружной поверхности за счет сил инерции лопаток. Напряжение на внутренней поверхности считается равным нулю, так как посадочное давление при разрушающих оборотах практически исчезает.

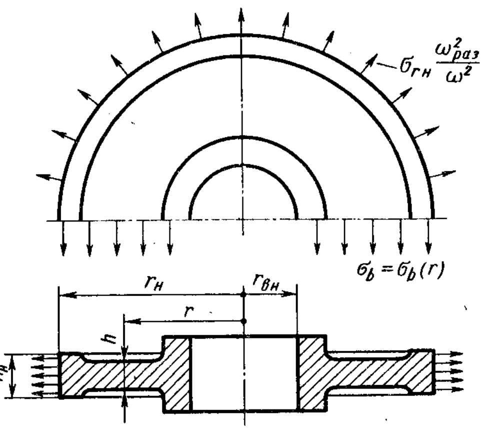


Рис. 3.17

Приравняв нулю сумму проекций сил на вертикальную ось, получим следующее уравнение:

$$\int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} \frac{\gamma\omega^2_{\text{раз}}}{g} h 2r^2\, dr + \sigma_{r_{\text{н}}} \frac{\omega^2_{\text{раз}}}{\omega^2} h_{\text{н}} 2r_{\text{н}} = \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} \sigma_{\text{дл}} 2h\, dr.$$

Отсюда найдем

$$\omega_{\text{раз}} = \sqrt{\frac{\int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} \sigma_{\text{дл}} h\, dr}{\frac{\gamma}{g}\int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} h r^2\, dr + \frac{\sigma_{r\text{н}} h_{\text{н}} r_{\text{н}}}{\omega^2}}}, \tag{3.91}$$

где $r_н$ и $h_н$ — радиус и толщина на наружной поверхности диска;
$\sigma_{r_н}$ — радиальное напряжение на наружной поверхности диска при рабочей угловой скорости;
ω — рабочая угловая скорость.

Интегралы, входящие в формулу (3.91), вычисляют обычно численными методами. Для дисков, работающих при повышенных температурах, под $\sigma_{дл}$ следует понимать предел длительной прочности при заданном ресурсе.

Сравнение разрушающей угловой скорости, вычисленной по формуле (3.91), с результатами экспериментов показывает, что формула (3.91) дает завышенное значение приблизительно на 5—10%.

Коэффициент запаса по разрушающим оборотам $n = \frac{\omega_{раз}}{\omega}$ для дисков турбомашин обычно принимают равным 1,4—1,8.

Глава 4 **НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В КОЛЬЦЕВЫХ ДЕТАЛЯХ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ, ПРИ ПЛОСКОМ И ПРОСТРАНСТВЕННОМ ИЗГИБЕ**

§ 1. Осесимметричная деформация кольцевых деталей

Детали, имеющие форму колец, широко применяют в машиностроении. Примерами кольцевых деталей, нагруженных осесимметричной радиальной и осевой нагрузками, могут служить фланцы, нажимные втулки, ободья дисков и т. п. Кольца широко используют также в качестве подкрепляющих элементов тонкостенных конструкций. В этом случае они могут быть нагружены как осесимметричной нагрузкой, так и нагрузкой, вызывающей плоский или пространственный изгиб. Кольцевые детали, работающие на изгиб, применяют во многих конструкциях в металлообрабатывающей промышленности, в приборостроении и т. д.

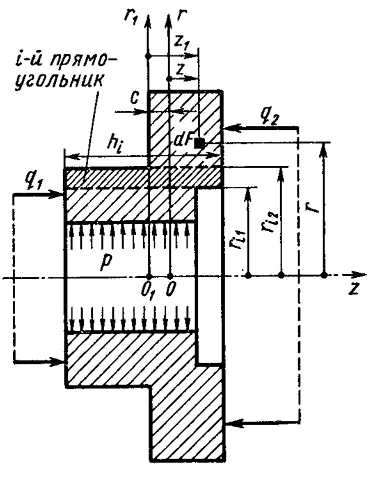


Рис. 4.1

Рассмотрим деформацию кольцевых деталей, возникающую под действием радиальных и осевых сил или моментной нагрузки, равномерно распределенных по окружности. Такую деформацию можно представить как растяжение кольца и осесимметричный изгиб, сопровождающийся поворотом поперечных сечений в их плоскости (кольцо растягивается и выворачивается).

Если кольцо не является тонкой пластиной или оболочкой, то его можно рассматривать как замкнутый кривой брус, поперечные сечения которого при нагружении не изменяют своей формы.

Примером кольцевой детали, испытывающей осесимметричную деформацию, может служить фланец, изображенный на рис. 4.1.

Теория осесимметричной деформации кольцевых деталей, основанная на предположении о неизменности формы поперечного сечения, разработана Бицено К. Б. [5], который дал решение задачи как при малых, так и при больших перемещениях. В настоящем параграфе эта теория приведена в несколько упрощенном виде.

В основу рассматриваемой теории положены следующие допущения:

1. Форма поперечного сечения кольца считается неизменной. Это значит, что расстояние между двумя произвольными точками сечения при деформации остается постоянным.

2. Напряженное состояние в любой точке кольца принимается за одноосное, т. е. предполагается, что кольцевые волокна, деформируясь в окружном направлении, не оказывают силового воздействия одно на другое.

Введем следующие специальные геометрические характеристики поперечного сечения кольца:

$$I_1 = \int \frac{dF}{r}; \tag{4.1}$$

$$I_2 = \int \frac{dFz}{r}; \tag{4.2}$$

$$I_3 = \int \frac{dFz^2}{r}, \tag{4.3}$$

где z и r — координаты произвольной точки сечения (см. рис. 4.1). Положение начала координат на оси z пока произвольное.

Первый и третий интегралы всегда положительны; второй может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от положения начала координат.

Ось r будем называть главной осью сечения кольца (см. рис. 4.1), если интеграл I_2 равен нулю. Для определения положения главной оси выберем произвольную вспомогательную ось r_1. Расстояние между осями r_1 и r обозначим через c. Тогда

$$z = z_1 - c. \tag{4.4}$$

Подставим выражение (4.4) под знак интеграла (4.2) и приравняв последний нулю, определим c:

$$c = \frac{\int\limits_F \frac{dFz_1}{r}}{\int\limits_F \frac{dF}{r}} = \frac{I_2^{(r_1)}}{I_1}. \tag{4.5}$$

Для колец, имеющих плоскость симметрии $c = 0$, главная ось r совпадает с плоскостью симметрии.

При вычислении интеграла I_3 координата z всегда отсчитывается от главной оси r.

В некоторых случаях, однако, может оказаться более удобным вначале вычислить интеграл $I_3^{(r_1)}$ относительно вспомогательной оси r_1, а затем относительно главной оси r. Для этого следует воспользоваться зависимостью

$$I_3 = I_3^{(r_1)} - I_1 c^2. \tag{4.6}$$

Отметим, что относительно главной оси r интеграл I_3 имеет минимальное значение.

Для более сложных сечений, имеющих криволинейный контур (рис. 4.2), интегралы I_1, I_2, I_3 удобно вычислять, представив их в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{z_a}^{z_b} \frac{dr\,dz}{r} = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{z_b - z_a}{r}\,dr;\\
I_2 &= \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{z_a}^{z_b} \frac{drz\,dz}{r} = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{z_b^2 - z_a^2}{2r}\,dr;\\
I_3 &= \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{z_a}^{z_b} \frac{drz^2\,dz}{r} = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{z_b^3 - z_a^3}{3r}\,dr,
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

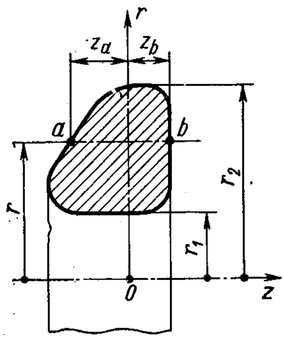


Рис. 4.2

где z_a и z_b — абсциссы крайних точек при текущем значении ординаты r;

r_1 и r_2 — внутренний и наружный радиусы.

Построив графики подынтегральных функций, можно найти значения интегралов графическим или численным способом.

В отдельных случаях поперечное сечение можно разбить на n прямоугольников (см. рис. 4.1). Тогда интегралы I_1, I_2, I_3 можно записать в виде сумм:

$$\left.\begin{aligned}
I_1 &= \sum_1^n (z_{ib} - z_{ia}) \ln \frac{r_{i2}}{r_{i1}};\\
I_2 &= \sum_1^n \frac{z_{ib}^2 - z_{ia}^2}{2} \ln \frac{r_{i2}}{r_{i1}};\\
I_3 &= \sum_1^n \frac{z_{ib}^3 - z_{ia}^3}{3} \ln \frac{r_{i2}}{r_{i1}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Если ввести обозначения:

$z_{ib} - z_{ia} = h_i$ — высота i-го прямоугольника;

$\frac{z_{ib}+z_{ia}}{2}=z_{i\text{ср}}$ — абсцисса центра тяжести i-го прямоугольника, то формулы (4.8) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sum_1^n h_i \ln\frac{r_{i2}}{r_{i1}};\\ I_2 &= \sum_1^n h_i z_{i\,\text{ср}} \ln\frac{r_{i2}}{r_{i1}};\\ I_3 &= \sum_1^n \left(\frac{h_i^3}{12}+h_i z_{i\text{ср}}^2\right)\ln\frac{r_{i2}}{r_{i1}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Для сечения, состоящего из одного прямоугольника при условии, что ось r проходит через его центр,

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= h\ln\frac{r_2}{r_1};\\ I_2 &= 0;\\ I_3 &= \frac{h^3}{12}\ln\frac{r_2}{r_1}. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Перейдем к выводу основных зависимостей рассматриваемой теории. Вначале изложим теорию осесимметричной деформации колец при малых перемещениях.

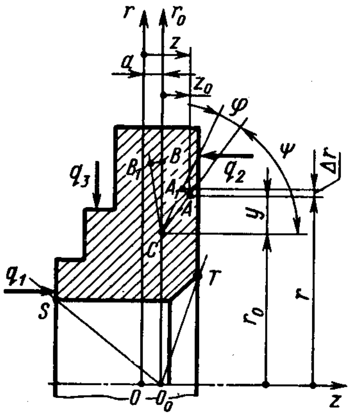


Рис. 4.3

При действии осесимметричной нагрузки в поперечных сечениях кольца возникают только нормальные напряжения. Эти напряжения могут быть положительными или отрицательными. В точках нейтральной линии напряжения равны нулю.

Предположим, что точка C (рис. 4.3) находится на нейтральной линии. Тогда окружное напряжение и окружная деформация в этой точке равны нулю. Следовательно, радиус O_0C остается неизменным. Это позволяет рассматривать перемещение сечения кольца как поворот его относительно точки C на некоторый угол φ. Если угол φ мал, то можно считать, что все точки, лежащие на прямой O_0r_0, перемещаются параллельно оси кольца. Следовательно, окружная деформация и напряжение в этих точках также равны нулю, т. е. линия $O_0\ r_0$ — нейтральная линия.

Заметим, что при малых перемещениях за центр поворота сечения может быть принята любая точка, принадлежащая нейтральной линии (например, точка B). Действительно, если после поворота сечения вокруг точки C кольцо сместить как жесткое целое в направлении оси z на величину BB_1, то точка B займет положение, которое она занимала до деформации.

Рассмотрим теперь некоторую произвольную точку A, расположенную на расстоянии z_0 от нейтральной линии. При повороте сечения эта точка переместится по дуге радиуса $CA = \rho$ на расстояние $AA_1 = \rho\varphi$; при этом она получит радиальное смещение

$$\Delta r = AA_1 \cos \psi = \rho\varphi \frac{z_0}{\rho} = \varphi z_0.$$

Относительная деформация кольцевого волокна

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\varphi z_0}{r}. \qquad (4.11)$$

Соответственно, окружное нормальное напряжение

$$\sigma_t = \varepsilon_t E = \frac{\varphi z_0 E}{r}. \qquad (4.12)$$

Согласно зависимости (4.12), справа от нейтральной линии O_0r_0, т. е. при положительных значениях z_0, напряжения положительны (растяжение), а слева — отрицательны (сжатие). Вдоль лучей, проведенных из точки O_0, напряжения имеют постоянное значение, так как $\frac{z_0}{r} = \text{const}$.

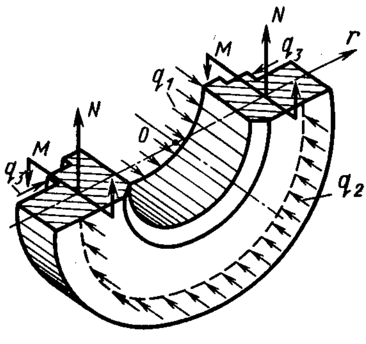


Рис. 4.4

Для вычисления величины напряжения с помощью зависимости (4.12) необходимо знать положение нейтральной линии, от которой отсчитывают z_0 и угол поворота сечения φ. Эти неизвестные определяют по внутренним силовым факторам в поперечном сечении кольца, т. е. по нормальной силе N и изгибающему моменту M. Последние, в свою очередь, связаны с внешней нагрузкой и могут быть найдены по уравнениям равновесия половины кольца (рис. 4.4).

Выразим силовые факторы через напряжения. За ось, к которой приводятся внутренние силы, примем главную ось сечения кольца. С учетом зависимости (4.12) получим

$$N = \int_F \sigma_t \, dF = \varphi E \int_F \frac{z_0 \, dF}{r}; \qquad (4.13)$$

$$M = \int_F \sigma_t \, dF z = \varphi E \int_F \frac{z_0 z \, dF}{r}. \qquad (4.14)$$

Расстояние между главной осью r (см. рис. 4.3) и нейтральной линией O_0r_0 обозначим через a, тогда

$$z_0 = z - a, \tag{4.15}$$

и уравнения (4.13), (4.14) принимают вид

$$N = \varphi E\left[\int\limits_F \frac{dFz}{r} - a\int\limits_F \frac{dF}{r}\right];$$

$$M = \varphi E\left[\int\limits_F \frac{dFz^2}{r} - a\int\limits_F \frac{dFz}{r}\right].$$

Используя введенные обозначения (4.1), (4.2) и (4.3) и полагая $I_2 = 0$, так как ось r — главная, получим

$$N = -\varphi E a I_1; \tag{4.16}$$

$$M = \varphi E I_3. \tag{4.17}$$

Отсюда угол поворота сечения

$$\varphi = \frac{M}{EI_3} \tag{4.18}$$

и расстояние до нейтральной линии

$$a = -\frac{N}{EI_1\varphi} = -\frac{NI_3}{MI_1}. \tag{4.19}$$

Для того чтобы выразить напряжение через внутренние силовые факторы, подставим выражения (4.15), (4.18), (4.19) в уравнение (4.12), в результате получим

$$\sigma_t = \frac{Mz}{rI_3} + \frac{N}{rI_1}. \tag{4.20}$$

Первое слагаемое в этой формуле учитывает изгиб; второе — растяжение кольца. Если растягивающая сила N равна нулю, то в кольце возникает только изгиб; в этом случае, согласно зависимости (4.19), $a = 0$, т. е. нейтральная линия совпадает с главной осью сечения. Если же изгибающий момент M равен нулю, а N не равно нулю, то нейтральная линия уходит в бесконечность; первое слагаемое в формуле (4.20) обращается в нуль и, следовательно, напряжение σ от координаты z не зависит.

Для колец малой кривизны, у которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом, радиус r можно считать постоянным и равным $r_{\text{ср}}$ для всех точек сечения. Вынося $r_{\text{ср}}$ за знак интегралов I_1 и I_3, взамен уравнения (4.20) получим

$$\sigma_t = \frac{Mz}{J_r} + \frac{N}{F}, \tag{4.21}$$

где $J_r = \int\limits_F dFz^2$ — осевой момент инерции сечения относительно оси r;

F — площадь сечения.

Формула (4.21) представляет собой общеизвестную формулу для напряжения в брусе малой кривизны при совместном растяжении и изгибе. Угол поворота сечения φ в этом случае определяется выражением

$$\varphi = \frac{Mr_{cp}}{EJ_r}. \tag{4.22}$$

Определим положение наиболее напряженных точек сечения. Согласно зависимости (4.12), наиболее напряженной будет та точка, для которой отношение $\frac{z_0}{r}$ имеет максимальное значение. Это отношение представляет собой тангенс угла, заключенного между лучом O_0S (см. рис. 4.3) и радиусом. Следовательно, для определения положения наиболее напряженной точки надо провести на чертеже нейтральную линию и из точки ее пересечения с осью z (точка O_0 на рис. 4.3) провести лучи, касающиеся контура сечения. Точки касания (точки S и T) и будут самыми напряженными. Подставив координаты этих точек в уравнение (4.20), получим значения максимальных напряжений.

Остановимся кратко на теории осесимметричной деформации колец при больших перемещениях.

Если угол поворота сечения φ значителен, то радиальное перемещение Δr, относительная окружная деформация ε_t и напряжение σ_t (см. рис. 4.3) определяются следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \Delta r &= \rho\sin(\psi+\varphi) - \rho\sin\psi = -y(1-\cos\varphi) + z_0\sin\varphi; \\ \varepsilon_t &= \frac{\Delta r}{r} = -\frac{y}{r}(1-\cos\varphi) + \frac{z_0}{r}\sin\varphi; \\ \sigma_t &= \varepsilon_t E = E\left[-\frac{y}{r}(1-\cos\varphi) + \frac{z_0}{r}\sin\varphi\right]; \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

где $y = \rho\sin\psi$ — координата рассматриваемой точки A, отсчитываемая в радиальном направлении от центра поворота C.

Запишем выражения нормальной силы N и изгибающего момента M в поперечном сечении кольца:

$$N = \int_F \sigma_t\, dF; \quad M = \int_F \sigma_t\, dF\tilde{z},$$

где $\tilde{z}$ — расстояние от главной оси r до точки A_1 после деформации;

$$\tilde{z} = a + \rho\cos(\psi+\varphi) = a + z_0\cos\varphi - y\sin\varphi. \tag{4.24}$$

Подставив под знак интегралов σ_t и $\tilde{z}$, согласно уравнениям (4.23) и (4.24), и приняв во внимание, что $z_0 = z - a$ и $y = r - r_0$, после вычисления интегралов получим

$$N = -E\left[(1-\cos\varphi)(F - r_0 I_1) + a I_1 \sin\varphi\right]; \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} M = E\Big\{ & a\left[(1-\cos\varphi)^2 - \sin^2\varphi\right](r_0 I_1 - F) + I_3\frac{\sin 2\varphi}{2} - \\ & - I_1 a^2(1-\cos\varphi)\sin\varphi + F z_C(\cos 2\varphi - \cos\varphi) + \\ & + F\sin\varphi(1-\cos\varphi)\left[r_C - r_0 + \frac{r_0}{F}(r_0 I_1 - F)\right]\Big\}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

r_0 и a — координаты центра поворота C относительно главных осей z и r;

r_C и z_C — координаты центра тяжести сечения C_1 относительно тех же осей.

При вычислении интегралов учтено, что $I_2 = 0$, так как ось r — главная.

В дальнейшем для упрощения задачи будем рассматривать растяжение и изгиб кольца независимо одно от другого (при совместном изгибе и растяжении напряжения можно суммировать).

При растяжении (если $N \neq 0$, а $M = 0$) угол поворота сечения φ равен нулю, нейтральная линия уходит в бесконечность и, следовательно, $z_0 \cong -a = \infty$.

Произведение $z_0 \sin\varphi = -a\sin\varphi = u$ в этом случае представляет собой радиальное перемещение сечения кольца. Согласно уравнению (4.25), это перемещение

$$u = \frac{N}{EI_1} \qquad (4.27)$$

и напряжение в произвольной точке

$$\sigma_t = \frac{Eu}{r} = \frac{N}{rI_1}, \qquad (4.28)$$

что согласуется с зависимостью (4.20).

Рассмотрим случай осесимметричного изгиба кольца ($M \neq 0$, $N = 0$).

При $N = 0$ правая часть уравнения (4.25) должна быть равна нулю независимо от величины угла φ; для этого необходимо, чтобы

$$a = 0; \qquad (4.29)$$

$$r_0 = \frac{F}{I_1}. \qquad (4.30)$$

Эти равенства определяют положение поворота поперечного сечения. В данном случае центр поворота C сохраняет неизменное положение независимо от M и φ. При каждом частном значении φ за центр поворота может быть принята любая точка, принадлежащая нейтральной линии, однако с изменением величины угла φ нейтральная линия изменяет свое положение относительно сечения, и только одна точка с координатами a и r_0 всегда принадлежит нейтральной линии. Относительно этой точки фактически происходит поворот сечения.

С учетом равенств (4.29), (4.30) выражения окружного напряжения (4.23) и изгибающего момента (4.26) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_t = E\left[\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)(1-\cos\varphi) + \frac{z}{r}\sin\varphi\right]; \qquad (4.31)$$

$$M = EI_3\frac{1}{2}\sin 2\varphi + EF\left[z_C(\cos 2\varphi - \cos\varphi) + (r_C - r_0)(1-\cos\varphi)\sin\varphi\right]; \qquad (4.32)$$

Уравнения (4.31) и (4.32) дают решение задачи в параметрической форме. Задавшись значениями угла φ, можно вычислить напряжение и изгибающий момент, а по моменту определить величину нагрузки.

Следует учитывать, что при больших перемещениях изгибающий момент M может нелинейно зависеть от нагрузки вследствии изменения плеча момента при повороте сечения.

Пример 4.1. Определить напряжения во втулке, поперечное сечение которой изображено на рис. 4.5. Втулка нагружена осевой силой $P=6.10^4$Н и внутренним давлением $p=1200$ Н/см². Дано: $E=2\cdot10^7$ Н/см²; $\mu=0{,}3$; $r_{11}=3$ см; $r_{12}=r_{21}=5$ см; $r_{22}=8$ см; $h_1=6$ см; $h_2=2{,}5$ см; $R_1=4$ см. $R_2=6{,}5$ см.

Вычислим геометрические характеристики сечения. Разбив сечение на два прямоугольника, проведем вспомогательную ось r_1 через центр первого прямоугольника.

По формулам (4.5) и (4.9) вычислим I_1 и I_2 и расстояние c между осью r_1 и главной осью r:

$$I_1=h_1\ln\frac{r_{12}}{r_{11}}+h_2\ln\frac{r_{22}}{r_{21}}=6\ln\frac{5}{3}+2{,}5\ln\frac{3}{5}=4{,}24\ \text{см};$$

$$I_2^{(r_1)}=h_1z_{C_1}^{(r_1)}\ln\frac{r_{12}}{r_{11}}+h_2z_{C_2}^{(r_1)}\ln\frac{r_{22}}{r_{21}}=0+2{,}5\cdot1{,}75\ln\frac{8}{5}=2{,}056\ \text{см}^2;$$

$$c=\frac{I_2^{(r_1)}}{I_1}=0{,}485\ \text{см}.$$

По формуле (4.9) вычислим I_3 относительно главной оси

$$I_3=\left(\frac{h_1^3}{12}+h_1z_{C_1}^2\right)\ln\frac{r_{12}}{r_{11}}+\left(\frac{h_2^3}{12}+h_2z_{C_2}^2\right)\ln\frac{r_{22}}{r_{21}}=12{,}41\ \text{см}^3,$$

где $z_{C_1}=z_{C_1}^{(r_1)}-c=1{,}265$ см; $z_{C_2}=z_{C_2}^{(r_1)}-c=-0{,}485$ см.

Определим внутренние силовые факторы в поперечном сечении. По уравнению проекций всех сил на нормаль к сечению найдем силу N:

$$N=pr_1h_I=2{,}16\cdot10^4\ \text{Н}$$

и по уравнению моментов относительно оси, проходящей через точку O, момент M:

$$2M-\int_0^\pi\frac{P}{2\pi R_2}R_2d\alpha R_2\sin\alpha+\int_0^\pi\frac{P}{2\pi R_1}R_1d\alpha R_1\sin\alpha+2pr_1h_1c=0;$$

$$M=\frac{P(R_2-R_1)}{2\pi}-pr_{11}h_1c=13\,420\quad\text{Н}\cdot\text{см},$$

где α — полярный угол, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

По формуле (4.18) вычислим угол поворота сечения

$$\varphi=\frac{M}{EI_3}=5{,}41\cdot10^{-5}\ \text{рад}=0{,}0031^\circ$$

и по формуле (4.19) — расстояние до нейтральной линии

$$a=-\frac{NI_3}{MI_1}=-4{,}8\ \text{см}.$$

Проведя на чертеже (рис. 4.5) нейтральную линию O_0r_0, увидим, что сечение втулки расположено целиком по одну сторону от нее. Следовательно, во всех точках сечения действуют напряжения одинакового знака (растяжение). Наибольшее напряжение возникает в точке A, для которой угол наклона луча, проведенного из точки O_0, наибольший. Координаты точки A относительно главных осей:

$$z_A=2{,}515\ \text{см};\qquad r_A=3\ \text{см}.$$

Максимальное напряжение

$$\sigma_{\max}=\frac{Mz_A}{I_3 r_A}+\frac{N}{I_1 r_A}=2610\ \text{Н/см}^2.$$

Радиальное перемещение точек поперечного сечения может быть вычислено по углу поворота сечения φ:

$$u=\varphi z_0 \tag{4.33}$$

или по окружной деформации

$$u=\varepsilon_t r=\frac{\sigma_t}{E}\,r. \tag{4.34}$$

В данном примере перемещение точки A:

$$u_A=\frac{\sigma_A r_A}{E}=3{,}9\cdot 10^{-4}\ \text{см}.$$

Пример 4.2. Применим теорию осесимметричных колец к расчету тарельчатой

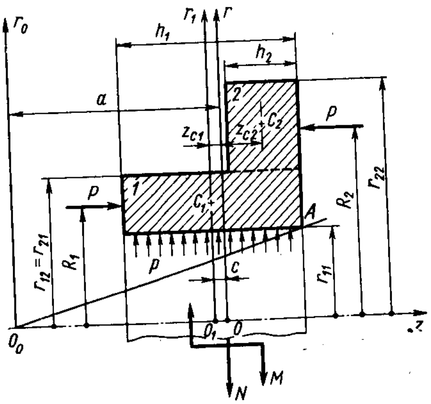


Рис. 4.5

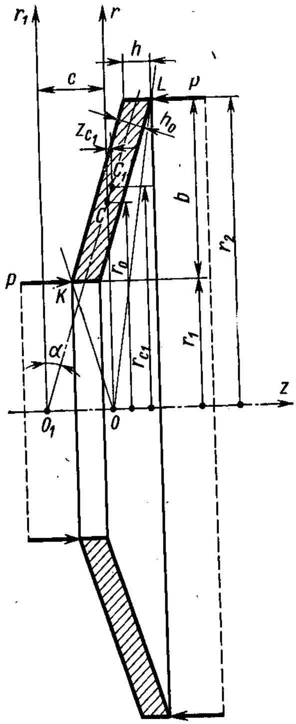


Рис. 4.6

пружины (пружины Бельвилля, рис. 4.6). Выбрав оси координат z и r_1, как показано на чертеже, запишем уравнение срединной поверхности

$$z^\circ=r\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

где z° — координата, отсчитываемая от оси r_1.

По формулам (4.7) вычислим геометрические характеристики сечения

$$I_1=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(z^\circ+\frac{h}{2}\right)-\left(z^\circ-\frac{h}{2}\right)}{r}\,dr=h\ln\frac{r_2}{r_1};$$

$$I_2=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(z^\circ+\frac{h}{2}\right)^2-\left(z^\circ-\frac{h}{2}\right)^2}{2r}=hb\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$I_3^{(r_1)}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(z^\circ+\frac{h}{2}\right)^3-\left(z^\circ-\frac{h}{2}\right)^3}{3r}\,dr=hb\,r_{C_1}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+\frac{h^3}{12}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

где

$$b=r_2-r_1;\quad r_{C_1}=\frac{r_2+r_1}{2};\quad h=h_0\frac{1}{\cos\alpha}.$$

По зависимостям (4.5), (4.6) определим расстояние c до главной оси r и интеграл I_3 относительно главной оси:

$$c=\frac{I_2}{I_1}=\frac{b\operatorname{tg}\alpha}{\ln\frac{r_2}{r_1}};$$

$$I_3=I_3^{(r_1)}-I_1c^2=hb\operatorname{tg}^2\alpha\left(r_{C_1}-\frac{b}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right)+\frac{h^3}{12}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Угол поворота поперечного сечения пружины может быть достаточно большим. Для сравнения выполним расчет по теории осесимметричной деформации колец при малых перемещениях и при больших перемещениях; результаты расчетов сопоставим с результатами экспериментальной проверки.

Расчет по теории малых перемещений.

По уравнению равновесия половины кольца определим

$$N=0;\quad M=\frac{Pb}{2\pi}.$$

По зависимости (4.18) найдем угол поворота сечения кольца

$$\varphi=\frac{M}{EI_3}=\frac{Pb}{2\pi EI_3}.$$

По углу поворота определим осадку

$$\lambda=\varphi(r_2-r_1)=\frac{Pb^2}{2\pi EI_3}.$$

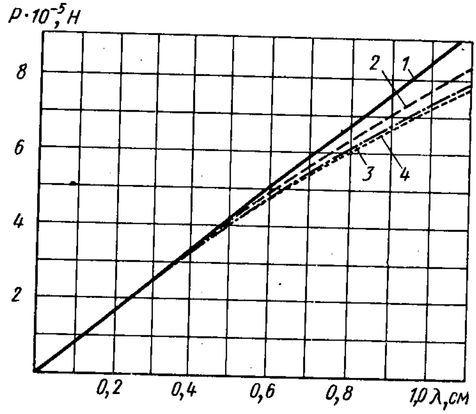


Рис. 4.7

Зададимся числовыми значениями:

$$r_1=16{,}5\text{ см};\quad r_2=30\text{ см};\quad h_0=2{,}64\text{ см};\quad \alpha=6°33';$$
$$\operatorname{tg}\alpha=0{,}115;\quad E=1{,}95\cdot10^7\text{ Н/см}^2;\quad b=r_2-r_1=13{,}5\text{ см};$$
$$h=\frac{h_0}{\cos\alpha}=2{,}66\text{ см};\quad r_{C_1}=\frac{r_1+r_2}{2}=23{,}25\text{ см}.$$

Тогда

$$I_3=2{,}66\cdot13{,}5\cdot0{,}115^2\left(23{,}25-\frac{13{,}5}{\ln\frac{30}{16{,}5}}\right)+\frac{2{,}66^3}{12}\ln\frac{30}{16{,}5}=1{,}275\text{ см}^3;$$

$$\lambda=P\frac{13{,}5^2}{2\pi1{,}95\cdot10^7\cdot1{,}275}=1{,}17\cdot10^{-6}P\text{ см}.$$

На рис. 4.7 приведены зависимости $P(\lambda)$. Прямая *1* соответствует решению задачи по теории малых перемещений; кривая *2* построена по экспериментальным данным. Как можно видеть, при нагрузке до $\sim50\%$ от максимальной расхождение не превышает 5%. При большей нагрузке расхождение увеличивается и при P_{max} достигает 12%.

Кривые *3* и *4* (см. рис. 4.7) построены по результатам расчетов по теории больших перемещений.

Расчет по теории больших перемещений

Площадь поперечного сечения пружины: $F = bh = 35{,}91$ см². Характеристики сечения I_1, I_2:

$$I_1 = h \ln \frac{r_2}{r_1} = 1{,}59 \text{ см}; \quad I_2 = hb \operatorname{tg} \alpha = 4{,}13 \text{ см}^2.$$

Расстояние от оси r_1 до главной оси r:

$$c = \frac{I_2}{I_1} = 2{,}60 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести сечения относительно главных осей:

$$r_{C_1} = 23{,}25 \text{ см}; \quad z_{C_1} = r_{C_1} \operatorname{tg} \alpha - c = 0{,}077 \text{ см}.$$

Координаты центра поворота относительно тех же осей [см. формулы (4.30)]:

$$r_0 = \frac{F}{I_1} = 22{,}58 \text{ см}; \quad a = 0.$$

Изгибающий момент M определим по углу поворота φ согласно уравнению (4.32). Так как поперечное сечение пружины имеет форму узкого параллелограмма, то деформации в радиальном направлении не могут протекать свободно; они стеснены вследствие взаимодействия соседних окружных волокон. Это приводит к некоторому увеличению жесткости пружины, которое может быть учтено умножением модуля упругости на дробь $\frac{1}{1-\mu^2}$. Аналогичный эффект увеличения жесткости наблюдается при цилиндрическом изгибе пластин (см. гл. 5, § 2).

Если учесть указанную поправку, то уравнение (4.32) примет вид

$$M = \frac{E}{1-\mu^2}\left[I_3 \frac{\sin 2\varphi}{2} + F z_{C_1} (\cos 2\varphi - \cos \varphi) + F\left(r_{C_1} - r_0\right)(1 - \cos \varphi) \sin \varphi\right].$$

Величины момента, вычисленные по этому уравнению при разных значениях угла φ, приведены в табл. 4.1; там же указаны также значения нагрузки P и осадки λ, вычисленные по формулам:

$$P = \frac{M 2\pi}{b}; \quad \gamma = \varphi b = \varphi^\circ \frac{\pi}{180^\circ} b.$$

По данным таблицы построена кривая *3* (см. рис. 4.7).

Расхождение теоретического и экспериментального значений осадки при максимальной нагрузке в этом случае не превышает 3%.

Таблица 4.1

φ°	$M \cdot 10^{-5}$, Н · см	$P \cdot 10^{-4}$, Н	λ, см
1	4,51	19,1	0,236
2	8,56	39,8	0,472
3	12,2	56,8	0,706
4	15,58	73,0	0,944
5	18,7	87	1,178

Задача о деформации тарельчатых пружин на основе предположения о неизменности формы поперечного сечения впервые была решена Альменом и Лязло. Зависимость P (λ), построенная по предложенной ими формуле [20], представлена на рис. 4.7 кривой *4*.

Более точное решение с учетом искривления поперечного сечения пружины приведено в работе [20], однако результат этого решения отличается от приведенного незначительно.

Вычислим напряжения в пружине. Наибольшие напряжения возникают в точках K и L (см. рис. 4.6).

Координаты этих точек:

$$z_K = -2{,}03 \text{ см}; \quad r_K = 16{,}5 \text{ см};$$
$$z_L = 2{,}18 \text{ см}; \quad r_L = 30 \text{ см}.$$

По формуле (4.20) при $N = 0$ и $M = \dfrac{Pb}{2\pi}$ найдем

$$\sigma_L = \frac{Pbz_L}{2\pi I_3 r_L}; \quad \sigma_K = \frac{Pbz_K}{2\pi I_3 r_K}.$$

При нагрузке $P = 4\cdot 10^5$ Н; $\sigma_L = 1{,}9\cdot 10^4$ Н/см^2; $\sigma_K = -8{,}3\cdot 10^4$ Н/см^2.

Фактическое напряжение в точке K будет несколько меньше, во-первых, за счет скругления кромки, во-вторых, за счет остаточного напряжения, возникающего при первичном обжатии. Отметим, что принятая схема нагружения приемлема лишь в том случае, когда несколько пружин сложены вместе: вогнутая сторона с вогнутой, выпуклая — с выпуклой. В этих условиях относительное смещение по поверхности контакта не возникает и силы трения отсутствуют. В некоторых случаях, для увеличения поглощения энергии (при использовании пружин в амортизаторах) между пружинами прокладывают плоские шайбы. Тогда между пружинами и шайбами возникают относительные смещения и появляются силы трения. Схема нагружения при этом несколько усложняется.

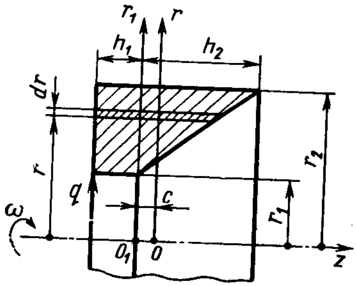


Рис. 4.8

Пример 4.3. Рассмотрим кольцо, нагруженное радиальной нагрузкой q и инерционной нагрузкой, возникающей при вращении (см. рис. 4.8).

Выбрав ось r_1, как показано на чертеже, и представив сечение как совокупность прямоугольника и треугольника, вычислим характеристики поперечного сечения. Применив формулы (4.7)—(4.8), получим для прямоугольника

$$I_{1п} = h_1 \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad I_{2п}^{(r_1)} = -\frac{h_1^2}{2} \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad I_{3п}^{(r_1)} = \frac{h_1^3}{3} \ln \frac{r_2}{r_1};$$

для треугольника

$$I_{1т} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{h_2}{b}(r - r_1)\frac{dr}{r} = h_2 - \frac{h_2 r_1}{b} \ln \frac{r_2}{r_1};$$

$$I_{2т}^{(r_1)} = \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{h_2}{b}(r - r_1)\right]^2 \frac{dr}{2r} = \frac{h_2^2}{2b}\left[-r_1 + \frac{b}{2} + \frac{r_1^2}{b} \ln \frac{r_2}{r_1}\right];$$

$$I_{3т}^{(r_1)} = \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{h_2}{b}(r - r_1)\right]^3 \frac{dr}{3r} = \frac{h_2^3}{3b^3}\left[\frac{r_2^3 - r_1^3}{3} - \frac{3}{2} r_1 (r_2^2 - r_1^2) + \right.$$
$$\left. + 3r_1^2 b - r_1^3 \ln \frac{r_2}{r_1}\right].$$

Расстояние от оси r_1 до главной оси

$$c=\frac{I_{2п}+I_{2т}}{I_{1п}+I_{1т}}.$$

Интеграл I_3 относительно главной оси

$$I_3=I_{3п}^{(r_1)}+I_{3т}^{(r_1)}-(I_{1п}+I_{1т})\,c^2.$$

Внутренние силовые факторы в поперечном сечении

$$N=qr_1+\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma\omega^2}{g}r\,dr\left[h_1+h_2\frac{(r-r_1)}{b}\right]r;$$

$$M=-qr_1(h_1+c)-\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma\omega^2}{g}r\,drh_1r\left(\frac{h_1}{2}+c\right)+$$

$$+\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma\omega^2}{g}r\,drh_2\frac{(r-r_1)}{b}r\left[\frac{h_2(r-r_1)}{2b}-c\right].$$

Дальнейшее решение аналогично рассмотренному в примере 4.1.

Изложенный метод расчета осесимметричных колец применим также к тонкостенным кольцевым деталям сложной формы, имеющим радиальные ребра или лопатки, препятствующие искажению формы поперечного сечения. К таким деталям, в частности, относятся рабочие колеса некоторых видов турбомашин и гидромуфт.

§ 2. Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях колец при плоском и пространственном изгибе

Плоский изгиб возникает при нагружении кольца силами, расположенными в его плоскости. При использовании колец в качестве подкрепляющих элементов (шпангоутов), а также как самостоятельных элементов конструкции они могут быть нагружены радиальными силами, касательными силами и моментами.

Предположим, что все внешние силы известны или могут быть определены по уравнениям статики. Тогда кольцо будет внешне статически определимым. В то же время оно будет внутренне трижды статически неопределимым. Это значит, что внутренние силовые факторы в сечении кольца могут быть определены только в результате решения трех уравнений перемещений. Общий метод раскрытия статической неопределимости (метод канонических уравнений) подробно рассмотрен в курсах сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем. Однако применительно к замкнутым кольцам, нагруженным произвольно расположенными силами можно рекомендовать более эффективные методы [5, 24].

Предположим, что кольцо нагружено несколькими радиальными силами P_1, P_2, ..., P_n, несколькими касательными силами T_1, T_2, ..., T_m и несколькими моментами $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... $\mathfrak{M}_l$, причем все эти нагрузки взаимно уравновешены. На рис. 4.9, *а* показаны одна радиальная сила P_i, одна касательная сила T_j и один момент $\mathfrak{M}_k$. Углы, определяющие положение точек приложения указанных нагрузок, обозначены соответственно φ_i, φ_j, φ_k. Чтобы раскрыть статическую неопределимость, разрежем кольцо по сечению $\varphi = 0$, приложим неизвестные силовые факторы X_1, X_2, X_3 (рис. 4.9, *б*) и приравняем нулю взаимные перемещения концов в месте разреза в направлениях действия силовых факторов X_1, X_2, X_3:

$$\delta_1 = 0; \quad \delta_2 = 0; \quad \delta_3 = 0.$$

Считая кольцо тонким, т. е. предполагая, что размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом, а также принимая,

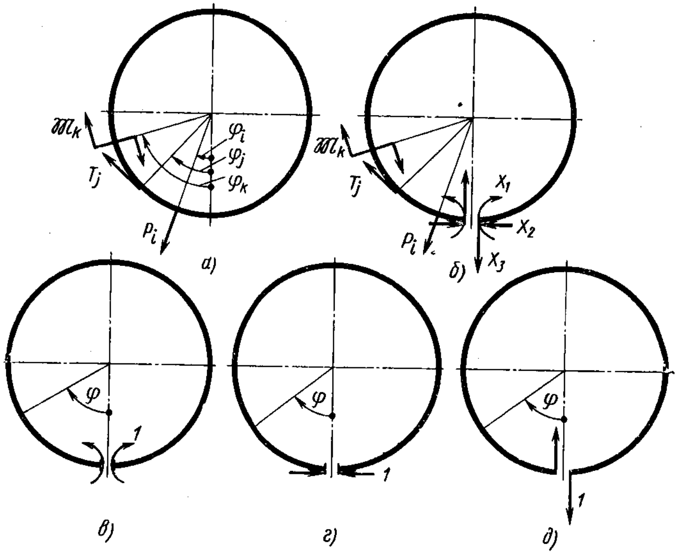


Рис. 4.9

что деформации растяжения и сдвига пренебрежимо малы по сравнению с деформациями изгиба, и применяя для вычисления перемещений интеграл Мора, получим

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \oint \frac{MM_1^{(1)} r\,d\varphi}{EJ_x} = 0; \\ \delta_2 &= \oint \frac{MM_1^{(2)} r\,d\varphi}{EJ_x} = 0; \\ \delta_3 &= \oint \frac{MM_1^{(3)} r\,d\varphi}{EJ_x} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

здесь $M_1^{(1)} = 1$; $M_1^{(2)} = 1r\,(1 - \cos\varphi)$; $M_1^{(3)} = 1r \sin\varphi$ — изгибающие моменты в текущем сечении кольца от единичных нагрузок, соответствующих неизвестным силовым факторам X_1, X_2, X_3 (рис. 4.9, *в*, *г* и *д*);

M — суммарный изгибающий момент в текущем сечении от заданных нагрузок и от неизвестных силовых факторов X_1, X_2, X_3.

Подставив под знак интегралов (4.35) значения моментов $M_1^{(1)}$, $M_1^{(1)}$, $M_1^{(3)}$,и сократив на постоянный множитель $\frac{r}{EJ_x}$, получим

$$\left.\begin{aligned}&\oint M\,d\varphi=0;\\&\oint M\cos\varphi\,d\varphi=0;\\&\oint M\sin\varphi\,d\varphi=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4.36)$$

Изгибающий момент в текущем сечении (см. рис. 4.9, *б*) может быть представлен в виде суммы

$$M=X_1+X_2r\,(1-\cos\varphi)+X_3r\sin\varphi+M,\qquad(4.37)$$

где $\bar{M}$ — момент в основной системе только от заданных нагрузок.

В результате подстановки выражения (4.37) уравнения (4.36) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}&X_12\pi+X_2r2\pi+\oint M\,d\varphi=0;\\&-X_2r\pi+\oint\bar{M}\cos\varphi\,d\varphi=0;\\&X_3r\pi+\oint\bar{M}\sin\varphi\,d\varphi=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4.38)$$

Здесь учтено, что

$$\oint d\varphi=2\pi;\quad\oint\sin\varphi\,d\varphi=0;\quad\oint\cos\varphi\,d\varphi=0;$$

$$\oint\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=0;\quad\oint\cos^2\varphi\,d\varphi=\pi;\quad\oint\sin^2\varphi\,d\varphi=\pi.$$

Напишем уравнения (4.38) в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned}&X_12\pi+X_2r2\pi+\sum_1^n\int_{\varphi_i}^{2\pi}[1-P_ir\sin(\varphi-\varphi_i)]\,d\varphi+\\&+\sum_1^m\int_{\varphi_j}^{2\pi}[-T_jr\,(1-\cos(\varphi-\varphi_j))]\,d\varphi+\sum_1^l\int_{\varphi_k}^{2\pi}(-\mathfrak{W}_k)\,d\varphi=0;\\&-X_2r\pi+\sum_1^n\int_{\varphi_i}^{2\pi}[-P_ir\sin(\varphi-\varphi_i)]\cos\varphi\,d\varphi+\sum_1^m\int_{\varphi_j}^{2\pi}\{-\\&-T_jr[1-\cos(\varphi-\varphi_j)]\}\cos\varphi\,d\varphi+\sum_1^l\int_{\varphi_k}^{2\pi}-\mathfrak{W}_k\cos\varphi\,d\varphi=0;\\&X_3r\pi+\sum_1^n\int_{\varphi_i}^{2\pi}[-P_ir\sin(\varphi-\varphi_i)]\sin\varphi\,d\varphi+\sum_1^m\int_{\varphi_j}^{2\pi}\{-\\&-T_jr\,[1-\cos(\varphi-\varphi_j)]\}\sin\varphi\,d\varphi+\sum_1^l\int_{\varphi_k}^{2\pi}-\mathfrak{W}_k\sin\varphi\,d\varphi=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4.39)$$

Нижний предел интегрирования в уравнениях (4.39) выбран с учетом того, что каждая из внешних нагрузок дает момент только в интервале от $\varphi_{i.j.k}$ до 2π.

Если выполнить интегрирование и принять во внимание уравнения равновесия заданного кольца

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n P_i \cos\varphi_i - \sum_1^m T_j \sin\varphi_j = 0;\\ &\sum_1^n P_i \sin\varphi_i + \sum_1^m T_j \cos\varphi_j = 0;\\ &\sum_1^m T_j r + \sum_1^l \mathfrak{W}_k = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.40)$$

а затем решить систему уравнений (4.39) относительно X_1, X_2, X_3, то в результате придем к следующим формулам для искомых силовых факторов:

$$\left.\begin{aligned} &X_1 = \sum_1^n P_i r \chi_{1P}(\varphi_i) + \sum_1^m T_j r \chi_{1T}(\varphi_j) + \sum_1^l \mathfrak{W}_k \chi_{1M}(\varphi_k);\\ &X_2 = \sum_1^n P_i \chi_{2P}(\varphi_i) + \sum_1^m T_j \chi_{2T}(\varphi_j) + \sum_1^l \frac{\mathfrak{M}_k}{r} \chi_{2M}(\varphi_k);\\ &X_3 = \sum_1^n P_i \chi_{3P}(\varphi_i) + \sum_1^m T_j \chi_{3T}(\varphi_j) + \sum_1^l \frac{\mathfrak{M}_k}{r} \chi_{3M}(\varphi_k), \end{aligned}\right\} \qquad (4.41)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\chi_{1P}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}(1 + \varphi \sin\varphi); \quad \chi_{1T}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi - \varphi);\\ &\chi_{1M}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}(-\varphi - 2\sin\varphi);\\ &\chi_{2P}(\varphi) = -\frac{\varphi\sin\varphi}{2\pi}; \quad \chi_{2T} = \frac{1}{2\pi}(-\varphi\cos\varphi + \sin\varphi);\\ &\chi_{2M}(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\pi};\\ &\chi_{3P}(\varphi) = -\frac{\varphi\cos\varphi}{2\pi}; \quad \chi_{3T}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi);\\ &\chi_{3M}(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\pi}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.42)$$

Числовые значения функций $\chi_{1P}, \chi_{1T}, \chi_{1M}$ приведены в табл. 4.2. Положительные направления нагрузок P_i, T_j, $\mathfrak{M}_к$ показаны на рис. 4.9, *а*.

Таблица 4.2

φ°	χ_{1P}	χ_{1T}	χ_{1M}	φ°	χ_{1P}	χ_{1T}	χ_{1M}
0	0,15916	0	0				
5	0,16037	—0,01392	—0,04163	185	0,11437	—1,01195	—0,48615
10	0,16398	—0,02805	—0,08306	190	0,06751	—1,01991	—0,47251
15	0,16994	—0,04261	—0,12405	195	0,01896	—1,02369	—0,45929
20	0,17816	—0,05778	—0,16443	200	—0,03086	—1,02318	—0,44668
25	0,18850	—0,07376	—0,20396	205	—0,08150	—1,01827	—0,43492
30	0,20082	—0,09074	—0,24249	210	—0,13251	—1,00893	—0,42417
35	0,21490	—0,10887	—0,27979	215	—0,18340	—0,99516	—0,41465
40	0,23060	—0,12825	—0,31572	220	—0,23366	—0,97695	—0,40650
45	0,24754	—0,14915	—0,35008	225	—0,28279	—0,95440	—0,39992
50	0,26555	—0,17152	—0,38273	230	—0,33026	—0,92764	—0,39505
55	0,28430	—0,19551	—0,41352	235	—0,37557	—0,89683	—0,39204
60	0,30349	—0,22117	—0,44233	240	—0,41819	—0,86217	—0,39101
65	0,32279	—0,24848	—0,46905	245	—0,45764	—0,82393	—0,39206
70	0,34187	—0,27750	—0,49355	250	—0,49341	—0,78240	—0,39533
75	0,36039	—0,30814	—0,51579	255	—0,52504	—0,73793	—0,40087
80	0,37800	—0,34036	—0,53569	260	—0,55209	—0,69090	—0,40875
85	0,39437	—0,37408	—0,55321	265	—0,57415	—0,64172	—0,41901
90	0,40916	—0,40916	—0,56831	270	—0,59084	—0,59084	—0,43169
95	0,42204	—0,44544	—0,58098	275	—0,60183	—0,53876	—0,44679
100	0,43271	—0,48274	—0,59125	280	—0,60680	—0,48598	—0,46431
105	0,44088	—0,51089	—0,60413	285	—0,60554	—0,43304	—0,48421
110	0,44628	—0,55962	—0,60466	290	—0,59782	—0,38048	—0,50644
115	0,44867	—0,59878	—0,60793	295	—0,58351	—0,32889	—0,53095
120	0,44783	—0,63683	—0,60899	300	—0,56253	—0,27883	—0,55767
125	0,44358	—0,67675	—0,60796	305	—0,53485	—0,23090	—0,58648
130	0,43578	—0,71514	—0,60495	310	—0,50049	—0,18568	—0,61727
135	0,42432	—0,75271	—0,60008	315	—0,45956	—0,14374	—0,64992
140	0,40913	—0,78910	—0,59350	320	—0,41221	—0,10565	—0,68428
145	0,39039	—0,82400	—0,58535	325	—0,35866	—0,07198	—0,72021
150	0,36749	—0,85709	—0,57583	330	—0,29918	—0,04323	—0,75751
155	0,34112	—0,88803	—0,56507	335	—0,23411	—0,01992	—0,79603
160	0,31112	—0,91652	—0,55331	340	—0,16386	—0,00252	—0,83557
165	0,27778	—0,94224	—0,54071	345	—0,08888	0,00854	—0,87595
170	0,24116	—0,96490	—0,52749	350	—0,00967	0,01286	—0,91695
175	0,20152	—0,98424	—0,51385	355	0,07321	0,01012	—0,95838
180	0,15916	—1,00000	—0,50000	360	0,15916	0	—1,00000

Пример 4.4. Кольцо нагружено тремя симметрично расположенными радиальными силами P (рис. 4.10,a). Изгибающий момент в произвольном сечении определяется по первому уравнению (4.41). Момент в сечении A

$$M_A = -Pr\chi_{1P}(60^\circ) - Pr\chi_{1P}(180^\circ) - Pr\chi_{1P}(300^\circ).$$

Подставив взятые из табл. 4.2 значения функций, получим $M_A = 0{,}100\ Pr$. Аналогично определим момент в сечении B:

$$M_B = -Pr\chi_{1P}(0^\circ) - Pr\chi_{1P}(120^\circ) - Pr\chi_{1P}(240^\circ) = -0{,}189Pr.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 4.10, *б*.

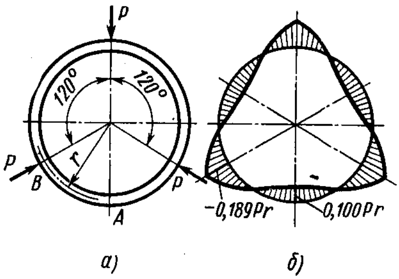


Рис. 4.10

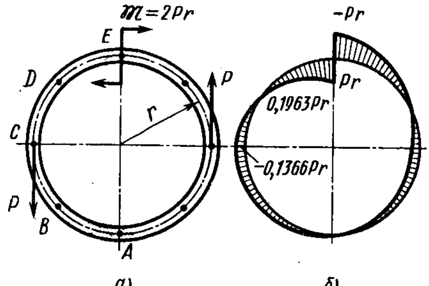


Рис. 4.11

Пример 4.5. Кольцо нагружено силами и моментом, как показано на рис. 4.11, *а*. Изгибающий момент в сечениях A и B имеет следующие значения:

$$M_A = -Pr\chi_{1T}(90^\circ) + 2Pr\chi_{1M}(180^\circ) - Pr\chi_{1T}(270^\circ) = 0;$$
$$M_B = -Pr\chi_{1T}(45^\circ) + 2Pr\chi_{1M}(135^\circ) - Pr\chi_{1T}(225^\circ) = -0{,}0966Pr.$$

Аналогично может быть вычислен момент в сечениях C, D, E:

$$M_C = -0{,}1366Pr, \quad M_D' = 0{,}1963Pr, \quad M_E = \pm\ 1{,}00Pr.$$

Эпюра моментов приведена на рис. 4.11, *б*.

Пример 4.6. Кольцо, опирающееся на жесткую опору, нагружено силами собственного веса (рис. 4.12, *а*). Для того чтобы получить выражение изгибающего

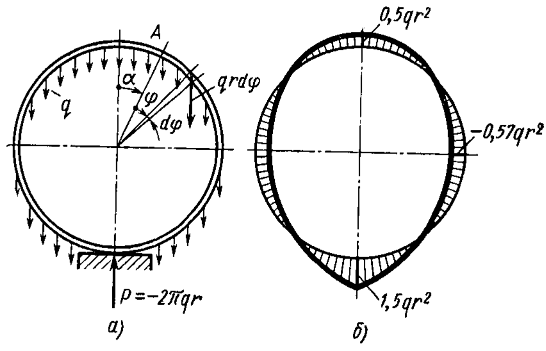


Рис. 4.12

момента в текущем сечении, возьмем произвольное сечение A под углом α к вертикали и будем отсчитывать угол φ от этого сечения. На кольцо действует сосредоточенная сила реакции опоры $P = -2\pi qr$, расположенная под углом $(\pi - \alpha)$ относительно точки A, а также распределенная нагрузка q.

Последнюю можно представить как бесчисленное множество бесконечно малых вертикальных сил $qrd\varphi$. Каждую из этих сил разложим на две составляющие: нормальную — $qrd\varphi \cos(\alpha+\varphi)$ и касательную $qrd\varphi \sin(\alpha+\varphi)$.

Тогда изгибающий момент в сечении A, согласно первому уравнению (4.41), запишется в виде

$$M_A = +P\chi_{1P}(\pi-\alpha) + \int_0^{2\pi} -qrd\varphi \cos(\alpha+\varphi)\, r\chi_{1P}(\varphi) + \int_0^{2\pi} qrd\varphi \sin(\alpha+\varphi)\, r\chi_{1T}(\varphi).$$

Подставив значения χ_{1P}, χ_{1T}, согласно формулам (4.42), получим

$$M_A = -2\pi qr \frac{1}{2\pi}\left[1+(\pi-\alpha)\sin(\pi-\alpha)\right] - \int_0^{2\pi} qr^2 d\varphi \cos(\alpha+\varphi)\frac{1}{2\pi}(1+\varphi\sin\varphi) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} qr^2 d\varphi \sin(\alpha+\varphi)\frac{1}{2\pi}(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi - \varphi)$$

или после вычисления интегралов и несложных преобразований

$$M_A = qr^2\left(\alpha\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - 1\right).$$

Эпюра изгибающего момента, построенная по этому уравнению, изображена на рис. 4.12, *б*.

Перейдем к рассмотрению колец, нагруженных силами, перпендикулярными плоскости этих колец.

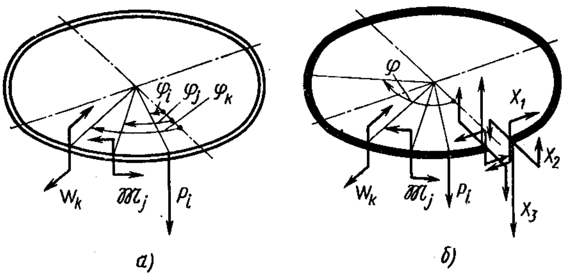


Рис. 4.13

Предположим, что на кольцо действуют несколько осевых сил $P_1, \ldots, P_n$, несколько моментов $\mathfrak{M}_1 \ldots, \mathfrak{M}_m$ в плоскостях, касательных к окружности, и несколько моментов $W_1, \ldots, W_m$ в плоскостях, перпендикулярных окружности. На рис. 4.13, *а* показаны: одна из приложенных к кольцу сил и по одному из моментов первого и второго типа.

Все силовые факторы в плоскости кольца в этом случае равны нулю. Чтобы раскрыть статическую неопределимость, разрежем кольцо по плоскости $\varphi = 0$, приложим неизвестные моменты X_1, X_2 и поперечную силу X_3 (рис. 4. 13, *б*) и приравняем нулю относительные линейные и угловые перемещения концов в месте разреза

$$\delta_1 = 0; \quad \delta_2 = 0; \quad \delta_3 = 0.$$

Эти уравнения развертываются точно так же, как и уравнения для плоского кольца, с той лишь разницей, что интегралы Мора будут содержать не по одному, а по два члена, учитывающих соответственно изгиб и кручение кольца, в результате получаются следующие формулы для определения X_1, X_2, X_3:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \sum_1^n P_i r \varkappa_{1P}(\varphi_i) + \sum_1^m \mathfrak{M}_j \varkappa_{1\mathfrak{M}}(\varphi_j) + \sum_1^l W_k \varkappa_{1W}(\varphi_k);\\
X_2 &= \sum_1^n P_i r \varkappa_{2P}(\varphi_i) + \sum_1^m \mathfrak{M}_j \varkappa_{2\mathfrak{M}}(\varphi_j) + \sum_1^l W_k \varkappa_{2W}(\varphi_k);\\
X_3 &= \sum_1^n (-P_i)\,\varphi_i \frac{1}{2\pi} + \sum_1^m \frac{\mathfrak{M}_j}{2\pi r},
\end{aligned}\right\} \quad (4.43)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa_{1P}(\varphi) = \frac{\varphi \sin\varphi}{2\pi}; \quad \varkappa_{1\mathfrak{M}}(\varphi) = \frac{\varphi\cos\varphi + \sin\varphi}{2\pi};\\
&\varkappa_{1W}(\varphi) = \frac{-\varphi\sin\varphi}{2\pi} + \frac{\cos\varphi}{\left(1 + \dfrac{GJ_{\text{кр}}}{EJ_x}\right)\pi};\\
&\varkappa_{2P}(\varphi) = \frac{-\varphi + \varphi\cos\alpha}{2\pi}; \quad \varkappa_{2\mathfrak{M}}(\varphi) = \frac{-1 - \varphi\sin\varphi + \cos\varphi}{2\pi}.\\
&\varkappa_{2W}(\varphi) = \frac{-\varphi\cos\varphi}{2\pi} - \frac{\sin\varphi}{\left(1 + \dfrac{GJ_{\text{кр}}}{EJ_x}\right)\pi}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.44)$$

Положительные направления сил и моментов указаны на рис. 4.13, *б*.

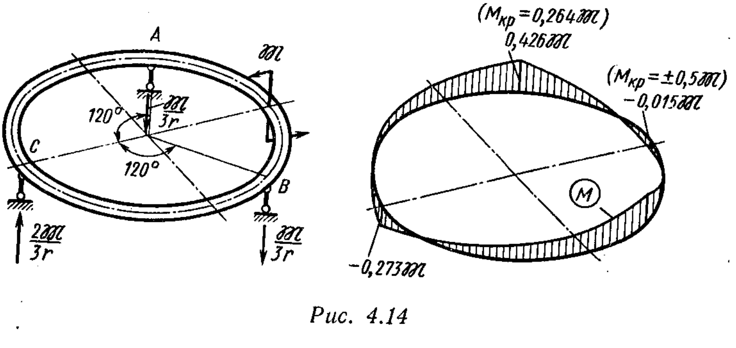


Рис. 4.14

Пример 4.7. Кольцо, опирающееся на три симметрично расположенные опоры, нагружено моментом $\mathfrak{M}$ (рис. 4.14). Поперечное сечение кольца — круглое; $GJ_{\text{кр}} = 0{,}8\ EJ_x$.

По уравнениям статики определим реакции опор:

$$R_A = R_B = \frac{1}{3}\frac{\mathfrak{M}}{r}; \quad R_C = -\frac{2}{3}\frac{\mathfrak{M}}{r}.$$

Применяя уравнения (4.43), найдем величины изгибающего и крутящего моментов в сечении A

$$M=\left(\frac{1}{3}\frac{\mathfrak{M}}{r}\right)r\varkappa_{1P}(0)+\left(\frac{1}{3}\frac{\mathfrak{M}}{r}\right)r\varkappa_{1P}\left(\frac{2}{3}\pi\right)-\left(\frac{2\mathfrak{M}}{3r}\right)r\varkappa_{1P}\left(\frac{4}{3}\pi\right)+\mathfrak{M}\varkappa_{1W}\left(\frac{\pi}{3}\right);$$

$$M_{\text{кр}}=\left(\frac{1}{3}\frac{\mathfrak{M}}{r}\right)r\varkappa_{2P}(0)+\left(\frac{1}{3}\frac{\mathfrak{M}}{r}\right)r\varkappa_{2P}\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\left(\frac{2\mathfrak{M}}{3r}\right)r\varkappa_{2P}\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\mathfrak{M}\varkappa_{2W}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

или после подстановки значений функций, вычисленных по формулам (4.44):

$$M=0{,}426\mathfrak{M};\quad M_{\text{кр}}=0{,}264\mathfrak{M}.$$

Аналогично вычислим моменты и в других сечениях (эпюру M см. рис. 4.14).

Пример 4.8. Кольцо, опирающееся на три несимметрично расположенные опоры, нагружено равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 4.15, *а*). Определить изгибающие моменты.

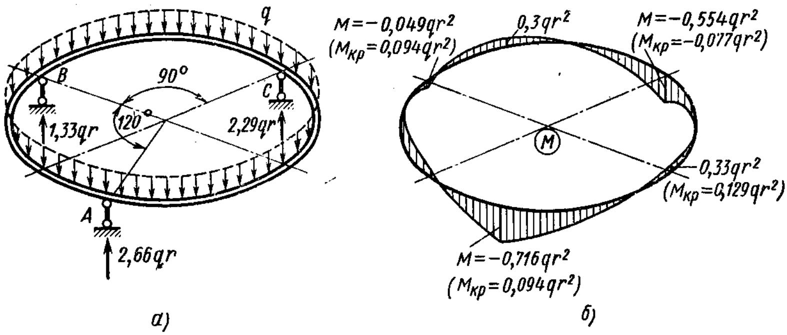


Рис. 4.15

Составив уравнения равновесия кольца, найдем реакции опор:

$$R_1=1{,}33qr;\quad R_2=2{,}29qr;\quad R_3=2{,}66qr.$$

Равномерно распределенную нагрузку представим как бесчисленное множество бесконечно малых сил.

Применяя первое уравнение (4.43), вычислим изгибающий момент в сечении A:

$$M_A=-R_3r\varkappa_{1P}(0°)-R_1r\varkappa(120°)-R_3r\varkappa(210°)+\int_0^{2\pi}qrd\varphi r\varkappa_{1P}(\varphi)=$$

$$=-2{,}66qr^2 0-1{,}33qr^2\frac{120°}{360°}\sin 120°-2{,}29qr^2\frac{210°}{360°}\sin 210°+$$

$$+\int_0^{2\pi}qr^2d\varphi\frac{\varphi\sin\varphi}{2\pi}=-0{,}716\,qr^2.$$

Момент в других сечениях может быть вычислен аналогично. Эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 4.15, *б*. Крутящий момент в данном случае мал и существенного значения не имеет.

Следует отметить особенности расчета колец, у которых главные оси поперечного сечения расположены под углом к плоскости кольца (рис. 4.16). Если кривизна кольца не велика, т. е. если размеры сечения значительно меньше среднего радиуса и если нагрузка приложена в плоскости кольца, то силовые факторы, перпендикулярные плоскости кольца, обращаются в нуль. В результате уравнения перемещений полностью совпадают с уравнениями (4.36) для плоского кольца, и, следовательно, изложенная методика раскрытия статической неопределимости плоских колец полностью остается в силе. Особенность расчета таких колец состоит в том, что для вычисления напряжений в этом случае надо применять формулы теории косого изгиба, так как главные оси поперечного сечения не совпадают с плоскостью действия изгибающего момента.

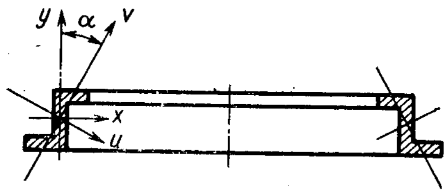


Рис. 4.16

Случай нагружения кольца перпендикулярно его плоскости — более сложный, так как при этом могут возникнуть все шесть силовых факторов. Однако, если нагрузка состоит только из осевых сил и моментов в касательных плоскостях (т. е. если моменты, перпендикулярные окружности кольца, отсутствуют), то силовые факторы, расположенные в плоскости кольца, обращаются в нуль, и тогда для раскрытия статической неопределимости можно применять изложенную методику. Более подробно о расчете таких колец см. [21].

§ 3. Деформации плоских колец

Задача определения перемещений точек колец возникает при расчете колец на колебания, при расчете колец используемых в качестве гибких элементов конструкций (например, в волновых зубчатых передачах), а также при составлении уравнений совместности деформаций колец с сопряженными с ними элементами. Для определения перемещений могут быть использованы общие методы, излагаемые в курсе «Сопротивление материалов». Однако при сложном нагружении кольца, а также в тех случаях, когда требуется знать перемещение в нескольких точках по окружности кольца, целесообразно использовать более эффективные методы расчета, основанные на применении дифференциального уравнения упругой линии.

Выведем дифференциальное уравнение упругой линии плоского кольца.

Выделим из кольца бесконечно малый элемент (рис. 4.17, *а*). В общем случае на элемент могут действовать радиальная нагрузка q_1 и касательная нагрузка q_2. Обозначим силовые факторы, возникающие в поперечном сечении: N — нормальная сила; Q — поперечная сила и M — изгибающий момент. Положительные направления этих силовых факторов указаны на рис. 4.17, *а*.

Напишем уравнения равновесия элемента кольца:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ}{d\varphi} - N = -q_1 r; \\ &\frac{dN}{d\varphi} + Q = -q_2 r; \\ &\frac{dM}{r d\varphi} - Q = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.45)$$

Слагаемые, имеющие более высокий порядок малости, в этих уравнениях отброшены. Исключив из системы уравнений (4.45) N и Q, получим уравнение с одним неизвестным:

$$\frac{d^3 M}{r^2 d\varphi^3} + \frac{dM}{r^2\, d\varphi} + q_2 + \frac{dq_1}{d\varphi} = 0. \qquad (4.46)$$

Рассмотрим теперь перемещения и деформации элемента кольца. При этом будем считать кольцо нерастяжимым, т. е. будем полагать

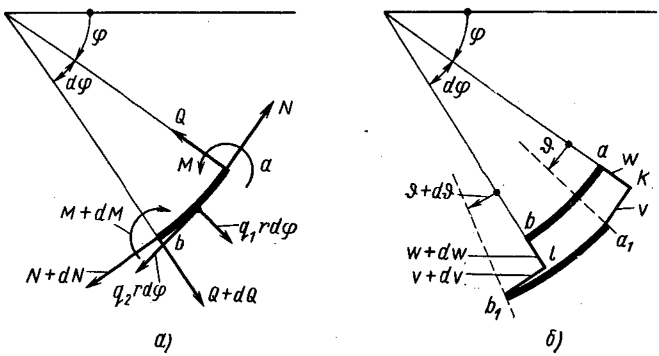


Рис. 4.17

деформацию в окружном направлении равной нулю. На рис. 4.11, *б* изображен элемент кольца до и после деформации. Обозначим радиальное и касательное смещения точки кольца через w и v и угол поворота нормали через ϑ. Перемещения точки b отличаются от перемещений точки a на бесконечно малые приращения dw, dv и $d\vartheta$. Направления перемещений w, v, ϑ, указанные на рис. 4.17, *б*, приняты за положительные. Приравняв нулю сумму проекций звеньев замкнутого многоугольника aka_1b_1lba на направление радиуса и на направление касательной к окружности и положив, ввиду малости перемещений, $\sin\vartheta = \vartheta$, $\cos\vartheta = 1$, а также $\sin d\varphi = d\varphi$, $\cos d\varphi = 1$, получим два уравнения:

$$w - a_1 b_1 \vartheta + (v + dv)\, d\varphi - (w + dw) = 0;$$
$$v + a_1 b_1 - (v + dv) - w\, d\varphi - ab = 0,$$

где

$$a_1 b_1 = ab = r\, d\varphi.$$

После сокращений получим

$$\vartheta = \frac{v}{r} - \frac{1}{r}\frac{dw}{d\varphi}; \qquad (4.47)$$

$$w = -\frac{dv}{d\varphi}. \qquad (4.48)$$

Изменение кривизны элемента ab равно производной от угла поворота ϑ по дуге

$$\varkappa = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{d\vartheta}{r d\varphi} = \frac{dv}{r^2 d\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2} \qquad (4.49)$$

или с учетом равенства (4.48):

$$\varkappa = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w\right). \qquad (4.49а)$$

С другой стороны изменение кривизны связано с изгибающим моментом соотношением упругости

$$\varkappa = \frac{M}{EJ_x}. \qquad (4.50)$$

Приравняв правые части равенств (4.49а) и (4.50), получим дифференциальное уравнение упругой линии кольца

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = -\frac{Mr^2}{EJ_x}. \qquad (4.51)$$

С учетом уравнения (4.46) дифференциальное уравнение упругой линии можно представить также в следующем виде:

$$\frac{EJ_x}{r^4}\left[\frac{d^5w}{d\varphi^5} + 2\frac{d^3w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi}\right] = \frac{dq_1}{d\varphi} + q_2 \qquad (4.52)$$

или

$$\frac{EJ_x}{r^4}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 1\right)^2 w = \frac{dq_1}{d\varphi} + q_2. \qquad (4.52а)$$

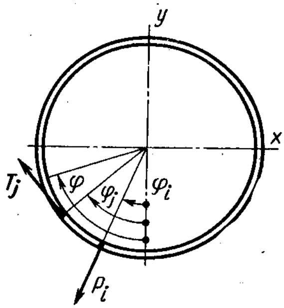


Рис. 4.18

Если зависимость изгибающего момента M от угла φ уже известна, то радиальное перемещение w наиболее просто можно определить интегрированием уравнения (4.51). В некоторых случаях, в частности при составлении уравнений совместности деформаций кольца и сопряженной с ним оболочки, более удобно применять уравнение (4.52). При использовании этого уравнения нагрузки раскладывают в ряд и решение также находят в виде ряда.

Укажем еще один весьма удобный метод определения перемещений [5].

Предположим, что на кольцо действует несколько взаимно уравновешенных радиальных и касательных сил (рис. 4.18). На рисунке для примера показаны одна радиальная и одна касательная силы. Уравнения равновесия кольца:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n P_i \cos\varphi_i - \sum_1^m T_j \sin\varphi_j = 0;\\ &\sum_1^n P_i \sin\varphi_i + \sum_1^m T_j \cos\varphi_j = 0;\\ &\sum_1^m T_j r = 0 \text{ или } \sum_1^m T_j = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

где n и m — число радиальных и касательных сил.

Разложив каждую из заданных сил в ряд Фурье, получим эквивалентную распределенную радиальную нагрузку q_1 и эквивалентную касательную нагрузку q_2:

$$\begin{aligned} q_1 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{2\pi r} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_i}{\pi r}\cos k(\varphi-\varphi_i);\\ q_2 &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_j}{\pi r}\cos k(\varphi-\varphi_j). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Подставим эти ряды в дифференциальное уравнение (4.52):

$$\begin{aligned} \frac{EJ_x}{r^4}\left[\frac{d^5w}{d\varphi^5} + 2\frac{d^3w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{P_i}{\pi r}\right) k \sin k(\varphi-\varphi_i) + \\ + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T_j}{\pi r}\cos k(\varphi-\varphi_i). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Решение уравнения (4.55) можно представить как сумму общего решения однородного уравнения и частных решений, соответствующих всем значениям k от 1 до ∞.

Из условия единственности значения функции w в каждой точке кольца следует, что решения однородного уравнения, которые не удовлетворяют условию периодичности с периодом, кратным 2π, должны быть отброшены. Остается общее решение однородного уравнения вида

$$\mathring{w} = B\cos\varphi + C\sin\varphi. \tag{4.56}$$

Это слагаемое отражает возможность перемещений кольца как жесткого целого в направлении осей x и y.

Рассмотрим частное решение, соответствующее $k = 1$. Правая часть уравнения в этом случае может быть записана в следующем виде:

$$-\sum_{1}^{n}\frac{P_i}{\pi r}\sin(\varphi-\varphi_i)+\sum_{1}^{m}\frac{T_j}{\pi r}\cos(\varphi-\varphi_i)=\frac{\cos\varphi}{\pi r}\left[\sum_{1}^{m}T_j\cos\varphi_j+\right.$$
$$\left.+\sum_{1}^{n}P_i\sin\varphi_i\right]+\frac{\sin\varphi}{\pi r}\left[\sum_{1}^{m}T_j\sin\varphi_j-\sum_{1}^{n}P_i\cos\varphi_i\right].$$

На основании первого и второго уравнений равновесия (4.53) выражения в квадратных скобках равны нулю. Следовательно, при $k = 1$ правая часть уравнения обращается в нуль и соответствующее частное решение уравнения отпадает.

Определим, наконец, частное решение уравнения при произвольном $k \geqslant 2$. Будем искать решение в виде суммы

$$\overline{w}_k=\sum_{i=1}^{m}B_{kj}\sin k(\varphi-\varphi_i)+\sum_{i=1}^{n}C_{ki}\cos k(\varphi-\varphi_i).$$

Подставив эту сумму в левую часть дифференциального уравнения (4.55) и приравняв коэффициенты при одинаковых функциях в правой и левой частях уравнения, найдем коэффициенты ряда

$$B_{kj}=\frac{T_j r^3}{\pi EJ_x k(k^2-1)^2};\qquad C_{ki}=\frac{P_i r^3}{\pi EJ_x(k^2-1)^2}.$$

Тогда

$$\overline{w}_k=\sum_{i=1}^{m}\frac{T_j r^3}{\pi EJ_x}\cdot\frac{\sin k(\varphi-\varphi_j)}{k(k^2-1)^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i r^3}{\pi EJ_x}\cdot\frac{\cos k(\varphi-\varphi_i)}{(k^2-1)^2}.\qquad(4.57)$$

Суммируя $\hat{w}$ и $\overline{w}$, соответствующие всем значениям k от 2 до ∞, получим искомое общее решение уравнения (4.55):

$$w=B\cos\varphi+C\sin\varphi+\sum_{j=1}^{m}\frac{T_j r^3}{\pi EJ_x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_j)}{k(k^2-1)^2}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i r^3}{\pi EJ_x}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k(\varphi-\varphi_i)}{(k^2-1)^2}.\qquad(4.58)$$

Смещения v точек кольца в окружном направлении связаны с радиальными перемещениями w зависимостью (4.48). Согласно этой зависимости

$$v=-\int w\,d\varphi+A.$$

После подстановки под знак интеграла выражения (4.58) и интегрирования получим

$$v = A - B\sin\varphi + C\cos\varphi + \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j r^3}{\pi E J_x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k(\varphi - \varphi_j)}{k^2 (k^2-1)^2} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i r^3}{\pi E J_x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k(\varphi - \varphi_i)}{k(k^2-1)^2}. \tag{4.59}$$

Введем обозначения:

$$S(\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{(k^2-1)^2}; \tag{4.60}$$

$$T(\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k^2(k^2-1)^2}; \tag{4.61}$$

$$U(\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k(k^2-1)^2}. \tag{4.62}$$

Тогда формулы (4.58) и (4.59) можно записать более кратко:

$$w = B\cos\varphi + C\sin\varphi + \sum_{1}^{n} \frac{P_i r^3}{\pi E J_x} S(\varphi - \varphi_i) +$$

$$+ \sum_{1}^{m} \frac{T_j r^3}{\pi E J_x} U(\varphi - \varphi_j); \tag{4.63}$$

$$v = A - B\sin\varphi + C\cos\varphi - \sum_{1}^{n} \frac{P_i r^3}{\pi E J_x} U(\varphi - \varphi_i) +$$

$$+ \sum_{1}^{m} \frac{T_j r^3}{\pi E J_x} T(\varphi - \varphi_j). \tag{4.64}$$

Числовые значения функций S, U, T приведены в табл. 4.3. Таблица составлена для значений угла в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant 180°$, что достаточно, так как функции S и T — симметричные, а функция U — обратно симметричная, т. е.

$$S(\varphi) = S(2\pi - \varphi); \quad T(\varphi) = T(2\pi - \varphi); \quad U(\varphi) = -U(2\pi - \varphi). \tag{4.65}$$

Эти функции связаны между собой простыми дифференциальными соотношениями

$$\frac{dT}{d\varphi} = -U; \quad \frac{dU}{d\varphi} = S. \tag{4.66}$$

Таблица 4.3

φ°	S (φ)	T (φ)	U (φ)	(φ°)	S (φ)	T (φ)	U (φ)
0	0,13497	0,02990	0				
5	0,13177	0,02939	0,01165	95	—0,10232	—0,02669	—0,01408
10	0,12288	0,02788	0,02280	100	—0,09458	—0,02508	—0,02268
15	0,10934	0,02543	0,03300	105	—0,08437	—0,02275	—0,03050
20	0,09214	0,02216	0,04183	110	—0,07202	—0,01978	—0,03734
25	0,07228	0,01818	0,04903	115	—0,05791	—0,01627	—0,04263
30	0,05069	0,01366	0,05440	120	—0,04245	—0,01231	—0,04742
35	0,02823	0,00875	0,05782	125	—0,02607	—0,00803	—0,05043
40	0,00571	0,00363	0,05928	130	—0,00920	—0,00355	—0,05197
45	—0,01614	—0,00154	0,05881	135	0,00769	0,00100	—0,05203
50	—0,03670	—0,00659	0,05650	140	0,02417	0,00549	—0,05062
55	—0,05539	—0,01136	0,05248	145	0,03984	0,00979	—0,04781
60	—0,07176	—0,01571	0,04693	150	0,05429	0,01379	—0,04370
65	—0,08545	—0,01951	0,04005	155	0,06717	0,01738	—0,03839
70	—0,09618	—0,02266	0,03210	160	0,07816	0,02046	—0,03204
75	—0,10377	—0,02509	0,02335	165	0,08700	0,02295	—0,02482
80	—0,10814	—0,02672	0,01406	170	0,09347	0,02478	—0,01693
85	—0,10930	—0,02754	0,00455	175	0,09741	0,02589	—0,00858
90	—0,10730	—0,02752	—0,00492	180	0,09873	0,02627	0

Заметим, что в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant 180°$ функции S, T и U можно представить также следующими выражениями [5]:

$$S(\varphi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{3}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2}\right)\cos\varphi + \frac{\pi-\varphi}{4}\sin\varphi;$$

$$T(\varphi) = -1 + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\varphi}{2} + \frac{\varphi^2}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{23}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2}\right)\cos\varphi + $$
$$+ \frac{3}{4}(\pi - \varphi)\sin\varphi;$$

$$U(\varphi) = \frac{\pi-\varphi}{2}(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{11}{4} - \pi\varphi + \frac{\varphi^2}{2}\right)\sin\varphi.$$

Постоянные A, B, C в формулах (4.63), (4.64) зависят от перемещений кольца как жесткого целого (три степени свободы) и определяются из условия равенства нулю перемещений в точках закрепления. Если же кольцо не закреплено, то A, B, C следует положить равными нулю. В случае статически неопределимого кольца с более чем тремя внешними связями условия равенства нулю перемещений на опорах позволяют составить необходимое и достаточное количество уравнений для определения постоянных A, B, C и неизвестных реакций.

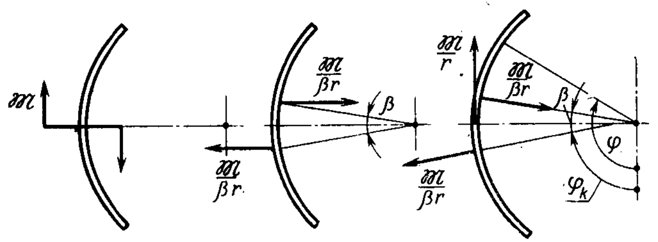
Остановимся на случае нагружения кольца сосредоточенным моментом (рис. 4.19, *а*).

Представим момент $\mathfrak{M}$ в виде пары сил с плечом βr, где β — сколь угодно малый угол (рис. 4.19, *б*), тогда силы будут равны $\frac{\mathfrak{M}}{\beta r}$. Разложив каждую силу на радиальную и касательную составляющие, получим систему сил, изображенную на рис. 4.19, *в*. Эта система при $\beta \to 0$ эквивалентна заданному моменту. Применим формулу (4.63):

$$w_{\mathfrak{M}}(\varphi)=\frac{r^3}{\pi EJ_x}\left[\frac{\mathfrak{M}_k}{\beta r}S(\varphi-\varphi_k)-\frac{\mathfrak{M}_k}{\beta r}S(\varphi-\varphi_k-\beta)\right]+\frac{\mathfrak{M}r^3}{\pi rEJ_x}U(\varphi-\varphi_k),$$

где $w_{\mathfrak{M}}(\varphi)$ — составляющая радиального перемещения за счет момента $\mathfrak{M}_k$;

φ_k — угол, определяющий положение точки приложения момента.



а) *б)* *в)*

Рис. 4.19

При $\beta \to 0$ получим

$$w_{\mathfrak{M}}(\varphi)=\frac{\mathfrak{M}r^2}{\pi EJ_x}\left[\frac{d}{d\varphi}S(\varphi-\varphi_k)+U(\varphi-\varphi_k)\right].$$

Подставив сюда выражения (4.60) и (4.62) для S и U, после несложных преобразований получим

$$w_{\mathfrak{M}}(\varphi)=\frac{\mathfrak{M}r^2}{\pi EJ_x}R(\varphi-\varphi_k), \tag{4.67}$$

где

$$R(\varphi)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{-\sin k\varphi}{k(k^2-1)}, \tag{4.68}$$

или иначе

$$R(\varphi)=-\frac{3}{4}\sin\varphi+\frac{\pi-\varphi}{2}(1-\cos\varphi) \tag{4.69}$$

$$(0\leqslant\varphi\leqslant 180^\circ).$$

Аналогично определим $v_{\mathfrak{M}}(\varphi)$:

$$v_{\mathfrak{M}}(\varphi)=\frac{\mathfrak{M}r^2}{\pi EJ_x}\left(-\frac{d}{d\varphi}U(\varphi-\varphi_k)+T(\varphi-\varphi_k)\right)=\frac{\mathfrak{M}r^2}{\pi EJ_x}V(\varphi-\varphi_k), \tag{4.70}$$

где

$$V(\varphi)=\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{\cos k\varphi}{k^2(k^2-1)}\right) \tag{4.71}$$

или

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\varphi}{2} + \frac{\varphi^2}{4} + \frac{(\pi-\varphi)}{2}\sin\varphi - \frac{5}{4}\cos\varphi \qquad (4.72)$$

$$(0 \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ).$$

Слагаемые вида (4.67), (4.70) добавляют в формулы (4.63), (4.64) в том случае, когда исследуемое кольцо нагружено сосредоточенными моментами.

Пример 4.9. Кольцо нагружено двумя диаметрально противоположными силами P (рис. 4.20, *а*). Найдем перемещения точек кольца с помощью различных методов.

Решение методом интегрирования дифференциального уравнения (4.51). Определим вначале изгибающий момент в произвольном сечении, расположенном под углом φ к вертикали.

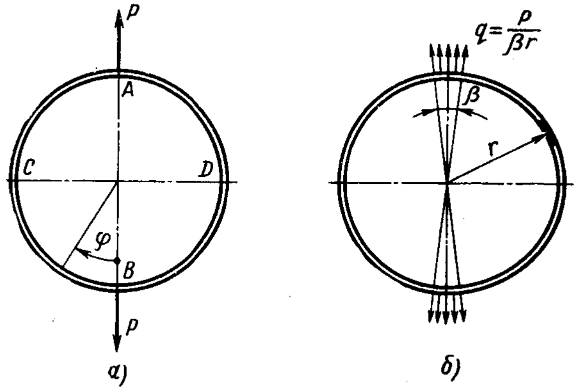


Рис. 4.20

Применим первую формулу (4.41):

$$X_1 = M_\varphi = Pr\chi_{1P}(\pi-\varphi) + Pr\chi_{1P}(2\pi-\varphi).$$

После подстановки функции χ_{1P}, согласно зависимости (4.42), получим

$$M_\varphi = \frac{Pr}{2\pi}\left[1 + (\pi-\varphi)\sin(\pi-\varphi)\right] + \frac{Pr}{2\pi}\left[1 + (2\pi-\varphi)\sin(2\pi-\varphi)\right] =$$

$$= Pr\left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\varphi\right].$$

Это выражение изгибающего момента внесем в дифференциальное уравнение (4.51):

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = \frac{Pr^3}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{\pi}\right).$$

Общее решение полученного уравнения имеет вид

$$w = A\sin\varphi + B\cos\varphi + \frac{Pr^3}{EJ_x}\left[-\frac{1}{4}\varphi\cos\varphi - \frac{1}{\pi}\right].$$

Это выражение справедливо в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Постоянные A и B должны быть определены на основании граничных условий. В данном случае по условиям симметрии

$$w_{0^\circ} = w_{180^\circ};$$

$$v_{0^\circ} = v_{180^\circ} = 0; \quad \vartheta_{0^\circ} = \vartheta_{180^\circ} = 0.$$

Согласно первому условию,

$$B=\frac{\pi P r^3}{8EJ_x}.$$

Согласно второму условию, на основании зависимости (4.47)

$$\left.\frac{dw}{d\varphi}\right|_{\varphi=0^\circ}=0;$$

$$\left[A\cos\varphi-B\sin\varphi+\frac{Pr^3}{EJ_x}\left(-\frac{1}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\varphi\sin\varphi\right)\right]_{\varphi=0^\circ}=0,$$

откуда

$$A=\frac{Pr^3}{4EJ_x}.$$

Окончательно

$$w=\frac{Pr^3}{EJ_x}\left(\frac{1}{4}\sin\varphi+\frac{\pi}{8}\cos\varphi-\frac{1}{4}\varphi\cos\varphi-\frac{1}{\pi}\right).$$

При $\varphi=0^\circ$ и $\varphi=180^\circ$

$$w_A=w_B=\frac{Pr^3}{EJ_x}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{\pi}\right).$$

Следовательно, изменение расстояния между точками A и B составляет

$$\delta_{AB}=w_A+w_B=\frac{Pr^3}{EJ_x}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right)=0{,}1488\frac{Pr^3}{EJ_x}.$$

При $\varphi=90^\circ$

$$w_C=\frac{Pr^3}{EJ_x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right).$$

Изменение расстояния между точками C и D

$$\delta_{CD}=2w_C=\frac{Pr^3}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\right)=-0{,}1366\frac{Pr^3}{EJ_x}.$$

Решение в рядах. Заменим заданные силы P распределенной нагрузкой q, приложенной по двум малым дугам βr (рис. 4.20, *б*):

$$q=\frac{P}{\beta r}\quad\text{при}\quad -\frac{\beta}{2}<\varphi<\frac{\beta}{2}\quad\text{и}\quad\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)<\varphi<\left(\pi+\frac{\beta}{2}\right);$$

$$q=0\quad\text{при}\quad\frac{\beta}{2}<\varphi<\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)\quad\text{и}\quad\left(\pi+\frac{\beta}{2}\right)<\varphi<\left(2\pi-\frac{\beta}{2}\right),$$

где β — произвольный, сколь угодно малый угол.

Эту нагрузку разложим в ряд Фурье:

$$q=q_0+\sum_{k=2,4,6\ldots}^{\infty}q_k\cos k\varphi.$$

В данном случае следует взять ряд косинусов с четными значениями k, так как нагрузка симметрична относительно диаметров AB и CD.

Коэффициенты ряда вычисляют по общеизвестным методам. В данном случае

$$q_0 = \frac{P}{\pi r}; \quad q_k = \frac{2P}{\pi r}.$$

Следовательно,

$$q = \frac{P}{\pi r}\left[1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + \ldots\right] =$$

$$= \frac{P}{\pi r}\left(1 + \sum_{k=2,\,4,\,6\,\ldots}^{\infty} 2\cos k\varphi\right).$$

Первый член этого ряда соответствует равномерно распределенной радиальной нагрузке. Эта нагрузка не вызывает изгиба кольца. Перемещения, соответствующие этой нагрузке, можно принять равными нулю, так как деформации растяжения незначительны.

Для определения перемещений, соответствующих изгибной деформации кольца, подставим ряд в дифференциальное уравнение (4.52):

$$\frac{EJ_x}{r^4}\left[\frac{d^5w}{d\varphi^5} + 2\,\frac{d^3w}{d\varphi^3} + \frac{dw}{d\varphi}\right] = \frac{P}{\pi r}\sum_{k=2,\,4,\,6\,\ldots}^{\infty}(-\,2k\sin k\varphi)$$

(в данном случае $q_1 = q$; $q_2 = 0$).

Решение полученного уравнения ищем в виде следующего ряда:

$$w = \sum_{k=2,\,4,\,6\,\ldots}^{\infty} C_k \cos k\varphi.$$

Вычислим производные

$$\frac{dw}{d\varphi} = \sum_{k=2,\,4,\,6\,\ldots}^{\infty}(-\,C_k k \sin k\varphi); \quad \frac{d^3w}{d\varphi^3} = \sum_{k=2,\,4,\,6\,\ldots}^{\infty} C_k k^3 \sin k\varphi;$$

$$\frac{d^5w}{d\varphi^5} = \sum_{k=2,\,4,\,6\,\ldots}^{\infty}(-\,C_k k^5 \sin k\varphi)$$

и подставим их в дифференциальное уравнение

$$\frac{EJ_x}{r^4}\sum_{k=2,\,4,\,6\,\ldots}^{\infty} C_k(-\,k^5 + 2k^3 - k)\sin k\varphi = \frac{P}{\pi r}\sum_{k=2,\,4,\,6\,\ldots}^{\infty}(-\,2k\sin k\varphi).$$

Приравняв члены с одинаковым индексом k в правой и левой части равенства, найдем

$$C_k = \frac{Pr^3 2}{EJ_x\pi\,(k^2 - 1)^2}.$$

Таким образом,

$$w = \sum_{k=2,\,4,\,6\,\ldots}^{\infty}\frac{Pr^3 2\cos k\varphi}{\pi EJ_x(k^2 - 1)^2},$$

при $\varphi = 0°$ и $\varphi = 180°$

$$w_{0°} = w_{180°} = \frac{Pr^3}{\pi EJ_x}\left[\frac{2}{9} + \frac{2}{225} + \frac{2}{1225} + \ldots\right] = 0{,}0742\frac{Pr^3}{EJ_x}.$$

Изменение расстояния между точками A и B составляет

$$\delta_{AB}=2w_0=0,1484\ \frac{Pr^3}{EJ_x}.$$

Для получения результата с точностью до трех значащих цифр в данном случае достаточно взять три члена ряда:
при $\varphi=90°$

$$w_{90°}=\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}\left[-\frac{2}{9}+\frac{2}{225}-\frac{2}{1225}+\ \ldots\right]=-0,0684\frac{Pr^3}{EJ_x};$$

$$\delta_{CD}=2w_{90°}=-0,137\ \frac{Pr^3}{EJ_x}.$$

Решение по способу Бицено — Граммеля. Искомое радиальное перемещение в этом случае определяют по формуле (4.63).

Так как кольцо не закреплено, то постоянные B и C следует приравнять нулю. Последнее слагаемое ввиду отсутствия касательных сил также следует отбросить; в результате получим

$$w=\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}\ S(\varphi)+\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}S(\varphi-180°).$$

Функция S обладает свойством четности, поэтому при вычислении перемещения какой-либо точки необходимо брать те значения функции, которые соответствуют меньшей дуге между точкой приложения силы и рассматриваемой точкой.

При $\varphi=0°$ и $\varphi=180°$

$$w_{0°}=w_{180°}=\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}[S(0°)+S(180°)].$$

По табл. 4.3 находим

$$S(0°)=0,13497;\qquad S(180°)=0,09873.$$

Следовательно,

$$w_{0°}=w_{180°}=\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}(0,13497+0,09873)=0,0744\frac{Pr^3}{EJ_x};$$

$$\delta_{AB}=w_{0°}+w_{180°}=0,1488\frac{Pr^3}{EJ_x}.$$

Аналогично при $\varphi=90°$

$$w_{90°}=\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}\ 2S(90°)=\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}2(-0,1073)=-\ 0,0684\ \frac{Pr^3}{EJ_x};$$

$$\delta_{CD}=2w_{90°}=0,1368\ \frac{Pr^3}{EJ_x}.$$

Пример 4.10. Определить перемещение точки A кольца, изображенного на рис. 4.21. Используя уравнения равновесия, вычислим реакции опор $R_1=R_2=\dfrac{P}{\sqrt{3}}$. Выберем начало отсчета угла φ в нижней точке. Согласно зависимости (4.63) запишем выражение радиального перемещения

$$w=C\sin\varphi+B\cos\varphi-\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}\left[S(\varphi-180°)+\frac{1}{\sqrt{3}}S(\varphi-30°)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ S(\varphi-330°)\right],$$

силы P, R_1, R_2 в данном случае отрицательные. На основании симметрии нагрузки относительно вертикали постоянную C следует приравнять нулю. Для определения постоянной B используем условие: $w = 0$ при $\varphi = 30°$, из которого следует

$$B \cos 30° - \frac{Pr^3}{\pi E J_x}\left[S\,(150°) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,S\,(0°) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,S\,(60°)\right] = 0.$$

После подстановки числовых значений найдем

$$B = 0{,}105\,\frac{Pr^3}{\pi E J_x}.$$

Искомое перемещение в точке A

$$w_A = 0{,}105\,\frac{Pr^3}{\pi E J_x}\cos 180° - \frac{Pr^3}{\pi E J_x}\left[S\,(0°) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,S\,(150°) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,S\,(150°)\right] =$$

$$= 0{,}303\,\frac{Pr^3}{\pi E J_x}.$$

Пример 4.11. Определить перемещения точек кольца, нагруженного касательными силами и моментом (рис. 4.22).

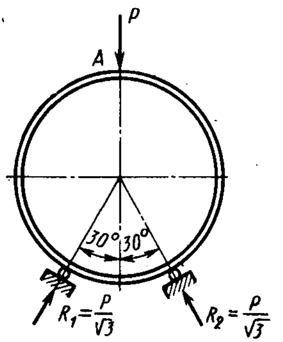


Рис. 4.21

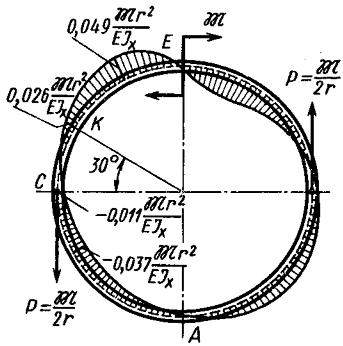


Рис. 4.22

Воспользуемся методом Бицено—Граммеля. Дополнив формулу (4.63) слагаемым вида (4.67), вычислим радиальное перемещение в точках E, C, K:

$$w_E = -\frac{M}{2r}\,\frac{r^2}{\pi E J_x}\left[-U\,(90°)\right] - \frac{M}{2r}\cdot\frac{r^2}{\pi E J_x}\,U\,(90°) + \frac{Mr^2}{\pi E J_x}\,R\,(0°) = 0;$$

$$w_C = -\frac{M}{2r}\,\frac{r^2}{\pi E J_x}\,U\,(0°) - \frac{M}{2r}\,\frac{r^2}{\pi E J_x}\,U\,(180°) + \frac{Mr^2}{\pi E J_x}\left[-R\,(90°)\right] = -\,0{,}011\,\frac{Mr^2}{EJ_x};$$

$$w_K = -\frac{M}{2r}\,\frac{r^2}{\pi E J_x}\,U\,(30°) - \frac{M}{2r}\,\frac{r^2}{\pi E J_x}\left[-\,U\,(150°)\right] + \frac{Mr^2}{\pi E J_x}\left[-\,R\,(60°)\right] = 0{,}26\,\frac{Mr^2}{EJ_x}.$$

Аналогично можно вычислить перемещения и в других точках. Эпюру перемещений см. на рис. 4.22.

Угловую координату следует всегда отсчитывать по кратчайшему расстоянию между рассматриваемой точкой и нагрузкой. При этом следует учитывать, что функции U и R обратно симметричные. Если данная нагрузка приложена за рассматриваемой точкой (по отношению к выбранному направлению отсчета угла φ), то функции U и R берутся со знаком плюс; если же нагрузка приложена до рассматриваемой точки, то знаки U и R изменяются на обратные.

Пример 4.12. Кольцо, опирающееся на три опоры, нагружено силой P (рис. 4.23).

В данном случае можно написать только два уравнения равновесия:

$$R_1 = R_3;$$

$$2R_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + R_2 = P.$$

Дополнительные уравнения получим из условия равенства нулю радиального перемещения на опорах.

Начало отсчета угла φ выберем в точке A. Применим формулу (4.63). На основании симметрии нагружения постоянную C следует приравнять нулю. Тогда

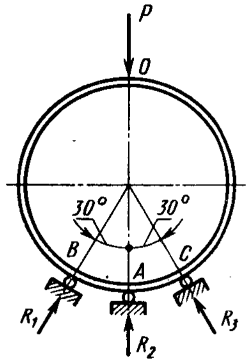


Рис. 4.23

$$w_A = B\cos 0° - \frac{Pr^3}{\pi EJ_x} S(180°) - \frac{R_2 r^3}{\pi EJ_x} S(0°) - 2\frac{R_1 r^3}{\pi EJ_x} S(30°) = 0;$$

$$w_B = B\cos 30° - \frac{Pr^3}{\pi EJ_x} S(150°) - \frac{R_1 r^3}{\pi EJ_x} S(0°) - \frac{R_2 r^3}{\pi EJ_x} S(30°) - \frac{R_3 r^3}{\pi EJ_x} S(60°) = 0.$$

Подставив взятые по табл. 4.3 значения функции S и решив систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, найдем

$$R_1 = R_3 = 0{,}386P; \quad R_2 = 0{,}332P; \quad B = 0{,}1826\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}.$$

Перемещение точки приложения силы P

$$w_0 = B\cos 180° - \frac{R_2 r^3}{\pi EJ_x} S(180°) - 2\frac{R_1 r^3}{\pi EJ_x} S(150°) - \frac{Pr^3}{\pi EJ_x} S(0°) = -0{,}392\frac{Pr^3}{\pi EJ_x}.$$

Пример 4.13. Рассмотрим более сложную задачу о деформации плоского кольца.

На рис. 4.24, *а* изображено кольцо проушины, опирающееся на жесткий цилиндрический палец и нагруженное силой P. Обозначим r_0 — радиус пальца; r_1 и r — внутренней и средний радиусы кольца.

Особенность данной задачи состоит в том, что контакт между кольцом и пальцем вначале возникает только в одной точке, затем с увеличением нагрузки зона контакта расширяется и кольцо постепенно прилегает к пальцу (рис. 4.24, *б*).

Вначале, когда кольцо находится под действием двух сосредоточенных сил P, изгибающий момент и кривизна в точке контакта могут быть легко определены методами, рассмотренными в примере 4.9:

$$M_A = \frac{Pr}{\pi}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{Pr}{\pi EJ_x}.$$

В тот момент, когда кольцо начнет прилегать к пальцу (палец считается абсолютно жестким), кривизна его средней линии и величина силы P составляют:

$$\frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{r_0 + \frac{h}{2}}; \quad P^* = \frac{(r - \rho^*)\pi EJ_x}{r^2 \rho^*}.$$

На второй стадии нагружения возникают два участка (рис. 4.24, *б*). На участке AB кольцо плотно прилегает к пальцу; на остальном участке имеется зазор.

Примем следующие допущения: кольцо — нерастяжимое и тонкое; палец — абсолютно жесткий; силы трения пренебрежимо малы.

Рассмотрим отдельно палец и каждый из участков кольца (рис. 4.24, *в*). Вначале расмотрим участок AB. Поскольку на этом участке кривизна постоянна, то изгибающий момент также постоянный:

$$M^* = EJ_x\left[\frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{r}\right] = \frac{EJ_x(r-\rho^*)}{r\rho^*} = \text{const}.$$

Угол наклона нормали на границе между участками до деформации обозначим через α. После деформации угол α изменится на величину ϑ_B, которую можно определить по условию нерастяжимости кольца:

$$\alpha r = (\alpha + \vartheta_B)\,\rho^*,$$

откуда

$$\vartheta_B = \alpha\frac{r-\rho^*}{\rho^*}.$$

Так как $M = M^* = \text{const}$ и $q_2 = 0$ (силы трения не учитываются), то на основании уравнений равновесия (4.45):

$$Q = 0; \quad N = \text{const}; \quad q = \frac{N}{\rho^*} \cong \frac{N}{r}.$$

Определим еще перемещения w_B и v_B точки B.

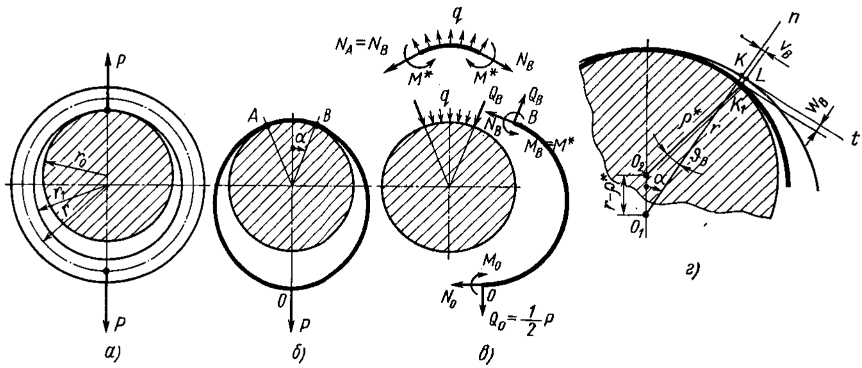


Рис. 4.24

Приравняв нулю сумму проекций звеньев замкнутого многоугольника $O_1O_2K_1LKO_1$ (рис. 4.24, *г*), на нормаль n и на касательную t найдем

$$w_B = -\left[r - (r-\rho^*)\cos a - \rho^*\cos\vartheta_B\right] = -(r-\rho^*)(1-\cos\alpha);$$

$$v_B = \rho^*\sin\vartheta_B - (r-\rho^*)\sin\alpha = (r-\rho^*)(\alpha - \sin\alpha),$$

где $\cos\vartheta_B \cong 1$; $\sin\vartheta_B \cong \vartheta_B = \alpha\,\dfrac{r-\rho^*}{\rho^*}$.

Перейдем к рассмотрению участка BO (см. рис. 4.24, *в*). Силовые факторы в точке B обозначим M_B, N_B и Q_B.

Из условий сопряжения участков следует, что $M_B = M^*$.

Выберем начало отсчета угла φ на границе между участками. Изгибающий момент в текущем сечении

$$M = M^* + N_B r\,(1-\cos\varphi) - Q_B r\sin\varphi.$$

Подставим M в дифференциальное уравнение (4.51):

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2}+w=-\frac{r^2}{EJ_x}\left[M^*+N_Br(1-\cos\varphi)-Q_Br\sin\varphi\right].$$

Общий интеграл полученного уравнения имеет вид

$$w=A\sin\varphi+B\cos\varphi-\frac{(M^*+N_Br)\,r^2}{EJ_x}+\frac{N_Br^3}{2EJ_x}\varphi\sin\varphi-\frac{Q_Br^3}{2EJ_x}\varphi\cos\varphi.$$

На основании зависимостей (4.47) и (4.48) найдем окружное смещение v и угол поворота нормали ϑ:

$$v=-\int w d\varphi=C+A\cos\varphi-B\sin\varphi+\frac{(M^*+N_Br)\,r^2}{EJ_x}\varphi-\frac{N_Br^3}{2EJ_x}(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)+$$

$$+\frac{Q_Br^3}{2EJ_x}(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi);$$

$$\vartheta=\frac{v}{r}-\frac{dw}{rd\varphi}=\frac{C}{r}+\frac{(M^*+N_Br)\,r}{EJ_x}\varphi-\frac{N_Br^2}{EJ_x}\sin\varphi+\frac{Q_Br^2}{EJ_x}\cos\varphi.$$

В этих уравнениях содержится пять неизвестных величин A, B, C, N_B, Q_B; для их определения необходимо использовать следующие пять граничных условий:

$$\varphi=0;\quad w=w_B;\quad \varphi=0;\quad v=v_B;\quad \varphi=0,\quad \vartheta=\vartheta_B;$$

$$\varphi=\pi-\alpha;\quad v=0;\quad \varphi=\pi-\alpha;\quad \vartheta=0.$$

Согласно первым трем условиям, с учетом полученных значений ϑ_B, w_B, v_B найдем

$$C=\alpha\frac{(r-\rho^*)\,r}{\rho^*}-\frac{Q_Br^3}{EJ_x};$$

$$A=-\frac{(r-\rho^*)^2\,\alpha}{\rho^*}-(r-\rho^*)\sin\alpha+\frac{Q_Br^3}{2EJ_x};$$

$$B=\frac{(M^*+N_Br)\,r^2}{EJ_x}-(r-\rho^*)(1-\cos\alpha).$$

Подставив A, B, C в выражения v и ϑ и используя четвертое и пятое граничные условия, определим N_B и Q_B:

$$N_B=\frac{EJ_x[(r-\rho^*)\,\pi r\,(\pi-\alpha)\sin\alpha+2\,(r-\rho^*)^2(1+\cos\alpha)(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)]}{r^3\rho^*\,[(\pi-\alpha+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)-(\pi-\alpha)^2\sin\alpha]};$$

$$Q_B=\frac{EJ_x[(r-\rho^*)\,\pi r\,(\sin\alpha+(\pi-\alpha)\cos\alpha)+2(r-\rho^*)^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)(\pi-\alpha-\sin\alpha)]}{r^3\rho^*\,[(\pi-\alpha+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)-(\pi-\alpha)^2\sin\alpha]}.$$

Выведенные зависимости дают решение задачи в параметрической форме. Задавшись значениями параметра α, можно вычислить N_B и Q_B. Для определения силы P и изгибающего момента M_O в точке O составим уравнения равновесия участка BO:

$$P=2Q_B\cos\alpha+2N_B\sin\alpha;$$

$$M_O=M^*+N_Br\,(1+\cos\alpha)-Q_Br\sin\alpha.$$

Перемещения можно легко вычислить, используя выражения функций w и v. Приведем результаты вычислений при следующих числовых данных: $r=2{,}5$ см; $b=2$ см; $h=0{,}5$ см; $r=2{,}25$ см; $r_0=2{,}23$ см, $\rho^*=r_0+\frac{h}{2}=2{,}48$ см;

$$r-\rho^*=0{,}002 \text{ см};\quad J_x=\frac{bh^3}{12}=0{,}02085 \text{ см}^4;\quad E=2\cdot10^7 \text{ Н/см}^2;$$

$$EJ_x=4{,}17\cdot10^5\,Н\cdot\text{см}^2;\quad M^*=EJ_x\frac{r-\rho^*}{r\rho^*}=1350 \text{ Н}\cdot\text{см}.$$

При $\alpha = 0°$

$$P^* = \frac{(r-\rho^*)\pi E J_x}{r^2 \rho^*} = 1690\ H; \quad N_B = 0; \quad Q_B = \frac{P^*}{2}.$$

При $\alpha = 5°$

$$N_B = 82\ \text{Н}; \quad Q_B = 965\ \text{Н}; \quad P = 1940\ \text{Н}; \quad M_O = 1550\ \text{Н} \cdot \text{см}.$$

При $\alpha = 10°$

$$N_B = 186\ \text{Н}; \quad Q_B = 1110\ \text{Н}; \quad P = 2240\ \text{Н}; \quad M_O = 1790\ \text{Н} \cdot \text{см}.$$

Следует обратить внимание на то, что силы взаимодействия между кольцом и пальцем в основном возникают по краям зоны контакта AB, в средней же точке давление сравнительно невелико. Отсюда следует, что обычно принимаемый косинусоидальный закон распределения давления между кольцом и пальцем весьма далек от действительности.

§ 4. Деформации колец, нагруженных перпендикулярно их плоскости

В общем случае на кольцо, нагруженное перпендикулярно его плоскости, могут действовать сосредоточенные силы P_i, радиальные и касательные моменты $W_k, \mathfrak{M}_j$, распределенная осевая нагрузка q и распределенный радиальный момент m (рис. 4.25). В поперечном сечении кольца возникают три силовых фактора: Q — поперечная сила, M — изгибающий момент, $M_{\text{кр}}$ — крутящий момент. Положительные направления этих силовых факторов показаны на рис. 4.26, *а*.

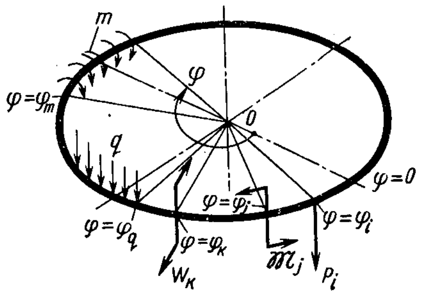


Рис. 4.25

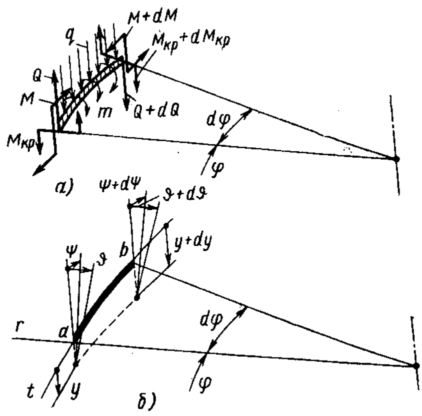


Рис. 4.26

Составим уравнения равновесия бесконечно малого элемента кольца (рис. 4.26, *а*). Взяв сумму моментов сил относительно осей n и t и сумму проекций сил на ось кольца, получим

$$\frac{dM}{d\varphi} + M_{\text{кр}} - Qr = 0; \tag{4.73}$$

$$\frac{dM_{\text{кр}}}{d\varphi} - M + mr = 0; \tag{4.74}$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} + qr = 0. \tag{4.75}$$

Система уравнений (4.73)—(4.75) может быть сведена к одному уравнению с одним неизвестным

$$\frac{d^2M}{d\varphi^2}+M=-qr^2+mr. \qquad (4.76)$$

При деформации кольца его поперечные сечения получают линейные и угловые перемещения: ψ — угол поворота нормали в окружном направлении; ϑ — угол поворота нормали в радиальном направлении; y — прогиб. Положительные направления ψ, ϑ и y указаны на рис. 4.26, *б*. С возрастанием полярного угла на $d\varphi$ углы ψ и ϑ получают приращения $d\psi$ и $d\vartheta$. Установим зависимость между $d\psi$ и $d\vartheta$ и моментами M и $M_{кр}$. Прежде всего заметим, что углы получают приращения не только за счет деформации элемента кольца, но также из-за его поворота как жесткого целого. Действительно, если элемент кольца ab (рис. 4.26, *б*) повернется относительно оси t на угол ϑ, то вертикаль в точке b также наклонится на угол ϑ. Однако плоскость угла поворота нормали в точке b не будет перпендикулярна окружности кольца; поэтому угол ϑ можно разбить на два:

$$\vartheta\cos(d\varphi)\cong\vartheta \quad \text{и} \quad \vartheta\sin(d\varphi)\cong\vartheta d\varphi.$$

Последняя величина представляет собой приращение угла ψ за счет поворота элемента кольца как жесткого целого на угол ϑ:

$$d\psi^*=\vartheta d\varphi.$$

Чтобы получить полное приращение угла ψ, к углу $d\psi^*$ следует добавить приращение угла ψ за счет изгиба элемента кольца

$$d\psi_и=-\frac{M}{EJ_x}rd\varphi.$$

Следовательно,

$$d\psi=d\psi^*+d\psi_и=-\frac{Mrd\varphi}{EJ_x}+\vartheta d\varphi. \qquad (4.77)$$

Аналогично можно определить приращение угла ϑ. Оно складывается из угла закручивания элемента кольца под действием крутящего момента

$$d\vartheta_{кр}=\frac{M_{кр}rd\varphi}{GJ_{кр}}$$

и приращения $d\vartheta^*=-\psi d\varphi$, возникающего при повороте элемента кольца как жесткого целого на угол ψ:

$$d\vartheta=d\vartheta^*+d\vartheta_{кр}=\frac{M_{кр}rd\varphi}{GJ_{кр}}-\psi d\varphi. \qquad (4.78)$$

Угол поворота ψ связан с вертикальным перемещением y следующей зависимостью:

$$\psi=\frac{dy}{rd\varphi}. \qquad (4.79)$$

Исключив из уравнений (4.77)—(4.79) ψ и ϑ, получим дифференциальное уравнение упругой линии кольца при его изгибе из плоскости

$$\frac{d^3y}{d\varphi^3}+\frac{dy}{d\varphi}=\frac{M_{кр}r^2}{GJ_{кр}}-\frac{dMr^2}{d\varphi EJ_x}. \tag{4.80}$$

Если функции M и $M_{кр}$ известны, то, интегрируя уравнение (4.80), можно найти функцию y. По функции y на основании равенств (4.77) и (4.80) определим углы поворота сечения

$$\psi=\frac{dy}{rd\varphi};\quad \vartheta=\frac{Mr}{EJ_x}+\frac{d^2y}{rd\varphi^2}.$$

В некоторых случаях, однако, удобнее использовать дифференциальные уравнения более высокого порядка, в правые части которых входят интенсивности q и m распределенных нагрузок.

Эти уравнения могут быть получены из равенств (4.73)—(4.76) и (4.80) в результате исключения M и $M_{кр}$:

$$\frac{d^6y}{d\varphi^6}+2\frac{d^4y}{d\varphi^4}+\frac{d^2y}{d\varphi^2}=r^4\left[\frac{1}{EJ_x}\frac{d^2q}{d\varphi^2}-\frac{1}{GJ_{кр}}q\right]-r^3\frac{d^2m}{d\varphi^2}\left[\frac{1}{EJ_x}+\frac{1}{GJ_{кр}}\right]; \tag{4.81}$$

$$\frac{d^4\vartheta}{d\varphi^4}+2\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}+\vartheta=-qr^3\left(\frac{1}{EJ_x}+\frac{1}{GJ_{кр}}\right)+\frac{mr^2}{EJ_x}-\frac{d^2m}{d\varphi^2}\frac{r^2}{GJ_{кр}}. \tag{4.82}$$

Уравнения (4.81) и (4.82) обычно решают в рядах.

Применим уравнения (4.81) и (4.82) для определения перемещений сечений кольца, нагруженного произвольно расположенными силами, моментами и распределенными нагрузками (рис. 4.25).

Представив момент $\mathfrak{M}_j$ в виде двух осевых сил $\frac{\mathfrak{M}_j}{\beta r}$, приложенных на малом расстоянии βr одна от другой, и разложив каждую из нагрузок в ряд Фурье, получим некоторые эквивалентные распределенную нагрузку q и распределенный момент m, выраженные в виде рядов. Если эти ряды подставить в правую часть дифференциальных уравнений (4.81) и (4.82) и принять во внимание уравнения равновесия кольца, то решение уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}y={}&A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+\sum\frac{P_ir^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(\varphi-\varphi_i)+\frac{1}{GJ_{кр}}T(\varphi-\varphi_i)\right]-\\&-\sum\frac{W_kr^2}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}+\frac{1}{GJ_{кр}}\right]S(\varphi-\varphi_k)+\sum\frac{\mathfrak{M}_jr^2}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}P(\varphi-\varphi_j)+\right.\\&\left.+\frac{1}{GJ_{кр}}U(\varphi-\varphi_j)\right]+\sum\frac{qr^4}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}U(\varphi-\varphi_q)+\frac{1}{GJ_{кр}}Z(\varphi-\varphi_q)\right]-\\&-\sum\frac{mr^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}+\frac{1}{GJ_{кр}}\right]U(\varphi-\varphi_m);\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}\vartheta={}&-\frac{B}{r}\cos\varphi-\frac{C}{r}\sin\varphi+\left[\sum W_k+\sum\int\limits_{\varphi_{m_1}}^{\varphi_{m_2}}mrd\varphi\right]\frac{r}{2\pi EJ_x}-\sum\frac{P_ir^2}{\pi}\times\\&\times\left[\frac{1}{EJ_x}+\frac{1}{GJ_{кр}}\right]S(\varphi-\varphi_i)+\sum W_k\frac{r}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(\varphi-\varphi_k)+\frac{1}{GJ_{кр}}Y(\varphi-\varphi_k)\right]-\\&-\sum\mathfrak{M}_j\frac{r}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}+\frac{1}{GJ_{кр}}\right]P(\varphi-\varphi_j)-\sum\frac{qr^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}+\frac{1}{GJ_{кр}}\right]U(\varphi-\varphi_q)+\\&+\sum\frac{mr^2}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}U(\varphi-\varphi_m)+\frac{1}{GJ_{кр}}P(\varphi-\varphi_m)\right],\end{aligned} \tag{4.84}$$

где φ — угловая координата рассматриваемой точки;

φ_i, φ_j, φ_k — углы, соответствующие точкам приложения нагрузок P_i, $\mathfrak{M}_j$, W_k;

φ_q и φ_m — углы, определяющие положение начала распределенной нагрузки или распределенного момента. Если распределенная нагрузка приложена на участке, то ее надо продолжить до точки с координатой $\varphi = 2\pi$ и добавленную часть компенсировать нагрузкой обратного направления, т. е. вместо одной нагрузки рассматривать две нагрузки, продолжающиеся до точки с координатой $\varphi = 2\pi$;

$S(\varphi)$, $T(\varphi)$, $U(\varphi)$ — функции, такие же, как и для плоских колец [см. формулы (4.60), (4.61), (4.62)]. Значения функций S, T, U приведены в табл. 4.3;

$P(\varphi)$, $Z(\varphi)$, $Y(\varphi)$ — функции, определяемые следующими формулами:

$$P(\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \sin k\varphi}{(k^2-1)^2}; \quad Z(\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k^3 (k^2-1)^2};$$

$$Y(\varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2 \cos k\varphi}{(k^2-1)^2}. \tag{4.85}$$

Функции P и Y в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$ могут быть также представлены в форме

$$\left.\begin{aligned} P(\varphi) &= \left[\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{16} - \frac{\pi\varphi}{4} + \frac{\varphi^2}{8}\right] \sin\varphi; \\ Y(\varphi) &= \left[\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{16} - \frac{\pi\varphi}{4} + \frac{\varphi^2}{8}\right] \cos\varphi - \frac{\pi - \varphi}{4} \sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{4.86}$$

Значения функций P, Z, Y приведены в табл. 4.4. Слагаемые, содержащие постоянные A, B, C, соответствуют решению однородного уравнения. Эти слагаемые учитывают возможность перемещений кольца как жесткого целого. Если кольцо не закреплено, то постоянные A, B, C следует приравнять нулю.

Для кольца, установленного на опорах, постоянные A, B, C определяют по условиям равенства нулю прогиба на опорах.

В качестве аргумента функций S, T, U, P, Z, Y в формулах (4.83), (4.84) всегда следует принимать наименьший угол между рассматриваемой точкой и точкой приложения нагрузки. Для четных функций S, T, Y направление угла не имеет значения. Для нечетных функций U, P, Z берется знак плюс, если $\varphi > \varphi_{i,j,k}$, и знак минус, если $\varphi < \varphi_{i,j,k}$ (см. рис. 4.25).

Таблица 4.4

φ°	P(φ)	Y(φ)	Z(φ)	φ°	P(φ)	Y(φ)	Z(φ)
0	0	0,88497	0	95	—0,07335	—0,36348	—0,00294
5	0,07127	0,74769	0,00259	100	—0,10344	—0,32552	—0,00525
10	0,13049	0,61150	0,00515	105	—0,12996	—0,28127	—0,00729
15	0,17803	0,47814	0,00743	110	—0,15238	—0,23155	—0,00915
20	0,21411	0,34953	0,00952	115	—0,17026	—0,17765	—0,01074
25	0,23922	0,22722	0,01128	120	—0,18329	—0,12089	—0,01198
30	0,25400	0,11268	0,01267	125	—0,19132	—0,06263	—0,01287
35	0,25917	0,00724	0,01365	130	—0,19421	—0,00414	—0,01338
40	0,25556	—0,08812	0,01419	135	—0,19107	0,05323	—0,01349
45	0,24411	—0,17241	0,01428	140	—0,18500	0,10827	—0,01320
50	0,22579	—0,23397	0,01393	145	—0,17328	0,15987	—0,01253
55	0,20170	—0,30557	0,01314	150	—0,15723	0,20688	—0,01150
60	0,17283	—0,35365	0,01196	155	—0,13732	0,24839	—0,01014
65	0,14037	—0,38934	0,01043	160	—0,11406	0,28354	—0,00848
70	0,10524	—0,41272	0,00857	165	—0,08804	0,31163	—0,00659
75	0,06864	—0,42414	0,00648	170	—0,05988	0,33211	—0,00455
80	0,03155	—0,42414	0,00426	175	—0,03026	0,34456	—0,00228
85	—0,00507	—0,41338	0,00184	180	0	0,34873	0
90	—0,04031	—0,39270	—0,00057				

Пример 4.14. Определим перемещения точек кольца, нагруженного самоуравновешенной нагрузкой q, распределенной по закону

$$q = q_0 \cos k\varphi,$$

где $k \geqslant 2$.

В данном случае перемещения наиболее просто определяются интегрированием дифференциальных уравнений (4.81) и (4.82).

При заданной нагрузке решение будем искать в виде косинусоидальных функций

$$y = y_0 \cos k\varphi; \quad \vartheta = \vartheta_0 \cos k\varphi.$$

Внеся в уравнения (4.81) и (4.82) выражения y, ϑ, q и сократив на $\cos k\varphi$, получим

$$y_0 = \frac{q_0 r^4}{(k^2-1)^2}\left[\frac{1}{EJ_x} + \frac{1}{k^2 GJ_{\text{кр}}}\right]; \quad \vartheta_0 = -\frac{q_0 r^3}{(k^2-1)^2}\left[\frac{1}{EJ_x} + \frac{1}{GJ_{\text{кр}}}\right].$$

Следовательно,

$$y = \frac{q_0 r^4}{(k^2-1)^2}\left[\frac{1}{EJ_x} + \frac{1}{k^2 GJ_{\text{кр}}}\right]\cos k\varphi; \quad \vartheta = -\frac{q_0 r^3}{(k^2-1)^2}\left[\frac{1}{EJ_x} + \frac{1}{GJ_{\text{кр}}}\right].$$

Общее решение однородного уравнения, содержащего неопределенные постоянные, следует отбросить, так как слагаемые, не удовлетворяющие условию периодичности (с периодом 2π), должны отсутствовать, а слагаемые вида A; $B \cos \varphi$; $C \sin \varphi$ зависят только от перемещений кольца как жесткого целого.

Изгибающий момент в сечениях кольца в случае необходимости может быть определен аналогично с помощью уравнения (4.76).

Пример 4.15. Кольцо круглого поперечного сечения нагружено четырьмя сосредоточенными радиальными моментами (рис. 4.27). Определить осевые смещения и угол поворота сечений K и L.

В данном случае $GJ_{\text{кр}} = 0{,}8\ EJ_x$. Вертикальные перемещения сечений K и L определим по уравнению (4.83):

$$y_K = -\frac{\mathfrak{M}r^2}{\pi}\left[\frac{1}{GJ_{\text{кр}}} + \frac{1}{EJ_x}\right][S(0°) + 2S(90°) + S(180°)] = -0{,}0430\frac{\mathfrak{M}r^2}{\pi EJ_x};$$

$$y_L = -\frac{\mathfrak{M}r^2}{\pi}\left[\frac{1}{GJ_{\text{кр}}} + \frac{1}{EJ_x}\right][2S(45°) + 2S(135°)] = 0{,}0380\frac{\mathfrak{M}r^2}{\pi EJ_x}.$$

Суммарный максимальный прогиб

$$f = y_L - y_K = 0{,}0810\frac{\mathfrak{M}r^2}{\pi EJ_x}.$$

Углы поворота сечений в радиальной плоскости согласно уравнению (4.84)

$$\vartheta_K = 4\frac{\mathfrak{M}r}{2\pi EJ_x} + \frac{\mathfrak{M}r}{\pi EJ_x}[S(0°) + 2S(90°) + S(180°)] + \frac{\mathfrak{M}r}{\pi GJ_{\text{кр}}}[Y(0°) +$$
$$+ 2Y(90°) + Y(180°)] = 2{,}58\frac{\mathfrak{M}r}{\pi EJ_x};$$

$$\vartheta_L = 4\frac{\mathfrak{M}r}{2\pi EJ_x} + \frac{\mathfrak{M}r}{\pi EJ_x}[2S(45°) + 2S(135°)] + \frac{\mathfrak{M}r}{\pi GJ_{\text{кр}}}[2Y(45°) + 2Y(135°)] =$$
$$= 1{,}69\frac{\mathfrak{M}r}{\pi EJ_x}.$$

Изгибающие моменты в сечениях K и L в данном примере легко определяются по уравнениям равновесия половины кольца

$$M_K = \frac{\mathfrak{M}}{2};\quad M_L = \frac{\sqrt{2}\mathfrak{M}}{2}.$$

Пример 4.16. Кольцо, опирающееся на три опоры, нагружено сосредоточенными осевыми силами P и нагрузкой q (рис. 4.28). Определить перемещения сечений K и N. В данном случае в уравнении (4.83) следует сохранить слагаемые, содержащие постоянные

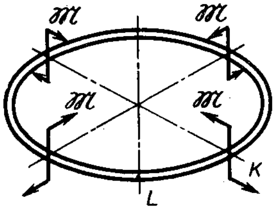


Рис. 4.27

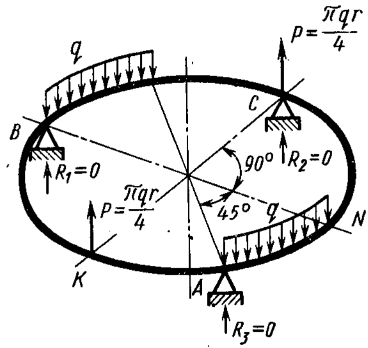


Рис. 4.28

A, B, C. Эти постоянные должны быть определены по условиям равенства нулю прогиба на опорах. Совместим начало отсчета угла φ с точкой A. Из уравнений равновесия кольца следует, что реакции опор равны нулю Приравняем нулю прогиб на опорах:

$$y_A = A + B\cos 0° + C\sin 0° + \frac{(-P)\,r^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(45°) + \frac{1}{GJ_{кр}}T(45°)\right] + \frac{(-P)\,r^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(135°) + \frac{1}{GJ_{кр}}T(135°)\right] + \frac{qr^4}{\pi EJ_x}[U(45°) - U(0°) - U(135°) + U(180°)] + \frac{qr^4}{\pi GJ_{кр}}[Z(45°) - Z(0°) - Z(135°) + Z(180°)] = 0;$$

$$y_B = A + B\cos 135° + C\sin 135° + 2\frac{(-P)\,r^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(90°) + \frac{1}{GJ_{кр}}T(90°)\right] + \frac{qr^4}{\pi EJ_x}[-U(0°) + U(45°) + U(180°) - U(135°)] + \frac{qr^4}{\pi GJ_{кр}}[-Z(0°) + Z(45°) + Z(180°) - Z(135°)] = 0;$$

$$y_C = A + B\cos 225° + C\sin 225° + \frac{(-P)\,r^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(0°) + \frac{1}{GJ_{кр}}T(0°)\right] + \frac{(-P)\,r^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(180°) + \frac{1}{GJ_{кр}}T(180°)\right] + \frac{qr^4}{\pi EJ_x}[U(90°) - U(45°) - U(90°) + U(135°)] + \frac{qr^4}{\pi GJ_{кр}}[Z(90°) - Z(45°) - Z(90°) + Z(135°)] = 0.$$

Подставив табличные значения функций S, T, U, Z и положив $GJ_{кр} = 0{,}8\,EJ_x$ (поперечное сечение — круглое), а затем решив систему трех уравнений относительно A, B, C, получим $A = -0{,}082\,a$; $B = -0{,}130\,a$; $C = -0{,}678\,a$,

где $a = \dfrac{Pr^3}{\pi EJ_x}$.

$$y_K = A + B\cos 45° + C\sin 45° + \frac{(-P)\,r^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(0°) + \frac{1}{GJ_{кр}}T(0°)\right] + \frac{(-P)\,r^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(180°) + \frac{1}{GJ_{кр}}T(180°)\right] + \frac{qr^4}{\pi EJ_x}[+U(90°) - U(45°) - U(90°) + U(135°)] + \frac{qr^4}{\pi GJ_{кр}}[Z(90°) - Z(45°) - Z(90°) + Z(135°)] = 1{,}135\,a;$$

$$y_N = A + B\cos 315° + C\sin 315° + 2\frac{(-P)\,r^3}{\pi}\left[\frac{1}{EJ_x}S(90°) + \frac{1}{GJ_{кр}}T(90°)\right] + \frac{qr^4}{\pi EJ_x}[-U(0°) + U(45°) + U(180°) - U(135°)] + \frac{qr^4}{\pi GJ_{кр}}[-Z(0°) + Z(45°) + Z(180°) - Z(135°)] = 0{,}775\,a.$$

Положительное направление отсчета y — вниз.

Углы поворота поперечных сечений в радиальной плоскости могут быть вычислены аналогично с помощью уравнения (4.84). При этом постоянные B и C имеют те же значения, что и при определении прогиба.

Глава 5 ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

§ 1. Основные гипотезы теории изгиба пластин

Пластиной называют плоское тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с размерами самих поверхностей. Срединная поверхность пластины, т. е. поверхность, равноудаленная от наружных поверхностей, представляет собой плоскость. Этим пластины отличаются от оболочек, у которых срединная поверхность не плоская.

В зависимости от формы контура пластины могут быть круглые, прямоугольные, эллиптические и т. д.

Инженерная теория изгиба пластин основывается на следующих общих гипотезах.

1. Гипотеза неизменности нормалей, по которой принимают, что нормали к срединной поверхности при изгибе пластины не искривляются и остаются перпендикулярными к деформированной срединной поверхности пластины. Эта гипотеза позволяет установить простые зависимости между компонентами деформаций в произвольной точке пластины и деформацией ее срединной плоскости. Эта гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений для балок.

2. Гипотеза о ненадавливании одного слоя пластины на другой. Согласно этой гипотезе нормальные напряжения в площадках, параллельных срединной плоскости, считаются пренебрежимо малыми, т. е. напряженное состояние принимается за плоское вместо трехосного.

Кроме указанных гипотез (гипотез Кирхгофа), примем допущения, что толщина пластины мала по сравнению с размерами пластины в плане и что прогиб мал по сравнению с толщиной, а также, что материал пластины — однородный, изотропный и подчиняющийся закону Гука.

Перечисленные гипотезы и допущения позволяют построить достаточно точную и простую инженерную теорию изгиба пластин.

В некоторых случаях, однако, принятые допущения могут не выполняться. Так, например, на практике иногда применяют пластины большой толщины (более $^1/_5$ размера в плане). К таким пластинам (плитам) гипотезы Кирхгофа неприменимы. При анализе напряжений и деформаций толстых плит напряженное состояние необходимо рассматривать как трехосное. Ввиду сложности таких расчетов в настоящее время решение получено только для некоторых простых частных случаев [16].

Применяют также пластины, имеющие малую толщину, но работающие при больших прогибах. Если плоскость пластины при изгибе переходит в выпуклую поверхность двоякой кривизны, то, кроме изгибных напряжений, в пластине возникают растягивающие мембранные напряжения. При малых прогибах мембранные напряжения пренебрежимо малы и их можно не учитывать. При больших прогибах мембранные напряжения получают преобладающее значение. Теория изгиба пластин при больших прогибах изложена в работе [1].

В настоящее время в машиностроении все большее применение находят пластины, изготовленные из анизотропных материалов [24]. К ним относятся пластины из различных слоистых материалов, например, текстолита, стеклопластика и т. п.

К анизотропным относятся также пластины, подкрепленные часто расположенными ребрами. Хотя материал пластины может быть и изотропным, наличие ребер приводит к тому, что изгибная жесткость пластины в разных направлениях различна. Такие пластины обычно называют конструктивно анизотропными или конструктивно ортотропными [3].

§ 2. Цилиндрический и чистый изгиб тонких пластин

Цилиндрическим изгибом называется такой изгиб пластин, при котором срединная плоскость переходит в цилиндрическую поверхность. На рис. 5.1 изображена пластина, защемленная одним краем и нагруженная силой P, равномерно распределенной по противоположному краю. Штриховой линией показана форма пластины в деформированном состоянии (строго говоря, около боковых сторон поверхность не будет точно цилиндрической).

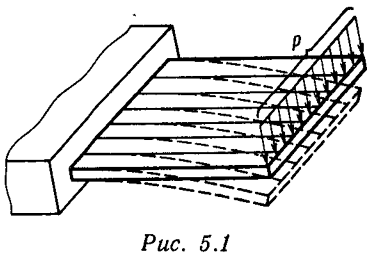


Рис. 5.1

Отметим некоторые особенности цилиндрического изгиба. Во-первых, в этом случае нет существенной разницы между изгибом при малых и при больших перемещениях, так как искривление срединной плоскости и переход ее в цилиндрическую поверхность происходит без ее растяжения. Исключением является только тот случай, когда противоположные кромки пластины неподвижно закреплены; тогда цилиндрический изгиб пластины сопровождается растяжением в продольном направлении. Заметим еще, что при очень больших прогибах даже при простейшей схеме закрепления (рис. 5.1) может возникнуть нелинейность, связанная с изменением плеча изгибающего момента. Этот случай изгиба подробно рассмотрен в книге [1].

Вторая особенность цилиндрического изгиба состоит в том, что очертание пластины в плане не играет существенной роли, т. е. при любом контуре пластины расчетные зависимости одни и те же.

Цилиндрический изгиб пластин подобен изгибу балок. Отличие состоит в том, что при изгибе балки поперечные деформации ничем не стеснены, вследствие чего форма контура поперечного сечения искажается (в зоне действия растягивающих напряжений ширина сечения уменьшается, а в зоне действия сжимающих — увеличивается).

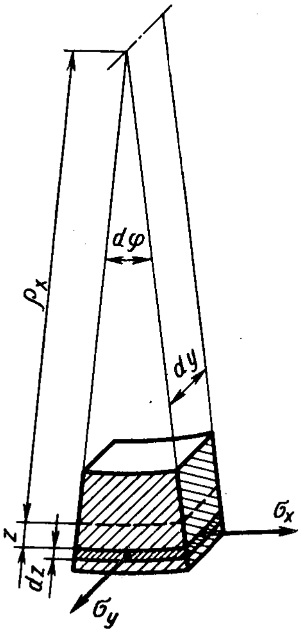


Рис. 5.2

При цилиндрическом изгибе пластин поперечные деформации стеснены за счет взаимодействия соседних продольных волокон. Если на поверхность пластины нанести продольные параллельные линии (см. рис. 5.1), то при цилиндрическом изгибе расстояния между ними не изменяются. Это значит, что относительная деформация в поперечном направлении равна нулю.

Взаимодействие продольных волокон приводит к тому, что в пластине возникают напряжения также и в поперечном направлении. Следовательно, здесь имеет место двухосное напряженное состояние.

Систему обозначения осей при изгибе пластин обычно выбирают не так, как при изгибе балок. Продольную и поперечную оси обозначают x и y, а ось, перпендикулярную срединной поверхности, — z. Соответственно нормальные напряжения в произвольном слое пластины обозначают σ_x и σ_y. Эти напряжения показаны на рис. 5.2, где изображен элемент пластины в деформированном состоянии.

Запишем выражения относительных удлинений ε_x и ε_y в произвольном слое на расстоянии z от срединной плоскости. Так как напряженное состояние в данном случае плоское, то

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}; \tag{5.1}$$

$$\varepsilon_y = 0 = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}. \tag{5.2}$$

За положительное направление отсчета z принято направление вниз.

Согласно уравнениям (5.1), (5.2):

$$\sigma_y = \mu\sigma_x; \tag{5.3}$$

$$\sigma_x = \frac{Ez}{\rho_x (1-\mu^2)}. \tag{5.4}$$

При малых прогибах кривизну $\frac{1}{\rho_x}$ можно заменить второй производной прогиба

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{5.5}$$

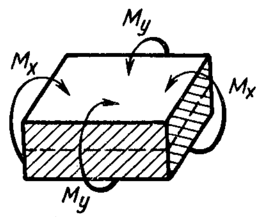


Рис. 5.3

Тогда

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{5.6}$$

Знак минус взят потому, что за положительное направление прогиба w принято направление вниз.

Вычислим изгибающие моменты в пластине в продольном и поперечном направлениях.

Условимся считать моменты положительными, если они направлены так, как показано на рис. 5,3, т. е. если верхние слои пластины испытывают сжатие. Величины моментов будем относить к единице длины (размерность моментов Н·см/см). С учетом зависимостей (5.3), (5.4) и (5.5) получим

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dzz = \frac{1}{\rho_x}\cdot\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = -\frac{d^2w}{dx^2}D; \tag{5.7}$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y zdz = \mu\frac{1}{\rho_x}\cdot\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = -\mu\frac{d^2w}{dx^2}D, \tag{5.8}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \tag{5.9}$$

Величина D называется цилиндрической жесткостью пластины. Согласно равенствам (5.7) и (5.8), моменты M_x и M_y связаны между собой следующей зависимостью:

$$M_y = \mu M_x. \tag{5.10}$$

Запишем уравнение (5.7) в виде

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_x}{D}. \tag{5.11}$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение упругой поверхности пластины. От соответствующего уравнения для балки оно отличается тем, что вместо изгибной жесткости балки EJ_x здесь берется цилиндрическая жесткость D.

Выразим напряжение σ_x через изгибающий момент M_x; для этого исключим из равенств (5.6) и (5.7) $\frac{d^2w}{dx^2}$:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{\frac{h^3}{12}}. \tag{5.12}$$

Аналогичную формулу можно получить и для второго напряжения

$$\sigma_y = \frac{M_y z}{\frac{h^3}{12}}. \tag{5.12a}$$

Формулы (5.12) не отличаются от общеизвестной формулы для нормальных напряжений при изгибе балки. Знаменатель формул (5.12) и (5.12а) представляет собой момент инерции прямоугольника, имеющего высоту h и ширину, равную единице (так как изгибающие моменты отнесены к единице ширины).

Напряжения σ_x и σ_y линейно изменяются по толщине пластины и достигают наибольших значений при $z = \pm\frac{h}{2}$:

$$\sigma_{x\,\max} = \pm\frac{M_x}{\frac{h^2}{6}}; \quad \sigma_{y\,\max} = \pm\frac{M_y}{\frac{h^2}{6}}. \tag{5.13}$$

Согласно зависимостям (5.7)—(5.10), цилиндрический изгиб в чистом виде может возникнуть только в том случае, когда к боковым сторонам пластины будет приложен изгибающий момент M_y. Если же этот момент отсутствует, то около боковых кромок форма упругой поверхности пластин несколько отклоняется от цилиндрической.

Пример 5.1. Прямоугольная пластина с размерами $l = 200$ мм и $b = 100$ мм, толщиной $h = 10$ мм, шарнирно опертая по двум сторонам (рис. 5.4, *а*), нагружена равномерным давлением $p = 40$ Н/см²; материал пластины — сталь; $E = 2\cdot10^7$ Н/см²; $\mu = 0{,}3$. Определить напряжения и прогиб.

Реакции опор и изгибающий момент определяются так же, как для обычных балок. Наибольший изгибающий момент $M_{x\max}$ возникает в середине пролета; Этот момент, отнесенный к единице ширины пластины,

$$M_{x\,\max} = \frac{pl^2}{8} = 2000 \text{ Н}\cdot\text{см/см}.$$

Соответствующее максимальное напряжение

$$\sigma_{x\,\max} = \frac{M_{x\,\max}}{\frac{h^2}{6}} = 12\cdot10^3 \text{ Н/см}^2.$$

Изгибающий момент и нормальное напряжение в поперечном направлении в μ раз меньше и равны соответственно:

$$M_{y\,\max} = 600 \text{ Н}\cdot\text{см/см};$$

$$\sigma_{y\,\max} = 3600 \text{ Н/см}^2.$$

Прогиб вычислим по дифференциальному уравнению изогнутой поверхности (5.11):

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M_x}{D}=-\frac{1}{D}\left[\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}\right].$$

Вместо момента M_x в это уравнение подставлено выражение момента в текущем сечении:

$$M_x=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}.$$

После двукратного интегрирования получим

$$w=A+Bx-\frac{1}{D}\left[\frac{plx^3}{12}-\frac{px^4}{24}\right].$$

Постоянные интегрирования A и B определим по граничным условиям: $w=0$ при $x=0$ и $w=0$ при $x=l$. Согласно первому условию, $A=0$, тогда по второму условию $B=\frac{pl^3}{24D}$.

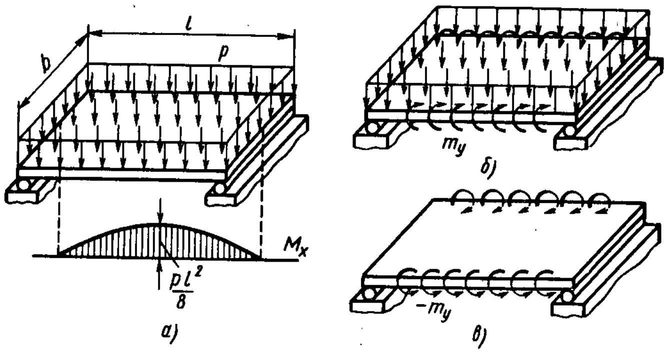


Рис. 5.4

Окончательно

$$w=\frac{p}{24D}[l^3x-2lx^3+x^4].$$

Максимальный прогиб $\left(\text{при } x=\frac{l}{2}\right)$

$$w_{\max}=\frac{5}{384}\cdot\frac{pl^4}{D}=4{,}55\cdot10^{-2}\text{ см},$$

где

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=1{,}83\cdot10^6\text{ Н}\cdot\text{см}.$$

Исследуем характер напряженно-деформированного состояния около боковых кромок пластины. Рассматриваемое состояние представим как результат наложения двух состояний, показанных на рис. 5.4, *б* и *в*.

В состоянии, изображенном на рис. 5.4, *б*, кроме заданного давления p, по боковым кромкам пластины приложен момент m_y такой же величины и распределенный по такому же закону, как момент M_y при цилиндрическом изгибе. В состоянии, изображенном на рис. 5.4, *в*, пластина нагружена одним только моментом m_y обратного направления. При наложении этих двух состояний моменты на боковых кромках пластины взаимно погашаются и получается заданная схема нагружения. Напряженное состояние при нагружении по схеме, представленной на рис. 5.4, *б*, полностью соответствует найденному решению; следовательно, в этом случае возникает цилиндрический изгиб в чистом виде. В состоянии, изображенном на рис. 5.4, *в*, моменты m_y, приложенные по боковым кромкам, вызывают изгиб в поперечном направлении. Однако ввиду

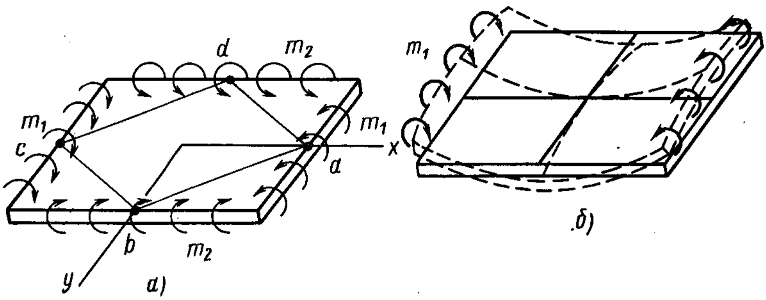


Рис. 5.5

того, что на закрепленных краях вертикальные перемещения отсутствуют, пластина не может свободно искривляться в поперечном направлении, поэтому напряжения σ_y по мере удаления от боковых кромок быстро затухают. В результате действие моментов m_y проявляется лишь в том, что боковые края пластины несколько отгибаются вниз; в средней же части пластины действие моментов m_y практически не сказывается. На основании изложенного можно заключить, что полученное решение достаточно хорошо отражает характер напряженного и деформированного состояний пластины везде, за исключением областей, расположенных около продольных кромок.

Перейдем к рассмотрению чистого изгиба пластин. Изгиб называется чистым, если поперечные силы в пластине отсутствуют. Чистый изгиб возникает при действии на свободную, незакрепленную пластину моментов m_1 и m_2, равномерно распределенных по краям пластины (рис. 5.5, *а*).

Предположим вначале, что на пластину действует только один момент m_1 (рис. 5.5, *б*). Поскольку искривление пластины в поперечном направлении ничем не стеснено, пластину можно рассматривать как совокупность отдельных продольных полосок, каждая из которых деформируется как брус. Следовательно, в этом случае применимы обычные формулы теории изгиба бруса как для напряжений

$$\sigma_x^{(m_1)} = \frac{m_1 z}{\frac{h^3}{12}}; \quad \sigma_y^{(m_1)} = 0, \tag{5.14}$$

так и для кривизны в продольном направлении

$$\left(\frac{1}{\rho_x}\right)^{(m_1)} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^{(m_1)} = \frac{m_1}{E\frac{h^3}{12}}. \tag{5.15}$$

В отличие от цилиндрического изгиба при чистом изгибе пластина искривляется также и в поперечном направлении. Радиус кривизны поверхности в поперечном направлении ρ_y можно определить, используя зависимость между деформациями ε_x и ε_y в произвольном слое пластины. Так как напряженное состояние одноосное, то

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x.$$

Подставив в это равенство

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x}; \quad \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y},$$

придем к следующим зависимостям:

$$\left(\frac{1}{\rho_y}\right)^{(m_1)} = -\mu\left(\frac{1}{\rho_x}\right)^{(m_1)} \text{ или } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^{(m_1)} = -\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^{(m_1)}. \tag{5.16}$$

Аналогично определяют напряжения и кривизну при нагружении моментом m_2.

При совместном действии моментов m_1 и m_2 напряжения и кривизны суммируются:

$$\sigma_x = \frac{m_1 z}{\frac{h^3}{12}}; \quad \sigma_y = \frac{m_2 z}{\frac{h^3}{12}}; \tag{5.17}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho_x} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{m_1 - \mu m_2}{E\frac{h^3}{12}}; \\ \frac{1}{\rho_y} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{m_2 - \mu m_1}{E\frac{h^3}{12}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. *Сферический изгиб.* Если моменты m_1 и m_2 одинаковы по величине, то

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{\rho_y} = \frac{m(1-\mu)}{E\frac{h^3}{12}}. \tag{5.19}$$

Нетрудно показать, что в этом случае кривизна упругой поверхности в любом направлении имеет одинаковые значения; следовательно, плоскость пластины, деформируясь, переходит в сферическую поверхность. Изгибающий момент в любом сечении, перпендикулярном срединной плоскости при сферическом изгибе, имеет одно и то же значение. Отсюда следует, что независимо от формы контура пластины в плане при нагружении ее по краю изгибающим моментом постоянной интенсивности срединная плоскость превращается в сферическую поверхность.

2. *Цилиндрический изгиб.* Если $m_2 = \mu m_1$, то

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{(1-\mu^2)\,m_1}{E\,\frac{h^3}{12}} = \frac{m_1}{D}; \quad \frac{1}{\rho_y} = 0. \tag{5.20}$$

Упругая поверхность пластины имеет прямолинейные образующие, следовательно, плоскость пластины переходит в цилиндрическую поверхность.

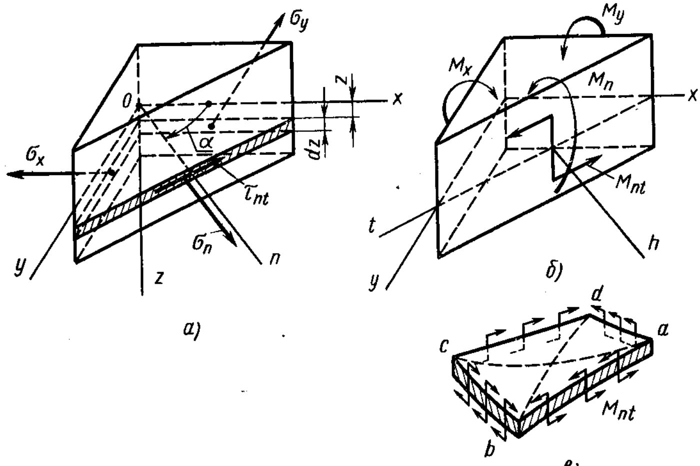


Рис. 5.6

Исследуем более подробно общий случай чистого изгиба пластины. Выделим из пластины бесконечно малый элемент в виде трехгранной призмы (рис. 5.6, *а*). В двух гранях, перпендикулярных осям x и y, действуют нормальные напряжения σ_x и σ_y, определяемые по уравнениям (5.17). В третьей грани, расположенной под углом α к плоскости yOz, возникают как нормальные, так и касательные напряжения. Величину этих напряжений можно определить по известным формулам теории плоского напряженного состояния:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha;$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha.$$

Подставив в эти формулы значения напряжения σ_x и σ_y, найдем

$$\sigma_n = \frac{z12}{h^3}\left[\frac{m_1+m_2}{2} + \frac{m_1-m_2}{2}\cos 2\alpha\right];$$

$$\tau_{nt} = \frac{z12}{h^3}\left[\frac{m_1-m_2}{2}\sin 2\alpha\right].$$

Напряжения σ_n и τ_{nt} линейно зависят от z. Следовательно, напряжения σ_n можно привести к изгибающему моменту

$$M_n = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_n dz \cdot z = \frac{m_1+m_2}{2} + \frac{m_1-m_2}{2}\cos 2\alpha, \qquad (5.21)$$

а напряжения τ_{nt} — к крутящему моменту

$$M_{nt} = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nt}\, dz \cdot z = \frac{m_1-m_2}{2}\sin 2\alpha. \qquad (5.22)$$

Моменты M_n и M_{nt} показаны на рис. 5.6, *б*. Наибольший крутящий момент возникает в площадке под углом $\alpha = 45°$ к главным осям x и y:

$$M_{nt\,\max} = \frac{m_1-m_2}{2}.$$

Искривление плоскости пластины в направлении осей x и y характеризуется радиусами кривизны ρ_x и ρ_y. Эти радиусы называются главными радиусами кривизны; один радиус имеет максимальное, а другой — минимальное значение. Радиус кривизны в направлении, составляющем угол α с осью x, имеет промежуточное значение

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{\rho_y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_x} - \frac{1}{\rho_y}\right)\cos 2\alpha. \qquad (5.23)$$

Крутящие моменты вызывают деформацию кручения плоскости пластины. Характер этой деформации можно видеть на рис. 5.6, *в*, где изображена часть пластины, выделенная под углом в 45° к осям x и y. Линии ab и cd после деформации становятся непараллельными.

§ 3. Осесимметричный изгиб круглых пластин

Детали в виде круглых осесимметричных пластин находят широкое применение в технике (плоские днища резервуаров, крышки, фланцы, диафрагмы и т. п.).

Инженерная теория расчета осесимметричного изгиба круглых пластин основывается на общих гипотезах, сформулированных в § 1.

Приведем краткий вывод основных уравнений теории осесимметричного изгиба круглых пластин.

При осесимметричном нагружении все величины являются функциями только текущего радиуса r; следовательно, данная задача одномерная.

Рассмотрим деформации пластины. На рис. 5.7, *а* и *б* пластина изображена в разрезе до и после деформации. Вследствие того, что прогиб мал, можно принять, что точки a и b, принадлежащие срединной плоскости, смещаются только по вертикали. Нормаль к срединной плоскости в произвольной точке a поворачивается на некоторый угол ϑ; при этом она остается прямой и перпендикулярной упругой поверхности пластины. При переходе от точки a к соседней точке b радиус r получает приращение dr; соответственно угол наклона нормали ϑ получает приращение $d\vartheta$.

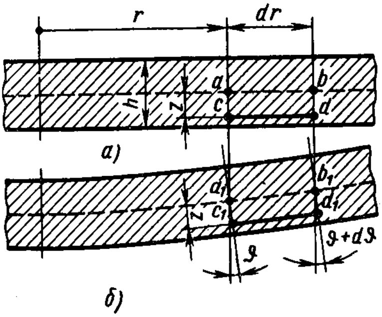


Рис. 5.7

Вычислим относительные деформации в произвольном слое, расположенном на расстоянии z от срединной плоскости. Относительное удлинение в радиальном направлении

$$\varepsilon_r = \frac{c_1 d_1 - cd}{cd} = \frac{[dr + (\vartheta + d\vartheta)\, z - \vartheta z] - dr}{dr},$$

или после сокращений

$$\varepsilon_r = \frac{d\vartheta}{dr} z. \tag{5.24}$$

Окружную деформацию определим как изменение длины окружности, проходящей через точку c:

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi (r + \vartheta z) - 2\pi r}{2\pi r},$$

или

$$\varepsilon_t = \frac{\vartheta}{r} z. \tag{5.25}$$

За положительное направление координаты z принято направление вниз.

По деформациям ε_r и ε_t на основании закона Гука определим напряжения. Так как в площадках, параллельных срединной плоскости, σ_z равно нулю, то

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_t}{E};$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E}.$$

Решив эти два равенства относительно напряжений и подставив значения деформаций по уравнениям (5.24), (5.25), получим:

$$\sigma_r = \frac{Ez}{(1-\mu^2)}\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right); \tag{5.26}$$

$$\sigma_t = \frac{Ez}{(1-\mu^2)}\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right). \tag{5.27}$$

Напряжения σ_r и σ_t линейно зависят от координаты z; эпюры этих напряжений приведены на рис. 5.8.

Кроме нормальных напряжений σ_r и σ_t, в грани, перпендикулярной радиусу, в общем случае возникает еще касательное напряжение τ_{rz}, перпендикулярное срединной плоскости. Это напряжение распределено по толщине пластины по параболическому закону (см. рис. 5.8). При $z = \pm\frac{h}{2}$ оно равно нулю (что легко доказать на основании закона парности касательных напряжений). На срединной поверхности касательное напряжение достигает максимума. Роль этого напряжения, однако, невелика, так как обычно оно бывает значительно меньше максимального нормального напряжения; в тех же точках, где нормальное напряжение достигает максимума, касательное напряжение τ_{rz} равно нулю.

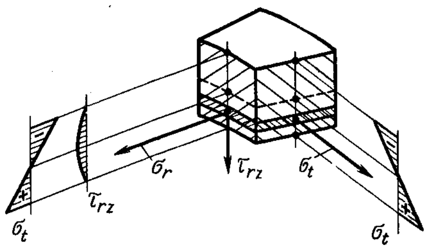


Рис. 5.8

Однако равнодействующей касательных напряжений, т. е. поперечной силой Q, пренебречь нельзя, так как она играет важную роль в уравнениях равновесия элемента пластины.

При интегрировании напряжений по площади граней элемента пластины (см. рис. 5.8) нормальные напряжения можно привести к изгибающим моментам M_r и M_t, а касательные — к поперечной силе Q. Все эти силовые факторы принято относить к единице длины; соответственно размерность моментов M_r и M_t — Н·см/см, а силы Q — Н/см. Представим изгибающие моменты в радиальном и окружном направлениях в виде интегралов:

$$M_r = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z\,dz; \quad M_t = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz. \tag{5.28}$$

Подставив под знак интегралов выражения напряжений (5.26) и (5.27) и выполнив интегрирование, получим

$$M_r = D\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right); \tag{5.29}$$

$$M_t = D\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right), \tag{5.30}$$

где D — изгибная жесткость пластины, определяемая по формуле (5.9).

Уравнения (5.26)—(5.29) позволяют определить напряжения σ_r и σ_t и моменты M_r и M_t по функции ϑ. Эта функция, характеризующая угол поворота нормали, пока неизвестна; недостающее уравнение для ее определения получим из условия равновесия бесконечно малого элемента пластины, изображенного на рис. 5.9, *а* и *б*.

В радиальных сечениях действуют только моменты $M_t dr$ (поперечные силы по условию осевой симметрии отсутствуют). В окружных сечениях возникают поперечная сила $Qrd\varphi$ и момент $M_r rd\varphi$. При переходе от внутренней грани элемента к наружной они получают бесконечно малые приращения $d\,(Qrd\varphi)$ и $d\,(M_r rd\varphi)$.

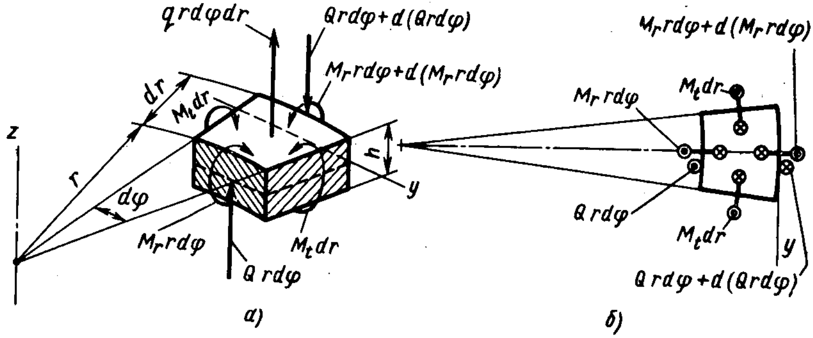


Рис. 5.9

Из шести уравнений статики в данном случае можно составить только два: уравнение проекций сил на ось z и уравнение моментов относительно оси y. Эти уравнения после сокращений и исключения величин высшего порядка малости принимают вид

$$\frac{d\,(Qr)}{dr}=qr; \tag{5.31}$$

$$\frac{d\,(M_r r)}{dr}-M_t=Qr, \tag{5.32}$$

где q — интенсивность поверхностной нагрузки, Н/см^2.

Система четырех уравнений (5.29)—(5.32) содержит четыре неизвестных Q, M_r, M_t, ϑ.

Интегрируя уравнение (5.31), можно определить силу Q. Эта сила, однако, может быть найдена более просто по уравнению равновесия части пластины, вырезанной по окружности текущего радиуса r. Пусть, например, пластина нагружена равномерным давлением q (рис. 5.10, *а*). Выделив из пластины центральную часть (рис. 5.10, *б*) и приравняв нулю сумму проекций, действующих на нее сил, получим

$$q\pi r^2-Q2\pi r=0,$$

откуда

$$Q=\frac{qr}{2}.$$

При произвольной нагрузке поперечная сила Q определяется как частное от деления равнодействующей внешних сил, приложенных к вырезанной внутренней (или наружной) части пластины, на $2\pi r$:

$$Q=\frac{P}{2\pi r}. \tag{5.33}$$

Эту силу будем считать положительной, если она направлена так, как показано на рис. 5.10, *б*.

Преобразуем систему полученных уравнений к одному уравнению с одним неизвестным; для этого подставим выражения моментов (5.29) и (5.30) в уравнение равновесия (5.32). Выполнив элементарные преобразования, придем к дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции ϑ:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\vartheta}{dr}-\frac{1}{r^2}\vartheta=\frac{Q}{D}. \tag{5.34}$$

Используя тождество

$$\left[(\vartheta r)'\frac{1}{r}\right]'=\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\vartheta}{dr}-\frac{1}{r^2}\vartheta,$$

уравнение (5.34) можно записать в следующем виде:

$$\left[(\vartheta r)'\frac{1}{r}\right]'=\frac{Q}{D}. \tag{5.34а}$$

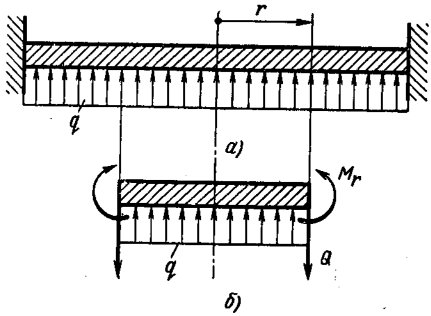


Рис. 5.10

Поскольку интенсивность поперечной силы Q может быть определена заранее, интегрирование уравнения (5.34а) не представляет трудностей.

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\vartheta=C_1r+\frac{C_2}{r}+\frac{1}{Dr}\int\left[\hat{r}\int Q\,d\tilde{r}\right]d\hat{r}, \tag{5.35}$$

где $\hat{r}$ и $\tilde{r}$ — вспомогательные переменные.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяют в каждом частном случае по граничным условиям на наружном и на внутреннем краю или в центре пластины (если пластина сплошная).

Остановимся более подробно на вопросе об определении постоянных интегрирования. На практике могут встретиться следующие варианты граничных условий:

1. Внутренний или наружный край пластины жестко заделан или защемлен. Тогда при соответствующем значении радиуса r угол поворота нормали ϑ равен нулю.

2. Край пластины шарнирно оперт или свободен. В этом случае напряжение σ_r и момент M_r на краю равны нулю и, следовательно,

на основании зависимости (5.26) или (5.29)

$$\left[\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right]_{r=r^*}=0,$$

где r^* — радиус, соответствующий данному краю.

3. К краю пластины приложен распределительный момент m, тогда, согласно уравнению (5.29), должно выполняться равенство

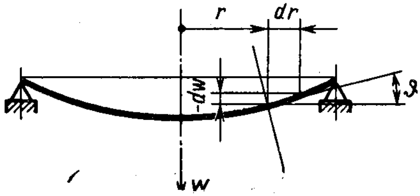


Рис. 5.11

$$D\left[\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right]_{r=r^*}=m.$$

4. Для сплошной пластины без отверстия угол поворота нормали при $r=0$ не должен обращаться в бесконечность; следовательно, в этом случае $C_2=0$.

Формулы для вычисления напряжений по изгибающим моментам получим, исключив из равенств (5.26) и (5.29) функцию ϑ и подставив значение жесткости (5.9):

$$\sigma_r=\frac{M_r z}{\frac{h^3}{12}}. \qquad (5.36)$$

Аналогично, согласно формулам (5.27) и (5.30),

$$\sigma_t=\frac{M_t z}{\frac{h^3}{12}}. \qquad (5.37)$$

Максимальные нормальные напряжения возникают при $z=\pm\frac{h}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{r\,\max}&=\pm\frac{M_{r\,\max}}{\frac{h^2}{6}};\\ \sigma_{t\,\max}&=\pm\frac{M_{t\,\max}}{\frac{h^2}{6}}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.38)$$

Рассмотрим вопрос об определении прогиба w. Будем считать прогиб положительным, если он направлен вниз. На рис. 5.11 показана деформированная поверхность пластины. При положительном угле поворота нормали ϑ и при положительном приращении радиуса dr прогиб w получает отрицательное приращение

$$dw=-\vartheta\,dr;$$

отсюда следует

$$w=-\int\vartheta\,dr+C. \qquad (5.39)$$

Постоянную интегрирования C определяют из условия равенства нулю прогиба на опоре.

Можно также вместо неопределенного интеграла (5.39) взять определенный интеграл

$$w = -\int_{r_0}^{r_1} \vartheta \, dr, \tag{5.39a}$$

где r_0 — значение радиуса на опоре;

r_1 — значение радиуса в той точке, где определяется прогиб.

Пример 5.2. Определить необходимую толщину h крышки цилиндра, изображенного на рис. 5.12, *а*, а также вычислить ее прогиб.

Радиус цилиндра $R = 20$ см; давление в цилиндре $p = 200$ Н/см²; материал крышки — сталь; $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см²; $\mu = 0{,}3$; допускаемое напряжение $[\sigma]_р = [\sigma]_{сж} = 16 \cdot 10^3$ Н/см².

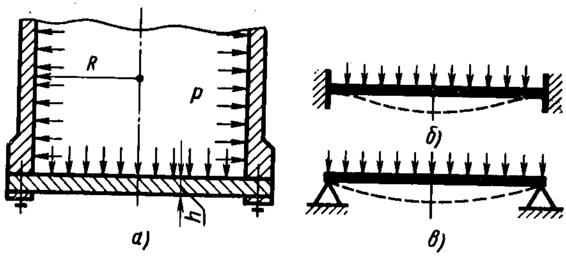


Рис. 5.12

Прежде всего необходимо выбрать расчетную схему. Если сам цилиндр достаточно жесткий, а крышка сравнительно тонкая и поставлена без мягкой прокладки, то можно принять расчетную схему, изображенную на рис. 5.12, *б*, т. е. считать, что край пластины жестко защемлен. При наличии мягкой прокладки, а также в случае большой податливости стенок цилиндра можно принять другой вариант расчетной схемы, а именно считать, что край пластины шарнирно закреплен (рис. 5.12, *в*). В действительности, очевидно, будет иметь место промежуточный случай, т. е. упругая заделка.

Чтобы получить более ясное представление о том, какие напряжения и деформации возникнут в действительности, целесообразно просчитать оба предельных варианта.

В обоих этих вариантах интенсивность поперечной силы Q одинакова. Она определяется из условия равновесия части пластины, вырезанной по кругу радиуса r (см. рис. 5.10):

$$Q = -\frac{pr}{2},$$

в данном случае $q = -p$.

Подставив выражение Q в уравнение (5.35) и выполнив интегрирование, найдем

$$\vartheta = C_1 + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D}.$$

Так как в данном случае пластина не имеет центрального отверстия, то $C_2 = 0$. Вторая постоянная интегрирования определяется согласно граничному условию на наружном краю пластины.

Рассмотрим расчетную схему рис. 5.12, *б*. В этом случае угол наклона нормали на наружном краю равен нулю, т. е.

$$\vartheta_{r=R} = 0.$$

Согласно этому условию,

$$C_1R-\frac{pR^3}{16D}=0;$$

$$C_1=\frac{pR^2}{16D}.$$

Функция ϑ для первого варианта (см. рис. 5.12, *б*) имеет вид

$$\vartheta=\frac{p}{16D}(R^2r-r^3).$$

Запишем еще выражения для $\frac{\vartheta}{r}$ и $\frac{d\vartheta}{dr}$:

$$\frac{\vartheta}{r}=\frac{p}{16D}(R^2-r^2);$$

$$\frac{d\vartheta}{dr}=\frac{p}{16D}(R^2-3r^2).$$

Задавшись рядом значений радиуса r и вычислив величины $\frac{\vartheta}{r}$ и $\frac{d\vartheta}{dr}$ по формулам (5.29) и (5.30), найдем изгибающие моменты.

Аналогично ведут расчеты для второго варианта (см. рис. 5.12, *в*). В этом случае на наружном краю пластины радиальный изгибающий момент равен нулю, следовательно, имеет место условие

$$\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right)_{r=R}=0.$$

Подставив в это равенство выражение ϑ и положив $C_2=0$, получим уравнение

$$C_1-\frac{3pR^2}{16D}+\mu C_1-\mu\frac{pR^2}{16D}=0,$$

из которого найдем

$$C_1=\frac{3+\mu}{1+\mu}\cdot\frac{pR^2}{16D}.$$

Функция ϑ для второго варианта

$$\vartheta=\frac{p}{16D}\left[\frac{3+\mu}{1+\mu}R^2r-r^3\right].$$

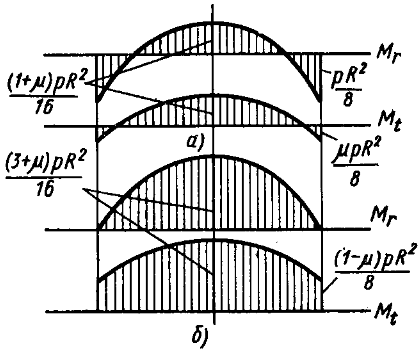


Рис. 5.13

Эпюры моментов для обоих вариантов представлены на рис. 5.13, *а* и *б*.

Сопоставив эпюры, можно сделать следующие выводы. При шарнирно опертых краях максимальный изгибающий момент возникает в центре, а при заделанных краях — у края. Величина максимального момента для шарнирно опертой пластины приблизительно в 1,5 раза больше, чем для пластины с жестко заделанными краями. Учитывая, однако, что края пластины в действительности скорее заделаны, чем оперты шарнирно, можно ожидать, что величина изгибающих моментов в центре не превысит значения $\frac{pR^2}{8}$, равного значению момента M_r у заделки в первом варианте. Поэтому в качестве расчетного примем первый вариант. Наиболее опасная точка в этом случае будет около заделки. Напряжения в этой точке (при $r=R$ и $z=-\frac{h}{2}$, т. е. сверху)

$$\sigma_{r\,\max}=\frac{M_{r\,\max}}{\frac{h^2}{6}}=\frac{6pR^2}{8h^2};\qquad \sigma_{t\max}=\frac{M_t}{\frac{h^2}{6}}=\frac{\mu\cdot 6pR^2}{8h^2}.$$

Третье главное напряжение σ_z согласно принятому допущению равно нулю.

Так как материал пластины — пластичный, используем гипотезу прочности наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{6pR^2}{8h^2}.$$

Приравняв эквивалентное напряжение допускаемому, найдем

$$h = \sqrt{\frac{pR^2 6}{8[\sigma]}} = \sqrt{\frac{200 \cdot 20^2 \cdot 6}{8 \cdot 16 \cdot 10^3}} \cong 2 \text{ см.}$$

Заметим, что если в качестве расчетного принять второй вариант, то толщина получается равной $h \cong 2{,}5$ см.

Определим прогиб пластины для первого варианта. Согласно зависимости (5.39а),

$$w_{\max} = -\int_R^0 \vartheta\, dr = \int_0^R \frac{p}{16D}(R^2 r - r^3)\, dr = \frac{pR^4}{64D}.$$

При заданных числовых значениях

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = 14{,}6 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$w_{\max} = 0{,}035 \text{ см}.$$

Так как прогиб мал по сравнению с толщиной, то применение теории, основанной на предположении о малости прогиба, в данном случае оправдано.

Пример 5.3. Определить напряжения и деформации в диафрагме, предназначенной для измерения расхода жидкости (рис. 5.14). Сопротивление, создаваемое диафрагмой при протекании жидкости, вызывает перепад давления, по величине которого можно судить о расходе.

Дано: $b = 3\,a$; $h = \frac{1}{20}a$; избыточное давление p можно считать равномерно распределенным по плоскости диафрагмы.

Вырезав из диафрагмы кольцо с внутренним радиусом a и наружным радиусом r (рис. 5.14) и составив сумму проекций сил на ось кольца, найдем поперечную силу

$$Q = -\frac{p(r^2 - a^2)}{2r}.$$

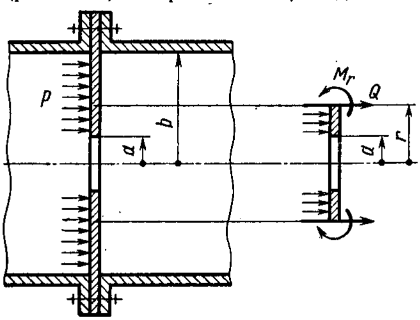


Рис. 5.14

Выражение силы Q подставим в формулу (5.35); при этом вместо неопределенного интеграла возьмем определенный интеграл с постоянным нижним пределом, равным внутреннему радиусу пластины, и переменным верхним пределом, равным текущему радиусу r:

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{Dr}\int_a^r \left[\hat{r} \int_a^{\hat{r}} \frac{-p(\tilde{r}^2 - a^2)}{2\tilde{r}}\, d\tilde{r}\right] d\hat{r},$$

где

$$a \leqslant \tilde{r} \leqslant \hat{r}; \quad a \leqslant \hat{r} \leqslant r.$$

Нижние пределы влияют только на величину постоянных C_1 и C_2. Вместе с тем, для кольцевой пластины уравнение, к которому приводится граничное условие на внутреннем краю пластины, получается более простое, так как при $r = a$ интегралы в выражениях для ϑ и $\frac{d\vartheta}{dr}$ обращаются в нуль.

Вычислив интеграл, получим следующие выражения функции ϑ и ее производной:

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{p}{16D}\left[\frac{r^4 - a^4}{r} - 4a^2 r \ln\frac{r}{a}\right];$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{p}{16D}\left[3r^2 + \frac{a^4}{r^2} - 4a^2 - 4a^2 \ln\frac{r}{a}\right].$$

Постоянные C_1 и C_2 определим, согласно граничным условиям:

при $r = a$ $M_r = 0$; $\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right) = 0$;

при $r = b$ $\vartheta = 0$

или

$$C_1(1+\mu) - \frac{C_2}{a^2}(1-\mu) = 0;$$

$$C_1 b + \frac{C_2}{b} - \frac{p}{16D}\left[\frac{b^4 - a^4}{b} - 4a^2 b \ln\frac{b}{a}\right] = 0.$$

Решив эти уравнения при $b = 3a$ и $\mu = 0{,}3$, найдем

$$C_1 = 0{,}233\frac{pa^2}{D}; \quad C_2 = 0{,}433\frac{pa^4}{D}.$$

Окончательно:

$$\vartheta = \frac{pa^2 r}{D}\left[0{,}233 + 0{,}495\frac{a^2}{r^2} - 0{,}0625\frac{r^2}{a^2} + 0{,}25\ln\frac{r}{a}\right];$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{pa^2}{D}\left[0{,}483 - 0{,}495\frac{a^2}{r^2} - 0{,}1875\frac{r^2}{a^2} + 0{,}25\ln\frac{r}{a}\right].$$

Вычислив при нескольких значениях радиуса r величины $\frac{\vartheta}{r}$ и $\frac{d\vartheta}{dr}$, по зависимостям (5.29) и (5.30) определим изгибающие моменты M_r и M_t.

Результаты расчетов представлены на рис. 5.15 в виде эпюр.

Наибольшей величины изгибающий момент M_r достигает около заделки. Напряжения в наиболее опасной точке

$$\sigma_r = \frac{M_{r\max}}{\frac{h^2}{6}} = 2360\ p; \quad \sigma_t = \frac{M_{t\max}}{\frac{h^2}{6}} = 710\ p.$$

Эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_r - 0 = 2360\ p.$$

Прогиб пластины, согласно формуле (5.39а):

$$w_{\max} = -\int_b^a \vartheta dr = 0{,}962\frac{pa^4}{D} = 16{,}8\cdot 10^5\frac{ph}{E}.$$

Заметим, что данная задача может быть решена более просто методом начальных параметров, изложенным в § 4.

Пример 5.4. Пластина с жестко заделанными краями нагружена сосредоточенной силой P в центре (рис. 5.16).

Интенсивность поперечной силы в данном случае

$$Q=-\frac{P}{2\pi r}.$$

По уравнению (5.35)

$$\vartheta=C_1r+\frac{C_2}{r}-\frac{P}{2\pi D}\left(\frac{r}{2}\ln r-\frac{r}{4}\right).$$

Для того чтобы устранить логарифм размерной величины, добавим и вычтем из этого уравнения произведение $\frac{Pr\ln b}{4\pi D}$ (b — наружный радиус пластины).

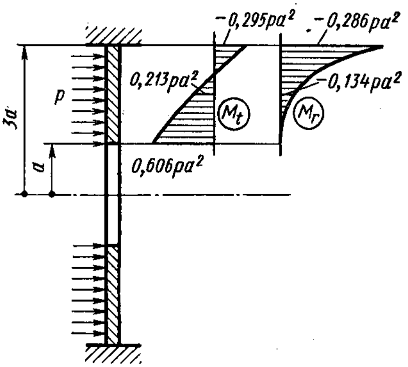


Рис. 5.15

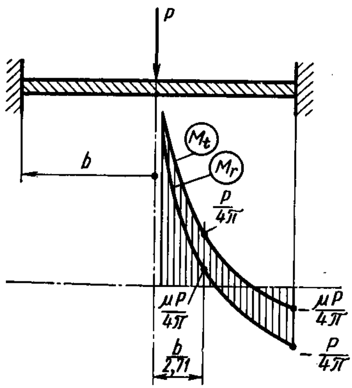


Рис. 5.16

Тогда функция ϑ примет вид

$$\vartheta=C_1r+\frac{C_2}{r}+\frac{Pr}{4\pi D}\ln\frac{b}{r}-\frac{Pr}{4\pi D}\ln b+\frac{Pr}{8\pi D}.$$

Последние слагаемые, содержащие r в первой степени, можно отбросить, так как это повлияет лишь на величину постоянной C_1, тогда

$$\vartheta=C_1r+\frac{C_2}{r}+\frac{Pr}{4\pi D}\ln\frac{b}{r}.$$

Постоянную C_2 следует принять равной нулю, так как пластина сплошная (не кольцевая). Для определения постоянной C_1 необходимо использовать граничное условие на наружном краю пластины:

$$\vartheta=0 \quad \text{при} \quad r=b.$$

Из этого условия следует

$$C_1=0$$

и, следовательно,

$$\vartheta=\frac{P}{4\pi D}r\ln\frac{b}{r}.$$

Напишем еще выражения изгибающих моментов:

$$M_r=D\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right)=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{b}{r}-1\right];$$

$$M_t=D\left(\frac{\vartheta}{r}+\mu\frac{d\vartheta}{dr}\right)=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{b}{r}-\mu\right].$$

Эпюры моментов приведены на рис. 5.16.

При $r \to 0$ изгибающие моменты стремятся к бесконечности. Для центральной части пластины, однако, приведенное решение несправедливо. Это объясняется тем, что сила P фактически не может быть приложена в одной точке, а всегда бывает распределена по некоторой площадке. Кроме того, около центра пластины исходные гипотезы теории тонких пластин грубо нарушаются и поэтому сама теория неприменима.

Из изложенного следует, что приведенное решение годится лишь на некотором удалении от центра $\left(\text{при} \quad r \geqslant \frac{1}{20} b\right)$.

Вычислим напряжения около заделки и максимальный прогиб. При $r = b$

$$M_r = -\frac{P}{4\pi}; \quad M_t = -\mu \frac{P}{4\pi};$$

$$\sigma_{r\max} = -\frac{6P}{4\pi h^2}; \qquad \sigma_{t\max} = -\frac{6\mu P}{4\pi h^2};$$

$$w_{\max} = -\int_b^0 \vartheta \, dr = \int_0^b \frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{b}{r} = \frac{Pb^2}{16\pi D}.$$

§ 4. Расчет круглых осесимметричных пластин по методу начальных параметров

Рассматриваемый вариант метода начальных параметров разработан С. Н. Соколовым [22]. В основном он предназначен для расчета пластин при сложной нагрузке, однако он может быть эффективно использован также при расчете простых пластин, имеющих один участок.

Данный метод имеет следующие особенности:

1. При сложной нагрузке пластину делят на несколько участков. Функцию ϑ записывают таким образом, чтобы для каждого следующего участка полностью повторялось выражение для предыдущего участка и добавлялись только дополнительные слагаемые. Эти слагаемые подбирают так, чтобы условия сопряжения участков выполнялись при одних и тех же значениях постоянных интегрирования. Таким образом, при любом числе участков получают только две неопределенные постоянные.

2. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 выражают через начальные параметры. В качестве начальных параметров принимают величины $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}$ и $\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}$. Индекс 11 указывает, что данная величина относится к начальной точке первого участка. Аналогично в дальнейшем индексами $i1$ и $i2$ будут обозначаться величины, относящиеся к начальной и конечной точке i-го участка.

Из двух указанных начальных параметров один обычно бывает известен. Так, например, если внутренний край жестко заделан, то $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11} = 0$; если же край свободно оперт или не закреплен, то $\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11} = 0$. При упругой заделке или для сплошной пластины оба начальных параметра не известны, но могут быть связаны между собой определенным соотношением. Таким образом, во всех случаях неизвестным остается только второй параметр, который подлежит определению, согласно граничному условию на наружном краю пластины.

В общем случае на пластину могут действовать нагрузки следующих видов (рис. 5.17, *а*):

кольцевая сила P_k, Н, равномерно распределенная по окружности некоторого радиуса r_k;

равномерно распределенное давление q_j, Н/см², начинающееся на радиусе r_j;

момент m_l, Н·см/см, равномерно распределенный по окружности радиуса r_l.

На рис. 5.17, *б*, *в*, *г* каждая из этих нагрузок представлена отдельно.

Границы между участками выбирают в тех точках, где приложены силы или моменты или где начинается распределенная нагрузка q. В том случае, если распределенная нагрузка изменяется скачкообразно, она представляется как сумма двух нагрузок, каждая из которых продолжается до наружного края пластины.

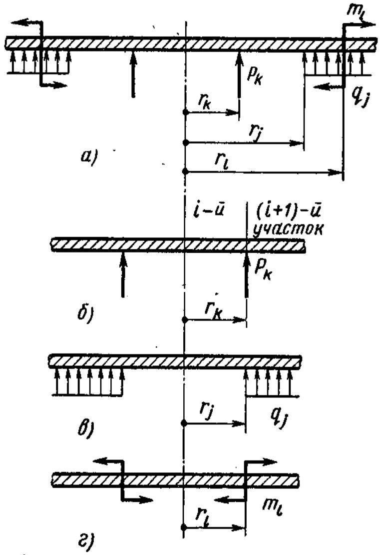


Рис. 5.17

Представим функцию ϑ для $(i+1)$-го участка в следующем виде:

$$\vartheta_{i+1} = \vartheta_i + \Phi(r). \quad (5.40)$$

Функция $\Phi(r)$ должна учитывать нагрузку, приложенную на границе участков, и должна быть выбрана так, чтобы удовлетворялись условия сопряжения участков.

Определим функцию $\Phi(r)$ для различных видов нагрузки.

За счет силы P_k, приложенной по окружности радиуса r_k (рис. 5.17, *б*) на $(i+1)$-м участке пластины, возникает дополнительная поперечная сила

$$Q_p = \frac{P}{2\pi r}.$$

Учитывая, что поперечная сила связана с функцией ϑ зависимостью (5.35), можно написать

$$\Phi_P(r) = \frac{1}{Dr}\int_a^r \left[r \int_a^r \left(\frac{P_k}{2\pi r}\right) dr \right] dr.$$

Нижний предел интегрирования выберем с таким расчетом, чтобы удовлетворялись условия сопряжения участков. На границе между участками должны быть непрерывны сама функция ϑ (угол поворота нормали), а также радиальный изгибающий момент M_r. Из условия непрерывности M_r, на основании зависимости (5.29), следует, что должна быть непрерывна также первая производная функции ϑ. Очевидно, что оба эти условия будут выполнены, если нижний предел принять равным радиусу границы между участками $a = r_k$. Тогда при $r = r_k$ интегралы обратятся в нуль и, следовательно,

$$\vartheta_{i+1} = \vartheta_i; \quad \vartheta'_{i+1} = \vartheta'_i.$$

Выполнив интегрирование и подставив пределы, получим

$$\Phi_P(r) = \frac{P_k}{4\pi D}\left[-r\ln\frac{r_k}{r} - \frac{r}{2}\left(1 - \frac{r_k^2}{r^2}\right)\right]. \qquad (5.41)$$

При равномерно распределенной нагрузке q_j, начинающейся на расстоянии r_j от центра (рис. 5.17, *в*), дополнительная поперечная сила для $(i + 1)$-го участка составляет

$$Q_q = \frac{q_j(r^2 - r_j^2)}{2r}.$$

Следовательно,

$$\Phi_q(r) = \frac{1}{Dr}\int\limits_{r_j}^{r}\left[r\int\limits_{r_j}^{r}\frac{q(r^2 - r_j^2)}{2r}\,dr\right]dr.$$

Условия сопряжения участков в этом случае такие же, как и в предыдущем. Чтобы эти условия удовлетворялись, нижний предел интегрирования следует принять равным радиусу границы между участками r_j.

После вычисления интегралов функция $\Phi_q(r)$ принимает вид

$$\Phi_q(r) = \frac{q_j r^2}{16D}\left[r\left(1 - \frac{r_j^4}{r^4}\right) + 4\frac{r_j^2}{r^2}\,r\ln\frac{r_j}{r}\right]. \qquad (5.42)$$

В случае нагружения моментной нагрузкой m_l, распределенной по окружности радиуса r_l (рис. 5.17, *г*), функция $\Phi(r)$ определяется иначе, так как моментная нагрузка поперечной силы не вызывает. Согласно равенству (5.35), при $Q_{(i+1)} = 0$ выражения функции ϑ на i-м и $(i + 1)$-м участках могут отличаться только постоянными интегрирования. Если для i-го участка постоянные равны соответственно C_1 и C_2, то для $(i + 1)$-го участка они могут быть представлены в виде $C_1 + A$ и $C_2 + B$, где A и B — некоторые дополнительные постоянные. Функция ϑ для $(i + 1)$-го участка

$$\vartheta_{i+1} = \vartheta_i + Ar + \frac{B}{r}.$$

Следовательно,

$$\Phi_m(r) = Ar + \frac{B}{r}.$$

Постоянные A и B следует выбирать так, чтобы удовлетворились условия сопряжения участков. На границе участков функция ϑ должна быть непрерывной, а момент M_r должен изменяться скачком на величину m_l. Отсюда следует, что при $r = r_l$

$$\vartheta_{(i+1)1} = \vartheta_{i2}, \text{ т. е. } \Phi_m(r_l) = A \cdot r_l + \frac{B}{r_l} = 0;$$

$$M_{r(i+1)1} = M_{ri2} + m,$$

т. е.

$$D\left[\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\,\frac{\vartheta}{r}\right]_{(i+1)\,1} = D\left[\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\,\frac{\vartheta}{r}\right]_{i2} + m_l.$$

Последнее равенство с учетом зависимости (5.40) приводит к уравнению

$$\Phi'_m(r_l) = \frac{m_l}{D} \text{ или } A - \frac{B}{r^2} = \frac{m_l}{D}.$$

В результате решения системы двух уравнений найдем

$$A = \frac{m}{2D}; \quad B = -\frac{m}{2D}\,r_l^2.$$

Тогда

$$\Phi_m(r) = \frac{mr}{2D}\left(1 - \frac{r_l^2}{r^2}\right). \tag{5.43}$$

Перейдем к случаю совместного действия различных нагрузок. Объединив все полученные выражения, можно написать следующее универсальное уравнение для всех участков:

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \Sigma\Phi_p(r) + \Sigma\Phi_q(r) + \Sigma\Phi_m(r). \tag{5.44}$$

В этом уравнении суммирование производится по числу нагрузок, приложенных внутри окружности, проходящей через рассматриваемую точку.

Выразим неопределенные постоянные C_1 и C_2 через начальные параметры.

Кольцевая пластина. За начальные параметры принимают $\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}$ и $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}$. В начальной точке первого участка, согласно уравнению (5.44)

$$\vartheta_{11} = C_1 r_{11} + \frac{C_2}{r_{11}}$$

или

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11} = C_1 + \frac{C_2}{r_{11}^2} \tag{5.45}$$

и

$$\frac{d\vartheta}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r_{11}^2}. \tag{5.46}$$

Следовательно,

$$M_{r11} = D\left[\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)_{11} + \mu\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\right] = D\left[C_1 - \frac{C_2}{r_{11}^2} + \mu\left(C_1 + \frac{C_2}{r_{11}^2}\right)\right] \tag{5.47}$$

или

$$\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11} = C_1(1+\mu) - \frac{C_2}{r_{11}^2}(1-\mu).$$

Решение системы двух уравнений (5.45) и (5.47) относительно C_1 и C_2 дает следующие значения постоянных:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11} + \frac{(1-\mu)}{2}\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}; \\ C_2 &= -\frac{r_{11}^2}{2}\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11} + \frac{(1+\mu)}{2} r_{11}^2 \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

Сплошная пластина ($r_{11} = 0$). Как уже было указано, постоянная C_2 для сплошной пластины равна нулю. Следовательно, взамен равенств (5.45) и (5.46) получим

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11} = \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)_{11} = C_1.$$

За начальный параметр примем изгибающий момент в центре, отнесенный к жесткости D:

$$\frac{M_{r11}}{D} = \frac{M_{t11}}{D} = \frac{M_0}{D}.$$

Чтобы выразить постоянную C_1 через начальный параметр, используем зависимость между моментами M_r, M_t и углом ϑ:

$$M_t = \mu M_r + \frac{\vartheta}{r}(1-\mu^2) D. \tag{5.49}$$

Эта зависимость получается в результате исключения $\frac{d\vartheta}{dr}$ из равенств (5.29) и (5.30). Так как в центре пластины $M_t = M_r = M_0$ и $\frac{\vartheta}{r} = C_1$, то на основании равенства (5.49)

$$C_1 = \frac{M_0}{(1+\mu) D}. \tag{5.50}$$

После подстановки значений постоянных уравнение (5.44) принимает вид:

для кольцевой пластины

$$\frac{\vartheta}{r} = \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\left[\frac{1-\mu}{2} + \frac{1+\mu}{2}\cdot\frac{r_{11}^2}{r^2}\right] + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_{11}^2}{r^2}\right)\right] + \\ + \sum \frac{1}{r}\Phi_P(r) + \sum \frac{1}{r}\Phi_q(r) + \sum \frac{1}{r}\Phi_m(r); \tag{5.51}$$

для сплошной пластины

$$\frac{\vartheta}{r} = \frac{M_0}{D(1+\mu)} + \sum \frac{1}{r}\Phi_P(r) + \sum \frac{1}{r}\Phi_q(r) + \sum \frac{1}{r}\Phi_m(r). \tag{5.52}$$

Внесем в уравнения (5.51) и (5.52) выражения функций $\Phi_P(r)$, $\Phi_q(r)$ и $\Phi_m(r)$ [см. равенства (5.41), (5.42) и (5.43)], а затем воспользуемся зависимостями (5.29), (5.30) и (5.39а).

После несложных преобразований получим следующие выражения: $\frac{\vartheta}{r}$; $\frac{M_r}{D}$; $\frac{M_t}{D}$; w в произвольной точке пластины.

Для кольцевой пластины

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta}{r} &= \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{\vartheta\vartheta}(\lambda_{11}) + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}\psi_{\vartheta m}(\lambda_{11}) + \\
&\quad + \sum \frac{P_k}{D}\psi_{\vartheta P}(\lambda_k) + \sum \frac{q_j r^2}{D}\psi_{\vartheta q}(\lambda_j) + \\
&\quad + \sum \frac{m_l}{D}\psi_{\vartheta m}(\lambda_l);\\
\frac{M_r}{D} &= \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{r\vartheta}(\lambda_{11}) + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}\psi_{rm}(\lambda_{11}) + \sum \frac{P_k}{D}\psi_{rP}(\lambda_k) + \\
&\quad + \sum \frac{q_j r^2}{D}\psi_{rq}(\lambda_j) + \sum \frac{m_l}{D}\psi_{rm}(\lambda_l);\\
\frac{M_t}{D} &= \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{t\vartheta}(\lambda_{11}) + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}\psi_{tm}(\lambda_{11}) + \sum \frac{P_k}{D}\psi_{tp}(\lambda_k) + \\
&\quad + \sum \frac{q_j r^2}{D}\psi_{tq}(\lambda_j) + \sum \frac{m_l}{D}\psi_{tm}(\lambda_l);\\
w &= w_{11} - \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11} r^2\psi_{w\vartheta}(\lambda_{11}) - \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11} r^2\psi_{wm}(\lambda_{11}) - \\
&\quad - \sum \frac{P_k r^2}{D}\psi_{wP}(\lambda_k) - \sum \frac{q_j r^4}{D}\psi_{wq}(\lambda_j) - \sum \frac{m_l r^2}{D}\psi_{wm}(\lambda_l).
\end{aligned}\right\} \quad (5.53)$$

Для сплошной пластины:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta}{r} &= \frac{M_0}{D(1+\mu)} + \sum \frac{P_k}{D}\psi_{\vartheta p}(\lambda_k) + \sum \frac{q_j r^2}{D}\psi_{\vartheta q}(\lambda_j) + \\
&\quad + \sum \frac{m_l}{D}\psi_{\vartheta m}(\lambda_l);\\
\frac{M_r}{D} &= \frac{M_0}{D} + \sum \frac{P_k}{D}\psi_{rP}(\lambda_k) + \sum \frac{q_j r^2}{D}\psi_{rq}(\lambda_j) + \\
&\quad + \sum \frac{m_l}{D}\psi_{rm}(\lambda_l);\\
\frac{M_t}{D} &= \frac{M_0}{D} + \sum \frac{P_k}{D}\psi_{tP}(\lambda_k) + \sum \frac{q_j r^2}{D}\psi_{tq}(\lambda_i) + \\
&\quad + \sum \frac{m_l}{D}\psi_{tm}(\lambda_l);\\
w &= w_0 - \frac{M_0 r^2}{2(1+\mu)D} - \sum \frac{P_k r^2}{D}\psi_{wp}(\lambda_k) - \\
&\quad - \sum \frac{q_j r^4}{D}\psi_{wq}(\lambda_j) - \sum \frac{m_l r^2}{D}\psi_{wm}(\lambda_l).
\end{aligned}\right\} \quad (5.54)$$

Содержащиеся в этих уравнениях специальные функции определяются по следующим формулам:

$$\psi_{\vartheta\vartheta}(\lambda) = \frac{1-\mu}{2} + \frac{1+\mu}{2}\lambda^2; \quad \psi_{r\vartheta}(\lambda) = \frac{1-\mu^2}{2}(1-\lambda^2);$$

$$\psi_{\vartheta m}(\lambda) = \frac{1-\lambda^2}{2}; \quad \psi_{rm}(\lambda) = \frac{1+\mu}{2} + \frac{1-\mu}{2}\lambda^2;$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\psi_{\vartheta P}(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\left[-\ln\lambda-\frac{1-\lambda^2}{2}\right];\quad \psi_{rP}(\lambda)=\\
&=\frac{1}{4\pi}\left[-(1+\mu)\ln\lambda+\frac{1-\mu}{2}(1-\lambda^2)\right];\\
&\psi_{\vartheta q}(\lambda)=\frac{1}{16}\left[1-\lambda^4+4\lambda^2\ln\lambda\right];\ \psi_{rq}(\lambda)=\frac{1}{4}\left[-\frac{(1-\mu)}{4}(1-\right.\\
&\left.-\lambda^4)+(1-\lambda^2)+(1+\mu)\lambda^2\ln\lambda\right];\\
&\psi_{t\vartheta}(\lambda)=\frac{1-\mu^2}{2}(1+\lambda^2);\quad \psi_{w\vartheta}(\lambda)=\frac{1}{4}\left[(1-\mu)(1-\lambda^2)-\right.\\
&\left.-(1+\mu)\,2\lambda^2\ln\lambda\right];\\
&\psi_{tm}(\lambda)=\frac{1+\mu}{2}-\frac{1-\mu}{2}\lambda^2;\ \psi_{wm}(\lambda)=\frac{1}{4}\left[1-\lambda^2+2\lambda^2\ln\lambda\right];\\
&\psi_{tP}(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\left[-(1+\mu)\ln\lambda-\frac{1-\mu}{2}(1-\lambda^2)\right];\\
&\psi_{wP}(\lambda)=\frac{1}{8\pi}\left[-(1+\lambda^2)\ln\lambda-(1-\lambda^2)\right];\\
&\psi_{tq}(\lambda)=\frac{1}{4}\left[\frac{(1-\mu)}{4}(1-\lambda^4)+\mu(1-\lambda^2)+(1+\mu)\lambda^2\ln\lambda\right];\\
&\psi_{wq}(\lambda)=\frac{1}{16}\left[\frac{1-\lambda^4}{4}+\lambda^2(1-\lambda^2)+\lambda^2(\lambda^2+2)\ln\lambda\right],
\end{aligned}
\right\}\tag{5.55}
$$

где $\lambda_i=\frac{r_i}{r}$ — безразмерная независимая переменная. Частные значения этой переменной:

$$\lambda_{1i}=\frac{r_{11}}{r};\quad \lambda_k=\frac{r_k}{r};\quad \lambda_j=\frac{r_j}{r};\quad \lambda_l=\frac{r_l}{r}.$$

Значения функций $\psi_{\vartheta\vartheta}$, $\psi_{\vartheta m}$ и т. д. приведены в табл. 5.1. Направления нагрузок P, q, m изгибающих моментов M_r, M_t и перемещений ϑ и w, принятые за положительные, указаны на рис. 5.9, 5.11 и 5.17.

Заметим, что для определения окружного изгибающего момента M_t вместо универсальных уравнений (5.53) и (5.54) иногда удобнее использовать зависимость (5.49).

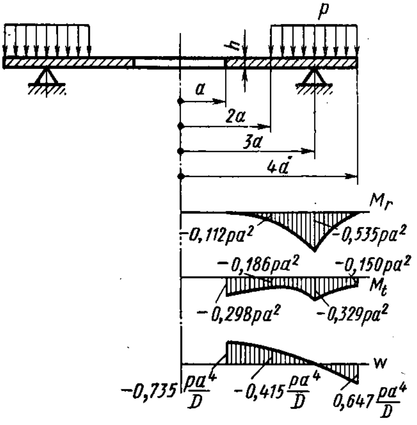


Рис. 5.18

Пример 5.5. Для кольцевой пластины (рис. 5.18) определить изгибающие моменты, напряжения и прогиб.

Дано: $a = 10$ см; $h = 2$ см, $p = 100$ Н/см²; материал — сталь; $E = 2\cdot10^7$ Н/см², $\mu = 0,3$.

Таблица 5.1

$\lambda = \frac{r_i}{r}$	$\psi_{\vartheta\vartheta}(\lambda)$	$\psi_{\vartheta m}(\lambda)$	$\psi_{\vartheta P}(\lambda)$	$\psi_{\vartheta q}(\lambda)$	$\psi_{r\vartheta}(\lambda)$	$\psi_{rm}(\lambda)$	$\psi_{rP}(\lambda)$	$\psi_{rq}(\lambda)$	$\psi_{t\vartheta}(\lambda)$	$\psi_{tm}(\lambda)$	$\psi_{tP}(\lambda)$	$\psi_{tq}(\lambda)$	$\psi_{w\vartheta}(\lambda)$	$\psi_{wm}(\lambda)$	$\psi_{wP}(\lambda)$	$\psi_{wq}(\lambda)$
0	0,35	0,5		$6,25\cdot10^{-2}$	0,455	0,65		0,2063	0,4550	0,65		0,1188	0,175	0,25		$1,562\cdot10^{-2}$
0,05	0,3516	0,4988	0,1988	$6,062\cdot10^{-2}$	0,4539	0,6509	0,3378	0,2032	0,4561	0,6491	0,2822	0,1161	0,1796	0,2456	0,0798	$1,484\cdot10^{-2}$
0,1	0,3565	0,4950	0,1439	$5,674\cdot10^{-2}$	0,4504	0,6535	0,2659	0,1963	0,4596	0,6465	0,2107	0,1105	0,1883	0,2360	0,0532	$1,335\cdot10^{-2}$
0,15	0,3646	0,4888	0,1121	$5,180\cdot10^{-2}$	0,4448	0,6579	0,2235	0,1868	0,4652	0,6421	0,1691	0,1032	0,1989	0,2230	0,0383	$1,159\cdot10^{-2}$
0,2	0,3760	0,4800	0,0899	$4,630\cdot10^{-2}$	0,4368	0,6640	0,1933	0,1754	0,4732	0,6360	0,1398	0,0948	0,2099	0,2078	0,0284	$0,979\cdot10^{-2}$
0,25	0,3906	0,4688	0,0730	$4,059\cdot10^{-2}$	0,4266	0,6719	0,1696	0,1626	0,4834	0,6281	0,1173	0,0857	0,2204	0,1911	0,0213	$0,806\cdot10^{-2}$
0,3	0,4085	0,4550	0,0596	$3,491\cdot10^{-2}$	0,4140	0,6815	0,1499	0,1489	0,4960	0,6185	0,0992	0,0764	0,2298	0,1733	0,0160	$0,646\cdot10^{-2}$
0,35	0,4296	0,4388	0,0486	$2,941\cdot10^{-2}$	0,3993	0,6929	0,1331	0,1345	0,5107	0,6071	0,0842	0,0671	0,2372	0,1551	0,0120	$0,505\cdot10^{-2}$
0,4	0,4540	0,4200	0,0395	$2,425\cdot10^{-2}$	0,3822	0,7060	0,1182	0,1197	0,5278	0,5940	0,0714	0,0580	0,2423	0,1367	0,00887	$0,383\cdot10^{-2}$
0,45	0,4816	0,3988	0,0318	$1,951\cdot10^{-2}$	0,3629	0,7209	0,1048	0,1049	0,5471	0,5791	0,0604	0,0492	0,2447	0,1185	0,00647	$0,282\cdot10^{-2}$
0,5	0,5125	0,3750	0,0253	$1,527\cdot10^{-2}$	0,3412	0,7375	0,0926	0,0902	0,5688	0,5625	0,0508	0,0409	0,2440	0,1009	0,00463	$0,2\cdot10^{-2}$
0,55	0,5466	0,3488	0,0198	$1,156\cdot10^{-2}$	0,3174	0,7559	0,0813	0,0759	0,5926	0,5441	0,0424	0,0333	0,2397	0,0840	0,00323	$0,135\cdot10^{-2}$
0,60	0,5840	0,3200	0,0152	$8,42\cdot10^{-3}$	0,2912	0,7760	0,0707	0,0622	0,6188	0,5240	0,0350	0,0263	0,2316	0,0681	0,00218	$8,75\cdot10^{-4}$
0,65	0,6246	0,2888	0,0113	$5,84\cdot10^{-3}$	0,2628	0,7979	0,0608	0,0493	0,6472	0,5021	0,0285	0,0201	0,2195	0,0534	0,00140	$5,29\cdot10^{-4}$
0,7	0,6685	0,2550	0,0081	$3,80\cdot10^{-3}$	0,2320	0,8215	0,0511	0,0375	0,6780	0,4785	0,0227	0,0147	0,2029	0,0401	$853\cdot10^{-6}$	$2,94\cdot10^{-4}$
0,75	0,7156	0,2188	0,00549	$2,27\cdot10^{-3}$	0,1991	0,8469	0,0420	0,0269	0,7109	0,4531	0,0176	0,0101	0,1818	0,0285	$478\cdot10^{-6}$	$1,45\cdot10^{-4}$
0,8	0,7660	0,1800	0,00343	$1,19\cdot10^{-3}$	0,1638	0,8740	0,0331	0,0177	0,7462	0,4260	0,0131	0,00642	0,1559	0,0185	$237\cdot10^{-6}$	$61\cdot10^{-6}$
0,85	0,8196	0,1388	0,00189	$5,20\cdot10^{-4}$	0,1263	0,9029	0,0245	0,0103	0,7837	0,3971	0,00908	0,00356	0,1249	0,0108	$97\cdot10^{-6}$	$19,7\cdot10^{-6}$
0,9	0,8765	0,0950	0,00082	$1,58\cdot10^{-4}$	0,0864	0,9335	0,0162	0,00472	0,8236	0,3665	0,00561	0,00156	0,0888	0,00483	$28\cdot10^{-6}$	$4,0\cdot10^{-6}$
0,95	0,9366	0,0488	$2,02\cdot10^{-4}$	$2,03\cdot10^{-5}$	0,0444	0,9659	0,0080	0,00121	0,8656	0,3341	0,00259	0,00038	0,0472	0,00123	$34\cdot10^{-7}$	$0,3\cdot10^{-6}$
1,00	1,0	0	0	0	0	1,0	0	0	0,91	0,3	0	0	0	0	0	0

При вычислениях принято $\mu = 0,3$.

На кольцевой опоре возникает сила

$$P=p\pi\left[(4a)^2-(2a)^2\right]=12p\pi a^2.$$

Разобьем пластину на три участка.

Так как внутренний край не закреплен, то $\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}=0.$

Второй начальный параметр $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}$ пока неизвестен и подлежит определению согласно граничному условию на наружном краю пластины. В данном случае наружный край также свободен, следовательно,

при $r=r_{32}=4a$ $M_r=0$.

Используя второе уравнение (5.53), напишем это граничное условие в развернутом виде (в данном случае $q=-p$):

$$\left(\frac{M}{D}\right)_{32}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{r\vartheta}(0{,}25)-\frac{p\,(4a)^2}{D}\psi_{rq}(0{,}5)+\frac{12p\pi a^2}{D}\psi_{rp}(0{,}75)=0.$$

Подставив значения функций $\psi_{r\vartheta}(0{,}25)=0{,}4266$; $\psi_{rq}(0{,}5)=0{,}0902$ и $\psi_{rp}(0{,}75)=0{,}0420$ (см. табл. 5.1) и решив уравнение, найдем неизвестный начальный параметр

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}=0{,}328\,\frac{pa^2}{D}.$$

Далее, пользуясь уравнениями (5.53), можно вычислить M_r, M_t и w в любой точке пластины:

$$\text{при } r=r_{11}=a\quad \lambda_{11}=1;\quad \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}=0;$$

$$\left(\frac{M_t}{D}\right)_{11}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{t\vartheta}(1)=-0{,}298\,\frac{pa^2}{D}.$$

При $r=r_{12}=2a$ $\lambda_{11}=0{,}5$;

$$\left(\frac{M_r}{D}\right)_{12}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{r\vartheta}(0{,}5)=-0{,}112\,\frac{pa^2}{D};$$

$$\left(\frac{M_t}{D}\right)_{12}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{t\vartheta}(0{,}5)=-0{,}186\,\frac{pa^2}{D};$$

$$w_{12}-w_{11}=-\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}(2a^2)\,\psi_{w\vartheta}(0{,}5)=0{,}320\,\frac{pa^4}{D}.$$

При $r=r_{22}=3a$ (второй участок)

$$\left(\frac{M_r}{D}\right)_{22}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{r\vartheta}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{p\,(3a)^2}{D}\psi_{rq}\left(\frac{2}{3}\right)=-0{,}535\,\frac{pa^2}{D};$$

$$\left(\frac{M_t}{D}\right)_{22}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{t\vartheta}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{p\,(3a)^2}{D}\psi_{tq}\left(\frac{2}{3}\right)=-0{,}329\,\frac{pa^2}{D};$$

$$w_{22}-w_{11}=-\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}(3a)^2\psi_{w\vartheta}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{p\,(3a)^4}{D}\psi_{wq}\left(\frac{2}{3}\right)=0{,}735\,\frac{pa^4}{D}.$$

При $r=r_{32}=4a$ (третий участок)

$$\left(\frac{M_r}{D}\right)_{32}=0;$$

$$\left(\frac{M_t}{D}\right)_{32}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{t\vartheta}\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{p\,(4a)^2}{D}\psi_{tq}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{12p\pi a^2}{D}\psi_{tp}\left(\frac{3}{4}\right)=-0{,}150\,\frac{pa^2}{D};$$

$$w_{32}-w_{11}=-\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}(4a)^2\,\psi_{w\vartheta}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{p\,(4a)^4}{D}\psi_{wq}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{12p\pi a^2}{D}(4a)^2\psi_{wp}\left(\frac{3}{4}\right)=$$

$$=1{,}382\,\frac{pa^4}{D}.$$

Учитывая, что на опоре при $r = r_{22} = 3a$ прогиб $w_{22} = 0$, найдем

$$w_{11} = -0{,}735\,\frac{pa^4}{D};$$

$$w_{12} = w_{21} = w_{11} + 0{,}320\,\frac{pa^4}{D} = -0{,}415\,\frac{pa^4}{D};$$

$$w_{32} = w_{11} + 1{,}382\,\frac{pa^4}{D} = 0{,}647\,\frac{pa^4}{D}.$$

Эпюры изгибающих моментов и прогибов представлены на рис. 5.18. Над опорой изгибающие моменты достигают наибольшей величины

$$M_{r\max} = -0{,}535pa^2;$$

$$M_{t\max} = -0{,}329pa^2.$$

Максимальные напряжения

$$\sigma_{r\max} = \frac{M_{r\max}}{\frac{h^2}{6}} = 8020\ \text{Н/см}^2;$$

$$\sigma_{t\max} = \frac{M_{t\max}}{\frac{h^2}{6}} = 4930\ \text{Н/см}^2.$$

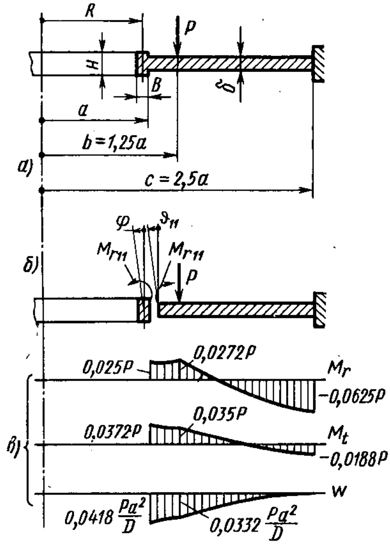


Рис. 5.19

Пример 5.6. Пластина, жестко заделанная по наружному краю и подкрепленная по внутреннему краю кольцевым ребром, нагружена силой P, приложенной по окружности радиуса b (рис. 5.19, *а*).

Дано: $a = 10\delta$; $b = 1{,}25a$; $c = 2{,}5a$; $B = \delta$; $H = 2\delta$; $R = 9{,}5\delta$.

В данном примере оба начальных параметра неизвестны. Для того чтобы выразить один начальный параметр через второй, отделим ребро от пластины и определим угол поворота поперечного сечения ребра φ в зависимости от момента M_{r11} (рис. 5.19, *б*). Так как ребро невысокое, его можно рассматривать как кольцо с недеформируемым поперечным сечением.

По условию равновесия половины кольца найдем изгибающий момент в поперечном сечении

$$M = M_{r11}a.$$

Угол φ определим по зависимости (4.22) теории осесимметричной деформации колец:

$$\varphi = \frac{M}{EJ_з} \cong \frac{MR}{EJ_x},$$

где $J_x = \dfrac{BH^3}{12}$ — момент инерции сечения ребра.

После подстановки заданных величин получим

$$\varphi = \frac{M_{r11}\cdot a\cdot 9{,}5\delta}{E\,\frac{\delta\,(2\delta)^3}{12}} = 1{,}305\,\frac{M_{r11}a}{D}.$$

Угол поворота сечения ребра равен углу ϑ_{11} при $r_{11} = a$; следовательно,

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11} = 1{,}305\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}.$$

Эта зависимость связывает оба начальных параметра. Используем теперь граничное условие на наружном краю пластины.

При $r = c = 2{,}5a$ $\vartheta = 0$.

Пользуясь вторым уравнением (5.53), напишем это условие в развернутом виде

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{22} = \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11} \psi_{\vartheta\vartheta}(0{,}4) + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11} \psi_{\vartheta m}(0{,}4) - \frac{P}{D}\psi_{\vartheta P}(0{,}5) = 0.$$

Подставив в это уравнение значения функций, найденные по табл. 5.1

$$\psi_{\vartheta\vartheta}(0{,}4) = 0{,}4540, \quad \psi_{\vartheta m}(0{,}4) = 0{,}4200, \quad \psi_{\vartheta P}(0{,}5) = 0{,}0253$$

и решив систему двух уравнений с двумя неизвестными, получим значения начальных параметров

$$\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11} = 0{,}0250\,\frac{P}{D}; \quad \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11} = 0{,}0326\,\frac{P}{D}.$$

Далее нетрудно по уравнению (5.53) вычислить M_r, M_t и w в любой точке пластины.

При $r = a$ $M_{r11} = 0{,}025P$;

$$M_{t11} = D\left[\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{t\vartheta}(1) + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}\psi_{tm}(1)\right] = 0{,}0372P.$$

При $r = b = 1{,}25a$

$$M_{r12} = D\left[\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{r\vartheta}(0{,}8) + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}\psi_{rm}(0{,}8)\right] = 0{,}0272P;$$

$$M_{t12} = D\left[\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{t\vartheta}(0{,}8) + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}\psi_{tm}(0{,}8)\right] = 0{,}0350P;$$

$$w_{12} - w_{11} = -\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}(1{,}25a)^2\psi_{w\vartheta}(0{,}8) - \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}(1{,}25a)^2\psi_{wm}(0{,}8) = -0{,}00866\,\frac{Pa^2}{D}.$$

При $r = c = 2{,}5a$

$$M_r = D\left[\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{r\vartheta}(0{,}4) + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}\psi_{rm}(0{,}4) - \frac{P}{D}\psi_{rP}(0{,}5)\right] = -0{,}0625P;$$

$$M_t = D\left[\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\psi_{t\vartheta}(0{,}4) + \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}\psi_{rm}(0{,}4) - \frac{P}{D}\psi_{tP}(0{,}5)\right] = -0{,}0188P;$$

$$w_{22} - w_{11} = -\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}(2{,}5a)^2\psi_{w\vartheta}(0{,}4) - \left(\frac{M_r}{D}\right)_{11}(2{,}5a)^2\psi_{wm}(0{,}4) + \frac{P}{D}(2{,}5a)^2\psi_{wP}(0{,}5) = -0{,}0418\,\frac{Pa^2}{D}.$$

Так как $w_{22} = 0$, то из последнего равенства следует, что макимальный прогиб $w_{11} = 0{,}0418\,\frac{Pa^2}{D}$.

Рассмотренный метод расчета круглых пластин имеет следующие недостатки:

он применим только при постоянной толщине пластины;

при большом числе участков выражения функций ϑ, M_r, M_t становятся громоздкими и при вычислениях приходится находить малые разности больших величин.

§ 5. Круглые пластины ступенчато-переменной толщины, подкрепленные кольцевыми ребрами

Рассмотрим другой вариант метода начальных параметров, применяемый для расчета пластин как постоянной толщины, так и ступенчато переменной толщины, а также пластин, подкрепленных кольцевыми ребрами.

Заданную пластину делят на несколько участков, границы между которыми устанавливают в местах приложения сосредоточенных сил и моментов, а также там, где скачкообразно изменяется или давление, или толщина пластины, или где расположены кольцевые ребра. В пределах каждого участка толщина пластины и интенсивность поверхностной нагрузки q считаются постоянными.

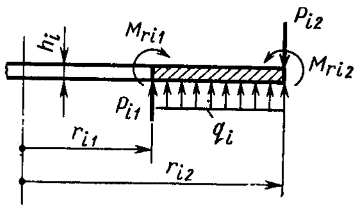


Рис. 5.20

Рассмотрим произвольный i-й участок пластины (рис. 5.20). Введем обозначения:

r_{i1} и r_{i2} — внутренний и наружный радиусы участка;

h_i — толщина;

$D_i = \dfrac{Eh_i^3}{12(1-\mu^2)}$ — изгибная жесткость на i-м участке;

$D_1 = \dfrac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)}$ — изгибная жесткость на первом участке;

P_{i1} — суммарная поперечная сила на внутреннем контуре i-го участка, Н.

Напряженное и деформированное состояние в каждой точке пластины можно охарактеризовать вектором состояния

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{\vartheta}{r} \\ \dfrac{M_r}{D_1} \end{pmatrix}. \qquad (5.56)$$

Зная компоненты этого вектора, можно по уравнению (5.49) определить окружной изгибающий момент M_t, после чего легко вычислить напряжения и прогиб.

Выразим компоненты вектора состояния в конце i-го участка через их значения в начале участка. Для этого применим первые два уравнения (5.53) к отдельно взятому i-му участку. В этом случае вместо $\left(\dfrac{\vartheta}{r}\right)_{11}$ и $\left(\dfrac{M_r}{D}\right)_{11}$ в уравнения (5.53) следует подставить

$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{i1}$ и $\left(\frac{M_r}{D_i}\right)_{i1}$ вместо $p_k - p_{i1}$; вместо $q_j - q_i$ и вместо λ_{11}, λ_k и $\lambda_j \to \lambda_i = \frac{r_{i1}}{r_{i2}}$. В результате получим

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{i2} = \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{i1} \psi_{\vartheta\vartheta}(\lambda_i) + \left(\frac{M_r}{D_1}\right)_{i1} \frac{D_1}{D_i} \psi_{\vartheta m}(\lambda_i) + \frac{P_{i1}}{D_1} \cdot \frac{D_1}{D_i} \psi_{\vartheta P}(\lambda_i) + \\ + \frac{q_i r_{i2}^2}{D_1} \cdot \frac{D_1}{D_i} \psi_{\vartheta q}(\lambda_i);$$

$$\left(\frac{M_r}{D_1}\right)_{i2} = \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{i1} \frac{D_i}{D_1} \psi_{r\vartheta}(\lambda_i) + \left(\frac{M_r}{D_1}\right)_{i1} \psi_{rm}(\lambda_i) + \frac{P_{i1}}{D_1} \psi_{\vartheta P}(\lambda_i) + \\ + \frac{q_i r_{i2}^2}{D_1} \psi_{rq}(\lambda_i).$$

Эти уравнения можно представить в матричной форме

$$X_{i2} = L_i X_{i1} + R_i, \qquad (5.57)$$

где X_{i1} и X_{i2} — значения вектора состояния в начале и в конце участка;

L_i — матрица перехода от начала к концу участка

$$L_i = \begin{pmatrix} \psi_{\vartheta\vartheta}(\lambda_i) & \frac{D_1}{D_i} \psi_{\vartheta m}(\lambda_i) \\ \frac{D_i}{D_1} \psi_{r\vartheta}(\lambda_i) & \psi_{rm}(\lambda_i) \end{pmatrix}; \qquad (5.58)$$

R_i — нагрузочный член, представляющий собой матрицу столбец

$$R_i = \begin{pmatrix} \frac{P_{i1}}{D_1} \cdot \frac{D_1}{D_i} \psi_{\vartheta P}(\lambda_i) + \frac{q_i r_{i2}^2}{D_1} \cdot \frac{D_1}{D} \psi_{\vartheta q}(\lambda_i) \\ \frac{P_{i1}}{D_1} \psi_{rP}(\lambda_i) + \frac{q_i r_{i2}^2}{D_1} \psi_{rq}(\lambda_i) \end{pmatrix}. \qquad (5.59)$$

Рассмотрим вначале пластину с несколькими участками различной толщины, но без кольцевых ребер. В этом случае на основании условий сопряжения участков функции $\frac{\vartheta}{r}$ и $\frac{M_r}{D_1}$ должны быть непрерывными. Следовательно, значения вектора X в конце предыдущего и в начале следующего участка должны быть одинаковы.

Если были бы известны оба начальных параметра (оба компонента вектора X_{11} в начальной точке), то, пользуясь уравнением (5.57) и переходя от участка к участку, можно было бы определить значения вектора X во всех точках пластины.

В действительности, однако, один из двух начальных параметров неизвестен и подлежит определению из граничного условия на наружном контуре пластины.

В связи с этим целесообразно применить способ двух расчетов.

Представим вектор X в виде суммы

$$X = \overline{X} \cdot C + \overline{\overline{X}}, \tag{5.60}$$

где C — неопределенный коэффициент.

Вектор $\overline{X}$ первого расчета вычисляют без учета внешней нагрузки, т. е. при $\overline{R}_i = 0$.

В начальной точке первого участка вектор $\overline{X}$ выбирают с учетом начальных условий:

а) для внутреннего жестко заделанного края $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11} = 0$ и

$$\overline{X}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

б) для края, шарнирно опертого или свободного, $\left(\frac{M_r}{D}\right)_{11} = 0$ и

$$\overline{X}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

это же значение следует принимать, если к внутреннему краю приложен распределенный радиальный момент заданной интенсивности;

в) для пластины, подкрепленной по внутреннему краю кольцевым ребром:

$$\overline{X}_{11} = \begin{pmatrix} K \\ 1 \end{pmatrix},$$

где K — относительная податливость ребра.

В том случае, когда ребро можно рассматривать как кольцо с недеформируемым поперечным сечением:

$$K = \frac{RD_1}{EJ_x}, \tag{5.61}$$

где R — средний радиус ребра;

г) для сплошной (не кольцевой) пластины следует принять

$$\overline{X}_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\mu} \\ 1 \end{pmatrix},$$

так как в этом случае $\left(\frac{\overline{M}_r}{D}\right)_{11} = \left(\frac{\overline{M}_t}{D}\right)_{11} = 1$ и, следовательно, на основании уравнения (5.49)

$$\left(\frac{\overline{\vartheta}}{r}\right)_{11} = \frac{1}{1+\mu}.$$

Вектор $\overline{\overline{X}}$ второго расчета вычисляют с учетом заданной нагрузки. Перед началом второго расчета вычисляют усилия P_{i1} в начальной точке каждого участка. Вектор $\overline{\overline{X}}_{11}$ в начальной точке первого участка во всех случаях принимают равным нулю, за исключением двух случаев:

а) по внутренней кромке пластина нагружена моментом m Н·см/см; тогда

$$\overline{\overline{X}}_{11}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{m}{D_1}\end{pmatrix};$$

б) внутренний край пластины усилен кольцевым ребром, к которому приложены внешние силы, тогда

$$\overline{\overline{X}}_{11}=\begin{pmatrix}\varphi\\ 0\end{pmatrix},$$

где φ — угол поворота сечения ребра, вычисленный с учетом только внешних сил, приложенных к ребру.

Суммарный вектор состояния $X = \overline{X}C + \overline{\overline{X}}$ должен удовлетворить граничным условиям на внутреннем и на наружном краях пластины. Удовлетворение указанным условиям на внутреннем краю обеспечено соответствующим подбором начальных параметров первого и второго расчетов независимо от величины коэффициента C. Удовлетворить граничное условие на наружном краю можно подбором коэффициента C. В наружной точке последнего участка при $r = r_{n2}$

$$X_{n2}=\overline{X}_{n2}C+\overline{\overline{X}}_{n2}=\begin{pmatrix}\left(\frac{\overline{\vartheta}}{r}\right)_{n2}C+\left(\frac{\overline{\overline{\vartheta}}}{r}\right)_{n2}\\ \left(\frac{\overline{M}_r}{D_1}\right)C+\left(\frac{\overline{\overline{M}}_r}{D_1}\right)\end{pmatrix}.$$

Если наружный край заделан, то

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{n2}=\left(\frac{\overline{\vartheta}}{r}\right)_{n2}C+\left(\frac{\overline{\overline{\vartheta}}}{r}\right)_{n2}=0.$$

Если наружный край шарнирно оперт или свободен, то

$$\left(\frac{M_r}{D_1}\right)_{n2}=\left(\frac{\overline{M}_r}{D_1}\right)_{n2}C+\left(\frac{\overline{\overline{M}}_r}{D}\right)_{n2}=0.$$

При нагружении пластины по наружному краю моментом m последнее выражение следует приравнять отношению $\frac{m}{D_1}$.

Если же наружный край подкреплен кольцевым ребром, то $\left(\frac{M_r}{D_1}\right)_{n2}$ и $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{n2}$ связаны следующим равенством:

$$\left(\frac{M_r}{D_1}\right)_{n2}\frac{DR}{EJ_x}=-\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{n2}$$

или

$$\left[\left(\frac{\overline{M}_r}{D_1}\right)_{n2}C+\left(\frac{\overline{\overline{M}}_r}{D}\right)_{n2}\right]\frac{DR}{EJ_x}=\left(\frac{\overline{\vartheta}}{r}\right)_{n2}C+\left(\frac{\overline{\overline{\vartheta}}}{r}\right)_{n2}.$$

Определив из этих уравнений коэффициент C, можно по зависимости (5.60) вычислить вектор X во всех точках пластины.

Второй компонент этого вектора дает непосредственно величину изгибающего момента в радиальном направлении M_r. Окружной изгибающий момент M_t легко определить по компонентам вектора X с помощью зависимости (5.49).

Для определения прогиба пластины применим четвертое уравнение системы (5.53) к i-му участку пластины. В результате получим выражение разности прогибов в конце и в начале участка:

$$w_{i2}-w_{i1}=-r_{i2}^{2}\psi_{w\vartheta}(\lambda_i)\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{i1}-r_{i2}^{2}\psi_{wm}(\lambda_i)\left(\frac{M_r}{D_1}\right)_{11}\frac{D_1}{D_i}-\frac{P_{i1}}{D_1}\times$$
$$\times\frac{D_1}{D_i}r_{i2}^{2}\psi_{wP}(\lambda_i)-\frac{q_i r_{i2}^{4}}{D_1}\cdot\frac{D_1}{D_i}\psi_{wq}(\lambda_i). \qquad (5.62)$$

Применяя эту формулу последовательно к каждому участку и учитывая условие равенства нулю прогиба на опоре, нетрудно определить прогиб в любой точке пластины.

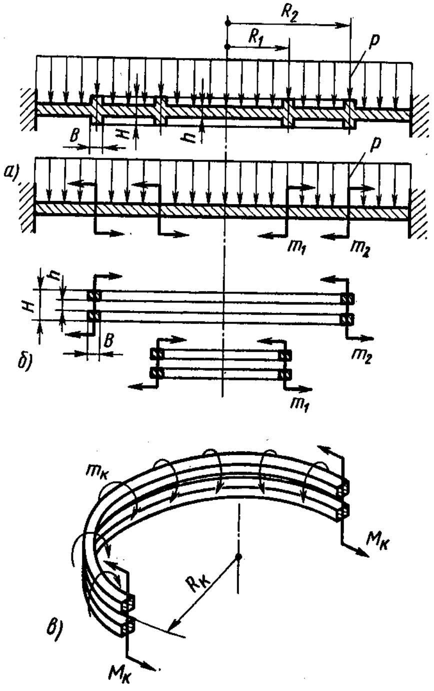


Рис. 5.21

Остановимся теперь на расчете осесимметричных пластин, подкрепленных несколькими кольцевыми ребрами (рис. 5.21, *а*). Будем считать, что ребра расположены не часто. Если высота ребер не велика по сравнению с их шириной, а также с толщиной пластины, то их можно рассматривать как кольца. Вначале рассмотрим случай, когда ребра расположены симметрично с обеих сторон пластины. Отделив мысленно ребра от пластины, как показано на рис. 5.21, *б*, приложим к ребрам и к пластине моменты m_1, m_2. Рассмотрим k-е ребро. Ширину и высоту ребра обозначим через B_k и H_k, средний радиус — через R_k.

Согласно условию равновесия половины ребра (см. рис. 5.21, *в*), изгибающий момент в сечении ребра

$$M_k=m_kR_k.$$

По уравнению (4.22) теории деформации колец найдем зависимость между углом поворота поперечного сечения φ_k и интенсивностью момента m_k:

$$\varphi_k\cong\frac{M_kR_k}{EJ_x}\cong\frac{m_kR_k^2}{EJ_x},$$

где J_x — момент инерции сечения ребра.

Пусть вектор состояния в конечной точке предшествующего ребру участка будет $X_{(i-1)2}$, а в начальной точке следующего участка X_{i1}.

Тогда, приняв во внимание условия сопряжения $(i-1)$-го и i-го участков и ребра, можно написать:

$$r_{i1} = r_{(i-1)2} = R_k;$$
$$\vartheta_{i1} = \vartheta_{(i-1)2} = \varphi_k;$$
$$M_{ri1} = M_{r(i-1)2} + m_k = M_{r(i-1)2} + \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{(i-1)2} \frac{EJ_x}{R_k}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{i1} = \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{(i-1)2};$$
$$\left(\frac{M_r}{D_1}\right)_{i1} = \left(\frac{M_r}{D_1}\right)_{(i-1)2} + \left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{(i-1)2} \frac{EJ_k}{R_k D_1}$$

или

$$X_{i1} = LX_{(i-1)2}, \tag{5.63}$$

где L — матрица перехода через ребро;

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{EJ_x}{R_k D_1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.64}$$

С помощью уравнения (5.63) определяют значения векторов $\bar{X}$ и $\bar{\bar{X}}$ за ребром по их значениям перед ребром. В остальном методика расчета пластины с ребрами ничем не отличается от методики расчета пластин без ребер.

Для вычисления напряжений, возникающих в ребрах, целесообразно использовать формулу (4.12) теории деформации колец, которая применительно к данному случаю принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{\varphi_k E z_{\max}}{R_k}, \tag{5.65}$$

где $z_{\max}$ — расстояние от срединной плоскости пластины до наиболее удаленной точки.

Изложенная методика расчета пластин с ребрами применима также при одностороннем расположении ребер, при условии, что жесткость пластины на растяжение велика по сравнению с жесткостью на растяжение ребер. В этом случае можно приближенно считать, что сечение ребра поворачивается относительно центра, расположенного на срединной плоскости пластины.

В случае тонкой пластины с односторонними массивными ребрами необходимо применять более сложную методику расчета, учитывающую растяжение срединной плоскости.

При большой высоте ребер необходимо учитывать искаженные формы их поперечного сечения (см. гл. 8).

Пример 5.7. Рассчитать ступенчатую плиту, схема которой приведена на рис. 5.22.

Дано: $h_1 = 1$ см; $h_2 = 1,26$ см; $a = 10$ см; $b = 2a = 20$ см; $p = 20 Н/см^2$; $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см²; $\mu = 0,3$.

Пластина имеет два участка:

$$\lambda_1 = \frac{0}{a} = 0; \qquad \lambda_2 = \frac{a}{b} = 0,5.$$

Величина поперечной силы в начале первого участка $P_{1i} = 0$ и в начале второго участка $P_{21} = -p\pi a^2$; распределенная нагрузка $q_1 = q_2 = -p$.

Жесткость пластины на первом участке

$$D_1 = \frac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)} = 1,83 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

и на втором участке

$$D_2 = \frac{Eh_2^3}{12(1-\mu^2)} = 3,66 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Следовательно, $D_2 = 2D_1$.

Выполним первый расчет (заданную нагрузку не учитываем). Поскольку пластина сплошная, принимаем

$$\overline{X}_{11} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+\mu} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,769 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Используя равенства (5.57), (5.58), найдем вектор $\overline{X}$ в конце первого и в начале второго участка:

$$\overline{X}_{12} = \overline{X}_{21} = L_1 \overline{X}_{11} = \begin{pmatrix} \psi_{\vartheta\vartheta}(0) & \psi_{\vartheta m}(0) \\ \psi_{r\vartheta}(0) & \psi_{rm}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,769 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,5 \\ 0,455 & 0,65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,769 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,769 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определим вектор $\overline{X}$ в конце второго участка:

$$\overline{X}_{22} = L_2 \overline{X}_{2i} = \begin{pmatrix} \psi_{\vartheta\vartheta}(0,5) & \dfrac{D_1}{D_2} \psi_{\vartheta m}(0,5) \\ \dfrac{D_2}{D_1} \cdot \psi_{r\vartheta}(0,5) & \psi_{rm}(0,5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,769 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5125 & \dfrac{1}{2} 0,375 \\ 2 \cdot 0,3412 & 0,7375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,769 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5816 \\ 1,2625 \end{pmatrix}.$$

Выполним второй расчет.

Вектор $\overline{\overline{X}}_{11}$ в начальной точке принимаем равным нулю; P_{1i} также равно нулю.

По уравнениям (5.57)—(5.59) находим

$$\overline{\overline{X}}_{12} = \overline{\overline{X}}_{21} = \begin{pmatrix} -\dfrac{pa^2}{D_1} \psi_{\vartheta q}(0) \\ -\dfrac{pa^2}{D_1} \psi_{rq}(0) \end{pmatrix} = -\frac{pa^2}{D_1} \begin{pmatrix} 6,25 \cdot 10^{-2} \\ 0,2063 \end{pmatrix};$$

$$\overline{\overline{X}}_{22} = L_2 \overline{\overline{X}}_{21} + R_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_{\vartheta\vartheta}(0,5) & \dfrac{D_1}{D_2} \psi_{\vartheta m}(0,5) \\ \dfrac{D_2}{D_1} \psi_{r\vartheta}(0,5) & \psi_{rm}(0,5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6,25 \cdot 10^{-2} \\ 0,2063 \end{pmatrix} \left(-\frac{pa^2}{D_1}\right) +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\dfrac{p\pi a^2}{D_1} \cdot \dfrac{D_1}{D} \psi_{\vartheta p}(0,5) - \dfrac{p(2a)^2}{D_1} \cdot \dfrac{D_1}{D} \psi_{\vartheta q}(0,5) \\ -\dfrac{p\pi a^2}{D_1} \psi_{rP}(0,5) - \dfrac{p(2a)^2}{D_1} \psi_{rq}(0,5) \end{pmatrix} = -\frac{pa^2}{D_1} \begin{pmatrix} 0,1409 \\ 0,8465 \end{pmatrix}.$$

Используя граничное условие на наружном краю пластины, определим коэффициент C.

В данном случае

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{22}=\left(\frac{\bar{\vartheta}}{r}\right)_{22}C+\left(\frac{\bar{\bar{\vartheta}}}{r}\right)_{22}=0$$

или

$$0{,}5816\,C-\frac{pa^2}{D_1}\,0{,}1409=0,$$

откуда

$$C=0{,}242\,\frac{pa^2}{D_1}.$$

Согласно равенству (5.60), вычислим значения вектора X:

$$x_{11}=\begin{pmatrix}0{,}186\\0{,}242\end{pmatrix}\frac{pa^2}{D_1};\quad X_{12}=X_{21}=\begin{pmatrix}0{,}1236\\0{,}0357\end{pmatrix}\frac{pa^2}{D_1};$$

$$X_{22}=\begin{pmatrix}0\\-0{,}5405\end{pmatrix}\frac{pa^2}{D_1}.$$

Второй компонент вектора X, умноженный на D_1, дает величину радиального момента M_r.

Окружной момент M_t и разность прогибов в начале и в конце каждого участка вычислим по зависимостям (5.49), (5.62).

Эпюры моментов M_r и M_t и перемещений w приведены на рис. 5.22.

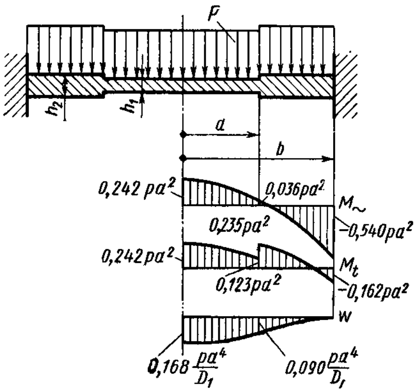


Рис. 5.22

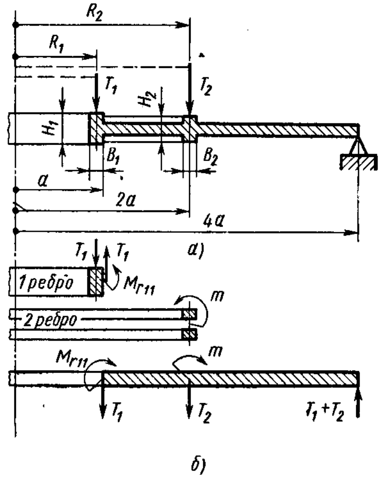


Рис. 5.23

Наибольшие напряжения в пластине возникают у заделки

$$\sigma_{r\max}=\frac{0{,}540pa^2 6}{h_2^2}=4090\ \text{Н/см}^2;$$

$$\sigma_{t\max}=\frac{0{,}162pa^2 6}{h_2^2}=1220\ \text{Н/см}^2.$$

Пример 5.8. Определить напряжения и прогиб пластины, схема которой изображена на рис. 5.23, *а*.

Дано: $h=0{,}8$ см; $a=10h$; $B_1=1$ см; $H_1=2$ см; $B_2=1$ см; $H_2=1{,}6$ см; $R_1=7{,}5$ см; $R_2=2a=16$ см; материал — дюралюминий; $E=0{,}72\cdot10^7$ Н/см²; $\mu=0{,}3$; $T_1=1000$ Н; $T_2=2000$ Н.

Пластина имеет два участка:

$$\lambda_1=\frac{a}{2a}=0{,}5;\quad \lambda_2=\frac{2a}{4a}=0{,}5.$$

Изгибная жесткость пластины

$$D_1=D_2=D=\frac{Eh^3}{12\,(1-\mu^2)}=3{,}375\cdot 10^5\ \text{Н}\cdot\text{см}.$$

Моменты инерции сечений ребер:

$$J_{x1}=\frac{B_1H_1^3}{12}=0{,}667\ \text{см}^4;$$

$$J_{x2}=\frac{B_2H_2^3}{12}-\frac{B_2h^3}{12}=0{,}299\ \text{см}^4.$$

Первый расчет. Принимаем $\left(\frac{\overline{M}_r}{D}\right)_{11}=1$, тогда по зависимости (5.61)

$$\left(\frac{\overline{\vartheta}}{r}\right)_{11}=\frac{R_1D}{EJ_{x1}}=0{,}527.$$

Следовательно,

$$\overline{X}_{1\hat{1}}=\begin{pmatrix}0{,}527\\1\end{pmatrix}.$$

Значения вектора $\overline{X}$ в других точках:

$$\overline{X}_{12}=L\overline{X}_{11}=\begin{pmatrix}\psi_{\vartheta\vartheta}(0{,}5) & \psi_{\vartheta m}(0{,}5)\\ \psi_{r\vartheta}(0{,}5) & \psi_{rm}(0{,}5)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}527\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}645\\0{,}917\end{pmatrix};$$

$$\overline{X}_{2\hat{1}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{EJ_{x2}}{2aD} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}645\\0{,}917\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}645\\1{,}174\end{pmatrix};$$

$$\overline{X}_{22}=L_2\overline{X}_{2\hat{1}}=\begin{pmatrix}\psi_{\vartheta\vartheta}(0{,}5) & \psi_{\vartheta m}(0{,}5)\\ \psi_{r\vartheta}(0{,}5) & \psi_{rm}(0{,}5)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}645\\1{,}174\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}770\\1{,}085\end{pmatrix}.$$

Второй расчет.

Вычислим поперечные силы в начальных точках участков:

$$P_{11}=-T_1=-1000\ \text{Н};\quad P_{21}=-T_1-T_2=-3000\ \text{Н};\quad \left(\frac{\overline{\overline{M}}_r}{D}\right)_{11}=0.$$

Для определения начального параметра $\left(\frac{\overline{\overline{\vartheta}}}{r}\right)_{11}$ отделим внутреннее ребро (рис. 5.23, *б*) и вычислим угол поворота сечения ребра под действием осевых сил T_1:

$$\overline{\overline{\vartheta}}_{11}=\frac{T_1\,(a-R_1)\,R_1}{2\pi EJ_{x1}}=1{,}245\cdot 10^{-4}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\overline{\overline{\vartheta}}}{r}\right)_{11}=\frac{\overline{\overline{\vartheta}}_{11}}{a}=15{,}55\cdot 10^{-6};$$

$$\overline{\overline{X}}_{11}=\begin{pmatrix}15{,}6\cdot 10^{-6}\\0\end{pmatrix}.$$

Значения вектора $\overline{\overline{X}}$ в других точках:

$$\overline{\overline{X}}_{12}=L_1\overline{\overline{X}}_{11}+R_1=\begin{pmatrix}\psi_{\vartheta\vartheta}(0,5) & \psi_{\vartheta m}(0,5)\\ \psi_{r\vartheta}(0,5) & \psi_{rm}(0,5)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15,6\cdot10^{-6}\\ 0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{P_{11}}{D}\psi_{\vartheta P}(0,5)\\ \frac{P_{11}}{D}\psi_{rP}(0,5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-67\cdot10^{-6}\\ -269\cdot10^{-6}\end{pmatrix};$$

$$\overline{\overline{X}}_{21}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{EJ_{x2}}{2aD} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-67\cdot10^{-6}\\ -269\cdot10^{-6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-67\cdot10^{-6}\\ -295,8\cdot10^{-6}\end{pmatrix};$$

$$\overline{\overline{X}}_{22}=L_2\overline{\overline{X}}_{21}+R_2=\begin{pmatrix}\psi_{\vartheta\vartheta}(0,5) & \psi_{\vartheta m}(0,5)\\ \psi_{r\vartheta}(0,5) & \psi_{rm}(0,5)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-67\cdot10^{-6}\\ -295,8\cdot10^{-6}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{P_{21}}{D}\psi_{\vartheta P}(0,5)\\ \frac{P_{21}}{D}\psi_{rP}(0,5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-370\cdot10^{-6}\\ -1065\cdot10^{-6}\end{pmatrix}.$$

Согласно граничному условию на наружном контуре пластины определим C:

$$\left(\frac{M_r}{D}\right)_{22}=\left(\frac{\overline{M}_r}{D}\right)_{22}C+\left(\frac{\overline{\overline{M}}_r}{D}\right)_{22}=0;$$

$$1,085C-1065\cdot10^{-6}=0;\quad C=982\cdot10^{-6}.$$

Искомые значения:

$$X_{11}=\begin{pmatrix}534\\ 982\end{pmatrix}10^{-6};\quad X_{12}=\begin{pmatrix}567\\ 731\end{pmatrix}10^{-6};\quad X_{21}=\begin{pmatrix}567\\ 856\end{pmatrix}10^{-6};$$

$$X_{22}=\begin{pmatrix}386\\ 0\end{pmatrix}10^{-6};$$

$$M_{r11}=982\cdot10^{-6}\cdot D=331\ \text{Н}\cdot\text{см/см};$$

$$M_{r12}=247\ \text{Н/см};\quad M_{r21}=289\ \text{Н}\cdot\text{см/см};$$

$$M_{r22}=0;$$

$$M_{t11}=\mu M_{r11}+\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}(1-\mu^2)D=0,3\cdot331+534\cdot10^{-6}(1-0,3^2)\,3,375\cdot10^5=$$

$$=264\ \text{Н}\cdot\text{см/см};$$

$$M_{t12}=248\ \text{Н}\cdot\text{см/см};\quad M_{t21}=261\ \text{Н}\cdot\text{см/см};\quad M_{t22}=119\ \text{Н}\cdot\text{см/см};$$

$$w_{12}-w_{11}=-(2a)^2\psi_{w\vartheta}(0,5)\cdot534\cdot10^{-6}-(2a)^2\cdot\psi_{wm}(0,5)\cdot982\cdot10^{-6}-$$

$$-\frac{P_{11}}{D}(2a)^2\psi_{wP}(0,5)=-0,0553\ \text{см};$$

$$w_{22}-w_{21}=-(4a)^3\psi_{w\vartheta}(0,5)\cdot567\cdot10^{-6}-(4a)^2\psi_{wm}(0,5)\cdot856\cdot10^{-6}-$$

$$-\frac{P_{21}}{D}(4a)^2\psi_{wP}(0,5)=-0,188\ \text{см}.$$

Так как $w_{22}=0$, то $w_{21}=w_{12}=0,188$ см и максимальный прогиб

$$w_{11}=0,188+0,0553=0,2433\ \text{см}.$$

Максимальное напряжение в пластине

$$\sigma_{r\max}=\frac{M_{r\max}}{\frac{h^2}{6}}=\frac{334\cdot 6}{0{,}8^2}=3100\ \text{Н/см}^2.$$

Напряжение во внутреннем ребре по формуле (5.65) при $\varphi_k=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}a$, $z_{\max}=\frac{H_1}{2}$

$$\sigma_{\max}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{11}\frac{aH_1}{R_1 2}E=4100\ \text{Н/см}^2.$$

Напряжение во втором ребре при $\varphi_k=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{12}2a$; $R_k=2a$; $z_{\max}=\frac{H_2}{2}$;

$$\sigma_{\max}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_{12}\frac{H_2E}{2}=3270\ \text{Н/см}^2.$$

Пример 5.9. Определить напряжения в пластине кольцевого клапана (рис.5.24). Пластина опирается по внутреннему и наружному краям и нагружена равномерным давлением p $Н/\text{см}^2$.

Дано: $r_1=0{,}7\ r_2$; $\lambda=\frac{r_1}{r_2}=0{,}7$.

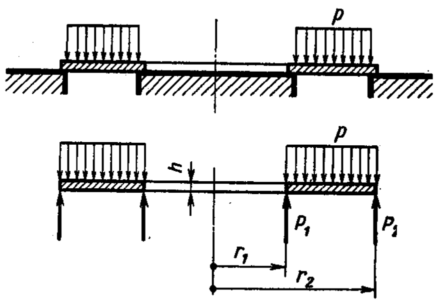


Рис. 5.24

Так как края пластины могут свободно поворачиваться, то радиальный момент на обоих краях равен нулю. Усилие, создаваемое давлением p, распределяется между внутренней и наружной опорами. Для определения величины усилия, действующего на каждую опору, необходимо, кроме уравнения статики, использовать уравнение перемещений. Последнее следует составить на основании равенства нулю вертикального перемещения обоих краев пластины.

Обозначим через P_1 — величину силы, приходящейся на внутреннюю опору. Используя граничные условия

$$\left(\frac{M_r}{D}\right)_{(r=r_1)}=0;\quad \left(\frac{M_r}{D}\right)_{(r=r_2)}=0;\quad w_2-w_1=0$$

и применяя второе и четвертое уравнения (5.53), получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left(\frac{M_r}{D}\right)_{(r=r_2)}=\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_1\psi_{r\vartheta}(\lambda)+\frac{P_1}{D}\psi_{rP}(\lambda)-\frac{pr_2^2}{D}\psi_{rq}(\lambda)=0:$$

$$w_2-w_1=-\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_1 r_2^2\psi_{w\vartheta}(\lambda)-\frac{P_1r_2^2}{D}\psi_{wP}(\lambda)+\frac{pr_2^4}{D}\psi_{wq}(\lambda)=0.$$

Решение этой системы относительно неизвестных $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_1$ и P_1 дает

$$\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_1=-1{,}67\cdot 10^{-3}\frac{pr_2^2}{D};\quad P_1=0{,}743pr_2^2.$$

Суммарная нагрузка на пластину в данном случае

$$P=p\pi(r_2^2-r_1^2)=1{,}60pr_2^2.$$

Следовательно, реакция наружной опоры

$$P_2 = P - P_1 = 0{,}857pa^2.$$

Зная величины $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)_1$, P_1, нетрудно с помощью уравнений (5.53) вычислить M_r, M_t и w в промежуточных точках.

В частности, при $r = 0{,}85\ r_2$; $\lambda = \frac{0{,}7}{0{,}85} = 0{,}823$;

$$M_r = 0{,}0073pr_2^2; \quad \sigma_r = \frac{M_r 6}{h^2} = 0{,}0438\ \frac{pr_2^2}{h^2}.$$

§ 6. Круглые осесимметричные пластины переменной толщины

Рассмотрим особенности расчета пластин, у которых толщина плавно изменяется по радиусу.

Составим дифференциальное уравнение упругой поверхности такой пластины.

Исходное уравнение равновесия (5.32) в данном случае остается без изменений. Выражения изгибающих моментов (5.29), (5.30) также не изменяются, но изгибная жесткость D теперь не постоянна, а зависит от радиуса r. С учетом переменности жесткости D уравнения (5.29), (5.30) и (5.32) можно привести к следующему дифференциальному уравнению относительно функции ϑ:

$$D\frac{d}{dr}\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{\vartheta}{r}\right) + \frac{dD}{dr}\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right) = Q. \quad (5.66)$$

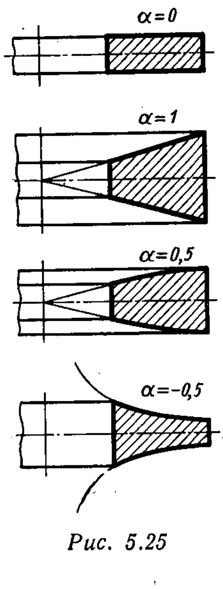


Рис. 5.25

В общем случае, при произвольном законе изменения толщины по радиусу уравнение (5.66) может быть проинтегрировано только численными методами.

Для получения приближенного решения заданную пластину можно аппроксимировать ступенчатой пластиной с несколькими участками постоянной толщины. Имеется, однако, важный частный случай, когда уравнение (5.66) интегрируется в квадратурах. Это тот случай, когда толщина изменяется по степенному закону

$$h = Cr^{\alpha}. \quad (5.67)$$

В зависимости от показателя степени α форма пластины может быть различной (рис. 5.25). Задача об осесимметричном изгибе пластин, имеющих форму, соответствующую $\alpha < 0$, встречается, в частности, при расчете дисков турбомашин на осевую нагрузку.

Обозначим через r_1 внутренний радиус и через h_1 — толщину на внутреннем контуре пластины.

На основании равенства (5.67):

$$h = h_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\alpha}. \tag{5.68}$$

Изгибная жесткость в произвольной точке пластины в этом случае

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = D_0\left(\frac{r}{r_1}\right)^{3\alpha}, \tag{5.69}$$

где D_0 — жесткость на внутреннем краю;

$$D_0 = \frac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)}. \tag{5.70}$$

После подстановки выражения (5.69) уравнение (5.66) принимает вид

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{(1+3\alpha)}{r}\cdot\frac{d\vartheta}{dr} - \frac{(1-3\alpha\mu)}{r^2}\vartheta = \frac{Q}{D_0}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{3\alpha}. \tag{5.71}$$

Общее решение уравнения (5.70) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2\mathring{\vartheta}}{dr^2} + \frac{(1+3\alpha)}{r}\cdot\frac{d\mathring{\vartheta}}{dr} - \frac{(1-3\alpha\mu)}{r^2}\mathring{\vartheta} = 0 \tag{5.72}$$

и частного решения уравнения с правой частью.

Общее решение однородного уравнения ищем в виде

$$\mathring{\vartheta} = Cr^x.$$

Подставив $\mathring{\vartheta}$ в дифференциальное уравнение (5.72), получим характеристическое уравнение

$$x^2 + 3\alpha x - (1 - 3\mu\alpha) = 0,$$

корни которого

$$x_1 = -\frac{3\alpha}{2} + \sqrt{\frac{9\alpha^2}{4} + (1-3\mu\alpha)};$$

$$x_2 = -\frac{3\alpha}{2} - \sqrt{\frac{9\alpha^2}{4} + (1-3\mu\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\mathring{\vartheta} = C_1 r^{\left[-\frac{3\alpha}{2}+\sqrt{\frac{9\alpha^2}{4}+(1-3\mu\alpha)}\right]} + C_2 r^{\left[-\frac{3\alpha}{2}-\sqrt{\frac{9\alpha^2}{4}+(1-3\mu\alpha)}\right]}. \tag{5.73}$$

Частное решение уравнения с правой частью зависит от вида нагрузки. При действии равномерного давления p (направленного сверху вниз)

$$Q = -\frac{p(r^2-r_1^2)}{2r}.$$

Подставив Q в правую часть уравнения (5.71), ищем решение последнего в виде $\bar{\vartheta} = Br^y$, в результате несложных преобразований получим

$$\bar{\vartheta} = -\frac{pr_1^{3\alpha}}{2D_0}\left[\frac{r^{3(1-\alpha)}}{8-9\alpha+3\alpha\mu} + \frac{r^{(1-3\alpha)}r_1^2}{3\alpha(1-\mu)}\right]. \tag{5.74}$$

Для случая нагружения силой P, распределенной по внутреннему краю, по аналогии найдем

$$Q = -\frac{P}{2\pi r};$$

$$\overline{\vartheta} = \frac{P r_1^{3\alpha} r^{(1-3\alpha)}}{6\pi D_0 \alpha (1-\mu)}. \qquad (5.75)$$

При совместном действии давления p и силы P общее решение дифференциального уравнения (5.71) запишется в виде

$$\vartheta = C_1 r^{\left[-\frac{3}{2}\alpha + \sqrt{\frac{9\alpha^2}{4} + (1-3\mu\alpha)}\right]} + C_2 r^{\left[-\frac{3}{2}\alpha - \sqrt{\frac{9\alpha^2}{4} - (1-3\mu\alpha)}\right]} -$$

$$- \frac{p r_1^{3\alpha}}{2D_0}\left[\frac{r^{3(1-\alpha)}}{8-9\alpha+3\alpha\mu} + \frac{r^{(1-3\alpha)} r_1^2}{3\alpha(1-\mu)}\right] + \frac{P r_1^{3\alpha} r^{(1-3\alpha)}}{6\pi D_0 \alpha (1-\mu)}. \qquad (5.76)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяют, как обычно, по граничным условиям.

Изгибающие моменты могут быть вычислены по зависимостям (5.29), (5.30); напряжения — по формулам (5.38).

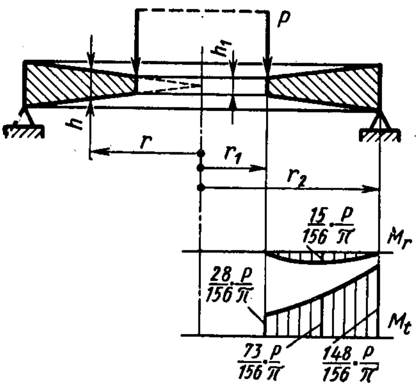


Рис. 5.26

Прогиб пластины может быть найден интегрированием функции ϑ по уравнению (5.39).

Пример 5.10. Определить напряжения и прогиб пластины с линейно изменяющейся толщиной, шарнирно опертой по наружному краю (рис. 5.26) и нагруженной силой P.

Дано: $r_2 = 3r_1$; $h_1 = 0{,}1 r_1$; $\mu = \frac{1}{3}$.

Параметр α в данном случае равен единице; уравнение (5.76) принимает вид

$$\vartheta = C_1 + C_2 r^{-3} + \frac{P r_1^3 r^{-2}}{4\pi D_0}.$$

Соответственно,

$$\frac{\vartheta}{r} = C_1 r^{-1} + C_2 r^{-4} + \frac{P r_1^3 r^{-3}}{4\pi D_0};$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -3C_2 r^{-4} - \frac{P r_1^3 r^{-3}}{2\pi D_0}.$$

Запишем граничные условия:

при $r = r_1$ $M_r = 0$ или $\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\vartheta}{r}\right) = 0$;

при $r = r_2 = 3r_1$ $M_r = 0$ или $\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{1}{3}\frac{\vartheta}{r}\right) = 0.$

После подстановки функций $\frac{\vartheta}{r}$ и $\frac{d\vartheta}{dr}$

$$-\frac{3C_2}{r_1^4} - \frac{P}{2\pi D_0} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C_1}{r_1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C_2}{r_1^4} + \frac{P}{3\cdot 4\pi D_0} = 0;$$

$$-\frac{3C_2}{81 r_1^4} - \frac{P}{2\pi D_0 27} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C_1}{3r_1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C_2}{81 r_1^4} + \frac{P}{3\cdot 4\pi D_0 27} = 0,$$

решение которых дает

$$C_1=\frac{10Pr_1}{104\pi D_0};\qquad C_2=-\frac{15Pr_1^4}{104\pi D_0}.$$

Окончательно

$$\vartheta=\frac{Pr_1}{\pi D_0}\left[\frac{10}{104}-\frac{15}{104}\cdot\frac{r_1^3}{r^3}+\frac{r_1^2}{4r^2}\right];$$

$$\vartheta'=\frac{P}{\pi D_0}\left[\frac{45}{104}\cdot\frac{r_1^4}{r^4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{r_1^3}{r^3}\right].$$

По функции ϑ определим изгибающие моменты

$$M_r=D_0\frac{r^3}{r_1^3}\left(\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\frac{\vartheta}{r}\right)=\frac{P}{\pi}\left[\frac{5}{13}\cdot\frac{r_1}{r}-\frac{5}{12}+\frac{5}{156}\cdot\frac{r^2}{r_1^2}\right];$$

$$M_t=D_0\frac{r^3}{r_1^3}\left(\frac{\vartheta}{r}+\mu\frac{d\vartheta}{dr}\right)=\frac{P}{\pi}\left[\frac{1}{12}+\frac{10}{104}\cdot\frac{r^2}{r_1^2}\right].$$

Эпюры моментов приведены на рис. 5.26.

Максимальное напряжение при $r=r_1$

$$\sigma_{t\max}=\frac{6M_{t(r=r_1)}}{h_1^2}=\frac{7P6}{39\pi h_1^2}=1{,}08\frac{P}{\pi h_1^2}$$

и при $r=r_2$

$$\sigma_{t\max}=\frac{6M_{t(r=r_2)}}{(3h_1)^2}=\frac{37P6}{39\pi h_1^2 9}=0{,}63\frac{P}{\pi h_1^2}.$$

Максимальный прогиб

$$w_{\max}=-\int_{3a}^{a}\vartheta dr=0{,}295\frac{Pr_1^2}{\pi D_0}.$$

Найденные напряжения интересно сопоставить с напряжениями, вычисленными по теории колец с недеформируемым контуром поперечного сечения (см. гл. 4, § 1). По указанной теории напряжения имеют постоянное значение вдоль лучей, выходящих из точки пересечения нейтральной плоскости с осью кольца:

$$\sigma=\frac{Mz}{rI_з},$$

где M — изгибающий момент в поперечном сечении кольца, определяемый по уравнению равновесия половины кольца;

$$M=\frac{P(3r_1-r_1)}{2\pi}=\frac{Pr_1}{\pi};$$

$I_з$ — геометрическая характеристика сечения кольца;

$$I_з=\int_F\frac{dFz^2}{r}=\int_{r_1}^{3r_1}\int_{-\frac{h_1r}{2r_1}}^{\frac{h_1r}{2r_1}}\frac{dr\,dz\,z^2}{r}=\frac{13}{18}h_1^3\text{ см}^3;$$

z и r — координаты произвольной точки сечения:

для внутренних точек $z_{\max}=\frac{h_1}{2}$; $r=r_1$;

для наружных точек $z_{\max}=\frac{3h_1}{2}$; $r=3r_1$.

В результате подстановки указанных значений получим

$$\sigma_{\max}=0{,}70\,\frac{P}{\pi h_1^2}.$$

Это напряжение приблизительно в 1,5 раза меньше максимального напряжения, найденного по теории изгиба пластин. При малой толщине пластины расчет по теории деформации колец менее точен. Однако, если толщина h_1 соизмерима с радиусом r_1, то расчет по теории пластин становится приближенным и более оправданным будет расчет по теории колец.

Заметим, что для пластины, рассмотренной в примере 5.10, при нагружении ее равномерно распределенным давлением p решение по уравнению (5.76) непригодно, так как при $\alpha = 1$ и $\mu=\frac{1}{3}$ знаменатель дроби в одном из слагаемых обращается в нуль. В этом случае следует заново найти частное решение дифференци ального уравнения (5.71), которое при указанных значениях α и μ и при $Q = -\frac{p(r^2-r_1^2)}{2r}$ принимает вид

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\frac{4}{r}\cdot\frac{d\vartheta}{dr}=-\frac{p(r^2-r_1^2)\,r_1^3}{2D_0r^4}.$$

Его частным решением будет

$$\bar{\vartheta}=-\frac{pr_1^3}{2D_0}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{r}{r_1}+\frac{r_1^2}{2r^2}\right). \tag{5.77}$$

Задача об изгибе пластин с более сложным законом изменения толщины по радиусу встречается при расчете дисков турбомашин, нагруженных осевыми силами. Рассмотрим решение подобной задачи численным методом с помощью ЭЦВМ. В качестве основных переменных примем безразмерные величины:

$$\rho=\frac{r}{R};\quad X_1=-\frac{w}{R};\quad X_2=\vartheta;\quad X_3=\frac{M_rR}{D_0};\quad X_4=\frac{QrR}{D_0}, \tag{5.78}$$

где r и R — текущий и наружный радиусы;

D_0 — жесткость в некоторой фиксированной точке.

Используя исходные уравнения теории круглых пластин, выразим первые производные от X_1, X_2, X_3, X_4 по ρ:

$$\frac{dX_1}{d\rho}=\frac{dX_1}{dr}\cdot\frac{dr}{d\rho}=-\frac{dw}{dr}=\vartheta=X_2; \tag{5.79}$$

$$\frac{dX_2}{d\rho}=\frac{d\vartheta}{dr}\cdot\frac{dr}{d\rho}=\frac{d\vartheta}{dr}R,$$

но на основании зависимости (5.29)

$$\frac{d\vartheta}{dr}=\frac{M_r}{D}-\mu\frac{\vartheta}{r}=\frac{D_0}{DR}X_3-\frac{\mu}{\rho\cdot R}X_2,$$

следовательно,

$$\frac{dX_2}{d\rho}=\frac{D_0}{D}X_3-\frac{\mu}{\rho}X_2. \tag{5.80}$$

Далее

$$\frac{dX_3}{d\rho}=\frac{dM_r}{dr}\cdot\frac{R}{D_0}\cdot\frac{dr}{d\rho}=\frac{dM_r}{dr}\cdot\frac{R^2}{D_0}.$$

Производную $\frac{dM_r}{dr}$ определим по уравнению равновесия (5.32):

$$r\frac{dM_r}{dr}=M_t-M_r+Qr$$

или с учетом зависимости (5.49)

$$\frac{dM_r}{dr}=\left[-M_r(1-\mu)+\frac{(1-\mu^2)D}{r}\vartheta+Qr\right]\frac{1}{r},$$

следовательно,

$$\frac{dX_3}{d\rho}=-\frac{(1-\mu)}{\rho}X_3+\frac{(1-\mu^2)D}{\rho^2D_0}X_2+\frac{1}{\rho}X_4. \qquad (5.81)$$

На основании уравнения равновесия (5.31)

$$\frac{dX_4}{d\rho}=\frac{d(Qr)R}{drD_0}\cdot\frac{dr}{d\rho}=\frac{R^2}{D_0}\cdot\frac{d(Qr)}{dr}=\frac{R^3\rho}{D_0}q(r), \qquad (5.82)$$

где $q(r)$ — интенсивность распределенной нагрузки, Н/см².

Запишем уравнения (5.79)—(5.82) в матричной форме

$$\frac{dX}{d\rho}=MX+F, \qquad (5.83)$$

где $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix}$ — вектор напряженно-деформированного состояния в произвольной точке пластины;

M — матрица коэффициентов;

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\mu}{\rho} & \frac{D_0}{D} & 0\\ 0 & \frac{(1-\mu^2)D}{\rho^2D_0} & -\frac{(1-\mu)}{\rho} & \frac{1}{\rho}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}; \qquad (5.84)$$

F — матрица-столбец слагаемых, зависящих от нагрузки;

$$F=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{qR^3\rho}{D_0}\end{pmatrix}. \qquad (5.85)$$

В таком виде уравнения изгиба круглых пластин предложены В. Л. Бидерманом.

Уравнения решаются на ЭЦВМ численным методом по стандартной программе.

Основная трудность численного решения уравнения (5.83) заключается в том, что на основании граничных условий в начальной точке бывают известны только некоторые начальные значения функций X_1, X_2, X_3, X_4. Остальные же должны быть определены по граничным условиям в наружном краю пластины. Так, например, для пластины, изображенной на рис. 5.26, в начальной точке (при $r = r_1$) известны

$$M_{r_1} = 0, \text{ т. е. } X_{31} = 0;$$

$$Q_1 = -\frac{P}{2\pi r_1}, \text{ т. е. } X_{41} = -\frac{Pr_2}{2\pi D_0}.$$

Начальные значения двух остальных функций подлежат определению по граничным условиям при $r = R = r_2$. В данном примере

$$M_{r_2} = 0, \text{ т. е. } X_{32} = 0;$$

$$w_2 = 0, \text{ т. е. } X_{12} = 0.$$

Чтобы решить эту задачу, применяют способ трех расчетов. Вектор состояния X представляют в виде суммы трех векторов

$$X = \bar{X}C_1 + \bar{\bar{X}}C_2 + \bar{\bar{\bar{X}}}, \tag{5.86}$$

где C_1 и C_2 — неопределенные коэффициенты. Вектор первого расчета $\bar{X}$ вычисляют без учета распределенной нагрузки, т. е. при $F = 0$, при этом в начальной точке принимают

$$\bar{X}_{1i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(при граничных условиях, соответствующих схеме, изображенной на рис. 5.26).

Во втором расчете определяют значения $\bar{\bar{X}}$ также без учета распределенной нагрузки ($F = 0$), при следующих значениях начальных параметров:

$$\bar{\bar{X}}_{1i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В первом и втором расчете за единицу поочередно принимают значения тех начальных параметров, которые неизвестны.

Третий расчет выполняют с учетом заданных нагрузок (с учетом слагаемого F) при значении вектора $\bar{\bar{\bar{X}}}_{11}$ в начальной точке:

$$\bar{\bar{\bar{X}}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{Pr_2}{2\pi D_0} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при другой схеме пластины значения начальных параметров будут другие. Если, например, внутренний край пластины жестко заделан, то $w = 0$; $\vartheta = 0$, а M_r и Q неизвестны, следовательно,

$$\overline{X}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{\overline{X}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{\overline{\overline{X}}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при начальных параметрах, выбранных указанным способом, суммарный вектор X [см. уравнение (5.86)] будет удовлетворять граничным условиям в начальной точке при любых значениях C_1 и C_2. Подбором этих коэффициентов необходимо обеспечить выполнение граничных условий также и в наружной точке пластины. Для пластины, изображенной на рис. 5.26, например, при определении C_1 и C_2 необходимо использовать следующие два уравнения:

$$\overline{X}_{32}C_1 + \overline{\overline{X}}_{32}C_2 + \overline{\overline{\overline{X}}}_{32} = 0;$$

$$\overline{X}_{12}C_1 + \overline{\overline{X}}_{12}C_2 + \overline{\overline{\overline{X}}}_{12} = 0.$$

После того, как коэффициенты C_1 и C_2 определены, целесообразно еще раз просчитать пластину, приняв действительные значения начальных параметров.

По найденным компонентам вектора X определяют w, ϑ, M_r и Q. Момент M_t вычисляют по зависимости (5.49).

§ 7. Круглые конструктивно ортотропные пластины

Примером таких пластин могут служить пластины с часто расположенными кольцевыми ребрами (рис. 5.27, *а*), пластины с прямоугольной гофрировкой (рис. 5.27, *б*) и т. п. Указанные пластины имеют различную жесткость в радиальном и в окружном направлении.

Неоднородность упругих свойств пластины по разным направлениям объясняется в данном случае не свойствами материала, который предполагается изотропным, а конструкцией пластины. Поэтому последние и получили название конструктивно ортотропных. Строго говоря, изгибная жесткость таких пластин изменяется по радиусу по периодическому закону; между ребрами жесткость имеет одно значение, а в местах расположения ребер — другое. Однако, если ребра или гофры расположены достаточно часто, то при исследовании деформаций и напряжений можно считать, что жесткости в радиальном и окружном направлениях имеют некоторые осредненные значения, постоянные или плавно изменяющиеся по радиусу.

Выведем расчетные зависимости для пластин рассматриваемого типа. Возьмем в качестве примера пластину с кольцевыми ребрами (см. рис. 5.27, *а*). Вырезав из пластины малый элемент (рис. 5.27, *в*) и предположив, что гипотеза неизменности нормали сохраняет свою силу, а также, что напряженное состояние в самой пластине двухосное ($\sigma_z = 0$), а в ребрах — одноосное ($\sigma_z = 0$ и $\sigma_r = 0$), получим следующие выражения для деформаций и напряжений:

в пластине $\varepsilon_r = \frac{d\vartheta}{dr} z; \quad \varepsilon_t = \frac{\vartheta}{r} z;$

$$\sigma_r = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right]; \quad \sigma_t = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right]; \qquad (5.87а)$$

в ребре

$$\varepsilon_t = \frac{\vartheta}{r} z; \quad \sigma_t = Ez\frac{\vartheta}{r}, \qquad (5.87б)$$

где ϑ — угол поворота нормали к срединной плоскости;
z — расстояние, отсчитываемое от срединной плоскости.

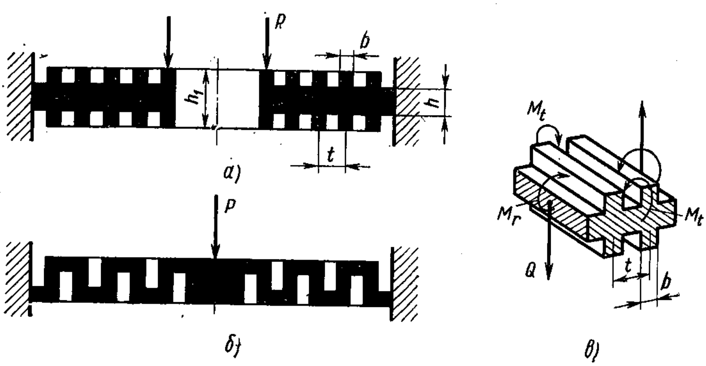


Рис. 5.27

Интегрируя напряжения по толщине пластины и по площади F сечения ребер, определим изгибающие моменты (на единицу длины):

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r\, dz \cdot z = D_r\left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r}\right);$$

$$M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t\, dz\; z + \frac{1}{t}\int_F \sigma_t\, dF \cdot z = D\left(\frac{\vartheta}{r} + \mu\frac{d\vartheta}{dr}\right) + \frac{EJ_x}{t}\cdot\frac{\vartheta}{r} \qquad (5.88)$$

или

$$M_t = D_t\frac{\vartheta}{r} + \mu D_r\frac{d\vartheta}{dr}, \qquad (5.89)$$

где t — шаг ребер;

$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — изгибная жесткость гладкой пластины;

$D_r=D;\ D_t=D\left[1+\frac{EJ_x}{Dt}\right]$ — приведенные жесткости в радиальном и окружном направлениях;

$J_x=\frac{b(h_1^3-h^3)}{12}$ — момент инерции сечения ребра.

Подставим выражения моментов (5.88) и (5.89) в уравнение равновесия элемента круглой осесимметричной пластины (5.32); после несложных преобразований получим разрешающее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\vartheta}{dr}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{D_t}{D_r}\vartheta=\frac{Q}{D_r}. \qquad (5.90)$$

Решение соответствующего однородного уравнения ищем в виде

$$\mathring{\vartheta}=Cr^{\eta}.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (5.90) при правой части, равной нулю, приводит к характеристическому уравнению

$$\eta^2=\frac{D_t}{D_r}, \qquad (5.91)$$

корни которого соответственно равны

$$\eta_1=\sqrt{\frac{D_t}{D_r}}=\eta;\quad \eta_2=-\sqrt{\frac{D_t}{D_r}}=-\eta. \qquad (5.92)$$

Тогда общее решение однородного уравнения

$$\mathring{\vartheta}=C_1r^{\eta}+C_2r^{-\eta}. \qquad (5.93)$$

Частное решение уравнения (5.80) зависит от вида нагрузки. Если, например, пластина нагружена по всей плоскости равномерным давлением q, Н/см², то

$$Q=\frac{qr}{2}$$

и уравнение (5.90) принимает вид

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\vartheta}{dr}-\eta^2\frac{1}{r^2}\vartheta=\frac{qr}{2D_r}.$$

Частное решение этого уравнения ищем также в виде степенной функции

$$\bar{\vartheta}=Cr^{x}.$$

Подставим это выражение в уравнение (5.90):

$$Cr^{(x-2)}[x^2+\eta^2]=\frac{qr}{2D_r}.$$

Это равенство должно выполняться при любом значении r, отсюда следует

$$r^{(x-2)} = r; \quad x - 2 = 1, \quad x = 3;$$

$$C(3^2 - \eta^2) = \frac{q}{2D_r}; \qquad C = \frac{q}{2D_r(9 - \eta^2)}.$$

Таким образом, частное решение уравнения (5.90) для случая нагружения равномерным давлением

$$\bar{\vartheta} = \frac{qr^3}{2D_r(9 - \eta^2)} \tag{5.94}$$

и общее решение

$$\vartheta = C_1 r^{\eta} + C_2 r^{-\eta} + \frac{qr^3}{2D_r\left(9 - \frac{D_t}{D_r}\right)}. \tag{5.95}$$

Для гофрированной пластины (см. рис. 5.27, *б*) дифференциальное уравнение выводится аналогично. В результате получается то же уравнение (5.90), но при иных значениях изгибных жесткостей:

$$D_r = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \cdot \frac{t}{s}; \quad D_t = \frac{EJ_x}{t(1 - \mu^2)}, \tag{5.96}$$

где t — шаг гофрировки;
s — развернутая длина средней линии одного гофра;
h — толщина, которая в данном случае предполагается постоянной;
J_x — момент инерции сечения одного гофра относительно оси, совпадающей со срединной плоскостью.

Формулы для изгибающих моментов и напряжений в гофрированной пластине имеют вид

$$M_r = D_r \frac{d\vartheta}{dr}; \quad M_t = D_t \frac{\vartheta}{r}; \tag{5.97}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\,\max} &= \frac{6M_r}{h^2} + \mu \frac{M_t t}{J_x} z_{\max}; \\ \sigma_{t\,\max} &= \frac{M_t t}{J_x} z_{\max} + \mu \frac{6M_r}{h^2}, \end{aligned} \tag{5.98}$$

где $z_{\max}$ — наибольшее расстояние от срединной плоскости пластины.

Расчет круглых пластин с радиальными ребрами также может быть выполнен по схеме конструктивной ортотропии (при достаточно большом числе ребер). Однако этот случай — более сложный, так как расстояние между ребрами изменяется по радиусу пластины и поэтому изгибная жесткость также переменна. Кроме того, при одностороннем расположении ребер существенное значение приобретает растяжение срединной плоскости, в результате чего нейтральный слой оказывается смещенным относительно срединной плоскости. Расчет подобной пластины приближенным методом Ритца рассмотрен в гл. 6.

§ 8. Температурные напряжения в пластинах

Температурные напряжения в пластинах возникают при неравномерном нагреве или при стеснении температурных деформаций внешними связями, а также в том случае, когда нагреваемая пластина состоит из нескольких слоев разных материалов (например, биметаллическая пластина).

Рассмотрим круглую пластину, изготовленную из однородного материала, находящуюся в условиях неравномерного осесимметричного стационарного нагрева; температура на одной поверхности равна $t_1(r)$, а на другой $t_2(r)$. Температуры t_1 и t_2 считаются заданными функциями радиуса и не зависят от полярного угла φ.

Если толщина пластины не велика, то с достаточной точностью можно принять, что по толщине пластины температура распределяется по линейному закону:

$$t = t_0 + \frac{\Delta t}{h} z,$$

где $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$ — средняя температура;

$\Delta t = t_1 - t_2$ — перепад температуры по толщине;

z — расстояние от срединной плоскости пластины.

Данную задачу можно разделить на две, не зависящие одна от другой. В первой задаче учитывают только постоянный по толщине, но переменный по радиусу нагрев до температуры $t_0(r)$. Такой нагрев не вызывает искривления пластины; он вызывает лишь напряжения σ_r и σ_t и деформации ε_r и ε_t, постоянные по толщине (см. гл. 3, § 2).

Во второй задаче учитывают перепад температуры Δt. Рассмотрим эту задачу более подробно. При распределении температуры согласно закону

$$t = \frac{\Delta t}{h} z,$$

температурное поле обратно симметрично относительно срединной плоскости.

На основании этого можно заключить, что точки срединной плоскости не получают смещений в радиальном направлении и, следовательно, относительные удлинения ε_{r_0} и ε_{t_0} в срединной плоскости равны нулю.

Относительные удлинения в произвольной точке на расстоянии z от срединной плоскости определяются на основании гипотезы неизменности нормали:

$$\varepsilon_r = \frac{d\vartheta}{dr} z; \qquad \varepsilon_t = \frac{\vartheta}{r} z, \tag{5.99}$$

[см. формулы (5.24) (5.25)].

С другой стороны, те же относительные удлинения можно выразить в зависимости от напряжений и температуры:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_t}{E} + \Delta t \frac{z}{h} \alpha; \\ \varepsilon_t &= \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E} + \Delta t \frac{z}{h} \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5.100}$$

Упругие постоянные и коэффициент линейного расширения материала считаем постоянными по всему объему пластины, так как диапазон изменения температуры по объему пластины предполагается небольшим.

Из равенств (5.99) и (5.100) определим напряжения:

$$\sigma_r = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} - \frac{(1+\mu)\,\Delta t \alpha}{h}\right]; \tag{5.101}$$

$$\sigma_t = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{(1+\mu)\,\Delta t \alpha}{h}\right]. \tag{5.102}$$

Вычислим изгибающие моменты:

$$M_r = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z\, dz = D\left[\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} - \frac{(1+\mu)\,\Delta t \alpha}{h}\right]; \tag{5.103}$$

$$M_t = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t z\, dz = D\left[\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{(1+\mu)\,\Delta t \alpha}{h}\right]. \tag{5.104}$$

Подставив выражения (5.103) и (5.104) в уравнение равновесия элемента пластины (5.32) и положив $Q = 0$, получим дифференциальное уравнение относительно ϑ:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{1}{r^2}\vartheta = \frac{(1+\mu)\,\alpha}{h} \cdot \frac{d\,(\Delta t)}{dr}. \tag{5.105}$$

Это уравнение интегрируется так же, как дифференциальное уравнение осесимметричного изгиба круглых пластин (5.34), его общий интеграл

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{(1+\mu)\,\alpha}{hr} \int\limits_{r_1}^{r} \left[\hat{r} \int\limits_{r_1}^{\hat{r}} \frac{d\,(\Delta t)}{dr}\, d\tilde{r}\right] d\hat{r}. \tag{5.106}$$

Если функция $\Delta t\,(r)$ задана, то, вычислив интеграл (5.106), можно по граничным условиям определить постоянные C_1 и C_2, затем по формулам (5.103) и (5.104) — изгибающие моменты и по формулам (5.38) — напряжения.

Рассмотрим некоторые простые частные случаи.

1. *Перепад температуры Δt по радиусу пластины — постоянный; края пластины свободны.* Тогда

$$\frac{d(\Delta t)}{dr} = 0;$$

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определим по граничным условиям.

При $r = r_1$

$$M_r = 0; \left[\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r} - \frac{(1+\mu)\Delta t\alpha}{h}\right] = 0;$$

при $r = r_2$

$$M_r = 0; \left[\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r} - \frac{(1+\mu)\Delta t\alpha}{h}\right] = 0,$$

откуда

$$C_1 - \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{(1+\mu)\Delta t\alpha}{h} = 0;$$

$$C_1 - \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{(1+\mu)\Delta t\alpha}{h} = 0;$$

$$C_1 = \frac{(1+\mu)\Delta t\alpha}{h}; \quad C_2 = 0.$$

Следовательно, для данного частного случая

$$\vartheta = \frac{(1+\mu)\Delta t\alpha}{h} r. \tag{5.106a}$$

Согласно зависимостям (5.101) — (5.104), изгибающие моменты и напряжения в данном случае равны нулю. Срединная плоскость пластины переходит в сферическую поверхность. Заметим, что если уравнение упругой поверхности (5.106а) записать в виде

$$-\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{(1+\mu)\Delta t\alpha}{h} = \text{const}$$

и проинтегрировать его дважды, то вместо уравнения сферы получится уравнение параболоида

$$w = Cr^2 + C_1 r + C_2.$$

Эта погрешность — результат приближенного представления кривизны второй производной прогиба.

2. *Перепад температуры постоянный; края пластины защемлены.*

Так как $\frac{d(\Delta t)}{dr} = 0$, то

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Граничные условия:

при $r = r_1$

$$\vartheta = 0; \quad C_1 r_1 + \frac{C_2}{r_1} = 0;$$

при $r = r_2$

$$\vartheta = 0; \ C_1 r_2 + \frac{C_2}{r_2} = 0.$$

Отсюда

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0.$$

В этом случае угол поворота нормали всюду равен нулю. Следовательно, плоскость пластины не искажается и деформации равны нулю. Изгибающие моменты и напряжения, однако, в данном случае не равны нулю. Действительно, согласно уравнениям (5.101)—(5.104),

$$M_r = M_t = -D\frac{(1+\mu)\,\alpha\Delta t}{h};$$

$$\sigma_r = \sigma_t = -\frac{E\alpha\Delta t}{(1-\mu)\,h}\,z.$$

3. *Перепад температуры постоянный; внутренний край защемлен, наружный — свободный.*

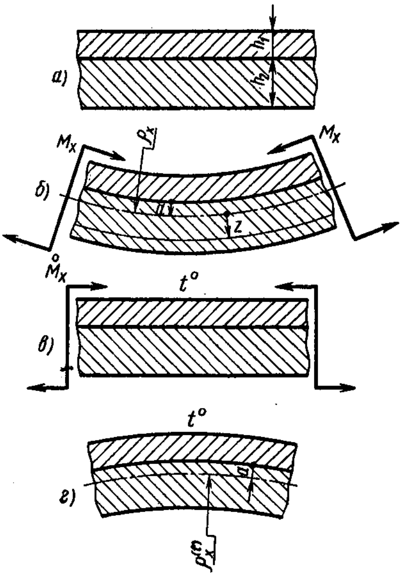


Рис. 5.28

$$\frac{d(\Delta t)}{dr} = 0; \qquad \vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Граничные условия:
при $r = r_1$ $\vartheta = 0$;
при $r = r_2$ $M_r = 0$ или

$$\left[\frac{d\vartheta}{dr} + \mu\frac{\vartheta}{r} - \frac{(1+\mu)\,\Delta t\alpha}{h}\right] = 0.$$

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{\alpha\Delta t r_2^2}{h\left(r_2^2 + r_1^2\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)};$$

$$C_2 = -\frac{\alpha\Delta t r_1^2 r_2^2}{h\left(r_2^2 + r_1^2\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)}.$$

Дальнейшее вычисление деформаций и напряжений не представляет трудности.

Вопрос о температурных напряжениях и деформациях имеет важное значение для биметаллических пластин (рис. 5.28, *а*). Вследствие разных коэффициентов линейного расширения слоев такие пластины при нагревании искривляются. Это свойство позволяет использовать биметаллические пластины в качестве чувствительных элементов терморегуляторов.

Рассмотрим вначале изгиб биметаллической пластины под действием момента M_x при отсутствии нагрева (рис. 5.28, *б*). При этом будем предполагать, что напряженное состояние в пластине — одноосное (это предположение оправдывается, если пластина достаточно узкая).

Обозначим через h_1 и h_2 толщину слоев;

E_1 и E_2 — модули упругости материалов;

a — расстояние от границы слоев до нейтрального слоя;

ρ_x — радиус кривизны нейтрального слоя.

На основании гипотезы неизменности нормалей

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x},$$

где z отсчитывается от нейтрального слоя; положительное направление z — вниз.

По деформации определим напряжения:

в верхнем слое

в нижнем слое

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \varepsilon E_1 = \frac{zE_1}{\rho_x}; \\ \sigma_{x_2} &= \varepsilon E_2 = \frac{zE_2}{\rho_x}; \end{aligned}\right\} \qquad (5.107)$$

Положение нейтрального слоя найдем из условия равенства нулю осевой силы N. Последняя равна сумме интегралов от σ_x по толщине верхнего и нижнего слоев:

$$N = \int\limits_{-(h_1+a)}^{-a} \sigma_{x_1} dz + \int\limits_{-a}^{(h_2-a)} \sigma_{x_2} dz = -\frac{E_1 h_1}{\rho_x}\left(\frac{h_1}{2} + a\right) + $$

$$+ \frac{E_2 h_2}{\rho_x}\left(\frac{h_2}{2} - a\right) = 0, \qquad (5.108)$$

откуда

$$a = \frac{E_2 h_2^2 - E_1 h_1^2}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}. \qquad (5.109)$$

Представим изгибающий момент также в виде суммы интегралов по толщине верхнего и нижнего слоев:

$$M_x = \int\limits_{-(h_1+a)}^{-a} \sigma_{x_1} dz \cdot z + \int\limits_{-a}^{h_2-a} \sigma_{x_2} dz \cdot z$$

или, с учетом равенств (5.107):

$$M_x = \frac{E_1 J_1 + E_2 J_2}{\rho_x}, \qquad (5.110)$$

где J_1 и J_2 — моменты инерции сечений верхнего и нижнего слоя относительно нейтральной линии (на единицу ширины);

$$J_1 = \frac{(h_1+a)^3 - a^3}{3}; \qquad J_2 = \frac{(h_2-a)^3 + a^3}{3}.$$

Из уравнения (5.110) определим кривизну нейтрального слоя

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{E_1 J_1 + E_2 J_2}. \qquad (5.111)$$

Выражения для напряжений (5.107) после подстановки в них значения кривизны из уравнения (5.111) принимают следующий вид:

$$\sigma_{x_1}^{(M)}=\frac{M_x E_1 z}{E_1 J_1+E_2 J_2};\qquad \sigma_{x_2}^{(M)}=\frac{M_x E_2 z}{E_1 J_1+E_2 J_2}. \tag{5.112}$$

Все приведенные зависимости справедливы также при поперечном изгибе, когда изгибающий момент переменный по длине.

Прогиб пластины можно определить интегрированием уравнения упругой линии

$$w''=-\frac{1}{\rho_x}=-\frac{M_x}{E_1 J_1+E_2 J_2}. \tag{5.113}$$

Предположим теперь, что та же пластина нагрета на $t°$ и, кроме того, нагружена моментом $\mathring{M}_x$. Величина момента $\mathring{M}_x$ выбрана таким образом, чтобы кривизна пластины была равна нулю (рис. 5.28, *в*). При отсутствии искривления относительное удлинение во всех точках одинаково:
для верхнего слоя

$$\varepsilon_0=\frac{\mathring{\sigma}_{x_1}}{E_1}+\alpha_1 t,$$

и для нижнего

$$\varepsilon_0=\frac{\mathring{\sigma}_{x_2}}{E_2}+\alpha_2 t,$$

где $\mathring{\sigma}_{x_1}$ и $\mathring{\sigma}_{x_2}$ — напряжения в верхнем и в нижнем слое, постоянные по толщине слоя.

Приравняв правые части двух последних равенств, получим

$$\mathring{\sigma}_{x_1}+\alpha_1 t=\mathring{\sigma}_{x_2}+\alpha_2 t. \tag{5.114}$$

Второе уравнение с неизвестными $\mathring{\delta}_{x_1}$, $\mathring{\delta}_{x_2}$ составим на основании условия равенства нулю нормальной силы

$$N=\mathring{\sigma}_{x_1} h_1+\mathring{\sigma}_{x_2}\ h_2=0. \tag{5.115}$$

Решение системы двух уравнений (5.114) и (5.115) дает

$$\left.\begin{aligned}\mathring{\sigma}_{x_1}&=-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,t}{h_1\left(\dfrac{1}{E_1 h_1}+\dfrac{1}{E_2 h_2}\right)};\\ \mathring{\sigma}_{x_2}&=-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,t}{h_2\left(\dfrac{1}{E_1 h_1}+\dfrac{1}{E_2 h_2}\right)}.\end{aligned}\right\} \tag{5.116}$$

При суммировании напряжений $\mathring{\sigma}_{x_1}$ и $\mathring{\sigma}_{x_2}$ по толщине слоев получается пара сил с плечом $\frac{h_1+h_2}{2}$; момент этой пары

$$\mathring{M}_x=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,t\,(h_1+h_2)}{\left(\dfrac{1}{E_1 h_1}+\dfrac{1}{E_2 h_2}\right)2}. \tag{5.117}$$

Теперь нетрудно определить напряжения и радиус кривизны поверхности при одном только нагреве на $t°$ С. Для этого, очевидно, надо к пластине, нагретой и нагруженной моментом $\mathring{M}_x$, приложить момент $\mathring{M}_x$ обратного направления. В результате моменты $+\mathring{M}_x$ и $-\mathring{M}_x$ взаимно уничтожатся и останутся только те напряжения и деформации, которые соответствуют нагреву (рис. 5.28, *г*). Значения напряжений найдем как разность выражений (5.116) и (5.112) при значении момента $M_x = -\mathring{M}_x$ согласно равенству (5.117), т. е.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x_1}^{(t)} &= -\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,t}{\left(\frac{1}{E_1h_1}+\frac{1}{E_2h_2}\right)}\left[\frac{1}{h_1}+\frac{(h_1+h_2)\,E_1z}{2\,[E_1J_1+E_2J_2]}\right]; \\ \sigma_{x_2}^{(t)} &= \frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,t}{\frac{1}{E_1h_1}+\frac{1}{E_2h_2}}\left[\frac{1}{h_2}-\frac{(h_1+h_2)\,E_2z}{2\,(E_1J_1+E_2J_2)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5.118}$$

Положение нейтрального слоя, от которого отсчитывают z, определяется зависимостью (5.109). Кривизна пластины при нагреве на $t°$ С согласно уравнению (5.111):

$$\frac{1^{(t)}}{\rho_x} = -\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,t\,(h_1+h_2)}{\left(\frac{1}{E_1h_1}+\frac{1}{E_2h_2}\right)2\,(E_1J_1+E_2J_2)}. \tag{5.119}$$

Анализ выражения (5.119) показывает, что термочувствительность биметалла будет наибольшей в том случае, когда толщины слоев будут удовлетворять условию

$$E_1h_1^2 = E_2h_2^2.$$

У такого биметалла, называемого нормальным, нейтральная линия при нагружении внешним моментом совпадает с границей между слоями ($a = 0$). Эффективная изгибная жесткость в этом случае

$$E_1J_1 + E_2J_2 = \frac{E_1h_1^3+E_2h_2^3}{3} = \frac{E_1h_1^2h}{3},$$

где

$$h = h_1 + h_2.$$

Зависимости (5.118) и (5.119) для нормального биметалла упрощаются и принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x_1}^{(t)} &= -\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,tE_1}{h}\left(h_1+\frac{3}{2}z\right); \\ \sigma_{x_2}^{(t)} &= \frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,tE_2}{h}\left(h_2-\frac{3}{2}z\right); \end{aligned}\right\} \tag{5.120}$$

$$\frac{1^{(t)}}{\rho_x} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,t}{h}. \tag{5.121}$$

При большой ширине биметаллической пластины в ней возникает двухосное напряженное состояние. Рассуждая аналогично, нетрудно установить следующее. Если края пластины свободны, то при нагревании она искривляется в двух направлениях и ее плоская поверхность переходит в сферическую. Радиус кривизны, одинаковый по x и y, может быть вычислен по формуле (5.119). Напряжения, также одинаковые по x и y, будут в $\frac{1}{1-\mu}$ раз больше вычисленных по формулам (5.118). Если же пластина имеет накладки, не позволяющие ей искривляться в поперечном направлении, то в ней возникает цилиндрический изгиб. Кривизна по оси x в этом случае будет в $\frac{1}{1-\mu^2}$ раз меньше вычисленной по формуле (5.119). Напряжение $\sigma_x^{(t)}$ будет в $\frac{1}{1-\mu}$ раз больше вычисленного по формулам (5.118), а напряжение $\sigma_y^{(t)}$ будет отличаться от $\sigma_x^{(t)}$ тем, что во втором слагаемом будет еще множитель μ.

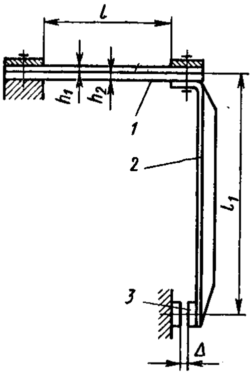


Рис. 5.29

Заметим, что для снижения напряжений и увеличения термочувствительности в биметаллических пластинах иногда делают продольные прорези. При наличии последних напряженное состояние приближается к одноосному.

Пример 5.11. Схема термореле изображена на рис. 5.29. В качестве чувствительного элемента использована биметаллическая пластина *1*. При нагревании пластина деформируется и посредством рычага *2* замыкает контакт *3*. Определить усилие, действующее на контакт при температуре $t = 100°$ С.

Дано: $l = 20$ мм; $l_1 = 40$ мм; $\Delta = 0{,}5$ мм; $h_1 = 0{,}2$ мм; $h_2 = 0{,}4$ мм; верхний слой — медь $E_1 = 1 \cdot 10^7$ Н/см^2; $\alpha_1 = 18 \cdot 10^{-6}$ 1/град; нижний слой — сталь $E_2 = 2 \cdot 10^7$ Н/см^2; $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/град; ширина пластины $b = 10$ мм. Изгибная жесткость рычага $EJ = 1600$ Н·см^2.

При заданных числовых значениях $h_2 = 2h_1$; $E_2 = 2E_1$; $\alpha_2 = \frac{2}{3}\alpha_1$.

Для определения искомого усилия X составим уравнение перемещений

$$\delta^{(t)} - \delta^{(X)} = \Delta,$$

где $\delta^{(t)}$ — перемещение контакта от нагрева;

$\delta^{(X)}$ — перемещение контакта от силы X.

По уравнению (5.109) вычислим расстояние a от нейтрального слоя:

$$a = \frac{E_2h_2^2 - E_1h_1^2}{2\,(E_1h_1 + E_2h_2)} = \frac{2E_1\,(2h_1)^2 - E_1h_1}{2\,(E_1h_1 - 2E_1 \cdot 2h_1)} = 0{,}7h_1 = 0{,}014 \text{ см}.$$

Момент инерции слоев (на единицу ширины)

$$J_1 = \frac{(1{,}7h_1)^3 - (0{,}7h_1)^3}{3} = 1{,}521h_1^3 = 12{,}16 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3;$$

$$J_2 = \frac{(1{,}3h_1)^3 + (0{,}7h_1)^3}{3} = 0{,}847h_1^3 = 6{,}77 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3.$$

Изгибная жесткость

$$E_1J_1 + E_2J_2 = 257 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Кривизну при нагревании определим по зависимости (5.119):

$$\left(\frac{1}{\rho_x}\right)^{(t)} = -\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,t\,(h_1+h_2)}{\left(\frac{1}{E_1h_1}+\frac{1}{E_2h_2}\right)2\,(E_1J_1+E_2J_2)} = 0{,}0112 \ \text{1/см}.$$

Напряжения согласно формулам (5.118):

$$\sigma_{x_1}^{(t)} = -0{,}267\alpha_1 tE_1 - 0{,}125\alpha_1 tE_1\frac{z}{h_1}, \text{ где } -1{,}7h_1 \leqslant z \leqslant -0{,}7h_1;$$

$$\sigma_{x_2}^{(t)} = 0{,}133\alpha_1 tE_1 - 0{,}249\alpha_1 tE_1\frac{z}{h_1}, \quad \text{где} \quad -0{,}7h_1 \leqslant z \leqslant 1{,}3h_1.$$

Для определения перемещения контакта, вызванного нагреванием, применим интеграл Мора:

$$\delta_1^{(t)} = \int\limits_0^l \left(\frac{1}{\rho}\right)^{(t)} M_1\,dz = 0{,}090 \ \text{см},$$

где $M_1 = 1l_1$ — момент в текущем сечении пластины от единичной нагрузки, приложенной по направлению искомого перемещения.

К перемещению от изгиба можно добавить перемещение от удлинения пластины

$$\delta_2^{(t)} = \varepsilon_0 l = \alpha_1 tl + \frac{\overset{\circ}{\sigma}_{x_1} l}{E_1} = \alpha_1 tl - \frac{(\alpha_1-\alpha_2)\,tl}{\left(1+\frac{E_1h_1}{E_2h_2}\right)} = 0{,}0026 \ \text{см}.$$

Суммарное перемещение контакта при нагревании $\delta^{(t)} = 0{,}0926$ см. Далее найдем перемещение контакта от силы X, для чего также используем интеграл Мора:

$$\delta^{(x)} = \int\limits_0^l \frac{(Xl_1)(1l_1)\,dz}{b\,(E_1J_1+E_2J_2)} + \int\limits_0^{l_1} \frac{(Xz_1)(1z_1)\,dz_1}{EJ} = \frac{Xl_1^2 l}{b\,[E_1J_1+E_2J_2)} + \frac{Xl_1^3}{3EJ} = 0{,}1378X,$$

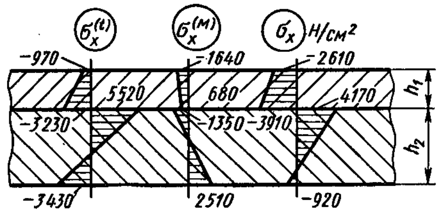


Рис. 5.30

где $\frac{Xl_1}{b}$ — изгибающий момент от силы X на единицу ширины пластины.

Найденные величины вносим в уравнение перемещений:

$$0{,}0926 - 0{,}1378 \cdot X = 0{,}05,$$

отсюда

$$X = 0{,}31 \ \text{Н}.$$

Напряжения, возникающие от силы X, согласно формулам (5.112):

$$\sigma_{x_1}^{(M)} = \frac{Xl_1E_1z}{E_1J_1+E_2J_2} = 964\,\frac{z}{h_1} \ \text{Н/см}^2;$$

$$\sigma_{x_2}^{(M)} = \frac{Xl_1E_2z}{E_1J_1+E_2J_2} = 1928\,\frac{z}{h_1} \ \text{Н/см}^2.$$

Эпюры напряжений от нагревания, от силы X и суммарные приведены на рис. 5.30.

Глава 6 ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ИЗГИБА ПЛАСТИН

§ 1. Вывод основного дифференциального уравнения упругой поверхности пластины

В общем случае изгиба срединная плоскость пластины переходит в некоторую поверхность двоякой кривизны, не являющуюся поверхностью вращения.

Этот случай изгиба пластин более сложный, так как напряжения и деформации представляют собой функции двух независимых переменных; поэтому дифференциальные уравнения получаются в частных производных.

Теория изгиба пластин основывается на общих гипотезах и допущениях, сформулированных в гл. 5.

Согласно гипотезе неизменности нормалей, нормали к срединной плоскости пластины не искривляются, а лишь поворачиваются относительно своего первоначального положения, оставаясь перпендикулярными к деформированной поверхности пластины.

Представим угол поворота нормали в виде суммы двух углов в двух взаимно перпендикулярных направлениях: ϑ — угол поворота в направлении оси x и ψ — угол поворота в направлении оси y (рис. 6.1). Выделим из пластины бесконечно малый элемент (рис. 6.2,*а*). Вследствие малости прогибов можно считать, что прямоугольник $abcd$, совпадающий с срединной плоскостью, не изменяет ни своих размеров, ни формы, т. е. точки $abcd$ смещаются только по вертикали.

Рассмотрим теперь прямоугольник $klmn$, расположенный на расстоянии z от срединной плоскости. Вследствие переменности углов ϑ и ψ по x и по y этот прямоугольник получит как линейные, так и угловую деформации.

На основании гипотезы неискривляемости нормалей линейная деформация в направлении оси x волокна lm (рис. 6.2, *б* и *в*)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} z, \tag{6.1}$$

а линейная деформация в направлении оси y

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} z. \tag{6.2}$$

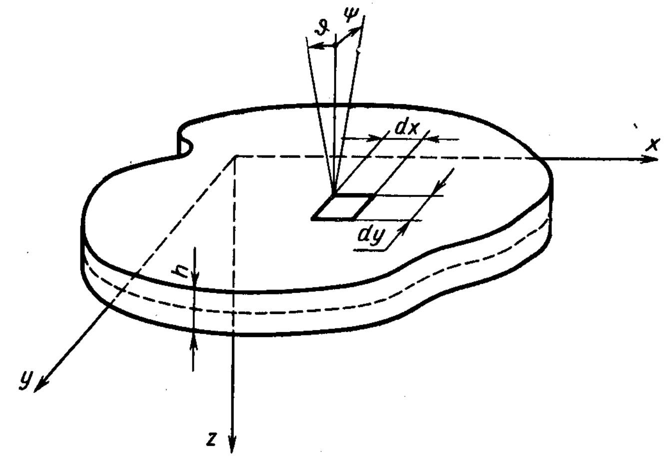


Рис. 6.1

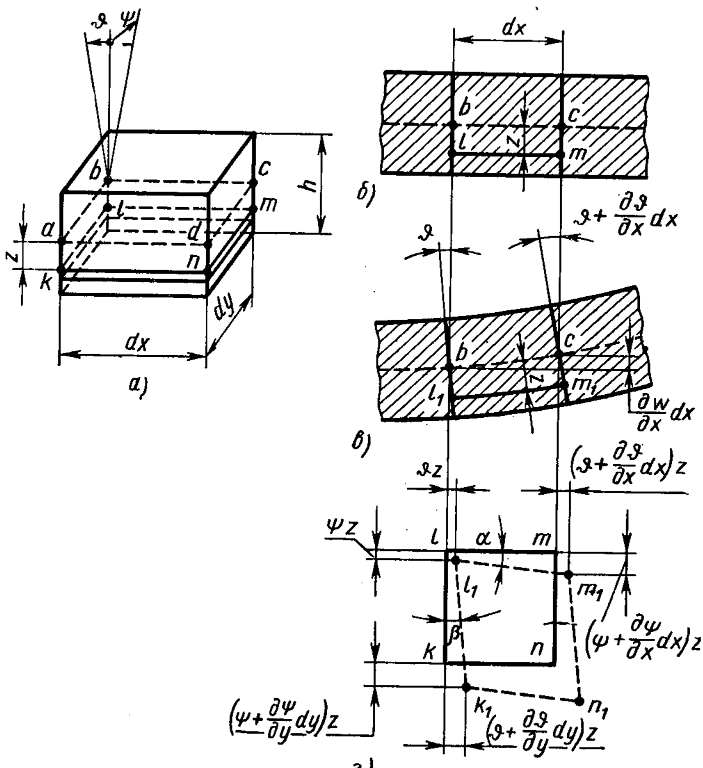


Рис. 6.2

Угловая деформация в рассматриваемой плоскости определяется как изменение прямого угла klm (рис. 6.2,*г*); она складывается из двух углов — угла поворота стороны lm:

$$\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x} z$$

и угла поворота стороны lk:

$$\beta = \frac{\partial\vartheta}{\partial y} z.$$

Следовательно,

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right) z. \qquad (6.3)$$

Учитывая, что углы поворота нормали ϑ и ψ связаны с прогибом w зависимостями:

$$\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\psi = -\frac{\partial w}{\partial y},$$

выражения деформаций можно представить в виде

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z = \varkappa_x z; \qquad (6.4)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z = \varkappa_y z; \qquad (6.5)$$

$$\gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} z = 2\varkappa_{xy} z. \qquad (6.6)$$

За положительное направление прогиба принято направление вниз.

Величины $\varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и $\varkappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ при малых прогибах представляют собой кривизны поверхности в направлениях осей x и y (рис. 6.3, *а* и *б*). Величина $\varkappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}$ представляет собой кручение поверхности относительно тех же осей (рис. 6.3, *в*).

Перейдем от деформаций к напряжениям. Используем зависимости закона Гука при двухосном напряженном состоянии:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \qquad (6.7)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \qquad (6.8)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} G = -\frac{Ez}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \qquad (6.9)$$

Кроме напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} в гранях выделенного элемента, возникают еще касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz}, направленные перпендикулярно срединной плоскости. В точках, расположенных у поверхности пластины $\left(\text{при } z = \pm \frac{h}{2}\right)$, касательные напряжения

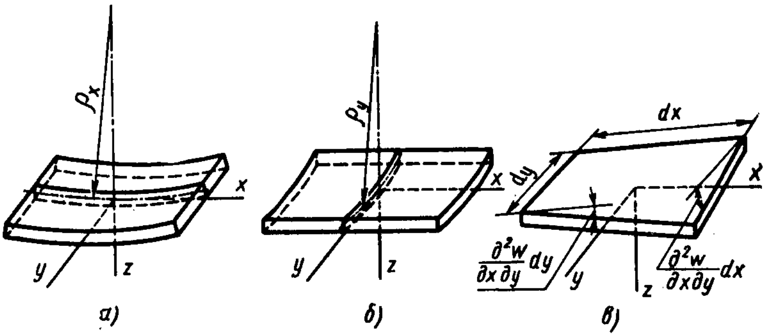


Рис. 6.3

τ_{xz} и τ_{yz} равны нулю (согласно закону парности касательных напряжений), а на срединной поверхности — достигают максимума. Эти напряжения обычно бывают сравнительно малы, поэтому в расчете на прочность их не учитывают.

Существенную роль играют только равнодействующие напряжений τ_{xz} и τ_{yz}, т. е. поперечные силы Q_x и Q_y, которые необходимо учитывать в уравнениях равновесия элемента пластины.

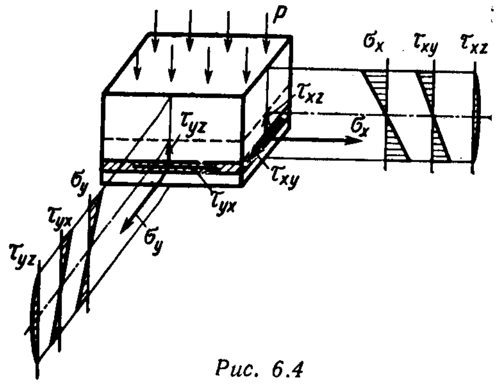


Рис. 6.4

Распределение напряжений по толщине пластины показано на рис. 6.4. Чтобы перейти к суммарным силовым факторам, проинтегрируем напряжения по площади соответствующих граней. Нормальные напряжения σ_x и σ_y при интегрировании приводятся к изгибающим моментам M_x и M_y; касательные напряжения τ_{xy} и τ_{yx} — к крутящим моментам M_{xy} и M_{yx}, а касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} — к поперечным силам Q_x и Q_y (рис. 6.5). Все перечисленные силовые факторы принято относить к единице длины, поэтому размеры элемента в плане примем равными единице:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \, dz \, z; \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \, dz \, z;$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \, dz \, z; \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \, dz \, z.$$

Подстановка под знак интегралов выражений (6.7) — (6.9) приводит к следующим зависимостям:

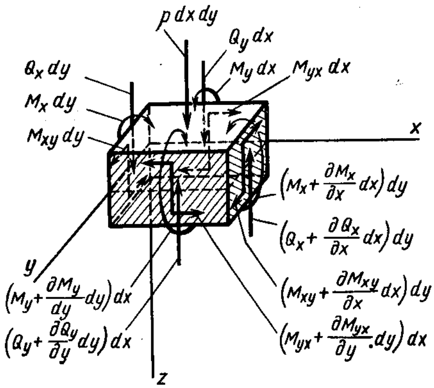


Рис. 6.5

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \tag{6.10}$$

$$M_y = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]; \tag{6.11}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y}, \tag{6.12}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — изгибная жесткость пластины.

Изгибающие моменты M_x и M_y и крутящий момент M_{xy} выражены через функцию w, которая пока неизвестна. Недостающие уравнения для определения этой функции получим, рассмотрев равновесие элемента пластины (рис. 6.5). По граням элемента действуют силы $Q_x\,dy$, $Q_y\,dx$ и моменты $M_x\,dy$, $M_y\,dx$, $M_{xy}\,dy$, $M_{yx}\,dx$. С увеличением координат на dx и dy силы и моменты получают бесконечно малые приращения. Кроме внутренних сил, на верхнюю грань элемента действует сила $p\,dx\,dy$ от внешнего давления.

Составим уравнение проекций всех сил на ось z и уравнения моментов относительно осей x и y:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - p = 0; \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + Q_x = 0; \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0. \tag{6.15}$$

Остальные три условия равновесия удовлетворяются тождественно.

Приведем уравнения (6.10) — (6.15) к одному уравнению с одним неизвестным. Подставив выражения (6.10) — (6.12) в уравнения (6.14) и (6.15), определим поперечные силы

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \\ Q_y &= D\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

Выражения (6.16) можно записать более кратко:

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= D\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w); \\ Q_y &= D\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w), \end{aligned}\right\} \qquad (6.16\text{а})$$

где ∇^2 — дифференциальный оператор Лапласа;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \qquad (6.17)$$

Выражения (6.16) внесем в уравнение (6.13); в результате получим дифференциальное уравнение упругой поверхности

$$D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2 w)+D\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\nabla^2 w)=p$$

или

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{p}{D}. \qquad (6.18)$$

Уравнение (6.18) можно представить также в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^4}=\frac{p}{D}. \qquad (6.18\text{а})$$

Искомая функция w должна удовлетворять дифференциальному уравнению (6.18) и, кроме того, граничным условиям на краях пластины.

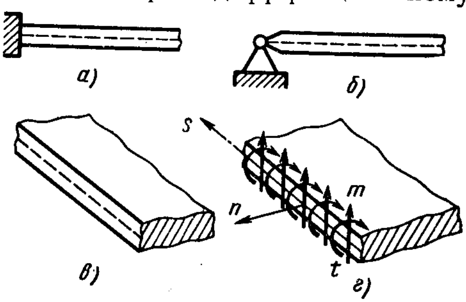


Рис. 6.6

Остановимся на вопросе о граничных условиях более подробно. Практически могут встретиться следующие варианты граничных условий:

1. *Край пластины жестко заделан* (рис. 6.6, *а*). В этом случае должны быть равны нулю прогиб w и угол наклона в направлении, перпендикулярном к контуру. Если обозначить через n и s нормаль и касательную к контуру, то на краю пластины при жесткой заделке

$$w=0; \quad \frac{\partial w}{\partial n}=0. \qquad (6.19)$$

Заметим, что, поскольку w на контуре всюду равно нулю, то, очевидно, $\frac{\partial w}{\partial s}$ также равно нулю.

2. *Край пластины закреплен шарнирно* (рис. 6.6, *б*). На краю должны быть равны нулю прогиб и изгибающий момент в направлении, перпендикулярном контуру, т. е.

$$w=0; \quad M_n=0. \tag{6.20}$$

Второе условие на основании зависимости (6.10) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0. \tag{6.20а}$$

Для прямолинейного края $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0$ и, следовательно, вместо зависимости (6.20а) можно написать

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=0, \tag{6.20б}$$

а также

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=\nabla^2 w=0. \tag{6.20в}$$

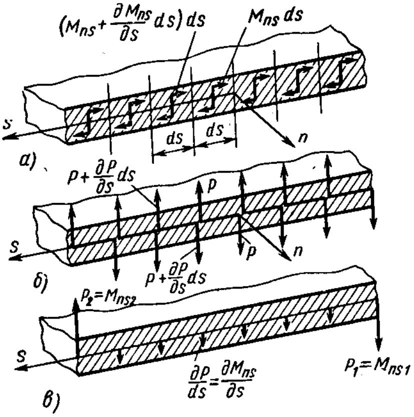


Рис. 6.7

Для криволинейного, шарнирно закрепленного края равенства (6.20б) и (6.20в) несправедливы.

При действии на шарнирно опертый край пластины распределенного момента, интенсивность которого m, Н·см/см, второе граничное условие (6.20) принимает вид

$$M_n=m \text{ или } \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=-\frac{m}{D}. \tag{6.20г}$$

3. *Край пластины не закреплен* (рис. 6.6, *в*); на свободном краю напряжения σ_n, τ_{ns} и τ_{nz} равны нулю. Следовательно, должны быть равны нулю изгибающий момент M_n, скручивающий момент M_{ns} и поперечная сила Q_n. Эти три условия, однако, не могут быть удовлетворены одновременно; так как гипотеза неискривляемости нормалей накладывает на деформации пластины дополнительную связь, поэтому на каждом краю пластины могут быть удовлетворены только два условия. Указанное затруднение можно преодолеть, заменив распределенный по кромке пластины крутящий момент эквивалентной поперечной нагрузкой. Действительно, каждую из изображенных на рис. 6.7, *а* пар сил можно повернуть на 90° и представить в виде

произведения силы P на плечо ds (рис. 6.7, *б*). При этом

$$P\,ds = M_{ns}\,ds,$$

следовательно,

$$P = M_{ns}.$$

Силы P и $P + \frac{dP}{\partial s}ds$ от двух рядом расположенных пар, действуя по одной прямой, вычитаются одна из другой и дают силу $\frac{\partial P}{ds}\,ds = \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\,ds$. Таким образом получается распределенная по краю пластины поперечная нагрузка $q = \frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{ds}$ (рис. 6.7, *в*).

По своему характеру эта нагрузка подобна поперечной силе Q_n. Так как на свободной кромке поперечная сила отсутствует, то, очевидно, должно выполняться равенство

$$Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0$$

или с учетом зависимостей (6.12) и (6.16):

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n\,\partial s}\,[1-\mu]\right) = 0.$$

Это равенство представляет собой второе граничное условие для свободного края, первое же условие имеет вид $M_{n'} = 0$ или $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0$, следовательно, граничные условия для свободного края

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial s} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (2-\mu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

Если к незакрепленному краю пластины приложены изгибающий момент m и распределенная нагрузка t (рис. 6.6, *г*), условия (6.21) должны быть заменены следующими:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= -\frac{m}{D}; \\ \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (2-\mu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right] &= \frac{t}{D}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

Следует заметить, что при преобразовании распределенного по краю крутящего момента в распределенную поперечную нагрузку на концах рассматриваемой стороны пластины остаются еще две неуравновешенные сосредоточенные силы (рис. 6.7, *в*). По величине эти силы равны скручивающему моменту в концевых точках, т. е.

$$P_1 = M_{ns_1}; \quad P_2 = M_{ns_2}.$$

Таким образом, распределенный по краю скручивающий момент эквивалентен распределенной поперечной нагрузке, интенсивность которой $\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$, и двум силам P_1 и P_2 в крайних точках.

Если функция w, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (6.18) и граничным условиям на краях, найдена, то задачу о напряжениях и деформациях в пластине можно считать решенной. Функция w характеризует величину прогиба в каждой точке. По функции w с помощью зависимостей (6.10) — (6.12) определяют моменты M_x, M_y, M_{xy}. Для вычисления напряжений можно использовать формулы (6.7) (6.9), однако более удобно напряжения выразить через моменты. Из равенств (6.7) — (6.9), (6.10) — (6.12), следует

$$\sigma_x = \frac{M_x}{h^3/_{12}} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{h^3/_{12}} z; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{h^3/_{12}} z. \qquad (6.23)$$

Наибольшие напряжения возникают при $z = \pm \frac{h}{2}$:

$$\sigma_{x\,\max} = \frac{M_x 6}{h^2}; \quad \sigma_{y\,\max} = \frac{M_y 6}{h^2}; \quad \tau_{xy\,\max} = \frac{M_{xy} 6}{h^2}. \qquad (6.24)$$

По напряжениям σ_x, σ_y, τ_{xy} можно вычислить главные напряжения, эквивалентное напряжение и коэффициент запаса прочности.

§ 2. Изгиб прямоугольных и эллиптических пластин

Определение функции w, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6.18) и граничным условиям на краях, представляет собой довольно сложную задачу и решить ее аналитическим путем не всегда возможно. Довольно просто задача решается для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по краям и нагруженной произвольной нагрузкой. В этом случае на краях пластины должно выполняться условие (6.20). Если стороны пластины равны соответственно a и b и начало координат выбрано в центре (рис. 6.8), то граничные уловия будут следующие:

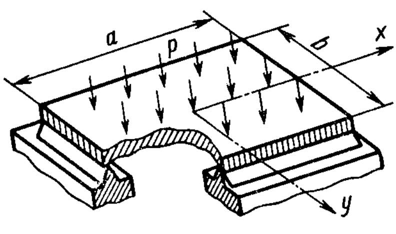


Рис. 6.8

$$\text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y = \pm \frac{b}{2} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Рассмотрим вначале частный случай нагружения, при котором упругая поверхность определяется уравнением

$$w = w_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \qquad (6.25)$$

где w_0 — прогиб в центре.

Легко проверить, что это уравнение удовлетворяет всем граничным условиям.

Выясним, по какому закону должно быть распределено давление; для этого вычислим $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ и $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ и подставим в уравнение (6.18а):

$$w_0 \pi^4 \left(\frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^4}\right) \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} = \frac{p}{D}.$$

Отсюда

$$p = p_0 \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}, \tag{6.26}$$

где

$$p_0 = w_0 \pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2. \tag{6.27}$$

Следовательно, если давление будет распределено согласно уравнению (6.26), то прогибы будут определяться зависимостью (6.25),

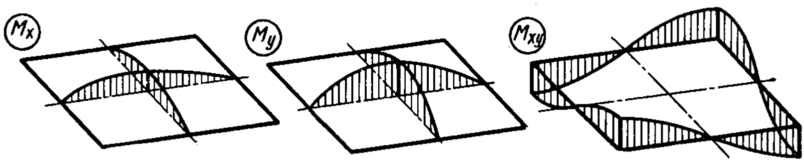


Рис. 6.9

причем максимальный прогиб в центре пластины

$$w_0 = \frac{p_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}. \tag{6.28}$$

Выражения моментов M_x, M_y, M_{xy} для рассматриваемой нагрузки получим по формулам (6.10) — (6.12):

$$M_x = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = \frac{p_0\left(\frac{1}{a^2} + \mu \frac{1}{b^2}\right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}; \tag{6.29}$$

$$M_y = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = \frac{p_0\left(\frac{1}{b^2} + \mu \frac{1}{a^2}\right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}; \tag{6.30}$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{p_0(1-\mu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 ab} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}. \tag{6.31}$$

Эпюры M_x, M_y, M_{xy} приведены на рис. 6.9. Изгибающие моменты достигают максимума в центре пластины, а скручивающие — в угловых точках.

Исследуем, как распределяются опорные реактивные силы вдоль сторон пластины. Последние должны уравновешивать силу, равную разности $Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$. Для стороны $x = \frac{a}{2}$ интенсивность реактивной силы

$$R_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right].$$

Подставив в это равенство выражение (6.25) и приняв во внимание равенство (6.28), получим

$$R_x = \frac{p_0}{\pi a\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left[\frac{1}{a^2}+\frac{(2-\mu)}{b^2}\right]\cos\frac{\pi y}{b}.$$

Аналогично для стороны $y = \frac{b}{2}$

$$R_y = \frac{p_0}{\pi b\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left[\frac{1}{b^2}+\frac{(2-\mu)}{a^2}\right]\cos\frac{\pi x}{a}.$$

Вычислим равнодействующую распределенных реактивных сил

$$\int_s R_n\,ds = 2\int_{-b/2}^{b/2} R_x\,dy + 2\int_{-a/2}^{a/2} R_y\,dx =$$
$$= \frac{4p_0ab}{\pi^2} + \frac{8p_0(1-\mu)}{\pi^2 ab\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}.$$

Полученную величину сопоставим с величиной равнодействующей внешней нагрузки:

$$\int_x\int_y p\,dx\,dy = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} p_0\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{4p_0ab}{\pi^2}.$$

Равнодействующая распределенных реактивных сил получилась больше, чем равнодействующая внешней нагрузки, на величину $\frac{8p_0(1-\mu)}{\pi^2 ab\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}$. Это объясняется тем, что, кроме распределенных реакций, по углам пластины возникают еще сосредоточенные реактивные силы обратного направления. Эти силы соответствуют тем неуравновешенным сосредоточенным силам по концам сторон, которые получаются при замене распределенных скручивающих моментов эквивалентной поперечной нагрузкой. Так как в угловой точке образуются две такие силы (от двух пар, расположенных на двух сторонах), то величина реакции T в угловой точке пластины будет равна удвоенному моменту M_{xy}:

$$T = -2M_{xy\,(x=a/2,\ y=b/2)} = -\frac{2p_0(1-\mu)}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 ab}.$$

Нетрудно проверить, что сумма четырех сосредоточенных реакций как раз равна разности равнодействующих распределенных реактивных сил и внешней нагрузки. Схема действия реактивных сил показана на рис. 6.10. Необходимо сделать оговорку, что указанное распределение реактивных сил будет иметь место только в том случае, когда опоры запрещают перемещение углов пластины вверх. Если же пластина лежит на опорах свободно, то реактивные силы T возникнуть не могут и углы пластины приподнимутся над опорами. В результате пластина будет прилегать к опорам не по всей длине сторон, и характер деформации плиты будет более сложный.

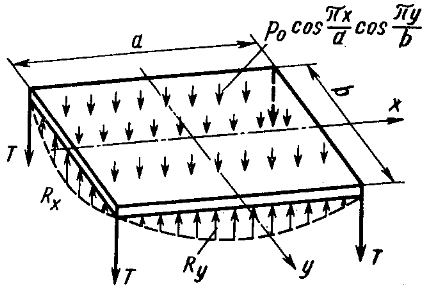


Рис. 6.10

Полученное решение можно распространить и на более общий случай.

Рассуждая аналогично, можно показать, что давлению, распределенному по закону

$$p = p_0 \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{6.32}$$

соответствует упругая поверхность

$$w = w_0 \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{6.33}$$

где

$$w_0 = \frac{p_0}{\pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \tag{6.34}$$

Приведенное решение можно распространить на случай нагружения прямоугольной пластины с шарнирно закрепленными краями давлением, распределенным по произвольному симметричному закону:

$$p = p\,(x,\ y).$$

Разложив нагрузку $p\,(x, y)$ в двойной тригонометрический ряд, получим

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{6.35}$$

где m и $n = 1, 3, 5 \ldots$ (так как нагрузка симметричная). Для определения коэффициента C_{mn} произвольного члена ряда умножим правую и левую части равенства на $\cos\frac{m\pi x}{a}$ и проинтегрируем в пределах от $-\frac{a}{2}$ до $\frac{a}{2}$. Учитывая, что

$$\int\limits_{-a/2}^{a/2} \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{\overline{m}\pi x}{a}\,dx = 0 \quad (\overline{m} \neq m)$$

и

$$\int\limits_{-a/2}^{a/2} \cos^2\frac{m\pi x}{a}\,dx = \frac{a}{2},$$

получим

$$\int\limits_{-a/2}^{a/2} p(x,\ y)\cos\frac{m\pi x}{a}\,dx = \frac{a}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Правую и левую части этого равенства умножим на $\cos\frac{n\pi y}{b}$ и проинтегрируем в пределах от $-\frac{b}{2}$ до $\frac{b}{2}$; тогда

$$\int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-b/2}^{b/2} p(x,\ y)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{ab}{4}C_{mn}.$$

Отсюда найдем коэффициент произвольного члена ряда (6.35):

$$C_{mn} = \frac{4}{ab}\int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-b/2}^{b/2} p(x,\ y)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy. \qquad (6.36)$$

Поскольку для нагрузки, определяемой уравнением (6.32), функция w известна, то, применяя принцип независимости действия сил, можно записать функцию w для нагрузки $p(x, y)$, представленной в виде двойного ряда (6.35):

$$w = \frac{1}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}. \qquad (6.37)$$

Это решение в двойных тригонометрических рядах было получено Навье.

Рассмотрим в качестве примера пластину, нагруженную равномерным давлением p.

По формуле (6.36) при $p(x, y) = p = \text{const}$ найдем

$$C_{mn} = \frac{4p}{ab}\int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-b/2}^{b/2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{16p}{\pi^2 mn}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2};$$

здесь $m,\ n = 1,\ 3,\ 5,\ \dots$; $\sin\frac{m\pi}{2} = \pm 1$; $\sin\frac{n\pi}{2} = \pm 1$.

В результате подстановки найденного значения C_{mn} функция w [см. уравнение (6.37)] принимает вид

$$w=\frac{16p}{\pi^6 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y'}{b}. \qquad (6.38)$$

Максимальный прогиб в центре пластины при $x=0$ и $y=0$

$$w_0=\frac{16p}{\pi^6 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \qquad (6.39)$$

Этот ряд быстро сходится, уже первое приближение является удовлетворительным:

$$(w_0)_{\mathrm{I}}=\frac{16p}{\pi^6 D}\frac{a^4b^4}{(a^2+b^2)^2},$$

в частности, для квадратной пластины со стороной a:

$$(w_0)_{\mathrm{I}}=\frac{4pa^4}{\pi^6 D}=0{,}00416\frac{pa^4}{D},$$

в то время как точное значение прогиба

$$w_0=0{,}00406\frac{pa^4}{D}.$$

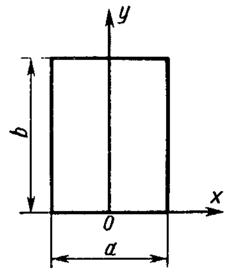


Рис. 6.11

Погрешность первого приближения составляет 2,5%.

Решение в двойных рядах для прямоугольной шарнирно опертой пластины, нагруженной сосредоточенной силой в произвольной точке или давлением, приложенным на участке поверхности, рассмотрено в книге [21].

Решение в двойных тригонометрических рядах является достаточно простым и удобным, однако оно пригодно только для пластин, у которых все четыре края закреплены шарнирно.

Более универсальный метод решения задачи об изгибе прямоугольной пластины в одинарных рядах предложен М. Леви.

Предположим, что у прямоугольной пластины (рис.6.11) два противоположных края (при $y=0$ и при $y=b$) закреплены шарнирно, а два других закреплены как угодно; нагрузка — равномерное давление p. Оси координат выбраны так, как показано на рис. 6.11. Искомую функцию $w(x, y)$ представляют в виде ряда

$$w(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty} w_k(x)\sin\frac{k\pi y}{b}, \qquad (6.40)$$

где $w_k(x)$ — неизвестная функция от x.

Очевидно, что ряд (6.40) удовлетворяет граничным условиям

$$\text{при} \quad y=0 \quad w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

$$\text{и} \quad \text{при} \quad y=b \quad w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

Для того чтобы ряд (6.40) удовлетворял также дифференциальному уравнению (6.18) и граничным условиям на двух других краях, необходимо соответствующим образом подобрать функцию $w_k(x)$.

Подставим ряд (6.40) в дифференциальное уравнение (6.18). Вычислим левую часть уравнения

$$\nabla^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2 w_k}{dx^2}\sin\frac{k\pi y}{b}-\sum_{k=1}^{\infty}w_k\frac{k^2\pi^2}{b^2}\sin\frac{k\pi y}{b}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{d^2 w_k}{dx^2}-\frac{k^2\pi^2}{b^2}\right)\sin\frac{k\pi y}{b};$$

$$\nabla^2\nabla^2 w=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{d^4 w_k}{dx^4}-2\frac{d^2 w_k}{dx^2}\frac{k^2\pi^2}{b^2}+\frac{k^4\pi^4}{b^4}w_k\right]\sin\frac{k\pi y}{b}. \tag{6.41}$$

Представим в виде аналогичного ряда правую часть уравнения

$$p=\sum_{k=1}^{\infty}p_k(x)\sin\frac{k\pi y}{b}. \tag{6.42}$$

Для определения коэффициента произвольного члена этого ряда умножим правую и левую части равенства (6.42) на $\sin\frac{k\pi y}{b}$ и проинтегрируем от 0 до b:

$$\int_0^b p(x,\ y)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy=\int_0^b\left[\sum_1^{\infty}p_k(x)\sin\frac{\hat{k}\pi y}{b}\right]\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy.$$

Приняв во внимание, что

$$\int_0^b \sin^2\frac{k\pi y}{b}\,dy=\frac{b}{2}; \qquad \int_0^b \sin\frac{\hat{k}\pi y}{b}\sin\frac{k\pi y}{b}=0,$$

где $\hat{k}\neq k$,

получим

$$p_k=\frac{2}{b}\int_0^b p(x,\ y)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy \tag{6.43}$$

при $p(x,\ y)=p=\text{const}$, $p_k=\frac{2p}{k\pi}(1-\cos k\pi)$. Если k — четное, то $p_k=0$; если k — нечетное, то $p_k=\frac{4p}{k\pi}$.

Следовательно, слагаемые, соответствующие четным k, в решении будут отсутствовать.

После подстановки выражений (6.41) — (6.43) в дифференциальное уравнение (6.18) оно принимает вид

$$\sum_{k=1,\,3,\,5\,\ldots}^{\infty}\left[\frac{d^4w_k}{dx^4}-2\frac{d^2w_k}{dx^4}\frac{k^2\pi^2}{b^2}+\frac{k^4\pi^4}{b^4}w_k\right]\sin\frac{k\pi y}{b}=$$

$$=\sum_{k=1,\,3,\,5\,\ldots}^{\infty}\frac{4p}{Dk\pi}\sin\frac{k\pi y}{b}.$$

Это уравнение распадается на ряд обыкновенных дифференциальных уравнений. Напишем k-е уравнение ряда

$$\frac{d^4w_k}{dx^4}-2\frac{d^2w_k}{dx^2}\frac{k^2\pi^2}{b^2}+\frac{k^4\pi^4}{b^4}w_k=\frac{4p}{Dk\pi}. \tag{6.44}$$

Не останавливаясь на этапах интегрирования этого уравнения, напишем его общий интеграл

$$w_k(x)=C_{1k}\ \mathrm{ch}\,\frac{k\pi x}{b}+C_{2k}\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi x}{b}+C_{3k}\frac{k\pi x}{b}\,\mathrm{ch}\,\frac{k\pi x}{b}+$$

$$+C_{4k}\frac{k\pi x}{b}\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi x}{b}+\frac{4pb^4}{k^4\pi^4Dk\pi}. \tag{6.45}$$

Слагаемые, содержащие постоянные C_{1k}, C_{2k}, C_{3k},C_{4k}, представляют собой общее решение однородного уравнения. Последний член есть частное решение уравнения (6.44) с правой частью. С учетом равенства (6.45) функция $w\ (x,\ y)$ принимает вид

$$w\,(x,\ y)=\sum_{k=1,\,3,\,5}^{\infty}\left[C_{1k}\,\mathrm{ch}\,\frac{k\pi x}{b}+C_{2k}\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi x}{b}+C_{3k}\frac{k\pi x}{b}\,\mathrm{ch}\,\frac{k\pi x}{b}+\right.$$

$$\left.+C_{4k}\frac{k\pi x}{b}\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi x}{b}+\frac{4pb^4}{k^5\pi^5D}\right]\sin\frac{k\pi y}{b}. \tag{6.46}$$

Теперь необходимо подобрать постоянные C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}, C_{4k} таким образом, чтобы были удовлетворены граничные условия на двух других краях пластины $\left(\text{при } x=\pm\frac{a}{2}\right)$.

Предположим, что два других края жестко заделаны; тогда функция w должна быть четной относительно x (упругая поверхность симметрична относительно оси y).

Следовательно,

$$\text{при } x=0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0.$$

Из этих условий следует, что $C_{2k}=0$ и $C_{3k}=0$ (функции $\mathrm{sh}\,\frac{k\pi x}{b}$ и $\frac{k\pi x}{b}\,\mathrm{ch}\,\frac{k\pi x}{b}$ — нечетные).

Для определения двух остальных постоянных необходимо использовать граничные условия на боковых сторонах:

при $x = \frac{a}{2}$ $w = 0$; $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$.

Эти условия приводят к двум уравнениям

$$C_{1k} \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{b2} + C_{4k} \frac{k\pi a}{b2} \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b2} + \frac{4pb^4}{k^5\pi^5 D} = 0;$$

$$C_{1k} \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b2} + C_{4k} \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b2} + \frac{k\pi a}{b2} \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{b2} \right] = 0,$$

решение которых дает

$$C_{1k} = -\frac{4pb^4}{k^5\pi^5 D} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{2b} + \frac{k\pi a}{2b} \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2b}}{\frac{1}{2}\left(\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b} + \frac{k\pi a}{b} \right)};$$

$$C_{4k} = \frac{4pb^4}{k^5\pi^5 D} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{2b}}{\frac{1}{2}\left(\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b} + \frac{k\pi a}{b} \right)}.$$

С учетом найденных значений постоянных уравнение упругой поверхности пластины (6.46) принимает вид

$$w = \frac{4pb^4}{\pi^5 D} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^5} \left[1 - \frac{2\left(\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{2b} + \frac{k\pi a}{2b} \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2b} \right)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b} + \frac{k\pi a}{b}} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{2b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b} + \frac{k\pi a}{b}} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} \right] \sin \frac{k\pi y}{b}. \tag{6.47}$$

Максимальный прогиб при $x = 0$; $y = \frac{b}{2}$

$$w_{\max} = \frac{4pb^4}{\pi^5 D} \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k^5} \left[1 - \frac{2\left(\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{2b} + \frac{k\pi a}{2b} \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2b} \right)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b} + \frac{k\pi a}{b}} \right]. \tag{6.48}$$

Этот ряд сходится очень быстро. Уже первое приближение совпадает с точным решением до третьего знака.

После того как функция $w(x, y)$ найдена, вычислить изгибающие моменты и напряжения нетрудно.

При выполнении практических расчетов следует иметь в виду, что максимальные изгибающие моменты и прогибы прямоугольных пластин при различных вариантах закрепления краев удобно определять с помощью таблиц готовых решений [25].

Остановимся кратко на изгибе эллиптических пластин. Рассмотрим эллиптическую пластину, жестко заделанную по контуру и нагруженную равномерным давлением (рис. 6.12). Выбрав начало координат в центре пластины, запишем уравнение контурной линии (уравнение эллипса)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (6.49)$$

При жесткой заделке в контурных точках должны выполняться граничные условия (6.19). Нетрудно проверить, что этим условиям удовлетворяет следующая функция:

$$w=w_0\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2, \qquad (6.50)$$

где w_0 — прогиб в центре.

Действительно, в результате дифференцирования w по n получим

$$\frac{\partial w}{\partial n}=w_0 2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right), \qquad (6.51)$$

но на основании уравнения (6.49) в контурных точках $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, следовательно, выражения (6.50) и (6.51) на контуре обращаются в нуль.

Проверим теперь, удовлетворяет ли выбранная функция w основному дифференциальному уравнению (6.18).

Вычислив $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}$ и $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ и подставив в уравнение (6.18), получим

$$w_0\left(\frac{24}{a^4}+\frac{16}{a^2b^2}+\frac{24}{b^4}\right)=\frac{p}{D}.$$

Очевидно, что это уравнение удовлетворяется при $p=\text{const}$ и при прогибе в центре

$$w_0=\frac{p}{D\left(\frac{24}{a^4}+\frac{16}{a^2b^2}+\frac{24}{b^4}\right)}. \qquad (6.52)$$

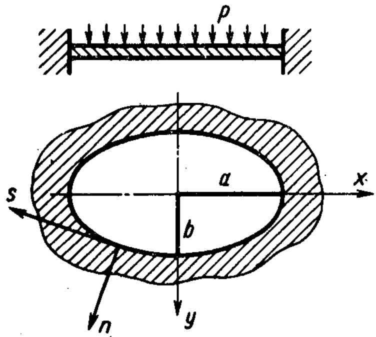


Рис. 6.12

Поскольку функция w (6.50) удовлетворяет основному дифференциальному уравнению (6.18) и граничным условиям на контуре, то она является точным решением данной задачи. Наиболее напряженная точка пластины находится на конце малой полуоси ($x=0$, $y=\pm b$). Изгибающие моменты в этой точке, согласно зависимостям (6.10), (6.11):

$$M_x=-\frac{8\mu w_0 D}{b^2};\quad M_y=-\frac{8w_0 D}{b^2}.$$

Представляет интерес еще вычислить изгибающие моменты в точке, расположенной на конце большой полуоси:

$$M_x=-\frac{8w_0 D}{a^2};\quad M_y=-\frac{8\mu w_0 D}{a^2}$$

и в центре пластины

$$M_x = 4w_0 D\left(\frac{1}{a^2} + \mu\frac{1}{b^2}\right);\quad M_y = 4w_0 D\left(\frac{1}{b^2} + \mu\frac{1}{a^2}\right).$$

В частном случае при $b = a = R$ зависимость (6.52) дает значение максимального прогиба круглой пластины, защемленной по контуру:

$$w_0 = \frac{pR^4}{64D}.$$

Уравнение (6.50) при $b = a = R$ переходит в уравнение упругой поверхности круглой пластины

$$w = w_0\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^2 = \frac{p(R^2 - r^2)^2}{64D}.$$

Для эллиптической пластины с шарнирно закрепленными краями, нагруженной равномерным давлением, функция w определяется несколько сложнее. Не останавливаясь на решении, приведем лишь значения максимального прогиба

$$w_0 = \alpha\frac{pb^4}{D}$$

и изгибающих моментов в центре пластины

$$M_x = \beta pb^2;\quad M_y = \beta_1 pb^2.$$

Значения коэффициентов α, β и β_1, вычисленные при $\mu = 0{,}3$, приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

$\frac{a}{b}$	1,0	1,2	1,5	2	3	∞
α	0,0641	0,0878	0,115	0,145	0,172	0,208
β	0,206	0,219	0,222	0,210	0,188	0,150
β_1	0,206	0,261	0,321	0,379	0,433	0,500

§ 3. Несимметричный изгиб круглых пластин

При изучении изгиба круглых пластин удобнее использовать полярную систему координат r, φ, поэтому начнем с того, что преобразуем общие уравнения теории изгиба пластин из декартовой системы координат в полярную. Как известно, между декартовыми и полярными координатами существуют следующие зависимости:

$$x = r\cos\varphi;\quad y = r\sin\varphi; \tag{6.53}$$

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{6.54}$$

Продифференцировав равенство (6.54) по x и по y, получим производные от r по x и y:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\varphi;\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\varphi. \tag{6.55}$$

Аналогично, продифференцировав равенства (6.53) по x и y и приняв во внимание (6.55), получим производные от φ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{r}. \tag{6.56}$$

Пользуясь зависимостями (6.55), (6.56), выразим производные $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ через $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial\varphi}$:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial w}{rd\varphi}\sin\varphi;$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial w}{r\partial\varphi}\cos\varphi.$$

Аналогично составим выражения вторых производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial w}{r\partial\varphi}\sin\varphi\right)\right]\cos\varphi-\\&-\left[\frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial w}{r\partial y}\sin\varphi\right)\right]\sin\varphi;\\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial w}{r\partial\varphi}\cos\varphi\right)\right]\sin\varphi+\\&+\left[\frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial w}{r\partial\varphi}\cos\varphi\right)\right]\cos\varphi;\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}&=\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial w}{r\partial\varphi}\sin\varphi\right)\right]\sin\varphi+\\&+\left[\frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial w}{r\partial\varphi}\sin\varphi\right)\right]\cos\varphi.\end{aligned}$$

Выполнив дифференцирование и положив $\varphi=0$, придем к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial r},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{r\partial\varphi}; \tag{6.57}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=\frac{\partial w}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}&=\frac{\partial^2 w}{r\partial\varphi\,\partial r}-\frac{\partial w}{r^2\partial\varphi}.\end{aligned}\right\} \tag{6.58}$$

В результате замены производных по x и y производными по r и φ, согласно равенствам (6.58), выражения изгибающих и крутящего моментов (6.10) — (6.12) принимают вид

$$M_r=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\mu\left(\frac{\partial w}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2}\right)\right]; \tag{6.59}$$

$$M_t=-D\left[\frac{\partial w}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]; \tag{6.60}$$

$$M_{rt}=-D(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{r\partial\varphi\,\partial r}-\frac{\partial w}{r^2\partial\varphi}\right]. \tag{6.61}$$

Запишем дифференциальный оператор (6.17) в полярных координатах:

$$\nabla^2(*) = \frac{\partial^2(*)}{\partial r^2} + \frac{\partial(*)}{r\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(*)}{\partial\varphi^2}. \qquad (6.62)$$

Для поперечных сил вместо выражений (6.16) получим

$$Q_r = D\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 w);$$

$$Q_t = D\frac{\partial}{r\partial\varphi}(\nabla^2 w). \qquad (6.63)$$

Основное дифференциальное уравнение (6.18) после преобразования принимает вид

$$\nabla^2\nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right) = \frac{p}{D}. \qquad (6.64)$$

Прогиб w и давление p приняты положительными, если они направлены вниз. Положительные направления силовых факторов

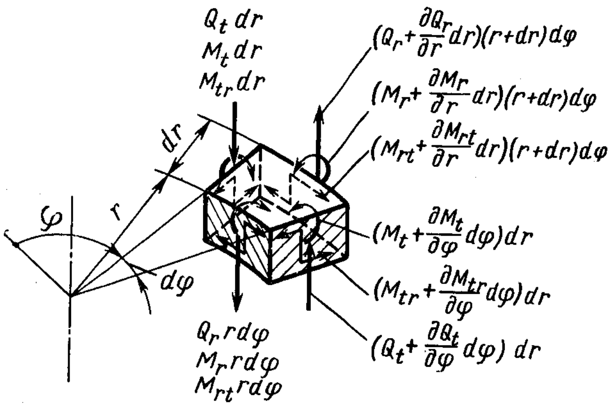


Рис. 6.13

показаны на рис. 6.13. Заметим, что зависимости (6.59) — (6.64) могут быть выведены непосредственно в полярных координатах [21].

Напишем еще выражения граничных условий для круглых пластин при несимметричной деформации.

При жесткой заделке края пластины вместо условий (6.19)

$$w = 0; \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \qquad (6.65)$$

При шарнирно закрепленном крае вместо условий (6.20)

$$w = 0; \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = 0. \qquad (6.66)$$

При свободном крае взамен условий (6.21)

$$\left.\begin{aligned}&M_r=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\mu\frac{\partial w}{r\partial r}+\mu\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2}=0;\\&Q_r-\frac{\partial M_{rt}}{r\partial\varphi}=0 \quad \text{или}\\&\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 w)+(1-\mu)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\,\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.67}$$

Общее решение дифференциального уравнения (6.64) можно представить в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения уравнения с правой частью:

$$w=\overset{\circ}{w}+\bar{w}. \tag{6.68}$$

Общее решение однородного уравнения получено Клебшем:

$$\overset{\circ}{w}=F_0(r)+\sum_1^\infty F_m(r)\cos m\varphi+\sum_1^\infty f_m(r)\sin m\varphi, \tag{6.69}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&F_0(r)=C_{10}+C_{20}r^2+C_{30}\ln\frac{r}{r_н}+C_{40}r^2\ln\frac{r}{r_н};\\&F_m(r)=C_{1m}r^m+C_{2m}r^{-m}+\\&+C_{3m}r^{m+2}+C_{4m}r^{-m+2} \quad (\text{при } m\neq 1);\\&F_1(r)=C_{11}r+C_{21}r^{-1}+C_{31}r^3+\\&+C_{41}r\ln\frac{r}{r_н} \quad (\text{при } m=1).\end{aligned}\right\} \tag{6.70}$$

Функции $f_m(r)$, $f_1(r)$ определяются такими же уравнениями, как и функции $F_m(r)$, $F_1(r)$ [см. уравнения (6.70)].

Первое слагаемое в решении (6.69) учитывает осесимметричную составляющую прогиба w. Это слагаемое полностью соответствует решению для круглых осесимметричных пластин.

Слагаемые, содержащие $\cos m\varphi$, соответствуют симметричным составляющим функции w относительно плоскости $\varphi=0$, а слагаемые, содержащие $\sin m\varphi$, — обратно симметричным.

Частное решение уравнения (6.64) определяют в каждом частном случае по заданному закону распределения давления p.

Постоянные интегрирования находят, как обычно, из граничных условий на краях пластины.

Пример 7.1. Круглая пластина, жестко заделанная по наружному краю, имеет в середине жесткий центр, к которому приложен изгибающий момент m (рис. 6.14, *а*). Подобная схема встречается, в частности, при расчете днищ канатных барабанов, работающих на изгиб.

Характер деформации пластины показан на рис. 6.14, *б*.

Совместим начало отсчета угла φ с плоскостью действия момента. Так как эта плоскость является плоскостью симметрии, то в решении (6.69) члены, содержащие $\sin m\varphi$, должны отсутствовать.

Слагаемое $F_0(r)$ в данном случае также следует приравнять нулю, так как деформация обратно симметрична относительно срединной плоскости пластины. Также равно нулю и частное решение $\overline{w}$ (ввиду отсутствия распределенного давления). Таким образом, функция w для данной задачи принимает вид

$$w = \sum_{1}^{\infty} F_m(r) \cos m\varphi,$$

где $m = 1, 3, 5\ldots$, так как нагрузка обратно симметрична относительно оси $\varphi = 90°$.

Запишем граничные условия для рассматриваемой пластины. Обозначим через ϑ_0 угол поворота жесткого центра (рис. 6.14, *б*), тогда при $r = a$ прогиб в произвольной точке на внутреннем контуре

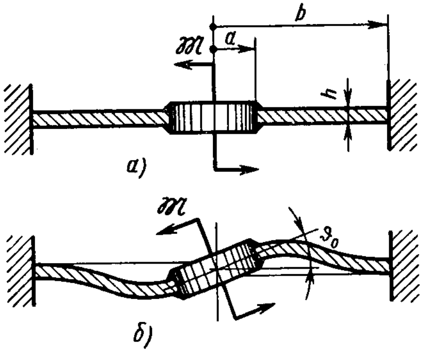


Рис. 6.14

$$w = -a\vartheta_0 \cos\varphi.$$

Составляющая угла поворота нормали в радиальном направлении в той же точке

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\vartheta_0 \cos\varphi.$$

На наружном контуре ($r = b$) при жесткой заделке имеют место следующие граничные условия:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Так как частное решение $\overline{w}$ равно нулю, а в граничные условия слагаемые, содержащие $\cos 3\varphi$, $\cos 5\varphi$ и т. д., не входят, то искомая функция w будет содержать только один первый член ряда, т. е.

$$w = F_1(r) \cos\varphi,$$

или с учетом выражений (6.70)

$$w = \left(C_{11} r + C_{21} r^{-1} + C_{31} r^3 + C_{41} r \ln \frac{r}{b}\right) \cos\varphi.$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий. Последние, при внесении в них функции w, приводятся к системе четырех уравнений:

$$-a\vartheta_0 \cos\varphi = \left(C_{11} a + C_{21} \frac{1}{a} + C_{31} a^3 + C_{41}\, a \ln \frac{a}{b}\right) \cos\varphi;$$

$$-\vartheta_0 \cos\varphi = \left[C_{11} - C_{21} \frac{1}{a^2} + C_{31} 3a^2 + C_{41}\left(\ln \frac{a}{b} + 1\right)\right] \cos\varphi;$$

$$0 = \left(C_{11} b + C_{21} \frac{1}{b} + C_{31} b^3\right) \cos\varphi;$$

$$0 = \left(C_{11} - C_{21} \frac{1}{b^2} + C_{31} 3b^2 + C_{41}\right) \cos\varphi.$$

Решение этой системы уравнений дает

$$C_{11}=\frac{\vartheta_0}{2}\,\frac{(k^2-1)}{[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]};$$

$$C_{21}=\frac{\vartheta_0}{2}\,\frac{a^2k^2}{[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]};$$

$$C_{31}=-\frac{\vartheta_0}{2a^2}\,\frac{1}{[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]};$$

$$C_{41}=\frac{\vartheta_0\,(k^2+1)}{[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]},$$

где $k=\dfrac{b}{a}$.

Выражение функции w принимает вид

$$w=\frac{\vartheta_0}{2[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]}\left[(k^2-1)\,r+\right.$$
$$\left.+\frac{a^2k^2}{r}-\frac{r^3}{a^2}+2\,(1+k^2)\,r\ln\frac{r}{b}\right]\cos\varphi.$$

Теперь осталось установить зависимость между углом поворота ϑ_0 центра и величиной момента $\mathfrak{M}$. Эту зависимость получим из условия равновесия жесткого центра. На жесткий центр действует внешний момент $\mathfrak{M}$ и распределенные по окружности радиуса a радиальный изгибающий момент M_r, скручивающий момент M_{rt} и поперечная сила Q_r (рис. 6.15). Составим уравнение моментов относительно оси y:

$$\mathfrak{M}+2\int_0^{\pi}M_ra\,d\varphi\cos\varphi-$$
$$-2\int_0^{\pi}M_{rt}a\,d\varphi\sin\varphi+2\int_0^{\pi}Q_ra\,d\varphi a\cos\varphi=0.$$

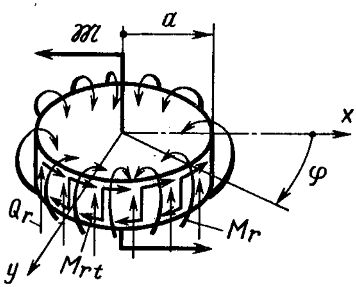


Рис. 6.15

Силовые факторы M_r, M_t, M_{rt}, Q_r определим согласно формулам (6.59)—(6.63):

$$M_r=\frac{\vartheta_0D}{a[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]}\left[(3+\mu)\frac{r}{a}-\right.$$
$$\left.-(1-\mu)\,k^2\frac{a^3}{r^3}-(1+\mu)\,(k^2+1)\frac{a}{r}\right]\cos\varphi;$$

$$M_t=\frac{\vartheta_0D}{a[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]}\left[(1+3\mu)\frac{r}{a}+\right.$$
$$\left.+(1-\mu)\,k^2\frac{a^3}{r^3}-(1+\mu)\,(k^2+1)\frac{a}{r}\right]\cos\varphi;$$

$$M_{rt}=\frac{\vartheta_0D\,(1-\mu)}{a[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]}\left[-k^2\frac{a^3}{r^3}-\frac{r}{a}+(k^2+1)\frac{a}{r}\right]\sin\varphi;$$

$$Q_r=-\frac{2\vartheta_0D}{a^2[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]}\left[2+(k^2+1)\frac{a^2}{r^2}\right]\cos\varphi.$$

При $r=a$

$$M_r=\frac{-\vartheta_0D2\,(k^2-1)\cos\varphi}{a[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]};\quad M_{rt}=0;$$

$$Q_r=\frac{\vartheta_0D2\,(3+k^2)\cos\varphi}{a^2[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)]}.$$

Внеся эти значения в уравнение равновесия жесткого центра и выполнив интегрирование, получим

$$\mathfrak{M}-\frac{4\pi D\vartheta_0(1+k^2)}{(k^2+1)\ln k-(k^2-1)}=0;$$

откуда

$$\vartheta_0=\frac{\mathfrak{M}\left[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)\right]}{4\pi D\,(k^2+1)}.$$

После того, как угол поворота центра найден, нетрудно вычислить внутренние силовые факторы.

Наибольший изгибающий момент возникает в точке с координатами $\varphi=0$, $r=a$:

$$M_{r\,\max}=-\frac{\vartheta_0 D2\,(k^2-1)}{a\left[(k^2+1)\ln k-(k^2-1)\right]}=-\frac{\mathfrak{M}\,(k^2-1)}{2\pi a\,(k^2+1)}.$$

Соответствующее максимальное напряжение

$$\sigma_{\max}=\frac{\mathfrak{M}\,(k^2-1)\,6}{2\pi a(k^2+1)h^2}.$$

Пример 6.2. Сплошная круглая пластина, жестко заделанная по наружному контуру, нагружена неравномерным давлением, распределенным согласно уравнению

$$p=p_0\,\frac{r}{b}\cos\varphi,$$

где b — наружный радиус.

Учитывая, что давление изменяется по закону $\cos\varphi$, а граничные условия от φ не зависят (граничные условия — однородные), можно заключить, что функция w [см. уравнение (6.69)] в данном случае имеет вид

$$w=F_1(r)\cos\varphi+\overline{w}=\left(C_1r+C_2r^{-1}+C_3r^3+C_4r\ln\frac{r}{b}\right)\cos\varphi+\overline{w}.$$

Найдем частное решение $\overline{w}$. Это решение должно удовлетворять уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\overline{w}=\frac{p_0r}{Db}\cos\varphi.$$

Так как правая часть уравнения содержит r в первой степени, а в левую часть уравнения входит четвертая производная от $\overline{w}$ по r, ищем $\overline{w}$ в виде

$$\overline{w}=Ar^5\cos\varphi.$$

Вычислив $\nabla^2\nabla^2\overline{w}$ и подставив в дифференциальное уравнение (6.64), найдем, что уравнение удовлетворяется при

$$A=\frac{p_0}{192Db};\qquad \overline{w}=\frac{p_0r^5\cos\varphi}{192Db}.$$

Следовательно,

$$w=\left[C_1r+C_2r^{-1}+C_3r^3+C_4r\ln\frac{r}{b}+\frac{p_0r^5}{192Db}\right]\cos\varphi.$$

Запишем граничные условия:

$$\text{при}\quad r=0\quad w\neq\infty;\quad\text{при}\quad r=0\quad \frac{\partial w}{\partial r}\neq\infty;$$

$$\text{при}\quad r=b\quad w=0;\quad\text{при}\quad r=b\quad \frac{\partial w}{\partial r}=0.$$

Из двух первых условий следует $C_2 = 0$; $C_4 = 0$.

Третье и четвертое условия приводят к двум уравнениям:

$$C_1 b + C_3 b^3 + \frac{p_0 b^4}{192D} = 0;$$

$$C_1 + 3C_3 b^2 + \frac{p_0 5 b^3}{192D} = 0,$$

из которых найдем

$$C_1 = \frac{p_0 b^3}{192D}; \qquad C_3 = -\frac{2p_0 b}{192D}.$$

Следовательно,

$$w = \frac{p}{192Db}\left[b^4 r - 2b^2 r^3 + r^5\right] \cos\varphi.$$

Дальнейшее вычисление внутренних моментов по зависимостям (6.59)—(6.61) и напряжений по зависимостям (6.24) не вызывает трудностей.

Другие примеры расчета круглых несимметрично нагруженных пластин можно найти в работах [21; 25], в частности, в этих работах приведено решение для круглой пластины, нагруженной сосредоточенной силой в произвольной точке. Используя это решение и применяя метод наложения, можно получить решение многих задач, в которых заданную нагрузку можно представить как совокупность нескольких сосредоточенных сил.

§ 4. Изгиб анизотропных пластин

Примерами анизотропных пластин, имеющих разную изгибную жесткость по различным направлениям, могут служить пластины из фанеры, текстолита, стеклопластика и т. п.

Если анизотропия механических свойств подчиняется закону симметрии относительно некоторых взаимно перпендикулярных осей, то такие пластины называют ортотропными.

К ортотропным пластинам относят также пластины, подкрепленные часто расположенными ребрами или гофрированные. В последнем случае пластины называют конструктивно ортотропными.

Рассмотрим вначале изгиб пластин постоянной толщины, изготовленных из ортотропного материала.

Предположим, что элемент объема находится в условиях двухосного напряженного состояния. Напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} связаны с относительными удлинениями ε_x, ε_y и угловой деформацией γ_{xy}, уравнениями обобщенного закона Гука:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \alpha_x \varepsilon_x + \alpha_{xy}\varepsilon_y; \\ \sigma_y &= \alpha_{yx}\varepsilon_x + \alpha_y \varepsilon_y; \\ \tau_{xy} &= G_{xy}\gamma_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.71)$$

где α_x, α_y, α_{xy} и α_{yx} — параметры упругости материала; G_{xy} — модуль сдвига.

Решив уравнения (6.71) относительно деформаций ε_x, ε_y, получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \sigma_x \frac{\alpha_y}{\alpha_x\alpha_y - \alpha_{yx}\alpha_{xy}} - \sigma_y \frac{\alpha_{xy}}{\alpha_x\alpha_y - \alpha_{yx}\alpha_{xy}};\\ \varepsilon_y &= \sigma_y \frac{\alpha_x}{\alpha_x\alpha_y - \alpha_{yx}\alpha_{xy}} - \sigma_x \frac{\alpha_{yx}}{\alpha_x\alpha_y - \alpha_{yx}\alpha_{xy}}.\end{aligned} \tag{6.72}$$

Уравнения (6.72) можно записать также в другой форме:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_y \frac{\sigma_y}{E_y};\\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_x \frac{\sigma_x}{E_x},\end{aligned}\right\} \tag{6.73}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&E_x = \frac{\alpha_x\alpha_y - \alpha_{yx}\alpha_{xy}}{\alpha_y}; \qquad E_y = \frac{\alpha_x\alpha_y - \alpha_{yx}\alpha_{xy}}{\alpha_x};\\ &\frac{\mu_y}{E_y} = \frac{\alpha_{xy}}{\alpha_x\alpha_y - \alpha_{xy}\alpha_{yx}};\\ &\frac{\mu_x}{E_x} = \frac{\alpha_{yx}}{\alpha_x\alpha_y - \alpha_{xy}\alpha_{yx}}.\end{aligned}\right\} \tag{6.74}$$

Покажем, что между постоянными упругости существует зависимость

$$\frac{\mu_x}{E_x} = \frac{\mu_y}{E_y}. \tag{6.75}$$

Для доказательства этого используем принцип взаимности работ. Примем, что в первом состоянии действует только напряжение σ_x, а во втором — только σ_y, тогда на основании принципа взаимности работ

$$\sigma_x\left(\frac{\mu\sigma_y}{E_y}\right) = \sigma_y\left(\mu\frac{\sigma_x}{E_x}\right)$$

(работа сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна работе сил второго состояния на перемещениях первого состояния). Последнее равенство приводит к зависимости (6.75), из которой, в свою очередь, следует

$$\alpha_{xy} = \alpha_{yx}. \tag{6.76}$$

Получим еще выражения параметров упругости через упругие постоянные E_x, E_y, μ_x, μ_y, для этого решим уравнения (6.73) относительно напряжений:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_x}{1-\mu_x\mu_y}\varepsilon_x + \frac{E_y\mu_x}{1-\mu_x\mu_y}\varepsilon_y;\\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1-\mu_x\mu_y}\varepsilon_y + \frac{E_x\mu_y}{1-\mu_x\mu_y}\varepsilon_x.\end{aligned}\right\} \tag{6.77}$$

Сопоставив эти уравнения с уравнениями (6.71), найдем:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_x=\frac{E_x}{1-\mu_x\mu_y};\ \alpha_y=\frac{E_y}{1-\mu_x\mu_y};\\ \alpha_{xy}=\frac{E_y\mu_x}{1-\mu_x\mu_y}=\frac{E_x\mu_y}{1-\mu_x\mu_y}.\end{aligned}\right\}\qquad(6.78)$$

Вывод дифференциального уравнения изгиба анизотропной пластины основан на общих гипотезах теории изгиба пластин (гл. 5, § 1).

Рассмотрим вначале пластины, симметричные относительно своей срединной плоскости.

Выражения деформаций (6.4) — (6.6) в данном случае остаются справедливыми. Подставив эти выражения в уравнения (6.71), получим

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x=-\left(\alpha_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)z;\\ \sigma_y=-\left(\alpha_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\alpha_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)z;\\ \tau_{xy}=-2G\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}z.\end{aligned}\right\}\qquad(6.79)$$

Интегрируя напряжения по толщине пластины, перейдем к внутренним силовым факторам:

$$M_x=-\left[D_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];\qquad(6.80)$$

$$M_y=-\left[D_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right];\qquad(6.81)$$

$$M_{xy}=-2D_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\qquad(6.82)$$

где

$$D_x=\frac{\alpha_x h^3}{12};\ D_y=\frac{\alpha_y h^3}{12};$$

$$D_1=\frac{\alpha_{xy}h^3}{12};\ D_{xy}=\frac{Gh^3}{12}.\qquad(6.83)$$

Уравнения равновесия элемента изотропной пластины (6.13) — (6.15) справедливы также и для ортотропной пластины. Внеся в них выражения моментов (6.80) — (6.82) и выполнив несложные преобразования, придем к дифференциальному уравнению упругой поверхности

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2H\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=p,\qquad(6.84)$$

где

$$H=D_1+2D_{xy}.\qquad(6.85)$$

Запишем еще формулы для поперечных сил Q_x и Q_y. На основании уравнений равновесия (6.14), (6.15) с учетом зависимостей (6.80) — (6.82) найдем

$$Q_x=\frac{\partial}{\partial x}\left[D_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+H\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];\qquad(6.86)$$

$$Q_y=\frac{\partial}{\partial y}\left[D_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+H\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right].\qquad(6.87)$$

Интегрирование дифференциального уравнения (6.84) при заданных значениях жесткостей D_x, D_y и H и при заданных граничных условиях может быть выполнено или точными методами, например в двойных рядах, или приближенными методами (см. § 5).

Пусть, например, свободно опертая прямоугольная ортотропная пластина нагружена равномерным давлением. Укажем порядок решения задачи в двойных рядах.

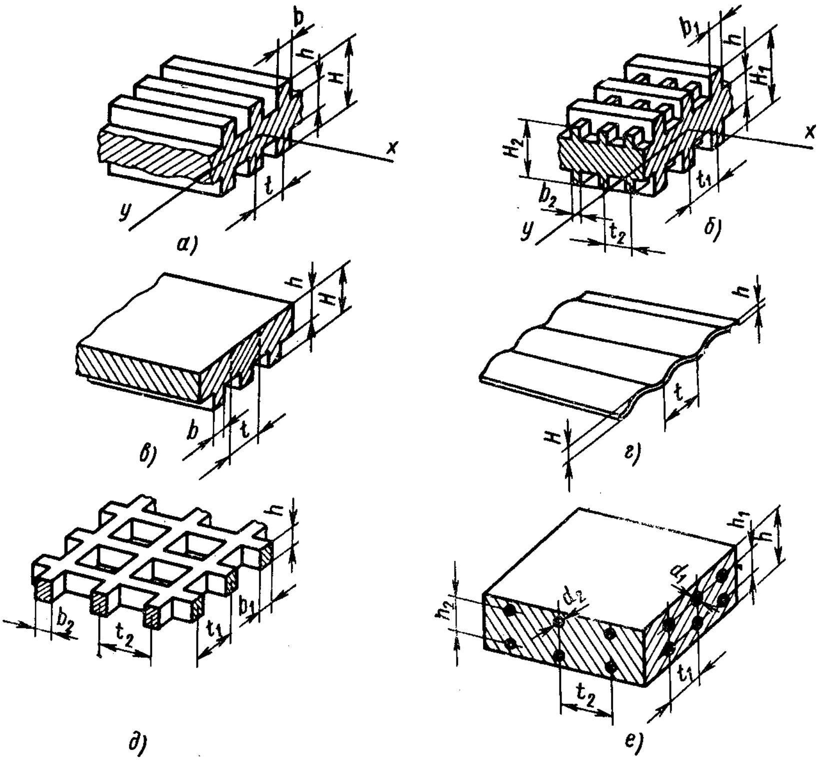


Рис. 6.16

Разложим нагрузку в двойной тригонометрический ряд

$$p(x,\ y)=\frac{16p}{\pi^2}\sum_{m=1,\ 3,\ 5\ \ldots}^{\infty}\ \sum_{n=1,\ 3,\ 5}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

и подставим этот ряд в уравнение (6.84):

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2H\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=$$

$$=\frac{16p}{\pi^2}\sum_{m=1,\ 3,\ 5\ \ldots}^{\infty}\ \sum_{n=1,\ 3,\ 5}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Решение полученного уравнения ищем также в виде ряда

$$w=\sum_{m=1,\,3,\,5\,\ldots}^{\infty}\ \sum_{n=1,\,3,\,5}^{\infty} a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях уравнения, найдем коэффициент произвольного члена ряда

$$a_{mn}=\frac{16p\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{\pi^6 mn\left[D_x\frac{m^4}{a^4}+2H\frac{m^2n^2}{a^2b^2}+D_y\frac{n^4}{b^4}\right]};$$

Определив функцию w, можно по формулам (6.79) вычислить напряжения.

Дифференциальное уравнение (6.84) полностью применимо также и для конструктивно ортотропных пластин (рис. 6.16). При этом необходимо, чтобы конструктивные элементы, вызывающие ортотропность, были расположены достаточно часто, с тем чтобы скачкообразное изменение упругих свойств пластины можно было бы не учитывать.

Приведем значения коэффициентов жесткости для некоторых видов ортотропных пластин по данным работы [25].

Для пластины, усиленной ребрами в направлении оси x, как показано на рис. 6.16, *а*, коэффициенты жесткости имеют следующие значения:

$$D_x=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}+\frac{Eb(H^3-h^3)}{12t};\quad H\cong\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)};$$

$$D_y=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Для пластины, усиленной ребрами в двух направлениях (рис. 6.16, *б*):

$$D_x=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}+\frac{Eb_1(H_1^3-h^3)}{12t_1};\quad D_y=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}+\frac{Eb_2(H_2^3-h^3)}{12t_2};$$

$$H\cong\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

При одностороннем расположении ребер в направлении оси x (рис. 6.16, *в*)

$$D_x=\frac{JE}{t};\quad D_y=\frac{Eh^3}{12\left(1-\frac{b}{t}+\frac{bh^3}{tH^3}\right)};\quad D_1\cong 0;\quad D_{xy}\cong\frac{Ch^3}{12}+\frac{C}{2t},$$

где J — момент инерции Т-образного сечения, соответствующего одному шагу расположения ребер, относительно его центральной оси (на рис. 6.16, *в* это сечение отмечено штриховкой);

C — крутильная жесткость одного ребра.

Для гофрированной пластины с синусоидальной гофрировкой $z=\frac{H}{2}\sin\frac{\pi y}{t}$ (рис. 6.16, *г*).

$$D_x=\frac{EJ}{t};\quad D_y=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{t}{s};\quad D_1\cong 0;\quad H=2D_{xy}=\frac{SEh^3}{t\,12(1+\mu)},$$

где $J=\frac{H^2ht}{8}\left[1-\frac{0{,}81}{1+\frac{5}{32}\frac{H^2}{t^2}}\right]$ — момент инерции одной волны гофрировки; $S=t\left(1+\frac{\pi^2H^2}{16t^2}\right)$ — развернутая длина одной волны.

Для решетки (рис. 6.16, *д*)

$$D_x=\frac{b_1h^3}{12t_1};\quad D_y=\frac{b_2h^3}{12t_2};\quad D_1\cong 0;$$

$$H=2D_{xy}=\frac{1}{2}\left[\frac{C_1}{t_1}+\frac{C_2}{t_2}\right],$$

где C_1 и C_2 — крутильная жесткость брусьев, параллельных осям x и y соответственно.

Коэффициенты жесткости железобетонных плит рекомендуется вычислять по формулам:

$$D_x=\frac{E_{\text{бет}}}{(1-\mu_{\text{бет}}^2)}\left[\frac{h^3}{12}-J_{x\,\text{ст}}+\frac{E_{\text{ст}}}{E_{\text{бет}}}J_{x\,\text{ст}}\right];$$

$$D_y=\frac{E_{\text{бет}}}{(1-\mu_{\text{бет}}^2)}\left[\frac{h^3}{12}-J_{y\,\text{ст}}+\frac{E_{\text{ст}}}{E_{\text{бет}}}J_{y\,\text{ст}}\right];$$

$$D_1=\mu_{\text{бет}}\sqrt{D_xD_y};$$

$$D_{xy}=\frac{1-\mu_{\text{бет}}}{2}\sqrt{D_xD_y};\quad H=\sqrt{D_xD_y},$$

где $E_{\text{бет}}$, $\mu_{\text{бет}}$ — упругие постоянные бетона;

h — толщина плиты;

$J_{x\,\text{ст}}$ и $J_{y\,\text{ст}}$ — моменты инерции сечения стальной арматуры в плоскостях, перпендикулярных осям x и y, отнесенные к единице длины (предполагается, что плита армирована в двух направлениях).

Для плиты, изображенной на рис. 6.16, *е*:

$$J_{x\,\text{ст}}=\frac{2}{t_1}\left[\frac{\pi d^4}{64}+\frac{\pi d^2}{4}\frac{h_1^2}{4}\right];$$

$$J_{y\,\text{ст}}=\frac{2}{t_2}\left[\frac{\pi d^4}{64}+\frac{\pi d^2}{4}\frac{h_2^2}{4}\right].$$

Для пластин, изготовленных из фанеры, коэффициенты жесткости вычисляют на основании данных табл. 6.2.

Отметим, что для определения напряжений в однородных ортотропных пластинах постоянной толщины можно пользоваться обычными формулами (6.23) и (6.24). Для пластин, конструктивно ортотропных или армированных, указанные формулы не пригодны.

Таблица 6.2

Название материала	$a_x \cdot 10^{-4}$, Н/см²	$a_y \cdot 10^{-4}$, Н/см²	$a_{xy} \cdot 10^{-4}$, Н/см²	$G_{xy} \cdot 10^{-4}$, Н/см²
Фанера кленовая пятислойная[1]	131	42	5,1	11,1
Фанера березовая трех- и пятислойная[1] . . .	140	11,7	5,4	12,0

[1] Ось x параллельна волокнам в наружных слоях.

Напряжения в пластинах, представленных на рис. 6.16, *а*, *б*, можно вычислить по следующим формулам:

напряжения в самой пластине

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez\partial^2 w}{(1+\mu)\,\partial x\,\partial y};$$

напряжения в ребрах, параллельных оси

$$\sigma_x = -Ez\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

напряжения в ребрах, параллельных оси y:

$$\sigma_y = -Ez\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

где z — расстояние от срединной плоскости (положительное z — вниз).

Для пластин с односторонним расположением ребер (рис. 6.16, *в*) напряжения в точках, расположенных на верхней плоскости:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z_1 + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{h}{2}\right);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{h}{2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z_1\right).$$

Напряжения в точках, расположенных на нижних кромках ребер:

$$\sigma_x = E\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z_2; \quad \sigma_y = 0,$$

где z_1 и z_2 — расстояния от центра тяжести таврового сечения до верхних и нижних точек.

Напряжения в гофрированном материале (рис. 6.16, *г*):

$$\sigma_{x\max} = \mp \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{HE}{2}; \quad \sigma_{y\max} = \mp \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{hE}{2}.$$

Наконец, напряжение в железобетонных плитах (рис. 6.16, *е*)

$$\sigma_{x\ \text{бет}} = \frac{E_{\text{бет}}h}{2(1-\mu_{\text{бет}}^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{\text{бет}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

$$\sigma_{y\ \text{бет}} = \frac{E_{\text{бет}}h}{2(1-\mu_{\text{бет}}^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{\text{бет}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right];$$

$$\sigma_{x\ \text{арм}} = E_{\text{ст}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{h_1}{2}; \quad \sigma_{y\text{арм}} = E_{\text{ст}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{h_2}{2}.$$

Приведенные формулы приближенные, так как они основаны на упрощенных расчетных схемах. Применение уточненных теорией расчета ортотропных пластин в большинстве случаев нецелесообразно вследствие приближенности исходных допущений и гипотез.

§ 5. Приближенные методы расчета пластин

Приближенные методы решения задач находят в инженерной практике широкое применение. В настоящем параграфе эти методы изложены применительно к расчету пластин, однако они имеют более общее значение и применяются также для расчета оболочек и других тел сложной формы. Часто с помощью приближенных методов удается получить решение таких задач, решить которые другими методами невозможно.

Существует несколько различных методов [14, 25, 27]. Многие из них основаны на принципе минимума энергии или на принципе возможных перемещений (вариационные принципы).

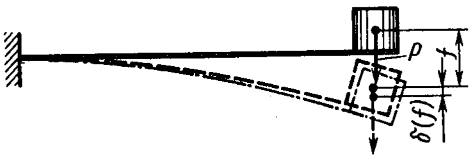


Рис. 6.17

Оба эти принципа устанавливают необходимые условия, при которых механическая система находится в равновесии.

Согласно первому принципу энергия системы, находящейся в состоянии устойчивого равновесия, минимальна.

Поясним этот принцип на примере простейшей упругой системы, изображенной на рис. 6.17. На конце консольного стержня укреплен груз P. В состоянии равновесия груз занимает положение, показанное на чертеже штриховой линией. Примем, что в недеформированном состоянии энергия системы равна нулю. При переходе системы из недеформированного в деформированное состояние центр тяжести груза опускается на величину f; следовательно, потенциальная энергия положения груза уменьшается на величину Pf и становится равной $Z = -Pf$. Эта часть энергии системы называется потенциалом нагрузки.

В то же время при изгибе стержня в нем накапливается потенциальная энергия деформации. Последняя пропорциональна квадрату прогиба

$$U = kf^2,$$

так как сила упругости линейно зависит от прогиба.

Полная энергия системы складывается из потенциала нагрузки и потенциальной энергии деформации, т. е.

$$\Pi = Z + U = -Pf + kf^2.$$

Графики зависимости потенциала нагрузки Z, потенциальной энергии деформации U и полной энергии системы Π от величины прогиба f приведены на рис. 6.18. При некотором значении прогиба $f = f^*$ полная энергия достигает минимума.

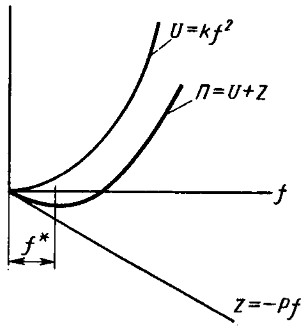


Рис. 6.18

Это значение прогиба и есть действительное значение, соответствующее положению статического равновесия. При отклонении системы из этого положения в любое другое ей необходимо сообщить некоторую дополнительную энергию, а это, как известно, и есть признак устойчивого равновесия.

Условие минимума функции математически может быть представлено как условие равенства нулю производной этой функции. Следовательно, принцип минимума энергии можно сформулировать иначе: механическая система находится в состоянии равновесия, если производная от полной энергии системы по варьируемому параметру равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f} = 0. \tag{6.88}$$

Если же таких параметров несколько, то

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial f_2} = 0; \ldots \tag{6.88a}$$

Второй из упомянутых принципов, т. е. принцип возможных перемещений, гласит: если система находится в состоянии равновесия, то сумма работ всех сил на возможных перемещениях равна нулю. Под возможным перемещением (виртуальным перемещением) понимается сколь угодно малое отклонение системы от заданного положения, допускаемое наложенными на систему связями. Для системы, изображенной на рис. 6.17, например, возможным перемещением будет сколь угодно малое увеличение $\delta(f)$ прогиба (на рисунке показано штрихпунктирной линией).

Работа всех сил, включая силы упругости на возможном перемещении, равна изменению полной энергии системы. Но в состоянии равновесия выполняется условие (6.88) и $\frac{\partial П}{\partial f}\delta f=0$. Следовательно, сумма работ всех сил на возможном перемещении равна нулю.

Буква δ здесь в дальнейшем используется как знак вариации.

Чтобы применить принцип минимума энергии к расчету пластин, необходимо иметь выражение потенциальной энергии деформации пластины.

Последнее можно получить, вычислив работу изгибающих и скручивающих моментов на соответствующих угловых перемещениях. Для бесконечно малого элемента (см. рис. 6.5) работа моментов

$$dU=\frac{1}{2}(M_x dy)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}dx+\frac{1}{2}(M_y dx)\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+$$
$$+\frac{1}{2}(M_{xy}dy)\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{1}{2}(M_{yx}dx)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}dy.$$

Работой поперечных сил Q_x и Q_y ввиду ее малости можно пренебречь. Множитель 1/2 в каждом слагаемом, как обычно, учитывает пропорциональность между нагрузкой и деформацией.

Подставив в последнее равенство значения моментов (6.10) — (6.12), а также значения углов поворота нормали

$$\vartheta=-\frac{\partial w}{\partial x};\quad \psi=-\frac{\partial w}{\partial y},$$

получим величину потенциальной энергии деформации в бесконечно малом элементе объема

$$dU=\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Интегрируя это выражение по площади пластины, найдем полную потенциальную энергию деформации

$$U=\int\limits_x\int\limits_y\frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy.\qquad(6.89)$$

Аналогично можно получить выражение потенциальной энергии деформации в полярной системе координат

$$U=\int\limits_r\int\limits_\varphi\frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial w}{r\,\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{\partial w}{r\,\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\,\partial\varphi^2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{\partial^2 w}{r\,\partial r\,\partial\varphi}-\frac{\partial w}{r^2\,\partial\varphi}\right)^2\right]\right\}dr\,r\,d\varphi.\qquad(6.90)$$

В случае осесимметричной деформации круглой пластины производные по φ следует приравнять нулю, тогда

$$U=\int\limits_r\frac{D}{2}\left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2}+\frac{dw}{r\,dr}\right)^2-2(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial w}{r\,dr}\right]2\pi r\,dr.\qquad(6.90\text{ а})$$

Выражения (6.89) — (6.90) справедливы также для пластин переменной толщины; в этом случае при вычислении интеграла следует учитывать переменность изгибной жесткости D по плоскости пластины.

Следует иметь в виду, что при жесткой заделке краев пластины интеграл

$$\int\limits_x \int\limits_y \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

входящий в выражение (6.89), обращается в нуль. Этот интеграл также равен нулю и для шарнирно опертой пластины при условии, что ее контур очерчен прямыми линиями. Сказанное нетрудно доказать, преобразовав интеграл по поверхности в интеграл по контуру пластины.

Напишем выражение потенциала внешней нагрузки. При действии на пластину распределенного по поверхности давления p

$$Z = -\int\limits_x \int\limits_y p(x,\ y)\, w\, dx\, dy \tag{6.91}$$

или в полярных координатах

$$Z = -\int\limits_r \int\limits_\varphi p(r,\ \varphi)\, w\, dr\, r\, d\varphi. \tag{6.92}$$

При действии сосредоточенных сил, нормальных к поверхности, и моментов

$$Z = -\sum_1^n P_i w_i - \sum_1^m M_j \varphi_j, \tag{6.93}$$

где

w_i — прогиб в точке приложения i-й силы;

φ_j — угол поворота нормали в точке приложения j-го момента в плоскости действия этого момента;

n и m — числа сил и моментов.

Полная энергия системы равна сумме потенциальной энергии деформации и потенциала нагрузки

$$\Pi = U + Z. \tag{6.94}$$

Поскольку U и Z выражены через w, полная энергия системы Π также зависит от вида функции w. Эта последняя должна быть определена так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям на контуре и чтобы энергия системы была минимальной. Так как энергия системы Π выражается некоторым интегралом по поверхности, то задача сводится к отысканию функции w, которая сообщает интегралу Π минимальное значение. Решение этой задачи методами вариационного исчисления приводит к дифференциальному уравнению относительно функции w, совпадающему с уравнением (6.18), а также к уравнениям граничных условий, совпадающим с уравнениями (6.19) — (6.22).

Однако точное решение задачи получить не всегда возможно, поэтому на практике широко применяют приближенные методы, основанные либо на приближенном представлении самой искомой функции, либо на приближенном численном решении основного дифференциального уравнения.

1. *Метод Ритца.* При решении задач методом Ритца искомой функцией задаются, выбирая ее так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям и соответствовала действительной картине деформации пластины. Содержащиеся в выбранной функции неопределенные параметры определяют по условию минимума энергии. В общем виде искомая функция может быть взята в виде ряда

$$w = a_1 f_1(x,\ y) + a_2 f_2(x,\ y) + \ldots, \tag{6.95}$$

где f_1, $f_2 \ldots$ — функции, удовлетворяющие граничным условиям; a_1, $a_2 \ldots$ — неопределенные параметры.

Подставив ряд (6.95) в выражения потенциальной энергии U и потенциала нагрузки Z и сложив U и Z, получим полную энергию системы Π как функцию a_1, $a_2 \ldots$

Для того чтобы энергия была минимальной, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0, \ \ldots \tag{6.96}$$

Решение системы уравнений (6.96) дает значения параметров a_1, $a_2 \ldots$

Если система функций f_1, $f_2 \ldots$ будет полной, то при бесконечном числе членов ряда можно получить точное решение задачи. Если же взять только один или несколько членов ряда, то получится приближенное решение. Это решение будет тем точнее, чем ближе будет выбранная функция к действительной.

Пример 6.3. Прямоугольная пластина постоянной толщины, жестко заделанная по контуру, нагружена равномерным давлением p. Найти максимальный прогиб и напряжения.

Совместим начало координат с центром пластины и обозначим длину сторон через a и b; тогда уравнения граничных условий будут следующими:

$$\text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad w = 0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$\text{при } y = \pm \frac{b}{2} \quad w = 0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Чтобы получить решение задачи в первом приближении, зададимся функцией w, состоящей из одного члена с одним неопределенным параметром:

$$w = \frac{1}{4} w_0 \left(1 + \cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi y}{b}\right).$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет граничным условиям и что форма поверхности, определяемой этой функцией, подобна действительной упругой поверхности пластины.

Величина w_0, равная прогибу пластины в центре, здесь играет роль неопределенного параметра.

Подставив выбранную функцию в уравнение (6.89) и выполнив интегрирование, найдем энергию деформации

$$U=\frac{D}{2}\frac{w_0^2}{4}\pi^4\left(\frac{3b}{a^3}+\frac{3a}{b^3}+\frac{2}{ab}\right).$$

Потенциал внешней нагрузки вычислим по уравнению (6.91):

$$Z=-\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} pw\,dx\,dy=-\frac{pw_0ab}{4}.$$

Полная энергия систем, согласно уравнению (6.94):

$$\Pi=\frac{Dw_0^2}{8}\pi^4\left(\frac{3b}{a^3}+\frac{3a}{b^3}+\frac{2}{ab}\right)-\frac{pw_0ab}{4}.$$

Продифференцировав Π по параметру w_0 и приравняв производную нулю, получим уравнение

$$\frac{Dw_0}{4}\pi^4\left(\frac{3b}{a^3}+\frac{3a}{b^3}+\frac{2}{ab}\right)-\frac{pab}{4}=0,$$

из которого определим прогиб в центре

$$w_0=\frac{pa^4}{\pi^4D}\frac{1}{\left(3+3\frac{a^4}{b^4}+2\frac{a^2}{b^2}\right)}.$$

Для квадратной пластины, например,

$$w_0=\frac{pa^4}{8\pi^4D}=0{,}00128\frac{pa^4}{D}.$$

Точное решение дает

$$w_0=0{,}00126\frac{pa^4}{D}.$$

Погрешность приближенного решения при определении прогиба в данном случае не превышает 2%.

Для вычисления изгибающих моментов в пластине воспользуемся формулами (6.10) и (6.11).

При подстановке в эти формулы функции w при найденном значении параметра w_0 для квадратной пластины получим следующие значения изгибающих моментов:

в центре пластины при $x=0$, $y=0$

$$M_x=M_y=0{,}0328\ pa^2;$$

около края при $x=\frac{a}{2}$ и $y=0$

$$M_x=-0{,}0253\ pa^2.$$

Точные значения изгибающих моментов:

в центре пластины

$$M_x=M_y=0{,}0231\ pa^2;$$

около края при $x=\frac{a}{2}$, $y=0$

$$M_x=-0{,}0513\ pa^2.$$

Здесь точность приближенного решения уже значительно меньше.

Для того чтобы повысить точность, можно взять функцию w в виде суммы нескольких слагаемых. Так, например, чтобы получить решение во втором приближении, следует задаться функцией W в виде

$$w = a_1\left(1+\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi y}{b}\right)+a_2\left(1-\cos\frac{4\pi x}{a}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi y}{b}\right)+$$
$$+a_3\left(1+\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi y}{b}\right)+a_4\left(1-\cos\frac{4\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi y}{b}\right).$$

Подставив w в выражения для U, Z, Π и приравняв нулю производные от Π по параметрам a_1, a_2, a_3, a_4, получим систему четырех уравнений, решив которую, определим неизвестные параметры.

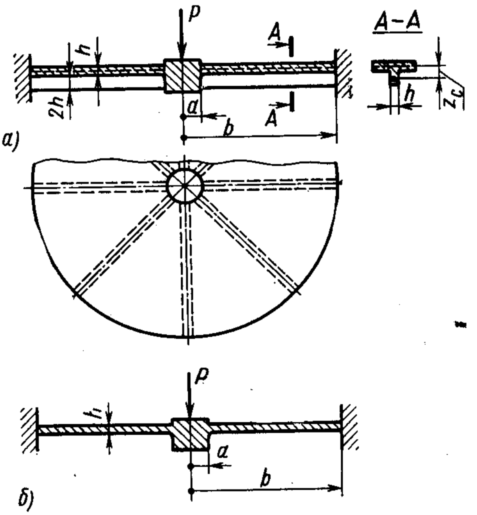


Рис. 6.19

Пример 6.4. Определить напряжение и прогиб для круглой пластины с радиальными ребрами, изображенной на рис. 6.10.

Поскольку в данном случае ребра расположены с одной стороны и площадь их поперечного сечения значительна по сравнению с толщиной пластины, то предположение о нерастяжимости срединной поверхности пластины неприменимо.

Деформацию такой пластины можно представить как ее изгиб относительно нейтральной поверхности, расположенной на некотором расстоянии от срединной плоскости пластины. Точное решение рассматриваемой задачи с учетом неравномерности деформаций в окружном направлении весьма сложно. Более простое приближенное решение, основанное на применение метода Ритца, предложено А. Н. Духовным. Это решение основано на следующих допущениях:

1) деформацию пластины считают осесимметричной, т. е. неравномерность деформации по окружности не учитывают (это допущение не вносит существенной погрешности, если число ребер достаточно велико, $n > 6$);

2) форму упругой поверхности принимают подобной форме поверхности аналогичной пластины без ребер;

3) смещение нейтрального слоя относительно срединной поверхности пластины считают постоянным по радиусу.

Величину этого смещения e, а также параметр A, характеризующий прогиб пластины, определяют по методу Ритца из условия минимума энергии.

Приняв гипотезу неискривляемости нормалей и считая напряженное состояние в пластине двухосным, а в ребрах — одноосным, можно написать следующие выражения деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_r = \frac{d\vartheta}{dr}(z-e) = -\frac{d^2w}{dr^2}(z-e); \qquad \varepsilon_t = \frac{\vartheta}{r}(z-e) = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}(z-e).$$

Напряжения в пластине

$$\sigma_r = -\frac{E(z-e)}{(1-\mu^2)}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\mu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right); \quad \sigma_t = -\frac{E(z-e)}{(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\mu\frac{d^2w}{dr^2}\right).$$

Напряжение в ребрах

$$\sigma = E\varepsilon_r = -E\frac{d^2w}{dr^2}(z-e).$$

Потенциальную энергию деформации вычислим как интеграл от удельной энергии по объему пластины и ребер

$$U_{\text{пл}} = \int\limits_r\int\limits_z \frac{1}{2}(\sigma_r\varepsilon_r + \sigma_t\sigma_t)\,2\pi r dr dz;$$

$$U_{\text{р}} = n\int\limits_r\int\limits_F \frac{1}{2}\sigma\varepsilon_r dF dr,$$

где n — число ребер;

F — площадь сечения ребра.

Подставив под знаки интегралов выражения напряжений и деформаций и выполнив интегрирование по толщине пластины и по сечению ребра, получим

$$U_{\text{пл}} = \frac{D}{2}\left(1+\frac{12e^2}{h^2}\right)\int\limits_r\left[\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)^2 - 2(1-\mu)\frac{d^2w}{dr^2}\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right]2\pi r dr;$$

$$U_{\text{р}} = n\frac{EJ}{2}\int\limits_r\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)^2 dr,$$

где J — момент инерции сечения ребра относительно нейтральной линии;

$$J = J_0 + F(Z_C - e)^2;$$

J_0 — момент инерции сечения ребра относительно его собственной центральной оси;

z_C — расстояние от центра тяжести сечения ребра до срединной плоскости пластины (высота ребер принята постоянной по радиусу).

На основании второго допущения можно написать

$$w = A\tilde{w},$$

где $\tilde{w}$ — прогиб аналогичной пластины без ребер;

$\tilde{A}$ — неопределенный параметр.

Тогда выражения энергии деформации пластины и ребер принимают вид

$$U_{\text{пл}} = \left(1+\frac{12e^2}{h^2}\right)A^2\frac{D}{2}\int\limits_r\left[\left(\frac{d^2\tilde{w}}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\tilde{w}}{dr}\right)^2 - 2(1-\mu)\frac{d^2\tilde{w}}{dr^2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{d\tilde{w}}{dr}\right]2\pi r dr,$$

$$U_{\text{р}} = n\frac{EJ}{2}A^2\int\limits_r\left(\frac{d^2\tilde{w}}{dr^2}\right)^2 dr,$$

или

$$U_{\text{пл}} = \left(1+\frac{12e^2}{h^2}\right)A^2\tilde{U}_{\text{пл}};$$

$$U_{\text{р}} = \frac{nE}{2}\left[J_0 + F(z_C - e)^2\right]A^2 t,$$

где $\tilde{U}$ — энергия деформации пластины без ребер; t — интеграл по длине ребер

$$t = \int\limits_r\left(\frac{d^2\tilde{w}}{dr^2}\right)^2 dr.$$

Потенциал нагрузки для заданной пластины

$$Z = A\tilde{Z},$$

где $\tilde{Z}$ — потенциал нагрузки для пластины без ребер.

Полная энергия системы

$$\Pi = \left(1 + \frac{12e^2}{h^2}\right) A^2\tilde{U}_{\text{пл}} + \frac{nE}{2}\,[J_0 + F\,(z_C - e)^2]\,A^2 t + A\tilde{Z}.$$

В этом выражении содержатся два неизвестных параметра A и e.

Чтобы энергия была минимальной, производные от Π по этим параметрам должны быть равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial e} = 0$$

или

$$\left(1 + \frac{12e^2}{h^2}\right) 2A\tilde{U} + nE\,[J_0 + F\,(z_C - e)^2]\,At + \tilde{Z} = 0;$$

$$\frac{24e}{h^2}\,A^2\tilde{U} - nEF\,(z_C - e)\,A^2 t = 0.$$

Приняв во внимание, что $\tilde{Z} = -2\tilde{U}$ и решив систему двух уравнений, найдем

$$e = \frac{z_C}{1 + \dfrac{24\,\tilde{U}}{nEFh^2 t}};$$

$$A = \frac{1}{1 + \dfrac{12e^2}{h^2} + \dfrac{nE\,[J_0 + F\,(z_C - e)^2]\,t}{2\tilde{U}}}.$$

Получим решение для пластины, изображенной на рис. 6.19, *а*. Рассмотрим вначале пластину без ребер (рис. 6.19, *б*). Считая центр пластины абсолютно жестким, запишем граничные условия:

при $r = a$

$$\tilde{\vartheta} = -\frac{d\tilde{w}}{dr} = 0.$$

при $r = b = 10a$

$$\tilde{\vartheta} = -\frac{d\tilde{w}}{dr} = 0.$$

Поперечная сила при $r = a$ $Q_1 = \dfrac{P}{2\pi a}$. Функции $\tilde{\vartheta}$ и $\tilde{\vartheta}'$ для заданного случая нагружения имеют следующий вид:

$$\tilde{\vartheta} = -\frac{d\tilde{w}}{dr} = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{P}{4\pi D}\left[r \ln\frac{r}{a} - \frac{r^2 - a^2}{2r}\right];$$

$$\frac{d\tilde{\vartheta}}{dr} = -\frac{d^2\tilde{w}}{dr^2} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{P}{4\pi D}\left[\ln\frac{r}{a} + \frac{r^2 - a^2}{2r^2}\right].$$

Эти зависимости можно получить, используя формулу (5.41) при $P_k = -P$, $r_k = a$.

По граничным условиям найдем постоянные

$$C_1 = 0{,}145\,\frac{P}{D}; \quad C_2 = -\,0{,}145\,\frac{Pa^2}{D}.$$

Подставим значения постоянных C_1 и C_2 в выражения функции ϑ и ее производной:

$$\tilde{\vartheta}=-\frac{d\tilde{w}}{dr}=\left[0{,}185\left(r-\frac{a^2}{r}\right)-\frac{1}{4\pi}\,r\ln\frac{r}{a}\right]\frac{P}{D};$$

$$\frac{d\tilde{\vartheta}}{dr}=-\frac{d^2\tilde{w}}{dr^2}=\left[0{,}105+0{,}185\,\frac{a^2}{r^2}-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{r}{a}\right]\frac{P}{D}.$$

Вычислим прогиб пластины без ребер

$$\tilde{w}_{\max}=\int\limits_{a}^{b=10a}\tilde{\vartheta}dr=1{,}545\,\frac{Pa^2}{D},$$

а также потенциальную энергию деформации

$$\tilde{U}=\frac{1}{2}\,P\tilde{w}_{\max}=0{,}772\,\frac{P^2a^2}{D}$$

и интеграл

$$t=\int\limits_{a}^{b=10a}\left(\frac{d^2\tilde{w}}{dr^2}\right)^2 dr=0{,}050\,\frac{P^2a}{D^2}.$$

При заданных размерах пластины (рис. 6.19) $a=3h$; $F=2h^2$; $z_c=\frac{3}{2}h$; $n=8$:

$$J_0=\frac{h\,(2h)^3}{12}=\frac{3}{2}\,h^4;$$

смещение нейтрального слоя

$$\mathrm{e}=\frac{z_C}{1+\dfrac{24\tilde{U}}{nEFh^2t}}=0{,}204\,h$$

и параметр

$$A=\frac{1}{1+\dfrac{12\mathrm{e}^2}{h^2}+\dfrac{nE\left[J_0+F\,(z_C-\mathrm{e})^2\right]t}{2\tilde{U}}}=0{,}205.$$

Тогда максимальный прогиб пластины с ребрами

$$w_{\max}=A\tilde{w}_{\max}=0{,}317\,\frac{Pa^2}{D}.$$

Вычислим напряжения в пластине и в ребре. При $r=a$

$$\vartheta=-\frac{dw}{dr}=0;\quad \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)=-A\left(\frac{d^2\tilde{w}}{dr^2}\right)=0{,}0595\,\frac{P}{D}.$$

Напряжение в пластине при $r=a$ и $z=-\frac{h}{2}$

$$\sigma_r=-\frac{E\left(\dfrac{h}{2}+\mathrm{e}\right)}{1-\mu^2}\left[\frac{d\vartheta}{dr}+\mu\,\frac{\vartheta}{r}\right]=-0{,}50\,\frac{P}{h^2};$$

$$\sigma_t=\mu\sigma_r.$$

Напряжения в ребре при $r = a$ и $z = 2{,}5h$

$$\sigma = E\frac{d\vartheta}{dr}(z-e) = 0{,}0595\,\frac{P}{D}\,E\,(2{,}5h - 0{,}204h) = 1{,}49\,\frac{P}{h^2}.$$

На наружном контуре при $r = b = 10a$

$$\vartheta = -\frac{dw}{dr} = 0;\quad \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right) = -\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right) = -0{,}0156\,\frac{P}{D}.$$

Следовательно, в точках, расположенных у наружного края, напряжения меньше, чем у внутреннего края.

2. *Метод Галеркина.* Этот метод, так же как и метод Ритца, широко применяется для приближенного решения задач строительной механики машин и, в частности, для расчета пластин. Решение с помощью этого метода часто получается более простым, так как он не требует вычисления потенциальной энергии системы, иногда, однако, метод Галеркина дает бóльшую погрешность, чем метод Ритца, а в некоторых случаях он вообще не применим (например, в задачах о деформациях пластин с ребрами).

Поясним сущность метода Галеркина на примере изгиба пластины. Подставим дифференциальное уравнение упругой поверхности пластины (6.18) в следующем виде:

$$\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] - \frac{p}{D} = 0. \qquad (6.97)$$

Функция $w(x, y)$ должна удовлетворять этому уравнению, а также граничным условиям на краях пластины.

Зададимся функцией w в виде ряда (6.95). При подстановке этого ряда в дифференциальное уравнение (6.97) левая часть уравнения не обращается в нуль, а превращается в некоторую функцию от x, y, a_1, a_2, ...:

$$L(x,\ y,\ a_1,\ a_2) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{p}{D} \neq 0.$$

Эту функцию — ошибку можно представить как некоторое дополнительное давление $\hat{p}$, отнесенное к жесткости D:

$$L = \frac{\hat{p}}{D}.$$

Для того чтобы выбранная функция w мало отличалась от действительной, следует подобрать параметры a_1, a_2 ... так, чтобы дополнительное (несбалансированное) давление $\hat{p}$, насколько возможно мало отличалось от нуля. Для этого необходимо, чтобы работа давления $\hat{p}$ на возможных перемещениях была равна нулю. В данном случае возможными являются перемещения, определяемые функциями f_1, f_2 ... Приравняв нулю работу давления $\hat{p}$ на этих перемещениях, получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}\iint\limits_{x\,y} \hat{p}\,dxdyf_1(x,\ y)=0;\\ \iint\limits_{x\,y} \hat{p}\,dxdyf_2(x,\ y)=0;\\ \dots\dots\dots\dots\end{array}\right\} \qquad (6.98)$$

или в другом виде

$$\left.\begin{array}{l}\iint\limits_{x\,y} L(x,\ y,\ a_1,\ a_2\ \dots)\,f_1(x,\ y)\,dxdy=0.\\ \iint\limits_{x\,y} L(x,\ y,\ a_1,\ a_2\ \dots)\,f_2(x,\ y)\,dxdy=0.\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\} \qquad (6.99)$$

Уравнения (6.99) известны под названием уравнений Галеркина. Решение задач по методу Галеркина практически сводится к следующему. Задавшись функцией $w\ (x,\ y)$, удовлетворяющей граничным условиям и содержащей неопределяемые параметры a_1, a_2, следует подставить ее в дифференциальное уравнение (6.97). Затем левую часть уравнения $L\ (x,\ y,\ a_1,\ a_2)$ надо умножить поочередно на $f_1\ (x,\ y)$ и $f_2\ (x,\ y)$, проинтегрировать по всей области и интегралы приравнять нулю. В результате получим систему уравнений, из которой определяются параметры a_1, a_2 ...

При бесконечном числе членов ряда (6.95) метод Галеркина позволяет получить точное решение задачи (при условии, что система функций $f_1\ (x,\ y)$, $f_2\ (x,\ y)$ ... будет полной). Если же взять один или несколько членов ряда, то получится приближенное решение. Это решение будет тем точнее, чем ближе будет выбранная функция к действительной.

Следует заметить, что функция w должна удовлетворять по возможности всем граничным условиям на краях, как геометрическим, так и силовым. При неудовлетворении хотя бы части граничных условий решение по методу Галеркина дает бóльшую погрешность, чем решение по методу Ритца.

Пример 6.5. Определить прогиб прямоугольной пластины, жестко заделанной по контуру и нагруженной равномерным давлением.

Обозначив стороны пластины через a и b и выбрав начало координат в центре, зададимся уравнением упругой поверхности в виде

$$w=\frac{1}{4}\,w_0\left(1+\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi y}{b}\right).$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям на краях:

$$\text{при } x=\pm\frac{a}{2} \quad w=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0;$$

$$\text{при } y=\pm\frac{b}{2} \quad w=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

При введении функции w в уравнение (6.97) левая часть уравнения принимает вид

$$L(x,\ y,\ w_0)=\frac{1}{4}w_0 2^4\pi^4\left[\frac{1}{a^4}\cos\frac{2\pi x}{a}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b^4}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]-\frac{p}{D}.$$

Функцию $L(x,\ y,\ w_0)$ умножим снова на w, проинтегрируем по всей поверхности пластины и интеграл приравняем нулю:

$$\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left\{\frac{w_0 2^4\pi^4}{4}\left[\frac{1}{a^4}\cos\frac{2\pi x}{a}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{b^4}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]-\frac{p}{D}\right\}\frac{w_0}{4}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi y}{b}\right)dxdy=0.$$

Вычислив интегралы, получим алгебраическое уравнение

$$w_0 ab\pi^4\left[\frac{3}{a^4}+\frac{3}{b^4}+\frac{2}{a^2b^2}\right]-\frac{pab}{D}=0,$$

из которого найдем прогиб в центре

$$w_0=\frac{pa^4}{D}\frac{1}{\pi^4\left[3+3\frac{a^4}{b^4}+2\frac{a^2}{b^2}\right]}.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным для той же пластины по методу Ритца (см. пример 6.3).

3. *Метод Канторовича Л. В.* По этому методу искомую функцию представляют в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая только от y:

$$w(x,\ y)=\varphi(x)\psi(y). \tag{6.100}$$

Одной из этих функций, например $\psi(y)$, задаются в соответствии с граничными условиями, а вторую определяют, используя принцип возможных перемещений.

В результате подстановки выбранной функции $\psi(y)$ в дифференциальное уравнение (6.97) левая часть уравнения дает функцию — ошибку $L(x,\ y,\ \varphi(x))$. Последнюю можно представить как некоторое дополнительное давление $\hat{p}$ (отнесенное к жесткости). Для того чтобы функция L по возможности мало отличалась от нуля, необходимо, чтобы работа давления $\hat{p}$ на возможном перемещении была равна нулю. В качестве возможного перемещения примем

$$\delta(w)=\psi(y)\,\delta(\varphi(x)),$$

тогда получим

$$\int\limits_x\int\limits_y L(x,\ y,\ \varphi(x))\,\psi(y)\,\delta(\varphi(x))\,dxdy=0$$

или

$$\int\limits_x\delta(\varphi(x))\left[\int\limits_y L(x,\ y,\ \varphi(x))\,\psi(y)\,dy\right]dx=0.$$

Это уравнение удовлетворяется при условии

$$\int_y L(x,\ y,\ \varphi(x))\,\psi(y)\,dy=0. \tag{6.101}$$

Подставив под знак интеграла выражения функций L и ψ и выполнив интегрирование по y, придем к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $\varphi(x)$. Последнее интегрируется обычным порядком. Получающиеся при интегрировании произвольные постоянные определяются согласно граничным условиям на краях пластины.

Метод Кантаровича имеет преимущество перед методом Галеркина в тех случаях, когда характер деформации пластины или не совсем ясен, или таков, что для получения решения с требуемой точностью первого приближения по методу Галеркина недостаточно [25].

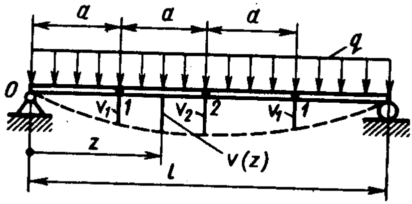


Рис. 6.20

4. *Метод конечных разностей.* При решении задач этим методом область интегрирования разбивают на ряд конечных интервалов и дифференциальное уравнение заменяют уравнением в конечных разностях, т. е. уравнением, в котором производные выражены через разности значений функций в соседних узловых точках.

Применяя уравнение ко всем узловым точкам, получают систему n алгебраических уравнений с n неизвестными; решение этой системы дает значения искомой функции в этих точках.

Поясним метод конечных разностей вначале на примере балки (рис. 6.20). Разобьем длину балки на несколько одинаковых участков с шагом a и обозначим через v_i прогиб в i-й точке на границе участков. Значения прогиба в соседних точках будут соответственно: v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i-1}, v_{i-2} и т. д. Составим выражения первых разностей:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\Delta}^1 = v_{i+1} - v_i;\\
&\bar{\bar{\Delta}}^1 = v_i - v_{i-1},\\
&\Delta^1 = \frac{1}{2}\left(\bar{\Delta}^1 + \bar{\bar{\Delta}}^1\right) = \frac{1}{2}\left(v_{i+1} - v_{i-1}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{6.102}$$

где $\bar{\Delta}^1$ — первая разность по направлению вперед;

$\bar{\bar{\Delta}}^1$ — первая разность по направлению назад;

Δ^1 — осредненная первая разность в рассматриваемой точке.

Разделив первую разность на шаг, получим приближенное значение первой производной. В дальнейшем будем пользоваться только осредненными разностями, которые более точно характеризуют значения производных. Для первой производной получим выражение

$$\frac{dv}{dz} \cong \frac{\Delta^1}{a} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2a}. \tag{6.103}$$

Определим теперь вторую разность, для этого возьмем разность значений первых разностей «вперед» и «назад»:

$$\Delta^2 = \overline{\Delta}^1 - \overline{\overline{\Delta}}^1 = v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}. \qquad (6.104)$$

Отношение второй разности к квадрату шага дает приближенное значение второй производной

$$\frac{d^2v}{dz^2} \cong \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{a^2}. \qquad (6.105)$$

Аналогично составляют разности более высоких порядков. Из теории изгиба бруса известны следующие дифференциальные уравнения, связывающие между собой прогиб, изгибающий момент M и интенсивность распределенной нагрузки q_i:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EJ_x}; \quad \frac{d^2M}{dz^2} = -q. \qquad (6.106)$$

За положительные направления v и q принято направление вниз, за положительное направление M — направление, при котором сжатые волокна расположены сверху.

Заменив вторые производные, согласно равенству (6.105), получим уравнения изгиба балки в конечных разностях:

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = -\frac{M_i}{EJ_x} a^2; \qquad (6.107)$$

$$M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} = -q_i a^2. \qquad (6.108)$$

Пример 6.6. Вычислить изгибающий момент и прогиб балки, изображенной на рис. 6.20.

Возьмем число участков, равное четырем, тогда $a = \frac{l}{4}$. Применим уравнение (6.108) к точкам *1* и *2*.

При $q = \text{const}$ и $M_0 = 0$ получим

$$0 - 2M_1 + M_2 = -\frac{ql^2}{16};$$

$$M_1 - 2M_2 + M_1 = -\frac{ql^2}{16}.$$

По этим уравнениям найдем

$$M_1 = \frac{3}{32} ql^2; \qquad M_2 = \frac{1}{8} ql^2.$$

Полученные значения совпадают с точными значениями изгибающего момента при $z = \frac{l}{4}$ и $z = \frac{l}{2}$.

Применим к тем же точкам уравнение (6.107). Приняв во внимание, что при $z = 0$, $v = 0$, получим

$$0 - 2v_1 + v_2 = -\frac{3}{32} \frac{ql^2}{EJ_x} \frac{l^2}{16};$$

$$v_1 - 2v_2 + v_1 = -\frac{1}{8} \frac{ql^2}{EJ_x} \frac{l^2}{16}.$$

Решение этой системы уравнений дает следующие значения перемещений:

$$v_1 = \frac{5ql^4}{32 \cdot 16EJ_x}; \quad v_2 = \frac{7}{32}\frac{ql^4}{16EJ_x} = v_{\max}.$$

Полученное значение максимального прогиба отличается от точного значения $v_{\max} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ_x}$ приблизительно на 5%. Более точный результат можно получить, разбив длину балки на большее число участков.

При расчете пластин по методу конечных разностей плоскость пластины покрывают сеткой пересекающихся линий. Для простоты возьмем ортогональную сетку с одинаковым шагом по обоим направлениям (рис. 6.21). Рассмотрим некоторую точку K, расположенную на пересечении линий, обозначенных буквами m и n.

Значения прогиба пластины w в этой точке, а также в соседних узловых точках будем обозначать так, как указано на рис. 6.21.

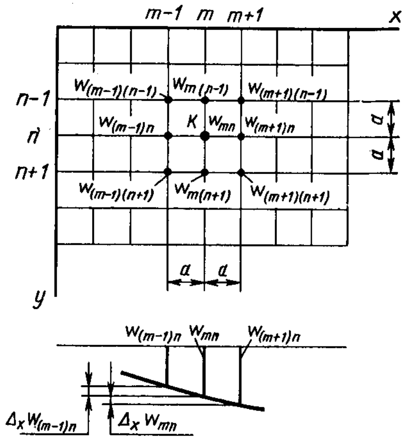


Рис. 6.21

Составим выражения первых разностей по x и y:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x(w_{mn}) &= \frac{1}{2}\left[w_{(m+1)n} - w_{(m-1)n}\right]; \\ \Delta_y(w_{mn}) &= \frac{1}{2}\left[w_{m(n+1)} - w_{m(n-1)}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.109)$$

Отношение этих разностей к шагу сетки дает приближенное значение первых производных по x и y:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &\cong \frac{\Delta_x(w_{mn})}{a} = \frac{1}{2a}\left[w_{(m+1)n} - w_{(m-1)n}\right]; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &\cong \frac{\Delta_y(w_{mn})}{a} = \frac{1}{2a}\left[w_{m(n+1)} - w_{m(n-1)}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.110)$$

Составим выражение вторых разностей. Эти разности могут быть трех видов по x, по y и смешанные:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{xx}(w_{mn}) &= \bar{\Delta}_x(w_{mn}) - \bar{\bar{\Delta}}_x(w_{mn}) = w_{(m+1)n} - 2w_{mn} + w_{(m-1)n}; \\ \Delta_{yy}(w_{mn}) &= \bar{\Delta}_y(w_{mn}) - \bar{\bar{\Delta}}_y(w_{mn}) = w_{m(n+1)} - 2w_{mn} + w_{m(n-1)}; \\ \Delta_{xy}(w_{mn}) &= \frac{1}{2}\left[\Delta_y(w_{(m+1)n}) - \Delta_y(w_{(m-1)n})\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[w_{(m+1)(n+1)} - w_{(m+1)(n-1)} - w_{(m-1)(n+1)} + w_{(m-1)(n-1)}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.111)$$

Отношение вторых разностей к квадрату шага сетки приближенно выражает вторые производные:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &\cong \frac{1}{a^2}\Delta_{xx}(w_{mn}),\\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &\cong \frac{1}{a^2}\Delta_{yy}(w_{mn});\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &\cong \frac{1}{a^2}\Delta_{xy}(w_{mn}).\end{aligned}\right\} \tag{6.112}$$

Аналогично можно составить третьи, четвертые разности и т. д. В общем случае решение дифференциального уравнения изгиба пластины (6.18) требует вычисления четвертых разностей.

Если же края пластины прямолинейные и закреплены шарнирно, то можно ограничиться вторыми разностями. В этом случае уравнения теории изгиба пластин (6.10), (6.11) и (6.18) преобразуют следующим образом. Сложив уравнения (6.10) и (6.11) и введя обозначение

$$\frac{M_x+M_y}{1+\mu}=M, \tag{6.113}$$

получают

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{M}{D}. \tag{6.114}$$

Дифференциальное уравнение (6.18) принимает вид

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}=-p. \tag{6.115}$$

Система двух уравнений (6.114) и (6.115) второго порядка эквивалентна одному уравнению (6.18) четвертого порядка.

Заменив вторые производные их приближенными выражениями (6.112), придем к следующим уравнениям в конечных разностях:

$$\Delta_{xx}(w)+\Delta_{yy}(w)=-\frac{M}{D}a^2; \tag{6.116}$$

$$\Delta_{xx}(M)+\Delta_{yy}(M)=-pa^2. \tag{6.117}$$

В таком виде уравнения удобны для расчета пластин с прямолинейными шарнирно опертыми краями, так как в этом случае на контуре $w=0$; $M_n=0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}=0$ и, следовательно, $M=0$.

Пример 6.7. Определить значения изгибающих моментов и прогибов для квадратной пластины с шарнирно опертыми краями, нагруженной равномерным давлением (рис. 6.22). Длину стороны пластины обозначим через b; шаг сетки a возьмем равным $\frac{1}{4}b$. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть одну восьмую часть квадрата, которая на чертеже заштрихована.

Применим уравнение (6.117) поочередно к точкам 0, 1, 2:

$$\Delta_{xx}(M_0)+\Delta_{yy}(M_0)=-pa^2;$$
$$\Delta_{xx}(M_1)+\Delta_{yy}(M_1)=-pa^2;$$
$$\Delta_{xx}(M_2)+\Delta_{yy}(M_2)=-pa^2.$$

Подставив значения вторых разностей согласно формулам (6.111) и приняв во внимание, что в точках *3, 4, 5*, $M = 0$, получим

$$4M_1 - 4M_0 = -\frac{pb^2}{16};$$

$$M_0 + 2M_2 - 4M_1 = -\frac{pb^2}{16};$$

$$2M_1 - 4M_2 = -\frac{pb^2}{16}.$$

Решение этой системы уравнений дает

$$M_0 = \frac{9}{2}\cdot\frac{pb^2}{64}; \quad M_1 = \frac{7}{2}\cdot\frac{pb^2}{64}; \quad M_2 = \frac{11}{4}\cdot\frac{pb^2}{64}.$$

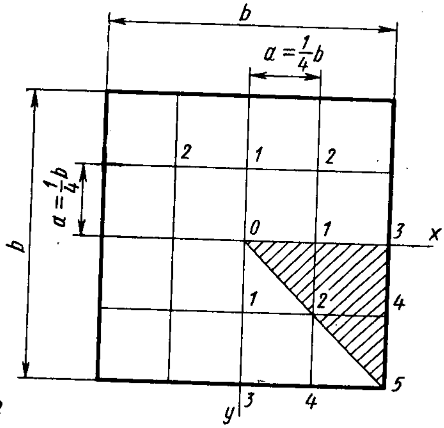


Рис. 6.22

Зная теперь функцию M в узловых точках, применим уравнение (6.116) к тем же точкам *0, 1, 2*:

$$\Delta_{xx}(w_0) + \Delta_{yy}(w_0) = -\frac{9}{2}\cdot\frac{pb^2}{64D}a^2;$$

$$\Delta_{xx}(w_1) + \Delta_{yy}(w_1) = -\frac{7}{2}\cdot\frac{pb^2}{64D}a^2,$$

$$\Delta_{xx}(w_2) + \Delta_{yy}(w_2) = -\frac{11}{4}\cdot\frac{pb^2}{64D}a^2.$$

После подстановки значений вторых разностей из уравнений (6.111) с учетом того, что $w_3 = 0$, $w_4 = 0$ и $w_5 = 0$, получим

$$4w_1 - 4w_0 = -\frac{9}{2}\cdot\frac{pb^4}{64D16};$$

$$w_0 + 2w_2 - 4w_1 = -\frac{7}{2}\cdot\frac{pb^4}{64D16};$$

$$2w_1 - 4w_2 = -\frac{11}{4}\cdot\frac{pb^4}{64\cdot 16D},$$

откуда

$$w_0 = \frac{66pb^4}{16^2\cdot 64D}; \quad w_1 = \frac{48pb^4}{16^2\cdot 64D}; \quad w_2 = \frac{35pb^4}{16^2\cdot 64D}.$$

Вычисленный прогиб в центре пластины

$$w_0=\frac{66pb^4}{16^2\cdot 64D}=0{,}00403\,\frac{pb^4}{D}$$

отличается от точного значения

$$w_0=0{,}00406\,\frac{pb^4}{D}$$

меньше чем на 1%.

Подсчитаем изгибающие моменты. В центре пластины по условию симметрии

$$M_{x0}=M_{y0}=\frac{M_0(1+\mu)}{2},$$

следовательно,

$$M_{x0}=\frac{9}{2}\cdot\frac{pb^2(1+0{,}3)}{64\cdot 2}=0{,}0457\;pb^2.$$

Точное же значение момента

$$M_{x0}=0{,}0479\;pb^2.$$

Здесь погрешность составляет 4,5%. Для повышения точности решения следует взять более мелкую сетку.

Примеры расчета пластин методом конечных разностей при других вариантах закрепления краев рассмотрены в работах [7, 25].

При исследовании изгиба сложных пластин наряду с теоретическими методами широко применяют экспериментальные методы исследования. К числу наиболее эффективных экспериментальных методов следует отнести метод муаровых полос, получивший развитие за последние годы. Сущность метода в том, что сетку параллельных линий, отраженную от зеркальной поверхности пластины, фотографируют дважды на одну и ту же пластинку, один раз до и второй раз после деформации.

Две системы линий, перекрещиваясь, образуют на фотографии муаровые полосы. По расположению этих полос при двух взаимно перпендикулярных положениях фотографируемой сетки можно определить форму упругой поверхности и далее расчетным путем найти напряжения.

Более подробные сведения об экспериментальных методах исследования изгиба пластин можно найти в работе [27].

Глава 7. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Некоторые геометрические свойства поверхностей вращения

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя близкими криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с размерами самих поверхностей (рис. 7.1).

Формы оболочек весьма разнообразны и различаются видом срединной поверхности, т. е. поверхности, равноудаленной от внутренней и наружной лицевых поверхностей. Характерной особенностью оболочек является то, что они имеют неплоскую срединную поверхность. Наибольшее распространение получили оболочки,

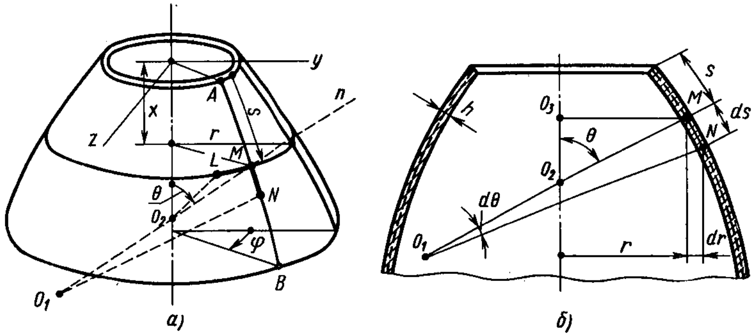


Рис. 7.1 а, б

срединная поверхность которых представляет собой поверхность тела вращения (цилиндр, сфера, конус и т. д.). Оболочки других видов сложнее; в настоящем курсе они не рассматриваются.

Оболочка вращения представлена на рис. 7.1. Линии, образующиеся при пересечении поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения, называются меридианами. Один меридиан на чертеже обозначен AMB.

Линии, перпендикулярные меридианам, представляют собой окружности и называются параллелями.

Каждая точка поверхности может быть задана как точка пересечения некоторого меридиана и некоторой параллели. Так, например, чтобы задать положение точки M, достаточно задать угол φ, отсчитываемый от некоторого нулевого меридиана, и расстояние s, отсчитываемое от края оболочки вдоль меридиана. Координаты φ, s, называемые гауссовыми координатами, наиболее удобны при изучении свойств поверхностей вращения. Иногда вместо координаты s более удобно использовать угловую координату θ, представляющую собой угол между осью вращения x и нормалью к поверхности оболочки. В некоторых случаях применяют также цилиндрические координаты φ, x, r (x отсчитывается вдоль оси оболочки; r — от оси вращения), а также декартовы координаты

$$x; \quad y = r\cos\varphi; \quad z = r\sin\varphi.$$

Поверхность вращения может быть задана аналитически, в явной форме

$$r = r(x),$$

или в параметрической форме

$$\left.\begin{aligned} r &= r(s) \\ x &= x(s) \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} r &= r(\theta) \\ x &= x(\theta) \end{aligned}\right\}.$$

Рассмотрим меридиональное сечение оболочки (рис. 7.1, *б*). Радиус кривизны меридиана обозначим через R_m. На чертеже этот радиус соответствует отрезку O_1M. Радиус кривизны в направлении, перпендикулярном меридиану, обозначим через R_t. Этот радиус равен отрезку нормали, заключенному между рассматриваемой точкой и осью вращения; на чертеже радиус R_t соответствует отрезку O_2M. Действительно, если на параллели взять две рядом расположенные точки M и L (см. рис. 7.1, *а*) и восставить нормали к поверхности, то эти нормали пересекутся на оси вращения в точке O_2. Следовательно, последняя будет центром кривизны.

Радиусы R_m и R_t называют главными радиусами кривизны поверхности вращения.

Эти радиусы обладают свойством экстремальности; это значит, что радиус кривизны в любом другом направлении, наклонном к меридиану, имеет среднюю величину между R_m и R_t.

Кроме радиусов кривизны поверхности R_m и R_t, в дальнейшем потребуется еще радиус параллели, проходящей через рассматриваемую точку. Этот радиус $r = O_3M$ связан с радиусом кривизны R_t зависимостью

$$r = R_t \sin\theta. \tag{7.1}$$

Радиусы R_m, R_t и угол θ являются функциями s. Для того чтобы они в совокупности определяли поверхность вращения, необходимо, чтобы они подчинялись определенной зависимости. Из чертежа рис. 7.1, *б* следует

$$dr = ds\cos\theta$$

или, учитывая равенство (7.1),

$$\frac{d(R_t\sin\theta)}{ds} = \cos\theta.$$

Дифференцируя левую часть равенства как произведение и учитывая, что $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_m}$, получим

$$\frac{dR_t}{ds} \sin\theta = \left(1 - \frac{R_t}{R_m}\right)\cos\theta. \qquad (7.2)$$

Если в качестве независимой переменной использовать угол θ, то дифференцирование по s следует заменить дифференцированием по θ.

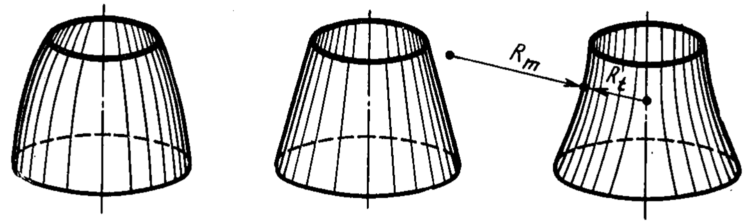
Тогда равенство (7.2) следует записать в виде

$$\frac{dR_t}{R_m d\theta} \sin\theta = \left(1 - \frac{R_t}{R_m}\right)\cos\theta$$

или

$$\frac{dR_t}{d\theta} \sin\theta = (R_m - R_t)\cos\theta. \qquad (7.3)$$

Соотношение (7.2) и (7.3) представляют собой частный случай общих соотношений Кодацци — Гаусса, которым должны удовлетворять радиусы кривизны всякой поверхности.



$K>0$ а) $K=0$ б) $K<0$ в)

Рис. 7.2

При изучении свойств поверхностей важное значение имеет гауссова кривизна

$$K = \frac{1}{R_m R_t}. \qquad (7.4)$$

Если $K > 0$, то поверхность имеет выпуклые меридианы (рис. 7.2, *а*), при $K = 0$ меридианы поверхности представляют собой прямые линии (рис. 7.2, *б*), при $K < 0$ поверхность имеет вогнутые меридианы (рис. 7.2, *в*). Заметим, что если две поверхности имеют одинаковую гауссову кривизну, то их можно развернуть одну по другой без разрывов (например, цилиндр и конус можно без разрывов развернуть на плоскость, так как для всех трех поверхностей $K = 0$).

Знак гауссовой кривизны определяет тип дифференциальных уравнений теории оболочек. Наиболее полно разработана теория оболочек положительной и нулевой гауссовой кривизны.

§ 2. Условия существования безмоментного напряженного состояния оболочки.

При нагружении оболочки возможны различные виды напряженного состояния. В оболочке может возникать только растяжение или сжатие без изгиба стенки (безмоментное состояние); растяжение совместно с изгибом (смешанное состояние) или только изгиб без растяжения (моментное состояние).

Примером безмоментного состояния может служить напряженное состояние, возникающее в сферической оболочке под действием равномерного внутреннего давления.

В качестве примера смешанного напряженного состояния можно указать состояние, возникающее в оболочке при нагружении ее распределенным моментом (рис. 7.3). Под действием момента стенка оболочки изгибается, и точки, расположенные около края, получают радиальные смещения, в связи с чем срединная поверх-

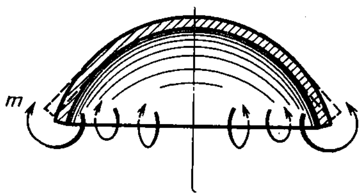


Рис. 7.3

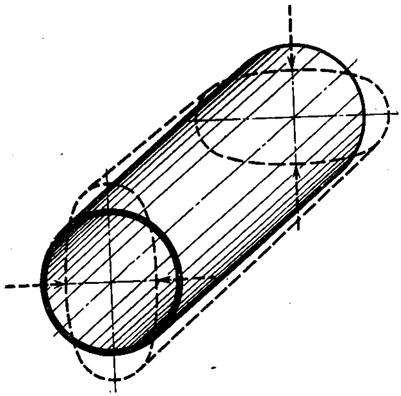


Рис. 7.4

ность оболочки растягивается в окружном направлении. При деформации подобного вида стенка оболочки одновременно испытывает изгиб и растяжение.

Моментное напряженное состояние может возникнуть в некоторых случаях при несимметричном нагружении оболочки. На рис. 7.4 изображен тонкостенный цилиндр со свободными торцами. При нагружении такого цилиндра силами, перпендикулярными его оси, он будет деформироваться почти без растяжения срединной поверхности так, как показано на рисунке штриховыми линиями. Нагрузка в этом случае воспринимается исключительно за счет сопротивления изгибу. Если же изгибная жесткость будет весьма мала, то цилиндр превратится в механизм. Это следует понимать в том смысле, что его можно будет деформировать почти без затраты энергии. Так как перемещения на каждом из двух торцов могут быть заданы независимо, то такой цилиндр может быть уподоблен механизму с двумя степенями свободы. Если на один из торцов наложить связи, запрещающие искажение формы окружности, то цилиндр превратится в механизм с одной степенью свободы. При запрещении искажения формы окружности обоих торцов деформация цилиндра без растяжения срединной поверхности будет невозможна.

То же самое можно сказать и об оболочке вращения с образующей произвольной формы. Коническая или сферическая оболочки, открытые с обеих сторон (см. рис. 7.2, *а* и *б*) при весьма малой изгибной жесткости подобны механизму с двумя степенями свободы. Тот же конус или сфера, замкнутые в вершине, эквивалентны механизму с одной степенью свободы.

Преимущества оболочки как конструктивного элемента реализуются в том случае, когда ее стенка работает на растяжение (сжатие) в условиях безмоментного напряженного состояния или состояния, близкого к безмоментному.

Моментное состояние целесообразно только в том случае, когда оболочка используется в качестве гибкого элемента, получающего в процессе работы значительные упругие деформации (например, гибкое звено волновой зубчатой передачи).

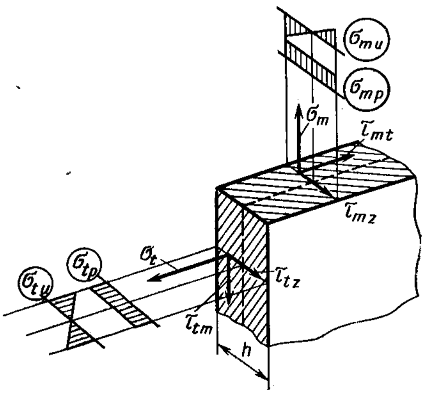


Рис. 7.5

В общем случае напряженного состояния в стенке оболочки возникают нормальные напряжения растяжения и изгиба, распределенные по толщине так, как показано на рис. 7.5 (σ_m — напряжение, направленное по меридиану; σ_t — по касательной к окружности). Напряжения растяжения, постоянные по толщине, пропорциональны удлинениям срединной поверхности. Напряжения изгиба, линейно распределенные по толщине и имеющие нулевое значение на срединной поверхности, пропорциональны изменениям кривизны. Предположим, что относительное удлинение срединной поверхности (наибольшее) приближенно равно ε, а изменение кривизны — $\varkappa$, тогда можно сказать, что напряжения растяжения имеют такой же порядок малости, как произведение $E\varepsilon$, а наибольшее напряжение изгиба — такой же порядок, как произведение $E\varkappa\frac{h}{2}$ (где h — толщина стенки).

На практике могут встретиться следующие случаи:

1. Деформация растяжения ε велика, а произведение $\varkappa\frac{h}{2}$ мало, т. е.

$$\varepsilon \gg \varkappa\frac{h}{2}.$$

В этом случае напряжениями изгиба можно пренебречь по сравнению с напряжениями растяжения, т. е. считать, что изгибающие моменты в стенке оболочки равны нулю. Это случай безмоментного напряженного состояния.

2. Величины ε и $\varkappa h$ имеют одинаковый порядок. Это случай смешанного состояния, когда оболочка работает одновременно на изгиб и растяжение.

3. Величина ε мала по сравнению с произведением $\varkappa h$. В этом случае растяжением срединной поверхности можно пренебречь и считать, что оболочка испытывает моментное состояние.

Очевидно, что безмоментное состояние может возникать в двух случаях: или когда толщина h мала (тканевые, пленочные оболочки), или когда мало изменение кривизны стенки $\varkappa$. Оболочки с малой толщиной стенки не могут воспринимать изгибающий момент вследствие весьма малой изгибной жесткости. Они не могут также воспринимать напряжения сжатия, так как на них образуются складки. Расчет оболочек этого типа имеет некоторые особенности. В настоящем курсе такие оболочки не рассматриваются.

Для получения безмоментного состояния в оболочке конечной толщины необходимы следующие условия:

1. Форма оболочки должна быть плавной, не должно быть разрывного изменения радиусов кривизны.

2. Нагрузки должны быть равномерными или плавно изменяющимися. Не должно быть сосредоточенных сил или моментов, вызывающих значительное изменение кривизны.

3. Края оболочки должны быть закреплены таким образом, чтобы реактивные силы не имели значительной поперечной составляющей, а также чтобы не возникали реактивные моменты.

4. При нагружении оболочки несимметричной нагрузкой должны быть предусмотрены связи, препятствующие возникновению чисто моментного состояния. Оболочка не должна иметь свободных открытых торцов.

Следует заметить, что даже если эти условия не полностью соблюдаются и в оболочке возникает растяжение и изгиб, безмоментная теория не теряет своего значения, так как уже на небольшом расстоянии от зоны изгиба (от места приложения сосредоточенных сил или скачкообразного изменения радиусов кривизны) напряженное состояние обычно можно рассматривать как безмоментное.

На краях оболочки, где приложены распределенные поперечные силы или моменты, напряженное состояние можно рассматривать как сумму безмоментного состояния и так называемого краевого эффекта, т. е. местного изгиба стенки оболочки около края.

§ 3. Уравнения безмоментной теории оболочек вращения

Согласно основному допущению безмоментной теории, изгибающие и скручивающие моменты, а также поперечные силы считаются равными нулю. Из этого допущения следует, что нормальные напряжения σ_m и σ_t и касательные напряжения τ_{mt} и τ_{tm} постоянны по толщине оболочки, а напряжения τ_{mz} и τ_{tz} — отсутствуют.

Выделим бесконечно малый элемент стенки оболочки, ограниченный двумя близкими меридиональными сечениями и двумя коническими сечениями, перпендикулярными срединной поверхности (рис. 7.6), и рассмотрим его равновесие.

Кроме напряжений σ_m, σ_t, $\tau_{mt} = \tau_{tm}$ на выделенный элемент действует поверхностная распределенная нагрузка, которую можно представить в виде трех составляющих:

p_1 — по нормали к поверхности;

p_2 — по касательной к меридиану;

p_3 — по касательной к параллели.

Введем обозначения:

$T_t = \sigma_t h$ — нормальная сила в окружном направлении;

$T_m = \sigma_m h$ — нормальная сила в меридиональном направлении;

$S = \tau_{mt} h$ — сдвигающая сила.

Внутренние силы T_m, T_t, S принято относить к единице длины дуги: размерность этих сил — Н/см.

При несимметричном нагружении оболочки все величины зависят от двух переменных — от дуги s и полярного угла φ, поэтому уравнения получаются в частных производных.

Составим уравнения проекций сил, действующих на элемент оболочки (рис. 7.6), на нормаль к поверхности n, на ось вращения x и на касательную к окружности t:

$$\sum F_n = 0; \quad -T_m r d\varphi \frac{d\theta}{2} - \left[T_m r d\varphi + \frac{\partial}{\partial s}(T_m r\, d\varphi)\, ds\right] \times$$
$$\times \frac{d\theta}{2} - 2T_t\, ds \frac{d\varphi}{2} \sin\theta + p_1 r d\varphi\, ds = 0;$$

$$\sum F_x = 0; \quad T_m r d\varphi \sin\theta - \left[T_m r d\varphi \sin\theta + \frac{\partial}{\partial s}(T_m\, r d\varphi \sin\theta)\, ds\right] +$$
$$+ (p_1 \cos\theta - p_2 \sin\theta)\, r d\varphi\, ds = 0;$$

$$\sum F_t = 0; \quad -Sr\, d\varphi + \left[Sr\, d\varphi + \frac{\partial}{\partial s}(Sr\, d\varphi)\, ds\right] - T_t\, ds +$$
$$+ \left[T_t\, ds + \frac{\partial}{\partial\varphi}(T_t\, ds)\, d\varphi\right] + S\, ds \frac{d\varphi}{2}\cos\theta + \left[S\, ds +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\varphi} S\, d\varphi\, ds\right] \frac{d\varphi}{2}\cos\theta + p_3 r d\varphi\, ds = 0.$$

Уравнения моментов в данном случае удовлетворяются тождественно.

Отбросив величины более высокого порядка малости и выполнив элементарные преобразования с учетом зависимостей

$$\frac{ds}{R_m} = d\theta; \quad \frac{r}{R_t} = \sin\theta; \quad \frac{dr}{ds} = \cos\theta,$$

придем к следующей системе трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\frac{T_m}{R_m} + \frac{T_t}{R_t} = p_1; \tag{7.5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}(T_m r \sin\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\sin\theta = p_x; \tag{7.6}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial s}(Sr^2) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_t}{\partial \varphi} = -p_3, \tag{7.7}$$

где p_x — осевая составляющая поверхностной нагрузки;

$$p_x = p_1\cos\theta - p_2\sin\theta. \tag{7.8}$$

Уравнение (7.5) известно под названием уравнения Лапласа.

Уравнения (7.5) — (7.7) могут быть сведены к одному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных

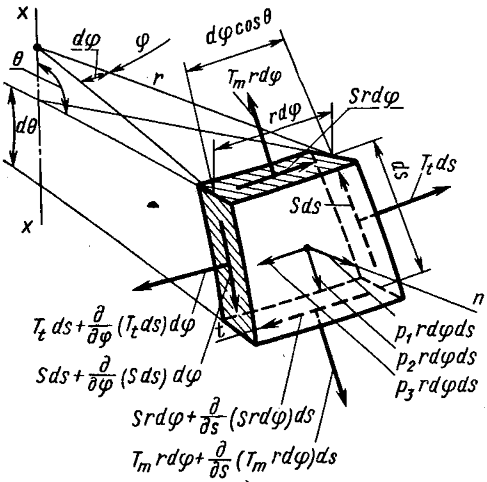


Рис. 7.6

с одним неизвестным. Решение этих уравнений должно удовлетворять граничным условиям на краях. Если граничные условия — силовые, т. е. на краях заданы усилия T_m и S, то решение системы уравнений (7.5) — (7.7) может быть доведено до конца. Если же граничные условия — геометрические, т. е. на краях заданы перемещения, то необходимо дополнительно использовать уравнения перемещений.

Перейдем к выводу уравнений перемещений. Введем обозначения:

u — составляющая перемещения произвольной точки M срединной поверхности по направлению касательной к меридиану;

v — составляющая перемещения по направлению касательной к параллели;

w — составляющая перемещения по нормали к поверхности.

Направления перемещений, показанные на рис. 7.7, приняты за положительные.

Перемещения точек N и L отличаются от перемещений точки M на бесконечно малые приращения.

Вычислим относительные линейные деформации в меридиональном и окружном направлениях ε_m и ε_t и угловую деформацию в касательной плоскости γ_{tm}.

За счет приращения перемещения u по координате s отрезок меридиана $MN = ds$ получает удлинение, равное $\frac{\partial u}{\partial s}\,ds$. За счет перехода точек M и N на больший радиус тот же отрезок получает удлинение, равное $w d\theta$. Сложив эти удлинения и разделив на первоначальную длину отрезка $MN = ds = R_m d\theta$, получим относительное удлинение в меридиональном направлении

$$\varepsilon_m = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_m}. \quad (7.9)$$

Аналогично определим окружную деформацию. Отрезок ML, равный $r d\varphi$, получает следующие удлинения:

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}\,d\varphi$$

за счет приращения перемещения v по координате φ;

$$u\,d\varphi \cos\theta$$

за счет смещения точек M и L вдоль меридианов;

$$w\,d\varphi \sin\theta = w\,d\varphi \frac{r}{R_t}$$

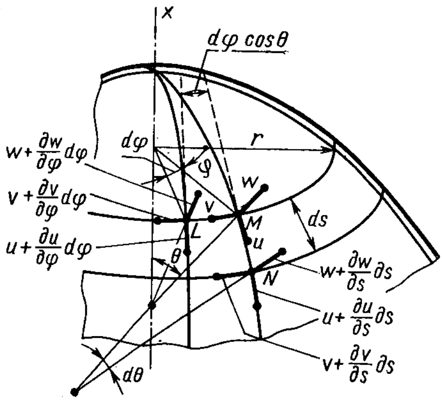


Рис. 7.7

за счет смещения точек M и L по нормали и перехода их на больший радиус.

Разделив сумму этих удлинений на первоначальную длину отрезка $ML = r d\varphi$, найдем относительную окружную деформацию

$$\varepsilon_t = \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u \cos\theta}{r} + \frac{w}{R_t}. \quad (7.10)$$

Угловая деформация γ_{tm} равна сумме углов поворота отрезков MN и ML в касательной плоскости. Угол поворота отрезка ML (обозначим его через α) зависит только от приращения перемещения u по координате φ:

$$\alpha = \frac{\partial u}{r \partial \varphi}.$$

Угол поворота второго отрезка MN связан с приращением перемещения v по координате s:

$$\beta_1 = \frac{\partial v}{\partial s}.$$

Этот угол, однако, зависит не только от деформации срединной поверхности, но и от поворота оболочки как жесткого целого вокруг ее оси. Действительно, при повороте оболочки на некоторый угол ψ точка M получит перемещение по окружности, равное $v = \psi r$, а соседняя с ней точка N — перемещение $\psi(r+dr) = \frac{v}{r}(r+dr)$. Разность окружных перемещений точек M и N, разделенная на длину отрезка $MN = ds$, дает ту часть угла поворота отрезка MN, которая не зависит от деформации срединной поверхности:

$$\beta_2 = \frac{v}{r}\frac{dr}{ds}.$$

Вычитая β_2 из β_1, найдем угол поворота отрезка меридиана MN, связанный с деформацией сдвига срединной поверхности:

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r}\frac{dr}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r}\cos\theta.$$

Сумма углов α и β дает угловую деформацию

$$\gamma_{tm} = \frac{\partial u}{r\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r}\cos\theta. \tag{7.11}$$

Уравнения (7.9) — (7.11) устанавливают зависимость между деформациями ε_m, ε_t, γ_{tm} и компонентами перемещений u, v, w. Выразим деформации через усилия. Согласно обобщенному закону Гука:

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m - \mu\sigma_t}{E} = \frac{T_m - \mu T_t}{Eh};$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t - \mu\sigma_m}{E} = \frac{T_t - \mu T_m}{Eh};$$

$$\gamma_{tm} = \frac{\tau_{tm}}{G} = \frac{S}{Gh}.$$

С учетом этих равенств уравнения (7.9) — (7.11) принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_m} = \frac{T_m - \mu T_t}{Eh}; \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial v}{r\partial\varphi} + \frac{u\cos\theta}{r} + \frac{w}{R_t} = \frac{T_t - \mu T_m}{Eh}; \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial u}{r\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r}\cos\theta = \frac{S}{Gh}. \tag{7.14}$$

Если усилия T_m, T_t и S уже найдены, то в полученной системе трех уравнений (7.12) — (7.14) содержатся только три неизвестных u, v, w. Преобразуя эту систему к одному уравнению с одним неизвестным, получим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, решение которого также должно удовлетворять граничным условиям на краях оболочки.

§ 4. Осесимметрично нагруженные оболочки вращения

Осесимметричными называют оболочки, имеющие форму тела вращения и нагруженные осесимметричной нагрузкой. Так как в таких оболочках все величины по углу φ — постоянны, то производные по φ в уравнениях равновесия (7.5) — (7.7) и в уравнениях перемещений (7.12) — (7.14) пропадают; в результате эти уравнения упрощаются:

$$\frac{T_m}{R_m} + \frac{T_t}{R_t} = p_1; \tag{7.15}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{ds}(T_m r \sin\theta) = p_x; \tag{7.16}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{ds}(Sr^2) = -p_3; \tag{7.17}$$

$$\frac{du}{ds} + \frac{w}{R_m} = \varepsilon_m = \frac{T_m - \mu T_t}{Eh}; \tag{7.18}$$

$$\frac{u\cos\theta}{r} + \frac{w}{R_t} = \varepsilon_t = \frac{T_t - \mu T_m}{Eh}; \tag{7.19}$$

$$\frac{dv}{ds} - \frac{v}{r}\cos\theta = \frac{S}{Gh}. \tag{7.20}$$

Нетрудно заметить, что эта система уравнений распадается на две независимые группы. В первую группу входят уравнения (7.15), (7.16), (7.19) и (7.20), не содержащие S. Эта группа уравнений описывает осесимметричное растяжение оболочки. Два оставшихся уравнения (7.17), (7.20), не содержащих T_m и T_t, описывают осесимметричное кручение оболочки.

Рассмотрим первую группу уравнений.

Так как составляющие поверхностной нагрузки p_1, p_2 и $p_x = p_1\cos\theta - p_2\sin\theta$ заданы, то по уравнению (7.16) можно определить усилие T_m. Проинтегрировав правую и левую части уравнения в пределах от s_0 до s, получим

$$T_m r\sin\theta = \int_{s_0}^{s} p_x \hat{r}\, ds + C, \tag{7.21}$$

где $r_1 < \hat{r} < r$ (рис. 7.8, *а*).

Уравнение (7.21) представляет собой уравнение равновесия части оболочки, ограниченной сверху краем $s = s_0$, а снизу произвольным сечением радиуса r. Для оболочки, замкнутой в вершине при $s_0 = 0$, уравнение (7.21) превращается в уравнение равновесия отсеченного купола. Левая часть уравнения равна равнодействующей меридиональных сил T_m, действующих в текущем сечении, отнесенной к единице полярного угла. Интеграл в правой части есть равнодействующая внешних поверхностных сил, приложенных к отсеченной части оболочки, отнесенная к единице полярного угла. Постоянная C учитывает силы, приложенные к верхнему краю отсеченной части, а также возможные кольцевые нагрузки, приложенные в пределах участка от s_0 до s.

Обозначим через $F(s)$ суммарную осевую силу, приходящуюся на единицу полярного угла:

$$F(s)=\int_{s_0}^{s} p_x \hat{r}\, ds + C. \tag{7.22}$$

В каждом частном случае эта сила легко определяется из уравнения равновесия отсеченной части оболочки. По функции $F(s)$, на основании уравнения (7.21), можно найти меридиональную силу

$$T_m=\frac{F(s)}{r \sin\theta}=\frac{F(s)}{R_t \sin^2\theta}. \tag{7.23}$$

По меридиональной силе T_m, согласно уравнению Лапласа (7.9), определяется окружная сила

$$T_t=p_1 R_t - T_m \frac{R_t}{R_m}. \tag{7.24}$$

Приведем выражения функции $F(s)$ для некоторых частных случаев нагружения.

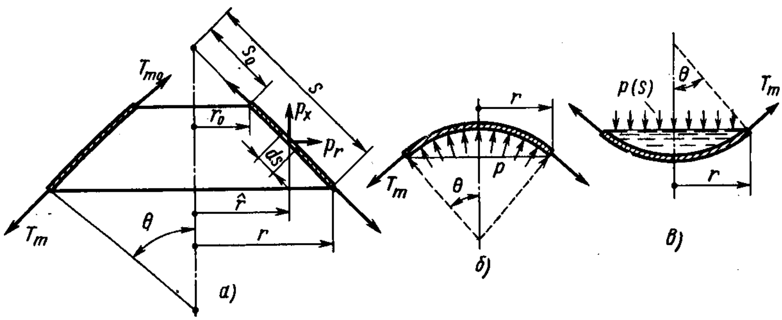


Рис. 7.8 а—в

Для оболочки, замкнутой в вершине, нагруженной равномерным давлением (рис. 7.8, *б*), функция $F(s)$ вычисляется как произведение давления p на площадь круга радиуса r, отнесенное к единице полярного угла:

$$F(s)=\frac{pr^2}{2}. \tag{7.25}$$

Для купола, заполненного жидкостью (рис. 7.8, *в*), функция $F(s)$ складывается из веса жидкости в отсеченной части и силы давления выше расположенных слоев жидкости, отнесенных к единице полярного угла:

$$F(s)=\frac{\gamma_{ж} V_{отс}+p(s)\,\pi r^2}{2\pi}, \tag{7.26}$$

где $\gamma_ж$ — удельный вес жидкости;

$V_{отс}$ — объем отсеченной части оболочки;

$p(s)$ — давление в рассматриваемой точке.

Для оболочки, находящейся под действием сил собственного веса,

$$F(s) = \frac{Sh\gamma}{2\pi}, \qquad (7.26а)$$

где S — поверхность отсеченной части.

Рассмотрим более подробно вопрос о расчете замкнутых резервуаров, находящихся под действием равномерного внутреннего давления (рис. 7.9). Функция $F(s)$ в этом случае определяется по зависимости (7.25). Учитывая, что $r = R_t \sin\theta$, и используя уравнения (7.23) и (7.24), найдем меридиональную и окружную силы:

$$T_m = \frac{pR_t}{2}; \qquad (7.27)$$

$$T_t = \frac{pR_t}{2}\left(2 - \frac{R_t}{R_m}\right). \qquad (7.28)$$

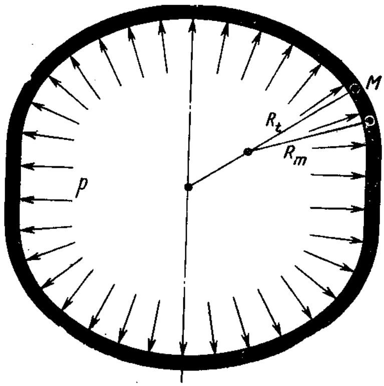


Рис. 7.9

Формулы (7.27) и (7.28) справедливы для любой формы резервуара при условии, что меридиональное сечение имеет односвязный контур (рис. 7.9).

Для цилиндрического резервуара $R_t = \frac{D}{2}$ и $R_m = \infty$. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} T_m &= \frac{pD}{4}; \quad \sigma_m = \frac{pD}{4h}; \\ T_t &= \frac{pD}{2}; \quad \sigma_t = \frac{pD}{2h}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.29)$$

Формулы (7.29) известны под названием «котельных» формул или формул Мариотта; их применяют для вычисления напряжений в цилиндрических котлах, сосудах и тонкостенных трубах, находящихся под действием внутреннего давления.

Для сферического резервуара $R_t = R_m = R = \frac{D}{2}$, усилия и напряжения соответственно равны

$$T_m = T_t = \frac{pR}{2} = \frac{pD}{4}; \quad \sigma_m = \sigma_t = \frac{pD}{4h}, \qquad (7.30)$$

где D — диаметр сферы.

Сопоставив формулы (7.29) и (7.30), можно увидеть, что при одинаковом давлении и при одинаковых диаметрах и толщине максимальное нормальное напряжение в сферической оболочке будет в 2 раза меньше, чем в цилиндрической.

Следует обратить внимание на то, что при $R_m < \frac{1}{2} R_t$ правая часть равенства (7.28) становится отрицательной и, следовательно, окружная сила T_t будет сжимающей. Это обстоятельство необходимо иметь в виду, так как при действии сжимающих напряжений может произойти потеря устойчивости первоначальной формы и на оболочке могут образоваться складки.

На основании изложенного можно заключить, что с точки зрения экономичности наиболее целесообразной формой резервуаров, работающих под действием внутреннего давления, будет сферическая форма.

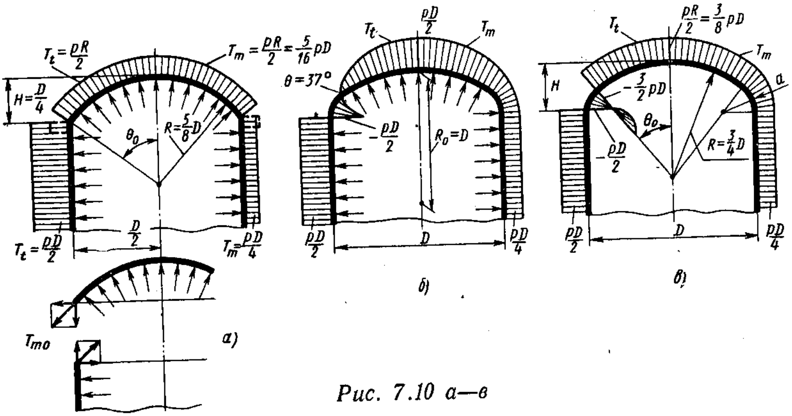


Рис. 7.10 а—в

Однако по технологическим соображениям резервуары часто делают цилиндрической формы с днищами. Наиболее часто применяют следующие формы днищ: сферическое (рис. 7.10, *а*); эллиптическое, имеющее форму эллипсоида вращения (рис. 7.10, *б*); коробовое, состоящее из части сферы и части тора (рис. 7.10, *в*). Усилия и напряжения в цилиндрической части резервуара не зависят от формы днища и определяются по формулам (7.29). В сферическом днище усилия T_m и T_t имеют одинаковые значения:

$$T_m = T_t = \frac{pR}{2}.$$

Практикой установлено, что оптимальное значение отношения высоты днища H к радиусу цилиндра D приблизительно равно $^1/_2$. При указанном отношении радиус сферы должен быть равен $\frac{5}{8} D$ и угол наклона нормали на краю днища $\theta_{max} \cong 53°$. В этом случае эпюры усилий T_m и T_t имеют вид, показанный на рис. 7.10, *а*. Отделив сферическое днище от цилиндрической части резервуара, можно увидеть, что на цилиндр передается сила T_{m0}, имеющая большую радиальную составляющую, которая вызывает изгиб стенки. Чтобы уменьшить этот изгиб и получить напряженное состояние, более близкое к безмоментному, необходимо на краю цилиндра установить достаточно мощное кольцо, которое воспринимало бы радиальную составляющую силы T_{m0} (на рис. 7.10, *а* поперечное сечение кольца показано штриховой линией).

При отсутствии такого кольца в зоне сопряжения цилиндра и днища возникнут значительные напряжения изгиба. Однако, если материал резервуара пластичный, а давление постоянно во времени, то напряжения изгиба не представляют опасности, так как с ростом давления в зоне изгиба возникают местные пластические деформации и рост напряжений замедляется. В то же время в цилиндрической части резервуара напряжения растяжения продолжают увеличиваться пропорционально давлению вплоть до разрушения. Разрушение такого резервуара происходит на некотором расстоянии от днища. Изгибные напряжения могут стать причиной разрушения при действии пульсирующего давления (усталостное разрушение) или при постоянном давлении в условиях низких температур (хрупкое разрушение). Для хрупкого материала изгибные напряжения могут быть причиной разрушения и при статическом нагружении в условиях нормальной температуры.

Определим напряжения в эллиптическом днище. Полуоси эллипса равны соответственно $\frac{D}{2}$ и H (см. рис. 7.10, *б*). Радиусы кривизны эллипсоида в произвольной точке определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} R_m &= \frac{R_0}{(1+\gamma\sin^2\theta)^{3/2}}; \\ R_t &= \frac{R_0}{(1+\gamma\sin^2\theta)^{1/2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.31)$$

где

θ — угол между нормалью и осью вращения;

$R_0 = \frac{D}{2}\sqrt{1+\gamma}$ — радиус кривизны в вершине (при $\theta = 0$);

$\gamma = \frac{(D/2)^2 - H^2}{H^2}$ — параметр, определяющий форму эллипса.

При подстановке значений радиусов (7.31) зависимости (7.27) и (7.28) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} T_m &= \frac{pD}{4}\,\frac{(1+\gamma)^{1/2}}{(1+\gamma\sin^2\theta)^{1/2}}; \\ T_t &= \frac{pD}{4}\,\frac{(1+\gamma)^{1/2}(1-\gamma\sin^2\theta)}{(1+\gamma\sin^2\theta)^{1/2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.32)$$

Эпюры усилий T_m и T_t, построенные при значении отношения $\frac{H}{D/2} = \frac{1}{2}$ ($\gamma = 3$, $R_0 = D$), приведены на рис. 7.10, *б*.

Преимуществом эллиптического днища является то, что радиальная составляющая силы T_m в месте перехода от днища к цилиндру равна нулю.

Однако изгиб стенки в зоне сопряжения здесь полностью не исключается. Действительно, ввиду того, что окружное усилие T_t

в месте сопряжения днища и цилиндра изменяется разрывно от $-\frac{pD}{2}$ до $\frac{pD}{2}$, значения окружной деформации ε_t и радиального перемещения ξ также имеют разрыв. В действительности же ε_t и ξ — функции непрерывные. Поэтому в зоне сопряжения к безмоментному состоянию добавится изгиб стенки. Этот изгиб будет, однако, значительно слабее, чем при сферическом днище.

Определим напряжения в коробовом днище (см. рис. 7.10, *в*). Введем обозначения: R — радиус кривизны сферической части днища, a — радиус тороидального закругления; θ_0 — угол наклона нормали на границе между сферической и тороидальной частью днища.

Для обеспечения плавного перехода от сферической части к тороидальной необходимо соблюдение следующих равенств:

$$(R-a)\sin\theta_0=\frac{D}{2}-a;$$

$$\frac{H}{D/2}=\nu=\frac{R-(R-a)\cos\theta_0}{D/2}.$$

Если заданы размеры a, D, а также отношение ν, то из указанных равенств нетрудно найти R и θ_0.

Так, например, при $v=\frac{1}{2}$ и $a=D/8$

$$R=\frac{3}{4}D;\quad \sin\theta_0=0,6.$$

Очевидно, что при одном и том же значении отношения ν можно подобрать несколько различных форм коробового днища с различными значениями радиуса тороидальной части. Обычно принимают $a\cong\frac{1}{8}D$.

В произвольной точке тороидальной части днища радиусы кривизны соответственно равны

$$R_m=a;\quad R_t=\frac{D/2-a(1-\sin\theta)}{\sin\theta},$$

и внутренние усилия

$$\left.\begin{aligned} T_m&=\frac{p}{2}\,\frac{D/2-a(1-\sin\theta)}{\sin\theta};\\ T_t&=T_m\left(2-\frac{D/2-a(1-\sin\theta)}{a\sin\theta}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(7.33)$$

В пределах сферической части

$$R_m=R_t=R$$

и

$$T_m=T_t\pm\frac{pR}{2}.$$

Эпюры T_m и T_t, построенные при $\nu=\frac{1}{2}$; $a=\frac{D}{8}$; $R=\frac{3}{4}D$, приведены на рис. 7.10, *в*.

Коробовое днище, так же как и эллиптическое, не передает на цилиндр радиальной нагрузки. Преимуществом этого днища по сравнению с эллиптическим является более простая форма меридиана. В переходных точках коробового днища окружное усилие имеет разрывы, следовательно, в зонах сопряжения участков возникает изгиб стенки и действительные значения усилий будут несколько иные. Более точные значения усилий могут быть найдены по моментной теории оболочек.

Из сказанного, однако, не следует, что расчет по безмоментной теории бесполезен, так как, во-первых, этот расчет входит как составная часть в расчет по моментной теории; во-вторых, растягивающие напряжения в сферической и цилиндрической частях резервуара, найденные по безмоментной теории, достаточно хорошо характеризуют фактическую прочность резервуара (в случае пластичного материала). Что же касается высоких сжимающих напряжений в тороидальной части днища, то в действительности эти напряжения значительно меньше вычисленных по безмоментной теории вследствие влияния деформации изгиба.

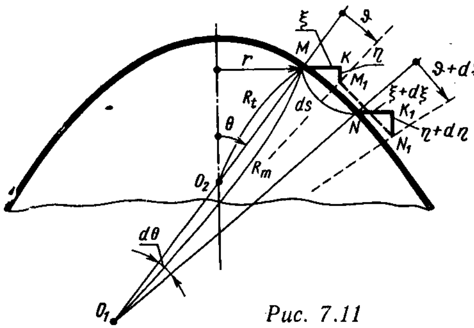


Рис. 7.11

Остановимся на вопросе определения перемещений в осесимметричных оболочках вращения.

Если внутренние усилия T_m и T_t уже найдены, то система уравнений перемещений (7.18) и (7.19) может быть решена относительно u и w. В осесимметричных оболочках, однако, более удобно рассматривать перемещения ξ и η в радиальном и в осевом направлениях (рис. 7.11). Выразим эти перемещения через относительные удлинения срединной поверхности.

Относительное удлинение в окружном направлении кольцевого волокна, проходящего через точку M:

$$\varepsilon_t = \frac{\xi}{r} = \frac{\xi}{R_t \sin\theta}. \tag{7.34}$$

Отсюда радиальное перемещение

$$\xi = \varepsilon_t R_t \sin\theta. \tag{7.35}$$

Для определения относительной деформации в меридиональном направлении рассмотрим замкнутый многоугольник $MNK_1N_1M_1KM$. Возьмем сумму проекций его звеньев на касательную к меридиану

$$MN + (\xi + d\xi)\cos\theta + (\eta + d\eta)\sin\theta - M_1N_1 - \eta\sin\theta - \xi\cos\theta = 0.$$

Отсюда определяется приращение длины отрезка $MN = ds$:

$$\Delta(ds) = d\xi\cos\theta - d\eta\sin\theta$$

и меридиональная деформация

$$\varepsilon_m = \frac{d\xi}{ds}\cos\theta - \frac{d\eta}{ds}\sin\theta. \qquad (7.36)$$

Зависимости (7.34), (7.36) можно получить также из уравнений (7.18), (7.19), если воспользоваться соотношениями, связывающими перемещения w и u с перемещениями ξ и η:

$$\left.\begin{aligned} w &= \xi\sin\theta - \eta\cos\theta; \\ u &= \xi\cos\theta + \eta\sin\theta. \end{aligned}\right\}$$

Осевое перемещение определим по уравнению (7.36):

$$\eta = \int_{s_0}^{s}\left(\frac{\varepsilon_m}{\sin\theta} - \frac{d\xi}{ds}\operatorname{ctg}\theta\right)ds \qquad (7.37)$$

или

$$\eta = \int_{\theta_0}^{\theta}\left(\frac{\varepsilon_m}{\sin\theta} - \frac{d\xi}{R_m\,d\theta}\operatorname{ctg}\theta\right)R_m\,d\theta. \qquad (7.37а)$$

Подставив под знак интеграла выражение (7.35) и применив формулу интегрирования по частям, можно представить уравнение (7.37) также в следующем виде:

$$\eta = -\varepsilon_t R_t\cos\theta\Big|_{\theta_0}^{\theta} + \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\left(\varepsilon_m - \frac{R_t}{R_m}\varepsilon_t\right)R_m\,d\theta, \qquad (7.37б)$$

где s_0 или θ_0 — координата края, принятого за начало отсчета. Получим еще выражение угла поворота нормали ϑ. Для этого приравняем нулю сумму проекций звеньев многоугольника $MKM_1N_1K_1NM$ на направление нормали к поверхности

$$\xi\sin\theta - \eta\cos\theta - ds\,(1+\varepsilon_m)\,\vartheta + (\eta + d\eta)\cos\theta - (\xi + d\xi)\sin\theta = 0.$$

Отсюда, пренебрегая малой величиной ε_m по сравнению с единицей,

$$\vartheta = \frac{d\eta}{ds}\cos\theta - \frac{d\xi}{ds}\sin\theta = \frac{d\eta}{R_m\,d\theta}\cos\theta - \frac{d\xi}{R_m\,d\theta}\sin\theta, \qquad (7.38)$$

или с учетом равенства (7.36):

$$\vartheta = \varepsilon_m\operatorname{ctg}\theta - \frac{d\xi}{ds}\frac{1}{\sin\theta}. \qquad (7.39)$$

Угол ϑ можно выразить также через перемещения u и w:

$$\vartheta = \frac{u}{R_m} - \frac{dw}{ds}. \qquad (7.40)$$

Пример 7.1. Крышка цилиндра сферической формы находится под действием внутреннего давления $p = 200$ Н/см² (рис. 7.12). Диаметр цилиндра $D = 40$ см; радиус сферической поверхности (срединной) $R = 40$ см; допускаемое напряжение $[\sigma] = 16\,000$ Н/см². Определить требуемую толщину крышки h.

Усилия в сферической оболочке при действии равномерного внутреннего давления, согласно формуле (7.30):

$$T_m = T_t = \frac{pR}{2} = 4000 \text{ Н/см}$$

и напряжения

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{4000}{h} \text{ Н/см}^2.$$

Эквивалентное напряжение по гипотезе прочности наибольших касательных напряжений

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{4000}{h} \text{ Н/см}^2.$$

Приравняв эквивалентное напряжение допускаемому $[\sigma]$, найдем искомую толщину

$$h = 0{,}25 \text{ см}.$$

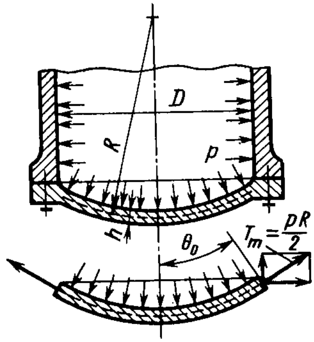


Рис. 7.12

Заметим, что толщина плоской крышки при тех же исходных данных (см. пример 5.2) должна быть ~ 2 см. Следовательно, замена плоской крышки, работающей на изгиб, на сферическую, работающую на растяжение, позволяет существенно уменьшить ее толщину.

В месте сопряжения сферической части крышки с фланцем возникает изгиб стенки вследствие несоответствия окружных деформаций края оболочки и фланца. При пластическом материале при статическом нагружении этот изгиб не имеет существенного значения и его можно не учитывать.

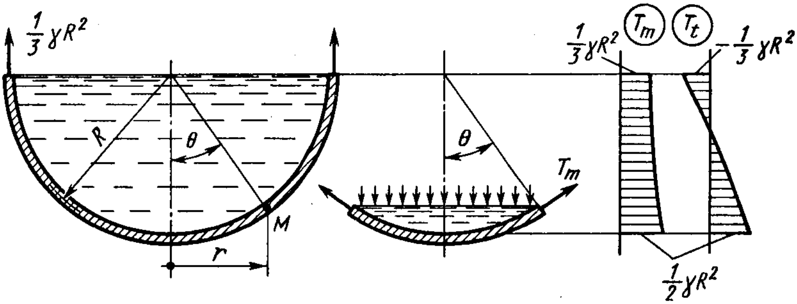


Рис. 7.13

Пример 7.2. Определить напряжения и перемещения точек срединной поверхности оболочки, имеющей форму полусферы. Оболочка подвешена за верхний край и заполнена жидкостью, удельный вес которой γ Н/см³ (рис. 7.13).

Рассмотрим часть оболочки, отсеченную по окружности, проходящей через произвольную точку M (см. рис. 7.13). На отсеченную часть действует вес жидкости в объеме сегмента

$$\gamma V = \gamma \pi R^3 \left(\frac{2}{3} - \cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta \right)$$

и сила давления выше расположенных слоев жидкости

$$p\pi r^2 = \gamma R^3 \pi \cos\theta \sin^2\theta,$$

где $p = \gamma R \cos\theta$ — давление жидкости;

$r = R \sin\theta$ — радиус окружности сечения.

Сложив эти две силы и разделив на 2π, получим функцию $F(\theta)$:

$$F(\theta) = \frac{\gamma R^3}{3}(1-\cos^3\theta).$$

Далее по формулам (7.23) и (7.24) определим усилия

$$T_m = \frac{F(\theta)}{R_t \sin^2\theta} = \frac{\gamma R^2 (1-\cos^3\theta)}{3\sin^2\theta};$$

$$T_t = pR_t - T_m \frac{R_t}{R_m} = \gamma R^2 \left(\cos\theta - \frac{1-\cos^3\theta}{3\sin^2\theta}\right).$$

Эпюры усилий T_m и T_t приведены на рис. 7.13.

Для обеспечения безмоментного состояния необходимо, чтобы верхний край полусферы мог свободно перемещаться в радиальном направлении.

Вычислим изменение радиуса окружности верхнего края и изменение высоты полусферы.

Предварительно определим относительные удлинения в меридиональном и окружном направлениях в произвольной точке. По формулам обобщенного закона Гука

$$\varepsilon_m = \frac{T_m - \mu T_t}{Eh} = \frac{\gamma R^2}{3Eh}\left[\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}(1+\mu) - 3\mu\cos\theta\right];$$

$$\varepsilon_t = \frac{T_t - \mu T_m}{Eh} = \frac{\gamma R^2}{3Eh}\left[3\cos\theta - \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}(1+\mu)\right].$$

Подставив значение ε_t в равенство (7.34), найдем радиальное перемещение в произвольной точке

$$\xi = \varepsilon_t R \sin\theta = \frac{\gamma R^3}{3Eh}\left[\frac{3}{2}\sin 2\theta - \frac{1-\cos^3\theta}{\sin\theta}(1+\mu)\right].$$

Изменение радиуса окружности верхнего края

$$\xi_{\theta=90^\circ} = -\frac{\gamma R^3(1+\mu)}{3Eh} = -0{,}43\frac{\gamma R^3}{Eh}.$$

Для определения осевого перемещения воспользуемся зависимостью (7.37), продифференцируем ξ по θ:

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\gamma R^3}{3Eh}\left[3\cos 2\theta - 3\cos^2\theta(1+\mu) - \frac{(1-\cos^3\theta)(1+\mu)\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]$$

и подставим $\frac{d\xi}{d\theta}$ и ε_m под знак интеграла (7.37). После несложных преобразований интеграл принимает вид

$$\eta = \int_{\theta}^{90^\circ} \frac{\gamma R^3}{3Eh}\left[(1+\mu)\,\mathrm{tg}\,\frac{\hat\theta}{2} + (2-\mu)\sin 2\hat\theta\right] d\hat\theta, \quad \text{где } \theta \leqslant \hat\theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Выполнив интегрирование и приняв $\mu = 0{,}3$, придем к следующему выражению для осевого перемещения произвольной точки относительно верхнего края:

$$\eta = \left(2{,}6 + 2{,}6\ln\cos\frac{\theta}{2} - 1{,}7\sin^2\theta\right)\frac{\gamma R^3}{3Eh}.$$

При $\theta = 0$ это выражение дает изменение высоты полусферы

$$\eta_{max} = 2{,}6\frac{\gamma R^3}{3Eh} = 0{,}86\frac{\gamma R^3}{Eh}.$$

Знак плюс указывает на то, что высота полусферы увеличивается.

Пример 7.3. Исследовать напряженное состояние в куполе, находящемся под действием сил собственного веса (рис. 7.14). Рассмотреть различные варианты формы купола (сфера, параболоид, эллипсоид).

Интенсивность поверхностной нагрузки q Н/см² разложим на нормальную и касательную составляющие: $p_1 = q\cos\theta$; $p_2 = q\sin\theta$.

Вычислим вес части купола, отсеченной по окружности текущего радиуса r:

$$P = \int_0^\theta 2\pi\hat{r}q\hat{R}_m\,d\theta = \int_0^\theta 2\pi q\hat{R}_m\hat{R}_t\sin\hat{\theta}\,d\hat{\theta},$$

где $\hat{R}_m$, $\hat{R}_t$, $\hat{\theta}$, $\hat{r}$ — текущие значения величин в интервале от $\hat{\theta}=0$ до $\hat{\theta}=\theta$.

Разделив вес P на 2π, получим функцию $F(\theta)$, по которой определяется меридиональное усилие [см. уравнение (7.23)]:

$$T_m = \frac{F(\theta)}{R_t\sin^2\theta} = -\frac{P}{2\pi R_t\sin^2\theta}.$$

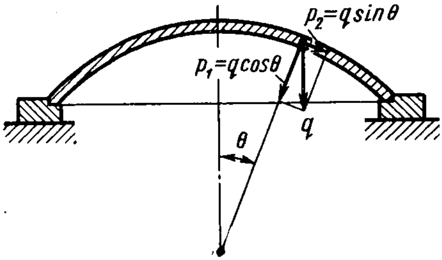


Рис. 7.14

По меридиональному усилию на основании уравнения Лапласа (7.15) найдем окружное усилие

$$T_t = p_1R_t - T_m\frac{R_t}{R_m}.$$

Для вычисления усилий T_m и T_t необходимо знать зависимость радиусов R_m и R_t от угла θ. Эта зависимость для всех указанных форм купола может быть выражена формулами (7.31), в которых параметр γ зависит от вида поверхности купола. При $\gamma = 0$ формулы (7.31) дают значения радиусов кривизны поверхности сферы: при $\gamma = -1$ — поверхности параболоида; при $\gamma > -1$ — поверхности эллипсоида; при $\gamma < -1$ — поверхности гиперболоида.

Для эллипсоида параметр γ связан с отношением полуосей $\frac{a}{b}$ соотношением

$$\gamma = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1.$$

Значения усилий T_m и T_t, вычисленные для четырех вариантов купола, указаны на рис. 7.15. Отношение высоты H к наружному радиусу a для всех четырех вариантов принято равным $^1/_2$.

На том же рисунке указаны значения горизонтальной составляющей меридиональной силы на краю купола (т. е. силы распора T_y).

Недостатком первого и второго варианта (см. рис. 7.15, *а* и *б*) купола является большая сила распора, для восприятия которой требуется мощное опорное кольцо.

Во втором варианте, кроме того, окружная сила на краю оболочки — отрицательна, а окружная деформация близка к нулю, в то время как окружная деформация опорного кольца положительна. Следовательно, во втором варианте безмоментное состояние около края не возможно ни при каком сечении опорного кольца.

В третьем варианте (см. рис. 7.15, *в*) сила распора равна нулю и поэтому опорное кольцо не требуется. Недостатком третьего варианта является то, что окружная сила на краю купола достигает больших положительных значений, поэтому край купола в этом варианте необходимо утолстить.

В четвертом варианте (см. рис. 7.15, *г*) распорная сила не очень велика; в то же время окружная сила — положительна. Следовательно, подобрав должным

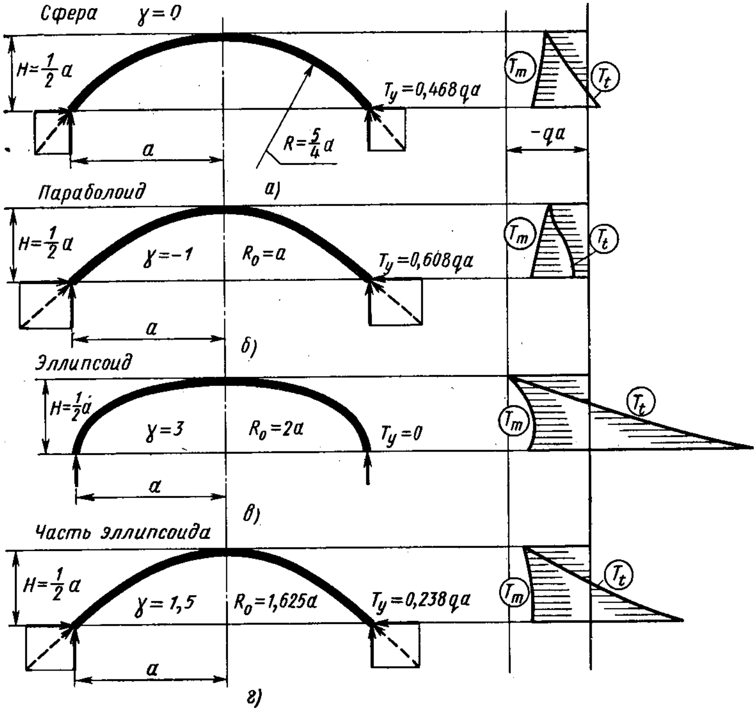


Рис. 7.15

образом сечение опорного кольца, можно добиться равенства окружных деформаций края оболочки и кольца и получить напряженное состояние, близкое к безмоментному.

Это позволяет сделать заключение, что из четырех рассмотренных вариантов последний имеет преимущество, хотя возможно, что он также не является оптимальным. Более подробные сведения о расчете куполов можно найти в книге [18], откуда заимствован проведенный выше пример.

§ 5. Осесимметричное кручение оболочек

Рассмотрим напряженное состояние оболочки, находящейся под действием поверхностной нагрузки p_3, касательной к окружности (рис. 7.16), а также краевых касательных сил S_0. Предположим, что нагрузка p_3 и интенсивность краевых сил S_0 по углу φ — постоянны.

Поскольку нормальные усилия T_m и T_t от p_3 и S не зависят, в данном случае они будут отсутствовать.

Сдвигающая сила в произвольном кольцевом сечении определяется на основании уравнения (7.17). Умножив правую и левую части этого уравнения на $2\pi r^2$ и проинтегрировав по s, получим

$$S2\pi r^2 = -\int_{s_0}^{s} p_3 2\pi r^2\, ds + C. \tag{7.41}$$

Нетрудно убедиться, что это равенство представляет собой уравнение равновесия части оболочки, изображенной на рис. 7.16.

Левая часть уравнения есть внутренний крутящий момент в сечении оболочки. Правая часть уравнения представляет собой момент внешних сил, причем первое слагаемое — это момент, создаваемый поверхностной нагрузкой; второе слагаемое равно моменту, приложенному к верхнему торцу. Если же верхний торец — свободен, то C равно нулю.

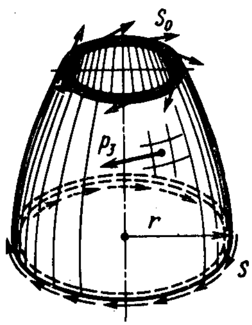


Рис. 7.16

Обозначим правую часть уравнения (7.41) через $M_{кр}$ и найдем из этого уравнения усилие S:

$$S = \frac{M_{кр}}{2\pi r^2}. \tag{7.42}$$

Этой сдвигающей силе соответствует касательное напряжение

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi r^2 h}. \tag{7.43}$$

Знаменатель правой части равенства представляет собой момент сопротивления кручению кольцевого сечения

$$W_{кр} = 2\pi r^2 h, \tag{7.44}$$

следовательно, формула (7.43) совпадает с общеизвестной формулой для касательного напряжения при кручении бруса

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}. \tag{7.45}$$

Для определения угла закручивания оболочки используем уравнение (7.20). Обозначим угол поворота текущего сечения через Φ. Используя равенства

$$v = \Phi r, \qquad \cos\theta = \frac{dr}{ds},$$

уравнению (7.20) можно придать следующий вид:

$$\frac{d(\Phi r)}{ds} - \Phi\frac{dr}{ds} = \frac{S}{Gh}$$

или

$$r\frac{d\Phi}{ds} = \frac{S}{Gh} = \frac{M_{кр}}{Gh\,2\pi r^2}.$$

Проинтегрировав это уравнение в пределах от s_0 до s, получим угол закручивания на участке от s_0 до s:

$$\Phi - \Phi_0 = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{M_{\text{кр}}\, ds}{G\,(2\pi r^3 h)}. \tag{7.46}$$

Величина, стоящая в знаменателе в скобках, равна полярному моменту инерции кольцевого сечения

$$J_{\text{p}} = 2\pi r^3 h. \tag{7.47}$$

Следовательно,

$$\Phi - \Phi_0 = \int\limits_{s} \frac{M_{\text{кр}}\, ds}{G J_{\text{p}}}. \tag{7.48}$$

Выражение (7.48) полностью совпадает с выражением угла закручивания бруса. Особенность состоит только в том, что интегрирование производится по дуге меридиана s.

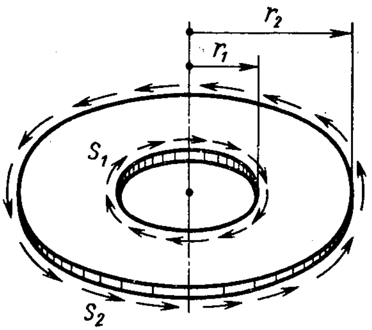


Рис. 7.17

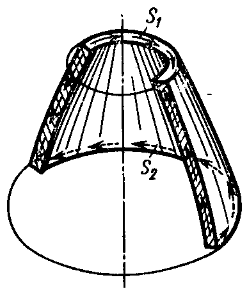


Рис. 7.18

Полученные формулы для напряжения (7.43) и угла закручивания (7.46) справедливы также при расчете диска на концентрическое кручение (рис. 7.17). Обозначим момент, передаваемый диском, через $M_{\text{кр}}$, тогда интенсивность сдвигающей силы на внутреннем и на наружном краях

$$S_1 = \frac{M_{\text{кр}}}{2\pi r_1^2}; \qquad S_2 = \frac{M_{\text{кр}}}{2\pi r_2^2}.$$

В произвольной точке диска интенсивность сдвигающей силы и касательное напряжение определяются по формулам (7.42) и (7.43).

Угол закручивания диска, т. е. поворот наружного края относительно внутреннего, может быть вычислен по формуле (7.46), в которой интегрирование по s должно быть заменено интегрированием по r.

Следует отметить, что при кручении оболочки в ее продольных (меридиональных) сечениях, согласно закону парности, также возникают касательные напряжения (рис. 7.18). Эти напряжения уравновешиваются касательными силами, приложенными к торцам.

§ 6. Несимметрично нагруженные оболочки вращения

При анализе напряженного и деформированного состояния несимметрично нагруженных оболочек вращения следует использовать общие уравнения безмоментной теории (7.5) — (7.14) в частных производных.

Уравнения равновесия (7.5) — (7.7) целесообразно представить в следующей форме:

$$T_t = p_1 R_t - \frac{R_t}{R_m} T_m; \tag{7.49}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}[T_m r \sin\theta] + \frac{\partial S}{r\partial\varphi}\sin\theta = p_x; \tag{7.50}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial s}[Sr^2] + \frac{1}{r}R_t\frac{\partial p_1}{\partial\varphi} - \frac{R_t}{rR_m}\cdot\frac{\partial T_m}{\partial\varphi} = -p_3. \tag{7.51}$$

Системы уравнений равновесия (7.49) — (7.51) и перемещений (7.12) — (7.14) могут быть приведены к двум дифференциальным уравнениям второго порядка с двумя неизвестными. Решение последних будет содержать четыре неопределенные функции от φ, которые должны быть определены согласно граничным условиям на краях. Для пояса оболочки необходимо иметь по два условия на каждом краю; для оболочки, замкнутой с одной стороны, два условия на краю и два в вершине. Граничные условия могут быть силовыми, геометрическими или смешанными. В силовых граничных условиях на краю должны быть заданы усилия T_m и S, а в геометрических — перемещения u и v (касательные перемещения). На перемещение w не должно быть наложено связей, так как в противном случае возникнут реактивные поперечные силы и напряженное состояние не будет безмоментным.

Если будут заданы два силовых граничных условия и два геометрических, то оболочка будет статически определима по отношению к внутренним усилиям. Это значит, что для определения внутренних усилий привлекать уравнения перемещений не требуется.

Если же будет задано три геометрических условия и одно силовое или все четыре условия геометрические, то оболочка будет один или два раза статически неопределима. В этом случае внутренние усилия могут быть определены только в результате совместного решения уравнений равновесия и перемещений.

Более подробно безмоментная теория оболочек вращения, нагруженных несимметричной нагрузкой, изложена в работе [19].

Пример 7.4. Исследовать напряженное состояние оболочки, представленной на рис. 7.19. Нагрузка, приложенная к верхнему краю, статически эквивалентна силе P и моменту M_0.

Нижний край оболочки закреплен так, что перемещения u и v запрещены (перемещение w не стеснено).

Заданная оболочка в целом работает на изгиб. Так как составляющие поверхности нагрузки p_1, p_2, p_3 в данном случае отсутствуют, уравнения равновесия (7.49)—(7.51) принимают вид

$$T_t = -\frac{R_t}{R_m} T_m; \tag{7.52}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(T_m r \sin\theta) + \frac{\partial s}{\partial \varphi}\sin\theta = 0; \tag{7.53}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial s}(Sr^2) - \frac{R_t}{rR_m}\frac{\partial T_m}{\partial \varphi} = 0. \tag{7.54}$$

Данная задача фактически сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений (7.53) и (7.54) с двумя неизвестными усилиями T_m и S. Усилие T_t в указанные уравнения не входит и легко определяется по усилию T_m согласно уравнению (7.52).

Для отыскания требуемого решения применим полуобратный метод Сен-Венана. Этот метод состоит в том, что одной из искомых функций задаются. Затем, используя одно из имеющихся уравнений, определяют вторую неизвестную функцию. Найденные таким образом две функции подставляют во второе уравнение, если последнее — удовлетворяется, то эти функции и будут искомым решением.

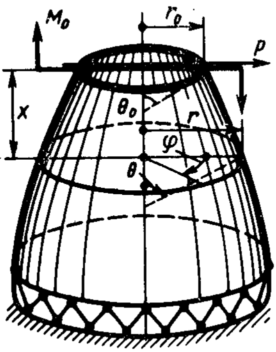


Рис. 7.19

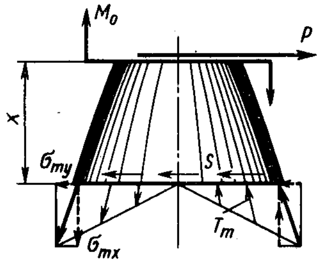


Рис. 7.20

Поскольку при кручении оболочки основные зависимости не отличаются от соответствующих зависимостей теории кручения бруса, предположим, что при изгибе оболочки формулы элементарной теории изгиба бруса также сохраняют свою силу.

Рассмотрим произвольное поперечное сечение, расположенное на расстоянии x от верхнего торца (рис. 7.20). Поверхность сечения будем считать перпендикулярной к срединной поверхности оболочки. В сечении возникает нормальное напряжение σ_m и касательное напряжение τ.

Разложим нормальное напряжение на две составляющие, параллельную и перпендикулярную оси оболочки:

$$\sigma_{mx} = \sigma_m \sin\theta;$$
$$\sigma_{my} - \sigma_m \cos\theta$$

и предположим, что составляющая σ_{mx} удовлетворяет общеизвестной зависимости теории изгиба бруса:

$$\sigma_{mx} = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{(M_0 + Px)}{\pi r^3 h}(-r\cos\varphi).$$

Тогда полное меридиональное напряжение в произвольной точке

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{mx}}{\sin\theta} = -\frac{(M_0 + Px)\cos\varphi}{\pi r^2 h \sin\theta}$$

и меридиональное усилие

$$T_m=\sigma_m h=-\frac{(M_0+Px)\cos\varphi}{\pi r^2\sin\theta}. \tag{7.55}$$

Подставив T_m в дифференциальное уравнение (7.53), определим из него сдвигающее усилие S:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{(M_0+Px)\cos\varphi}{\pi r}\right]+\frac{\partial S}{\partial\varphi}\sin\theta=0.$$

Учитывая, что $\frac{dr}{ds}=\cos\theta$ и $\frac{dx}{ds}=\sin\theta$, преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$\frac{\partial S}{\partial\varphi}=-\frac{(M_0+Px)\cos\theta\cos\varphi}{\pi r^2\sin\theta}+\frac{P\cos\varphi}{\pi r}.$$

Отсюда

$$S=-\frac{(M_0+Px)\cos\theta\sin\varphi}{\pi r^2\sin\theta}+\frac{P\sin\varphi}{\pi r}+C(\theta). \tag{7.56}$$

Функция $C(\theta)$ не зависит от угла φ и соответствует постоянной составляющей сдвигающей силы S; последняя может возникнуть при закручивании оболочки, но так как в данном случае крутящий момент равен нулю, то $C(\theta)$ также равно нулю.

Внесем теперь T_m и S во второе дифференциальное уравнение (7.54). Выполнив элементарные преобразования, найдем, что уравнение (7.54) обращается в тождество. Следовательно, найденные функции и есть искомое решение задачи. Это решение будет справедливо при условии, что заданная нагрузка, т. е. момент M_0 и сила P, будет приложена к торцу в виде распределенных нормальных и касательных сил, удовлетворяющих уравнениям (7.55) и (7.56):

$$\left.\begin{aligned} T_{m0}&=-\frac{M_0\cos\varphi}{\pi r_0^2\sin\theta_0};\\ S_0&=-\frac{M_0\operatorname{ctg}\theta_0\sin\varphi}{\pi r_0^2}+\frac{P\sin\varphi}{\pi r_0}. \end{aligned}\right\} \tag{7.57}$$

При ином характере распределения внешних сил по торцу решение можно представить как сумму найденного решения (основная часть) и наложенного на него дополнительного решения, соответствующего самоуравновешенной системе сил, получающейся при вычитании из фактически приложенных сил T_{m0} и S_0 — сил, удовлетворяющих уравнения (7.57).

В отличие от сплошного бруса система самоуравновешенных сил, приложенных к торцу, может оказывать существенное влияние на напряженное состояние оболочки на значительном расстоянии от торца.

Рассмотрим более подробно вопрос о касательном усилии S.

Из теории поперечного изгиба бруса известна формула для касательного напряжения

$$\tau_Q=\frac{QS_x^{(f)}}{J_x b}. \tag{7.58}$$

Если эту формулу применить к рассматриваемой задаче об изгибе оболочки и подставить в нее значения $Q=P$; $J_x=\pi r^3 h$; $b=2h$; $S_x^{(f)}=2\int\limits_0^{\varphi} hrd\hat{\varphi}r\cos\hat{\varphi}=$ $=2hr^2\sin\varphi$, то получится следующее значение напряжения:

$$\tau_Q=\frac{P\sin\varphi}{\pi rh}.$$

Этому напряжению соответствует интенсивность сдвигающей силы

$$S_Q = \tau_Q h = \frac{P \sin \varphi}{\pi r}.$$

Величина S_Q равна второму слагаемому выражения (7.56). Чтобы выяснить смысл первого слагаемого, обратимся к рис. 7.20. В сечении, ограничивающим часть оболочки снизу, действует нормальное усилие T_m и сдвигающее усилие S. Приведем нормальные усилия T_m к центру тяжести сечения; в результате получим изгибающий момент $M = M_0 + Px$ и, кроме того, силу, перпендикулярную оси оболочки:

$$P_1 = \int_0^{2\pi} T_m \cos\theta\, r\, d\varphi \cos \varphi = -\frac{(M_0 + Px)\cos\theta}{r \sin\theta}. \qquad (7.59)$$

Эта сила направлена влево, следовательно, она частично уравновешивает силу P и поэтому сдвигающая сила S должна уравновесить только оставшуюся часть поперечной силы, т. е. $(P - P_1)$. Следовательно, первое слагаемое в выражении (7.56) учитывает наличие составляющей меридиональных сил, перпендикулярной оси оболочки.

Окружное усилие определяется по меридиональному усилию на основании уравнения (7.52):

$$T_t = \frac{R_t}{R_m} \frac{(M_0 + Px)\cos\varphi}{\pi r^2 \sin\varphi}. \qquad (7.60)$$

Приведенное решение задачи об изгибе оболочки получено без использования гипотезы плоских сечений, на основе общих уравнений безмоментной теории оболочек. На этом основании можно заключить, что общие закономерности теории изгиба бруса остаются справедливыми также при изгибе оболочек вращения.

Пример 7.5. Применим полученные зависимости к задаче об изгибе конуса, изображенного на рис. 7.21, *а*. Так как в этом случае M_0 равно нулю и $r = x \operatorname{ctg} \theta$, то на основании уравнения (7.56):

$$S = -\frac{Px \operatorname{ctg}\theta}{\pi r^2} \sin\varphi + \frac{P \sin\varphi}{\pi r} = 0.$$

Равенство нулю сдвигающих усилий в поперечном сечении оболочки свидетельствует о том, что составляющая меридиональных усилий, перпендикулярная оси конуса, полностью уравновешивает поперечную силу P.

Окружные притягивающие усилия T_t на основании уравнения (7.55) при $R_m = \infty$ также равны нулю.

Таким образом, в стенке рассматриваемой конической оболочки возникают только меридиональные усилия (рис. 7.21, *б*)

$$T_m = -\frac{Px \cos\varphi}{\pi r^2 \sin\theta}.$$

Если рассматриваемую оболочку мысленно разделить продольными меридиональными плоскостями на ряд стержней, как показано на рис. 7.21, *в*, то стержни не будут взаимодействовать между собой, а будут работать только на растяжение или сжатие; следовательно, коническая оболочка, нагруженная силой P в вершине, работает как пространственная коническая ферма.

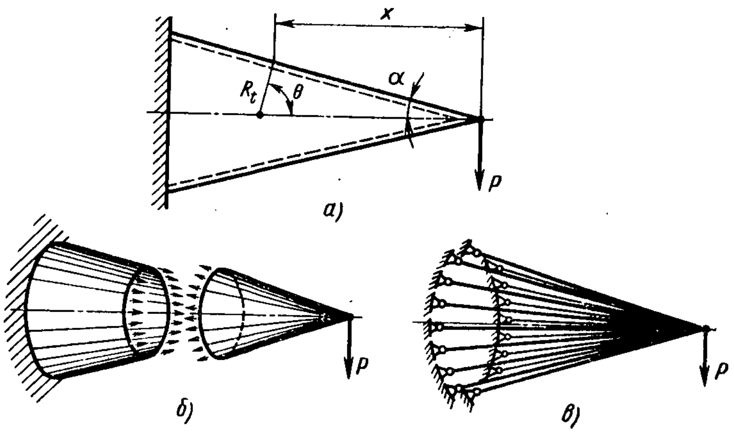


Рис. 7.21

Пример 7.6. На рис. 7.22 изображена цилиндрическая оболочка, нижний край которой закреплен неподвижно так, что касательные смещения u и v равны нулю. Верхний край усилен кольцом, имеющим большую жесткость на изгиб в своей плоскости и практически не стесняющим перемещения края оболочки в осевом направлении. Оболочка нагружена силой P, перпендикулярной оси оболочки, приложенной к кольцу.

При решении данной задачи не будем пользоваться полуобратным методом Сен-Венана, а решим задачу прямым путем.

Уравнения равновесия безмоментной теории оболочек вращения (7.49)—(7.51) при $p_1 = p_2 = p_3 = 0$; $\sin\theta = 1$; $(\theta = \frac{\pi}{2})$; $R_m = \infty$; $s = x$ и $r = \text{const}$ принимают вид

$$T_2 = 0; \qquad (7.61)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial x} + \frac{\partial S}{r\partial\varphi} = 0; \qquad (7.62)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \qquad (7.63)$$

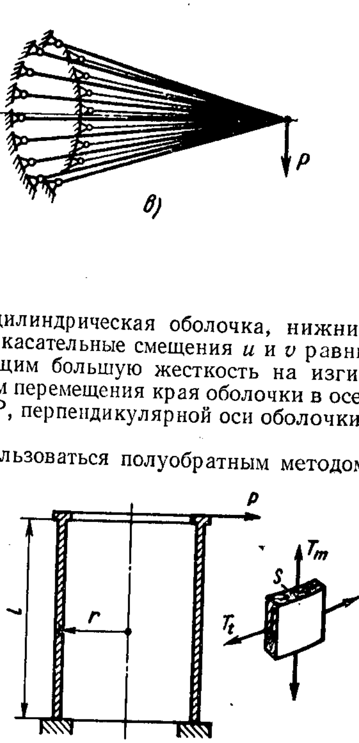


Рис. 7.22

и уравнения деформаций (7.12)—(7.14) соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{T_m}{Eh}; \qquad (7.64)$$

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{w}{r} = -\frac{\mu T_m}{Eh}; \qquad (7.65)$$

$$\frac{\partial u}{r\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{S}{Gh}. \qquad (7.66)$$

Координата x отсчитывается вдоль оси цилиндра от верхнего торца.

Проинтегрируем уравнение (7.63) по x:

$$S=\Phi_1(\varphi),$$

где $\Phi_1(\varphi)$ — неизвестная функция от φ.

Подставим $S=\Phi_1(\varphi)$ в уравнение (7.62) и снова проинтегрируем по x:

$$T_m=-\frac{1}{r}x\Phi_1'(\varphi)+\Phi_2(\varphi),$$

где $\Phi_2(\varphi)$ — новая неизвестная функция от φ.

Считая, что кольцо не оказывает сопротивления осевым смещениям края цилиндра, получим следующее граничное условие на верхнем торце:

при $x=0$ $\qquad T_m=0,$

откуда следует $\Phi_2(\varphi)=0$.

Для определения $\Phi_1(\varphi)$ необходимо использовать остальные граничные условия. Поскольку эти условия геометрического характера, обратимся к уравнениям деформаций.

Подставим T_m в уравнение (7.64) и проинтегрируем по x; в результате определим u:

$$u=-\frac{1}{r}\cdot\frac{x^2}{2Eh}\Phi_1'(\varphi)+\Phi_3(\varphi),$$

где $\Phi_3(\varphi)$ — новая неизвестная функция от φ. Наконец, из уравнения (7.66), учитывая, что $S=\Phi_1(\varphi)$, найдем v:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{r\,\partial\varphi}+\frac{S}{Gh}=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x^2}{2Eh}\Phi_1''(\varphi)-\frac{1}{r}\Phi_3'(\varphi)+\frac{\Phi_1(\varphi)}{Gh};$$

$$v=\frac{1}{r^2}\frac{x^3}{6Eh}\Phi_1''(\varphi)-\frac{1}{r}x\Phi_3'(\varphi)+\frac{\Phi_1(\varphi)}{Gh}x+\Phi_4(\varphi);$$

здесь $\Phi_4(\varphi)$ — еще одна неизвестная функция от φ.

Используем граничные условия на нижнем торце цилиндра:

при $x=l$ $\quad u=0;$

при $x=l$ $\quad v=0.$

Согласно этим условиям

$$\Phi_3(\varphi)=\frac{l^2}{r2Eh}\Phi_1'(\varphi);$$

$$\Phi_4(\varphi)=-\frac{l^3}{6r^2Eh}\Phi_1''(\varphi)+\frac{l^3}{2r^2Eh}\Phi_1''(\varphi)-\frac{l}{Gh}\Phi_1(\varphi)=$$
$$=\frac{l^3}{3Er^2h}\Phi_1''(\varphi)-\frac{l}{Gh}\Phi_1(\varphi).$$

После подстановки функций Φ_3 и Φ_4 выражения перемещений v и u принимают следующий вид:

$$u=\frac{1}{2rEh}(l^2-x^2)\Phi_1'(\varphi);$$

$$v=\frac{1}{r^2Eh}\Phi_1''(\varphi)\left[\frac{x^3}{6}-\frac{l^2x}{2}+\frac{l^3}{3}\right]-\frac{(l-x)}{Gh}\Phi_1(\varphi).$$

Теперь все величины выражены через одну неизвестную функцию $\Phi_1(\varphi)$. Эту последнюю следует найти из оставшегося неиспользованным граничного условия на верхнем торце цилиндра, согласно которому при $x=0$ перемещения v точек края цилиндра должны быть равны перемещениям соответствующих точек кольца.

Рассмотрим случай, когда кольцо можно считать абсолютно жестким (при изгибе в его плоскости): предположим, что под действием силы P оно сместилось на величину f (рис. 7.23, *а*). Тогда перемещение v на верхнем торце будет

$$v_{(x=0)}=-f\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$\frac{l^3}{3r^2Eh}\Phi_1''(\varphi)-\frac{l}{Gh}\Phi_1(\varphi)=-f\sin\varphi.$$

Найдем решение этого уравнения. Общее решение соответствующего однородного уравнения может быть представлено в гиперболических функциях от φ. Но так как $\Phi_1(\varphi)=S(\varphi)$ должна быть периодической функцией с периодом,

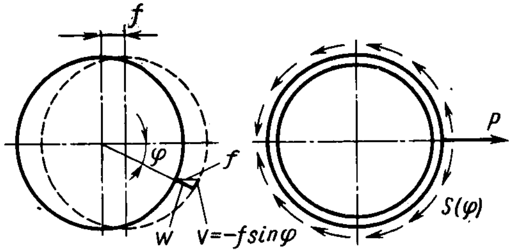


Рис. 7.23 а) б)

кратным 2π, то решение однородного уравнения следует отбросить. Остается частное решение уравнения с правой частью. Последнее имеет вид

$$S=\Phi_1(\varphi)=\frac{f}{\dfrac{l^3}{3r^2Eh}+\dfrac{l}{Gh}}\sin\varphi.$$

Таким образом, мы получили зависимость между сдвигающей силой S и величиной смещения центра кольца f. Чтобы выяснить зависимость этих величин от величины силы P, рассмотрим равновесие кольца (рис. 7.23, *б*). Приравняв нулю сумму проекций сил на горизонтальную ось, найдем

$$\int_0^{2\pi} Sr\,d\varphi\sin\varphi=P$$

или

$$\int_0^{2\pi}\frac{f\sin^2\varphi\, r\,d\varphi}{\left[\dfrac{l^3}{3r^2Eh}+\dfrac{l}{Gh}\right]}=P,$$

откуда смещение центра кольца

$$f=\frac{Pl^3}{3\pi r^3hE}+\frac{Pl}{\pi rhG}.$$

Внеся это выражение в найденные ранее зависимости, получим

$$S=\Phi_1(\varphi)=\frac{P}{\pi r}\sin\varphi;$$

$$T_m=-\frac{Px}{\pi r^2}\cos\varphi;$$

$$v=-\left[\frac{P}{\pi r^3hE}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{l^2x}{2}+\frac{l^3}{3}\right)+\frac{P}{\pi rhG}(l-x)\right]\sin\varphi;$$

$$u=\frac{P}{2\pi r^2hE}(l^2-u^2)\cos\varphi.$$

Радиальное перемещение w определяется на основании уравнения (7.65):

$$w = -\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \mu \frac{T_m r}{Eh}.$$

Нетрудно убедиться, что все полученные выражения для усилий и перемещений точно совпадают с соответствующими выражениями элементарной теории изгиба бруса. Действительно, изгибающему моменту $M = Px$ соответствует меридиональное усилие

$$T_m = \sigma_x h = \frac{M}{J_x} yh = \frac{Px}{\pi r^3 h}(-r \cos \varphi)\, h.$$

Поперечной силе $Q = P$ соответствует сдвигающее усилие

$$S = \tau h = \frac{QS_x^{(f)}}{J_x b} h = \frac{P 2hr^2 \sin \varphi\, h}{\pi r^3 h 2h} = \frac{P}{\pi r} \sin \varphi.$$

Также нетрудно убедиться, что первое слагаемое в формуле для v соответствует перемещению за счет изгиба, а второе — за счет сдвига, вызванного поперечной силой.

Величина перемещения u равна произведению угла поворота поперечного сечения на расстояние $y = r \cos \varphi$ от рассматриваемой точки до нейтральной линии. Наконец, перемещение w складывается из основного слагаемого $\left(-\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$, учитывающего изгиб оболочки, и дополнительного члена $\mu \frac{T_m r}{Eh}$, учитывающего эффект поперечной деформации при действии нормальных напряжений в продольном направлении.

На основании изложенного можно сделать следующее общее заключение. Если поперечная нагрузка передается на оболочку через жесткое кольцо, то оболочку можно рассчитывать на изгиб по обычным формулам теории изгиба бруса.

При малой изгибной жесткости кольца задачу целесообразно решать в рядах. При этом необходимо использовать условия совместности деформаций оболочки и кольца.

Остановимся кратко на вопросе о расчете по безмоментной теории оболочек вращения, нагруженных неосесимметричной поверхностной нагрузкой: $p_1 = p_1(\varphi, s)$; $p_2 = p_2(\varphi, s)$; $p_3 = p_3(\varphi, s)$.

Представим составляющие поверхностной нагрузки p_1, p_2, p_3 в виде рядов Фурье:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{p}_{1k} \cos k\varphi + \bar{\bar{p}}_{1k} \sin k\varphi]; \\ p_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{p}_{2k} \cos k\varphi + \bar{\bar{p}}_{2k} \sin k\varphi]; \\ p_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{p}_{3k} \sin k\varphi + \bar{\bar{p}}_{3k} \cos k\varphi]. \end{aligned}\right\} \quad (7.67)$$

Коэффициенты рядов $\bar{p}_{1k}$, $\bar{p}_{2k}$ и т. д. представляют собой функции только угла θ или дуги s. Их определяют обычными методами, применяемыми при разложении функций в ряды.

Первые слагаемые выражений (7.67) соответствуют симметричным составляющим нагрузки; вторые — обратно симметричным.

Таким образом решение задачи о напряжениях и деформациях произвольно нагруженной оболочки сводится к нахождению решения для нагрузки вида

$$p_1 = \bar{p}_{1k} \cos k\varphi; \quad p_2 = \bar{p}_{2k} \cos k\varphi; \quad p_3 = \bar{p}_{3k} \sin k\varphi, \tag{7.68}$$

соответствующей k-ым членам рядов (7.67).

Подставим компоненты нагрузки (7.68) в общие уравнения безмоментной теории (7.49) — (7.51):

$$T_t = \bar{p}_{1k} \cos k\varphi R_t - \frac{R_t}{R_m} T_m; \tag{7.69}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (T_m r \sin \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \sin \theta = [\bar{p}_{1k} \cos \theta - \bar{p}_{2k} \sin \theta] \cos k\varphi; \tag{7.70}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial s} (Sr^2) - \frac{R_t}{r} k\bar{p}_{1k} \sin k\varphi - \frac{R_t}{rR_m} \frac{\partial T_m}{\partial \varphi} = -\bar{p}_{3k} \sin k\varphi. \tag{7.71}$$

Решение этой системы уравнений ищем в следующем виде:

$$T_m = \bar{T}_{mk} \cos k\varphi; \quad S = \bar{S}_k \sin k\varphi, \tag{7.72}$$

где $\bar{T}_{mk}$, $\bar{S}_k$ — функции только θ (или s).

В результате подстановки выражений (7.72) в уравнения (7.70) и (7.71) и сокращения соответственно на $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ придем к системе двух дифференциальных уравнений в обыкновенных производных:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{ds} (\bar{T}_{mk} r \sin \theta) + \frac{k}{r} \bar{S}_k \sin \theta - \\ - (\bar{p}_{1k} \cos \theta - \bar{p}_{2k} \sin \theta) = 0; \tag{7.73}$$

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{ds} (\bar{S}_k r^2) - \frac{p_{1k} R_t k}{r} + \frac{R_t}{R_m r} \bar{T}_{mk} k + \bar{p}_{3k} = 0. \tag{7.74}$$

Приведем эти уравнения к одному уравнению с одним неизвестным. Чтобы исключить S, умножим первое уравнение на $\frac{r^3}{k \sin \theta}$ и продифференцируем по s, а второе — на $(-r^2)$, затем оба уравнения сложим; одновременно введем новую неизвестную функцию

$$\bar{T}_{mk} r \sin \theta = U_k(\theta), \tag{7.75}$$

а также заменим дифференцирование по s дифференцированием по θ.

В результате получим дифференциальное уравнение с неизвестной функцией U_k:

$$k \frac{d}{R_m d\theta} \left[\frac{R_t^2 \sin \theta}{R_m} \cdot \frac{dU_k}{d\theta} \right] - \frac{k^2 R_t}{R_m \sin \theta} U_k = \\ = \frac{1}{R_m} \cdot \frac{d}{d\theta} [(\bar{p}_{1k} \cos \theta - \bar{p}_{2k} \sin \theta) R_t^3 \sin^2 \theta] - \\ - k^2 \bar{p}_{1k} R_t^2 \sin \theta + k\bar{p}_{3k} R_t^2 \sin^2 \theta. \tag{7.76}$$

Если по уравнению (7.76) функция U_k будет найдена, то по зависимости (7.75) можно определить меридиональное усилие $\bar{T}_{mk}$; затем по уравнению (7.73) — сдвигающее усилие $\bar{S}_k$ и по уравнению (7.69) — окружное нормальное усилие $\bar{T}_{tk}$. В полученных таким образом выражениях будут содержаться две произвольные постоянные. Последние определяются на основании граничных условий на краях оболочки. При этом, если будут заданы геометрические граничные условия (т. е. заданы смещения u и v), то необходимо аналогичным способом получить решение системы уравнений перемещений (7.12) — (7.14) и определять уже не две, а четыре постоянные.

Пример 7.7. Применим изложенную теорию к задаче о напряжениях, возникающих в оболочке вращения при действии ветровой нагрузки. Ветровой называется поверхностная нагрузка вида

$$\left.\begin{aligned} p_1&=\bar{p}_1\cos\varphi;\\ p_2&=\bar{p}_2\cos\varphi;\\ p_3&=\bar{p}_3\sin\varphi,\end{aligned}\right\} \qquad (7.77)$$

где $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$ — функции, зависящие только от θ.

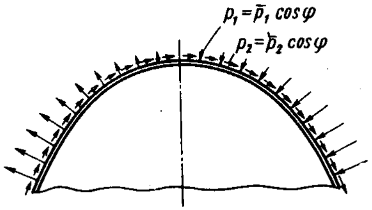


Рис. 7.24

Эта нагрузка представляет собой наиболее простой частный случай несимметричной поверхностной нагрузки. Некоторое представление о характере ветровой нагрузки дает рис. 7.24, где показана оболочка в разрезе с действующими на нее нагрузками p_1 и p_2 (функция — $\bar{p}_1$ в данном случае — отрицательная). Вместо рядов (7.67) в данном случае имеется только по одному слагаемому, соответствующему $k = 1$.

Разделив дифференциальное уравнение (7.76) на $R_t \sin\theta$ и положив $k = 1$, преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{1}{R_t\sin\theta R_m}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[\frac{R_t^2\sin\theta}{R_m}\cdot\frac{dU}{d\theta}\right]-\frac{1}{R_m\sin^2\theta}U=F(\theta), \qquad (7.78)$$

где $F(\theta)$ — функция поверхностной нагрузки;

$$F(\theta)=\frac{1}{R_t\sin\theta R_m}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[(\bar{p}_1\cos\theta-\bar{p}_2\sin\theta)R_t^3\sin^2\theta\right]- \\ -\bar{p}_1R_t+\bar{p}_3R_t\sin\theta. \qquad (7.79)$$

Введем новую переменную

$$Y=Ur=UR_t\sin\theta. \qquad (7.80)$$

Тогда

$$U=\frac{Y}{R_t\sin\theta};\quad \frac{dU}{d\theta}=\frac{dY}{d\theta}\cdot\frac{1}{R_t\sin\theta}-Y\frac{R_m\cos\theta}{R_t^2\sin^2\theta}.$$

Здесь учтено, что

$$\frac{d(R_t\sin\theta)}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}=\frac{dr}{ds}R_m=R_m\cos\theta.$$

После замены переменной дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{R_tR_m\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[(R_t\sin\theta)\left(\frac{1}{R_m\sin\theta}\cdot\frac{dY}{d\theta}\right)-Y\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]- \\ -\frac{1}{R_m\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{R_t\sin\theta}Y=F(\theta)$$

или после простых преобразований

$$\frac{1}{R_m}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{R_m \sin\theta}\,\frac{dY}{d\theta}\right)=F(\theta). \tag{7.81}$$

Интегрирование этого уравнения не вызывает затруднений. После первого интегрирования

$$\frac{1}{R_m \sin\theta}\cdot\frac{dY}{d\theta}=\int F(\theta)\,R_m d\theta+C_1$$

и после второго интегрирования

$$Y=\int\left[R_m \sin\theta\int F(\theta)\,R_m\,d\theta+R_m \sin\theta C_1\right]d\theta+C_2. \tag{7.82}$$

Предположим, что оболочка имеет сферическую форму ($R_m = R_t = R$) и что составляющие нагрузки p_2 и p_3 равны нулю, а составляющая p_1 определяется равенством

$$p_1=-p\sin\theta\cos\varphi,\quad \text{т. е.}\quad \bar{p}_1=-p\sin\theta.$$

В этом случае функция $F(\theta)$ [см. уравнение (7.79)] принимает вид

$$F(\theta)=\frac{1}{R^2\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(-p\sin\theta\cos\theta R^3\sin^2\theta)+p\sin\theta\,R=$$
$$=pR\sin\theta\,(2-4\cos^2\theta).$$

Подставим $F(\theta)$ под знак интеграла (7.82) и выполним интегрирование:

$$Y=pR^3\int\left[\sin\theta\int\sin\theta\,(2-4\cos^2\theta)\,d\theta\right]d\theta+RC_1\int\sin\theta d\theta+C_2=$$
$$=pR^3\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\cos^4\theta\right)-RC_1\cos\theta+C_2. \tag{7.83}$$

Вычислим еще производную функции Y:

$$\frac{dY}{d\theta}=-pR^3\left(2\cos\theta-\frac{4}{3}\cos^3\theta\right)\sin\theta+RC_1\sin\theta. \tag{7.84}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 используем условия симметрии относительно плоскости $\varphi=0$ и обратной симметрии относительно плоскости $\varphi=90°$. На основании этих условий при $\theta=0$ должно обращаться в нуль как меридиональное усилие $\bar{T}_m$, так и сдвигающее усилие $\bar{S}$.

Согласно равенствам (7.75) и (7.80), можно записать

$$Y=\bar{T}_m R^2\sin^3\theta. \tag{7.85}$$

Но при $\theta=0$, $\bar{T}_m=0$ и, кроме $\sin\theta=0$, следовательно,

$$Y(0)=0,$$

откуда с учетом равенства (7.83):

$$pR^3\left(1-\frac{1}{3}\right)-RC_1+C_2=0. \tag{7.86}$$

Чтобы получить второе уравнение с неизвестными C_1, C_2, продифференцируем равенство (7.85) по θ и разделим на $\sin\theta$:

$$\frac{dY}{d\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{d\bar{T}_m}{d\theta}R^2\sin^2\theta+\bar{T}_m R^2\cdot 3\sin\theta. \tag{7.87}$$

При $\theta=0$ правая часть равенства (7.87), очевидно, обращается в нуль. С другой стороны эта же величина может быть выражена через C_1 из уравнения (7.84):

$$\frac{dY}{d\theta}\frac{1}{\sin\theta}=-pR^3\left(2\cos\theta-\frac{4}{3}\cos^3\theta\right)+RC_1.$$

При $\theta=0$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\right]=0=-pR^3\left(2-\frac{4}{3}\right)+RC_1.$$

Отсюда

$$C_1=\frac{2}{3}pR^2$$

и тогда из уравнения (7.86):

$$C_2=0.$$

Выражения искомых функций имеют следующий вид:

$$Y=pR^3\left[\cos^2\theta-\frac{1}{3}\cos^4\theta-\frac{2}{3}\cos\theta\right];$$

$$\bar{T}_m=\frac{pR}{\sin^3\theta}\left[\cos^2\theta-\frac{1}{3}\cos^4\theta-\frac{2}{3}\cos\theta\right],\quad T_m=\bar{T}_m\cos\varphi;$$

$$\bar{S}=\frac{pR}{\sin^3\theta}\left[\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta-\frac{2}{3}\right];\quad S=\bar{S}\sin\varphi;$$

$$\bar{T}_t=-pR\sin\theta-\bar{T}_m;\quad T_t=\bar{T}_t\cos\varphi.$$

Эпюры внутренних усилий по углу θ приведены на рис. 7.25.

Приведенное решение получено без учета граничных условий на

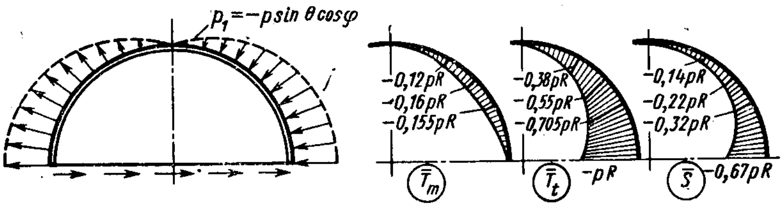


Рис. 7.25

нижнем краю оболочки. Следовательно, оно будет справедливо в том случае, когда силы T_m и S, приложенные к нижнему краю, будут распределены по закону $T_m=\bar{T}_m\cos\varphi$; $S=\bar{S}\sin\varphi$.

Решение рассмотренной задачи о напряжениях в куполе под действием ветровой нагрузки можно получить также другим более простым способом, а именно, рассматривая равновесие части купола, отсеченной по окружности текущего радиуса (рис. 7.26). Будем по-прежнему считать, что купол имеет сферическую форму и что

$$p_2=p_3=0\quad\text{и}\quad p_1=\bar{p}\cos\varphi,$$

где

$$\bar{p}=-p\sin\theta\quad(p=\text{const}).$$

Кроме давления p_1, на отсеченную часть действуют распределенные по краю силы T_m и S.

Так как зависимость давления p_1 от угла φ определяется законом косинуса, то очевидно, что меридиональное усилие T_m (симметричный фактор) также изменяется по закону косинуса, а сдвигающее усилие S (обратно симметричный фактор) — по закону синуса, т. е.

$$T_m = \overline{T}_m \cos\varphi; \quad S = \overline{S} \sin\varphi.$$

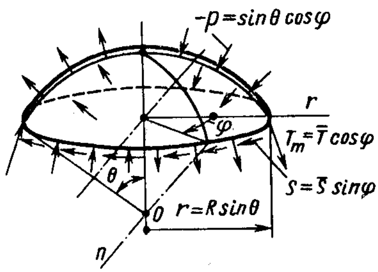


Рис. 7.26

Составим уравнения равновесия отсеченной части купола. Приравняв нулю сумму проекций сил на ось r, перпендикулярную оси оболочки, расположенную в плоскости $\varphi = 0$ (см. рис. 7.27), получим

$$\int_0^{2\pi} \overline{S} \sin\varphi R \sin\theta \, d\varphi \sin\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \overline{T}_m \cos\varphi R \sin\theta \, d\varphi \cos\theta \cos\varphi -$$

$$- \int_0^{\theta} \int_0^{2\pi} p \sin\hat{\theta} \cos\varphi R \sin\hat{\theta} \, d\varphi R d\hat{\theta} \sin\hat{\theta} \cos\varphi = 0,$$

где $$0 \leqslant \hat{\theta} \leqslant \theta.$$

Выполнив интегрирование и произведя сокращения, найдем

$$-\overline{S} \sin\theta + \overline{T}_m \sin\theta \cos\theta = pR\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta + \frac{2}{3}\right).$$

Второе уравнение получим, взяв сумму моментов сил относительно оси n, перпендикулярной плоскости $\varphi = 0$ и проходящей через центр сферы:

$$-\left[\int_0^{2\pi} \overline{S} \sin\varphi R \sin\theta \, d\varphi \sin\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \overline{T}_m \cos\varphi R \sin\theta \, d\varphi \cos\theta \cos\varphi \right] R \cos\theta = 0.$$

Момент сил давления относительно этой оси равен нулю, так как линия действия этих сил проходит через центр сферы. После интегрирования и сокращений найдем

$$-\overline{S} + \overline{T}_m \cos\theta = 0.$$

Решение полученной системы двух уравнений дает значения усилий

$$\bar{T}_m = -\frac{pR\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta + \frac{2}{3}\right);$$

$$\bar{S} = \frac{\bar{T}_m}{\cos\theta}.$$

Окружное усилие T_t определяется по усилию T_m на основании уравнения Лапласа:

$$T_t = -T_m - p\sin\theta.$$

Этот результат полностью совпадает с результатом, полученным методом интегрирования дифференциальных уравнений.

Глава 8 МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Вывод основных уравнений

Цилиндрические оболочки (тонкостенные цилиндры) представляют собой наиболее распространенный вид оболочек вращения. Ввиду того, что теория цилиндрических оболочек значительно проще, чем оболочек другой формы, в настоящей главе эта теория рассмотрена отдельно от общего случая.

Осесимметричная изгибная деформация оболочки возникает в местах приложения внешних кольцевых нагрузок (рис. 8.1, *а*), а также в местах закрепления или сопряжения с другими конструктивными (рис. 8.1, *б*, *в* и *г*) элементами.

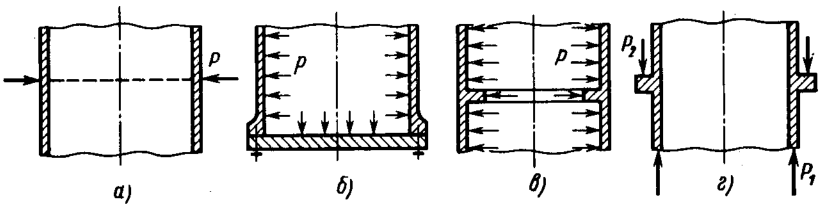


Рис. 8.1

Теория осесимметричной деформации цилиндрических оболочек основана на гипотезах Кирхгофа — Лява, аналогичных гипотезам, используемым в теории изгиба пластин.

1. *Гипотеза неизменности нормалей.* Принимают, что нормали к срединной поверхности оболочки не искривляются и остаются перпендикулярными к деформированной срединной поверхности. Эта гипотеза устанавливает связь между деформированным состоянием в произвольной точке стенки оболочки и изменением геометрии ее срединной поверхности и позволяет таким образом свести исследование деформации оболочки к исследованию деформации ее срединной поверхности.

2. *Гипотеза о ненадавливании одного слоя оболочки на другой.* Согласно этой гипотезе, нормальные напряжения в площадках, параллельных срединной поверхности, считают равными нулю, т. е. напряженное состояние рассматривают как плоское вместо объемного.

Указанные гипотезы выполняются достаточно удовлетворительно при условии, что толщина оболочки мала по сравнению с радиусом цилиндра и что перемещения точек срединной поверхности малы по сравнению с толщиной. Если наибольшую допустимую погрешность расчета принять равной 5%, то к тонкостенным следует отнести оболочки, толщина которых не превышает $^1/_{20}$ радиуса.

Кроме перечисленных гипотез и допущений примем, что материал оболочки однородный, изотропный и подчиняющийся закону Гука.

Введем обозначения:

r — радиус цилиндра (средний);

h — толщина стенки цилиндра;

x — координата, отсчитываемая от торца в направлении оси цилиндра;

u, w — перемещения произвольной точки срединной поверхности в осевом и в радиальном направлениях.

Выразим относительные деформации в произвольном слое оболочки, расположенном на расстоянии z от срединной поверхности, через перемещения (z будем считать положительным по направлению к центру). На рис. 8.2 изображен бесконечно малый элемент оболочки до и после деформации.

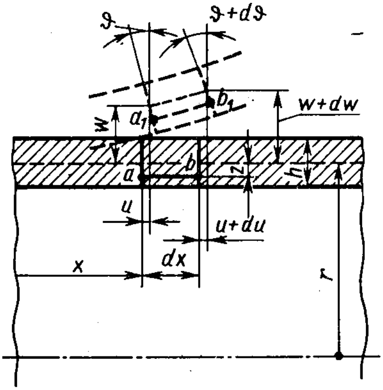


Рис. 8.2

Относительная деформация волокна ab в осевом направлении

$$\varepsilon_x = \frac{du + d\vartheta z}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} z, \qquad (8.1)$$

где $\vartheta = \frac{dw}{dx}$ — угол поворота нормали.

Относительная деформация в окружном направлении определяется как отношение приращения длины окружности, проходящей через произвольную точку a, к первоначальной длине

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r - z + w) - 2\pi(r - z)}{2\pi(r - z)} = \frac{w}{r - z}$$

или ввиду тонкостенности

$$\varepsilon_t = \frac{w}{r}. \qquad (8.2)$$

Перейдем от деформаций к напряжениям. При $\sigma_z = 0$ формулы закона Гука имеют вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_t);$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_x).$$

Подставив в эти уравнения выражения деформаций (8.1) и (8.2), получим

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dx}+\frac{d^2w}{dx^2}z+\mu\frac{w}{r}\right);\qquad(8.3)$$

$$\sigma_t=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{r}+\mu\frac{du}{dx}+\mu\frac{d^2w}{dx^2}z\right).\qquad(8.4)$$

Напряженное состояние элемента оболочки показано на рис. 8.3.

Кроме напряжений σ_x и σ_t, в произвольном слое возникает еще касательное напряжение τ_{xz}. Это напряжение обычно бывает мало по сравнению с нормальными напряжениями и в расчетах на прочность не учитывается. Существенную роль играет только равнодействующая касательного напряжения τ_{xz} — поперечная сила Q, которая входит в уравнения равновесия элемента оболочки.

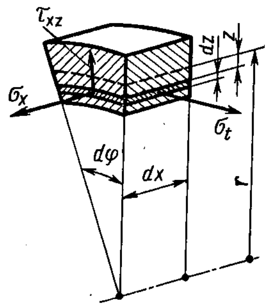


Рис. 8.3

Перейдем от напряжений к внутренним силовым факторам. При интегрировании по толщине оболочки напряжения σ_x, σ_z приводятся к нормальным усилиям T_x и T_t и изгибающим моментам M_x и M_t:

$$T_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x\,dz=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dx}+\mu\frac{w}{r}\right);\qquad(8.5)$$

$$T_t=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_t\,dz=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{r}+\mu\frac{du}{dx}\right);\qquad(8.6)$$

$$M_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x z\,dz=D\frac{d^2w}{dx^2};\qquad(8.7)$$

$$M_t=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_t z\,dz=\mu D\frac{d^2w}{dx^2}=\mu M_x,\qquad(8.8)$$

где D — изгибная жесткость оболочки;

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.\qquad(8.9)$$

Исключив из уравнений (8.5) и (8.6) перемещение u, получим выражение окружного усилия T_t через w и T_x:

$$T_t=\mu T_x+\frac{Ehw}{r}.\qquad(8.10)$$

Уравнения (8.7), (8.8) и (8.10) содержат пять неизвестных величин: M_x, M_t, T_x, T_t, w.

Чтобы получить недостающие уравнения, рассмотрим равновесие элементарного объема, выделенного из оболочки двумя продольными и двумя поперечными сечениями (рис. 8.4). Кроме сил T_x и T_t и моментов M_x и M_t, на элемент действуют силы поверхностной нагрузки $p_1 dxrd\varphi$ и $p_2 dxrd\varphi$ (нагрузка p_1, нормальная к поверхности, создается внутренним или наружным давлением; нагрузка p_2, направленная вдоль оси оболочки, может возникнуть за счет сил трения или за счет собственного веса при вертикальном расположении оболочки).

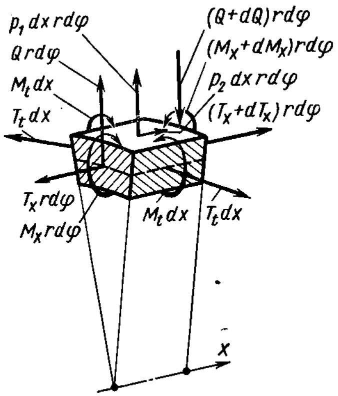


Рис. 8.4

Из шести уравнений равновесия в данном случае можно составить только три: уравнение проекций сил на направления r и x и уравнение моментов относительно оси y, касательной к окружности:

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{T_t}{r} = p_1; \tag{8.11}$$

$$\frac{dT_x}{dx} = p_2; \tag{8.12}$$

$$\frac{dM_x}{dx} = Q. \tag{8.13}$$

Остальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

При решении полученной системы уравнений осевую силу T_x можно считать известной, так как она может быть определена заранее по уравнению (8.12). Действительно, умножив обе части уравнения на $2\pi r$ и проинтегрировав по x, найдем

$$2\pi r T_x = \int p_2 2\pi r \, dx + C.$$

Это уравнение представляет собой уравнение равновесия части оболочки, отсеченной по кругу $x = \text{const}$. Первое слагаемое в пра-

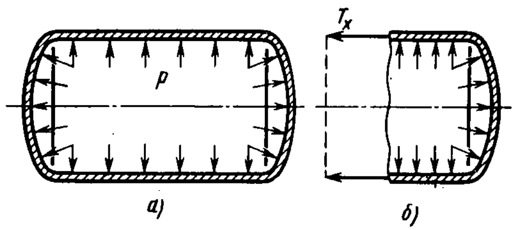


Рис. 8.5

вой части равенства представляет собой интеграл от поверхностных осевых сил; второе — учитывает силы, приложенные к торцу.

Если, например, цилиндрическая оболочка с днищем нагружена равномерным внутренним давлением (рис. 8.5, *а*), то, отделив часть оболочки (рис. 8.5, *б*), можно написать следующее уравнение равновесия:

$$-T_x 2\pi r + p\frac{\pi r_{вн}^2}{4} = 0,$$

откуда, считая $r_{вн} = r$, найдем

$$T_x = \frac{pr}{2}.$$

Приведем систему уравнений деформаций и равновесия к одному уравнению с одним неизвестным. Из уравнения (8.13), с учетом равенства (8.7) следует

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = D\frac{d^3w}{dx^3}. \qquad (8.14)$$

Выражения (8.10) и (8.14) подставим в уравнение (8.11), тогда

$$p_1 r - Dr\frac{d^4w}{dx^4} - \mu T_x - \frac{Ehw}{r} = 0,$$

или

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = -\frac{\mu T_x}{Dr} + \frac{p_1}{D}, \qquad (8.15)$$

где

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h^2}}. \qquad (8.16)$$

Дифференциальное уравнение осесимметричной деформации цилиндрической оболочки (8.15) по своей структуре аналогично уравнению упругой линии балки, опирающейся на упругое основание. Эта аналогия не случайна. Если из оболочки вырезать полоску шириной $rd\varphi$ (рис. 8.6), то ее можно рассматривать как брус нагруженный поперечной нагрузкой

$$q = p_1 r\, d\varphi - T_t d\varphi.$$

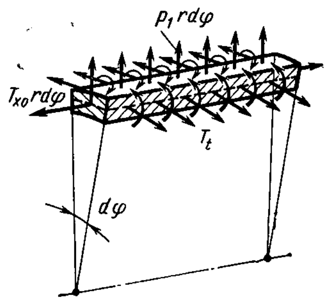


Рис. 8.6

Поскольку окружная сила T_t пропорциональна перемещению w [см. зависимость (8.10)], то она в данном случае играет роль реакции упругого основания.

Напишем дифференциальное уравнение упругой линии полоски:

$$\frac{d^4w}{dx^4}EJ = q.$$

Подставив в это уравнение выражение q с учетом зависимости (8.10), а также внеся значение момента инерции $J = \frac{r\, d\varphi h^3}{12(1-\mu^2)}$ [множитель $(1 - \mu^2)$ в знаменателе учитывает увеличение жесткости за счет взаимодействия с соседними полосками], и используя обозначение жесткости (8.9), придем к дифференциальному уравнению (8.15).

Если функция w, удовлетворяющая уравнению (8.15) и граничным условиям, на краях будет найдена, то по зависимостям (8.7) и (8.8) можно вычислить изгибающие моменты M_x и M_t, и по зависимости (8.10) — окружную силу T_t. Напряжения σ_x и σ_t определяются по внутренним силовым факторам

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{T_x}{h} + \frac{M_x 12}{h^3} z; \\ \sigma_t &= \frac{T_t}{h} + \frac{M_t 12}{h^3} z. \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

Эти формулы легко получить из уравнений (8.3) и (8.4) с учетом зависимостей (8.5) — (8.8).

Наибольшие напряжения возникают при $z = \pm \frac{h}{2}$:

$$\sigma_{x\,\max} = \frac{T_x}{h} \pm \frac{M_x 6}{h^2}; \tag{8.18}$$

$$\sigma_{t\,\max} = \frac{T_t}{h} + \frac{M_t 6}{h^2}. \tag{8.19}$$

Перейдем к интегрированию дифференциального уравнения (8.15). Общее решение уравнения представим в виде суммы общего решения однородного уравнения

$$\frac{d^4 \mathring{w}}{dx^4} + 4\beta^4 \mathring{w} = 0 \tag{8.20}$$

и частного решения уравнения с правой частью (8.15).

Решение однородного уравнения (8.20) ищем в виде

$$\mathring{w} = Ce^{kx}.$$

Подставив эту функцию в левую часть уравнения (8.20), получим характеристическое уравнение

$$k^4 + 4\beta^4 = 0,$$

из которого найдем

$$k = \sqrt[4]{-4\beta^4}.$$

По правилам извлечения корней из отрицательных и мнимых чисел модуль числа k равен корню четвертой степени модуля подкоренного числа, т. е. $\sqrt[4]{4\beta^4}$, а аргумент числа k — аргументу подкоренного числа, деленному на показатель корня, т. е. $\frac{\pi + 2\pi n}{4}$, следовательно, k представляет собой комплексное число

$$k = \sqrt[4]{4\beta^4}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi n}{4}\right).$$

Придавая n значения 0, 1, 2, 3, получим четыре корня характеристического уравнения:

$$k_1 = \beta + \beta i; \qquad k_2 = -\beta + \beta i;$$
$$k_3 = -\beta - \beta i; \qquad k_4 = \beta - \beta i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения (8.20) имеет вид

$$\overset{\circ}{w} = C_1 e^{(\beta+\beta i)x} + C_2 e^{(-\beta+\beta i)x} + C_3 e^{(-\beta-\beta i)x} + C_4 e^{(\beta-\beta i)x},$$

или

$$\overset{\circ}{w} = e^{-\beta x}(C_2 e^{i\beta x} + C_3 e^{-i\beta x}) + e^{\beta x}(C_1 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}), \qquad (8.21)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования (комплексные).

Частное решение уравнения с правой частью $\overline{w}$ зависит от закона распределения поверхностных нагрузок p_1 и p_2.

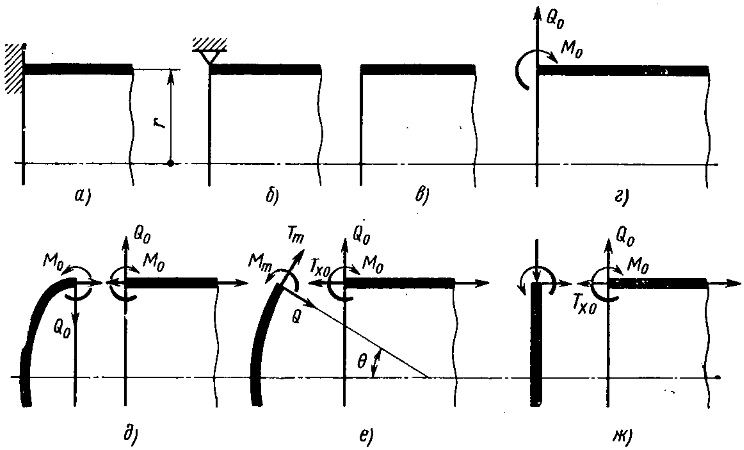


Рис. 8.7

Обычно на практике нагрузки p_1 и p_2 или постоянны, или изменяются по x, по линейному или квадратичному закону. Ограничиваясь только этими случаями и учитывая, что при указанных условиях $\frac{d^4 p_1}{dx^4} = 0$ и $\frac{d^4 T_x}{dx^4} = 0$ $\left(\frac{d^3 p_2}{dx^3} = 0\right)$, получим для $\overline{w}$ следующее выражение:

$$\overline{w} = \frac{1}{4\beta^4}\left(-\frac{\mu T_x}{Dr} + \frac{p_1}{D}\right) = \left(p_1 - \frac{\mu T_x}{r}\right)\frac{r^2}{Eh}. \qquad (8.22)$$

Для практических целей общее решение уравнения (8.20), представленное в виде (8.21), недостаточно удобно; поэтому его преобразуют к другому виду, причем для длинных и для коротких оболочек это преобразование делается по-разному (§ 2 и 3).

Остановимся на вопросе о постоянных интегрирования. Для определения постоянных необходимо использовать граничные условия на краях оболочки. На каждом краю обычно бывают заданы два условия.

Если край жестко заделан (рис. 8.7, *а*), то на краю должно быть: $w = 0$ и $\frac{dw}{dx} = 0$.

Для шарнирно опертого края (рис. 8.7, *б*) $w = 0$ и $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$ (так как $M_x = 0$).

Для свободного края (рис. 8.7, *в*)

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (M_x = 0);$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = 0 \quad (Q = 0).$$

При нагружении края оболочки заданной силой Q_0 и моментом M_0 (рис. 8.7, *г*)

$$D\frac{d^2w}{dx^2} = M_0; \quad D\frac{d^3w}{dx^3} = Q_0.$$

В случае сопряжения цилиндрической оболочки с оболочкой другого типа (рис. 8.7, *д* и *е*) необходимо иметь четыре условия (для каждого края сопрягаемых оболочек требуется по два условия): равенство радиальных перемещений w или равенство окружных деформаций ε_t; равенство углов поворота нормали ϑ; равенство моментов M_m и M_0; равенство сил распора, т. е. радиальных составляющих внутренних сил:

$$(-T_m \cos\theta + Q\sin\theta)_{\text{дн}} = Q_{0_{\text{ц}}}.$$

Заметим, что равенство осевых составляющих внутренних сил не может быть использовано при определении постоянных, так как это условие уже использовано при определении усилия T_x.

При сопряжении цилиндрической оболочки с плоским днищем (рис. 8.7, *ж*) граничные условия несколько упрощаются, так как на основании допущения о нерастяжимости срединной поверхности пластины первое условие сопряжения принимает вид $w_0 = 0$; четвертое же условие становится ненужным.

Определение четырех постоянных интегрирования требует решения системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Однако практически всегда оказывается возможным построить решение так, что две постоянные определяются сразу, а остальные — в результате решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

§ 2. Особенности расчета длинных цилиндрических оболочек

Применительно к расчету длинных оболочек выражение (8.21) целесообразно преобразовать следующим образом.

Используя формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi; \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \tag{8.23}$$

заменим показательные функции на тригонометрические, тогда выражение (8.21) примет вид

$$w = e^{-\beta x}(A_1\sin\beta x + A_2\cos\beta x) + e^{\beta x}(A_3\sin\beta x + A_4\cos\beta x) + \bar{w}, \tag{8.24}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — новые постоянные (действительные).

Первое слагаемое, содержащее множитель $e^{-\beta x}$, с увеличением x быстро затухает. Второе слагаемое, содержащее множитель $e^{\beta x}$, наоборот, быстро возрастет. Учитывая, что радиальные перемещения w при больших значениях x должны оставаться конечными и малыми, можно заключить, что постоянные A_3 и A_4 должны быть очень малы. В области, расположенной вблизи от начала координат, вторым слагаемым можно пренебречь, т. е. положить $A_3 = A_4 = 0$; тогда:

$$w = e^{-\beta x}(A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + \bar{w}, \qquad (8.25)$$

где A_1 и A_2 — постоянные, определяемые по граничным условиям при $x = 0$.

В таком виде функция w пригодна для области, расположенной около края при $x = 0$. Для области находящейся около второго края второе слагаемое не может быть отброшено, так как множитель $e^{\beta x}$ принимает очень большие значения.

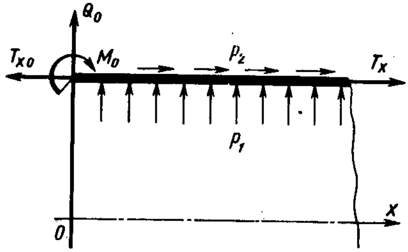


Рис. 8.8

Однако для второго края можно выбрать новое начало координат, расположив его на втором торце оболочки и направив ось x в противоположную сторону. Тогда можно снова воспользоваться выражением (8.25) и, определив новые постоянные A_1 и A_2 получить функцию w для области, расположенной около второго края оболочки.

Выясним, при какой длине оболочки ее допустимо рассматривать как длинную. Считая предельно допустимую погрешность расчета равной 5% и замечая, что функции вида $e^{-\beta x} \sin \beta x$ и $e^{-\beta x} \cos \beta x$, а также их производные при $\beta x > 3$ принимают значения $< 0{,}05$, заключаем, что оболочку можно рассматривать как длинную, если

$$\beta l \geqslant 3, \qquad (8.26)$$

или

$$l \geqslant 2{,}5\sqrt{rh}. \qquad (8.26,\text{а})$$

При соблюдении этого условия погрешность решения, полученная при применении упрощенного выражения (8.25), не превышает 5%.

Для практических расчетов длинных цилиндрических оболочек, однако, более удобно применять формулы, в которых постоянные интегрирования выражены через некоторые начальные параметры.

Рассмотрим полубесконечную цилиндрическую оболочку, нагруженную равномерным внутренним давлением p_1 и осевыми силами T_{x0} и p_2, а также краевыми нагрузками M_0 и Q_0 (рис. 8.8).

Примем за начальные параметры величины M_0 и Q_0 и выразим через них постоянные A_1 и A_2.

Запишем граничные условия

$$x=0 \quad \frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M_0}{D};$$

$$x=0 \quad \frac{d^3w}{dx^3}=\frac{Q_0}{D}.$$

По этим условиям найдем значения постоянных

$$A_1=-\frac{M_0}{2D\beta^2}; \; A_2=\frac{M_0}{2D\beta^2}+\frac{Q_0}{2D\beta^3}.$$

Внеся значения постоянных в выражение (8.25) и используя зависимости (8.7), (8.8) и (8.10), получим следующие выражения для радиального перемещения w, угла наклона нормали ϑ и внутренних силовых факторов M_x, M_t и T_t:

$$w=\frac{M_0}{2D\beta^2}e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x)+\frac{Q_0}{2D\beta^3}e^{-\beta x}\cos\beta x+\overline{w}; \quad (8.27)$$

$$\vartheta=\frac{dw}{dx}=-\frac{M_0}{D\beta}e^{-\beta x}\cos\beta x-\frac{Q_0}{2D\beta^2}e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x)+$$
$$+\frac{d\overline{w}}{dx}; \quad (8.28)$$

$$M_x=D\frac{d^2w}{dx^2}=M_0e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x)+\frac{Q_0}{\beta}e^{-\beta x}\sin\beta x+D\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}; \quad (8.29)$$

$$M_y=\mu M_x;$$

$$Q=D\frac{d^3w}{dx^3}=-2M_0\beta e^{-\beta x}\sin\beta x+Q_0e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x)+$$
$$+D\frac{d^3\overline{w}}{dx^3}; \quad (8.30)$$

$$T_t=\frac{Ehw}{r}+\mu T_x=2r\beta^2\Big[M_0e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x)+$$
$$+\frac{Q_0}{\beta}e^{-\beta x}\cos\beta x\Big]+p_1r, \quad (8.31)$$

где $\overline{w}$ — частное решение дифференциального уравнения с правой частью, определяемое по формуле (8.22).

Значения функций, входящих в выражения (8.27) — (8.31), даны в табл. 8.1 [25].

Пример 8.1. Определить напряжения и деформации в тонкостенном цилиндре с массивным днищем при действии внутреннего давления p (рис. 8.9, a).

Так как днище весьма толстое, то край оболочки будем считать жестко заделанным. Запишем граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad w=0;$$

$$\text{при } x=0 \quad \vartheta=\frac{dw}{dx}=0.$$

Осевое усилие в данном случае

$$T_x=\frac{pr}{2}=\text{const}.$$

Таблица 8.1

ξ	$e^{-\xi}\cos\xi$	$e^{-\xi}\sin\xi$	$e^{-\xi}(\cos\xi+\sin\xi)$	$e^{-\xi}(\cos\xi-\sin\xi)$
0	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9003	0,0903	0,9907	0,8100
0,2	0,8024	0,1627	0,9651	0,6398
0,3	0,7077	0,2189	0,9267	0,4888
0,4	0,6174	0,2610	0,8784	0,3564
0,5	0,5323	0,2908	0,8231	0,2415
0,6	0,4530	0,3099	0,7628	0,1431
0,7	0,3798	0,3199	0,6997	0,0599
0,8	0,3131	0,3223	0,6354	—0,0093
0,9	0,2527	0,3185	0,5712	—0,0657
1,0	0,1988	0,3096	0,5083	—0,1108
1,1	0,1510	0,2967	0,4476	—0,1457
1,2	0,1091	0,2807	0,3899	—0,1716
1,3	0,0729	0,2626	0,3355	—0,1897
1,4	0,0419	0,2430	0,2849	—0,2011
1,5	0,0158	0,2226	0,2384	—0,2068
1,6	—0,0059	0,2018	0,1959	—0,2077
1,7	—0,0235	0,1812	0,1576	—0,2047
1,8	—0,0376	0,1610	0,1234	—0,1985
1,9	—0,0484	0,1415	0,0932	—0,1899
2,0	—0,0563	0,1230	0,0667	—0,1794
2,1	—0,0618	0,1057	0,0439	—0,1675
2,2	—0,0652	0,0895	0,0244	—0,1548
2,3	—0,0668	0,0748	0,0080	—0,1416
2,4	—0,0669	0,0613	—0,0056	—0,1282
2,5	—0,0658	0,0492	—0,0166	—0,1149
2,6	—0,0636	0,0383	—0,0254	—0,1019
2,7	—0,0608	0,0287	—0,0320	—0,0895
2,8	—0,0573	0,0204	—0,0369	—0,0777
2,9	—0,0534	0,0132	—0,0403	—0,0666
3,0	—0,0493	0,0071	—0,0423	—0,0563
3,1	—0,0450	0,0019	—0,0431	—0,0469
3,2	—0,0407	—0,0024	—0,0431	—0,0383
3,3	—0,0364	—0,0058	—0,0422	—0,0306
3,4	—0,0323	—0,0085	—0,0408	—0,0237
3,5	—0,0283	—0,0106	—0,0389	—0,0177
3,6	—0,0245	—0,0121	—0,0366	—0,0124
3,7	—0,0210	—0,0131	—0,0341	—0,0079
3,8	—0,0177	—0,0137	—0,0314	—0,0040
3,9	—0,0147	—0,0140	—0,0286	—0,0008
4,0	—0,0120	—0,0139	—0,0258	0,0019
4,1	—0,0095	—0,0136	—0,0231	0,0040
4,2	—0,0074	—0,0131	—0,0204	0,0057
4,3	—0,0054	—0,0125	—0,0179	0,0070
4,4	—0,0038	—0,0117	—0,0155	0,0079
4,5	—0,0023	—0,0108	—0,0132	0,0085
4,6	—0,0011	—0,0100	—0,0111	0,0089
4,7	0,0001	—0,0091	—0,0092	0,0090
4,8	0,0007	—0,0082	—0,0075	0,0089
4,9	0,0014	—0,0073	—0,0059	0,0087
5,0	0,0019	—0,0065	—0,0046	0,0084
5,1	0,0023	—0,0057	—0,0033	0,0080
5,2	0,0026	—0,0049	—0,0023	0,0075

ξ	$e^{-\xi}\cos\xi$	$e^{-\xi}\sin\xi$	$e^{-\xi}(\cos\xi+\sin\xi)$	$e^{-\xi}(\cos\xi-\sin\xi)$
5,3	0,0028	—0,0042	—0,0014	0,0069
5,4	0,0029	—0,0035	—0,0006	0,0064
5,5	0,0029	—0,0029	—0,0000	0,0058
5,6	0,0029	—0,0023	0,0005	0,0052
5,7	0,0028	—0,0018	0,0010	0,0046
5,8	0,0027	—0,0014	0,0013	0,0041
5,9	0,0026	—0,0010	0,0015	0,0036
6,0	0,0024	—0,0007	0,0017	0,0031
6,1	0,0022	—0,0004	0,0018	0,0026
6,2	0,0020	—0,0002	0,0019	0,0022
6,3	0,0018	0,0001	0,0019	0,0018
6,4	0,0017	0,0003	0,0018	0,0015
6,5	0,0015	0,0004	0,0018	0,0012
6,6	0,0013	0,0005	0,0017	0,0009
6,7	0,0011	0,0006	0,0016	0,0006
6,8	0,0010	0,0006	0,0015	0,0004
6,9	0,0008	0,0006	0,0014	0,0002
7,0	0,0007	0,0006	0,0013	0,0001

Согласно граничным условиям, с учетом зависимостей (8.27) и (8.28) получим два уравнения:

$$\frac{M_0}{2D\beta^2}+\frac{Q_0}{2D\beta^3}+\left(pr-\mu\frac{pr}{2}\right)\frac{r}{Eh}=0;$$

$$-\frac{M_0}{D\beta}-\frac{Q_0}{2D\beta^2}=0,$$

решив которые, найдем

$$M_0=\frac{2D\beta^2pr^2(1-\mu/2)}{Eh}=\frac{p}{2\beta^2}\left(1-\frac{\mu}{2}\right);$$

$$Q_0=-2\beta M_0=-\frac{p}{\beta}\left(1-\frac{\mu}{2}\right).$$

Далее, по формулам (8.27) — (8.31) определяем радиальное перемещение и внутренние силовые факторы:

$$w=\frac{pr^2}{Eh}(1-\mu/2)\,[1-e^{-\beta x}(\sin\beta x+\cos\beta x);$$

$$M_x=\frac{p}{2\beta^2}(1-\mu/2)\,e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x),\qquad M_t=\mu M_x;$$

$$T_t=pr\,[1-(1-\mu/2)\,e^{-\beta x}(\sin\beta x+\cos\beta x)].$$

На рис. 8.9, *б* приведены эпюры w, M_x и T_t, построенные при следующих числовых данных:

$$r=100\,h;\qquad \mu=0,3;\qquad \beta=\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h^2}}=12,85\,\frac{1}{r}.$$

Наибольшие изгибающие моменты возникают при $x=0$

$$M_x=2,57\cdot10^{-3}pr^2\ \text{Н}\cdot\text{см/см};$$

$$M_t=0,77\cdot10^{-3}pr^2\ \text{Н}\cdot\text{см/см}.$$

Растягивающие усилия при $x = 0$

$$T_x = 50ph \text{ Н/см} ; \quad T_t = 15ph \text{ Н/см}.$$

Напряжения в опасной точке у заделки:

$$\sigma_x = \frac{M_x \cdot 6}{h^2} + \frac{T_x}{h} = 154p + 50p = 204p \text{ Н/см}^2$$

$$\sigma_t = \frac{M_t \cdot 6}{h^2} + \frac{T_t}{h} = 46p + 15p = 61p \text{ Н/см}^2;$$

$$\sigma_r \cong 0;$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_x)^2\right]} = 182p \text{ Н/см}^2.$$

В сечениях цилиндра, удаленных от заделки, изгибающие моменты обращаются в нуль, а растягивающие усилия принимают значения

$$T_x = 50ph \text{ Н/см}; \quad T_t = 100ph \text{ Н/см},$$

Соответствующие им напряжения

$$\sigma_x = 50p \text{ Н/см}^2; \quad \sigma_t = 100p \text{ Н/см}^2; \quad \sigma_{\text{экв}} = 87p \text{ Н/см}^2.$$

Результаты расчета показывают, что эквивалентное напряжение в сечении у заделки в 2 с лишним раза больше, чем вдали от заделки. Зона изгибных напря-

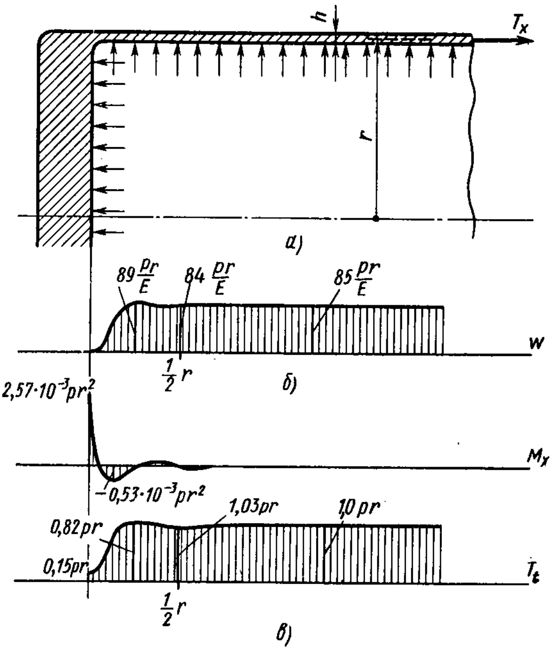


Рис. 8.9

жений, однако, очень мала и на расстоянии $\frac{1}{16}$ r от заделки изгибные напряжения уже обращаются в нуль.

Пример 8.2. Определить напряжения в цилиндре, рассмотренном в предыдущем примере, считая, что днище имеет толщину, соизмеримую с толщиной стенки цилиндра.

Отделим мысленно цилиндр от днища, как показано на рис. 8.10, *а*, и примем точку пересечения срединных поверхностей O за точку сопряжения. Такой способ разделения позволяет записать условия сопряжения в наиболее простой форме.

Осевую силу в цилиндре определим из условия равновесия днища:

$$p\pi r^2 = T_x 2\pi r; \quad T_x = \frac{pr}{2}.$$

Остальные два силовых фактора в сечении должны быть определены из условий совместности деформаций цилиндра и днища:
при $x = 0$ $w_ц = 0$ (деформацией растяжения днища пренебрегаем);
при $x=0$ $\vartheta_ц = -\vartheta_{дн}$.

Направления отсчетов углов, принятые за положительные, указаны на рис. 8.10, *б*.

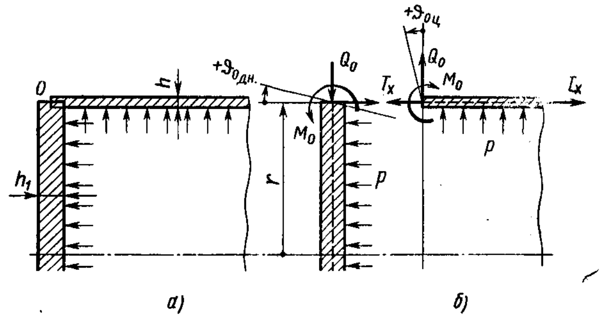


Рис. 8.10

Перемещения края цилиндра, согласно зависимостям (8.27) и (8.28),

$$\underset{(x=0)}{w_ц} = \frac{M_0}{2D\beta^2} + \frac{Q_0}{2D\beta^3} + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\frac{pr^2}{Eh};$$

$$\vartheta_ц = -\frac{M_0}{D\beta} - \frac{Q_0}{2D\beta^2}.$$

Угол поворота нормали на краю днища определяется по одному из методов, рассмотренных в гл. 5, § 4, 5. В данном случае

$$\vartheta_{дн} = \frac{pr^3}{8D_1(1+\mu)} - \frac{M_0 r}{D_1(1+\mu)} = \frac{r}{D_1(1+\mu)}\left(\frac{pr^2}{8} - M_0\right),$$

где D_1 — изгибная жесткость днища.

Уравнения совместности деформаций после подстановки в них значений перемещений принимают вид

$$\frac{M_0}{2D\beta^2} + \frac{Q_0}{2D\beta^3} + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\frac{pr^2}{Eh} = 0;$$

$$-\frac{M_0}{D\beta} - \frac{Q_0}{2D\beta^2} = \frac{M_0 r}{D_1(1+\mu)} - \frac{pr^3}{8D_1(1+\mu)}.$$

При составлении уравнений совместности деформаций необходимо следить за правильностью знаков. В частности, в уравнении, выражающем равенство углов, момент M_0 должен входить в правую и левую части равенства обязательно с противоположными знаками.

Решение системы двух полученных уравнений при числовых значениях $h=1$ см; $h_1=4$ см; $r=100$ см; $\mu=0,3$; $E=2\cdot10^7$ Н/см²

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h^2}}=0,1285\ 1/\text{см};\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=0,0916E=$$
$$=0,1832\cdot10^7\ \text{Н}\cdot\text{см};$$
$$D_1=\frac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)}=64D$$

приводит к следующим результатам:

$$M_0=31,2\cdot10^{-3}pr^2\ \text{Н}\cdot\text{см/см};\quad Q_0=-0,435pr\ \text{Н/см}.$$

Заметим, что при абсолютно жестком днище

$$M_0=2,57\cdot10^{-3}pr^2\ \text{Н}\cdot\text{см/см}.$$

Следовательно, за счет податливости днища изгибающий момент на краю цилиндра возрастает в данном случае более чем в 10 раз. Это объясняется тем, что днище, прогибаясь, как бы выворачивает край цилиндра.

Эпюры изгибающих моментов приведены на рис. 8.11. Наибольшие напряжения в центре днища

$$\sigma_r=\sigma_t=\frac{0,175pr^2\cdot6}{h_1^2}=656p\ \text{Н/см}^2.$$

Наибольшие напряжения в цилиндре — около края

$$\sigma_x=\frac{pr}{2h}+\frac{0,0312pr^2\cdot6}{h^2}=50p+1872p=$$
$$=1922p\ \text{Н/см}^2;$$
$$\sigma_t=\mu\frac{pr}{2h}+\frac{\mu0,0312pr^2\cdot6}{h^2}=$$
$$=15p+562p\ \text{Н/см}^2.$$

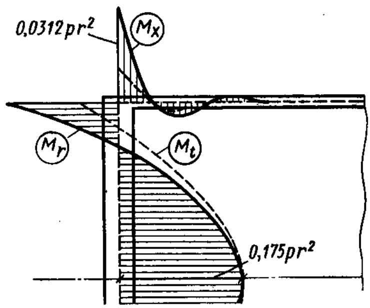


Рис. 8.11

Растягивающие напряжения в цилиндре вдали от края

$$\sigma_x=\frac{pr}{2h}=50p\ \text{Н/см}^2;$$

$$\sigma_t=\frac{pr}{h}=100p\ \text{Н/см}^2.$$

Пример 8.3. Длинный тонкостенный цилиндр нагружен в некотором сечении кольцевой силой P (рис. 8.12, *а*).

К такой расчетной схеме приводится, в частности, задача о деформациях трубы с наложенным на нее бандажом или трубы с кольцевым ребром или диафрагмой.

Для правой половины трубы, учитывая симметрию нагружения, имеем следующие граничные условия:

при $x=0$

$$\frac{dw}{dx}=0;$$

при $x=0$

$$Q_0=-\frac{P}{2}.$$

Из этих условий, на основании уравнения (8.28), определяется изгибающий момент M_x в начальном сечении

$$M_0 = -\frac{Q_0}{2\beta} = \frac{P}{4\beta},$$

Выражения для w, M_x, T_t согласно формулам (8.27) — (8.31):

$$w = -\frac{Pr^2\beta}{2Eh} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x);$$

$$M_x = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x);$$

$$M_t = \mu M_x;$$

$$T_t = -\frac{Pr\beta}{2} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x); \quad T_x = 0.$$

Эпюры w, M_x и T_t, построенные при $r = 100h$; $\mu = 0{,}3$, приведены на рис. 8.12, *б*.

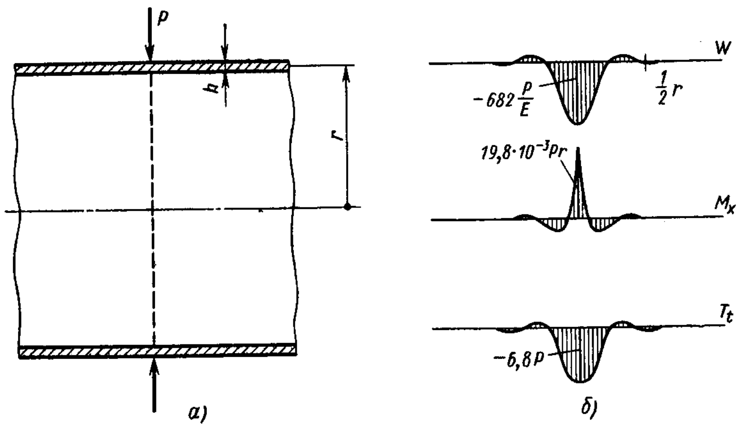


Рис. 8.12

При нагружении цилиндра двумя или несколькими кольцевыми силами задача наиболее просто решается методом наложения. Для этого надо построить эпюры отдельно для каждой силы, а затем их просуммировать.

Пример 8.4. Тонкостенный цилиндр нагружен равномерным наружным давлением, приложенным на участке поверхности длиною a (рис. 8.13, *а*).

Эта задача также наиболее просто решается методом наложения. Заданную нагрузку можно представить в виде суммы двух нагрузок, показанных на рис. 8. 13, *б* и *в* (обе эти нагрузки по существу одинаковые).

Получим решение для нагрузки, изображенной на рис. 8.13, *в*. Начало координат совместим с сечением, соответствующим скачку давления. На основании обратной симметрии нагрузки

при $x=0$

$$w=0;$$

при $x=0$

$$M_x=0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2w}{dx^2}=0.$$

При $x = 0$ упругая поверхность имеет точку перегиба. Из граничных условий при $x = 0$ определим поперечную силу Q_0 в начальном сечении. Так как $M_0 = 0$, то на основании зависимостей (8.22) и (8.27)

$$\frac{Q_0}{2D\beta^3} + \frac{pr^2}{Eh} = 0,$$

откуда

$$Q_0 = -\frac{pr^2}{Eh} 2D\beta^3 = -\frac{p}{2\beta}.$$

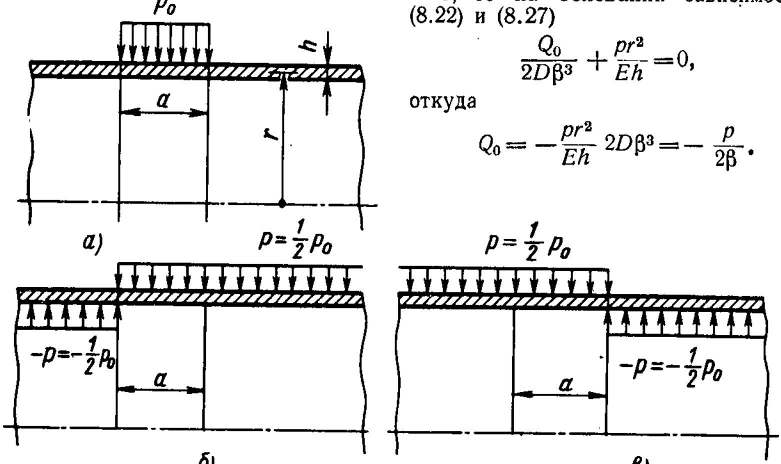


Рис. 8.13

Выражения функций w, M_x, M_t, T_t для нагрузки, изображенной на рис. 8.13, *в*, имеют вид

$$w = \frac{pr^2}{Eh}(1 - e^{-\beta x}\cos\beta x);$$

$$M_x = -\frac{p}{2\beta^2} e^{-\beta x}\sin\beta x; \quad M_t = \mu M_x;$$

$$T_t = pr(1 - e^{-\beta x}\cos\beta x).$$

Эти формулы справедливы для правой половины цилиндра ($x \geqslant 0$). Для левой половины цилиндра величины w, M_x и T_t отличаются только знаком.

Построив по полученным формулам эпюры w, M_x, T_t для нагрузок, изображенных на рис. 8.13, *б* и *в* и сложив их, получим эпюры для заданной нагрузки.

На рис. 8.14 приведено построение, соответствующее следующим данным:

$$\frac{r}{h} = 100; \quad \beta = 12{,}85\frac{1}{r}; \quad a = 0{,}2r.$$

Значения функций, входящих в формулы, взяты по табл. 8.1

Наибольший прогиб $w_{max} = 92\frac{p_0 r}{E}$; наибольший изгибающий момент

$$M_{x\max} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} p_0 r^2.$$

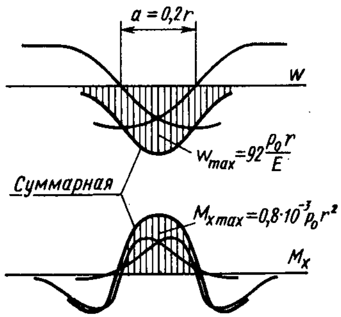


Рис. 8.14

Эти значения интересно сравнить со значениями, полученными в предыдущем примере для случая нагружения сосредоточенной кольцевой нагрузкой при

$$p_0 a = P \text{ или } p_0 r = 5P.$$

Сравнение показывает, что при действии распределенной нагрузки величина прогиба примерно в 1,5 раза, а величина максимального изгибающего момента приблизительно в 5 раз меньше, чем при сосредоточенной нагрузке.

§ 3. Короткие осесимметрично нагруженные цилиндрические оболочки

При малой длине оболочки ($l < 2{,}5\sqrt{rh}$) взаимное влияние краев настолько значительно, что определять постоянные отдельно для каждого края нельзя.

В этом случае необходимо использовать решение основного дифференциального уравнения, содержащее четыре произвольные постоянные.

Если это решение взять в виде (8.21) или (8.24), то задача определения постоянных сведется к решению системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Для того чтобы упростить определение постоянных, решение основного дифференциального уравнения целесообразно представить в функциях А. И. Крылова.

Функции Крылова определяются следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} V_1(\beta x) &= \operatorname{ch}\beta x\cos\beta x;\\ V_2(\beta x) &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\beta x\sin\beta x+\operatorname{sh}\beta x\cos\beta x\right];\\ V_3(\beta x) &= \frac{1}{2}\operatorname{sh}\beta x\sin\beta x;\\ V_4(\beta x) &= \frac{1}{4}\left[\operatorname{ch}\beta x\sin\beta x-\operatorname{sh}\beta x\cos\beta x\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

Таблица функций Крылова приведена в работе [21].

Переход от показательных функций к функциям Крылова осуществляется с помощью формул Эйлера:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi;\quad e^{\varphi}=\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi.$$

В результате, общее решение дифференциального уравнения осесимметричной цилиндрической оболочки (8.21) преобразуется к виду

$$w=B_1V_1(\beta x)+B_2V_2(\beta x)+B_3V_3(\beta x)+B_4V_4(\beta x)+\bar{w}, \tag{8.33}$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 — постоянные интегрирования.

Функции Крылова V_1, V_2, V_3, V_4 обладают следующими свойствами. Во-первых, они связаны между собой простыми дифференциальными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}V_1(\beta x) &= -4\beta V_4(\beta x);\\ \frac{d}{dx}V_2(\beta x) &= \beta V_1(\beta x);\\ \frac{d}{dx}V_3(\beta x) &= \beta V_2(\beta x);\\ \frac{d}{dx}V_4(\beta x) &= \beta V_3(\beta x). \end{aligned}\right\} \tag{8.34}$$

Во-вторых, при значении аргумента, равном нулю, все они обращаются в нуль, кроме функции V_1, которая обращается в единицу т. е.

$$V_1(0)=1;\quad V_2(0)=0;\quad V_3(0)=0;\quad V_4(0)=0. \tag{8.35}$$

Эти свойства функций Крылова позволяют выразить постоянные интегрирования через начальные параметры w_0, ϑ_0, M_{x0} и Q_0. Согласно равенствам (8.7) и (8.14) с учетом выражения (8.33) и соотношений (8.34), (8.35), можно написать

$$w_0=B_1+\bar{w}_0; \tag{8.36}$$

$$\vartheta_0=\beta B_2+\bar{w}_0'; \tag{8.37}$$

$$M_{x_0}=D\left(\beta^2 B_3+\bar{w}_0''\right); \tag{8.38}$$

$$Q_0=D\left(\beta^3 B_4+\bar{w}_0'''\right); \tag{8.39}$$

где $\bar{w}_0$, $\bar{w}_0'$, $\bar{w}''$ и $\bar{w}'''$ — значения частного решения и его производных при $x=0$.

Определив по равенствам (8.36) — (8.39) постоянные B_1, B_2, B_3, B_4 и подставив их в уравнение (8.33), получим выражение функции w через начальные параметры

$$w=(w_0-\bar{w}_0)V_1(\beta x)+\frac{1}{\beta}\left(\vartheta_0-\bar{w}_0'\right)V_2(\beta x)+\frac{1}{\beta^2}\times$$
$$\times\left(\frac{M_{x_0}}{D}-\bar{w}_0''\right)V_3(\beta x)+\frac{1}{\beta^3}\left(\frac{Q_0}{D}-\bar{w}_0'''\right)V_4(\beta x)+\bar{w}. \tag{8.40}$$

Дифференцирование этого выражения с помощью соотношений (8.34) приводит к следующим выражениям для ϑ, M_x и Q:

$$\vartheta=-4\beta\left(w_0-\bar{w}_0\right)V_4(\beta x)+\left(\vartheta_0-\bar{w}_0'\right)V_1(\beta x)+$$
$$+\frac{1}{\beta}\left(\frac{M_{x_0}}{D}-\bar{w}_0''\right)V_2(\beta x)+\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{Q_0}{D}-\bar{w}_0'''\right)V_3(\beta x)+\bar{w}'; \tag{8.41}$$

$$M_x=-4D\beta^2(w_0-\bar{w}_0)V_3(\beta x)-4D\beta\left(\vartheta_0-\bar{w}_0'\right)V_4(\beta x)+$$
$$+\left(M_{x_0}-D\bar{w}_0''\right)V_1(\beta x)+\frac{1}{\beta}\left(Q_0-D\bar{w}_0'''\right)V_2(\beta x)+D\bar{w}''; \tag{8.42}$$

$$Q_0=-4D\beta^3\left(w_0-\bar{w}_0\right)V_2(\beta x)-4D\beta^2\left(\vartheta_0-\bar{w}_0'\right)V_3(\beta x)-$$
$$-4\beta\left(M_{x_0}-D\bar{w}_0''\right)V_4(\beta x)+\left(Q_0-D\bar{w}_0'''\right)V_1(\beta x)+D\bar{w}'''. \tag{8.43}$$

Частное решение $\bar{w}$ определяется по формуле (8.22). Если $p=\mathrm{const}$ и $T_x=\mathrm{const}$, то $\bar{w}'=\bar{w}''=\bar{w}'''=0$.

Так два начальных параметра обычно бывают известны, то задача определения постоянных сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными, составляемой на основании граничных условий при $x=l$.

Пример 8.5. Определить напряжения в цилиндрической детали, изображенной на (рис. 8.15, *а*), нагруженной внутренним давлением $p=400$ Н/см^2 и силами инерции, возникающими при вращении. Дано: $n=7750$ об/мин; материал — сталь $\gamma=7{,}8\cdot 10^{-2}$ Н/см^3; $E=2\cdot 10^7$ Н/см^2.

Отделим мысленно кольцо от цилиндра (рис. 8.15, *б*). В сечении действуют неизвестные силовые факторы X_1 и X_2. Осевая сила T_x в данном случае равна нулю.

Для вычисления деформаций кольца используем теорию осесимметричной деформации колец (см. гл. 4, § 1).

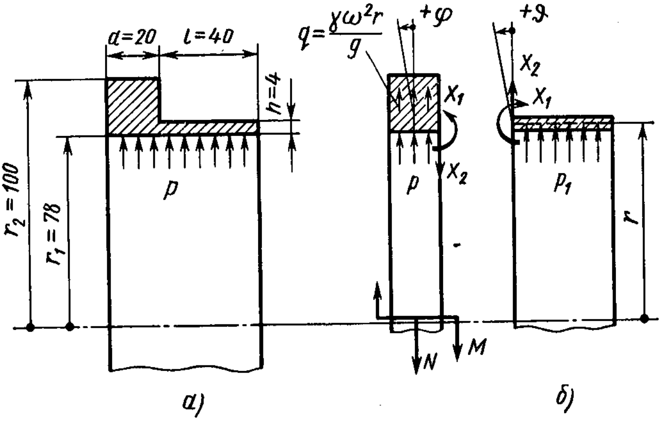


Рис. 8.15

Из уравнений равновесия половины кольца

$$2N-2par_1+2rX_2-2\int_{r_1}^{r_2} a\frac{\gamma\omega^2}{g}r^2\,dr=0;$$

$$2M-X_1 2r+X_2 2r\frac{a}{2}=0$$

определим внутренние силовые факторы в сечении кольца:

$$M=X_1 r-X_2\frac{ra}{2};$$

$$N=par_1+\frac{a\gamma\omega^2(r_2^3-r_1^3)}{3g}-X_2 r.$$

По силовым факторам вычислим угол поворота сечения

$$\varphi=\frac{M}{EI_3}$$

и радиальное перемещение точки сопряжения с цилиндром

$$u=\varepsilon_t r=\frac{\sigma_t r}{E}=\left(\frac{M\frac{a}{2}}{rI_3}+\frac{N}{rI_1}\right)\frac{r}{E}.$$

Подставив заданные числовые значения, а также значения геометрических характеристик сечения кольца

$$I_1=a\ln\frac{r_2}{r_1}=2\ln\frac{10}{7{,}8}=0{,}497\text{ см};$$

$$I_3=\frac{a^3}{12}\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{2^3}{12}\ln\frac{10}{7{,}8}=0{,}166\text{ см}^3,$$

выразим перемещения точки сопряжения через X_1 и X_2:

$$\varphi = \frac{X_1}{E} 48{,}2 - \frac{X_2}{E} 48{,}2 \text{ рад};$$

$$u = \frac{X_1}{E} 48{,}2 - \frac{X_2}{E} 64{,}3 + \frac{5{,}18 \cdot 10^5}{E} \text{ см}.$$

Вычислим деформации цилиндра. Совместив начало координат с левым торцом цилиндра и направив ось x вправо, получим следующие граничные условия:

$$x=0 \quad M_x = X_1;$$

$$x=0 \quad Q = X_2;$$

$$x=l \quad M_x = 0;$$

$$x=l \quad Q = 0.$$

Вычислим значения параметров β и βl:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h^2}} = 0{,}718 \text{ 1/см}; \quad \beta l = 2{,}87.$$

Так как $\beta l < 3$, то цилиндр следует рассматривать как короткий.

При расчете примем, что на цилиндр действует некоторое приведенное равномерное давление p_1, равное сумме внутреннего давления p и инерционной нагрузки за счет вращения, т. е.

$$p_1 = p + \frac{\gamma\omega^2 r h}{g} = 568 \text{ Н/см}^2.$$

Так как $T_x = 0$, то частным решением (8.22) будет

$$\bar{w} = \frac{p_1 r^2}{Eh} = \text{const}.$$

При $Q = X_2$, $M_{x0} = X_1$ и $\bar{w} = \frac{pr^2}{Eh}$ функция w [см. уравнение (8.40)] принимает вид

$$w = \left[w_0 - \frac{p_1 r^2}{Eh}\right] V_1(\beta x) + \frac{1}{\beta}\vartheta_0 V_2(\beta x) + \frac{1}{\beta^2}\frac{X_1}{D} V_3(\beta x) + \frac{1}{\beta^3} \times$$
$$\times \frac{X_2}{D} V_4(\beta x) + \frac{p_1 r^2}{Eh}.$$

Два последних граничных условия с учетом зависимостей (8.42) и (8.43) приводят к двум уравнениям

$$D\beta^2\left[-4\left(w_0 - \frac{p_1 r^2}{Eh}\right) V_3(\beta l) - \frac{4}{\beta}\vartheta_0 V_4(\beta l) + \frac{X_1}{D\beta^2} V_1(\beta l) + \right.$$
$$\left. + \frac{X_2}{D\beta^3} V_2(\beta l)\right] = 0;$$

$$D\beta^3\left[-4\left(w_0 - \frac{p_1 r^2}{Eh}\right) V_2(\beta l) - \frac{4\vartheta_0}{\beta} V_3(\beta l) - \frac{4X_1}{D\beta^2} V_4(\beta l) + \right.$$
$$\left. + \frac{X_2}{D\beta^3} V_1(\beta l)\right] = 0,$$

решение которых дает

$$w_0-\frac{p_1r^2}{Eh}=\frac{X_1}{4\beta^2D}\,\frac{[V_1(\beta l)\,V_3(\beta l)+4V_4^2(\beta l)]}{[V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)]}+\frac{X_2}{2\beta^3D}\,\frac{[V_2(\beta l)\,V_3(\beta l)-V_1(\beta l)\,V_4(\beta l)]}{[V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)]};$$

$$\frac{\vartheta_0}{\beta}=\frac{X_1}{4\beta^2D}\,\frac{[-4V_3(\beta l)\,V_4(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_1(\beta l)]}{[V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)]}+$$

$$+\frac{X_2}{2\beta^3D}\,\frac{[V_1(\beta l)\,V_3(\beta l)-V_2^2(\beta l)]}{[V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)]}.$$

При $\beta l=2{,}87$ функции Крылова имеют следующие значения:

$V_1(\beta l)=-8{,}5225;\quad V_2(\beta l)=-3{,}0473;\quad V_3(\beta l)=1{,}1791;\quad V_4(\beta l)=2{,}7103.$

Изгибная жесткость оболочки

$$D=\frac{Eh^3}{12\,(1-\mu^2)}=5{,}86\cdot10^{-2}E\ \text{Н}\cdot\text{см}.$$

Подстановка числовых значений дает следующие величины перемещений при $x=0$:

$$w_0=\frac{X_1}{4\beta^2D}\,2{,}012+\frac{X_2}{4\beta^3D}\,2{,}0213+\frac{p_1r^2}{Eh}=(166{,}3X_1+233{,}4X_2)\,\frac{1}{E}+\frac{90\,800}{E}\ \text{см};$$

$$\vartheta_0=-\frac{X_1}{4\beta D}\,4{,}0162-\frac{X_2}{4\beta^2D}\,2{,}012=(-238{,}6X_1-166{,}3X_2)\,\frac{1}{E}.$$

Следует заметить, что в данном случае длина оболочки лишь ненамного меньше предельной; поэтому перемещения края оболочки можно также с достаточной точностью вычислить, пользуясь выражениями (8.27) и (8.28) для длинной оболочки:

$$w_0=\frac{X_1}{2\beta^2D}+\frac{X_2}{2\beta^3D}+\frac{p_1r^2}{Eh};\quad \vartheta_0=-\frac{X_1}{\beta D}-\frac{X_2}{2D\beta^2}.$$

Запишем уравнения совместности деформаций цилиндра и кольца:

$$w_0=u;\ \vartheta_0=\varphi$$

или

$$(166{,}3X_1+233{,}4X_2)\,\frac{1}{E}+\frac{90\,800}{E}=(48{,}2X_1-64{,}3X_2)\,\frac{1}{E}+\frac{518\,000}{E}$$

$$(-238{,}6X_1-166{,}3X_2)\,\frac{1}{E}=(48{,}2X_1-48{,}2\,X_2)\,\frac{1}{E}.$$

Решив эту систему уравнений, получим значения искомых силовых факторов

$$X_1=64{,}4\ \text{Н}\cdot\text{см/см};\quad X_2=-155{,}9\ \text{Н/см}.$$

Радиальное перемещение на левом краю цилиндра

$$w_0=\frac{X_1}{E}\,166{,}3+\frac{X_2}{E}\,233{,}4+\frac{90\,800}{E}=3{,}26\cdot10^{-3}\ \text{см}$$

и на правом краю цилиндра

$$w_{x=l}=\left[w_0-\frac{p_1r^2}{Eh}\right]V_1(\beta l)+\frac{\vartheta_0}{\beta}\,V_2(\beta l)+$$

$$+\frac{X_1}{\beta^2D}\,V_3(\beta l)+\frac{X_2}{\beta^3D}\,V_4(\beta l)+\frac{p_1r^2}{Eh}=4{,}25\cdot10^{-3}\ \text{см}.$$

Внутренние силовые факторы на левом краю цилиндра

$$M_x = X_1 = 64{,}4\ \text{Н} \cdot \text{см/см};\quad M_t = \mu M_x = 19{,}3\ \text{Н} \cdot \text{см/см};$$
$$T_x = 0;\quad T_t = \frac{Ehw}{r} = 3260\ \text{Н/см}$$

и на правом краю цилиндра

$$M_x = 0;\quad M_t = 0;\quad T_x = 0;\quad T_t = \frac{Ehw}{r} = 4750\ \text{Н/см}.$$

Напряжения на левом краю цилиндра

$$\sigma_x = \frac{M_x 6}{h^2} = 2420\ \text{Н/см}^2;\quad \sigma_t = \frac{M_t 6}{h^2} + \frac{T_t}{h} = 8830\ \text{Н/см}^2$$

и на правом краю цилиндра

$$\sigma_x = 0;\quad \sigma_t = \frac{T_t}{h} = 11\,900\ \text{Н/см}^2.$$

Результаты расчета показывают, что наибольшие напряжения в цилиндре возникают на правом краю, где имеет место только окружное растяжение.

В некоторых случаях нагружения расчет коротких цилиндрических оболочек наиболее просто производится с помощью функций влияния.

Пусть на короткий тонкостенный цилиндр действуют моменты M_1 и M_2 и кольцевые радиальные силы P_1 и P_2, равномерно распределенные по окружности торцов (рис. 8.16).

Выберем начало координат на левом торце и направим ось x вправо. Так как в данном случае $p_1 = 0$ и $T_x = 0$, то и $\overline{w} = 0$.

Граничные условия на левом торце:

при

$$x = 0\quad M_{x_0} = M_1;$$

при

$$x = 0\quad Q_0 = P_1;$$

и на правом торце:

при

$$x = l\quad M_{xl} = M_2;$$

при

$$x = l\quad Q_l = -P_2.$$

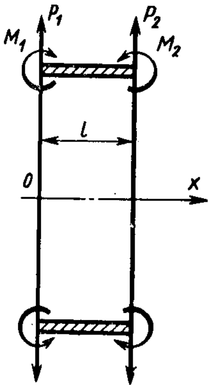


Рис. 8.16

Последние два условия с учетом выражений (8.42) и (8.43) приводят к двум уравнениям, решение которых относительно w_0 и ϑ_0 дает:

$$w_0 = \frac{P_1}{4D\beta^3} f_{11}(\beta l) + \frac{M_1}{4D\beta^2} f_{12}(\beta l) - \frac{P_2}{4D\beta^3} f_{33}(\beta l) - \frac{M_2}{4D\beta^2} f_{34}(\beta l); \tag{8.44}$$

$$\vartheta_0 = -\frac{P_1}{4D\beta^2} f_{12}(\beta l) - \frac{M_1}{4D\beta} f_{22}(\beta l) + \frac{P_2}{4D\beta^2} f_{34}(\beta l) + \frac{M_2}{4D\beta} f_{44}(\beta l), \tag{8.45}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
f_{11}&=\frac{V_2(\beta l)\,V_3(\beta l)-V_1(\beta l)\,V_4(\beta l)}{V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)}=\frac{\operatorname{sh}(2\beta l)-\sin(2\beta l)}{\operatorname{sh}^2(\beta l)-\sin^2(\beta l)};\\
f_{12}&=\frac{V_1(\beta l)\,V_3(\beta l)+4V_4^2(\beta l)}{V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)}=2\,\frac{\operatorname{sh}^2(\beta l)+\sin^2(\beta l)}{\operatorname{sh}^2(\beta l)-\sin^2(\beta l)};\\
f_{22}&=\frac{4V_3(\beta l)\,V_4(\beta l)+V_1(\beta l)\,V_2(\beta l)}{V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)}=2\,\frac{\operatorname{sh}(2\beta l)+\sin(2\beta l)}{\operatorname{sh}^2(\beta l)-\sin^2(\beta l)};\\
f_{33}&=\frac{V_4(\beta l)}{V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)}=2\,\frac{\operatorname{ch}(\beta l)\sin(\beta l)-\operatorname{sh}(\beta l)\cos(\beta l)}{\operatorname{sh}^2(\beta l)-\sin^2(\beta l)};\\
f_{34}&=\frac{V_3(\beta l)}{V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)}=4\,\frac{\operatorname{sh}(\beta l)\sin(\beta l)}{\operatorname{sh}^2(\beta l)-\sin^2(\beta l)};\\
f_{44}&=\frac{V_2(\beta l)}{V_3^2(\beta l)-V_2(\beta l)\,V_4(\beta l)}=4\,\frac{\operatorname{ch}(\beta l)\sin(\beta l)+\operatorname{sh}(\beta l)\cos(\beta l)}{\operatorname{sh}^2(\beta l)-\sin^2(\beta l)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(8.46)$$

Функции f_{11}, f_{12} ... представляют собой функции влияния. Графики этих функций приведены на рис. 8.17. Пользуясь функциями влияния, можно быстро определять перемещения w_0 и ϑ_0, вызываемые поперечными силами и моментами, приложенными по краям. Для получения полных перемещений к найденным величинам следует добавить еще перемещения, соответствующие частному решению $\overline{w}$, которые легко могут быть вычислены отдельно.

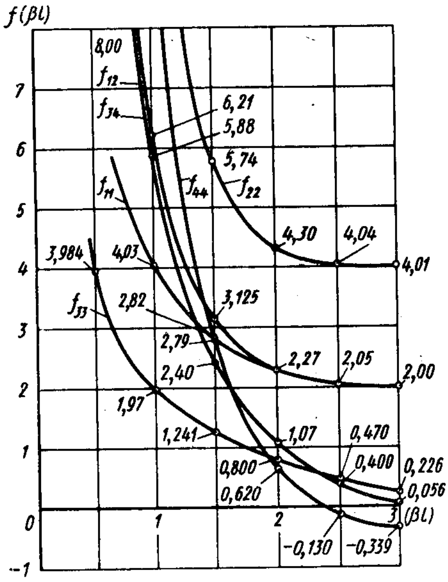


Рис. 8.17

Пример 8.6. Цилиндр нагружен двумя кольцевыми моментами (рис. 8.18, *а*). Дано: $l = 25$ см; $r = 20$ см.

Отделив участки цилиндра один от другого, приложим неизвестные силы и моменты X_1 и X_2 (рис. 8.18, *б*). Эти неизвестные должны быть определены из условий сопряжения участков:

$$w_{01}=w_{02};$$
$$\vartheta_{01}=-\vartheta_{02}.$$

Оси x для 1-го и 2-го участков направлены в противоположные стороны. Частное решение $\overline{w}$ в данном случае равно нулю. Для вычисления перемещений воспользуемся зависимостями (8.44), (8.45).

Для левого участка $\beta = 0{,}287$ 1/см; $\beta l_1 = 2{,}155$;

$$w_{01}=-\frac{X_2}{4D\beta^3}f_{11}(\beta l_1)+\frac{X_1}{4D\beta^2}f_{12}(\beta l_1)=-\frac{X_2\cdot 2{,}20}{4D\beta^3}+\frac{X_1\cdot 2{,}20}{4D\beta^2};$$

$$\vartheta_{01}=\frac{X_2}{4D\beta^2}f_{12}(\beta l_1)-\frac{X_1}{4D\beta}f_{22}(\beta l_1)=\frac{X_2\cdot 2{,}20}{4D\beta^2}-\frac{X_1\cdot 4{,}17}{4D\beta}$$

(Поперечная сила и момент при $x=l_1$ отсутствуют).

Для среднего участка $\beta = 0{,}287$ 1/см; $\beta l_2 = 2{,}87$;

$$w_{02} = \frac{X_2}{4D\beta^3} f_{11}(\beta l_2) + \frac{M + X_1}{4D\beta^2} f_{12}(\beta l_2) - \frac{X_2}{4D\beta^3} f_{33}(\beta l_2) - \frac{M + X_1}{4D\beta^2} f_{34}(\beta l_2) =$$

$$= \frac{X_2}{4D\beta^3} 2{,}0 + \frac{M + X_1}{4D\beta^2} 2{,}0 - \frac{X_2}{4D\beta^3} 0{,}29 - \frac{M + X_1}{4\beta^2} 0{,}10 = \frac{X_2}{4D\beta^3} 1{,}71 + \frac{(M + X_1)}{4D\beta^2} 1{,}9;$$

$$\vartheta_{02} = -\frac{X_2}{4D\beta^2} f_{12}(\beta l_2) - \frac{M + X_1}{4D\beta} f_{22}(\beta l_2) + \frac{X_2}{4D\beta^2} f_{34}(\beta l_2) + \frac{M + X_1}{4D\beta} f_{44}(\beta l_2) =$$

$$= -\frac{X_2 \cdot 2{,}0}{4D\beta^2} - \frac{(M + X_1)\, 4{,}0}{4D\beta} + \frac{X_2 \cdot 0{,}10}{4D\beta^2} - \frac{(M + X_1)\, 0{,}32}{4D\beta} =$$

$$= -\frac{X_2 \cdot 1{,}9}{4D\beta^2} - \frac{(M + X_1)\, 4{,}32}{4D\beta}.$$

Значения функций влияния взяты по графикам (см. рис. 8.17).

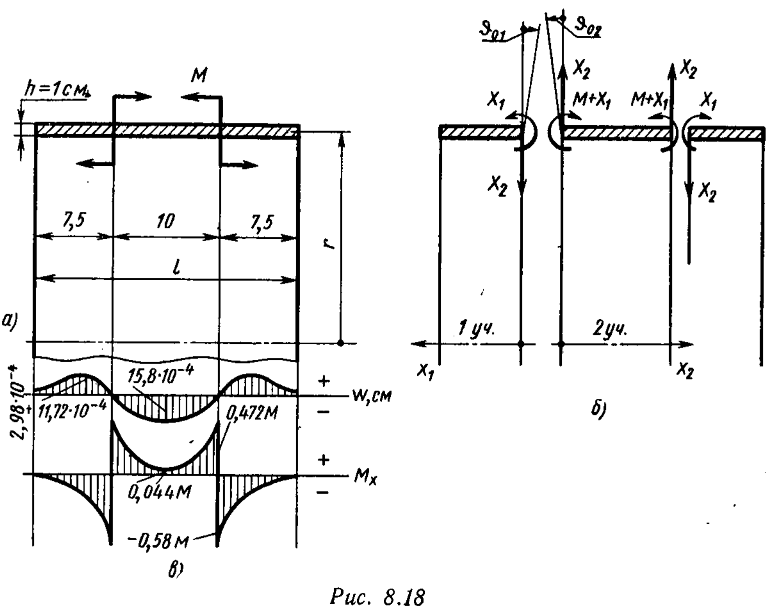


Рис. 8.18

Подставим выражения w_{01}, w_{02}, ϑ_{01}, ϑ_{02} в уравнения сопряжения участков

$$-\frac{2{,}2X_2}{4D\beta^3} + \frac{2{,}2X_1}{4D\beta^2} = \frac{1{,}71X_2}{4D\beta^3} + \frac{(M + X_1)\, 1{,}9}{4D\beta^2};$$

$$\frac{2{,}2X_2}{4D\beta^2} - \frac{4{,}17X_1}{4D\beta} = \frac{1{,}9X_2}{4D\beta^2} + \frac{(M + X_1)\, 4{,}32}{4D\beta}.$$

В результате решения этой системы найдем

$$X_1 = -0{,}528M; \quad X_2 = -0{,}526M\beta,$$

тогда

$$w_{01} = w_{02} \cong 0; \quad \vartheta_{01} = \vartheta_{02} = -\frac{1{,}05M}{4D\beta}.$$

Теперь, когда начальные параметры для первого и второго участков известны, перемещения и изгибающие моменты нетрудно вычислить по зависимостям (8.41) и (8.42). Эпюры w и M_x для данной оболочки приведены на рис. 8.18, *в*.

Пример 8.7. Круглая пластина, подкрепленная высоким кольцевым ребром, нагружена, как показано на рис. 8.19, *а*. Дано: $a = 16$ см; $b = 10$ см; $c = 24$ см; $h = 1$ см; $h_1 = 1{,}6$ см; $l = 2{,}8$ см; $H = 2$ см; $P = 1000$ Н/см.

Поскольку в данном случае высота ребра значительна, то его следует рассматривать как короткую цилиндрическую оболочку.

Отделим ребро от пластинки. За точку сопряжения примем точку пересечения срединных поверхностей. При таком способе разделения некоторая часть объема оказывается учтенной дважды, так как она относится и к пластине и к ребру. Это приводит к некоторой погрешности, однако вследствие малости упомянутого

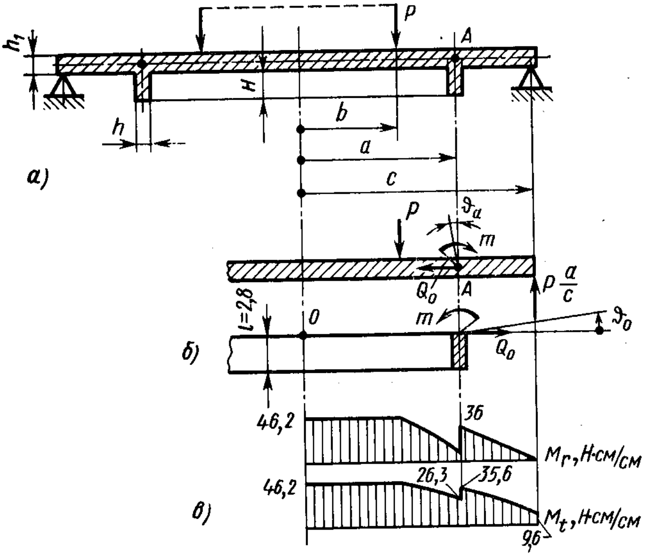


Рис. 8.19

объема, а также малой его напряженности (объем расположен близко от срединной поверхности пластины) эта ошибка невелика. Вместе с тем при таком способе разделения вычисления значительно упрощаются. Заметим, что другой способ разделения (по плоскости, совпадающей с нижней плоскостью пластины) также не свободен от погрешности, так как в области сопряжения гипотеза неискривляемости нормали точно не соблюдается. При решении примем допущение, что деформация растяжения срединной плоскости равна нулю.

В точке сопряжения A на ребро действует момент m и поперечная сила Q_0 (рис. 8.19, *б*). Обозначим через ϑ_a угол поворота нормали в точке сопряжения и через $l = H + \frac{h_1}{2}$ — высоту ребра. Запишем граничные условия для ребра:

при $x = 0$ $\quad w_0 = 0$; $\quad$ при $x = 0$ $\quad \vartheta_0 = \vartheta_a$;
при $x = 0$ $\quad P_1 = Q_0$ $\quad$ при $x = 0$ $\quad M_1 = -m$;
при $x = l$ $\quad P_2 = 0$; $\quad$ при $x = l$ $\quad M_2 = 0$.

Применив зависимости (8.44) и (8.45), придем к двум уравнениям:

$$\frac{Q_0}{4D\beta^3} f_{11}(\beta l) - \frac{m}{4D\beta^2} f_{12}(\beta l) = 0;$$

$$-\frac{Q_0}{4D\beta^2} f_{12}(\beta l) + \frac{m}{4D\beta} f_{22}(\beta l) = \vartheta_a,$$

из которых найдем

$$m=\frac{4D\beta f_{11}(\beta l)}{f_{11}f_{22}-f_{12}^2}\vartheta_a=D\beta k\vartheta_a, \tag{8.47}$$

где

$$k=\frac{\operatorname{sh}(2\beta l)-\sin(2\beta l)}{\operatorname{ch}^2(\beta l)+\cos^2(\beta l)}. \tag{8.48}$$

Изложенная в гл. 5, § 5 методика расчета круглых пластин с кольцевыми ребрами полностью применима и при расчете пластин с высокими ребрами, только в матрице перехода через ребро, определяемой равенством (5.64), вместо жесткости EJ следует подставить $D\beta kR_k^2$. Таким образом, взамен равенства (5.64) будет

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{D\beta kR_k}{D_{пл}} & 1\end{pmatrix}, \tag{8.49}$$

где $D_{пл}$ — жесткость первого участка пластины;

R_k — средний радиус окружности ребра.

В данном примере

$$R_k=a \quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=0{,}0916E \text{ Н}\cdot см;$$

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{a^2h^2}}=0{,}3216\ 1/см;\quad \beta l=0{,}9;\quad k=0{,}82$$

$$m=D\beta k\vartheta_a=0{,}0241E\vartheta_a;\quad D_{пл}=\frac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)}=0{,}375E\text{ Н}\cdot см;\quad L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1{,}03 & 1\end{pmatrix}.$$

Для сравнения приведем результаты вычислений для ребра как кольца с недеформируемым поперечным сечением

$$J_x=\frac{h}{3}\left[\left(H+\frac{h_1}{2}\right)^3-\left(\frac{h_1}{2}\right)^3\right]=7{,}17см^4;\quad m=\frac{EJ_x}{a^2}\vartheta_a=0{,}028E\vartheta_a;\ L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1{,}20 & 1\end{pmatrix}.$$

Разница в значениях податливости ребра в данном случае составляет 17%.

При $\beta l\leqslant 0{,}5$ ребро допустимо рассматривать как кольцо с недеформируемым сечением; если же $\beta l>3$, то ребро можно рассчитывать как длинную оболочку. При этом матрица (8.49) сохраняется без изменения, а параметр k будет равен 2.

Дальнейший расчет пластины не приводим, поскольку аналогичный расчет был рассмотрен в гл. 5, § 5. Значения изгибающих моментов для данной пластины указаны на рис. 8.19, *в*.

Пример 8.8. Определить изгибающие моменты в ступенчатой крышке, изображенной на рис. 8.20, *а*. Крышка нагружена равномерным наружным давлением. Дано: $a=10$ см; $l=3{,}1$ см; $h=0{,}4$ см.

Заданную систему можно расчленить на две плоские пластины и короткую цилиндрическую оболочку (рис. 8.20, *б*). В местах сочленения действуют неизвестные силовые факторы X_1, X_2, X_3, X_4. Так как пластины имеют большую жесткость на растяжение в своей плоскости, то можно считать, что радиальные перемещения w на краях цилиндрического участка равны нулю. Запишем условия сопряжения цилиндрического участка и пластин:

при $x=0$ $w=0$; $\vartheta=\vartheta_{12}$; при $x=l$ $w=0$; $\vartheta=-\vartheta_{21}$; где ϑ_{12} и ϑ_{21} — углы поворота нормалей на краях первой и второй пластины.

Положительные направления угловых перемещений указаны на рис. 8.20, *б*.

Угловые перемещения краев пластины вычислим по методике, изложенной в гл. 5, § 5:

$$\vartheta_{12}=\frac{a}{D(1+\mu)}\left(X_1+\frac{pa^2}{8}\right);$$

$$\vartheta_{21}=\frac{a}{D}(-0{,}732X_2+0{,}2744pa^2).$$

Перемещения краев цилиндрического участка определим по зависимостям (8.44) и (8.45) с добавлением частного решения $\overline{w}$ согласно формуле (8.22).

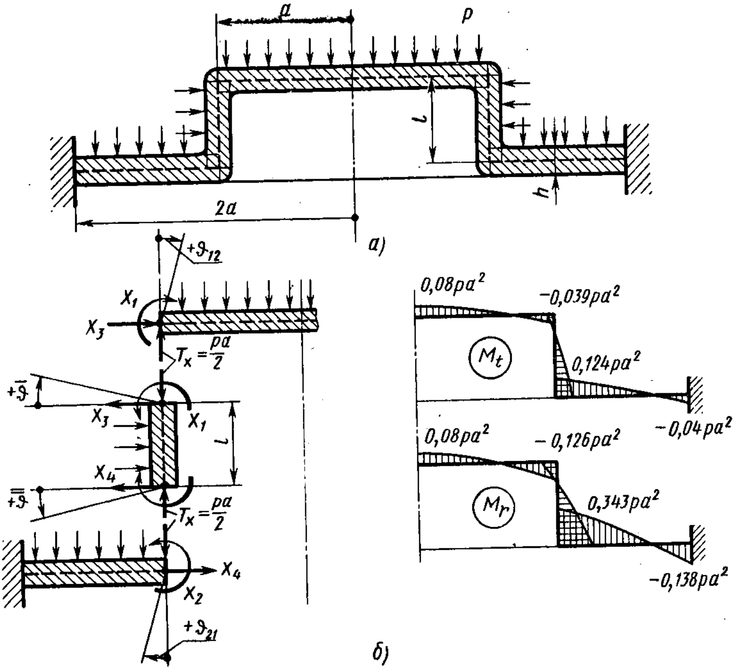


Рис. 8.20

В результате подстановки значений перемещений условия сопряжения цилиндрического участка и пластин приводятся к системе четырех уравнений:

$$-\frac{pa^2}{Eh}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)+\frac{X_3}{4D\beta^3}f_{11}(\beta l)+\frac{X_1}{4D\beta^2}f_{12}(\beta l)-\frac{X_4}{4D\beta^3}f_{32}(\beta l)-\frac{X_2}{4D\beta^2}\times$$
$$\times f_{34}(\beta l)=0;$$

$$-\frac{pa^2}{Eh}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)+\frac{X_4}{4D\beta^3}f_{11}(\beta l)+\frac{X_2}{4D\beta^2}f_{12}(\beta l)-\frac{X_3}{4D\beta^3}f_{33}(\beta l)-$$
$$-\frac{X_1}{4D\beta^2}f_{34}(\beta l)=0;$$

$$-\frac{X_3}{4D\beta^2}f_{12}(\beta l)-\frac{X_1}{4D\beta}f_{22}(\beta l)+\frac{X_4}{4D\beta^2}f_{34}(\beta l)+\frac{X_2}{4D\beta}f_{44}(\beta l)=$$
$$=\frac{a}{D(1+\mu)}\left(X_1+\frac{pa^2}{8}\right);$$

$$-\frac{X_4}{4D\beta^2}f_{12}(\beta l)-\frac{X_2}{4D\beta}f_{22}(\beta l)+\frac{X_3}{4D\beta^2}f_{34}(\beta l)+\frac{X_1}{4D\beta}f_{44}(\beta l)=$$
$$=\frac{a}{D}(0{,}732X_2+0{,}2744pa^2).$$

Согласно формуле (8.16) $\beta=\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{a^2h^2}}=0{,}643\ 1/см$; $\beta l=2{,}0$.

Значения функций влияния, найденные по графикам (см. рис. 8.17), следующие:

$$f_{11}(\beta l)=2{,}27;\quad f_{12}(\beta l)=2{,}27;\quad f_{22}(\beta l)=4{,}30;\quad f_{33}(\beta l)=0{,}80;$$
$$f_{34}(\beta l)=1{,}07;\quad f_{44}(\beta l)=0{,}62.$$

Подставив указанные величины в уравнения сопряжения и решив эту систему, получим значения силовых факторов:

$$X_1=-0{,}126pa^2;\quad X_2=0{,}343pa^2;$$
$$X_3=1{,}162pa;\quad X_4=-2{,}12pa.$$

Эпюры изгибающих моментов M_r и M_t для заданной системы приведены на рис. 8.20, *б*. Сравнение этих эпюр с эпюрами для аналогичной плоской пластины показывает, что благодаря наличию цилиндрического участка изгибающие моменты у заделки сильно снижаются. Так, например, у наружного края $M_r=-0{,}138pa^2$, тогда как в плоской пластине $M_r=-0{,}5\ pa^2$.

В наиболее напряженной точке, расположенной у нижнего края цилиндрического участка, изгибающий момент достигает величины $M_r = 0{,}343\ pa^2$.

§ 4. Расчет цилиндрических оболочек, имеющих несколько участков по методу начальных параметров

В общем случае нагружения на оболочку могут действовать кольцевые радиальные силы P, кольцевые распределенные моменты M, давление p (рис. 8.21). В сечениях, где приложены нагрузки, оболочку делят на несколько участков, для каждого из которых функция w — разная.

Для того чтобы не определять большое количество постоянных, целесообразно составить универсальное уравнение упругой поверх-

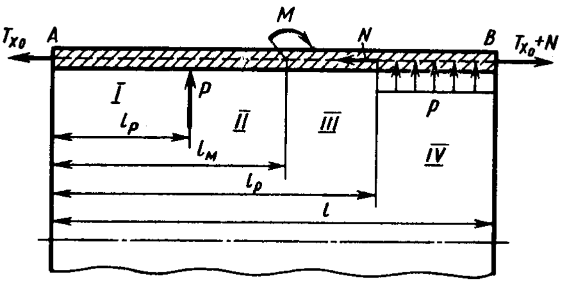


Рис. 8.21

ности, в котором постоянные интегрирования будут одинаковы для всех участков и будут выражены через начальные параметры w_0, ϑ_0, M_{x0} и Q_0. Тогда выражения функции w для различных участков будут отличаться только количеством слагаемых, содержащихся в уравнении.

При составлении универсального уравнения следует учитывать, что функция w и ее первая производная всюду должны быть непрерывны; вторая производная изменяется разрывно в местах приложения кольцевых сосредоточенных моментов. Третья производная имеет разрывы в местах приложения сосредоточенных радиальных сил и четвертая производная имеет разрывы в сечениях, где начинается распределенная нагрузка или где приложена сосредоточенная осевая нагрузка.

Опуская промежуточные выкладки, напишем универсальное уравнение упругой поверхности оболочки в окончательном виде

$$w=(w_0-\bar{w}_0)\,V_1(\beta x)+\frac{1}{\beta}(\vartheta_0-\bar{w}_0')\,V_2(\beta x)+\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{M_{x0}}{D}-\bar{w}_0''\right)V_3(\beta x)+\frac{1}{\beta^3}\left(\frac{Q_0}{D}-\bar{w}_0'''\right)V_4(\beta x)+\bar{w}_{\mathrm{I}}\,\Big|_{\text{I уч.}}+\frac{P}{D\beta^3}\times$$

$$\times V_4[\beta(x-l_P)]\,\Big|_{\text{II уч.}}+\frac{M}{D\beta^2}V_3[\beta(x-l_M)]\,\Big|_{\text{III уч.}}+\left(p-\frac{\mu N}{r}\right)\frac{r^2}{Eh}\{1-V_1[\beta(x-l_P)]\}.\,\Big|_{\text{IV уч.}} \qquad (8.50)$$

где $\bar{w}_1$ — частное решение для первого участка.

В общем случае количество слагаемых каждого вида зависит от числа нагрузок данного вида. Знаки слагаемых, принятые в уравнении (8.50), соответствуют направлениям нагрузок, указанным на рис. 8.21. Если давление p будет приложено только на некотором участке оболочки, то его следует продолжить до конца оболочки и добавленную часть компенсировать давлением обратного направления, т. е. вместо одной заданной нагрузки рассматривать две нагрузки, продолжающиеся до конца оболочки.

Начальные параметры w_0, ϑ_0, M_{x0} и Q_0 определяют, как обычно, из граничных условий. Два из них известны из условий при $x=0$; остальные два определяют из граничных условий в конечной точке.

Для конкретной оболочки, изображенной на рис. 8.21, $M_{x0}=0$; $Q_0=0$; $\bar{w}_{\mathrm{I}}=-\frac{\mu T_x r}{Eh}=\mathrm{const}$ и универсальное уравнение принимает вид

$$w=\left(w_0+\frac{\mu T_x r}{Eh}\right)V_1(\beta x)+\frac{\vartheta_0}{\beta}V_2(\beta x)-\frac{\mu T_x r}{Eh}\,\Big|_{\text{I уч.}}+\frac{P}{D\beta^3}V_4[\beta(x-l_P)]\,\Big|_{\text{II уч.}}+\frac{M}{D\beta^2}V_3[\beta(x-l_M)]\,\Big|_{\text{III уч.}}+\left(p-\frac{\mu N}{r}\right)\frac{r^2}{Eh}\{1-V_1[\beta(x-l_P)]\}.\,\Big|_{\text{IV уч.}}$$

Неизвестные начальные параметры w_0 и ϑ_0 подлежат определению из граничных условий в конечном сечении оболочки.

Метод расчета осесимметричных цилиндрических оболочек, основанный на применении универсального уравнения (8.50), имеет следующие недостатки.

1. Он применим к оболочкам только постоянной толщины.

2. Этим методом практически можно пользоваться, если общая длина оболочки не очень велика $[(\beta l) < 5]$. В противном случае функции Крылова принимают очень большие значения и при вычислениях приходится иметь дело с малыми разностями больших величин, что приводит к потере точности.

3. Вычисления остаются довольно громоздкими, так как выражение функции w для последних участков оболочки содержит большое число слагаемых.

Рассмотрим другой вариант метода начальных параметров, применимый к оболочкам с любым числом участков, а также к оболочкам со ступенчато изменяющейся толщиной и со ступенчатой срединной поверхностью.

Напряженно-деформированное состояние в произвольном сечении оболочки полностью определяется вектором состояния

$$X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w/h_1 \\ \vartheta \\ M_x/D_1\beta_1 \\ Q/D_1\beta_1^2 \end{vmatrix}, \tag{8.51}$$

где h_1, β_1 и D_1 — толщина, параметр тонкостенности и жесткость на начальном (первом) участке цилиндра. Эти постоянные множители введены для того, чтобы компоненты вектора X были безразмерными.

Выделим из оболочки произвольный i-й участок и обозначим через X_{i1} и X_{i2} значения вектора состояния в начальной и конечной точках.

Давление p_i и интенсивность осевой силы T_{xi} по длине участка будем считать постоянными. Тогда частное решение для данного участка

$$\bar{w}_i = \left(p_i - \frac{\mu T_{xi}}{r_i}\right)\frac{r_i^2}{Eh_i} = \text{const} \tag{8.52}$$

и, следовательно, $\bar{w}_i' = \bar{w}_i'' = \bar{w}_i''' = 0$.

Применим к i-му участку зависимости (8.40) — (8.43); в результате получим формулы для вычисления компонентов вектора X в конце участка по их значениям в начале участка. Эти формулы можно записать кратко в виде равенства

$$X_{i2} = L_i X_{i1} + R_i, \tag{8.53}$$

где L_i — матрица перехода от начала к концу участка;

$$L_i=\begin{vmatrix} V_1(\beta_i l_i) & \frac{1}{\beta_i h_1}V_2(\beta_i l_i) & \frac{D_1\beta_1}{D_i h_1\beta_i^2}V_3(\beta_i l_i) & \frac{D_1\beta_1^2}{D_i h_1\beta_i^3}V_4(\beta_i l_i) \\ -4\beta_i h_1 V_4(\beta_i l_i) & V_1(\beta_i l_i) & \frac{D_1\beta_1}{D_i\beta_i}V_2(\beta_i l_i) & \frac{D_1\beta_1^2}{D_i\beta_i^2}V_3(\beta_i l_i) \\ -\frac{4\beta_i^2 D_i h_i}{D_1\beta_1}\times V_3(\beta_i l_i) & -\frac{4\beta_i D_i}{D_1\beta_1}\times V_4(\beta_i l_i) & V_1(\beta_i l_i) & \frac{\beta_1}{\beta_i}V_2(\beta_i l_i) \\ -\frac{4\beta_i^3 D_i h_1}{D_1\beta_1^2}\times V_2(\beta_i l_i) & -\frac{4\beta_i^2 D_i}{D_1\beta_1^2}\times V_3(\beta_i l_i) & -\frac{4\beta_i}{\beta_1}V_4(\beta_i l_i) & V_1(\beta_i l_i) \end{vmatrix}; \quad (8.54)$$

R_i — матрица-столбец частных решений;

$$R_i=\begin{vmatrix} \frac{1}{h_1}[1-V_1(\beta_i l_i)] \\ 4\beta_i V_4(\beta_i l_i) \\ \frac{4D_i\beta_i^2}{D_1\beta_1}V_3(\beta_i l_i) \\ \frac{4D_i\beta_i^3}{D_1\beta_1^2}V_2(\beta_i l_i) \end{vmatrix}\bar{w}_i, \qquad (8.55)$$

где V_1, V_2, V_3, V_4 — функции Крылова;

β_i, $(\beta_i l_i)$, D_i — параметры, соответствующие рассматриваемому участку;

h_1, β_1, D_1 — параметры, соответствующие первому участку оболочки.

Выясним, как изменяются компоненты вектора X при переходе от i-го к $(i+1)$-му участку. Вследствие непрерывности функций w и ϑ первые два компонента имеют одно и то же значение в конце предыдущего и в начале следующего участка. Третий и четвертый компоненты могут скачкообразно изменяться за счет внешних нагрузок, приложенных на границе между участками, а также вследствие изменения радиуса срединной поверхности

$$\left(\frac{M_x}{D_1\beta_1}\right)_{(i+1)1}=\left(\frac{M_x}{D_1\beta_1}\right)_{i2}\frac{r_i}{r_{i+1}}+\frac{m_{i+1}}{D_1\beta_1}+\underline{\frac{T_{xi}r_i}{r_{i+1}}(r_{i+1}-r_i)\frac{1}{D_1\beta_1}};$$

$$\left(\frac{Q}{D_1\beta_1^2}\right)_{(i+1)1}=\left(\frac{Q}{D_1\beta_1^2}\right)_{i2}\frac{r_i}{r_{i+1}}+\frac{q_{i+1}}{D_1\beta_1^2},$$

где $m_{(i+1)}$ и $q_{(i+1)}$ — дополнительные изгибающий момент и поперечная сила, приложенные в начале $(i+1)$-го участка;

M_{xi2}, Q_{i2} и T_{xi} — силовые факторы в конце предыдущего, т. е. i-го участка;

r_i и r_{i+1} — радиусы i-го и $(i+1)$-го участков.

Подчеркнутое слагаемое учитывает дополнительный изгибающий момент, создаваемый осевой силой на плече, равном разности радиусов i-го и $(i+1)$-го участков.

Таким образом, при переходе от одного участка к другому компоненты вектора состояния пересчитываются согласно равенству

$$X_{(i+1)1}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_i}{r_{i+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_i}{r_{i+1}} \end{vmatrix} X_{i2}+$$

$$+\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_x(i+1)}{D_1\beta_1}+\frac{T_{xi}r_i(r_{i+1}-r_i)}{D_1\beta_i r_{i+1}} \\ \frac{q_{i+1}}{D_1\beta_1^2} \end{vmatrix}. \tag{8.56}$$

Очевидно, что если бы в начальном сечении первого участка вектор X был полностью известен, то, пользуясь равенствами (8.53) — (8.56) и переходя от участка к участку, можно было бы определить значения вектора состояния во всех сечениях цилиндра. В действительности, однако, бывают известны только два компонента вектора X в начальной точке, а остальные два должны быть определены по граничным условиям на противоположном краю цилиндра. В связи с этим целесообразно воспользоваться способом трех расчетов.

Вектор X представим в виде суммы трех слагаемых:

$$X=C_1\bar{X}+C_2\bar{\bar{X}}+\bar{\bar{\bar{X}}}, \tag{8.57}$$

где $\bar{X}$, $\bar{\bar{X}}$ и $\bar{\bar{\bar{X}}}$ — значения вектора X первого, второго и третьего расчетов;

C_1 и C_2 — неопределенные коэффициенты.

Первый и второй расчеты выполняются без учета заданной нагрузки. В первом расчете один из неизвестных параметров принимается за единицу, а остальные — за нуль. Аналогично во втором расчете — второй неизвестный начальный параметр принимается за единицу, а остальные — за нуль. Третий расчет выполняется с учетом заданной нагрузки, но при нулевых значениях неизвестных начальных параметров.

После того, как все три расчета будут выполнены, следует вычислить значения компонентов вектора X при $x=l$ и из граничных условий определить коэффициенты C_1 и C_2.

Если цилиндр имеет наряду с короткими также длинный участок, удовлетворяющий условию (8,26), то расчет замыкается на этом участке. Согласно уравнениям (8.27) и (8.28), компоненты вектора X в начале длинного участка связаны следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{w_{k1}}{h_1} &= \frac{D_1\beta_1}{2h_1D_k\beta_k^2}\left(\frac{M_{xk1}}{D_1\beta_1}\right) + \frac{D_1\beta_1^2}{2h_1D_k\beta_k^3}\left(\frac{Q_{k1}}{D_1\beta_1^2}\right) + \frac{\overline{w}_k}{h_1};\\ \vartheta_{k1} &= -\frac{D_1\beta_1}{D_k\beta_k}\left(\frac{M_{xk1}}{D_1\beta_1}\right) - \frac{D_1\beta_1^2}{2D_k\beta_k^2}\left(\frac{Q_{k1}}{D_1\beta_1^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8.58}$$

где k — индекс, соответствующий длинному участку.

Подставив в эти соотношения компоненты суммарного вектора $X_к$, получим систему двух уравнений, из которых определятся C_1 и C_2.

Пример 8.9. Определить напряжения и деформации в шпинделе станка (рис. 8.22, *а*), возникающие при затяжке гайки подшипника. Дано: $P = 10\,000$ Н; $E = 2\cdot10^7$ Н/см².

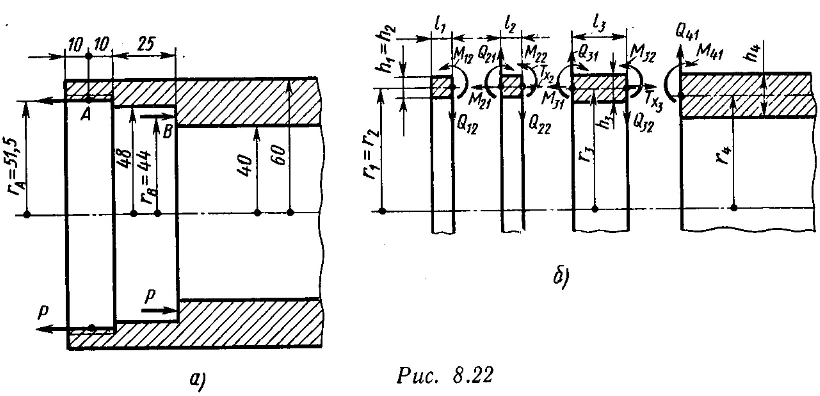


Рис. 8.22

Разделим шпиндель на три коротких участка и один длинный, как показано на рис. 8.22, *б*.

Несмотря на то, что цилиндр в данном случае толстостенный, будем пользоваться теорией тонкостенных цилиндрических оболочек (погрешность, возникающая при применении теории тонкостенных оболочек к толстостенным цилиндрам, оценена в § 6).

Вычислим изгибную жесткость и параметры β и (βl) на каждом участке.

Для первого и второго участков: $r_1 = r_2 = 5{,}6$ см; $h_1 = h_2 = 0{,}8$ см; $l_1 = l_2 = 1$ см;

$$D_1 = D_2 = \frac{E\cdot 0{,}8^3}{12\,(1-0{,}3^2)} = 0{,}0469E \text{ Н}\cdot\text{см};$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \sqrt[4]{\frac{3\,(1-0{,}3^2)}{5{,}6^2\cdot 0{,}8^2}} = 0{,}615 \text{ 1/см}; \quad \beta_1 l_1 = \beta_2 l_2 = 0{,}615.$$

Для третьего участка: $r_3 = 5{,}4$ см; $h_3 = 1{,}2$ см; $l_3 = 2{,}5$ см;

$$D_3 = \frac{E\cdot 1{,}2^3}{12\,(1-0{,}3^2)} = 0{,}1583E \text{ Н}\cdot\text{см};$$

$$\beta_3 = \sqrt[4]{\frac{3\,(1-0{,}3^2)}{5{,}4^2\cdot 1{,}2^2}} = 0{,}504 \text{ 1/см}; \quad \beta_3 l_3 = 1{,}26.$$

Для четвертого (длинного) участка: $r_4 = 5$ см; $h_4 = 2$ см;

$$D_4 = \frac{E \cdot 2^3}{12(1-0{,}3^2)} = 0{,}734E \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$\beta_4 = \sqrt[4]{\frac{3(1-0{,}3)^2}{5^2 \cdot 2^2}} = 0{,}406 \text{ 1/см}.$$

Выпишем значения функций Крылова [21]:

$$V_1(0{,}615) = 0{,}9761; \quad V_2(0{,}615) = 0{,}6121;$$
$$V_3(0{,}615) = 0{,}1889; \quad V_4(0{,}615) = 0{,}0388;$$
$$V_1(1{,}26) = 0{,}5824; \quad V_2(1{,}26) = 1{,}1545;$$
$$V_3(1{,}26) = 0{,}7716; \quad V_4(1{,}26) = 0{,}3294.$$

Граничные условия в начале первого участка: $M_{x11} = 0$; $Q_{11} = 0$. Перемещения w_{11} и ϑ_{11} неизвестны.

Матрицы перехода от начала к концу участка (8.54) для первого и второго участков одинаковы:

$$L_1 = L_2 = \begin{pmatrix} V_1(\beta_1 l_1) & \frac{1}{\beta_1 h_1} V_2(\beta_1 l_1) & \frac{1}{\beta_1 h_1} V_3(\beta_1 l_1) & \frac{1}{\beta_1 h_1} V_4(\beta_1 l_1) \\ -4\beta_1 h_1 V_4(\beta_1 l_1) & V_1(\beta_1 l_1) & V_2(\beta_1 l_1) & V_3(\beta_1 l_1) \\ -4\beta_1 h_1 V_3(\beta_1 l_1) & -4V_4(\beta_1 l_1) & V_1(\beta_1 l_1) & V_2(\beta_1 l_1) \\ -4\beta_1 h_1 V_2(\beta l) & -4V_3(\beta_1 l_1) & -4V_4(\beta_1 l_1) & V_1(\beta_1 l_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}9761 & 1{,}245 & 0{,}384 & 0{,}0789 \\ -0{,}0763 & 0{,}9761 & 0{,}6121 & 0{,}1889 \\ -0{,}372 & -0{,}1552 & 0{,}9761 & 0{,}6121 \\ -1{,}205 & -0{,}6676 & -0{,}1552 & 0{,}9761 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода для третьего участка

$$L_3 = \begin{pmatrix} V_1(\beta_3 l_3) & \frac{1}{\beta_3 h_1} V_2(\beta_3 l_3) & \frac{D_1\beta_1}{D_3 h_1 \beta_3^2} V_3(\beta_3 l_3) & \frac{D_1\beta_1^2}{D_3 h_1 \beta_3^3} V_4(\beta_3 l_3) \\ -4\beta_3 h_1 V_4(\beta_3 l_3) & V_1(\beta_3 l_3) & \frac{D_1\beta_1}{D_3\beta_3} V_2(\beta_3 l_3) & \frac{D_1\beta_1^2}{D_3\beta_3^2} V_3(\beta_3 l_3) \\ -\frac{4\beta_3^2 D_3 h_1}{D_1\beta_1} V_3(\beta_3 l_3) & -\frac{4\beta_3 D_3}{D_1\beta_1} V_4(\beta_3 l_3) & V_1(\beta_3 l_3) & \frac{\beta_1}{\beta_3} V_2(\beta_3 l_3) \\ -\frac{4\beta_3^3 D_3 h_1}{D_1\beta_1^2} V_2(\beta_3 l_3) & -\frac{4\beta_3^2 D_3}{D_1\beta_1^2} V_3(\beta_3 l_3) & -\frac{4\beta_3}{\beta_1} V_4(\beta_3 l_3) & V_1(\beta_3 l_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5824 & 2{,}863 & 0{,}693 & 0{,}1813 \\ -0{,}531 & 0{,}5824 & 0{,}4165 & 0{,}341 \\ -3{,}450 & -3{,}645 & 0{,}5824 & 1{,}409 \\ -4{,}220 & -7{,}025 & -1{,}082 & 0{,}5824 \end{pmatrix}.$$

Выполним первый расчет. Вектор состояния в начальной точке

$$\bar{X}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В конце первого и в начале второго участков

$$X_{12} = L_1 X_{11} = \begin{pmatrix} 0{,}9761 \\ -0{,}0763 \\ -0{,}372 \\ -1{,}205 \end{pmatrix} = \bar{X}_{21}.$$

В конце второго участка

$$X_{22}=L_2\bar{X}_{21}=\begin{pmatrix}0,622\\-0,608\\-1,45\\-2,245\end{pmatrix}.$$

В начале третьего участка

$$\bar{X}_{31}=\begin{pmatrix}0,622\\-0,608\\-1,45\,\dfrac{5,6}{5,4}\\-2,245\,\dfrac{5,6}{5,4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,622\\-0,608\\-1,503\\-2,334\end{pmatrix}.$$

В конце третьего и в начале четвертого участков

$$\bar{X}_{32}=L_3\bar{X}_{31}=\begin{pmatrix}-2,845\\-2,106\\-4,088\\1,902\end{pmatrix},$$

$$\bar{X}_{41}=\begin{pmatrix}-2,845\\-2,106\\-4,088\,\dfrac{5,4}{5,0}\\+1,902\,\dfrac{5,4}{5,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2,845\\-2,106\\-4,415\\2,058\end{pmatrix}.$$

Аналогично выполняется второй расчет

$$\bar{\bar{X}}_{11}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \bar{\bar{X}}_{12}=L_1\bar{\bar{X}}_{11}=\begin{pmatrix}1,245\\0,9761\\-0,1552\\-0,6676\end{pmatrix}=\bar{\bar{X}}_{21};$$

$$\bar{\bar{X}}_{22}=L_2\bar{\bar{X}}_{21}=\begin{pmatrix}2,318\\0,636\\-1,175\\-2,778\end{pmatrix};\quad \bar{\bar{X}}_{31}=\begin{pmatrix}2,318\\0,636\\-1,175\,\dfrac{5,6}{5,4}\\-2,778\,\dfrac{5,6}{5,4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,318\\0,636\\-1,219\\-2,880\end{pmatrix};$$

$$\bar{\bar{X}}_{32}=L_3\bar{\bar{X}}_{31}=\begin{pmatrix}1,803\\-2,348\\-15,068\\-14,49\end{pmatrix};\quad \bar{\bar{X}}_{41}=\begin{pmatrix}1,803\\-2,348\\-16,28\\-15,63\end{pmatrix}.$$

В третьем расчете учитывается заданная нагрузка; вектор состояния в начальной точке принимается равным нулю.

Для первого участка

$$\bar{\bar{\bar{X}}}_{11}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\quad \bar{\bar{\bar{X}}}_{12}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Для второго участка

$$T_{x2}=\frac{P}{2\pi r_2}=\frac{P}{2\pi 5,6}=0,0284P;$$

$$m_2=\frac{P\,(r_2-r_A)}{2\pi r_2}=1,28\cdot 10^{-2}P;$$

$$q_2=0;$$

$$\overline{w}_2=-\frac{\mu T_{x2}r_2}{Eh_2}=-\frac{0,3\cdot 0,0284P\cdot 5,6}{E\cdot 0,8}=-0,0597\frac{P}{E};$$

$$\overline{\overline{\overline{X}}}_{21}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dfrac{m_2}{D_1\beta_1}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0,444\\0\end{pmatrix}\frac{P}{E};$$

$$\overline{\overline{\overline{X}}}_{22}=L_2\overline{\overline{\overline{X}}}_{21}+R_2=L_2\begin{pmatrix}0\\0\\0,444\\0\end{pmatrix}\frac{P}{E}+$$

$$+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{h_1}\left[1-V_1(\beta_2 l_2)\right]\\4\beta_2V_4(\beta_2 l_2)\\\dfrac{4D_2\beta_2^2}{D_1\beta_1}V_3(\beta_2 l_2)\\\dfrac{4D_2\beta_2^3}{D_1\beta_1^2}V_2(\beta_2 l_2)\end{pmatrix}\overline{w}_2=\begin{pmatrix}0,1683\\0,2671\\0,4057\\-0,159\end{pmatrix}\frac{P}{E}.$$

Для третьего участка

$$T_{x3}=\frac{P}{2\pi r_3}=\frac{P}{2\pi\cdot 5,4}=0,0295P;$$

$$m_3=0;\quad q_3=0;$$

$$\overline{w}_3=-\frac{\mu T_{x3}r_3}{Eh_3}=-0,0398\frac{P}{E};$$

$$\overline{\overline{\overline{X}}}_{31}=\begin{pmatrix}0,1683\\0,2671\\0,4057\,\dfrac{5,6}{5,4}\\-0,159\,\dfrac{5,6}{5,4}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\T_{x2}\,\dfrac{r_2\,(r_3-r_2)}{D_1\beta_1 r_3}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,1683\\0,2671\\0,217\\-0,165\end{pmatrix}\frac{P}{E};$$

$$\overline{\overline{\overline{X}}}_{32}=L_3\overline{\overline{\overline{X}}}_{31}+R_3=L_3\begin{pmatrix}0,1683\\0,2671\\0,217\\-0,165\end{pmatrix}\frac{P}{E}+$$

$$+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{h_1}\left[1-V_1(\beta_3 l_3)\right]\\4\beta_3V_4(\beta_3 l_3)\\\dfrac{4D_3\beta_3^2}{D_1\beta_1}V_3(\beta_3 l_3)\\\dfrac{4D_2\beta_2^3}{D_1\beta_1^2}V_2(\beta_2 l_2)\end{pmatrix}\overline{w}_3=\begin{pmatrix}0,962\\0,074\\-1,832\\-3,313\end{pmatrix}\frac{P}{E}.$$

В начале четвертого участка

$$T_{x4}=0; \quad m_4=-\frac{P\,(r_4-r_B)}{2\pi r_4};$$

$$\overline{\overline{\overline{X}}}_{41}=\begin{pmatrix} 0{,}962 \\ 0{,}074 \\ -1{,}832\frac{5{,}4}{5} \\ -3{,}13\frac{5{,}4}{5} \end{pmatrix}\frac{P}{E}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_4}{D_1\beta_1}+\frac{T_{x3}r_3\,(r_4-r_3)}{D_1\beta_1 r_4} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}962 \\ 0{,}074 \\ -3{,}09 \\ -3{,}38 \end{pmatrix}\frac{P}{E}.$$

Суммарные компоненты вектора состояния в начале четвертого участка

$$\frac{w_{41}}{h_1}=\frac{\overline{w}_{41}}{h_1}C_1+\frac{\overline{\overline{w}}_{41}}{h_1}C_2+\frac{\overline{\overline{\overline{w}}}_{41}}{h_1}=-\,2{,}845C_1+1{,}803C_2+0{,}962\,\frac{P}{E};$$

$$\vartheta_{41}=\overline{\vartheta}_{41}C_1+\overline{\overline{\vartheta}}_{41}C_2+\overline{\overline{\overline{\vartheta}}}_{41}=-\,2{,}106C_1-2{,}348C_2+0{,}074\,\frac{P}{E};$$

$$\left(\frac{M_x}{D_1\beta_1}\right)_{41}=\left(\frac{\overline{M}_x}{D_1\beta_1}\right)_{41}C_1+\left(\frac{\overline{\overline{M}}_x}{D_1\beta_1}\right)_{41}C_2+\left(\frac{\overline{\overline{\overline{M}}}_x}{D_1\beta_1}\right)_{41}=$$

$$=-\,4{,}415C_1-16{,}28C_2-3{,}09\,\frac{P}{E};$$

$$\left(\frac{Q}{D_1\beta_1^2}\right)_{41}=\left(\frac{\overline{Q}}{D_1\beta_1^2}\right)_{41}C_1+\left(\frac{\overline{\overline{Q}}}{D_1\beta_1^2}\right)_{41}C_2+\left(\frac{\overline{\overline{\overline{Q}}}}{D_1\beta_1^2}\right)_{41}=$$

$$=2{,}058C_1-15{,}63C_2-3{,}38\,\frac{P}{E}.$$

Поскольку четвертый участок — длинный, эти компоненты должны удовлетворять соотношениям (8.58). Решив систему двух уравнений, найдем коэффициенты

$$C_1=0{,}308\,\frac{P}{E}=0{,}154\cdot 10^{-3}; \quad C_2=-\,0{,}176\,\frac{P}{E}=-\,0{,}873\cdot 10^{-3}.$$

Компоненты суммарного вектора состояния определяются согласно равенству (8.57).

Значения радиального и углового перемещений в начале первого участка

$$w_{11}=h_1C_1=1{,}23\cdot 10^{-4}\ \text{см}; \quad \vartheta_{11}=C_2=-\,0{,}873\cdot 10^{-3}\ \text{рад}.$$

§ 5. Численный метод расчета цилиндрических оболочек

Численный метод расчета с использованием ЭВМ целесообразно применять при переменной толщине стенки оболочки ($h=h\,(x)$) или при переменном по длине давлении. Метод, изложенный в настоящем параграфе, является общим и применяется не только для расчета цилиндрических оболочек, но главным образом для расчета более сложных оболочек, с произвольной формой меридианов при произвольном законе изменения давления и толщины вдоль меридиана.

Напряженно-деформированное состояние в произвольной точке оболочки полностью определяется вектором состояния X [см. § 4 уравнения (8.51)]. Примем в качестве независимой переменной и компонентов вектора состояния следующие безразмерные величины:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{x}{r}; \quad x_1 = \frac{w}{r}; \quad X_2 = \vartheta = \frac{dw}{dx};\\ &X_3 = \frac{M_x r}{D_1} = \frac{Dr}{D_1}\frac{d^2w}{dx^2};\\ &X_4 = \frac{Qr^2}{D_1} = \frac{Dr^2}{D_1}\frac{d^3w}{dx^3}, \end{aligned}\right\} \tag{8.59}$$

где D_1 — изгибная жесткость в некоторой фиксированной точке, например, при $\xi = 0$;

D — изгибная жесткость в текущем сечении.

Эти компоненты отличаются от прежних только постоянными множителями, которые введены с целью упрощения уравнений.

Для численного решения на ЭВМ исходные уравнения необходимо преобразовать таким образом, чтобы производные компонентов вектора X были выражены через сами компоненты.

На основании уравнений (8.10) — (8.13):

$$\frac{dw}{dx} = \vartheta;$$

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{D} M_x;$$

$$\frac{dM_x}{dx} = Q;$$

$$\frac{dQ}{dx} = p - \frac{T_t}{r} = p - \frac{\mu T_x}{r} - \frac{Ehw}{r^2}.$$

Перейдя к безразмерным переменным, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dX_1}{d\xi} = X_2;\\ &\frac{dX_2}{d\xi} = \frac{D_1}{D} X_3;\\ &\frac{dX_3}{d\xi} = X_4;\\ &\frac{dX_4}{d\xi} = -\frac{Ehr^2}{D_1} X_1 + \frac{r^3}{D_1}\left(p - \frac{\mu T_x}{r}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8.60}$$

где $D = D(x)$.

Система дифференциальных уравнений (8.60) эквивалентна одному дифференциальному уравнению четвертого порядка (8.15). Эту систему можно записать в матричной форме

$$\frac{dX}{d\xi} = FX + G, \tag{8.61}$$

где X — столбец искомых функций, характеризующих вектор напряженно-деформированного состояния в текущем сечении;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}; \tag{8.62}$$

F — квадратная матрица (4×4);

$$F = \begin{pmatrix} \varphi_{11}\varphi_{12}\varphi_{13}\varphi_{14} \\ \varphi_{12}\varphi_{22}\varphi_{23}\varphi_{24} \\ \varphi_{31}\varphi_{32}\varphi_{33}\varphi_{34} \\ \varphi_{41}\varphi_{42}\varphi_{43}\varphi_{44} \end{pmatrix}; \tag{8.63}$$

G — столбец функций нагрузки;

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{pmatrix}. \tag{8.64}$$

Для цилиндрической оболочки

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{Ehr^2}{D_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{r^3}{D_1}\left(p - \mu \frac{T_x}{r}\right) \end{pmatrix}. \tag{8.65}$$

Численное интегрирование системы уравнений (8.61) при заданных начальных условиях выполняется на ЭЦВМ по стандартной программе и не вызывает затруднений. Однако в рассматриваемых задачах (в задачах типа Коши) в начальной точке бывают известны только два компонента вектора X, а остальные два подлежат определению согласно граничным условиям при $x = l$.

Это затруднение можно преодолеть, применив способ трех расчетов, согласно которому вектор X представляют в виде суммы (8.57), а неопределенные коэффициенты C_1, C_2 подбирают так, чтобы компоненты суммарного вектора X удовлетворяли граничным условиям при $x = l$.

При значительной длине оболочки, однако, способ трех расчетов становится недостаточно точным, так как при наличии в решении быстро возрастающих функций возникает необходимость вычисления малых разностей больших величин.

Более эффективным методом численного решения подобных задач является метод прогонки [2]. Сущность этого метода состоит в следующем:

Рассечем мысленно оболочку на две части и рассмотрим часть, ограниченную начальной точкой и текущим сечением. Напряженно-деформированное состояние в текущем сечении полностью характеризуется вектором состояния X [см. равенство (8.62)]. Конечная цель состоит в определении компонентов этого вектора, однако на начальном этапе поставим несколько другую задачу. Искомый вектор X разобьем на два вектора X_{I} и X_{II}, по два компонента в каждом.

В качестве составляющих вектора X_{I} примем X_1 и X_2 (т. е. перемещения w и ϑ); тогда компонентами вектора X_{II} будут X_3 и X_4 (т. е. силовые факторы M_x и Q). Можно, а при некоторых вариантах граничных условий и более удобно в качестве компонентов вектора X_{I} принять X_1 и X_3 или X_1 и X_4, тогда составляющими вектора X_{II} будут два остальных.

Очевидно, что между X_{I} и X_{II} существует линейная зависимость

$$X_{\mathrm{I}} = LX_{\mathrm{II}} + R. \tag{8.66}$$

Согласно этой зависимости при заданных начальных условиях всякому значению силовых факторов M_x и Q в текущем сечении соответствуют определенные значения перемещений w и ϑ в том же сечении. Следовательно, $L = \begin{pmatrix} l_{11} l_{12} \\ l_{21} l_{22} \end{pmatrix}$ представляет собой матрицу функций влияния, а $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$— столбец функций нагрузки.

Определим вначале L и R как функции от ξ. При этом будем исходить из того, что вектор $X = \begin{pmatrix} X_{\mathrm{I}} \\ X_{\mathrm{II}} \end{pmatrix}$ должен удовлетворять дифференциальному уравнению (8.61), а также граничным условиям при $x = 0$.

Дифференциальное уравнение (8.61) разобьем на два уравнения

$$\frac{dX_{\mathrm{I}}}{d\xi} = F_{11}X_{\mathrm{I}} + F_{12}X_{\mathrm{II}} + G_{\mathrm{I}}; \tag{8.67}$$

$$\frac{dX_{\mathrm{II}}}{d\xi} = F_{21}X_{\mathrm{I}} + F_{22}X_{\mathrm{II}} + G_{\mathrm{II}}, \tag{8.68}$$

где F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22} — квадратные блоки в матрице (8.63);

$$F_{11} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}\, \varphi_{12} \\ \varphi_{21}\, \varphi_{22} \end{pmatrix}; \; F_{12} = \begin{pmatrix} \varphi_{13}\, \varphi_{14} \\ \varphi_{23}\, \varphi_{24} \end{pmatrix}; \; F_{21} = \begin{pmatrix} \varphi_{31}\, \varphi_{32} \\ \varphi_{41}\, \varphi_{42} \end{pmatrix}; \; F_{22} = \begin{pmatrix} \varphi_{33}\, \varphi_{34} \\ \varphi_{43}\, \varphi_{44} \end{pmatrix}; \tag{8.69}$$

G_{I} и G_{II} — столбцы по два элемента;

$$G_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}; \quad G_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} G_3 \\ G_4 \end{pmatrix}. \tag{8.70}$$

Граничные условия при $x = 0$ в общем случае можно представить в виде равенства

$$m_{01} X_{\rm I}(0) + m_{02} X_{\rm II}(0) = N_0, \tag{8.71}$$

где m_{01} и m_{02} — числовые матрицы 2×2 (заданные);

N_0 — столбец из двух элементов (заданный).

Так, например, если край оболочки жестко заделан, то $m_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m_{02} = 0$; $N_0 = 0$. Если край нагружен заданными силой Q_0 и моментом M_0, то $m_{01} = 0$; $m_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{M_0 r}{D_1} \\ \dfrac{Q_0 r^2}{D_1} \end{pmatrix}$ и т. д.

Разделив уравнение (8.71) на m_{01}, преобразуем его к виду, подобному уравнению (8.66):

$$X_{\rm I}(0) = L_0 X_{\rm II}(0) + R_0. \tag{8.72}$$

Тогда

$$L_0 = -\frac{m_{02}}{m_{01}} \text{ и } R_0 = \frac{N_0}{m_{01}} \tag{8.72a}$$

можно рассматривать как начальные значения искомых матриц $L(x)$ и $R(x)$.

Рассмотрим вначале однородную задачу ($G = 0$ и $R = 0$). Продифференцируем уравнение (8.66) по ξ:

$$\frac{d\mathring{X}_{\rm I}}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(L\mathring{X}_{\rm II}\right) = \frac{dL}{d\xi}\mathring{X}_{\rm II} + L\frac{d\mathring{X}_{\rm II}}{d\xi}.$$

Подставив выражения (8.67) и (8.68) и произведя замену $\mathring{X}_{\rm I}$ на $L\mathring{X}_{\rm II}$, придем к следующему равенству:

$$\frac{dL}{d\xi}\mathring{X}_{\rm II} + LF_{21}L\mathring{X}_{\rm II} + LF_{22}\mathring{X}_{\rm II} - F_{11}L\mathring{X}_{\rm II} - F_{12}\mathring{X}_{\rm II} = 0.$$

Это равенство должно выполняться для каждой линейно независимой составляющей вектора $\mathring{X}_{\rm II}$, следовательно, $\mathring{X}_{\rm II}$ можно сократить. В результате получается матричное дифференциальное уравнение относительно L:

$$\frac{dL}{d\xi} = -LF_{21}L - LF_{22} + F_{11}L + F_{12}. \tag{8.73}$$

Это уравнение эквивалентно четырем обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно элементов матрицы L.

Аналогично находят решение неоднородной задачи. Продифференцировав уравнение (8.66) с учетом слагаемого R, а затем подставив зависимости (8.67) и (8.68) и приняв во внимание, что L уже известно из уравнения (8.73), получим матричное уравнение для определения R:

$$\frac{dR}{d\xi} = -LF_{21}R + F_{11}R - LG_{\rm II} + G_{\rm I}. \tag{8.74}$$

Уравнения (8.73) и (8.74) интегрируются численным методом на ЭЦВМ при начальных условиях, определяемых уравнением (8.72). При этом необходимости вычисления малых разностей не возникает.

Выполнив интегрирование от 0 до $\frac{l}{r}$, получим уравнение, связывающее значения векторов X_{I} и X_{II} в конечной точке:

$$X_{\text{I}}(l) = L(l)\,X_{\text{II}}(l) + R(l). \qquad (8.75)$$

Другое уравнение, содержащее те же неизвестные, составляется на основании граничных условий при $x = l$:

$$m_{l_1} X_{\text{I}}(l) + m_{l_2} X_{\text{II}}(l) = N_l$$

или

$$X_{\text{I}}(l) = -\frac{m_{l_2}}{m_{l_1}} X_{\text{II}}(l) + \frac{N_l}{m_{l_1}}. \qquad (8.76)$$

Совместное решение уравнений (8.75) и (8.76) дает значения компонентов вектора X при $x = l$. Рассмотренный метод, называемый методом «прямой прогонки», позволяет определить компоненты вектора X только в конечной точке.

При необходимости определения значений вектора X также в промежуточных точках осуществляют «обратную прогонку» или «встречную прогонку». Выбрав начало отсчета на противоположном краю цилиндра и интегрируя уравнения (8.73) и (8.74) в обратном направлении при начальных условиях (8.76), получают для каждой промежуточной точки второе уравнение с неизвестными X_{I} и X_{II}, подобное уравнению (8.66). Решение системы двух уравнений, также выполняемое автоматически на ЭЦВМ, дает значение искомых неизвестных в промежуточных точках (при обратной прогонке $dx < 0$, следовательно, знаки ϑ и Q изменяются на обратные).

Для цилиндрической оболочки переменной толщины уравнение (8.73) развертывается следующим образом.

Матрицы (8.65) разбиваем на блоки:

$$F_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{D_1}{D}; \quad F_{21} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{Ehr^2}{D_1}; \quad F_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G_{\text{I}} = 0; \quad G_{\text{II}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{r^3}{D_1}\left(p_1 - \mu \frac{T_x}{r}\right).$$

Вычисляем слагаемые правой части уравнения:

$$LF_{21} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{Ehr^2}{D_1}\right) = -\begin{pmatrix} l_{12} & 0 \\ l_{22} & 0 \end{pmatrix} \frac{Ehr^2}{D_1};$$

$$LF_{21}L = -\frac{Ehr^2}{D_1} \begin{pmatrix} l_{12} & 0 \\ l_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = -\frac{Ehr^2}{D_1} \begin{pmatrix} l_{12}\,l_{11} & l_{12}^2 \\ l_{22}\,l_{11} & l_{22}\,l_{12} \end{pmatrix};$$

$$LF_{22} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_{11} \\ 0 & l_{21} \end{pmatrix}; \quad F_{11}L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{21} & l_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем матрицы в уравнение (8.73):

$$\frac{d}{d\xi}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \frac{Ehr^2}{D_1}\begin{pmatrix} l_{12}\, l_{11} & l_{12}^2 \\ l_{22}\, l_{11} & l_{22}\, l_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & l_{11} \\ 0 & l_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{21} & l_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{D_1}{D}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение эквивалентно четырем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dl_{11}}{d\xi} = \frac{Ehr^2}{D_1} l_{12} l_{11} + l_{21};$$

$$\frac{dl_{12}}{d\xi} = \frac{Ehr^2}{D_1} l_{12}^2 - l_{11} + l_{22};$$

$$\frac{dl_{21}}{d\xi} = \frac{Ehr^2}{D_1} l_{22} l_{11} + \frac{D_1}{D};$$

$$\frac{dl_{22}}{d\xi} = \frac{Ehr^2}{D_1} l_{22} l_{12} - l_{21}.$$

Уравнения в развернутом виде приведены лишь для пояснения, практически же при расчете на ЭЦВМ удобно использовать непосредственно матричные уравнения.

Заметим, что если в начальной точке будут заданы не геометрические, а силовые граничные условия (т. е. если будут заданы Mx_0 и Q_0), то матрица m_{01} в равенстве (8.71) будет равна нулю, а L_0 и R_0 в уравнении (8.72) обратятся в бесконечность. Для того чтобы избежать этого, следует в качестве компонентов вектора X_1 принять X_3 и X_4, т. е. $\frac{M_x r}{D_1}$ и $\frac{Qr^2}{D_1}$. Тогда m_{01} не будет равно нулю.

В случае смешанных начальных условий в качестве компонентов вектора X_1 следует выбрать те параметры, значения которых при $x = 0$ заданы (или равны нулю). Если же имеется упругая заделка, то компоненты X_1 (0) и X_2 (0) связаны с компонентами X_3 (0) и X_4 (0) заданной линейной зависимостью. В этом случае выбор компонентов вектора X_1 не играет существенной роли.

§ 6. Напряжения в тонкостенных цилиндрических оболочках при неравномерном нагреве

Температурные напряжения в оболочке могут возникать в следующих случаях: при неравномерном нагреве; при стеснении температурной деформации наложенными на оболочку связями; при нагреве многослойной оболочки, составленной из разнородных материалов. Однако не всякий неравномерный нагрев вызывает температурные напряжения. Так, например, если температура будет линейно изменяться по длине цилиндрической оболочки, а по окружности и по толщине будет постоянной, то срединная поверхность из цилиндрической превратится в коническую, напряжения же при этом не возникнут.

Рассматриваемая теория температурных напряжений в цилиндрических оболочках основана на следующих допущениях.

1. Материал оболочки предполагают однородным, а нагрев оболочки осесимметричным.

2. Диапазон изменения температур по объему оболочки не велик; модуль упругости E, коэффициент Пуассона μ и коэффициент линейного расширения α считаются постоянными.

3. Ввиду тонкостенности оболочки принимают, что по толщине температура изменяется по линейному закону от t_1 на внутренней поверхности до t_2 на наружной поверхности:

$$t = t_0 + \Delta t \frac{z}{h}, \tag{8.77}$$

где $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$ — средняя температура стенки;

$\Delta t = t_1 - t_2$ — перепад температур.

Кроме перечисленных допущений, используют общие гипотезы теории оболочек Кирхгофа — Лява, а также предположения о малости перемещений по сравнению с толщиной и о малости толщины оболочки по сравнению с ее радиусом.

Вывод основного дифференциального уравнения рассматриваемой задачи аналогичен выводу, изложенному в § 1.

Отличие состоит только в том, что в уравнения закона Гука необходимо добавить дополнительные температурные слагаемые. В результате взамен зависимостей (8.3) — (8.10) получим следующие:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} z + \mu \frac{w}{r} - (1+\mu)\alpha t\right]; \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{w}{r} + \mu \frac{du}{dx} + \mu \frac{d^2w}{dx^2} z - (1+\mu)\alpha t\right]; \end{aligned}\right\} \tag{8.78}$$

$$\left.\begin{aligned} T_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dx} + \mu \frac{w}{r} - (1+\mu)\alpha t_0\right]; \\ T_t &= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{w}{r} + \mu \frac{du}{dx} - (1+\mu)\alpha t_0\right]; \end{aligned}\right\} \tag{8.79}$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= D\left[\frac{d^2w}{dx^2} - (1+\mu)\alpha \frac{\Delta t}{h}\right]; \\ M_t &= D\left[\mu \frac{d^2w}{dx^2} - (1+\mu)\alpha \frac{\Delta t}{h}\right]; \end{aligned}\right\} \tag{8.80}$$

$$T_t = \mu T_x + \frac{Ehw}{r} - Eh\alpha t_0. \tag{8.81}$$

Соответственно выражение поперечной силы (8.14) и основное дифференциальное уравнение задачи (8.15) принимают вид

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = D\left[\frac{d^3w}{dx^3} - (1+\mu)\frac{\alpha}{h}\frac{d(\Delta t)}{dx}\right]; \tag{8.82}$$

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_1}{D} - \mu \frac{T_x}{rD} - \frac{Eh\alpha t_0}{rD} + \frac{(1+\mu)\alpha}{h} \cdot \frac{d^2(\Delta t)}{dx^2}. \tag{8.83}$$

Для данной оболочки решением уравнения (8.83) будет выражение (8.25), а для короткой — выражение (8.33).

Частное решение $\bar{w}$ зависит от заданного поля температур и от нагрузки. Если температурное поле и нагрузка таковы, что

$$\frac{d^4 t_0}{dx^4} = 0, \quad \frac{d^2(\Delta t)}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^4 p_1}{dx^4} = 0, \quad \frac{d^4 T_x}{dx^4} = 0,$$

то частным решением будет

$$\bar{w} = \left(p_1 - \mu \frac{T_x}{r}\right) \frac{r^2}{Eh} + r\alpha t_0. \tag{8.84}$$

Методика определения постоянных интегрирования ничем не отличается от рассмотренной в § 2 и 3. Некоторое упрощение может быть достигнуто путем разделения заданной задачи на две. В первой задаче рассматривают только температурные напряжения и деформации, при этом находят только частное решение (постоянные интегрирования полагают равными нулю). Во второй задаче учитывают только внешнее силовое воздействие. Постоянные интегрирования выбирают так, чтобы сумма решений первой и второй задачи удовлетворяла граничным условиям.

Пример 8.10. Рассмотрим бесконечно длинную оболочку, на внутренней поверхности которой температура t_1, а на наружной t_2. По длине температуры постоянны.

Заданное состояние можно представить как совокупность равномерного нагрева $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$, не вызывающего напряжений, и перепада температур $\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2$ (рис. 8.23).

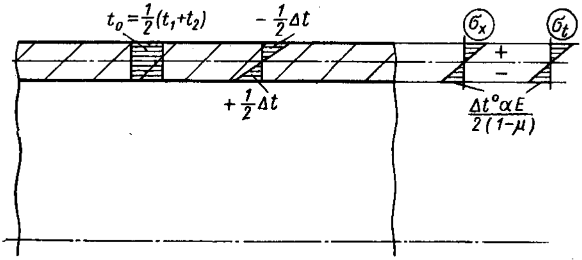


Рис. 8.23

Рассмотрим отдельно напряженно-деформированное состояние оболочки, соответствующее перепаду температур Δt. Так как температура по длине не изменяется, то все величины по длине постоянны и, следовательно, общее решение однородного уравнения отсутствует. Частное решение уравнения (8.84) при $p_1 = 0$, $T_x = 0$ и $t_0 = 0$ также равно нулю. Таким образом, перемещения точек срединной поверхности w и окружное усилие T_t, согласно зависимости (8.81), равны нулю. Однако изгибающие моменты в данном случае не равны нулю. Согласно зависимостям (8.80):

$$M_x = M_t = -(1+\mu) \frac{\alpha D}{h} \Delta t. \tag{8.85}$$

Особенность этого состояния состоит в том, что, несмотря на наличие изгибающих моментов, кривизна срединной поверхности не изменяется (изменение кривизны, вызванное неравномерным нагревом, компенсируется изменением кривизны, создаваемым изгибающими моментами).

Величина напряжений в наружных и внутренних точках оболочки

$$\sigma_{x\max} = \mp \frac{M_x \cdot 6}{h^2} = \pm \frac{\Delta t \alpha E}{2(1-\mu)};$$

$$\sigma_{t\max} = \mp \frac{M_t \cdot 6}{h^2} = \pm \frac{\Delta t \alpha E}{2(1-\mu)}.$$

Эпюра температурных напряжений по толщине стенки для рассматриваемого случая показана на рис. 8.23.

Пример 8.11. Цилиндрическая оболочка со ступенчато изменяющейся толщиной (рис. 8.24, *а*) нагрета по внутренней поверхности до температуры $t_1 = 100°$ С, а по наружной до температуры $t_2 = 40°$ С. По длине оболочки температура постоянна.

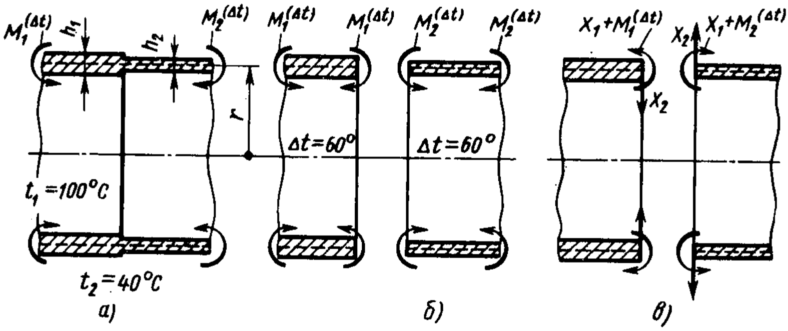


Рис. 8.24

Дано: $r = 50$ см; $h_1 = 2$ см; $h_2 = 1$ см; материал — сталь; $\mu = 0{,}3$; $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см²; $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}$ 1/град.

Заданное состояние можно представить как равномерный нагрев до температуры $t_0 = 70°$ С плюс перепад температур $\Delta t = 60°$ С.

Так как равномерный нагрев напряжений не вызывает, то его в дальнейшем не учитываем.

Разрежем оболочку на две части и представим заданное состояние как сумму двух состояний, изображенных на рис. 8.24, *б* и *в*. В состоянии, показанном на рис. 8.24, *б*, обе части оболочки нагреты с заданным перепадом температур $\Delta t = 60°$ С и дополнительно нагружены по краям моментами:

на первом участке

$$M_1^{(\Delta t)} = \alpha \Delta t (1+\mu) \frac{D_1}{h_1} = \frac{\alpha \Delta t E h_1^2}{12(1-\mu)} = 6290 \text{ Н} \cdot \text{см/см}$$

и на втором участке

$$M_1^{(\Delta t)} = \alpha \Delta t (1+\mu) \frac{D_2}{h_2} = \frac{\alpha \Delta t E h_2^2}{12(1-\mu)} = 1572 \text{ Н} \cdot \text{см/см}.$$

Величина и направление этих моментов выбраны согласно зависимости (8.85); в этом случае каждый из участков рассматривается как часть соответствующей бесконечно длинной оболочки, в которой никаких перемещений не возникает.

В состоянии, показанном на рис. 8.24, *в*, оболочка нагружена только краевыми нагрузками в месте разреза, причем X_1 и X_2 — силовые факторы, которые фактически действуют в заданной оболочке, а $M_1^{(\Delta t)}$ и $M_2^{(\Delta t)}$ добавлены, чтобы компенсировать моменты, приложенные в состоянии, изображенном на рис. 8.24, *б*.

Для определения силовых факторов X_1 и X_2 достаточно рассмотреть только состояние, показанное на рис. 8.24, *в*. Запишем условия совместности деформаций частей оболочки; последние состоят в том, что радиальные перемещения и углы поворота нормали на краях должны быть одинаковы: $w_{01} = w_{02}$; $\vartheta_{01} = -\vartheta_{02}$.

В последнем равенстве взят знак минус, так как направления оси x для первой и второй частей оболочки — противоположны.

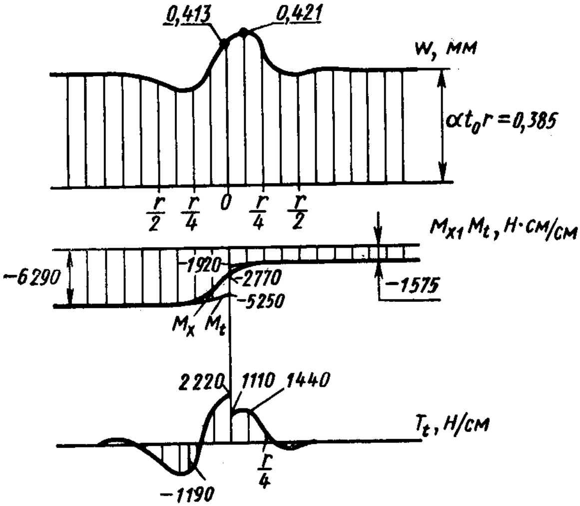


Рис. 8.25

Для определения перемещений используем зависимости (8.27) и (8.28). Для первой (левой) части оболочки при $x = 0$, $\bar{w} = 0$,

$$M_0 = X_1 + M_2^{(\Delta t)}, \quad Q_0 = -X_2;$$

$$w_{01} = \frac{X_1 + M_1^{(\Delta t)}}{2D_1\beta_1^2} - \frac{X_2}{2D_1\beta_1^3}; \quad \vartheta_{01} = -\frac{X_1 + M_1^{(\Delta t)}}{D_1\beta_1} + \frac{X_2}{2D_1\beta_1^2}.$$

Аналогично для второй части при $x = 0$, $\bar{w} = 0$, $M_0 = X_1 + M_2^{(\Delta t)}$, $Q_0 = X_2$;

$$w_{02} = \frac{X_1 + M_2^{(\Delta t)}}{2D_2\beta_2^2} + \frac{X_2}{2D_2\beta_2^3}; \quad \vartheta_{02} = -\frac{X_1 + M_2^{(\Delta t)}}{D_2\beta_2} - \frac{X_2}{2D_2\beta_2^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнения сопряжения участков и учитывая, что

$$D_1 = \frac{Eh_1^3}{12(1-\mu^2)} = 1{,}468 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$D_2 = \frac{Eh_2^3}{12(1-\mu^2)} = 0{,}1833 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{см} = \frac{1}{8} D_1;$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h_1^2}} = 0{,}1285 \frac{1}{\text{см}}; \quad \beta_2 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h_2^2}} = 0{,}1813 \frac{1}{\text{см}} = \beta_1\sqrt{2};$$

$$M_1^{(\Delta t)} = 6290 \text{ Н} \cdot \text{см/см}; \quad M_2^{(\Delta t)} = 1572 \text{ Н} \cdot \text{см/см} = \frac{1}{4} M_1^{(\Delta t)},$$

получим два уравнения:

$$3X_1+(2\sqrt{2}+1)\frac{X_2}{\beta_1}=0;$$

$$(4\sqrt{2}+1)X_1+\frac{3}{2}\frac{X_2}{\beta_1}=-(4\sqrt{2}+4)\,1572 \text{ Н}\cdot\text{см/см},$$

решив которые, найдем

$$X_1=-2770 \text{ Н}\cdot\text{см/см}; \quad X_2=279 \text{ Н/см}.$$

Далее по формулам (8.27) — (8.31) вычислим перемещения и внутренние силовые факторы в состоянии, представленном на рис. 8.24, *в*. Сложив их с соответствующими величинами состояния, изображенного на рис. 8.24, *б*, получим значения силовых факторов и пермещений для заданного состояния (рис. 8.25).

Наиболее напряженная точка расположена на наружной поверхности более тонкой части, около ступенчатого перехода. Усилия, изгибающие моменты и напряжения в этом месте имеют следующие значения:

$$M_x=-2770 \text{ Н}\cdot\text{см/см}; \quad M_t=-1920 \text{ Н}\cdot\text{см/см}; \quad T_x=0;$$

$$T_t=1110 \text{ Н}\cdot\text{см/см};$$

$$\sigma_x=\frac{M_x\cdot 6}{h_2^2}=16\,620 \text{ Н/см}^2; \quad \sigma_t=\frac{T_t}{h_2}+\frac{M_t\cdot 6}{h_2^2}=12\,630 \text{ Н/см}^2.$$

Вдали от ступенчатого перехода в цилиндре возникают изгибающие моменты $M_1^{(\Delta t)}$ и $M_2^{(\Delta t)}$, которым соответствуют напряжения:

$$\sigma_x=\sigma_t=9430 \text{ Н/см}^2.$$

§ 7. Применение теории тонкостенных цилиндрических оболочек к расчету толстостенных цилиндров

Определение напряжений и деформаций в толстостенных цилиндрах, нагруженных переменной по длине осесимметричной нагрузкой, методами теории упругости связано со значительными трудностями, вследствие чего до настоящего времени решение получено лишь для некоторых простейших частных случаев.

Более просто расчет осесимметричных толстостенных цилиндров может быть выполнен приближенными методами [21].

Эти методы, основанные на принципе минимума энергии, позволяют получать требуемый результат с достаточной степенью точности, однако вычисления остаются довольно сложными.

Если толщина стенки цилиндра не очень велика $\left(\frac{r_1}{r_2}>0{,}5\right)$, то с достаточной для инженерной практики точностью расчет толстостенных цилиндров можно выполнить на основе теории тонкостенных цилиндрических оболочек. При этом, если соблюдать определенные правила и использовать для вычисления напряжений несколько измененные расчетные формулы, то погрешность расчета не превысит 5—10%. Прежде всего все нагрузки, приложенные к наружной или к внутренней поверхности цилиндра, необходимо привести к срединной поверхности. Так, например, если на цилиндр действует внутреннее давление $p_{\text{вн}}$ и наружное давление $p_н$, то в расчетные зависимости следует подставлять приведенное давление

$$p_1 = \frac{p_{вн} r_1}{r} - \frac{p_н r_2}{r}. \tag{8.86}$$

Аналогично следует поступать и с сосредоточенными силами или моментами.

Далее, по формулам теории осесимметричной деформации тонкостенных цилиндрических оболочек обычным порядком определяется функция w и по граничным условиям находятся постоянные интегрирования.

Функция w достаточно хорошо характеризует перемещения точек срединной поверхности цилиндра. Что касается перемещений точек внутренней и наружной поверхности, то их целесообразно вычислять по напряжениям.

Обычные формулы (8.18) и (8.19) для вычисления напряжений в данном случае не обеспечивают требуемой точности, так как они выведены на основании допущения, что разница между длинами внутренних, наружных и средних кольцевых волокон — пренебрежимо мала. При выводе уточненных формул для напряжений используем зависимости (8.1) и (8.2) для относительных удлинений. При этом представим зависимость (8.2) в следующем виде:

$$\varepsilon_t = \frac{w}{r - z}. \tag{8.87}$$

Слагаемое z в знаменателе не может быть отброшено, так как в рассматриваемом случае z и r — величины одного порядка.

Перейдем от деформаций к напряжениям

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} z + \mu \frac{w}{r-z}\right]; \tag{8.88}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{w}{r-z} + \mu \frac{du}{dx} + \mu \frac{d^2w}{dx^2} z\right]. \tag{8.89}$$

Пользуясь тем, что осевое усилие T_x известно, исключим из этих зависимостей $\frac{du}{dx}$. Запишем уравнение равновесия отсеченной части цилиндра

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_x 2\pi\rho \, d\rho - T_x 2\pi r = 0.$$

Подставив под знак интеграла выражение напряжения σ_x (8.88) и выполнив интегрирование, получим

$$\frac{E}{1-\mu^2} 2\pi r h \left(\frac{du}{dx} + \mu \frac{w}{r}\right) - D 2\pi \frac{d^2w}{dx^2} - T_x 2\pi r = 0;$$

отсюда

$$\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{T_x}{h} + \frac{D}{rh} \cdot \frac{d^2w}{dx^2} - \mu \frac{w}{r} \cdot \frac{E}{1-\mu^2}.$$

С учетом последнего равенства формулы (8.88) и (8.89) принимают вид

$$\sigma_x = \frac{T_x}{h} + \frac{Ez}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2w}{dx^2}; \tag{8.90}$$

$$\sigma_t = \mu\sigma_x + \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{r-z} - \mu^2\frac{w}{r}\right), \tag{8.91}$$

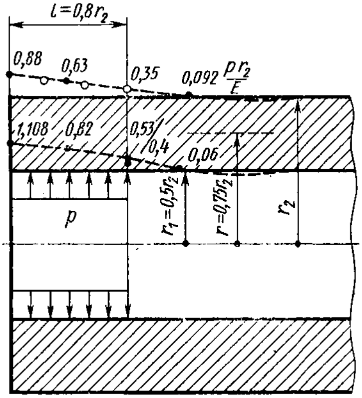
где z — расстояние, отсчитываемое от срединной поверхности по направлению к центру [второстепенные слагаемые в формулах (8.90), (8.91) отброшены].

Кроме напряжений σ_x и σ_t, в стенке цилиндра возникает еще напряжение σ_r. Во внутренних и в наружных точках это напряжение равно соответственно внутреннему и наружному давлению (взятому со знаком минус). При вычислении эквивалентного напряжения, а также при определении перемещений на внутренней и наружной поверхности напряжение σ_r также следует учитывать.

Радиальные перемещения на внутренней и наружной поверхности целесообразно определять по окружной деформации. Формулы для перемещений имеют вид

$$\left.\begin{aligned} w_{r_1} &= \varepsilon_{tr_1}r_1 = \frac{r_1}{E}\left[\sigma_t - \mu\sigma_x - \mu\sigma_r\right]_{(r=r_1)};\\ w_{r_2} &= \varepsilon_{tr_2}r_2 = \frac{r_2}{E}\left[\sigma_t - \mu\sigma_x - \mu\sigma_r\right]_{(r=r_2)}. \end{aligned}\right\} \tag{8.92}$$

Пример 8.12. Определить напряжения в толстостенном цилиндре, нагруженном внутренним давлением на участке, примыкающем к торцу (рис. 8.26, *а*).



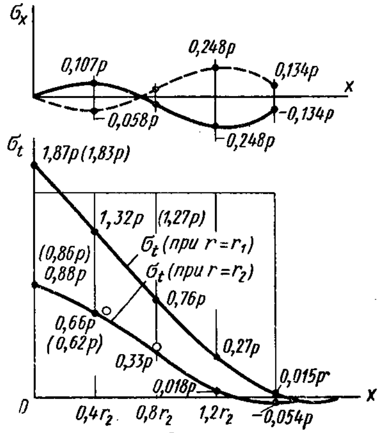


Рис. 8.26

Внутреннее давление, действующее на первом участке, приведем к срединной поверхности

$$p_1 = p\,\frac{r_1}{r} = \frac{2}{3}\,p.$$

Вычислим параметры β, βl и жесткость D:

$$r=\frac{3}{4}r_2;\quad h=0{,}5r_2;\quad l=0{,}8r_2;$$

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h^2}}=\frac{2{,}10}{r_2};\quad \beta l=1{,}68;$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=0{,}01147Er_2^3.$$

Так как, $\beta l<3$, то функцию w для первого участка возьмем по уравнению (8.40). В данном случае: $M_{x(x=0)}=0$; $Q_{(x=0)}=0$; $\overline{w}_{\rm I}=\frac{3}{4}\frac{pr_2}{E}$; $T_{x\rm I}=0$, и функция $w_{\rm I}$ принимает вид

$$w_{\rm I}=\left(w_0-\frac{3}{4}\frac{pr_2}{E}\right)V_1(\beta x)+\frac{\vartheta_0}{\beta}V_2(\beta x)+\frac{3}{4}\frac{pr_2}{E}.$$

Вычислим w, v, M_x и Q при $x=l$.

Значения функций Крылова при $\beta l=1{,}68$ следующие [21]:

$$V_1(1{,}68)=-0{,}3026;\quad V_2(1{,}68)=1{,}2386;\quad V_3(1{,}68)=1{,}2871;$$
$$V_4(1{,}68)=0{,}7604.$$

По формулам (8.40) — (8.43) найдем

$$w_{{\rm I}_{x_1=l}}=\left(w_0-\frac{3}{4}\frac{pr_2}{E}\right)(-0{,}3026)+\frac{\vartheta_0}{\beta}1{,}2386+\frac{3}{4}\frac{pr_2}{E}=w_{{\rm II}_{x_2=0}};$$

$$\vartheta_{{\rm I}_{x_1=l}}=\beta\left[-4\left(w_0-\frac{3}{4}\frac{pr_2}{E}\right)0{,}7604+\frac{\vartheta_0}{\beta}(-0{,}3026)\right]=\vartheta_{{\rm II}_{x_2=0}};$$

$$M_{x{\rm I}_{x_1=l}}=D\beta^2\left[-4\left(w_0-\frac{3}{4}\frac{pr_2}{E}\right)1{,}2871-4\frac{\vartheta_0}{\beta}0{,}7604\right]=M_{x{\rm II}_{x_2=0}};$$

$$Q_{{\rm I}_{x_1=l}}=D\beta^3\left[-4\left(w_0-\frac{3}{4}\frac{pr_2}{E}\right)1{,}2386-4\frac{\vartheta_0}{\beta}1{,}2871\right]=Q_{{\rm II}_{x_2=0}}.$$

Эти величины можно рассматривать как начальные параметры для второго участка. Ввиду того, что второй участок — длинный, применим формулы (8.27) и (8.28); при $x_2=0$ получим

$$w_{\rm II}=\frac{1}{2D\beta^2}M_{x\,\rm II}-\frac{1}{2D\beta^3}Q_{\rm II};$$

$$\vartheta_{\rm II}=-\frac{1}{D\beta}M_{x\rm II}-\frac{1}{2D\beta^2}Q_{\rm II}.$$

Подставив в эти равенства выражения $w_{\rm II}$, $\vartheta_{\rm II}$, $M_{x\rm II}$, $Q_{\rm II}$ и решив систему двух уравнений, определим w_0 и ϑ_0:

$$w_0=0{,}904\frac{pr_2}{E};\quad \frac{\vartheta_0}{\beta}=-0{,}278\frac{pr_2}{E}.$$

После подстановки значений w_0 и ϑ_0 функция $w_{\rm I}$ первого участка принимает вид

$$w_{\rm I}=0{,}154\frac{pr_2}{E}V_1(\beta x)-0{,}278\frac{pr_2}{E}V_2(\beta x)+\frac{3}{4}\frac{pr_2}{E}$$

и ее вторая производная

$$\frac{d^2w_{\rm I}}{dx^2}=\beta^2\left[-0{,}616\frac{pr^2}{E}V_3(\beta x)+1{,}112\frac{pr^2}{E}V_4(\beta x)\right].$$

Значения M_x и Q при $x_1 = l$, т. е. при $x_2 = 0$:

$$M_{x\text{II}} = 0{,}054\,\frac{D\beta^2 pr_2}{E};$$

$$Q_{\text{II}} = 0{,}668\,\frac{D\beta^3 pr_2}{E}.$$

Функция w_{II} второго участка и ее вторая производная:

$$w_{\text{II}} = [0{,}027e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) + 0{,}334e^{-\beta x}\cos\beta x]\,\frac{pr_2}{E};$$

$$\frac{d^2 w_{\text{II}}}{dx^2} = [0{,}054e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) + 0{,}668e^{-\beta x}\sin\beta x]\,\frac{pr_2\beta^2}{E}.$$

Напряжения определим по формулам (8.91) и (8.92): на первом участке

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{d^2 w_{\text{I}}}{dx^2}\,z = \frac{pr_2\beta^2}{1-\mu^2}\,z\,[-0{,}616V_3(\beta x) + 1{,}112V_4(\beta x)];$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{w}{r-z} - \mu^2\,\frac{w}{r}\right] + \mu\sigma_x = \frac{pr_2}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{r-z} - \frac{\mu^2}{r}\right)\times$$

$$\times\left[0{,}154V_1(\beta x) - 0{,}278V_2(\beta x) + \frac{3}{4}\right] + \mu\sigma_x$$

и на втором участке

$$\sigma_x = \frac{pr_2\beta^2}{(1-\mu^2)}\,z\,[0{,}054e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) + 0{,}668e^{-\beta x}\sin\beta x];$$

$$\sigma_t = \frac{pr_2}{1-\mu^2}\,[0{,}027e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) +$$

$$+ 0{,}334e^{-\beta x}\cos\beta x]\left(\frac{1}{r-z} - \frac{\mu^2}{r}\right) + \mu\sigma_x.$$

Перемещения точек внутренней и наружной поверхности вычислим по формулам (8.92).

Результаты вычислений представлены в виде эпюр на рис. 8.26, *б*. В скобках указаны значения напряжений, вычисленные по способу В. Л. Бидермана [21]; светлыми точками отмечены величины, полученные экспериментальным путем. Совпадение результатов расчета по изложенной методике с результатами опыта — достаточно удовлетворительное.

Глава 9. НЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Полубезмоментная теория цилиндрических оболочек В. З. Власова

На рис. 9.1 изображены тонкостенные цилиндры, опирающиеся на две опоры и нагруженные равномерно распределенной нагрузкой.

Первый цилиндр (рис. 9.1, *а*) имеет большую длину по сравнению с диаметром; второй (рис. 9.1, *б*), наоборот, малую длину; третий (рис. 9.1, *в*) цилиндр имеет длину, соизмеримую с его диаметром (цилиндр средней длины). При деформации первого цилиндра преобладает изгиб в продольном направлении. Такой цилиндр можно рассматривать как обыкновенную балку, поперечное сечение которой не искажается.

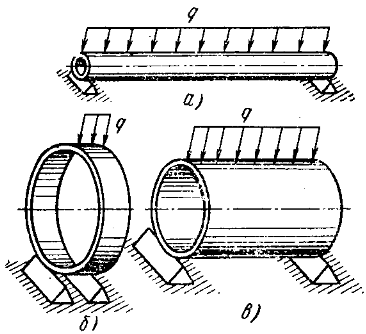


Рис. 9.1

Второй цилиндр в основном деформируется в окружном направлении и почти не изгибается в продольном направлении. В этом случае изгибом в продольном направлении можно пренебречь и рассматривать цилиндр как плоское кольцо.

В третьем случае роль изгиба в продольном и в окружном направлениях приблизительно одинакова. Этот случай более сложный.

Наиболее точное решение задач такого рода может быть получено на основании моментной теории, в которой учитываются изгибающие моменты в стенке оболочки как в продольном, так и в поперечном направлении. Однако практическое решение задач по моментной теории связано со сложными вычислениями.

Более просто задачи о несимметричной деформации цилиндрических оболочек решаются по полубезмоментной теории В. З. Власова [8, 9].

В этой теории, кроме общих гипотез теории оболочек Кирхгофа — Лява, введены дополнительные допущения.

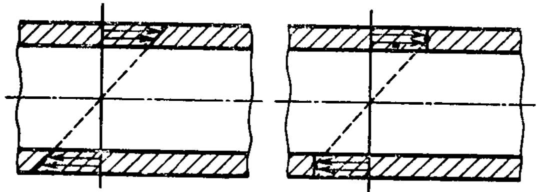
1. Принимается, что нормальные напряжения в сечениях, перпендикулярных оси оболочки, равномерно распределены по толщине

стенки (но переменны по окружности). Для пояснения этого допущения на рис. 9.2, *а* показано действительное распределение напряжений, возникающих при изгибе тонкостенного цилиндра, а на рис. 9.2, *б* — распределение напряжений, принимаемое в данной теории.

Первое допущение можно сформулировать также иначе: изгибающий момент M_x в стенке оболочки в продольном направлении считается равным нулю, т. е. нормальные напряжения в поперечных сечениях оболочки приводятся только к осевому усилию T_x, интенсивность которого переменна по окружности.

2. Касательные напряжения τ_{xr}, перпендикулярные срединной поверхности, и соответствующая им поперечная сила Q_x принимаются равными нулю.

Касательные напряжения τ_{xt}, направленные по окружности, считаются равномерно распределенными по толщине стенки. Эти



а) *б)*

Рис. 9.2

напряжения приводятся к сдвигающей силе S, интенсивность которой также переменна по окружности.

3. Оболочка считается нерастяжимой в окружном направлении. Относительное удлинение срединной поверхности в окружном направлении принимается равным нулю.

4. Угловая деформация срединной поверхности также принимается равной нулю. Это допущение аналогично допущению, принимаемому в теории стесненного кручения тонкостенных стержней, согласно которому угловая деформация срединной поверхности считается равной нулю, несмотря на наличие касательных напряжений стесненного кручения.

5. Взаимное влияние продольной и поперечной деформации не учитывается, т. е. коэффициент Пуассона считается равным нулю.

Введение всех перечисленных гипотез равносильно замене реальной оболочки расчетной схемой (рис. 9.3), в которой оболочка представляется как совокупность большого числа отдельных нерастяжимых колец, связанных между собою шарнирными связями, запрещающими относительные перемещения в осевом и окружном направлениях, но не передающими радиально направленных поперечных сил и изгибающих моментов.

Уравнения полубезмоментной теории В. З. Власова можно также получить исходя из уравнений общей теории несимметричной деформации цилиндрических оболочек, отбросив в них некоторые второстепенные слагаемые [18]. В дальнейшем, однако, будем основываться на сформулированных выше допущениях.

Приведем краткий вывод основных зависимостей рассматриваемой теории.

Выделим из оболочки бесконечно малый элемент (рис. 9.4) и составим уравнения его равновесия. Согласно принятым допущениям по граням элемента, перпендикулярным оси оболочки, действуют только растягивающая сила T_x и сдвигающая сила S. В продольном сечении возникают: нормальная сила T_t, сдвигающая сила S, а также поперечная сила Q_t и изгибающий момент M_t.

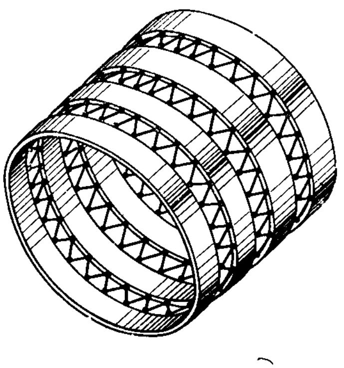


Рис. 9.3

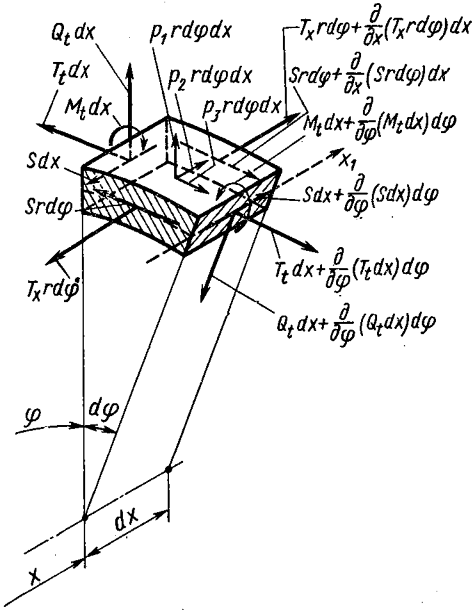


Рис 9.4

С увеличением координат на dx и $d\varphi$ все эти силовые факторы получают соответствующие приращения, как показано на рис. 9.4. Кроме внутренних силовых факторов, на выделенный элемент действует поверхностная нагрузка, имеющая радиальную составляющую p_1, осевую составляющую p_2 и окружную составляющую p_3.

Приравняв нулю суммы проекций всех сил на нормаль к поверхности, на продольную ось x_1 и на касательную к окружности, а также сумму моментов относительно оси x_1, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial Q_t}{\partial\varphi}+T_t-p_1 r=0; \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial x}r+\frac{\partial S}{\partial\varphi}+p_2 r=0; \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial\varphi}+\frac{\partial S}{\partial x}r-Q_t+p_3 r=0; \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial M_t}{\partial\varphi}-Q_t r=0. \tag{9.4}$$

В этих уравнениях слагаемые более высокого порядка отброшены, а также учтено, что $\sin d\varphi = d\varphi$, $\cos d\varphi = 1$.

Четыре уравнения равновесия содержат пять неизвестных силовых факторов: приведем эту систему к одному уравнению с двумя неизвестными. Выразив из уравнения (9.1) силу T_t подставим ее в уравнение (9.3).

$$-\frac{\partial^2 Q_t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} r + \frac{\partial S}{\partial x} r - Q_t + p_3 r = 0. \tag{9.5}$$

Разделим далее уравнение (9.5) на r и продифференцируем по φ, а уравнение (9.2) продифференцируем по x, после чего вычтем одно уравнение из другого:

$$-\frac{\partial^3 Q_t}{r\partial \varphi^3} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial Q_t}{r\partial \varphi} + \frac{\partial p_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} r - \frac{\partial p_2}{\partial x} r = 0. \tag{9.6}$$

Это уравнение, с учетом равенства (9.4), можно представить также в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial^4 M_t}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 M_t}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{\partial^2 p_1}{r\,\partial \varphi^2} - \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_3}{r\,\partial \varphi}. \tag{9.7}$$

Введем обозначение дифференциального оператора В. З. Власова:

$$\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \Omega, \tag{9.8}$$

тогда уравнение равновесия (9.7) запишется более кратко:

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r^3}\Omega(M_t) = \frac{\partial^2 p_1}{r\,\partial \varphi^2} - \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_3}{r\,\partial \varphi}. \tag{9.9}$$

Перейдем к выводу уравнений деформаций и перемещений. На рис. 9.5 показан элемент срединной поверхности и обозначены компоненты перемещений: w — радиальное, u — осевое, v — окружное. Приращения перемещений, соответствующие приращениям координат dx и $d\varphi$, указаны на том же рисунке.

Выразим относительные линейные деформации ε_x и ε_t и угловую деформацию γ_{xt} через перемещения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \tag{9.10}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\partial v}{r\,\partial \varphi} + \frac{w}{r}; \tag{9.11}$$

$$\gamma_{xt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\,\partial \varphi}. \tag{9.12}$$

Так как согласно принятым допущениям $\varepsilon_t = 0$ и $\gamma_{xt} = 0$, то из уравнений (9.11) и (9.12) следует

$$w = -\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \tag{9.13}$$

$$\frac{\partial u}{r\,\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9.14}$$

Определим угол поворота нормали ψ в окружном направлении. При перемещении точки M по окружности на расстояние v (см. рис. 9.5) нормаль поворачивается на угол $\frac{v}{r}$; при перемещении двух соседних по окружности точек M и L в радиальном направлении, соответственно, на w и $w+\frac{\partial w}{\partial \varphi}d\varphi$ поворот нормали составляет $-\frac{\partial w}{r\,\partial \varphi}$. Следовательно, полный угол поворота нормали в окружном направлении

$$\psi=\frac{v}{r}-\frac{\partial w}{r\,\partial \varphi}. \qquad (9.15)$$

Изменение кривизны окружности при деформации равно производной от угла ψ по длине дуги

$$\varkappa=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}=\frac{\partial \psi}{r\,\partial \varphi}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right). \qquad (9.16)$$

Используя зависимости (9.13) — (9.16), выразим перемещения u и w, а также изменение кривизны $\varkappa$ через окружное перемещение v:

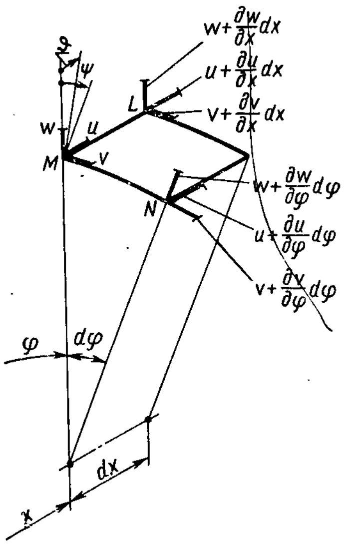


Рис. 9.5

$$w=-\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \qquad (9.17)$$

$$u=-\int\limits_{\varphi}\frac{\partial v}{\partial x}r\,d\varphi; \qquad (9.18)$$

$$\varkappa=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3}\right). \qquad (9.19)$$

Напишем уравнения упругости, связывающие внутренние силовые факторы и деформации. Согласно закону Гука (при $\mu=0$)

$$T_x=E_1h_1\varepsilon_x=E_1h_1\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad (9.20)$$

$$M_t=-E_2J\varkappa. \qquad (9.21)$$

Для оболочки с постоянной толщиной стенки, изготовленной из изотропного материала

$$E_1=E_2=E; \quad h_1=h; \quad J=\frac{h^3}{12}.$$

Для ортотропных оболочек величина h_1E_1 представляет собой жесткость при растяжении в продольном направлении, отнесенную к единице длины окружности, а величина E_2J — жесткость при изгибе в окружном направлении, также отнесенную к единице длины.

Для оболочки, подкрепленной изнутри кольцевыми ребрами, величина J равна моменту инерции Т-образного сечения, соответствующего одному шагу ребер, отнесенному к величине шага. Для большей общности будем рассматривать оболочку как ортотропную и считать, что $E_1 \neq E_2$.

Запишем выражения силовых факторов T_x и M_t через окружное перемещение v. Из уравнений (9.18) — (9.21) следует

$$T_x = -\int_{\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} r E_1 h_1 \, d\varphi; \tag{9.22}$$

$$M_t = -\frac{E_2 J}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3}\right). \tag{9.23}$$

Остальные внутренние силовые факторы также можно выразить через v, воспользовавшись уравнениями равновесия (9.1), (9.2) и (9.4):

$$Q_t = \frac{\partial M_t}{r\,\partial \varphi} = -\frac{E_2 J}{r^3}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4}\right) = -\frac{E_2 J}{r^3}\,\Omega(v); \tag{9.24}$$

$$S = -\int_{\varphi} \frac{\partial T_x}{\partial x} r \, d\varphi - \int_{\varphi} p_2 r \, d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi}\left[\int_{\varphi} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} r^2 E_1 h_1 \, d\varphi\right] d\varphi - \int_{\varphi} p_2 r \, d\varphi; \tag{9.25}$$

$$T_t = p_1 r - \frac{\partial Q_t}{\partial \varphi} = p_1 r + \frac{E_2 J}{r^3}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\,\Omega(v). \tag{9.26}$$

Неопределенные функции от φ, получившиеся при интегрировании по x, отброшены, так как функции u, T_x и S должны быть периодическими.

Теперь все внутренние силовые факторы и перемещения выражены через функцию v. Для определения этой функции используем уравнение равновесия (9.9). Подставив в него выражения (9.22) и (9.23) и продифференцировав по φ, получим разрешающее уравнение

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} E_1 h_1 + \frac{E_2 J}{r^6}\,\Omega\Omega(v) = -P(x, \varphi), \tag{9.27}$$

где $P(x, \varphi)$ — функция поверхностной нагрузки;

$$P(x, \varphi) = \frac{\partial^3 p_1}{r^2\,\partial \varphi^3} - \frac{\partial^2 p_2}{r\,\partial x\,\partial \varphi} + \frac{\partial^2 p_3}{r^2\,\partial \varphi^2}. \tag{9.28}$$

Уравнение (9.27) интегрируют в рядах; заданные нагрузки раскладываются в ряды Фурье; функция v находится также в виде ряда. Содержащиеся в решении постоянные интегрирования определяют по граничным условиям на торцах.

По функции v с помощью зависимостей (9.22) — (9.26) определяют внутренние силовые факторы. Перемещения точек срединной поверхности v и w вычисляют на основании зависимостей (9.17) и (9.18).

Напряжения находят по внутренним силовым факторам согласно формулам:

$$\sigma_x = \frac{T_x}{h}; \quad \sigma_t = \frac{T_t}{h} \pm \frac{M_t}{h^2/6}; \quad \tau_{xt} = \frac{S}{h}. \tag{9.29}$$

§ 2. Расчет цилиндрических оболочек по полубезмоментной теории при отсутствии поверхностной нагрузки

При нагружении цилиндрической оболочки силами, приложенными по торцам или в некотором промежуточном сечении, составляющие поверхностной нагрузки p_1, p_2, p_3 равны нулю. В этом случае $P(x, \varphi) = 0$ и уравнение (9.27) переходит в однородное:

$$\frac{\partial v^4}{\partial x^4} + \frac{E_2 J}{E_1 h_1 r^6}\, \Omega\Omega(v) = 0. \tag{9.30}$$

Заданная нагрузка непосредственно в уравнение не входит, а учитывается только в граничных условиях или в условиях сопряжения участков.

Ограничимся случаем, когда нагрузка и деформация оболочки симметричны относительно плоскости $\varphi = 0$. Тогда решение уравнения (9.30) следует искать в виде ряда синусов (при симметричной деформации функция v обратно симметричная)

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{v}_k \sin k\varphi, \tag{9.31}$$

где $\bar{v}_k$ — функция только от x.

Подставим ряд (9.31) в уравнение (9.30):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^4 \bar{v}_k}{dx^4} \sin k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_2 J k^4 (k^2-1)^2}{E_1 h_1 r^6} \bar{v}_k \sin k\varphi = 0.$$

Это уравнение распадается на бесконечное число обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^4 \bar{v}_k}{dx^4} + 4\beta_k^4 \bar{v}_k = 0, \tag{9.32}$$

где

$$\beta_k = \sqrt[4]{\frac{E_2 J k^4 (k^2-1)^2}{4E_1 h_1 r^6}}, \tag{9.33}$$

или для оболочки из однородного материала без ребер

$$\beta_k = \sqrt[4]{\frac{h^2 k^4 (k^2-1)^2}{48 r^6}}. \tag{9.34}$$

Уравнение (9.32) аналогично уравнению изгиба балки на упругом основании или уравнению осесимметричной деформации тонкостенной цилиндрической оболочки.

Интеграл уравнения (9.32) может быть представлен в следующем виде:

$$\bar{v}_k = B_{1k}\Phi_1(\beta_k x) + B_{2k}\Phi_2(\beta_k x) + B_{3k}\Phi_3(\beta_k x) + B_{4k}\Phi_4(\beta_k x), \tag{9.35}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1(\beta_k x) = \operatorname{ch}(\beta_k x)\sin(\beta_k x); \quad \Phi_2(\beta_k x) = \operatorname{ch}(\beta_k x)\cos(\beta_k x);\\ &\Phi_3(\beta_k x) = \operatorname{sh}(\beta_k x)\cos(\beta_k x), \quad \Phi_4(\beta_k x) = \operatorname{sh}(\beta_k x)\sin(\beta_k x), \end{aligned}\right\} \tag{9.36}$$

или в функциях А. Н. Крылова [см. формулы (8.32)]:

$$\bar{v}_k = A_{1k} V_1 (\beta_k x) + A_{2k} V_2 (\beta_k x) + A_{3k} V_3 (\beta_k x) + A_{4k} V_4 (\beta_k x). \quad (9.37)$$

Постоянные интегрирования B_{1k}, B_{2k}, ..., A_{1k} A_{2k} ... определяют в каждом частном случае по граничным условиям на торцах.

Для весьма длинных оболочек, удовлетворяющих условию

$$\beta_k l > 3 \quad \text{или} \quad l \geqslant 2{,}5 r \sqrt{\frac{r}{h}} \quad (k \geqslant 2), \quad (9.38)$$

решение целесообразно представить в виде, аналогичном виду выражения (8.25):

$$\bar{v}_k = C_{1k} e^{-\beta_k x} \sin (\beta_k x) + C_{2k} e^{-\beta_k x} \cos (\beta_k x). \quad (9.39)$$

Значения функций, входящих в уравнение (9.39), даны в табл. 8.1. Постоянные интегрирования C_{1k} и C_{2k} находят по граничным условиям при $x = 0$.

При определении функции v_k для оболочек средней длины при малых значениях k ($\beta_k l < 3$) необходимо пользоваться формулами (9.35) и (9.37) с четырьмя постоянными интегрирования, а при больших значениях k можно пользоваться более простой формулой (9.39) с двумя постоянными интегрирования.

Следует обратить внимание на то, что при $k = 1$ параметр β, определяемый по формуле (9.33), обращается в нуль и уравнение (9.32) упрощается:

$$\frac{d^4 \bar{v}_1}{dx^4} = 0. \quad (9.40)$$

Уравнение (9.40) представляет собой дифференциальное уравнение упругой линии цилиндра с недеформируемым поперечным сечением.

Интеграл этого уравнения выражается через степенные функции

$$\bar{v}_1 = D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + D_4 x^3, \quad (9.41)$$

где D_1, D_2, D_3, D_4 — постоянные интегрирования.

Остановимся более подробно на вопросе о граничных условиях. Граничные условия могут быть геометрические или силовые. Геометрические условия должны быть наложены на смещение v и u, а силовые — на усилия T_x и S на торце.

Иногда, однако, вместо касательного смещения v_0 на торце может быть задано радиальное смещение w_0, а вместо касательной сдвигающей силы S_0 — радиальная нагрузка q_0.

В этом случае по радиальному перемещению w_0 следует найти касательное перемещение v_0, а по радиальной нагрузке q_0 — эквивалентное касательное усилие. S_0.

Радиальное перемещение w_0 должно быть задано так, чтобы удовлетворялось условие нерастяжимости оболочки в окружном направлении. При соблюдении этого условия перемещения w_0 и v_0 связаны зависимостью (9.13), из которой следует:

$$v = -\int_{\varphi} w_0 \, d\varphi. \qquad (9.42)$$

Для преобразования радиальной нагрузки q_0 (см. рис. 9.6, *а*) в эквивалентную касательную нагрузку S_0 отсечем от оболочки узкое кольцо (рис. 9.6, *б*). Деформация нерастяжимого кольца должна удовлетворять дифференциальному уравнению (4.52). Рассматривая правую часть этого уравнения, можно заметить, что деформация кольца не изменится, если радиальную нагрузку $q_1 = q_0$ заменить касательной нагрузкой $q_2 = \frac{dq_1}{d\varphi}$.

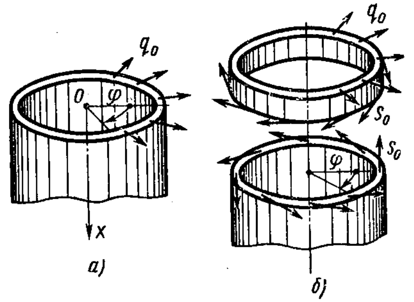


Рис. 9.6

Нагрузку q_2, в свою очередь, следует приравнять — S_0, т. е. — сдвигающей силе на краю оболочки. Таким образом,

$$S_0 = -\frac{dq_0}{d\varphi}. \qquad (9.43)$$

Уравнение (9.43) используется для преобразования радиальной нагрузки в касательную.

Если, например, нагрузка q_0 будет задана в виде ряда

$$q_0 = \sum_{1}^{\infty} \bar{q}_k \cos k\varphi,$$

то эквивалентная ей касательная нагрузка будет

$$S_0 = \sum_{1}^{\infty} \bar{q}_k k \sin k\varphi. \qquad (9.44)$$

Отметим, что постоянные интегрирования в выражении (9.37) пропорциональны четырем начальным параметрам: $v(0)$, $u(0)$, $T_x(0)$ и $S(0)$.

Зависимости между постоянными интегрирования и начальными параметрами нетрудно получить на основании равенств (9.18), (9.22), (9.25) и (9.37) с учетом свойств функций Крылова (8.34) и (8.35):

$$\left.\begin{aligned}
A_{1k} &= \bar{v}_k(0);\\
A_{2k} &= \bar{u}_k(0)\frac{k}{\beta_k r};\\
A_{3k} &= \frac{\bar{T}_{xk}(0)k}{rEh\beta_k^2};\\
A_{4k} &= -\frac{\bar{S}_k(0)k^2}{r^2Eh\beta_k^3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.45)$$

Пример 9.1. Оболочка нагружена двумя осевыми силами P, приложенными диаметрально противоположно на верхнем торце, и равномерной нагрузкой $q_0 = \frac{P}{\pi r}$ на нижнем торце (рис. 9.7, *а*).

Разложим нагрузку, действующую на верхний торец, в ряд Фурье:

$$q = \frac{P}{\pi r} + \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \frac{2P}{\pi r} \cos k\varphi.$$

В данном случае следует взять только четные значения k, так как нагрузка симметрична также относительно плоскости $\varphi = 90°$.

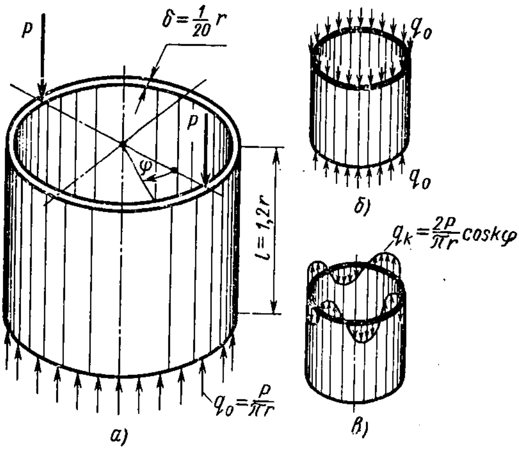


Рис. 9.7 а) б) в)

Первое слагаемое соответствует равномерной составляющей нагрузки, которая вместе с нагрузкой, приложенной к нижнему торцу, вызывает равномерное сжатие цилиндра (рис. 9.7, *б*).

Второй и последующие члены ряда (при $k = 2, 4, 6\ldots$) соответствуют самоуравновешенным нагрузкам вида

$$q_k = \frac{2P}{\pi r} \cos k\varphi,$$

приложенным к верхнему торцу (рис. 9.7, *а*). Так как нагрузка симметрична относительно плоскости $\varphi = 0$ и оболочка короткая $\left(l = 1,2r < r\sqrt{\frac{r}{h}} = 10r\right)$, то выражения функций v и $\bar{v}_k$ следует взять по формулам (9.31) и (9.37).

Запишем уравнения граничных условий:

при $x = 0$ $\quad T_x = 0;\; S = 0;$

при $x = l$ $\quad S = 0;\; T_x = -\frac{2}{\pi}\frac{P}{r}\cos k\varphi.$

В данном случае все четыре условия — силовые. Согласно этим условиям, на основании уравнений (9.22), (9,25) и (9.45)

$$A_{3k} = 0; \qquad A_{4k} = 0;$$

$$A_{1k} = A_k \frac{-V_3(\beta_k l)}{[V_2(\beta_k l)\, V_4(\beta_k l) - V_3^2(\beta_k l)]}; \qquad A_{2k} = A_k \frac{V_2(\beta_k l)}{[V_2(\beta_k l)\, V_4(\beta_k l) - V_3^2(\beta_k l)]},$$

где β_k — параметр, определяемый по формуле (9.34). Через A_k обозначена величина

$$A_k=\frac{Pk}{2\beta_k^2\pi r^2 Eh}.$$

Вычислив A_{1k}, A_{2k} при $k=2, 4, 6, \ldots$, нетрудно по формуле (9.31) найти значения функции v и по формулам (9.22) — (9.26) — значения внутренних усилий.

Следует заметить, что в точках приложения сосредоточенных сил ряды расходятся и осевое усилие T_x обращается в бесконечность. В действительности же это усилие конечно, так как силы P фактически приложены не в точке, а распределены по некоторой дуге.

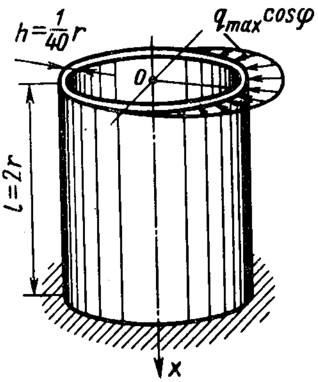


Рис. 9.8

Пример 9,2. Исследовать деформации и напряжения в цилиндрической оболочке, нижний край которой жестко закреплен так, что $u=0$ и $v=0$ (рис. 9.8). К верхнему торцу приложена радиальная нагрузка, распределенная согласно закону:

при

$$-90^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ \quad q=-q_{\max}\cos\varphi;$$

при

$$90^\circ \leqslant \varphi \leqslant 270^\circ \quad q=0.$$

Нагрузка q считается положительной, если она направлена от центра.

Представим нагрузку в виде ряда

$$q=q_0+\sum_1^\infty \bar{q}_k\cos k\varphi.$$

Для определения q_0 проинтегрируем правую и левую части равенства от 0 до 360°:

$$\int_0^{90^\circ}(-q_{\max}\cos\varphi)\,d\varphi+\int_{270^\circ}^{360^\circ}(-q_{\max}\cos\varphi)\,d\varphi=q_0 2\pi,$$

откуда

$$q_0=\frac{-q_{\max}}{\pi}.$$

Для определения $\bar{q}_k$ умножим правую и левую части равенства на $\cos k\varphi$ и также проинтегрируем от 0 до 360°:

$$2\int_0^{90^\circ}(-q_{\max}\cos\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi=\int_0^{360^\circ}\bar{q}_k\cos^2 k\varphi\,d\varphi.$$

При

$$k=1 \qquad -q_{\max}\frac{\pi}{2}=\bar{q}_1\pi,$$

откуда

$$\bar{q}_1=-\frac{q_{\max}}{2}.$$

При

$$k\geqslant 2 \qquad -2q_{\max}\left[\frac{\sin[(k+1)\varphi]}{2(k+1)}+\frac{\sin[(k-1)\varphi]}{2(k-1)}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\bar{q}_k\pi,$$

откуда

$$\bar q_k = -\frac{q_{max}}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{2}}{k+1} + \frac{\sin\frac{(k-1)\pi}{2}}{k-1}\right].$$

Таким образом, для заданной нагрузки получаем следующий ряд:

$$q = -\frac{q_{max}}{\pi} - \frac{q_{max}}{2}\cos\varphi - \frac{2q_{max}}{3\pi}\cos 2\varphi + \frac{2q_{max}}{15\pi}\cos 4\varphi - \frac{2q_{max}}{35\pi}\cos 6\varphi + \frac{2q_{max}}{63\pi}\cos 8\varphi + \ldots$$

Первый член ряда соответствует равномерно распределенной радиальной нагрузке. Деформации и напряжения от этой составляющей вычисляют по формулам теории осесимметричной деформации цилиндрических оболочек (см. гл. 8). Эти напряжения и деформации сравнительно малы и при удалении от верхнего края быстро затухают.

Найдем деформации и напряжения от составляющих нагрузки, соответствующих остальным членам ряда.

Так как радиальные силы, приложенные к торцу, не могут быть учтены в граничных условиях непосредственно, их следует заменить эквивалентными сдвигающими силами, определенными по уравнению (9.44):

$$S_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \bar q_k k \sin k\varphi = -\frac{q_{max}}{2}\sin\varphi - \frac{4}{3}\frac{q_{max}}{\pi}\sin 2\varphi + \frac{8}{15}\frac{q_{max}}{\pi}\sin 4\varphi - \frac{12}{35}\frac{q_{max}}{\pi}\sin 6\varphi + \frac{16}{63}\frac{q_{max}}{\pi}\sin 8\varphi - \ldots$$

Положительное направление усилия S_0 противоположно положительному направлению отсчета угла φ.

Рассмотрим составляющую нагрузки, соответствующую $k = 1$. Параметр β_k в этом случае равен нулю и решением дифференциального уравнения, согласно равенству (9.41), будет выражение

$$v_1 = \bar v_1 \sin\varphi = [D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + D_4 x^3]\sin\varphi.$$

Для определения постоянных используем граничные условия:

при $x = 0$ $T_x = 0$; $S = \bar q_1 \sin\varphi = -\frac{q_{max}}{2}\sin\varphi$;

при $x = l$ $v = 0$; $u = 0$.

Эти условия с учетом зависимостей (9.22), (9.25), (9.18) приводят к системе уравнений, решение которой дает:

$$D_3 = 0, \quad D_4 = \frac{q_{max}}{12r^2Eh}; \quad D_2 = -\frac{q_{max}l^2}{4r^2Eh}; \quad D_1 = \frac{q_{max}l^3}{6r^2Eh}.$$

Следовательно,

$$v_1 = \frac{q_{max}l^3}{12r^2Eh}\left[2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right]\sin\varphi.$$

Нетрудно проверить, что функция v_1 точно соответствует уравнению изогнутой оси оболочки как консольной балки с недеформируемым поперечным сечением, нагруженной пеперечной силой $P = q_{max}\frac{\pi r}{2}$, равной равнодействующей заданной распределенной нагрузки.

Найдем функцию v_k, соответствующую k-й составляющей нагрузки.

Зададимся размерами оболочки: $h=\frac{1}{40}r$, $l=2r$. Для нескольких значений k вычислим параметры β_k, $\beta_k l$ и $\bar{q}_k$. Результаты вычислений следующие:

k	β_k	$\beta_k l$	$\bar{q}_k$
2	$0{,}208\,\frac{1}{r}$	0,416	$-\frac{2}{3}\frac{q_{max}}{\pi}=-0{,}212q_{max}$
4	$0{,}930\,\frac{1}{r}$	1,86	$+\frac{2}{15}\frac{q_{max}}{\pi}=+0{,}0425q_{max}$
6	$2{,}130\,\frac{1}{r}$	4,26	$-\frac{2}{35}\frac{q_{max}}{\pi}=-0{,}0182q_{max}$
8	$3{,}81\,\frac{1}{r}$	7,62	$+\frac{2}{63}\frac{q_{max}}{\pi}=+0{,}0101q_{max}$

Так как при $K=2$ и $K=4$, $\beta_k l<3$, то для вычисления $\bar{v}_k$ следует применять формулу (9.37) с четырьмя постоянными интегрирования. При $k=6$ и $k=8$, $\beta_k l>3$ и можно применить более простую формулу (9.39); однако для единообразия будем пользоваться формулой (9.37) при всех значениях k.

Выбрав начало координат на верхнем краю оболочки, запишем уравнения граничных условий:

при

$$x=0 \quad T_{xk}=0; \quad S_k=\bar{q}_k\, k\, \sin k\varphi;$$

при

$$x=l \quad v_k=0; \quad u_k=0.$$

На основании этих условий с учетом зависимостей (9.18), (9.22), (9.25), (9.31) и (9.37):

$$A_{3k}=0; \qquad A_{4k}=-\frac{\bar{q}_k k^3}{r^2Eh\beta_k^3},$$

$$A_{2k}=-\frac{V_1(\beta_k l)\,V_3(\beta_k l)+4V_4^2(\beta_k l)}{V_1^2(\beta_k l)+4V_2(\beta_k l)\,V_4(\beta_k l)}A_{4k};$$

$$A_{1k}=\frac{V_2(\beta_k l)\,V_3(\beta_k l)-V_1(\beta_k l)\,V_4(\beta_k l)}{V_1^2(\beta_k l)+4V_2(\beta_k l)\,V_4(\beta_k l)}A_{4k}.$$

Заменив функции Крылова их выражениями (8.32), после несложных преобразований получим

$$A_{2k}=-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}^2(\beta_k l)+\sin^2(\beta_k l)}{\operatorname{ch}^2(\beta_k l)+\cos^2(\beta_k l)}A_{4k};$$

$$A_{1k}=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(\beta_k l)\operatorname{ch}(\beta_k l)+\sin(\beta_k l)\cos(\beta_k l)}{\operatorname{ch}^2(\beta_k l)+\cos^2(\beta_k l)}A_{4k}.$$

Радиальное перемещение w на верхнем торце согласно формуле (9.17):

$$w_{x=0}=-\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)_{x=0}=-\frac{q_{max}l^3}{6r^2Eh}\cos\varphi-\sum_{k=2,4,6\,\ldots}^{\infty}kA_{1k}\cos k\varphi.$$

Осевое усилие T_x у нижнего торца согласно формуле (9.22):

$$T_x = -\int\limits_{\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} rEh\, d\varphi = \frac{q_{\max} l}{2r} \cos\varphi + \sum_{k=2,\,4,\,6\ldots}^{\infty} \frac{rEh\beta_k^2}{k} \times$$
$$\times [-4A_{1k}V_3(\beta_k l) - 4A_{2k}V_4(\beta_k l) + A_{4k}V_2(\beta_k l)] \cos k\varphi.$$

Результаты вычислений w и T_x при нескольких значениях k следующее:

k	A_{4k}	A_{2k}	A_{1k}	$w_{(x=0)} \cdot \frac{E}{q_{\max}}$ при $\varphi°$			$T_{x(x=l)} \cdot \frac{1}{q_{\max}}$ при $\varphi°$		
				0	90	180	0	90	180
1				−3120	0	3420	1	0	−1
2	$7540\,\frac{q_{\max}}{E}$	$-637\,\frac{q_{\max}}{E}$	$1550\,\frac{q_{\max}}{E}$	−3100	3100	−3100	1,42	−1,42	1,42
4	−135,2 »	60,0 »	−55,6 »	167	167	167	−0,27	−0,27	−0,27
6	16,3 »	−8,13 »	8,14 »	−49	49	−49	0	0	0
8	−3,71 »	1,85 »	−1,85 »	15	15	15	0	0	0
Σ				∼−6380	∼3330	∼450	2,15	−1,69	0,15

По полученным данным построены эпюры перемещения w при $x = 0$ и усилия T_x при $x = l$ (рис. 9.9).

При построении эпюры w перемещение, соответствующее осесимметричной составляющей нагрузки не учитывалось.

Полученные результаты показывают, что искажение формы окружности около верхнего торца значительно. Напряжение в опасной точке у заделки в 2,15 раза больше найденного по элементарной теории изгиба бруса (значения перемещения и осевого усилия, вычисленные без учета искажения формы поперечного сечения, указаны в скобках).

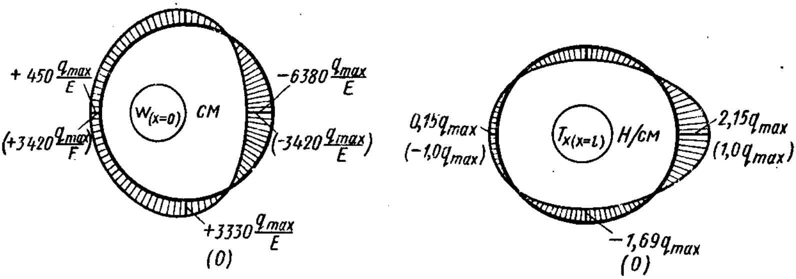


Рис. 9.9

Пример 9.3. Цилиндрическая оболочка, неподвижно закрепленная по нижнему краю, усилена по верхнему краю упругим кольцом (рис. 9.10). Вычислить деформации оболочки и кольца, возникающие при нагружении радиальной силой $P = 1000$ Н, приложенной к кольцу. Дано: $r = 20$ см; $h = 0{,}5$ см; $l = 80$ см; $B = 0{,}5$ *см*; $H = 2$ см; материал оболочки и кольца — дюралюминий; $E = 0{,}72 \cdot 10^7$ Н/см²; $G = 0{,}27 \cdot 10^7$ Н/см².

Подобная задача была рассмотрена в гл. 7 (см. пример 7.6). При решении предполагалось, что кольцо абсолютно жесткое и что напряженное состояние оболочки — безмоментное.

Решим эту задачу с учетом деформации кольца, причем для сравнения определим деформации оболочки как на полубезмоментной теории, так и по безмоментной теории. Вначале рассмотрим первый вариант решения. Отделив кольцо от оболочки (рис. 9.11), приложим в сечении сдвигающую силу S_0 (нормальная сила T_{x0} равна нулю, так как кольцо не оказывает сопротивления осевым смещениям края оболочки).

Силу P разложим в ряд; в результате получим эквивалентную радиальную нагрузку

$$q=\frac{P}{2\pi r}+\sum_{k=1,\,2\,\ldots}^{\infty}\frac{P}{\pi r}\cos k\varphi.$$

Составляющая нагрузки, соответствующая первому члену ряда, вызывает равномерное растяжение кольца и осесимметричную деформацию оболочки. Этой составляющей в дальнейшем пренебрегаем.

Следующий член ряда ($k=1$) соответствует изгибной деформации оболочки без искажения формы ее поперечного сечения,

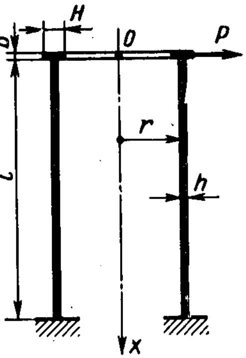


Рис. 9.10

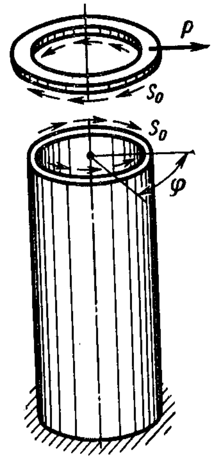


Рис. 9.11

т. е. без изменения формы окружности кольца. Перемещения и напряжения от этой составляющей определяются так, как это было показано в примере 9.2, т. е. фактически по формулам элементарной теории изгиба бруса. В данном примере при $k=1$

$$v_1=\frac{-Pl^3}{6\pi r^3Eh}\left[2-3\,\frac{x}{l}+\frac{x^3}{l^3}\right]\sin\varphi;$$

$$v_{1(x=0,\ \varphi=90^\circ)}=-\frac{Pl^3}{3E\pi r^3h}=-\frac{Pl^3}{3EJ_x};$$

$$T_{x_{1(x=l)}}=-\frac{Pl}{\pi r^2}\cos\varphi;\quad T_{x_{1(x=l\ \ \varphi=0^\circ)}}=-\frac{Pl}{\pi r^2};$$

$$\sigma_{x_{1(x=l,\ \varphi=0^\circ)}}=-\frac{Pl}{\pi r^2h}=-\frac{Pl}{W_x};$$

где $J_x=\pi r^3h$ и $W_x=\pi r^2h$ — момент инерции и момент сопротивления сечения оболочки при изгибе.

Составляющая прогиба v_1 на верхнем торце (при $k = 1$) фактически будет больше вычисленной из-за влияния деформаций сдвига. При $k = 1$

$$S_{\varphi=90^\circ} = \frac{P}{\pi r}; \quad \tau = \frac{P}{\pi r h};$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}; \quad v^{(\tau)}_{1(x=0,\ \varphi=90^\circ)} = -\gamma l = -\frac{Pl}{\pi r h G}.$$

При заданных числовых значениях (см. рис. 9.10) перемещение торца за счет изгиба $v_{1(x=0,\ \varphi=90^\circ)} = -18{,}9 \cdot 10^{-4}$ см и за счет сдвига $x^{(\tau)}_1 = -9{,}4 \cdot 10^{-4}$ см.

Результаты вычислений показывают, что пренебрежение деформациями сдвига при определении прогиба приводит к существенной погрешности.

Перейдем к вычислению перемещений и напряжений, соответствующих k-й составляющей нагрузки:

$$q_k = \frac{P}{\pi r} \cos k\varphi.$$

Так как длина оболочки невелика, следует применить выражение функции $\bar{v}_k$ (9.37) с четырьмя постоянными интегрирования.

Запишем граничные условия на верхнем торце:

при $x = 0$ $T_{xk} = 0$,

следовательно на основании третьего уравнения (9.45), $A_{3k} = 0$;

при $x = 0$ $S_k = \bar{S}_{0k}, = S_{0k} \sin k\varphi$

(S_{0k} — интенсивность k-й составляющей силы взаимодействия оболочки с кольцом).

Из второго условия на основании четвертого уравнения (9.45) следует

$$A_{4k} = -\frac{\bar{S}_{0k} k^2}{r^2 E h \beta_k^3}.$$

Еще два граничных условия заданы на нижнем торце:

при $x = l$ $v = 0$ или $A_{1k} V_1(\beta_k l) + A_{2k} V_2(\beta_k l) + A_{4k} V_4(\beta_k l) = 0$;

при $x = l$ $u = 0$ или $-A_{1k} 4 V_4(\beta_k l) + A_{2k} V_1(\beta_k l) + A_{4k} V_3(\beta_k l) = 0$,

откуда

$$A_{1k} = \frac{-V_4(\beta_k l) V_1(\beta_k l) + V_2(\beta_k l) V_3(\beta_k l)}{V_1^2(\beta_k l) + 4 V_2(\beta_k l) V_4(\beta_k l)} A_{4k};$$

$$A_{2k} = -\frac{V_1(\beta_k l) V_3(\beta_k l) + 4 V_4^2(\beta_k l)}{V_1^2(\beta_k l) + 4 V_2(\beta_k l) V_4(\beta_k l)} A_{4k}.$$

Заменив функции Крылова их выражениями (8.32), после несложных преобразований получим

$$A_{1k} = \frac{\operatorname{sh}(\beta_k l) \operatorname{ch}(\beta_k l) - \sin(\beta_k l) \cos(\beta_k l)}{2[\operatorname{ch}^2(\beta_k l) + \cos^2(\beta_k l)]} A_{4k};$$

$$A_{2k} = -\frac{\operatorname{sh}^2(\beta_k l) + \sin^2(\beta_k l)}{2[\operatorname{ch}^2(\beta_k l) + \cos^2(\beta_k l)]} A_{4k}.$$

Для определения оставшейся неизвестной величины $\bar{S}_{0k}$ необходимо использовать уравнение совместности деформаций оболочки и кольца. Запишем выражение функции v_k при $x = 0$ для оболочки

$$v_{k(x=0)} = \bar{v}_{k(x=0)} \sin k\varphi = A_{1k} \sin k\varphi$$

или

$$\bar{v}_k = A_{1k} = -\frac{[\operatorname{sh}(\beta_k l) \operatorname{ch}(\beta_k l) - \sin(\beta_k l) \cos(\beta_k l)]}{2[\operatorname{ch}^2(\beta_k l) + \cos^2(\beta_k l)] r^2 E h} \cdot \frac{k^2 \bar{S}_{0k}}{\beta_k^3}.$$

Это уравнение содержит две неизвестные величины: $\bar{v}_{k(x-0)}$ и $\bar{S}_{0k}$. Второе уравнение с теми же неизвестными необходимо получить, рассматривая деформации кольца.

Дифференциальное уравнение (4.52) упругой линии кругового кольца при плоском изгибе с учетом зависимости (9.17) запишем в следующем виде:

$$\frac{EJ}{r^4}\left[\frac{d^6v}{d\varphi^6}+2\frac{d^4v}{d\varphi^4}+\frac{d^2v}{d\varphi^2}\right]+q_2+\frac{dq_1}{d\varphi}=0,$$

где $J=\frac{BH^3}{12}$ — момент поперечного сечения кольца;

q_2 — касательная составляющая распределенной нагрузки; в данном случае $q_2=S_{0k}=\bar{S}_{0k}\sin\varphi$;

q_1 — нормальная составляющая распределенной нагрузки; в данном случае $q_1=q_k=\frac{P}{\pi r}\cos k\varphi$.

После подстановки значений q_1 и q_2 и замены функции v выражением

$$v=v_{k(x-0)}=\bar{v}_{k(x-0)}\sin k\varphi$$

уравнение упругой линии кольца принимает вид

$$\frac{EJ}{r^4}(-k^6+2k^4-k^2)\,\bar{v}_{k(x-0)}\sin k\varphi+\bar{S}_{0k}\sin k\varphi-\frac{Pk}{\pi r}\sin k\varphi=0$$

или

$$-\bar{v}_{k(x-0)}\frac{EJk^2(k^2-1)^2}{r^4}+\bar{S}_{0k}=\frac{Pk}{\pi r}.$$

Последнее уравнение вместе с полученным ранее образует систему двух уравнений с двумя неизвестными: $v_{k(x-0)}$ и $\bar{S}_{0k}$.

Результаты решения этой системы при некоторых значениях k следующие:

k	$\beta_k\cdot10^2$, 1/см	$\beta_k l$	$\bar{s}_{0k}$, Н/см	$\bar{v}_{k(x-0)}\cdot10^3$, см
2	1,04	0,832	26	—10,72
3	2,55	2,04	18,4	— 3,4
4	4,65	3,72	16,1	—0,887
5	7,37	5,9	14,06	—0,305

Радиальные перемещения на верхнем краю оболочки согласно уравнению (9.17):

$$w_{(x-0)}=-\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)_{(x-0)}=-\bar{v}_{k(x-0)}k\cos k\varphi \quad \text{или} \quad \bar{w}_{(x-0)}=-\bar{v}_{k(x-0)}k.$$

Осевые усилия и напряжения могут быть определены по уравнениям (9.22), (9.29).

Изгибающий момент в кольце, в сечении, где приложена сила P, согласно уравнению (4.51):

$$M_{(\varphi-0)}=-\frac{EJ}{r^2}\left(\frac{d^2w}{d\varphi^2}+w\right)_{\begin{pmatrix}x=0\\ \varphi=0\end{pmatrix}}=-\frac{EJ}{r^2}\bar{v}_{k(x-0)}(k^3-k).$$

Числовые значения этих величин следующие:

k	$A_{4k}\cdot10^2$	$A_{2k}\cdot10^2$	$A_{1k}\cdot10^2$	$\bar{w}_{k(x-0)}=-k\bar{v}_{k(x-0)}$, см	$T_{xk(x-l,\ \varphi-0)}$, Н/см	$M_{(\varphi-0)}$, Н·см
1	—	—	—	$1{,}89\cdot10^{-3}$	$-63{,}7$	0
2	$-6{,}42$	$1{,}96$	$-1{,}072$	$21{,}44\cdot10^{-3}$	-176	387
3	$-0{,}493$	$0{,}337$	$-0{,}341$	$10{,}2\cdot10^{-3}$	$-12{,}2$	490
4	$-0{,}178$	$0{,}089$	$-0{,}0891$	$3{,}55\cdot10^{-3}$	$-1{,}1$	320
5	$-0{,}0611$	$0{,}0304$	$-0{,}0304$	$1{,}52\cdot10^{-3}$	0	220

Эпюры $w_{(x-0)}$ и $Tx_{(x-l)}$ — см. на рис. 9.12.

Изгибающий момент в опасном сечении кольца

$$M_{(\varphi-0)}\cong 1500\ \text{Н}\cdot\text{см};$$

соответствующее максимальное напряжение

$$\sigma_{\max}=\frac{M\cdot 6}{BH^2}=\frac{1500\cdot 6}{0{,}5\cdot 2^2}=450\ \text{Н/см}^2.$$

Приведем решение этой же задачи по безмоментной теории. В гл. 7 (пример 7.6) было получено следующее выражение функции v для цилиндрической

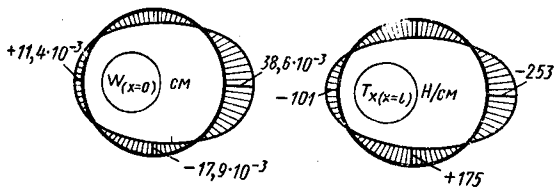


Рис. 9.12

оболочки, закрепленной по нижнему краю и нагруженной по верхнему краю сдвигающей силой $S_0(\varphi)$:

$$v=\frac{l^3}{6r^2Eh}\frac{d^2S_0}{d\varphi^2}\left(\frac{x^3}{l^3}-\frac{3x}{l}+2\right)-\frac{S_0(l-x)}{Gh}.$$

При $S_0=\bar{S}_{0k}\sin k\varphi$; $v_0=\bar{v}_{k(x-0)}\sin k\varphi$ и $x=0$ это выражение принимает вид

$$\bar{v}=\left(-\frac{k^2l^3}{3Er^2h}-\frac{l}{Gh}\right)\bar{S}_{0k}.$$

Решение последнего уравнения совместно с уравнением деформации кольца при заданных числовых величинах приводит к следующим результатам:

k	$\bar{v}_{k_{x=0}} \cdot 10^3$, см	$\bar{s}_{0k}$, Н/см	$\bar{w}_{k(x=0)} = -k\bar{v}_k$, см	$\bar{T}_{xk(x=l)} = -\frac{l}{r} k\bar{S}_{0k}$, Н/см
1	—2,83	15,95	$2{,}83 \cdot 10^{-3}$	—63,7
2	—13,22	24,8	$26{,}44 \cdot 10^{-3}$	—198
3	—5,01	4,45	$15{,}03 \cdot 10^{-3}$	—53,4
4	—1,17	0,60	$4{,}68 \cdot 10^{-3}$	—9,6
5	—0,369	0,122	$1{,}85 \cdot 10^{-3}$	—2,45

Эпюры $w_{(x=0)}$ и T_x, построенные на основании решения по безмоментной теории, приведены на рис. 9.13.

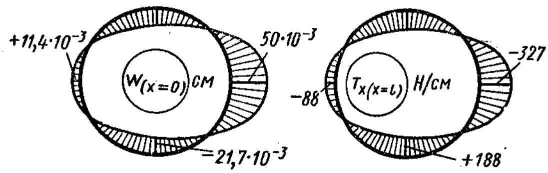


Рис. 9.13

Сравнение эпюр показывает, что разница между решениями по безмоментной теории и полубезмоментной теории в данном случае сравнительно невелика. Это объясняется тем, что напряженное состояние рассматриваемой оболочки близко к безмоментному. Совпадение результатов будет лучшим, если в решении по полубезмоментной теории учесть перемещения за счет сдвигов, вызванных поперечной силой.

§ 3. Расчет цилиндрических оболочек, находящихся под действием поверхностной нагрузки

При действии поверхностной нагрузки расчет цилиндрической оболочки по полубезмоментной теории ведут, основываясь на разрешающем уравнении (9.27). Правая часть этого уравнения представляет собой функцию от поверхностной нагрузки, определяемую равенством (9.28).

Предположим, что поверхностная нагрузка симметрична относительно плоскости $\varphi = 0$. Тогда составляющие нагрузки p_1, p_2, p_3 можно разложить в следующие ряды:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_{10} + \sum_1^\infty \bar{p}_{1k} \cos k\varphi; \\ p_2 &= p_{20} + \sum_1^\infty \bar{p}_{2k} \cos k\varphi; \\ p_3 &= p_{30} + \sum_1^\infty \bar{p}_{3k} \sin k\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (9.46)$$

Подставив эти ряды в равенство (9.28), определим функцию нагрузки

$$P(x, \varphi) = \sum_1^{\infty} \left[\frac{\bar{p}_{1k}k^3}{r^2} + \frac{d\bar{p}_{2k}}{r\,dx} k - \frac{\bar{p}_{3k}k^2}{r^2} \right] \sin k\varphi,$$

или

$$P(x, \varphi) = \sum_1^{\infty} \bar{p}_k \sin k\varphi, \tag{9.47}$$

где

$$\bar{P}_k = \frac{\bar{p}_{1k}k^3}{r^2} + \frac{d\bar{p}_{2k}}{r\,dx} k - \frac{\bar{p}_{3k}k^2}{r^2}. \tag{9.48}$$

Внесем выражение (9.47) в правую часть уравнения (9.27); решение последнего найдем также в виде ряда

$$v = \sum_1^{\infty} F_k \sin k\varphi, \tag{9.49}$$

где F_k — функция только от x.

В результате подстановки ряда (9.49) в уравнение (9.27) последнее принимает следующий вид:

$$\sum_1^{\infty} \left[E_1 h_1 \frac{d^4 F_k}{dx^4} + \frac{E_2 J}{r^6} F_k k^4 (k^2 - 1)^2 \right] \sin k\varphi = -\sum_1^{\infty} \bar{P}_k \sin k\varphi.$$

Это уравнение приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{d^4 F_1}{dx^4} = -\dfrac{1}{E_1 h_1} P_1; \\
\dfrac{d^4 F_2}{dx^4} + \dfrac{E_2 J}{E_1 h_1 r^6} 2^4 (2^2 - 1)^2 F_2 = \dfrac{-1}{E_1 h_1} P_2; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{d^4 F_k}{dx^4} + \dfrac{E_2 J}{E_1 h_1 r^6} k^4 (k^2 - 1)^2 F_k = \dfrac{-1}{E_1 h_1} P_k \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \tag{9.50}$$

Первое уравнение системы (9.50) характеризует изгибную деформацию оболочки, не сопровождающуюся искажением формы окружности. Не трудно убедиться, что напряжения и перемещения, соответствующие этому уравнению, полностью совпадают с найденными по элементарной теории изгиба бруса.

Второе и последующие уравнения системы (9.50) характеризуют деформацию оболочки, связанную с искажением формы поперечного сечения.

Рассмотрим k-е уравнение системы (9.50); с учетом равенства (9.34) это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^4F_k}{dx^4}+4\beta_k^4F_k=-\frac{1}{E_1h_1}P_k(x). \qquad (9.51)$$

Общее решение уравнения (9.51) представим в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $\mathring{F}_k$ и частного решения данного уравнения $\bar{F}_k$:

$$F_k=\mathring{F}_k+\bar{F}_k. \qquad (9.52)$$

Решением однородного уравнения $\mathring{F}_k$ являются выражения (9.35) или (9.37).

Частное решение неоднородного уравнения (9.51) зависит от вида поверхностной нагрузки. В том случае, когда $\frac{\partial^4}{\partial x^4}P_k(x)=0$, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\bar{F}_k=-\frac{1}{E_1h_14\beta_k^4}P_k(x). \qquad (9.53)$$

Постоянные интегрирования, содержащиеся в выражениях (9.35) или (9.37), выбирают такими, чтобы суммарное решение F_k определяемое по уравнению (9.52), удовлетворяло граничным условиям на торцах.

Пример 9.4. [11]. Тонкостенная цилиндрическая труба с днищами, опертая по концам на две опоры, заполнена водой до уровня, определяемого высотою H (рис. 9.14). Дано: $l=40$ м; $2r=3{,}2$ м; $H=0{,}516$ м.

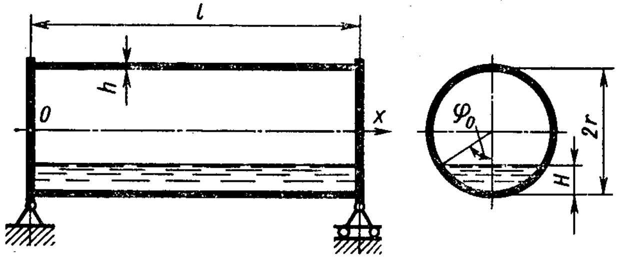


Рис. 9.14

Определить напряжения и деформации, вызванные силами веса жидкости.

Давление воды на цилиндрическую стенку трубы и на днище:

при $-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$ $p=\gamma r(\cos\varphi-\cos\varphi_0)$;

при $\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant(2\pi-\varphi_0)$ $p=0$.

Давление на днища и на цилиндрическую поверхность можно рассматривать независимо одно от другого. Так как днища имеют большую жесткость при растяжении в своей плоскости и исключают возможность искажения формы окружности около торца, то давление на днища будет вызывать только внецентренное растяжение трубы.

Определим деформации трубы, возникающие при действии давления жидкости на цилиндрическую поверхность.

Разложим давление в ряд по φ:

$$p = p_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} p_k \cos k\varphi.$$

Интегрируя правую и левую части равенства от 0 до 2π, найдем p_0:

$$\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \gamma r (\cos\varphi - \cos\varphi_0)\, d\varphi = p_0 2\pi; \qquad p_0 = \frac{\gamma r}{2\pi} [2 \sin\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos\varphi_0].$$

Для определения коэффициента p_k произвольного члена ряда умножим правую и левую части равенства на $\cos k\varphi$ и проинтегрируем от 0 до 2π:

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \gamma r (\cos\varphi - \cos\varphi_0) \cos k\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} p_k \cos^2 k\varphi\, d\varphi,$$

откуда

$$p_k = \frac{\gamma r 2}{\pi} \omega_k,$$

где

$$\omega_k = \frac{\sin[(k+1)\varphi_0]}{2(k+1)} + \frac{\sin[(k-1)\varphi_0]}{2(k-1)} - \frac{\sin k\varphi_0 \cos k\varphi_0}{k} \qquad \text{при } k \neq 1;$$

$$\omega_k = \frac{\varphi_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi_0 \qquad \text{при } k = 1.$$

Составляющая давления p_0, вызывающая осесимметричную деформацию трубы, не имеет существенного значения и в дальнейшем не рассматривается.

Определим функцию поверхностной нагрузки P. Согласно уравнениям (9.47), (9.48) при $p_2 = p_3 = 0$ и $\bar{p}_1 = p_k$

$$P_k = \frac{\bar{p}_k k^3}{r^2} = \frac{2\gamma\omega_k k^3}{\pi r}; \quad P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\gamma\omega_k k^3}{\pi r} \sin k\varphi$$

и k — e уравнение (9.50) принимает вид

$$\frac{d^4 F_k}{dx^4} + 4\beta_k^4 F_k = \frac{2k^3 \gamma\omega_k}{\pi E h r},$$

где β_k определяется по уравнению (9.34).

Решение этого дифференциального уравнения можно найти, как обычно, в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения данного уравнения, однако в рассматриваемом примере целесообразно поступить иначе. В данной задаче граничные условия симметричные:
при $x = 0$ $v = 0$; $T_x = 0$;
при $x = l$ $v = 0$; $T_x = 0$.

(Предполагается, что днища не оказывают сопротивления перемещениям, перпендикулярным плоскости днища. Давление жидкости на днища здесь не рассматривается, оно может быть учтено отдельно.)

На основании зависимостей (9.22) и (9.49) уравнения граничных условий можно представить в следующем виде:

$$F_{k(x=0)} = 0; \qquad F_{k(x=l)} = 0;$$

$$\left(\frac{d^2 F_k}{dx^2}\right)_{(x=0)} = 0; \qquad \left(\frac{d^2 F_k}{dx^2}\right)_{(x=l)} = 0.$$

Ввиду симметрии граничных условий общее решение дифференциального уравнения относительно функции F_k удобно представить в виде тригонометрического ряда

$$F_k = \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} A_{km} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Нетрудно проверить, что этот ряд удовлетворяет всем граничным условиям. Подстановка его в дифференциальное уравнение (9.51) приводит к следующему равенству:

$$\sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} A_{km} \frac{m^4\pi^4}{l^4} \sin \frac{m\pi x}{l} + 4\beta_k^4 \sum_{m=3,5\ldots}^{\infty} A_{km} \sin \frac{m\pi x}{l} = \frac{2k^3\gamma\omega_k}{\pi E h r}.$$

Для определения коэффициента A_{km} произвольного члена ряда умножим правую и левую части равенства $\sin \frac{m\pi x}{l}$ и проинтегрируем от 0 до l:

$$A_{km}\left(\frac{m^4\pi^4}{l^4} + 4\beta_k^4\right)\frac{l}{2} = \frac{2k^3\gamma\omega_k}{\pi E h r} \cdot \frac{2l}{m\pi};$$

отсюда

$$A_{km} = \frac{8k^3\gamma\omega_k l^4}{m\pi^2 r E h\left(m^4\pi^4 + 4\beta_k^4 l^4\right)}.$$

После внесения значения A_{km} и подстановки функции F_k в уравнение (9.49) получим для v двойной тригонометрический ряд

$$v = \sum_{k=1,2\ldots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{8k^3\gamma\omega_k l^4}{r m\pi^2 E h\left(m^4\pi^4 + 4\beta_k^4 l^4\right)} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin k\varphi.$$

Этот ряд сходится достаточно быстро. По функции v вычисляют перемещения u и w [см. уравнения (9.17) и (9.18)] и внутренние силовые факторы [см. уравнения (9.22) — (9.26)].

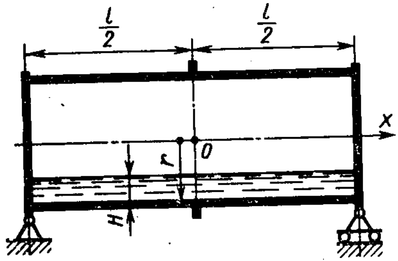


Рис. 9.15

При $k = 1$ параметр β_k равен нулю и полученное решение совпадает с решением по элементарной теории изгиба бруса.

Приведем решение той же задачи, но при наличии в среднем сечении жесткого кольца, исключающего возможность искажения формы окружности (рис. 9.15). В этом случае оболочка имеет два участка. Выбрав начало координат в середине, можно записать следующие граничные условия для функции F_k при $k \geqslant 2$ [см. уравнения (9.18) и (9.49)]:

$$x = 0, \quad v = 0, \quad F_{k(x=0)} = 0;$$

$$x = 0, \quad u = 0, \quad \left(\frac{dF_k}{dx}\right)_{(x=0)} = 0;$$

$$x = \frac{l}{2}, \quad v = 0, \quad F_{k(x=l/2)} = 0;$$

$$x = \frac{l}{2}, \quad T_x = 0, \quad \left(\frac{d^2F_k}{dx^2}\right)_{\left(x=\frac{l}{2}\right)} = 0.$$

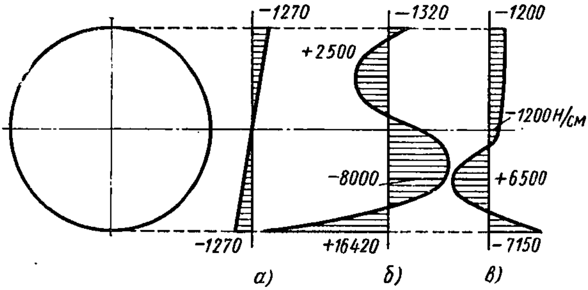


Рис. 9.16

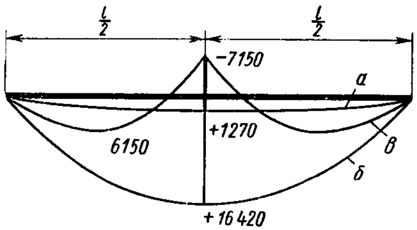


Рис. 9.17

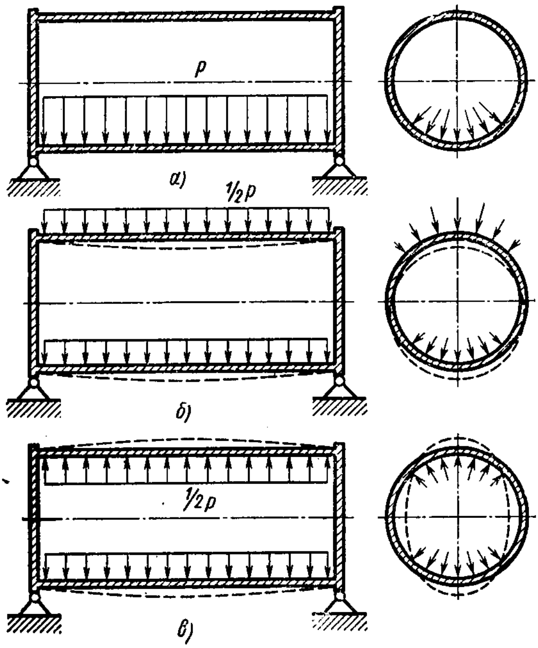


Рис. 9.18

Так как эти условия несимметричны, то решение следует искать, как обычно, в виде суммы общего решения однородного уравнения (9.37) и частного решения уравнения с правой частью (9.53), т. е.

$$F_k = A_{1k}V_1(\beta_k x) + A_{2k}V_2(\beta_k x) + A_{3k}V_3(\beta_k x) + \\ + A_{4k}V_4(\beta_k x) + \frac{2k^3\gamma\omega_k}{r\pi E h 4\beta_k^4}.$$

Определив по граничным условиям постоянные интегрирования и по уравнению (9.49) функцию v, нетрудно вычислить перемещения и напряжения.

На рис. 9.16 изображены эпюры осевых нормальных напряжений в среднем поперечном сечении трубы: а) по элементарной теории изгиба бруса (рис. 9.16, *а*); б) по теории В. З. Власова при отсутствии кольца в среднем сечении (по сумме членов ряда до $k = 4$, рис. 9.16, *б*); в) то же, но при наличии жесткого кольца в среднем сечении цилиндра (рис. 9.16, *в*).

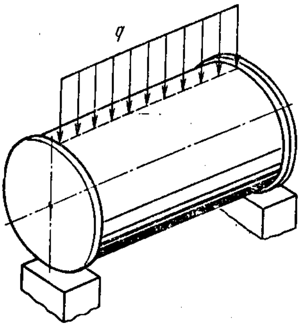


Рис. 9.19

На рис. 9.17 приведены эпюры осевых напряжений в нижнем растянутом волокне по длине цилиндра для тех же трех случаев.

Сопоставив эпюры, можно сделать следующие выводы:

1. Напряжения в оболочке при данной нагрузке сильно отличаются от вычисленных по элементарной теории изгиба бруса. Чтобы пояснить сущность этого отличия, представим заданное давление (рис. 9.18, *а*) в виде суммы двух нагрузок, показанных на рис. 9.18, *б* и *в*. Первая из них вызывает изгиб оболочки как балки, а вторая деформацию оболочки, связанную с искажением формы поперечных сечений. Чем меньше толщина стенки, тем более существенное значение имеет деформация второго вида. В оболочке, рассмотренной в примере 9.4, напряжения и перемещения за счет деформации второго вида преобладают.

2. При установке жесткого кольца, препятствующего искажению формы окружности сечения, напряжения в оболочке заметно снижаются; изменяется также характер их распределения. Если бы по длине цилиндра было установлено большое число колец так, чтобы все его сечения оставались круглыми, то деформации и напряжения в цилиндре не отличались бы от вычисленных по теории изгиба балки. На основании этого можно заключить, что снизить напряжения в оболочке наиболее эффективно можно установкой колец (шпангоутов), препятствующих искажению формы поперечных сечений. Если оболочка будет нагружена сосредоточенной поперечной силой (см. рис. 9.10), то достаточно установить только одно жесткое кольцо в месте приложения силы, и оболочка будет деформироваться как балка, т. е. без искажения формы поперечных сечений.

При нагружении оболочки нагрузкой, распределенной вдоль образующей (рис. 9.19), изложенная методика расчета также применима. В этом случае нагрузку следует разложить в ряд по φ, т. е. представить в виде косинусоидальных поверхностных нагрузок, после чего решение строится так же, как и при поверхностной нагрузке [8].

§ 4. Моментная теория несимметричной деформации цилиндрических оболочек

Вывод уравнений моментной теории несимметричной деформации цилиндрической оболочки основывается на общих гипотезах Кирхгофа — Лява о неискривляемости нормалей и об отсутствии нормальных напряжений в площадках, параллельных срединной поверхности, а также на предположениях о малости толщины по сравнению с радиусом кривизны и малости перемещений по сравнению с толщиной (см. гл. 8, § 1).

Исходными уравнениями являются уравнения (9.10) — (9.12), связывающие компоненты деформации срединной поверхности ε_x, ε_t, γ_{xt} с перемещениями точки срединной поверхности u, v, w. К этим уравнениям следует добавить зависимости углов поворота нормали в окружном и осевом направлениях ψ и ϑ от перемещений (см. рис. 9.5).

Угол ψ связан с перемещениями равенством (9.15). Угол ϑ зависит только от w:

$$\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{9.54}$$

Определим перемещения точки произвольного слоя, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности (z отсчитывается по направлению к центру). На основании гипотезы неискривляемости нормалей и предположения о тонкостенности

$$u_z = u - \vartheta z; \quad v_z = v - \psi z; \quad w_z = w. \tag{9.55}$$

Произведем замены в уравнениях (9.10) — (9.12), (9.15) и (9.16): r на $r - z$; u на u_z; v на v_z; w на w_z, в результате получим выражения деформаций в произвольном слое:

в осевом направлении

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \tag{9.56}$$

и в окружном направлении

$$\varepsilon_{tz} = \left(\frac{\partial v_z}{r\,\partial\varphi} + \frac{w_z}{r}\right)\frac{1}{(1 - z/r)} = \left(\frac{\partial v}{r\,\partial\varphi} - \frac{\partial\psi}{r\,\partial\varphi} z + \frac{w}{r}\right)\left(\frac{1}{1 - z/r}\right).$$

Множитель $\left((1 - \frac{z}{r}\right)$ в знаменателе ввиду тонкостенности примем за единицу; тогда с учетом равенства (9.15) получим

$$\varepsilon_{tz} = \frac{\partial v}{r\,\partial\varphi} + \frac{w}{r} - z\left(\frac{\partial v}{r^2\,\partial\varphi} - \frac{\partial^2 w}{r^2\,\partial\varphi^2}\right); \tag{9.57}$$

угловая деформация в z-м слое

$$\gamma_{xtz} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{r\,\partial\varphi}\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{r}\right)} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} z + \left(\frac{\partial u}{r\,\partial\varphi} - \frac{\partial\vartheta}{r\,\partial\varphi} z\right)\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{r}\right)}.$$

Приведя слагаемые в правой части равенства к общему знаменателю и подставив значения углов ψ и ϑ согласно равенствам (9.15) и (9.54), а затем отбросив член, содержащий малую величину $\frac{z^2}{r^2}$, и приняв скобку $\left(1 - \frac{z}{r}\right)$ равной единице, получим

$$\gamma_{xtz} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\,\partial\varphi} + 2\frac{z}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\,\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{9.58}$$

Перейдем ко второй группе уравнений, устанавливающих зависимость между перемещениями и внутренними силовыми факторами. По закону Гука при плоском напряженном состоянии напряжения и деформации в произвольном слое связаны следующими уравнениями:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{xz} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{xz}+\mu\varepsilon_{tz});\\
\sigma_{tz} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{tz}+\mu\varepsilon_{xz});\\
\tau_{xtz} &= \gamma_{xtz}G.
\end{aligned}
\right\}
\tag{9.59}
$$

Представим внутренние силовые факторы в оболочке в виде интегралов:

$$
T_x=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz}dz;\quad T_t=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{tz}dz;\quad S=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{xtz}dz;
$$

$$
M_x=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz}\,dz\cdot z;\quad M_t=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{tz}\,dz\cdot z;\quad M_{xt}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\tau_{xtz}\,dz\cdot z.
$$

Выполнив интегрирование с учетом равенств (9.57) — (9.59), получим

$$
\left.
\begin{aligned}
T_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{r\,\partial\varphi}+\mu\frac{w}{r}\right];\quad M_x=D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\right.\\
&\qquad\left.-\mu\frac{\partial v}{r^2\,\partial\varphi}+\mu\frac{\partial^2 w}{r^2\,\partial\varphi^2}\right];\\
T_t &= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial v}{r\,\partial\varphi}+\frac{w}{r}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right];\quad M_t=D\left[\frac{\partial^2 w}{r^2\,\partial\varphi^2}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial v}{r^2\,\partial\varphi}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right];\\
S &= \frac{Eh}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{r\,\partial\varphi}\right);\quad M_{xt}=D(1-\mu)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\varphi}-\frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}
\right\}
\tag{9.60}
$$

Третью группу уравнений составляют уравнения равновесия элемента оболочки. На рис. 9.20 изображен элемент оболочки с действующими на него силами и моментами. Взяв сумму проекций всех сил на три взаимно перпендикулярные оси, а также сумму моментов относительно осей x и t, касательных к поверхности, получим следующие пять уравнений:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial S}{r\,\partial\varphi}+p_2=0; \tag{9.61}$$

$$\frac{\partial T_t}{r\,\partial\varphi}+\frac{\partial S}{\partial x}+p_3-\frac{Q_t}{r}=0; \tag{9.62}$$

$$\frac{\partial Q_t}{r\,\partial\varphi}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{T_t}{r}-p_1=0; \tag{9.63}$$

$$Q_t-\frac{\partial M_t}{r\,\partial\varphi}-\frac{\partial M_{xt}}{\partial x}=0; \tag{9.64}$$

$$Q_x-\frac{\partial M_x}{\partial x}-\frac{\partial M_{xt}}{r\,\partial\varphi}=0. \tag{9.65}$$

Шестое уравнение равновесия — равенство нулю суммы моментов всех сил относительно нормали к поверхности — не входит в написанную систему, так как оно выражает лишь закон парности касательных напряжений. Если взять уточненные значения внутренних силовых факторов S и M_{xt} [с учетом множителя $\left(1 - \frac{z}{r}\right)$], то нетрудно убедиться, что шестое уравнение равновесия удовлетворяется тождественно.

Уравнения (9.60) и (9.61) — (9.65) образуют систему одиннадцати уравнений с одиннадцатью неизвестными (восемь внутренних силовых факторов и три компонента перемещения).

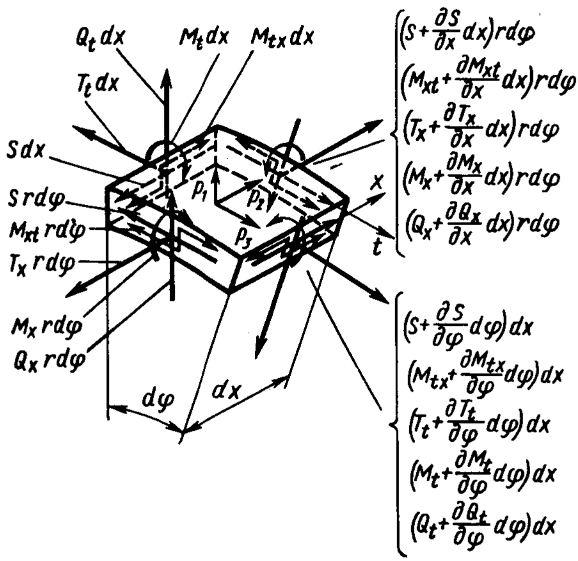


Рис. 9.20

Эта система уравнений наиболее полно описывает напряженно-деформированное состояние несимметрично нагруженной цилиндрической оболочки.

Путем преобразований она может быть сведена к одному дифференциальному уравнению восьмого порядка относительно функции w.

Интегрирование полученного уравнения с учетом заданных граничных условий представляет собой довольно сложную задачу.

При решении на ЭЦВМ вместо одного уравнения восьмого порядка можно использовать систему из пяти уравнений более низкого порядка с пятью неизвестными u, v, w, Q_1, Q_2, полученную в результате подстановки выражений (9.60) в уравнения (9.61) — (9.65).

Методика решения этой системы уравнений в тригонометрических рядах состоит в следующем. Заданные поверхностные нагрузки представляют в виде рядов:

$$p_1(x, y) = \sum_0^\infty p_{1k} \cos k\varphi;$$

$$p_2(x, y) = \sum_0^\infty p_{2k} \cos k\varphi;$$

$$p_3(x, y) = \sum_0^\infty p_{3k} \sin k\varphi$$

(предполагается, что нагрузка симметрична относительно плоскости $\varphi = 0$).

Искомые функции также записывают в виде рядов:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u_0 + u_1 \cos\varphi + u_2 \cos 2\varphi + \ldots;\\
v(x, y) &= v_0 + v_1 \sin\varphi + v_2 \sin 2\varphi + \ldots;\\
w(x, y) &= w_0 + w_1 \cos\varphi + w_2 \cos 2\varphi + \ldots;\\
Q_x(x, y) &= Q_{x_0} + Q_{x_1} \cos\varphi + Q_{x_2} \cos 2\varphi + \ldots;\\
Q_t(x, y) &= Q_{t_0} + Q_{t_1} \sin\varphi + Q_{t_2} \sin 2\varphi + \ldots
\end{aligned}$$

Коэффициенты этих рядов представляют собой неизвестные функции x.

Для замкнутой оболочки при нагрузке, симметричной относительно плоскости $\varphi = 0$, обратно симметричные факторы v_0 и Q_0, очевидно, равны нулю. Подставив написанные ряды в дифференциальные уравнения и собрав все слагаемые, не содержащие φ (т. е. соответствующие $k = 0$), получают нулевую группу обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций u_0, w_0, Q_0.

Аналогично, собрав все слагаемые, содержащие $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, получают первую группу дифференциальных уравнений с неизвестными функциями u_1, v_1, w_1, Q_{x_1}, Q_{t_1}. Таким же образом составляют систему дифференциальных уравнений для произвольного индекса k. Эти группы уравнений с учетом граничных условий решают на ЭЦВМ по стандартным программам [11].

Уравнения несимметричной деформации цилиндрической оболочки в несколько ином варианте приведены в работе [15], где показано, что если последовательно пренебрегать слагаемыми, имеющими такой же порядок малости, как $\frac{z}{r}$, по сравнению с единицей, то в уравнениях (9.57), (9.58), (9.59), (9.62) можно отбросить подчеркнутые слагаемые. Тогда система одиннадцати уравнений (9.64) — (9.69) может быть сведена к системе трех дифференциальных уравнений относительно неизвестных u, v, w, которая, в свою очередь, допускает преобразование к одному дифференциальному уравнению относительно функции перемещений, через которую выражаются все остальные величины.

Остановимся на вопросе о применении общих уравнений несимметричной деформации цилиндрической оболочки к расчету оболочек, находящихся в напряженном, близком к чисто моментному состоянию.

Если условия нагружения и закрепления таковы, что оболочка сопротивляется внешней нагрузке в основном за счет изгибной жесткости стенки, то можно принять допущение, что линейные и угловые деформации на срединной поверхности равны нулю.

Тогда, приравняв нулю левые части равенств (9.10) — (9.12), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{du}{dx}=0; \quad \frac{dv}{dx}+\frac{du}{r\,d\varphi}=0; \quad \frac{dv}{d\varphi}+w=0. \tag{9.66}$$

Из первого уравнения

$$u=f_1(\varphi), \tag{9.67}$$

из второго уравнения

$$v=-\frac{x}{r}f_1'(\varphi)+f_2(\varphi) \tag{9.68}$$

и из третьего уравнения

$$w=\frac{x}{r}f_1''(\varphi)-f_2'(\varphi), \tag{9.69}$$

где $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ — неизвестные функции от φ, определяемые по граничным условиям.

После того как компоненты перемещений u, v, w будут найдены, вычислить внутренние силовые факторы по формулам (9.60) нетрудно.

Пример 9.5. Нижний край оболочки (рис. 9.21) вставлен в жесткую обойму, препятствующую искажению формы окружности. К верхнему краю приложены две диаметрально противоположные силы P.

Разложив заданную нагрузку в ряд, получим эквивалентную распределенную радиальную нагрузку

$$q=\frac{P}{\pi r}+\sum_{k=2,4,6\ldots}^{\infty}\frac{2P}{\pi r}\cos k\varphi.$$

Найдем деформации оболочки, соответствующие произвольной k-й составляющей нагрузки:

$$q_k=\frac{2P}{\pi r}\cos k\varphi.$$

Предположим, что радиальное перемещение на верхнем торце, соответствующее этой составляющей, также распределено по закону косинуса:

$$w_k=a_k\cos k\varphi.$$

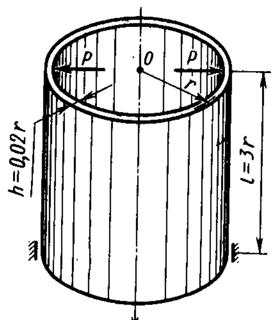


Рис. 9.21

Совместим начало координат с верхним торцом, тогда граничные условия будут следующие:

при $x=0$ $\quad w=a_k\cos k\varphi$;

при $x=l$ $\quad v=0$.

Из этих условий на основании равенств (9.68) и (9.69)

$$a_k \cos k\varphi = -f_2'(\varphi); \quad 0 = -\frac{l}{r} f_1'(\varphi) + f_2(\varphi),$$

откуда следует

$$f_2(\varphi) = -\frac{a_k}{k} \sin k\varphi; \quad f_1(\varphi) = \frac{a_k r}{lk^2} \cos k\varphi,$$

и выражения перемещений принимают вид

$$w = a_k \frac{(l-x)}{l} \cos k\varphi;$$

$$v = -a_k \frac{(l-x)}{lk} \sin k\varphi;$$

$$u = \frac{a_k r}{lk^2} \cos k\varphi.$$

По формулам (9.60) вычислим k-е составляющие изгибающих и скручивающего моментов:

$$M_t = D\left[-\frac{a_k(l-x)}{r^2 l} k^2 \cos k\varphi + \frac{a_k(l-x)\cos k\varphi}{r^2 l}\right] =$$

$$= -D\frac{a_k(l-x)}{r^2 l}(k^2-1)\cos k\varphi;$$

$$M_x = D\left[\mu\frac{a_k(l-x)\cos k\varphi}{r^2 l} - \mu\frac{a_k(l-x)k^2\cos k\varphi}{r^2 l}\right] = \mu M_t;$$

$$M_{xt} = D(1-\mu)\frac{1}{r}\left[\frac{a_k k \sin k\varphi}{l} - \frac{a_k}{lk}\sin k\varphi\right] = D(1-\mu)\frac{a_k(k^2-1)\sin k\varphi}{rlk}.$$

Для определения внутренних усилий в данном случае формулы (9.60) непригодны, так как при деформациях срединной поверхности, равных нулю, они дают значения усилий, также равные нулю. Внутренние усилия T_x, T_t, S, а также Q_x и Q_t в данном случае могут быть определены по уравнениям равновесия (9.61)—(9.65):

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_{xt}}{r\,d\varphi} = +\mu D\frac{a_k(k^2-1)}{r^2 l}\cos k\varphi +$$

$$+\frac{D(1-\mu)a_k(k^2-1)}{r^2 l}\cos k\varphi = \frac{Da_k(k^2-1)\cos k\varphi}{r^2 l};$$

$$Q_t = \frac{dM_t}{r\,d\varphi} + \frac{dM_{xt}}{dx} = D\frac{a_k(l-x)(k^2-1)k\sin k\varphi}{r^3 l};$$

$$T_t = -\frac{dQ_t}{d\varphi} - \frac{dQ_x}{dx}r = -\frac{D(l-x)a_k(k^2-1)k^2\cos k\varphi}{r^3 l};$$

$$S = \int\left(\frac{Q_t}{r} - \frac{dT_t}{r\,d\varphi}\right)dx = \frac{D(l-x)^2 a_k(k^2-1)^2 k\sin k\varphi}{2r^4 l};$$

$$T_x = -\int\frac{dS}{r\,d\varphi}dx = \frac{D(l-x)^3 a_k(k^2-1)^2 k^2\cos k\varphi}{6r^5 l}.$$

На краю оболочки при $x = 0$

$$Q_x = \frac{Da_k(k^2-1)\cos k\varphi}{r^2 l}; \quad S = \frac{Dla_k(k^2-1)^2 k\sin k\varphi}{2r^4};$$

$$M_{xt} = \frac{D(1-\mu)a_k(k^2-1)\sin k\varphi}{rlk}; \quad M_t = -\frac{Da_k(k^2-1)\cos k\varphi}{r^2}; \quad M_x = \mu M_t.$$

В действительности же на краю оболочки имеется только радиальная нагрузка

$$q_k = \frac{2P}{\pi r}\cos k\varphi.$$

Для того чтобы установить зависимость между величиной коэффициента a_k и нагрузкой, заменим Q_x, S и M_{xt} (при $x=0$) некоторым суммарным эквивалентным поперечным усилием

$$q_k = Q_x + Q_x^{(S)} + Q_x^{(M_{xt})}.$$

Усилие $Q_x^{(S)}$ найдем, используя зависимость (9.43):

$$Q_x^{(S)} = -\int S\, d\varphi = \frac{Dla_k\,(k^2-1)^2 \cos k\varphi}{2r^4}.$$

Усилие $Q_x^{(M_{xt})}$ определяется по моменту M_{xt} по аналогии с зависимостью (4.67) гл. 4:

$$Q_x^{(M_{xt})} = \frac{dM_{xt}}{r\,d\varphi} + \int \frac{M_{xt}}{r}\, d\varphi = \frac{D\,(1-\mu)\, a_k\,(k^2-1)^2 \cos k\varphi}{r^2 l k^2}.$$

Сложив Q_x, $Q_x^{(S)}$ и $Q_x^{(M_{xt})}$ и приравняв нагрузке q_k, получим уравнение

$$\frac{Da_k\,(k^2-1)\cos k\varphi}{r^2 l} + \frac{Dla_k\,(k^2-1)^2\cos k\varphi}{2r^4} + $$
$$+ \frac{D\,(1-\mu)\, a_k\,(k^2-1)^2 \cos l\,\varphi}{r^2 l k^2} = \frac{2P}{\pi r}\cos k\varphi,$$

из которого найдем

$$a_k = \frac{2Prl}{\pi D\,(k^2-1)\left[1 + \frac{l^2}{2r^2}(k^2-1) + (1-\mu)\frac{(k^2-1)}{k^2}\right]}.$$

Радиальное перемещение и изгибающий момент в окружном направлении при $x=0$ и $\varphi=0$ определяются суммированием соответствующих рядов:

$$w_{(x=0,\ \varphi=0)} = \sum_{k=2,\,4,\dots}^{\infty} a_k;$$

$$M_{t(x=0,\ \varphi=0)} = -\sum_{k=2,\,4,\dots}^{\infty} \frac{Da_k\,(k^2-1)}{r^2}.$$

Результаты вычислений w и M_t при $r=10$ см, $l=30$ см, $h=0{,}2$ см, $E=2\cdot10^7$ Н/см², $\mu=0{,}3$ приведены в следующей таблице:

k	$a_k = w_{k(x=0,\ \varphi=0)}$	$M_{t(x=0,\ \varphi=0)}$
2	$28{,}6\cdot10^{-5}P$	$0{,}126P$
4	$1{,}26\cdot10^{-5}P$	$0{,}028P$
6	$0{,}23\cdot10^{-5}P$	$0{,}012P$

Заметим, что приведенное решение на основе теории чисто моментного напряженного состояния не вполне удовлетворяет граничным условиям, так как при $x=0$ получается некоторая растягивающая сила T_x и момент M_x, тогда как в действительности они равны нулю. Величины этих силовых факторов, однако, получаются небольшими.

Глава 10. МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

§ 1. Уравнения моментной теории

В общем случае осесимметричного нагружения оболочки вращения ее стенки испытывают как растяжение, так и изгиб. Изгиб возникает около мест приложения сосредоточенных нагрузок, около мест закреплений, а также там, где скачкообразно изменяются радиусы кривизны. Характер изгибной деформации может быть различным. При нагружении сосредоточенными силами (рис. 10, *а* и *б*) изгиб оказывает решающее влияние на прочность, так как в этом

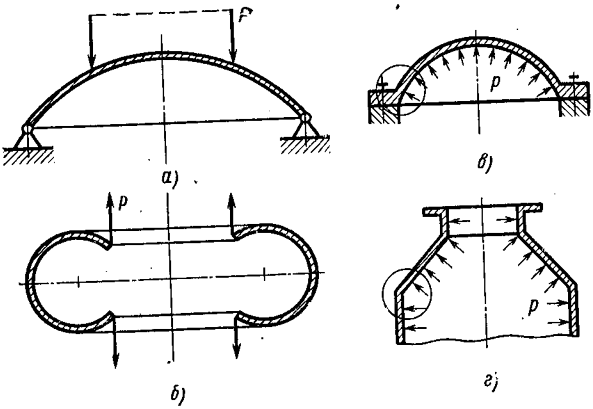


Рис. 10.1

случае с увеличением нагрузки изгибная деформация растет вплоть до исчерпания несущей способности конструкции.

В местах сопряжения оболочки с другими элементами или в местах скачкообразного изменения радиусов кривизны (рис. 10, *в*, *г*) изгиб имеет другой характер; здесь изгиб развивается лишь в той мере, в какой это необходимо для выполнения условий сопряжения. При пластичном материале оболочки изгибные деформации этого типа с увеличением нагрузки обычно затухают и практически не влияют на несущую способность. При хрупком материале оболочки напряжения изгиба остаются пропорциональными нагрузке вплоть до разрушения и могут привести к значительному снижению прочности конструкции.

Расчеты оболочек вращения по моментной теории не ограничиваются вопросами прочности. Часто оболочки используют в качестве упругих элементов (сильфоны, гофрированные коробки, элементы зажимных приспособлений и т. д.). Определение жесткости таких оболочек и оценка величины максимальных напряжений могут быть выполнены только по моментной теории.

При выводе уравнений моментной теории оболочек вращения используются гипотезы Кирхгофа — Лява (см. гл. 8, § 1).

Рассмотрим деформации и перемещения точек срединной поверхности, возникающие при осесимметричном нагружении оболочки вращения. Будем считать, что крутящий момент в оболочке отсутствует и, следовательно, перемещения в окружном направлении и угловая деформация в касательной плоскости равны нулю. Остальные перемещения и деформации представляют собой функции лишь одной независимой переменной — дуги меридиана s или угла θ.

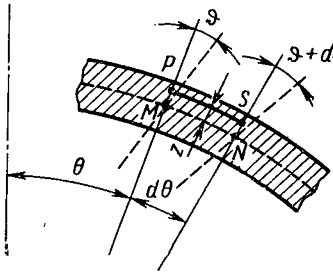


Рис. 10.2

Примем обозначения перемещений и деформаций срединной поверхности такими же, как в гл. 7 (см. рис. 7.12).

Зависимости между перемещениями и деформациями (7.34), (7.36) и (7.38), полученные в гл. 7, остаются полностью справедливыми. Выполнив элементарные преобразования, представим уравнения (7.36), (7.38) в следующем виде:

$$\varepsilon_m = \frac{d\xi}{R_m d\theta}\frac{1}{\cos\theta} + \vartheta \operatorname{tg}\theta; \tag{10.1}$$

$$\frac{d\eta}{R_m d\theta} = \varepsilon_m \sin\theta + \vartheta\cos\theta. \tag{10.2}$$

В результате исключения из уравнений (7.34) и (10.1) функции ξ получим уравнение совместности деформаций срединной поверхности

$$\vartheta R_m = (\varepsilon_m R_m - \varepsilon_t R_t)\operatorname{ctg}\theta - \frac{d(\varepsilon_t R_t)}{d\theta} \tag{10.3}$$

или с учетом соотношения $R_t = \dfrac{r}{\sin\theta}$

$$\frac{d(\varepsilon_t r)}{R_m d\theta} - \varepsilon_m\cos\theta = -\vartheta\sin\theta. \tag{10.3a}$$

Перейдем к определению деформаций в произвольном слое оболочки, расположенном на расстоянии z от срединной поверхности (z будем считать положительным по направлению от центра кривизны). За счет поворота нормали на уголь ϑ произвольная точка P (рис. 10.2) получает дополнительное радиальное перемещение по сравнению с точкой M на величину $z\vartheta\cos\theta$. Сложив это перемещение с перемещением точки M, равным ξ, и разделив полученную сумму на $r = R_t \sin\theta$, найдем относительную окружную деформацию в z-м слое:

$$\varepsilon_{tz} = \frac{\xi + z\vartheta\cos\theta}{R_t\sin\theta} = \varepsilon_t + \frac{z\vartheta}{R_t}\operatorname{ctg}\theta. \qquad (10.4)$$

Для определения меридиональной деформации в z-м слое вычислим удлинение отрезка PS.

За счет поворотов нормалей длина этого отрезка увеличится по сравнению с отрезком MN на величину $zd\vartheta$. Первоначальную длину отрезка PS ввиду тонкостенности оболочки можно считать равной ds. Следовательно, меридиональная деформация z-го слоя по сравнению с деформацией срединной поверхности будет больше на $\frac{z\,d\vartheta}{ds}$ и полная меридиональная деформация составит

$$\varepsilon_{mz} = \varepsilon_m + \frac{z\,d\vartheta}{ds} = \varepsilon_m + \frac{z\,d\vartheta}{R_m\,d\theta}. \qquad (10.5)$$

Перейдем от деформаций к напряжениям. По формулам обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{tz} = \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_{tz} + \mu\varepsilon_{mz}] = \frac{E}{1-\mu^2}\Big[(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_m) + z\left(\frac{\vartheta\operatorname{ctg}\theta}{R_t} + \mu\frac{d\vartheta}{R_m\,d\theta}\right)\Big]; \qquad (10.6)$$

$$\sigma_{mz} = \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_{mz} + \mu\varepsilon_{tz}] = \frac{E}{1-\mu^2}\Big[(\varepsilon_m + \mu\varepsilon_t) + z\left(\frac{d\vartheta}{R_m\,d\theta} + \mu\frac{\vartheta\operatorname{ctg}\theta}{R_t}\right)\Big]. \qquad (10.7)$$

Первые слагаемые в квадратных скобках, не зависящие от z, соответствуют напряжениям растяжения (сжатия). Вторые, линейно зависящие от z, — напряжениям изгиба.

По напряжениям определим внутренние силовые факторы. Растягивающие силы

$$T_m = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{mz}dz; \quad T_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{tz}\,dz.$$

Изгибающие моменты

$$M_m = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{mz}\,dzz; \quad M_t = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{tz}\,dzz.$$

В результате подстановки под знаки интегралов выражений (10.6) и (10.7) и интегрирования получим

$$T_m = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_m + \mu\varepsilon_t) =$$

$$= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{1}{R_m}\frac{d\xi}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta} + \vartheta \operatorname{tg}\theta + \mu\frac{\xi}{R_t \sin\theta}\right]; \qquad (10.8)$$

$$T_t = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_m) =$$

$$= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\xi}{R_t \sin\theta} + \mu\frac{d\xi}{R_m\, d\theta \cos\theta} + \mu\vartheta \operatorname{tg}\theta\right]; \qquad (10.9)$$

$$M_m = -D\left[\frac{1}{R_m}\frac{d\vartheta}{d\theta} + \mu\frac{\vartheta}{R_t}\operatorname{ctg}\theta\right]; \qquad (10.10)$$

$$M_t = -D\left[\frac{\vartheta}{R_t}\operatorname{ctg}\theta + \mu\frac{1}{R_m}\frac{d\vartheta}{d\theta}\right]. \qquad (10.11)$$

Зависимости (10.8) и (10.9) можно также представить в ином виде, выразив деформации срединной поверхности через усилия:

$$\varepsilon_m = \frac{T_m - \mu T_t}{Eh}; \qquad (10.12)$$

$$\varepsilon_t = \frac{T_t - \mu T_m}{Eh}. \qquad (10.13)$$

Кроме нормальных напряжений σ_m и σ_t и соответствующих им силовых факторов T_m, T_t, M_m, M_t, в окружных сечениях оболочки возникают еще касательные напряжения τ_{mz}, перпендикулярные поверхности оболочки. Им соответствует поперечная сила

$$Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{mz} dz.$$

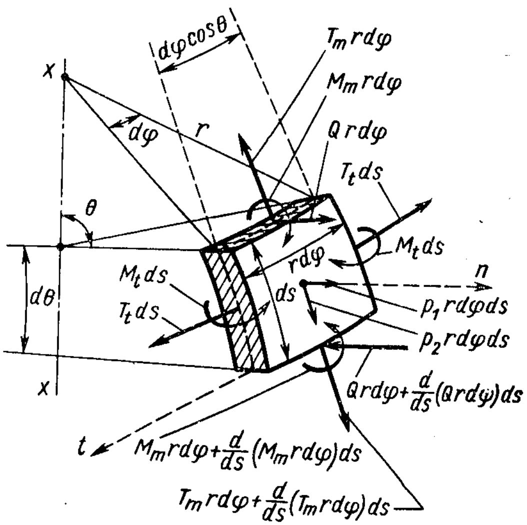


Рис. 10.3

На срединной поверхности касательные напряжения τ_{mz} достигают максимума, а при $z = \pm\frac{1}{2}h$ обращаются в нуль. Эти напряжения не имеют существенного значения при расчете оболочки на прочность, однако их равнодействующая — поперечная сила Q — играет важную роль в уравнениях равновесия элемента оболочки.

На рис. 10.3 изображен элемент оболочки с действующими на него силами и моментами. Кроме внутренних силовых факторов, на выделенный элемент действуют составляющие поверхностной нагрузки p_1 и p_2 (третья составляющая при осесимметричной нагрузке равна нулю). Приравняв нулю сумму проекций всех сил на нормаль к поверхности и на ось оболочки x, а также сумму моментов относительно оси t, касательной к окружности, получим следующие три уравнения:

$$\frac{d(Qr\,d\varphi)}{ds}ds - T_t ds\,d\varphi\sin\theta - T_m r d\varphi\,d\theta + p_1 r d\varphi\,ds = 0;$$

$$\frac{d(T_m r\,d\varphi\sin\theta)}{ds}ds + \frac{d(Qr d\varphi\cos\theta)}{ds}ds - p_1 r d\varphi\,ds\cos\theta +$$
$$+ p_2 r d\varphi\,ds\sin\theta = 0;$$

$$Qr d\varphi\,ds - \frac{d(M_m r\,d\varphi)}{ds}ds + M_t\,ds\,d\varphi\cos\theta +$$
$$+ p_1\,r d\varphi\,ds\frac{ds}{2} - T_t ds\,d\varphi\frac{ds}{2}\sin\theta = 0.$$

После исключения слагаемых высшего порядка малости и сокращений, а также подстановок

$$r = R_t\sin\theta; \quad ds = R_m d\theta$$

уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{1}{R_m R_t\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(QR_t\sin\theta) + \frac{T_m}{R_m} + \frac{T_t}{R_t} = p_1; \tag{10.14}$$

$$\frac{d}{R_m d\theta}[(T_m\sin\theta + Q\cos\theta)\,r] = (p_1\cos\theta - p_2\sin\theta)\,r; \tag{10.15}$$

$$Q - \frac{1}{R_t\sin\theta R_m}\frac{d}{d\theta}(M_m R_t\sin\theta) + \frac{M_t\cos\theta}{R_t\sin\theta} = 0. \tag{10.16}$$

Остальные уравнения равновесия элемента оболочки удовлетворяются тождественно.

Уравнения равновесия (10.14) — (10.16) вместе с уравнениями (10.8) — (10.11) образуют систему семи уравнений с семью неизвестными (T_m, T_t, M_m, M_t, Q, ξ, ϑ).

Приведем полученную систему уравнений к двум симметричным разрешающим уравнениям с двумя неизвестными (это преобразование было выполнено Мейсснером).

Прежде всего преобразуем уравнение равновесия (10.15). Введем обозначение

$$p_1\cos\theta - p_2\sin\theta = p_x, \tag{10.17}$$

где p_x — осевая составляющая поверхностной нагрузки.

Проинтегрировав уравнение (10.15) по θ, получим

$$(T_m\sin\theta + Q\cos\theta)\,r = \int_{\theta_0}^{\theta} p_x\hat{r}\hat{R}_m\,d\hat{\theta} + C$$

или

$$(T_m\sin\theta + Q\cos\theta)\,r = F(\theta); \tag{10.18}$$

здесь

$$F(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} p_x\hat{r}\hat{R}_m\,d\theta + C. \tag{10.19}$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (10.18) представляет собой уравнение равновесия пояса оболочки, ограниченного верхним краем и текущим сечением (рис. 10.4, *а*). Функция $F(\theta)$ (10.19) представляет собой равнодействующую внешних сил, приложенных к отсеченной части оболочки, отнесенную к единице полярного угла, причем первое слагаемое равно равнодействующей поверхностных сил, а второе (т. е. постоянная C) – учитывает осевую составляющую сил, приложенных к верхнему краю или к некоторой окружности в пределах пояса. При отсутствии сосредоточенных осевых сил постоянная C равна нулю.

Для оболочки, замкнутой в вершине ($\theta_0 = 0$), уравнение (10.18) превращается в уравнение равновесия отсеченного купола.

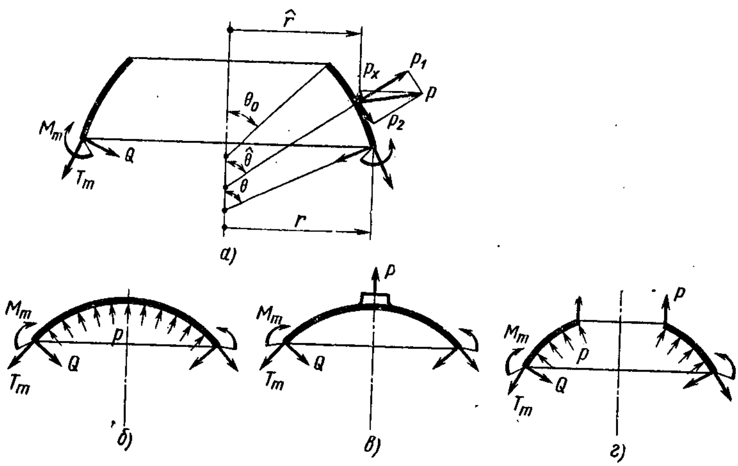


Рис. 10.4

Для каждой заданной оболочки функция $F(\theta)$ может быть определена заранее, и при решении системы уравнений ее можно считать известной.

Так, например, если оболочка замкнута в вершине и нагружена равномерным внутренним давлением (рис. 10.4, *б*), то

$$F(\theta) = \frac{p\pi r^2}{2\pi} = \frac{pr^2}{2}.$$

Если оболочка нагружена силой P (рис. 10.4, *в*), то

$$F(\theta) = \frac{P}{2\pi}.$$

Для оболочки, не замкнутой в вершине и нагруженной равномерным давлением и силой P (рис. 10.4, *г*),

$$F(\theta) = \frac{p\pi(r^2 - r_0^2) + P}{2\pi}.$$

Преобразуем теперь уравнение совместности деформаций (10.3). Подставив выражения деформаций (10.10) и (10.11), получим уравнение совместности деформаций в усилиях

$$EhR_m\vartheta = [T_m(R_m + \mu R_t) - T_t(R_t + \mu R_m)]\operatorname{ctg}\theta - \\ - \frac{d}{d\theta}[(T_t - \mu T_m)R_t]. \tag{10.20}$$

Меридиональное усилие выразим из уравнения равновесия (10.18):

$$T_m = \frac{F(\theta)}{R_t \sin^2\theta} - Q\operatorname{ctg}\theta, \tag{10.21}$$

а окружное — из уравнения (10.14):

$$T_t = p_1R_t - \frac{1}{R_m}\frac{d}{d\theta}(QR_t) - \frac{F(\theta)}{R_m\sin^2\theta}. \tag{10.22}$$

Введем новую переменную (переменную Мейсснера)

$$V = QR_t; \tag{10.23}$$

тогда

$$T_m = \frac{F(\theta)}{R_t\sin^2\theta} - \frac{V}{R_t}\operatorname{ctg}\theta; \tag{10.24}$$

$$T_t = p_1R_t - \frac{dV}{R_m d\theta} - \frac{F(\theta)}{R_m\sin^2\theta}. \tag{10.25}$$

В результате подстановки выражений (10.24) и (10.25) в уравнение (10.20) и несложных преобразований получим первое разрешающее уравнение

$$\frac{R_t}{R_m}\frac{d^2V}{d\theta^2} + \left[\frac{R_t}{R_m}\operatorname{ctg}\theta + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{R_t}{R_m}\right)\right]\frac{dV}{d\theta} - \frac{R_m}{R_t}\operatorname{ctg}^2\theta\, V + \mu V = \\ = EhR_m\vartheta + \Phi(\theta), \tag{10.26}$$

где $\Phi(\theta)$ — функция, зависящая от нагрузки, т. е.

$$\Phi(\theta) = \frac{d}{d\theta}(p_1R_t^2) + p_2R_t(R_t + \mu R_m) - \frac{F(\theta)}{\sin^2\theta}\left[\left(\frac{R_m}{R_t} - \frac{R_t}{R_m}\right)\operatorname{ctg}\theta + \\ + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{R_t}{R_m}\right)\right]. \tag{10.27}$$

Уравнение (10.26) содержит две неизвестные функции V и ϑ. Второе уравнение с теми же неизвестными получим, подставив в уравнение равновесия (10.16) выражения моментов (10.12) и (10.13). После несложных преобразований это уравнение принимает вид

$$\frac{R_t}{R_m}\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \left[\frac{R_t}{R_m}\operatorname{ctg}\theta + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{R_t}{R_m}\right)\right]\frac{dV}{d\theta} - \\ - \frac{R_m}{R_t}\operatorname{ctg}^2\theta\,\vartheta - \mu\vartheta = -\frac{R_mV}{D}. \tag{10.28}$$

Дифференциальные уравнения (10.26) и (10.28) образуют систему двух разрешающих уравнений с двумя неизвестными функциями.

Нетрудно заметить, что эти уравнения имеют определенную симметрию, что достигнуто введением специальной функции V.

Введя обозначение дифференциального оператора

$$L(\ )=\frac{R_t}{R_m}\frac{d^2(\ )}{d\theta^2}+\left[\frac{R_t}{R_m}\operatorname{ctg}\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{d}{d\theta}\left(\frac{R_t}{R_m}\right)\right]\frac{d(\ )}{d\theta}-\frac{R_m}{R_t}\operatorname{ctg}^2\theta\,(\ ), \tag{10.29}$$

разрешающим уравнениям (10.26) и (10.28) можно придать более компактную форму

$$L(V)+\mu V=EhR_m\vartheta+\Phi(\theta); \tag{10.30}$$

$$L(\vartheta)-\mu\vartheta=-\frac{R_mV}{D}. \tag{10.31}$$

Если функции V и ϑ, удовлетворяющие уравнениям (10.30) и (10.31), а также граничным условиям на краях оболочки, будут найдены, то по ним можно легко определить и все остальные величины. Изгибающие моменты вычисляют по формулам (10.12) и (10.13); мембранные усилия — по формулам (10.24) и (10.25). Поперечную силу Q определяют на основании равенства (10.23), т. е.

$$Q=\frac{V}{R_t}. \tag{10.32}$$

Напряжения в оболочке вычисляют по внутренним силовым факторам, пользуясь формулами:

$$\sigma_{m\ \max}=\frac{T_m}{h}\pm\frac{M_m6}{h^2};$$
$$\sigma_{t\ \max}=\frac{T_t}{h}\pm\frac{M_t\,6}{h^2}. \tag{10.33}$$

Знак перед вторым членом выбирается в зависимости от того, на какой стороне стенки оболочки вычисляют напряжение.

Деформации срединной поверхности определяют по уравнениям (10.12) и (10.13); радиальные перемещения — по зависимости (7.35), а осевые перемещения — по формуле

$$\eta=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}(\varepsilon_m\sin\hat{\theta}+\vartheta\cos\hat{\theta})\,R_m d\hat{\theta}, \tag{10.34}$$

полученной в результате интегрирования уравнения (10.2).

В разрешающих уравнениях (10.26) и (10.27) в качестве независимой переменной принят угол θ, поэтому эти уравнения применимы только для оболочек, имеющих криволинейные образующие. Преобразуем эти уравнения, приняв в качестве независимой переменной длину меридиана s. Предположив, что $R_m=\mathrm{const}$, а также приняв во внимание уравнение (7.4) и равенства

$$d\theta=\frac{ds}{R_m};\quad \frac{d(*)}{d\theta}=R_m\frac{d(*)}{ds},$$

взамен уравнений (10.26) и (10.28) получим

$$\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_t}\frac{dV}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_t^2}V+\frac{\mu}{R_tR_m}V=\frac{Eh\vartheta}{R_t}+\frac{1}{R_t}\Phi(s); \tag{10.35}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_t}\frac{d\vartheta}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_t^2}\vartheta-\frac{\mu}{R_tR_m}\vartheta=-\frac{V}{R_tD}, \tag{10.36}$$

где

$$\Phi(s)=\frac{d}{ds}(p_1R_t^2)+p_2R_t\left(\frac{R_t}{R_m}+\mu\right)-\frac{F(s)}{\sin^2\theta}\left[\left(\frac{1}{R_t}-\frac{R_t}{R_m^2}\right)\operatorname{ctg}\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{d}{ds}\left(\frac{R_t}{R_m}\right)\right]; \tag{10.37}$$

здесь $F(s)$ — осевая сила, приходящаяся на единицу полярного угла.

Для оболочек с прямолинейными образующими $R_m=\infty$ и разрешающие уравнения принимают вид

$$\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_t}\frac{dV}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_t^2}V=\frac{Eh\vartheta}{R_t}+\frac{1}{R_t}\Phi_1(s); \tag{10.38}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_t}\frac{d\vartheta}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_t^2}\vartheta=-\frac{V}{R_tD}, \tag{10.39}$$

где

$$\Phi_1(s)=\frac{d}{ds}(p_1R_t^2)+p_2R_t\mu-\frac{F(s)\operatorname{ctg}\theta}{R_t\sin^2\theta} \tag{10.40}$$

или в сокращенной записи

$$L_1(V)=\frac{Eh\vartheta}{R_t}+\frac{1}{R_t}\Phi_1(s); \tag{10.41}$$

$$L_1(\vartheta)=-\frac{V}{R_tD}, \tag{10.42}$$

где

$$L_1(\ )=\frac{d^2(\ )}{ds^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_t}\frac{d(\ )}{ds}-\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{R_t^2}(\ ). \tag{10.43}$$

Напишем выражения для внутренних силовых факторов оболочек с прямолинейными образующими. Приняв за независимую переменную длину меридиана s, взамен выражений (10.12), (10.13), (10.24) и (10.25) получим

$$\left.\begin{aligned}
M_m&=-D\left[\frac{d\vartheta}{ds}+\mu\frac{\vartheta\operatorname{ctg}\theta}{R_t}\right];\\
M_t&=-D\left[\frac{\operatorname{ctg}\theta\,\vartheta}{R_t}+\mu\frac{d\vartheta}{ds}\right];\\
T_m&=-\frac{V}{R_t}\operatorname{ctg}\theta+\frac{F(s)}{R_t\sin^2\theta};\\
T_t&=p_1R_t-\frac{dV}{ds}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.44}$$

Заметим, что в качестве функции V иногда принимают несколько другую функцию [15]; тогда разрешающие уравнения получаются иные по форме.

Разрешающие уравнения (10.26), (10.28) или (10.35), (10.36) имеют второй порядок и содержат по две неизвестные функции. Разделением переменных они могут быть приведены к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка с одной неизвестной функцией. Решение этих уравнений содержит четыре постоянные интегрирования, которые в каждом частном случае определяют по граничным условиям на краях оболочки.

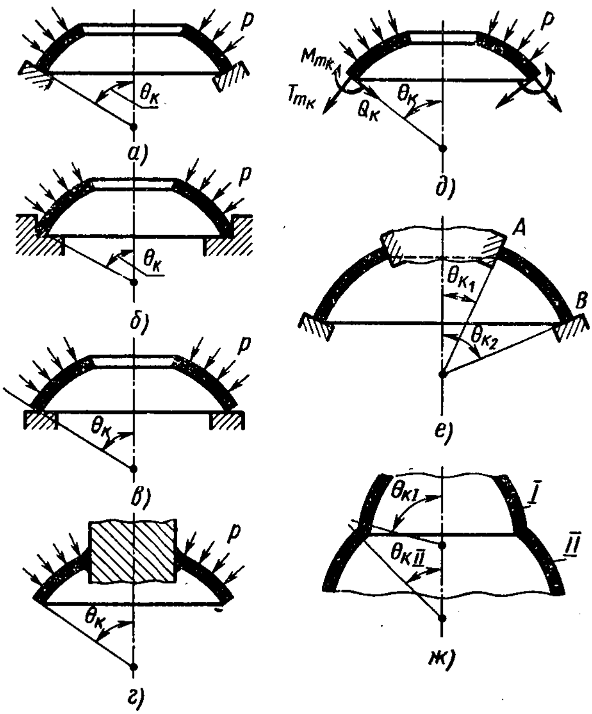


Рис. 10.5

Для пояса оболочки на обоих ее краях должны быть заданы по два граничных условия. Если же оболочка замкнута в вершине, то должны быть заданы два условия на краю и два в вершине.

На практике могут встретиться следующие варианты граничных условий.

а) *Край оболочки жестко заделан* (рис. 10.5, *а*):

$$\text{при } \theta = \theta_к \quad \vartheta = 0;$$
$$\text{при } \theta = \theta_к \quad \xi = 0$$

На основании зависимостей (7.35) и (10.13) второе условие можно также записать в другом виде:

$$\text{при } \theta=\theta_\text{к} \ \ \varepsilon_t=0 \quad \text{или} \ \ T_t-\mu T_m=0.$$

б) *Край оболочки закреплен шарнирно* (рис. 10.5, *б*).

В этом случае

$$\text{при } \theta=\theta_\text{к} \ \ \xi=0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_t=0; \quad T_t-\mu T_m=0;$$

$$\text{при } \theta=\theta_\text{к} \quad M_m=0 \quad \text{или} \quad \frac{d\vartheta}{R_m d\theta}+\mu\frac{\vartheta\operatorname{ctg}\theta_\text{к}}{R_t}=0.$$

в) *Край оболочки свободно оперт* (рис. 10.5, *в*).

Тогда

$$\text{при } \theta=\theta_\text{к} \quad M_m=0 \quad \text{или} \quad \frac{d\vartheta}{R_m d\theta}+\frac{\mu\vartheta\operatorname{ctg}\theta_\text{к}}{R_t}=0;$$

$$\text{при } \theta=\theta_\text{к} \quad T_m\cos\theta_\text{к}-Q\sin\theta_\text{к}=0;$$

последнее условие требует равенства нулю радиальной распорной силы.

г) *Край оболочки свободен от закрепления* (рис. 10.5, *г*).

Здесь

$$\text{при } \theta=\theta_\text{к} \quad M_m=0 \quad \text{или} \quad \frac{d\vartheta}{R_m d\theta}+\mu\frac{\vartheta\operatorname{ctg}\theta_\text{к}}{R_t}=0;$$

$$\text{при } \theta=\theta_\text{к} \quad Q=0 \quad \text{или} \quad V=0.$$

На свободном краю T_m также равно нулю, однако это условие не является независимым, так как T_m и Q связаны уравнением равновесия (10.18).

д) *Край оболочки нагружен краевыми силами* $T_{m\text{к}}$ и $Q_\text{к}$ *и моментом* $M_{m\text{к}}$ (рис. 10.5, *д*). В этом случае

$$\text{при } \theta=\theta_\text{к} \quad M_m=M_{m\text{к}} \quad \text{или}$$

$$-D\left[\frac{d\vartheta}{R_m d\theta}+\mu\frac{\vartheta\operatorname{ctg}\theta}{R_t}\right]_{\theta=\theta_\text{к}}=M_{m\text{к}};$$

$$\text{при } \theta=\theta_\text{к} \ \ Q=Q_\text{к} \quad \text{или} \quad V=Q_\text{к}R_t.$$

е) *Оболочка жестко заделана с обеих сторон* (рис. 10.5, *е*). Так как такая оболочка статически неопределима относительно усилия $F(\theta)$, необходимо иметь пять условий:

$$\text{при } \theta=\theta_{\text{к}1} \ \ \vartheta=0; \quad \text{при} \quad \theta=\theta_{\text{к}1} \quad \varepsilon_t=0,$$

$$\text{при } \theta=\theta_{\text{к}2} \ \ \vartheta=0; \quad \text{при} \quad \theta=\theta_{\text{к}2} \quad \varepsilon_t=0;$$

$$\eta_{A/B}=0 \quad \text{или} \quad \int\limits_{\theta_{\text{к}1}}^{\theta_{\text{к}2}}(\varepsilon_m\sin\theta+\vartheta\cos\theta)\,R_m d\theta=0.$$

Последнее условие выражает равенство нулю относительного перемещения точек A и B в направлении оси оболочки.

ж) *При сопряжении краев двух оболочек* (рис. 10.5, *ж*) необходимо иметь четыре условия, так как для каждого края требуется по два условия. Эти условия состоят в следующем:

$$\xi_{\text{к}}^{(\text{I})}=\xi_{\text{к}}^{(\text{II})} \quad \text{или} \quad \varepsilon_t^{(\text{I})}=\varepsilon_t^{(\text{II})};$$
$$\vartheta_{\text{к}}^{(\text{I})}=\vartheta_{\text{к}}^{(\text{II})};$$
$$M_{m\text{к}}^{(\text{I})}=M_{m\text{к}}^{(\text{II})};$$
$$T_{m\text{к}}^{(\text{I})}\cos\theta_{\text{кI}}-Q^{(\text{I})}\sin\theta_{\text{кI}}=T_{m\text{к}}^{(\text{II})}\cos\theta_{\text{кII}}-Q^{(\text{II})}\sin\theta_{\text{кII}}.$$

Последнее условие выражает равенство радиальных сил (сил распора). Равенство осевых сил для I и II оболочек не может быть использовано в качестве условия сопряжения участков, так как это условие используется при определении функции $F(\theta)$.

з) *Если оболочка замкнута в вершине,* то при $\theta=0$ должны выполняться следующие условия:

$$\vartheta=0;$$
$$Q=0.$$

Случай нагружения сосредоточенной силой в вершине — особый. (Сосредоточенную силу можно считать приложенной к небольшому абсолютно жесткому центру.)

§ 2. Осесимметричные конические оболочки

Применим разрешающие уравнения (10.38) и (10.39) к конической оболочке.

Координату s для конической оболочки удобно отсчитывать от вершины конуса, тогда

$$R_t=s\operatorname{ctg}\theta \tag{10.45}$$

и уравнения принимают следующий вид:

$$s\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{dV}{ds}-\frac{1}{s}V=Eh\vartheta\operatorname{tg}\theta+\frac{d}{ds}(p_1s^2)\operatorname{ctg}\theta+\mu p_2 s-\frac{F(s)}{s\sin\theta\cos\theta}; \tag{10.46}$$

$$s\frac{d^2\vartheta}{ds^2}+\frac{d\vartheta}{ds}-\frac{1}{s}\vartheta=-\frac{\operatorname{tg}\theta V}{D} \tag{10.47}$$

или

$$L_2(V)=Eh\vartheta\operatorname{tg}\theta+\Phi_2(s); \tag{10.46a}$$

$$L_2(\vartheta)=-\frac{\operatorname{tg}\theta V}{D}, \tag{10.47a}$$

где

$$L_2(\ )=s\frac{d^2(\ )}{ds^2}+\frac{d(\ )}{ds}-\frac{1}{s}(\ ); \tag{10.48}$$

$$\Phi_2(s)=\frac{d}{ds}(p_1s^2)\operatorname{ctg}\theta+\mu p_2 s-\frac{F(s)}{s\sin\theta\cos\theta}. \tag{10.49}$$

Выразим внутренние силовые факторы для конической оболочки через функции V и ϑ. Из уравнений (10.44) с учетом соотношения (10.45) следует

$$\left.\begin{aligned} M_m &= -D\left[\frac{d\vartheta}{ds}+\mu\frac{\vartheta}{s}\right]; \quad M_t = -D\left[\frac{\vartheta}{s}+\mu\frac{d\vartheta}{ds}\right];\\ T_m &= -\frac{V}{s}+\frac{F(s)}{s\sin\theta\cos\theta}; \quad T_t = p_1 s\operatorname{ctg}\theta-\frac{dV}{ds};\\ Q &= \frac{V}{s\operatorname{ctg}\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.50)$$

Решение системы уравнений (10.46) и (10.47) можно представить в виде суммы общего решения соответствующей системы однородных уравнений и частного решения данной системы, т. е.

$$V=\mathring{V}+\overline{V}; \qquad \vartheta=\mathring{\vartheta}+\overline{\vartheta}. \qquad (10.51)$$

Найдем частное решение системы уравнений (10.46) и (10.47) для некоторых частных случаев нагружения.

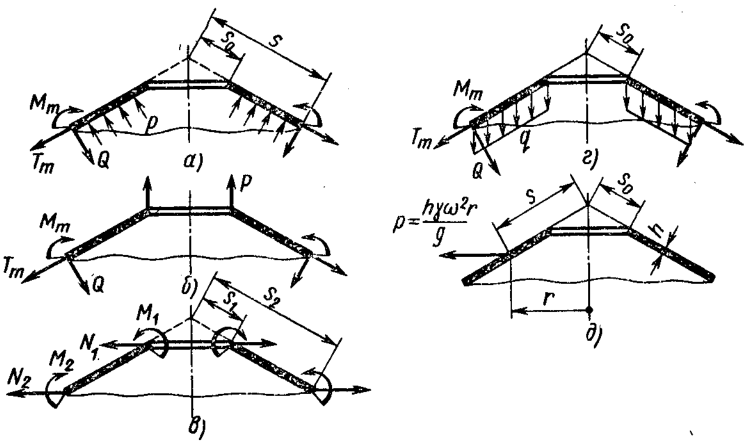


Рис. 10.6

На оболочку действует равномерное внутреннее давление p (рис. 10.6, *а*).

Тогда

$$p_1=p; \quad p_2=0; \quad F(s)=p\frac{(s^2-s_0^2)\cos^2\theta}{2};$$

$$\Phi_2(s)=p2s\operatorname{ctg}\theta-\frac{p(s^2-s_0^2)\operatorname{ctg}\theta}{2s}=\frac{p\operatorname{ctg}\theta}{2}\left[3s+\frac{s_0^2}{s}\right].$$

Будем искать функцию $\overline{\vartheta}$ в виде, подобном виду функции $\Phi_2(s)$, т. е.

$$\overline{\vartheta}=k\left(3s+\frac{s_0^2}{s}\right),$$

где k — неопределенный множитель.

Подставив это выражение в уравнение (10.47), найдем, что уравнение удовлетворяется при $\bar{V}=0$. Тогда $L(\bar{V})=0$ и уравнение (10.46) принимает вид

$$0=Eh\,\mathrm{tg}\,\theta\,k\left(3s+\frac{s_0^2}{s}\right)+\frac{p}{2}\,\mathrm{ctg}\,\theta\left(3s+\frac{s_0^2}{s}\right),$$

откуда

$$k=-\frac{p}{2Eh}\,\mathrm{ctg}^2\,\theta.$$

Следовательно, для конической оболочки, нагруженной внутренним давлением:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\vartheta}=-\frac{p\,\mathrm{ctg}^2\,\theta}{2Eh}\,s\left(3+\frac{s_0^2}{s^2}\right);\quad \bar{V}=0;\quad \bar{Q}=0;\\&\bar{T}_m=\frac{ps}{2}\left(1-\frac{s_0^2}{s^2}\right)\mathrm{ctg}\,\theta;\quad \bar{T}_t=ps\,\mathrm{ctg}\,\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(10.52)$$

Заметим, что это решение полностью совпадает с решением, которое дает безмоментная теория.

Коническая оболочка находится под действием распределенной по окружности осевой силы P (рис. 10.6, *б*). Поступая так же, как и в предыдущем случае, найдем

$$\left.\begin{aligned}&F(s)=\frac{P}{2\pi};\quad p_1=p_2=0;\quad \Phi_2(s)=-\frac{P}{2\pi s\sin\theta\cos\theta};\\&\bar{\vartheta}=\frac{P}{2\pi Ehs\sin^2\theta};\quad \bar{V}=0;\quad \bar{Q}=0;\\&\bar{T}_m=\frac{P}{2\pi s\sin\theta\cos\theta};\quad \bar{T}_t=0.\end{aligned}\right\}\qquad(10.53)$$

Оболочка нагружена по краям равномерно распределенными моментами и радиальными силами (рис. 10.6, *в*). Так как в этом случае $p_1=p_2=0$ и $F(s)=0$, то $\Phi_2(s)=0$ и частное решение уравнений равно нулю, т. е.

$$\bar{\vartheta}=0;\quad \bar{V}=0.$$

Оболочка нагружена силами собственного веса (рис. 10.6, *г*). Интенсивность поверхностной нагрузки q и ее составляющие p_1 и p_2 соответственно равны:

$$q=\gamma h;\quad p_1=-\gamma h\cos\theta;\quad p_2=\gamma h\sin\theta.$$

Частное решение разрешающих уравнений для оболочки, замкнутой в вершине, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\bar{V}=0;\quad \bar{\vartheta}=\frac{\gamma s\cos\theta}{E}\left[\frac{3}{2}\,\mathrm{ctg}^2\,\theta-\frac{1}{2}-\mu\right];\\&\bar{T}_m=-\frac{h\gamma s}{2\sin\theta};\quad \bar{T}_t=-\frac{h\gamma s\cos^2\theta}{\sin\theta}.\end{aligned}\right\}\qquad(10.54)$$

Если же оболочка незамкнутая, то к решению уравнений (10.54) следует добавить частное решение уравнений (10.53), соответствующее осевой растягивающей силе P, равной весу отсеченной верхней части:

$$P = \pi\gamma h s_0^2 \cos\theta.$$

Оболочка нагружена инерционными силами при равномерном вращении с угловой скоростью ω *рад/с* (рис. 10.6, *д*). Интенсивность инерционной нагрузки в произвольной точке

$$p = \frac{\gamma h\omega^2 r}{g} = \frac{\gamma h\omega^2 s\cos\theta}{g}.$$

Так как эта нагрузка перпендикулярна оси оболочки, то $F(s) = 0$. Разложив нагрузку на нормальную и касательную составляющие, получим

$$p_1 = p\sin\theta = \frac{\gamma h\omega^2 s\sin\theta\cos\theta}{g};$$

$$p_2 = p\cos\theta = \frac{\gamma h\omega^2 s\cos^2\theta}{g}.$$

По формуле (10.45)

$$\Phi_2(s) = \frac{(3+\mu)\, h\gamma\omega^2 s^2\cos^2\theta}{g}.$$

Функцию $\bar{\vartheta}$ найдем в виде, подобном функции $\Phi_2(s)$, т. е.

$$\bar{\vartheta} = ks^2.$$

Из уравнения (10.47)

$$\bar{V} = -3ksD\operatorname{ctg}\theta,$$

а из уравнения (10.46)

$$k = -\frac{(3+\mu)\, h\gamma\omega^2\cos^2\theta}{gEh\operatorname{tg}\theta}.$$

Следовательно

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\vartheta} = -\frac{(3+\mu)\, h\gamma\omega^2\cos^2\theta}{gEh\operatorname{tg}\theta}s^2; \quad \bar{V} = \frac{(3+\mu)\,\gamma h^3\omega^2\cos^2\theta}{4g(1-\mu^2)\operatorname{tg}^2\theta}s;\\
&\bar{Q} = \frac{\bar{V}}{s\operatorname{ctg}\theta}; \quad \bar{T}_m = -\frac{\bar{V}}{s}; \quad \bar{T}_t = \frac{h\gamma\omega^2\cos^2\theta}{g}s^2 - \frac{d\bar{V}}{ds}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.55}$$

Перейдем к определению общего решения системы однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
L_2(\mathring{V}) &= Eh\operatorname{tg}\theta\,\mathring{\vartheta};\\
L_2(\mathring{\vartheta}) &= -\frac{\operatorname{tg}\theta}{D}\mathring{V}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.56}$$

Эти два уравнения второго порядка с двумя неизвестными можно привести к одному уравнению второго порядка относительно комплексной неизвестной [15].

Для этого умножим первое уравнение (10.56) на постоянный множитель a и сложим со вторым:

$$L_2(\mathring{\vartheta}) + aL_2(\mathring{V}) + \frac{\operatorname{tg}\theta}{D}\mathring{V} - aEh\operatorname{tg}\theta\,\mathring{\vartheta} = 0.$$

Перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$L_2(\mathring{\vartheta} + a\mathring{V}) - \mathring{\vartheta}\left[aEh\operatorname{tg}\theta\right] - a\mathring{V}\left[-\frac{\operatorname{tg}\theta}{aD}\right] = 0.$$

Множитель a подберем так, чтобы выражения в квадратных скобках двух последних слагаемых были равны между собой, т. е.

$$aEh\operatorname{tg}\theta = -\frac{\operatorname{tg}\theta}{aD},$$

откуда

$$a = \sqrt{-\frac{1}{DEh}} = i\,\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2},$$

тогда

$$aEh\operatorname{tg}\theta = -\frac{\operatorname{tg}\theta}{aD} = i\,\frac{\operatorname{tg}\theta\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h}$$

и дифференциальное уравнение примет вид

$$L_2(\mathring{\sigma}) - i\,\frac{\operatorname{tg}\theta\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h}\mathring{\sigma} = 0, \tag{10.57}$$

где $\mathring{\sigma}$ — комплексная неизвестная функция;

$$\mathring{\sigma} = \mathring{\vartheta} + i\,\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}\mathring{V}. \tag{10.58}$$

Выполнив интегрирование уравнения (10.57) и разделив комплексную функцию $\mathring{\sigma}$ на действительную и мнимую части, нетрудно найти искомые функции $\mathring{\vartheta}$ и $\mathring{V}$.

Напишем уравнение (10.57) в развернутом виде

$$s\frac{d^2\mathring{\sigma}}{ds^2} + \frac{d\mathring{\sigma}}{ds} - \frac{1}{s}\mathring{\sigma} - i\,\frac{\operatorname{tg}\theta\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h}\mathring{\sigma} = 0$$

или

$$s^2\frac{d^2\mathring{\sigma}}{ds^2} + s\frac{d\mathring{\sigma}}{ds} - \mathring{\sigma} - is\,\frac{\operatorname{tg}\theta\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h}\mathring{\sigma} = 0. \tag{10.59}$$

Произведем замену независимой переменной s на z согласно равенству

$$-is\,\frac{\operatorname{tg}\theta\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h} = \frac{z^2}{4}$$

или

$$z = i\sqrt{i}\,x, \tag{10.60}$$

где x — действительная функция от s, т. е.

$$x=2\sqrt{\frac{s\,\mathrm{tg}\,\theta}{h}}\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}. \qquad (10.61)$$

Тогда

$$\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{s}}\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{h}}\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}=\frac{z}{2s};$$

$$\frac{dx}{ds}=\frac{x}{2s}.$$

После перехода к переменной z дифференциальное уравнение (10.59) принимает вид

$$z^2\frac{d^2\mathring{\sigma}}{dz^2}+z\frac{d\mathring{\sigma}}{dz}+(z^2-2^2)\,\mathring{\sigma}=0. \qquad (10.62)$$

Уравнение (10.62) представляет собой частный случай дифференциального уравнения Бесселя:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)\,y=0, \qquad (10.63)$$

где n — индекс уравнения Бесселя.

Решение уравнения (10.54) выражается через бесселевы функции. Имеется несколько разновидностей этих функций (функции Бесселя, Вебера, Ханкеля и др.); для большинства из них составлены таблицы в широком диапазоне изменения аргумента.

Если n дробное число, то общее решение уравнения (10.63) может быть представлено в функциях Бесселя $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$, которые в этом случае линейно независимы.

Если же n — целое число, линейно независимыми будут функция Бесселя J_n и функция Вебера $Y_n(x)$. При вещественном x все эти функции будут вещественными. Таблицы этих функций приводятся в математических справочниках.

Решением уравнения (10.54) являются также линейные комбинации указанных выше функций, в частности, функции Ханкеля:

$$H_n^{(1)}(x)=J_n(x)+iY_n(x); \quad H_n^{(2)}=J_n(x)-iY_n(x).$$

При вещественном x функции Ханкеля — комплексные.

В нашем случае уравнение (10.62) представляет собой уравнение Бесселя индекса 2 относительно комплексной функции $\mathring{\sigma}$ от комплексной переменной $z=i\sqrt{i}x$. Его решение может быть представлено в следующем виде:

$$\mathring{\sigma}=(C_2+iC_1)\,J_2(i\sqrt{i}\,x)+(-C_3+iC_4)\,H_2^{(1)}(i\sqrt{i}\,x), \qquad (10.64)$$

где (C_2+iC_1) и $(-C_3+iC_4)$ — комплексные постоянные интегрирования (здесь знаки могут быть выбраны произвольно; в данном случае знаки взяты так, чтобы окончательные формулы были более удобными).

Функции J_2 и $H_2^{(1)}$ мнимого аргумента $(i\sqrt{i}\,x)$, в свою очередь, могут быть выражены через функции Томсона индекса 2 — $\mathrm{ber}_2(x)$, $\mathrm{bei}_2(x)$, $\mathrm{ker}_2(x)$, $\mathrm{kei}_2(x)$ (вещественные функции вещественного аргумента x):

$$\left.\begin{aligned} J_2(i\sqrt{i}\,x) &= \mathrm{ber}_2 x + i\,\mathrm{bei}_2 x = \varphi_1 + i\varphi_2; \\ H_2^{(1)}(i\sqrt{i}\,x) &= \frac{2}{\pi}(\mathrm{kei}_2\,x - i\,\mathrm{ker}_2\,x) = \frac{2}{\pi}(\varphi_4 - i\varphi_3), \end{aligned}\right\} \qquad (10.65)$$

где для краткости принято:

$$\varphi_1 = \mathrm{ber}_2(x); \quad \varphi_2 = \mathrm{bei}_2(x); \quad \varphi_3 = \mathrm{ker}_2(x); \quad \varphi_4 = \mathrm{kei}_2(x).$$

Подставим в равенство (10.64) выражения (10.58) и (10.65) и полученное уравнение разделим на действительную и мнимую части (множитель $\frac{2}{\pi}$ можно отбросить, так как это повлияет только на величину постоянных).

В результате получим следующие выражения общего решения системы однородных уравнений (10.56):

$$\mathring{V} = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}[C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 + C_4\varphi_4]; \qquad (10.66)$$

$$\mathring{\vartheta} = -C_1\varphi_2 + C_2\varphi_1 - C_3\varphi_4 + C_4\varphi_3. \qquad (10.67)$$

Функции Томсона индекса 2, входящие в выражения (10.66) и (10.67), могут быть выражены через функции Томсона индекса 0. Если для функций индексов 0 принять обозначения

$$\mathrm{ber}\,x = \psi_1; \quad \mathrm{bei}\,x = \psi_2; \quad \mathrm{ker}\,x = \psi_3; \quad \mathrm{kei}\,x = \psi_4$$

(индекс 0 обычно опускается), то зависимости, связывающие функции Томсона индексов 2 и 0, запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = -\psi_1 + \frac{2}{x}\psi_2'; \quad \varphi_2 = -\psi_2 - \frac{2}{x}\psi_1'; \quad \varphi_3 = -\psi_3 + \frac{2}{x}\psi_4'; \\ &\varphi_4 = -\psi_4 - \frac{2}{x}\psi_3'; \quad \varphi_1' = -\psi_1' - \frac{2}{x}\varphi_1; \quad \varphi_2' = -\psi_2' - \frac{2}{x}\varphi_2; \\ &\qquad \varphi_3' = -\psi_3' - \frac{2}{x}\varphi_3; \quad \varphi_4' = -\psi_4' - \frac{2}{x}\varphi_4 \end{aligned}\right\} \qquad (10.68)$$

(штрихом обозначены производные по x).

Для функций Томсона индекса 0 и их производных имеются таблицы.

При малых значениях аргумента функции Томсона можно также вычислить, разложив их в ряды, а при больших — пользуясь их асимптотическими представлениями [29]. Используя указанные асимптотические представления, можно получить следующие приближенные выражения функций Томсона индекса 2 и их производных:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= -\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[\left(1-\frac{15\sqrt{2}}{16x}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)-\right.\\
&\quad\left.-\frac{15\sqrt{2}}{16x}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
\varphi_2 &= -\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[\left(1-\frac{15\sqrt{2}}{16x}\right)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{15\sqrt{2}}{16x}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
\varphi_3 &= \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{2x}{\pi}}}\left[\left(1+\frac{15\sqrt{2}}{16x}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)-\right.\\
&\quad\left.-\frac{15\sqrt{2}}{16x}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
\varphi_4 &= -\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{2x}{\pi}}}\left[\left(1+\frac{15\sqrt{2}}{16x}\right)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{15\sqrt{2}}{16x}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
\varphi_1' &= -\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{\pi x}}\left[\left(1-\frac{19\sqrt{2}}{8x}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
\varphi_2' &= -\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{\pi x}}\left[\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)+\left(1-\frac{19\sqrt{2}}{8x}\right)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
\varphi_3' &= \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{\frac{x}{\pi}}}\left[-\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)-\left(1+\frac{19\sqrt{2}}{8x}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
\varphi_4' &= \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{\frac{x}{\pi}}}\left[-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)+\left(1+\frac{19\sqrt{2}}{8x}\right)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right].
\end{aligned}\right\}\quad (10.69)$$

Эти выражения справедливы при больших значениях аргумента, т. е. при $x \geqslant 6$.

Приведем выражения внутренних силовых факторов и угла поворота нормали для конической оболочки, полученные в результате суммирования общего решения системы однородных уравнений и частного решения уравнений с правой частью:

$$V=\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left[C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+C_3\varphi_3+C_4\varphi_4\right]+\overline{V}; \tag{10.70}$$

$$\vartheta=-C_1\varphi_2+C_2\varphi_1-C_3\varphi_4+C_4\varphi_3+\overline{\vartheta}; \tag{10.71}$$

$$\left.\begin{aligned}
T_m&=-\frac{Eh^2}{s\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left[C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+C_3\varphi_3+C_4\varphi_4\right]+\overline{T}_m;\\
T_t&=-\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\,\frac{x}{2s}\left[C_1\varphi_1'+C_2\varphi_2'+C_3\varphi_3'+C_4\varphi_4'\right]+\overline{T}_t;\\
Q&=\frac{Eh^2\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}\,s}\left[C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+C_3\varphi_3+C_4\varphi_4\right]+\frac{\overline{V}\operatorname{tg}\theta}{s};
\end{aligned}\right\} \tag{10.72}$$

$$\left.\begin{aligned}
M_m&=-D\left[\frac{x}{2s}\left(-C_1\varphi_2'+C_2\varphi_1'-C_3\varphi_4'+C_4\varphi_3'\right)+\right.\\
&\left.+\frac{\mu}{s}\left(-C_1\varphi_2+C_2\varphi_1-C_3\varphi_4+C_4\varphi_3\right)\right]-D\left[\frac{d\overline{\vartheta}}{ds}+\mu\,\frac{\overline{\vartheta}}{s}\right];\\
M_t&=-D\left[\frac{\mu x}{2s}\left(-C_1\varphi_2'+C_2\varphi_1'-C_3\varphi_4'+C_4\varphi_3'\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{s}\left(-C_1\varphi_2+C_2\varphi_1-C_3\varphi_4+C_4\varphi_3\right)\right]-D\left[\mu\,\frac{d\overline{\vartheta}}{ds}+\frac{\overline{\vartheta}}{s}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{10.73}$$

(штрихом обозначены производные по x).

При решении практических задач полезно иметь в виду, что функции $\varphi_1=\operatorname{ber}_2(x)$ и $\varphi_2=\operatorname{bei}_2(x)$, а также их производные с увеличением x быстро возрастают, в то время как функции $\varphi_3=\operatorname{ker}_2(x)$ и $\varphi_4=\operatorname{kei}_2(x)$ и их производные, наоборот, быстро убывают. Если оболочка имеет достаточно длинные образующие, то можно определять постоянные интегрирования раздельно на каждом краю оболочки подобно тому, как это делается при расчете длинных цилиндрических оболочек.

Коническую оболочку можно считать длинной, если $x_2-x_1>4$ и $x_1>6$. В этом случае при определении напряжений и деформаций около верхнего края (см. рис. 10.6) можно считать $C_1=C_2=0$, а при определении напряжений около нижнего края $C_3=C_4=0$.

Если же $x_2-x_1>4$, а $x_1<6$, то коническую оболочку можно считать длинной только при составлении уравнений граничных условий для нижнего края. Это значит, что из граничных условий при $x=x_2$ можно определить постоянные C_1 и C_2, считая $C_3=C_4=0$. Затем, зная C_1 и C_2, из граничных условий при $x=x_1$ найти C_3 и C_4. Для оболочки, замкнутой в вершине, постоянные C_3 и C_4 равны нулю (за исключением случая, когда к вершине приложена сосредоточенная осевая сила).

Пример 10.1. Определить напряжения в конической крышке (рис. 10.7), нагруженной равномерным внутренним давлением p. Размеры крышки $s_1 = 1{,}55$ см; $s_2 = 12{,}94$ см; $h = 0{,}4$ см; $\alpha = 75°$; материал — сталь; $E = 2\cdot 10^7$ Н/см², $\mu = 0{,}3$.

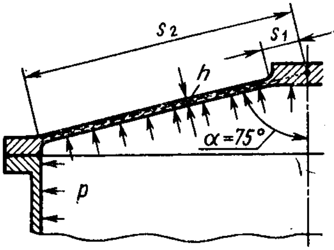


Рис. 10.7

В данном случае $\theta = 90° - \alpha = 15°$, $\operatorname{tg}\theta = 0{,}2679$; параметр x определим по формуле (10.61):

$$x = 2\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{s\operatorname{tg}\theta}{h}} = 3{,}97\sqrt{s}.$$

При $s = s_1 = 1{,}55$ см $x_1 = 3{,}7$; при $s = s_2 = 12{,}94$ см $x_2 = 10{,}7$.

Частное решение разрешающих уравнений найдем по формулам (10.52). Учитывая, что давление действует по всей поверхности, начиная от центра, s_0 следует положить равным нулю, тогда

$$\bar{T}_{m1} = \frac{ps_1}{2}\operatorname{ctg}\theta = 2{,}90\ p;\quad \bar{T}_{m2} = \frac{ps_2}{2}\operatorname{ctg}\theta = 24{,}2\ p;$$

$$\bar{T}_{t1} = ps_1\operatorname{ctg}\theta = 5{,}79\ p;\quad \bar{T}_{t2} = ps_2\operatorname{ctg}\theta = 48{,}4\,p;$$

$$\bar{V} = 0;\quad \bar{Q} = 0;\quad \bar{\vartheta}_1 = -\frac{3ps_1\operatorname{ctg}^2\theta}{2Eh} = -81{,}1\frac{p}{E};$$

$$\bar{\vartheta}_2 = -\frac{3ps_2\operatorname{ctg}^2\theta}{2Eh} = -677\frac{p}{E};$$

$$\bar{M}_t = \bar{M}_m = \frac{h^3\,52{,}3p\,(1+\mu)}{12(1-\mu^2)} = 0{,}4\,p;\quad \frac{\bar{\vartheta}}{s} = -52{,}3\frac{p}{E} = \text{const};$$

$$\frac{d\bar{\vartheta}}{ds} = -52{,}3\frac{p}{E} = \text{const}.$$

Запишем граничные условия, считая фланец и центральную бобышку абсолютно жесткими:

$$\text{при}\quad s = s_1\quad \vartheta_1 = 0;\quad \text{при}\quad s = s_1\quad \varepsilon_{t1} = 0;$$
$$\text{при}\quad s = s_2\quad \vartheta_2 = 0;\quad \text{при}\quad s = s_2\quad \varepsilon_{t2} = 0.$$

Из первого и третьего условий на основании уравнения (10.71) следует:

$$0 = -C_1\varphi_{21} + C_2\varphi_{11} - C_3\varphi_{41} + C_4\varphi_{31} + \bar{\vartheta}_1;$$
$$0 = -C_1\varphi_{22} + C_2\varphi_{12} - C_3\varphi_{42} + C_4\varphi_{32} + \bar{\vartheta}_2.$$

Два остальных условия представим в следующем виде:

$$0 = T_{t1} - \mu T_{m1};\qquad 0 = T_{t2} - \mu T_{m2}$$

или после подстановки выражений T_t и T_m согласно формулам (10.72):

$$0 = -\frac{Eh^2}{s_1\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left[\frac{x_1}{2}\left(C_1\varphi'_{11} + C_2\varphi'_{21} + C_3\varphi'_{31} + C_4\varphi'_{41}\right) - \right.$$
$$\left. - \mu\left(C_1\varphi_{11} + C_2\varphi_{21} + C_3\varphi_{31} + C_4\varphi_{41}\right)\right] + \bar{T}_{t1} - \mu\bar{T}_{m1};$$

$$0 = -\frac{Eh^2}{s_2\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left[\frac{x_2}{2}(C_1\varphi'_{12} + C_2\varphi'_{22} + C_3\varphi'_{32} + C_4\varphi'_{42}) - \mu(C_1\varphi_{12} + C_2\varphi_{22} + \right.$$
$$\left. + C_3\varphi_{32} + C_4\varphi_{42})\right] + \bar{T}_{t2} - \mu\bar{T}_{m2}.$$

Значения функций Томсона индекса 0 и их первых производных:

Аргумент	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_1'	ψ_2'	ψ_3'	ψ_4'
$s_1 = 1{,}55$ ($x_1 = 3{,}7$)	$-1{,}69$	$2{,}34$	$-4{,}69 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}708 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}66$	$0{,}131$	$3{,}34 \cdot 10^{-2}$	$3{,}86 \cdot 10^{-2}$
$s_2 = 12{,}94$ ($x_2 = 10{,}7$)	151	$183{,}2$	$-1{,}90 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}96 \cdot 10^{-4}$	$-30{,}06$	$227{,}9$	$-1{,}24 \cdot 10^{-4}$	$1{,}61 \cdot 10^{-4}$

По формулам (10.68) произведем пересчет на функции индекса 2:

Аргумент	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_1'	φ_2'	φ_3'	φ_4'
$s_1 = 1{,}55$ ($x_1 = 3{,}7$)	$1{,}764$	$-0{,}903$	$6{,}686 \cdot 10^{-2}$	$-10{,}98 \cdot 10^{-3}$	$1{,}71$	$0{,}355$	$-0{,}07$	$-0{,}0326$
$s_2 = 12{,}94$ ($x_2 = 10{,}7$)	$-108{,}5$	$-177{,}6$	$0{,}491 \cdot 10^{-4}$	$2{,}19 \cdot 10^{-4}$	$50{,}3$	$-194{,}6$	$1{,}15 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}02 \cdot 10^{-4}$

После подстановки значений функций Томсона, а также величин $\bar{\vartheta}$, $\bar{T}_m$, $\bar{T}_t$ уравнения граничных условий принимают вид

$$0{,}903C_1+1{,}764C_2+109{,}8\cdot 10^{-4}C_3+668{,}6\cdot 10^{-4}C_4=81{,}1\,\frac{p}{E};$$

$$177{,}6C_1-108{,}5C_2-2{,}19\cdot 10^{-4}C_3+0{,}491\cdot 10^{-4}C_4=667\,\frac{p}{E};$$

$$2{,}629C_1+0{,}931C_2-1478\cdot 10^{-4}C_3-572\cdot 10^{-4}C_4=157{,}7\,\frac{p}{E};$$

$$301{,}9C_1-988C_2+6{,}01\cdot 10^{-4}C_3-11{,}46\cdot 10^{-4}C_4=1{,}1\cdot 10^4\,\frac{p}{E}.$$

Решение этой системы уравнений дает следующие значения постоянных:

$$C_1=-3{,}68\,\frac{p}{E};\quad C_2=-12{,}22\,\frac{p}{E};\quad C_3=-1935\,\frac{p}{E};\quad C_4=1902\,\frac{p}{E}.$$

Задачу определения постоянных можно в данном случае упростить, имея в виду, что функции $\operatorname{ker}_2 x$ и $\operatorname{kei}_2 x$ быстро убывают и при $x_2=10{,}7$ принимают

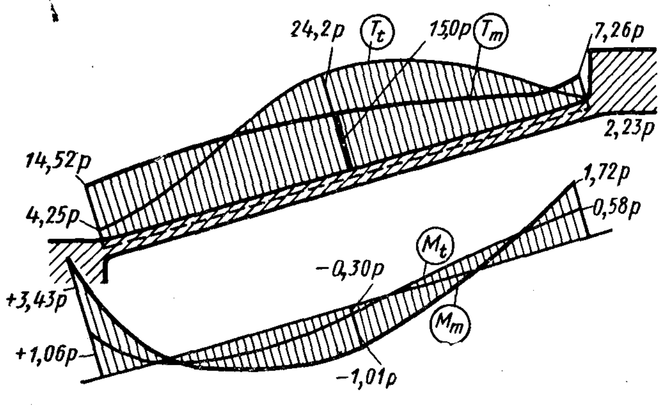


Рис. 10.8

весьма малые значения. Отбросив во втором и в четвертом уравнениях члены, содержащие C_3 и C_4, получим два уравнения с двумя неизвестными:

$$177{,}6C_1+108{,}5C_2=677\,\frac{p}{E};$$

$$301{,}9C_1-988C_2=1{,}1\cdot 10^4\,\frac{p}{E},$$

из которых найдем

$$C_1=-3{,}678\,\frac{p}{E};\quad C_2=-12{,}20\,\frac{p}{E}.$$

Подставив эти значения в первое и третье уравнения и решив их, найдем остальные две постоянные:

$$C_3=-1934\,\frac{p}{E};\qquad C_4=1903\,\frac{p}{E}.$$

Теперь нетрудно по формулам (10.72) и (10.73) вычислить внутренние силовые факторы.

На рис. 10.8 приведены эпюры T_m, T_t, M_m, M_t по длине образующей. Наибольшие напряжения возникают в точках, расположенных на внутренней поверхности у наружного края:

$$\sigma_t = \frac{T_t}{h} + \frac{M_t 6}{h^2} = \frac{4{,}25p}{0{,}4} + \frac{1{,}06p6}{0{,}4^2} = (10{,}5 + 40)\,p = 50{,}5\,p;$$

$$\sigma_m = \frac{T_m}{h} + \frac{M_m 6}{h^2} = \frac{14{,}52p}{0{,}4} + \frac{3{,}43p6}{0{,}4^2} = (36p + 129p) = 165p.$$

В середине образующей при $s \cong 7{,}2$ см напряжения имеют следующие значения:

$$\sigma_t = \frac{24{,}2p}{0{,}4} + \frac{0{,}3p6}{0{,}4^2} = 71p; \qquad \sigma_m = \frac{15p}{0{,}4} + \frac{1{,}01p6}{0{,}4^2} = 76p.$$

Пример 10.2. Коническая оболочка нагружена краевыми нагрузками по схеме, приведенной на рис. 10.9. Дано: $s_1 = 100$ мм; $s_2 = 300$ мм; $h = 0{,}5$ см; $\theta = 60°$. Расчеты выполним двумя способами: с помощью таблиц функций Томсона и по асимптотическим формулам (10.69).

Прежде всего по формуле (10.61) вычислим параметр x для нижнего и верхнего края:

$$x_1 = 2\sqrt[4]{12(1-0{,}3^2)}\sqrt{\frac{s_1 \operatorname{tg} 60°}{h}} = 21{,}4;$$

$$x_2 = 2\sqrt[4]{12(1-0{,}3^2)}\sqrt{\frac{s_2 \operatorname{tg} 60°}{h}} = 37{,}0.$$

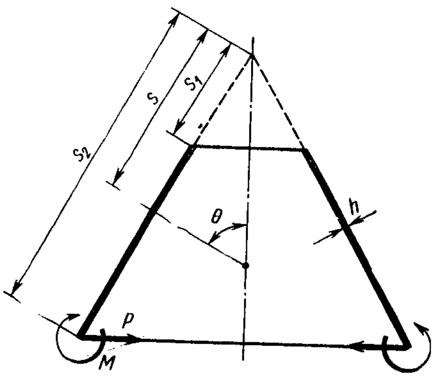


Рис. 10.9

Ввиду того, что образующие данной оболочки достаточно длинные, напряженное состояние около нижнего края можно рассматривать независимо от граничных условий на верхнем краю.

Полагая в выражениях (10.70) и (10.71) $C_3 = C_4 = 0$ и учитывая, что $\bar{\vartheta}$ и $\bar{V}$ при заданной краевой нагрузке равны нулю, для области около нижнего края получим

$$V = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left[C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2\right]; \quad \vartheta = -C_1\varphi_2 + C_2\varphi_1.$$

Пользуясь таблицами, находим значения функций Томсона индекса 0 при $x_2 = 37{,}0$ и пересчитываем на функции φ_1, φ_2 и их производные:

$$\psi_1 = 121{,}9222 \cdot 10^8; \quad \psi_2 = 89{,}8465 \cdot 10^8;$$
$$\psi_1' = 21{,}0194 \cdot 10^8; \quad \psi_2' = 148{,}5313 \cdot 10^8;$$
$$\varphi_1 = -113{,}8935 \cdot 10^8; \quad \varphi_2 = -90{,}9827 \cdot 10^8;$$
$$\varphi_1' = -14{,}8630 \cdot 10^8; \quad \varphi' = -143{,}6133 \cdot 10^8.$$

Граничные условия при $x = x_2$:

$$M_m = -D\left[\frac{d\vartheta}{ds} + \mu\frac{\vartheta}{s}\right] = M;$$

$$Q = \frac{V}{s \operatorname{ctg}\theta} = P \sin\theta$$

или

$$\left(-C_1\varphi_2'+C_2\varphi_1'\right)\frac{x_2}{2s_2}+\frac{\mu}{s_2}\left(-C_1\varphi_2+C_2\varphi_1\right)=-\frac{M}{D};$$

$$\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{hs_2}\left(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2\right)=\frac{P\cos 60^\circ}{D}.$$

Здесь учтено, что $\frac{dx}{ds}=\frac{x}{2s}$.

Подставив числовые значения известных величин и решив два уравнения с двумя неизвестными, найдем

$$C_1=-0{,}978\cdot 10^{-10}\frac{M}{D}-0{,}2518\cdot 10^{-10}\frac{P}{D};$$

$$C_2=1{,}225\cdot 10^{-10}\frac{M}{D}-2{,}183\cdot 10^{-10}\frac{P}{D}.$$

При $x=x_2$

$$\vartheta=-C_1\varphi_2+C_2\varphi_1=-2{,}282\frac{M}{D}+2{,}26\frac{P}{D};$$

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\left(-C_1\varphi_2'+C_2\varphi_1'\right)\frac{x_2}{2s_2}=-0{,}978\frac{M}{D}-0{,}0228\frac{P}{D};$$

$$M_m=M;\quad M_t=-D\left[\frac{\vartheta}{s}+\mu\frac{d\vartheta}{ds}\right]\cong 0{,}3M;$$

$$V=\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left[C_1\varphi_1+C_2\varphi_2\right]=15{,}0P;$$

$$T_t=-\frac{dV}{ds}=-\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left[C_1\varphi_1'+C_2\varphi_2'\right]\frac{x_2}{2s_2}=6{,}57M-12{,}9P;$$

$$T_m=-\frac{V}{s_2}=-0{,}5P.$$

Для выявления характера изменения силовых факторов по длине образующей следует задаться рядом значений s, вычислить соответствующие значения x и по таблицам найти φ_1, φ_2, φ_1', φ_2'. Поскольку C_1 и C_2 уже известны, по формулам (10.72) и (10.73) нетрудно вычислить силовые факторы.

Получим решение данной задачи с помощью асимптотических формул (10.69). Подставив в эти формулы $x_2=37{,}0$, найдем

$$\varphi_1=-114\cdot 10^8;\qquad \varphi_2=-91{,}2\cdot 10^8;$$

$$\varphi_2'=-142\cdot 10^8;\qquad \varphi_2'=-143{,}6\cdot 10^8.$$

Полученные значения φ_1, φ_2, φ_1', φ_2' отличаются от значений, вычисленных с помощью таблиц, только в третьем знаке.

Заметим, что данная задача более просто может быть решена с помощью приближенного метода Штаермана — Геккелера (см. § 4).

§ 3. Осесимметричные сферические оболочки

Разрешающие уравнения осесимметричной деформации сферических оболочек получаются из общих уравнений (10.26) и (10.28) при подстановке в них $R_t=R_m=R$:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{dV}{d\theta}-\left(\operatorname{ctg}^2\theta-\mu\right)V=EhR\vartheta+\Phi_3(\theta); \tag{10.74}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{d\vartheta}{d\theta}-\left(\operatorname{ctg}^2\theta+\mu\right)\vartheta=-\frac{RV}{D}, \tag{10.75}$$

где

$$\Phi_3(\theta)=R^2\frac{dp_1}{d\theta}+R^2(1+\mu)p_2. \tag{10.76}$$

Введя обозначение дифференциального оператора

$$L_3(\ ) = \frac{d^2(\ )}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{d(\ )}{d\theta} - \operatorname{ctg}^2\theta(\ ), \tag{10.77}$$

запишем уравнения (10.74) и (10.75) более кратко:

$$L_3(V) + \mu V = EhR\vartheta + \Phi_3(\theta); \tag{10.78}$$

$$L_3(\vartheta) - \mu\vartheta = -\frac{RV}{D}. \tag{10.79}$$

Общее решение этих уравнений складывается из общего решения соответствующей системы однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} L_3(\mathring{V}) + \mu\mathring{V} &= EhR\mathring{\vartheta};\\ L_3(\mathring{\vartheta}) - \mu\mathring{\vartheta} &= -\frac{R\mathring{V}}{D} \end{aligned}\right\} \tag{10.80}$$

и частного решения системы неоднородных уравнений (10.74) и (10.75). Четыре постоянные интегрирования определяют, как обычно, по граничным условиям. Внутренние силовые факторы вы-

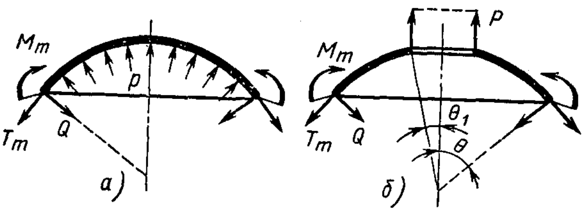


Рис. 10.10

числяют в зависимости от V и ϑ по формулам (10.10), (10.11) и (10.24), (10.25), в которых следует положить $R_m = R_t = R$. Напряжения вычисляют по формулам (10.33) и перемещения — по формулам (7.35) и (10.34).

Приведем выражения частного решения для наиболее часто встречающихся случаев нагружения.

Равномерное внутреннее давление (рис. 10.10, *а*)

$$F(\theta) = \frac{p\pi r^2}{2\pi} = \frac{pr^2}{2} = \frac{pR^2}{2}\sin^2\theta.$$

Функция $\Phi_3(\theta)$ в данном случае равна нулю. Следовательно, $\bar{V} = 0$, $\bar{\vartheta} = 0$, $\bar{Q} = 0$.

Усилия T_m и T_t определяются по выражениям (10.24), (10.25):

$$\bar{T}_m = \frac{F(\theta)}{R\sin^2\theta} = \frac{pR}{2}; \qquad T_t = pR - \frac{F(\theta)}{R\sin^2\theta} = \frac{pR}{2}. \tag{10.81}$$

Осевая сила P (рис. 10.10, *б*)

$$\left.\begin{aligned} &F\theta() = \frac{P}{2\pi}; \quad \Phi_3(\theta) = 0; \quad \bar{V} = 0; \quad \bar{\vartheta} = 0; \quad \bar{Q} = 0.\\ &\bar{T}_m = \frac{P}{2\pi R\sin^2\theta}; \qquad \bar{T}_t = -\frac{P}{2\pi R\sin^2\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{10.82}$$

Нетрудно убедиться, что частные решения для этих случаев нагружения полностью совпадают с решениями, которые дает безмоментная теория.

Равномерное вращение оболочки. Интенсивность радиальной инерционной нагрузки определяется выражением

$$p = \frac{h\gamma\omega^2 R \sin\theta}{g}.$$

Ее нормальная и касательная составляющие:

$$p_1 = \frac{h\gamma\omega^2 R \sin^2\theta}{g} = A\sin^2\theta;$$

$$p_2 = \frac{h\gamma\omega^2 R \sin\theta\cos\theta}{g} = A\sin\theta\cos\theta,$$

где

$$A = \frac{h\gamma\omega^2 R}{g}.$$

Функция $F(\theta)$, зависящая от осевой нагрузки, в данном случае равна нулю. Функцию $\Phi_3(\theta)$ определим по формуле (10.76):

$$\Phi_3(\theta) = R^2 2A\sin\theta\cos\theta + (1+\mu)R^2 A\sin\theta\cos\theta = $$
$$= R^2 A\frac{(3+\mu)}{2}\sin 2\theta.$$

Частное решение дифференциальных уравнений ϑ будем искать в виде, подобном $\Phi_3(\Theta)$, т. е.

$$\bar{\vartheta} = C\sin 2\theta,$$

где C — неопределенный множитель.

Подставив $\bar{\vartheta}$ в уравнение (10.75) и выполнив несложные преобразования, найдем

$$\bar{V} = \frac{D(5+\mu)C\sin 2\theta}{R}.$$

Используем теперь уравнение (10.74). Подставив это уравнение в функции $\Phi_3(\theta)$, $\bar{\vartheta}$ и $\bar{V}$, убеждаемся, что оно удовлетворяется при

$$C = \frac{AR^3(3+\mu)}{2[D(\mu^2-25) - EhR^2]}.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{V} &= -\frac{AR^2(3+\mu)(5+\mu)D}{2[EhR^2+(25-\mu^2)D]}\sin 2\theta \cong \\ &\cong -\frac{A(3+\mu)(5+\mu)h^2}{24(1-\mu^2)}\sin 2\theta; \\ \bar{\vartheta} &= -\frac{AR^3(3+\mu)}{2[EhR^2+(25-\mu^2)D]}\sin 2\theta \cong \\ &\cong -\frac{AR(3+\mu)}{2Eh}\sin 2\theta. \end{aligned}\right\} \tag{10.83}$$

Усилия $\bar{Q}$, $\bar{T}_m$ и $\bar{T}_t$ определяют по формулам (10.23), (10.24) и (10.25), т. е.

$$\left.\begin{aligned}\bar{Q}&=\frac{1}{R}\bar{V}; \quad \bar{T}_m=\frac{A(3+\mu)(5+\mu)h^2\cos^2\theta}{12(1-\mu^2)R};\\ \bar{T}_t&=AR\sin^2\theta+\frac{Ah^2(3+\mu)(5+\mu)\cos 2\theta}{R\,12(1-\mu^2)}.\end{aligned}\right\} \quad (10.84)$$

Пример 10.3. Исследовать напряжения и деформации в замкнутой сферической оболочке, вращающейся с угловой скоростью ω.

Граничные условия в данном случае следующие:

$$\text{при} \quad \theta=0 \quad \vartheta=0; \qquad \text{при} \quad \theta=0 \quad Q=0, \quad V=0;$$
$$\text{при} \quad \theta=90^\circ \quad \vartheta=0; \qquad \text{при} \quad \theta=90^\circ \quad Q=0, \quad V=0.$$

Частное решение разрешающих уравнений определяется выражениями (10.83) и (10.84). Нетрудно проверить, что это частное решение удовлетворяет всем граничным условиям. Это значит, что общее решение соответствующего однородного уравнения в данном случае добавлять не нужно. Таким образом, формулы (10.83) и (10.84) полностью определяют значения усилий в замкнутой вращающейся оболочке.

Найдем изгибающие моменты. Подставив выражение (10.83) в зависимости (10.10) и (10.11) и положив $R_m=R_t=R$, получим

$$M_m=\frac{A(3+\mu)D}{h}(\cos 2\theta+\mu\cos^2\theta);$$

$$M_t=\frac{A(3+\mu)D}{h}(\cos^2\theta+\mu\cos 2\theta).$$

Радиальные перемещения точек поверхности согласно уравнению (7.35):

$$\xi=\varepsilon_t r=\frac{1}{Eh}(T_t-\mu T_m)R\sin\theta.$$

При $\theta=90^\circ$

$$\xi=\frac{AR^2}{Eh}\left[1-\frac{h^2(3+\mu)(5+\mu)}{R^2 12(1-\mu^2)}\right]\cong\frac{AR^2}{Eh}.$$

Осевые перемещения согласно уравнению (10.34):

$$\eta=\int_0^\theta\left[\frac{1}{Eh}(T_m-\mu T_t)\sin\theta+\vartheta\cos\theta\right]R\,d\theta$$

(η — отсчитывается от полюса).

При $\theta=180^\circ$ по этой формуле получим изменение расстояния между полюсами

$$\eta=-\frac{AR^2}{Eh}\left[2(1+\mu)-\frac{h^2(3+\mu)(5+\mu)}{18R^2(1-\mu)}\right].$$

На рис. 10.11 изображены эпюры M_m, M_t, T_m, T_t, построенные при следующих числовых данных:

$$R=40 \text{ см}; \quad h=2 \text{ см}; \quad n=1000 \text{ об/мин};$$
$$\omega=105 \text{ рад/с}; \quad \gamma=7{,}8\cdot 10^{-2} \text{ Н/см}^3;$$
$$E=2\cdot 10^7 \text{ Н/см}^2; \quad \mu=0{,}3.$$

Максимальные напряжения возникают в наружных точках на экваторе оболочки

$$\sigma_{t\max}=\frac{T_t}{h}-\frac{M_t 6}{h^2}=\frac{2800}{2}+\frac{25{,}6\cdot 6}{2^2}=1440 \text{ Н/см}^2;$$

$$\sigma_m=\frac{T_m}{h}-\frac{M_m 6}{h^2}=0+\frac{85\cdot 6}{2^2}=130 \text{ Н/см}^2.$$

Изменение диаметра по экватору

$$2\xi_{90^\circ}=2\frac{R}{Eh}(T_t-\mu T_m)_{\theta=90^\circ}=5{,}6\cdot10^{-3}\ \text{см}.$$

Изменение расстояния между полюсами

$$\eta_{180^\circ}=-\frac{2R^2}{Eh}\left[2(1+\mu)+\frac{h^2(3+\mu)(5+\mu)}{18R^2(1-\mu)}\right]=-7{,}3\cdot10^{-3}\ \text{см}.$$

Заметим, что в данном случае напряженное состояние оболочки мало отличается от безмоментного; поэтому максимальное напряжение и перемещения можно

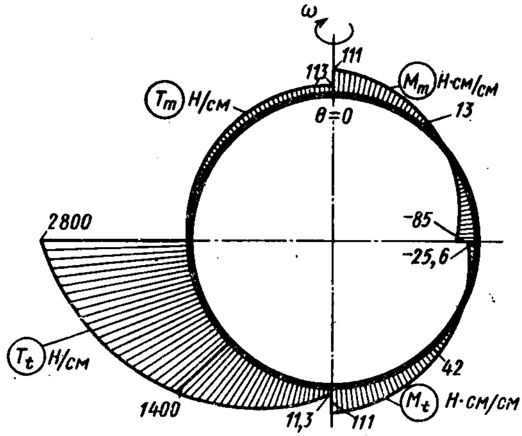


Рис. 10.11

с удовлетворительной точностью вычислить по безмоментной теории. Рассматривая равновесие части оболочки, отсеченной по кругу θ = const, найдем

$$T_m=0;$$

тогда из уравнения Лапласа

$$T_t=p_1R=RA\sin^2\theta.$$

При $\theta = 90^\circ$

$$T_t=RA=2810\ \text{Н/см};\quad \sigma_t=\frac{T_t}{h}=1410\ \text{Н/см}^2.$$

Получим общее решение системы однородных уравнений (10.80). Анализ этой системы показывает, что вторые слагаемые в левых частях уравнений можно отбросить (вносимая этим погрешность не превышает погрешности, вносимой исходными допущениями) [15]. После исключения этих слагаемых уравнения принимают вид

$$L_3=\left(\mathring{V}\right)-EhR\,\mathring{\vartheta}=0;$$

$$L_3=\left(\mathring{\vartheta}\right)+\frac{R}{D}\mathring{V}=0.$$

Эти два уравнения можно привести к одному уравнению второго порядка относительно комплексной переменной. Умножим первое уравнение на неопределенный постоянный множитель a и сложим со вторым:

$$L_3(\mathring{V}a+\mathring{\vartheta})-\left\{[aEhR]\mathring{\vartheta}+\left[-\frac{R}{Da}\right]a\mathring{V}\right\}=0. \qquad (10.85)$$

Множитель a подберем так, чтобы произведения, заключенные в квадратные скобки, были равны между собой, т. е.

$$aEhR=-\frac{R}{Da},$$

отсюда

$$a=i\sqrt{\frac{1}{EhD}}=i\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}, \qquad (10.86)$$

знак перед корнем может быть выбран произвольно.

Введем обозначения:

$$aEhR=-\frac{R}{Da}=i\frac{R}{h}\sqrt{12(1-\mu^2)}=i2k^2;$$

$$k=\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{R}{h}}; \qquad (10.87)$$

$$\mathring{\sigma}=\mathring{\vartheta}+a\mathring{V}=\mathring{\vartheta}+i\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}\mathring{V}. \qquad (10.88)$$

В результате уравнение (10.85) принимает следующий вид:

$$L_3(\mathring{\sigma})-i2k^2\mathring{\sigma}=0 \qquad (10.89)$$

Это уравнение второго порядка относительно комплексной функции $\mathring{\sigma}$ эквивалентно двум уравнениям второго порядка (10.80) относительно действительных переменных $\mathring{\vartheta}$ и $\mathring{V}$. Общее решение уравнения (10.89) можно представить в следующем виде:

$$\mathring{\sigma}=(C_1+iC_2)[X_1-iY_1]+(C_3+iC_4)[X_2-iY_2], \qquad (10.90)$$

где $X_1-iY_1=\mathring{\sigma}_1$, $X_2-iY_2=\mathring{\sigma}_2$ — комплексные функции, являющиеся независимыми частными решениями уравнения (10.89);

(C_1+iC_2), (C_3+iC_4) — комплексные постоянные интегрирования.

Разделив комплексную функцию (10.90) на вещественную и мнимую части и приняв во внимание равенство (10.88), получим следующие выражения для $\mathring{\vartheta}$ и $\mathring{V}$:

$$\left.\begin{aligned}\mathring{\vartheta}&=C_1X_1+C_2Y_1+C_3X_2+C_4Y_2;\\ \mathring{V}&=\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}[C_2X_1-C_1Y_1+C_4X_2-C_3Y_2].\end{aligned}\right\} \qquad (10.91)$$

Функции $X_1(\theta)$, $Y_1(\theta)$, $X_2(\theta)$, $Y_2(\theta)$, входящие в формулы (10.91), определяются в результате интегрирования дифференциального уравнения (10.89). Напишем это уравнение в развернутом виде:

$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\,\frac{d\sigma}{d\theta}-\operatorname{ctg}^2\theta\,\sigma-i2k^2\sigma=0. \tag{10.92}$$

Не останавливаясь на решении, укажем лишь, что интеграл уравнения такого типа выражается через функции Лежандра.

Приведем симптотические выражения функций X_1, Y_1, X_2, Y_2 и их производных по θ, полученные в результате пренебрежения слагаемыми, имеющими такой же порядок малости, как отношение h/R, по сравнению с единицей [15]:

$$\left.\begin{aligned}
X_1&\cong\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,k}{4\pi\sin\theta}}\,e^{k\theta}\left[\left(1-\frac{3}{8k}\operatorname{ctg}\theta\right)\cos\left(k\theta-\frac{\pi}{8}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\sin\left(k\theta-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
Y_1&\cong-\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,k}{4\pi\sin\theta}}\,e^{k\theta}\left[\cos\left(k\theta-\frac{\pi}{8}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\left(1-\frac{3}{8k}\operatorname{ctg}\theta\right)\sin\left(k\theta-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
X_1'&\cong-\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,k^3}{\pi\sin\theta}}\,e^{k\theta}\left[\frac{7}{16k}\operatorname{ctg}\theta\cos\left(k\theta-\frac{\pi}{8}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\left(1-\frac{7}{16k}\operatorname{ctg}\theta\right)\sin\left(k\theta-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
Y_1'&\cong-\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,k^3}{\pi\sin\theta}}\,e^{k\theta}\left[\left(1-\frac{7}{16k}\operatorname{ctg}\theta\right)\cos\left(k\theta-\frac{\pi}{8}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{7}{16k}\operatorname{ctg}\theta\sin\left(k\theta-\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
X_2&\cong\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,k}{\pi\sin\theta}}\,e^{-k\theta}\left[\cos\left(k\theta+\frac{\pi}{8}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\left(1+\frac{3}{8k}\operatorname{ctg}\theta\right)\sin\left(k\theta+\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
Y_2&\cong\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,k}{\pi\sin\theta}}\,e^{-k\theta}\left[\left(1+\frac{3}{8k}\operatorname{ctg}\theta\right)\cos\left(k\theta+\frac{\pi}{8}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\sin\left(k\theta+\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
X_2'&\cong-\sqrt{\frac{4\sqrt{2}\,k^3}{\pi\sin\theta}}\,e^{-k\theta}\left[\left(1+\frac{7}{16k}\operatorname{ctg}\theta\right)\cos\left(k\theta+\frac{\pi}{8}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{7}{16k}\operatorname{ctg}\theta\sin\left(k\theta+\frac{\pi}{8}\right)\right];\\
Y_2'&\cong-\sqrt{\frac{4\sqrt{2}\,k^3}{\pi\sin\theta}}\,e^{-k\theta}\left[\frac{7}{16k}\operatorname{ctg}\theta\cos\left(k\theta+\frac{\pi}{8}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\left(1+\frac{7}{16k}\operatorname{ctg}\theta\right)\sin\left(k\theta+\frac{\pi}{8}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{10.93}$$

Внутренние силовые факторы и перемещения в сферической оболочке определяются на основании зависимостей (7.35), (10.11), (10.12), (10.23), (10.24), (10.25) и (10.34)

$$\left.\begin{aligned}
&V=\mathring{V}+\overline{V};\quad \vartheta=\mathring{\vartheta}+\overline{\vartheta};\\
&M_m=-\frac{D}{R}\left[\frac{d\vartheta}{d\theta}+\mu\vartheta\operatorname{ctg}\theta\right];\ M_t=-\frac{D}{R}\left[\vartheta\operatorname{ctg}\theta+\mu\frac{d\vartheta}{d\theta}\right];\\
&T_m=-\frac{\mathring{V}}{R}\operatorname{ctg}\theta+\overline{T}_m;\ T_t=-\frac{d\mathring{V}}{R\,d\theta}+\overline{T}_t;\ Q=\frac{\mathring{V}}{R}+\frac{\overline{V}}{R};\\
&\xi=\frac{R\sin\theta}{Eh}(T_t-\mu T_m);\\
&\eta=\int_{\theta_0}^{\theta}\left[\frac{\sin\hat{\theta}}{Eh}(\hat{T}_m-\mu\hat{T}_t)+\hat{\vartheta}\cos\hat{\theta}\right]R\,d\hat{\theta}.
\end{aligned}\right\}\qquad(10.94)$$

Заметим, что функции X_1, Y_1 и их производные с увеличением угла θ быстро возрастают, в то время как X_2 и Y_2, наоборот, быстро убывают. Более детальный анализ показывает, что при приближении к полюсу, т. е. при $\theta \to 0$, функции X_2 и Y_2 стремятся к бесконечности. Следовательно, для оболочки, замкнутой в вершине, коэффициенты при X_2 и Y_2 следует принимать равными нулю (за исключением случая нагружения замкнутой оболочки сосредоточенной силой, приложенной в вершине).

Пример 10.4. Вычислить напряжения в полусферическом куполе, усиленном по краю фланцем и нагруженном равномерным внутренним давлением p и уравновешивающей силой P (рис. 10.12, *а*). Размеры: $R = 50$ см; $h = 0{,}3$ см; $r_1 = 49{,}85$ см; $r_2 = 53$ см; $r_3 = 51{,}6$ см; $B = 3{,}15$ см; $H = 0{,}8$ см.

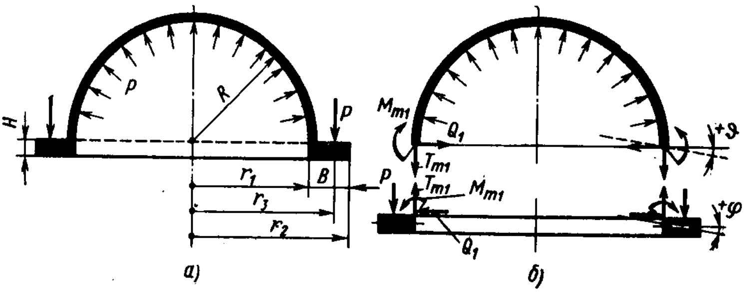


Рис. 10.12

Отделив сферический купол от фланца, приложим к нему силовые факторы взаимодействия M_{m1}, Q_1, T_{m1} (рис. 10.12, *б*).

Сила T_{m1} определяется из условия равновесия, т. е.

$$T_{m1}=\frac{p\pi r_1^2}{2\pi R}=24{,}8p \text{ Н/см}.$$

Остальные силовые факторы должны быть найдены из условий совместности деформаций оболочки и фланца.

Деформации фланца могут быть вычислены по формулам теории осесимметричной деформации колец (см. гл. 4, § 1).

Геометрические характеристики сечения кольца:

$$I_1=\int_F \frac{dF}{r}=H\ln\frac{r_2}{r_1}=0{,}0490 \text{ см};$$

$$I_3=\int_F \frac{dFz^2}{r}=\frac{H^3}{12}\ln\frac{r_2}{r_1}=2{,}614\cdot 10^{-3} \text{ см}^3.$$

Внутренние силовые факторы в сечении кольца:

$$N=pHr_1+Q_1R=39{,}9p+50Q_1;$$

$$M=Pr_3^2-T_{m1}R^2+M_{m1}R+Q_1R\frac{H}{2}=1{,}99\cdot 10^3p+M_{m1}50+Q_120.$$

Угол поворота сечения кольца

$$\varphi=\frac{M}{EI_3}=\frac{1}{E}\,[0{,}7605\cdot 10^6p+19{,}13\cdot 10^3M_{m1}+7{,}65\cdot 10^3Q_1] \text{ рад}.$$

Радиальное перемещение в точке сопряжения с оболочкой

$$\xi=\frac{N}{EI_1}+\frac{\varphi H}{2}=\frac{1}{E}\,[0{,}305\cdot 10^6p+4{,}08\cdot 10^3Q_1+7{,}65\cdot 10^3M_{m1}] \text{ см}.$$

Напряженное состояние оболочки целесообразно представить в виде суммы безмоментного состояния, соответствующего нагружению равномерным давлением p и осевой силой T_{m1} и моментного состояния, соответствующего нагружению краевыми нагрузками M_{m1} и Q_1.

Для безмоментного состояния, соответствующего частному решению разрешающих уравнений, выше было найдено

$$\overline{\vartheta}=0;\ \ \overline{V}=0;\ \ \overline{T}_m=\overline{T}_t=\frac{pr_1^2}{2R}=T_{m1}=24{,}8p.$$

Можно также считать $r_1\cong R$, тогда $\overline{T}_m=\overline{T}_t=\frac{pR}{2}=25p$.

Угол поворота нормали на краю оболочки в этом состоянии равен нулю, а радиальное перемещение

$$\xi=\frac{R}{Eh}(\overline{T}_t-\mu\overline{T}_m)=\frac{50\cdot 24{,}8p\,(1-0{,}3)}{E0{,}3}=2{,}90\cdot 10^3\frac{p}{E} \text{ см}.$$

Вычислим линейное и угловое перемещения на краю оболочки, возникающие при действии нагрузок M_{m1} и Q_1. В этом случае частное решение равно нулю и остается только общее решение системы однородных уравнений (10.91).

Параметр k согласно формуле (10.87):

$$k=\sqrt[4]{3\,(1-0{,}3^2)}\sqrt{\frac{50}{0{,}3}}=16{,}60;$$

тогда

$$k\theta_к=k\frac{\pi}{2}=26{,}07.$$

Учитывая, что заданная оболочка замкнута в вершине, следует постоянные C_3 и C_4 приравнять нулю. Остальные две постоянные надо подобрать так, чтобы изгибающий момент и поперечная сила на краю были равны соответственно M_{m1} и Q_1. По формулам (10.93) определим функции X_1, Y_1, X_1' и Y_1' при $\theta=\frac{\pi}{2}$:

$$X_1=0{,}9668\cdot 10^{11};\ \ Y_1=-3{,}9429\cdot 10^{11};$$

$$X_1'=-49{,}43\cdot 10^{11};\ \ Y_1'=-81{,}54\cdot 10^{11}.$$

Запишем уравнение граничных условий:

$$M_{m1}=-\frac{D}{R}\left[\frac{d\mathring{\vartheta}}{d\theta}+\mu\mathring{\vartheta}\operatorname{ctg}\theta\right]=-\frac{D}{R}[C_1X_1'+C_2Y'];$$

$$Q_1=\frac{Eh^2}{R\sqrt{12(1-\mu^2)}}[C_2X_1-C_1Y_1]$$

или

$$-49,43C_1-81,54C_2=-\frac{1}{E}2,022\cdot10^{-7}M_{m1};$$

$$3,9429C_1+0,9668C_2=\frac{1}{E}0,1835\cdot10^{-7}Q_1.$$

Решив эти два уравнения, найдем

$$C_1=[5,475\cdot10^{-9}Q_1-0,714\cdot10^{-9}M_{m1}]\frac{1}{E};$$

$$C_2=[-3,32\cdot10^{-9}Q_1-2,915\cdot10^{-9}M_{m1}]\frac{1}{E}.$$

Далее вычислим угол поворота нормали при $\theta=90°$:

$$\mathring{\vartheta}=C_1X_1+C_2Y_1=\frac{1}{E}(1840Q_1-1220M_{m1})\text{ рад},$$

растягивающие усилия

$$\mathring{T}_t=-\frac{1}{R}\frac{d\mathring{V}}{d\theta}=-\frac{Eh^2}{R\sqrt{12(1-\mu^2)}}(C_2X_1'-C_1Y_1')=-33,18Q_1+11,01M_{m1};$$

$$\mathring{T}_m=0$$

и радиальное перемещение

$$\mathring{\xi}=\frac{\mathring{T}_t-\mu\mathring{T}_m}{Eh}R=\frac{1}{E}(-5530Q_1+1835M_{m1}).$$

Запишем уравнения совместности деформаций оболочки и кольца:

$$\overline{\xi}_{об}+\mathring{\xi}_{об}=\xi_к;$$

$$\overline{\vartheta}_{об}+\mathring{\vartheta}_{об}=\varphi_к$$

или в развернутом виде

$$2,90\cdot10^3\frac{p}{E}-5530\frac{Q_1}{E}+1835\frac{M_{m1}}{E}=305\cdot10^3\frac{p}{E}+4080\frac{Q_1}{E}+7650\frac{M_{m1}}{E};$$

$$1840\frac{Q_1}{E}-1220\frac{M_{m1}}{E}=760,5\cdot10^3\frac{p}{E}+7650\frac{Q_1}{E}+19\,130\frac{M_{m1}}{E}.$$

Решение этой системы уравнений приводит к следующим результатам:

$$M_{m1}=-33,8p\text{ Н/см};$$

$$Q_1=-10,7p\text{ Н/см}.$$

Наибольшие напряжения возникают в наружной точке оболочки при $\theta=90°$:

$$M_{m1}=-33,8p\text{ Н}\cdot\text{см/см};\quad T_{m1}=24,8p\text{ Н}\cdot\text{см/см};$$

$$M_t=\mu M_{m1}=-10,1p\text{ Н}\cdot\text{см/см};\quad T_t=\overline{T}_t+\overline{T}_m=$$

$$=24,8p-33,18Q_1+11,01M_{m1}=8,0p\ H/\text{см};$$

$$\sigma_{m\max}=\frac{T_m}{h}-\frac{M_m6}{h^2}=2330p\text{ Н/см}^2;$$

$$\sigma_{t\max}=\frac{T_t}{h}-\frac{M_t6}{h^2}=690p\text{ Н/см}^2.$$

Изгибные напряжения в оболочке носят местный характер и по мере удаления от края быстро убывают. Если материал оболочки пластичный, то эти напряжения могут вызвать лишь небольшие пластические деформации стенки оболочки около края.

За предельное допустимое давление в данном случае следует принять такое, при котором начнутся пластические деформации во фланце. Наибольшее напряжение во фланце

$$\sigma = \frac{N}{r_1 I_1} - \frac{MH/2}{r_1 I_3} = -460p,$$

где

$$N = 39{,}9p + 50Q_1 = -495p;$$
$$M = 1990p + 50M_{m1} + 20Q_1 = 84p.$$

Сопоставив максимальное напряжение во фланце с пределом текучести материала, можно установить предельно допустимое давление.

Заметим, что деформации сферической оболочки в рассмотренном примере могут быть вычислены более просто — приближенным методом учета краевого эффекта (метод Штаермана — Геккелера).

Остановимся на особенностях расчета пологих сферических оболочек. Общая теория пологих оболочек, основанная на введении некоторых дополнительных допущений, справедливых при малых значениях угла θ, разработана В. З. Власовым [9, 13].

Рассмотрим сферическую оболочку с малым углом подъема. Считая приближенно, что $\operatorname{ctg}\theta = 1/\theta$, представим разрешающие уравнения (10.74) и (10.75) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta}\frac{dV}{d\theta} - \frac{1}{\theta^2}V = Eh\vartheta R + \Phi_3(\theta); \\ &\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta}\frac{d\vartheta}{d\theta} - \frac{1}{\theta^2}\vartheta = -\frac{RV}{D} \end{aligned}\right\} \qquad (10.95)$$

(слагаемые, содержащие μ, ввиду их малости отброшены).

Частное решение этих уравнений такое же, как и для оболочек с большим углом подъема [см. зависимости (10.81)—(10.84)].

Для получения общего решения системы однородных уравнений приведем их к одному дифференциальному уравнению относительно комплексной функции

$$\mathring{\sigma} = \mathring{\vartheta} + i\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}\mathring{V};$$

$$\frac{d^2\mathring{\sigma}}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta}\frac{d\mathring{\sigma}}{d\theta} - \frac{1}{\theta^2}\mathring{\sigma} - i2k^2\mathring{\sigma} = 0,$$

где

$$2k^2 = \frac{R}{h}\sqrt{12(1-\mu^2)}.$$

Путем замены независимой переменной согласно равенству

$$-i2k^2\theta^2 = z^2$$

это уравнение приводится к уравнению Бесселя индекса 1:

$$z^2\frac{d^2\mathring{\sigma}}{dz^2} + z\frac{d\mathring{\sigma}}{dz} + (z^2 - 1)\mathring{\sigma} = 0,$$

решение которого имеет следующий вид:

$$\overset{\circ}{\sigma} = (C_2 + iC_1)\,[\mathrm{ber}_1(k\sqrt{2}\,\theta) + i\,\mathrm{bei}_1(k\sqrt{2}\,\theta) + $$
$$+ (-C_3 + iC_4)\,[\mathrm{kei}_1(k\sqrt{2}\,\theta) - i\,\mathrm{ker}_1(k\sqrt{2}\,\theta)].$$

Разделив это уравнение на действительную и мнимую части, получим

$$\left.\begin{aligned}\overset{\circ}{V} = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\,[C_1\,\mathrm{ber}_1(k\sqrt{2}\,\theta) + C_2\,\mathrm{bei}_1(k\sqrt{2}\,\theta) + \\ + C_3\,\mathrm{ker}_1(k\sqrt{2}\,\theta) + C_4\,\mathrm{kei}_1(k\sqrt{2}\,\theta)];\\ \overset{\circ}{\vartheta} = C_2\,\mathrm{ber}_1(k\sqrt{2}\,\theta) - C_1\,\mathrm{bei}_1(k\sqrt{2}\,\theta) + \\ + C_4\,\mathrm{ker}_1(k\sqrt{2}\,\theta) - C_3\,\mathrm{kei}_1(k\sqrt{2}\,\theta),\end{aligned}\right\} \qquad (10.96)$$

где

$$k = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{R}{h}}.$$

Для замкнутого купола постоянные C_3 и C_4 следует принять равными нулю. Остальные постоянные определяют по краевым условиям.

Пример 10.5. Рассчитать цилиндрический резервуар со сферическим днищем (10.13, *а*), находящийся под действием равномерного внутреннего давления p. Дано: $r = 173{,}5$ см; $h = 1$ см; $R = 1000$ см.

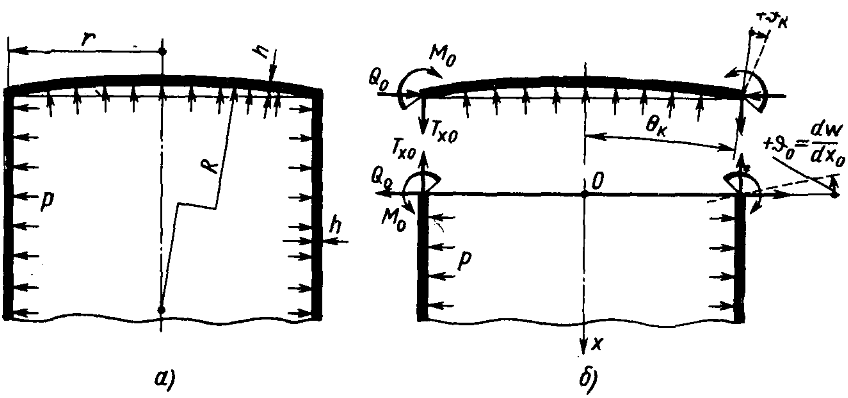


Рис. 10.13

Отделив днище от цилиндра, приложим силовые факторы взаимодействия M_0, Q_0, T_{x0} (рис. 10.13, *б*).

Из условия равновесия днища

$$T_{x0} = \frac{pr}{2}.$$

Остальные два силовых фактора должны быть определены по условиям сопряжения цилиндра и днища:

$$\vartheta_{к\,дн} = -\,\vartheta_{оц};$$
$$\xi_{к\,дн} = \xi_{оц} \text{ или } \varepsilon_{t\,к\,дн} = \varepsilon_{t\,оц}.$$

Знаки выбраны в соответствии с принятыми положительными направлениями перемещений, показанными на рис. 10.13, *б*.

Вычислим перемещения на краю днища.

Частное решение разрешающих уравнений определяется по безмоментной теории, т. е.

$$\overline{V}=0;\quad \overline{\vartheta}=0;\quad \overline{Q}=0;\quad \overline{T}_m=\overline{T}_t=\frac{pR}{2}=500p.$$

Учитывая, что угол θ мал, общее решение системы однородных уравнений возьмем в виде (10.96); при этом $C_3=C_4=0$, так как купол в вершине замкнут:

$$\mathring{V}=\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left[C_1\,\mathrm{ber}_1(k\sqrt{2}\,\theta)+C_2\,\mathrm{bei}_1(k\sqrt{2}\,\theta)\right];$$

$$\mathring{\vartheta}=C_2\,\mathrm{ber}_1(k\sqrt{2}\,\theta)-C_1\,\mathrm{bei}_1(k\sqrt{2}\,\theta).$$

На краю днища

$$\theta_к\cong 10^\circ=0{,}174\ \text{рад};\quad 2k^2=\frac{R}{h}\sqrt{12(1-\mu^2)}=3300;$$

$$k\sqrt{2}=57{,}5;\quad k\sqrt{2}\,\theta_к=10{,}0.$$

Пользуясь таблицами, находим значения функции Томсона индекса 0:

$$\mathrm{ber}\,10{,}0=138{,}8405;\quad \mathrm{bei}\,10{,}0=56{,}37046;$$

$$\mathrm{ber}'\,10{,}0=51{,}19526;\quad \mathrm{bei}'\,10{,}0=135{,}3093$$

(штрихом обозначена производная по аргументу $k\sqrt{2}\theta$).

Пересчитываем эти функции на функции индекса *1*:

$$\mathrm{ber}_1\,x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ber}'\,x-\mathrm{bei}'\,x);\quad \mathrm{bei}_1\,x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ber}'\,x+\mathrm{bei}'\,x);$$

$$\mathrm{ber}_1'\,x=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ber}\,x+\mathrm{bei}\,x)-\frac{\mathrm{ber}_1\,x}{x};$$

$$\mathrm{bei}_1'\,x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ber}\,x-\mathrm{bei}\,x)-\frac{\mathrm{bei}_1\,x}{x};$$

$$\mathrm{ber}_1\,10=-59{,}478;\quad \mathrm{bei}_1\,10=131{,}879;\quad \mathrm{ber}_1'\,10=-132{,}088;\quad \mathrm{bei}_1'\,10=45{,}127.$$

Внутренние силовые факторы и перемещения на краю днища согласно формулам (10.94):

$$\vartheta_к=\mathring{\vartheta}_к=C_2\,\mathrm{ber}_1\,10-C_1\,\mathrm{bei}_1\,10=C_2(-59{,}478)-C_1 131{,}879;$$

$$\frac{d\vartheta}{d\theta_к}=\frac{d\mathring{\vartheta}}{d\theta_к}=(C_2\,\mathrm{ber}_1'\,10-C_1\,\mathrm{bei}_1'\,10)\,k\sqrt{2}=-7600C_2-2595C_1;$$

$$M_0=M_{mк}=-\frac{D}{R}\left[\frac{d\vartheta}{d\theta}+\mu\frac{\vartheta}{\theta}\right]=D(7{,}70C_2+2{,}823C_1);$$

$$V_к=\mathring{V}_к=\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}(C_1\,\mathrm{ber}_1\,10+C_2\,\mathrm{bei}_1\,10)=D(-C_1 196{,}3+436C_2);$$

$$\frac{dV}{d\theta_к}=\frac{d\mathring{V}}{d\theta_к}=\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}[C_1\,\mathrm{ber}_1'\,10+C_2\,\mathrm{bei}_1'\,10]\,k\sqrt{2}=$$

$$=D(-25{,}1\cdot 10^3C_1+8{,}58\cdot 10^3C_2);$$

$$Q_к=\mathring{Q}_к=\frac{V_к}{R}=D(-196{,}3C_1+436C_2)\,10^{-3};$$

$$T_{mк}=\overline{T}_{mк}-\frac{V_к}{R\theta}=D(1{,}13C_1-2{,}505C_2)+500p;$$

$$T_{tк}=\overline{T}_{tк}-\frac{dV}{Rd\theta_к}=D(25{,}1C_1-8{,}58C_2)+500p.$$

Радиальная составляющая краевых сил для днища (сила распора)

$$Q_0 = Q_к \sin\theta_к - T_{mк}\cos\theta_к = D\,(-1{,}149\,C_1 + 2{,}537C_2) - 492{,}5p.$$

Из зависимостей для M_0 и Q_0 выразим C_1 и C_2:

$$C_1 = -0{,}4815\,\frac{Q_0}{D} + 0{,}1586\,\frac{M_0}{D} - 237\,\frac{p}{D};$$

$$C_2 = 0{,}1766\,\frac{Q_0}{D} + 0{,}0718\,\frac{M_0}{D} + 86{,}9\,\frac{p}{D}$$

и подставим в зависимости для $\vartheta_к$, $T_{mк}$, $T_{tк}$ и $\varepsilon_{tк}$. В результате получим

$$\vartheta_к = 52{,}9\,\frac{Q_0}{D} - 25{,}0\,\frac{M_0}{D} + 26{,}1\cdot 10^3\,\frac{p}{D};$$

$$T_{mк} = -0{,}986Q_0 + 14{,}5p;\quad T_{tк} = -13{,}62Q_0 + 3{,}364M_0 - 6{,}196\cdot 10^3 p;$$

$$\varepsilon_{tк} = \frac{1}{Eh}\,(T_{tк} - \mu T_{mк}) = \frac{1}{E}\,(-13{,}32Q_0 + 3{,}364M_0 - 6{,}20\cdot 10^3 p).$$

Перейдем к определению деформаций цилиндрической оболочки. Согласно формуле (9.24):

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3\,(1-\mu^2)}{r^2h^2}} = 0{,}0975\,\frac{1}{\text{см}}.$$

Ввиду того, что цилиндрическая оболочка имеет большую длину, используем зависимости (8.27) и (8.28). При $x = 0$

$$\varepsilon_{t0} = \frac{w_0}{r} = \frac{M_0}{2D\beta^2 r} + \frac{Q_0}{2D\beta^3 r} + \frac{pr}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = 3{,}31\,\frac{M_0}{E} + 34{,}0\,\frac{Q_0}{E} + 147{,}2\,\frac{p}{E};$$

$$\vartheta_0 = -\frac{M_0}{D\beta} - \frac{Q_0}{2D\beta^2} = -\frac{10{,}27M_0}{D} - \frac{52{,}6Q_0}{D}.$$

Подставим выражения $\vartheta_к$, $\varepsilon_{tк}$ и ϑ_0, ε_{t0} в уравнения сопряжения днища и цилиндра:

$$52{,}9\,\frac{Q_0}{D} - 25{,}0\,\frac{M_0}{D} + 26{,}1\cdot 10^3\,\frac{p}{D} = 52{,}6\,\frac{Q_0}{D} + 10{,}27\,\frac{M_0}{D};$$

$$-13{,}32\,\frac{Q_0}{E} + 3{,}364\,\frac{M_0}{E} - 6{,}196\cdot 10^3\,\frac{p}{E} = 34{,}0\,\frac{Q_0}{E} + 3{,}31\,\frac{M_0}{E} + 147{,}2\,\frac{p}{E}.$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$M_0 = 740p;\quad Q_0 = -127p.$$

Искомые значения углового перемещения и силовых факторов на краю днища:

$$\vartheta_к = 880\,\frac{p}{D};\quad T_{tк} = -1976p;\quad T_{mк} = 140p;$$

$$M_{mк} = M_0 = 740p;\quad M_{tк} = \mu M_0 - \frac{D\,(1-\mu^2)}{R}\,\vartheta_к \operatorname{ctg}\theta = 217p$$

и на краю цилиндра:

$$T_x = \frac{pr}{2} = 87p;\quad T_t = \mu T_x + \frac{EhW_0}{r} = -1700p;$$

$$M_к = M_0 = 740p;\quad M_t = \mu M_0 = 222p.$$

При вычислениях учтено, что

$$\frac{w_0}{r} = \varepsilon_{t0} = \frac{3{,}31M_0}{E} + \frac{34Q_0}{E} + 147{,}2\,\frac{p}{E} = -1730\,\frac{p}{E}.$$

Наибольшее изгибное напряжение

$$\sigma_{m\max}\frac{M_0 6}{h^2}=\frac{740\cdot 6}{1}p=4450p.$$

Наибольшее напряжение сжатия в окружном направлении в зоне сопряжения

$$\sigma_{t\max}=\frac{T_{t\text{к}}}{h}=-1976p.$$

Напряжения в цилиндре в точках, удаленных от днища,

$$\sigma_x=\frac{pr}{2h}=87p;\quad \sigma_t=\frac{pr}{h}=174p.$$

Высокие окружные напряжения в зоне сопряжения цилиндра и днища могут привести к возникновению пластических деформаций, а также к потере устойчивости и образованию складок.

Для снижения напряжений край цилиндра целесообразно усилить кольцом, воспринимающим радиальную силу, передаваемую со стороны днища.

§ 4. Приближенный метод учета краевого эффекта (метод Штаермана — Геккелера)

На рис. 10.14, *а* и *б* изображены оболочки вращения, нагруженные по краю распределенными нагрузками M_0 и Q_0. Первая оболочка — пологая. При осесимметричном изгибе такой оболочки радиальные перемещения точек и соответствующие им окружные деформации растяжения около края — малы. Поэтому

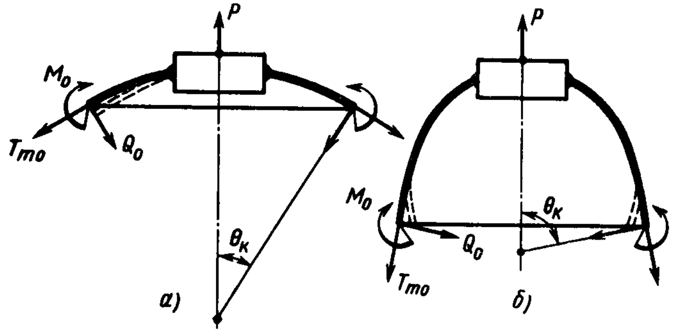


Рис. 10.14

деформации, вызванные изгибающим моментом, затухают медленно, и влияние момента распространяется практически на всю оболочку.

Во втором случае угол наклона нормали θ велик. Здесь при осесимметричном изгибе около края возникает значительное окружное растяжение; вследствие этого изгибные деформации в оболочке быстро затухают и на небольшом расстоянии от края уже практически полностью отсутствуют.

Влияние окружного растяжения при осесимметричном изгибе оболочки с большим углом подъема подобно влиянию упругого основания. Аналогичное явление быстрого затухания деформаций около края было отмечено в осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочке (см. гл. 8).

На указанной аналогии основан эффективный метод расчета оболочек вращения с большим углом подъема, нагруженных краевыми нагрузками. В этом методе использованы следующие допущения:

1. Все функции, характеризующие напряжения и деформации в оболочке около края, а также их первые производные малы по сравнению с их старшими производными. Это допущение основано на том факте, что рассматриваемые функции содержат множитель вида $e^{-k\omega}$, где ω — угол или дуга, отсчитываемая от рассматриваемого края оболочки, k — параметр. При дифференцировании этих функций параметр k выходит каждый раз в виде множителя. Так как все эти функции — быстрозатухающие, то величина параметра k велика, поэтому значения первых производных намного больше, чем значения самих функций, а значение вторых производных — соответственно больше, чем первых. На этом основании члены, содержащие сами функции и их первые производные в левых частях разрешающих уравнений (10.26) и (10.28), отбрасываются. Функция Φ в правой части уравнения (10.26) в данном случае равна нулю, так как рассматриваются только краевые нагрузки. В результате разрешающие уравнения (10.26) и (10.28) принимают вид

$$\frac{R_t}{R_m}\frac{d^2V}{d\theta^2} = EhR_m\vartheta; \tag{10.97}$$

$$\frac{R_t}{R_m}\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} = -\frac{R_mV}{D}. \tag{10.98}$$

2. Радиусы кривизны R_m и R_t около края принимают постоянными. Это допущение точно выполняется в случае сферической оболочки. Для оболочек других видов это допущение выполняется тем точнее, чем ближе форма оболочки к сферической.

Приведем уравнения (10.97) и (10.98) к одному уравнению с одним неизвестным. Продифференцировав уравнение (10.97) дважды с учетом второго допущения и подставив $\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}$ в уравнение (10.98), получим разрешающее уравнение краевого эффекта

$$\frac{d^4V}{d\theta^4} + \frac{R_m^4Eh}{R_t^2D}V = 0. \tag{10.99}$$

Введем обозначение:

$$\frac{R_m^4Eh}{R_t^2D} = R_m^4\frac{12(1-\mu^2)}{R_t^2h^2} = 4\alpha^4$$

или

$$\alpha = R_m\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_t^2h^2}}. \tag{10.100}$$

Тогда уравнение (10.99) принимает вид

$$\frac{d^4V}{d\theta^4}+4\alpha^4V=0. \qquad (10.101)$$

Заметим, что пренебречь функцией V в этом уравнении по сравнению с ее четвертой производной нельзя, так как множитель $4\alpha^4$ весьма велик.

Уравнение (10.101) аналогично однородному уравнению осесимметричной деформации цилиндрической оболочки.

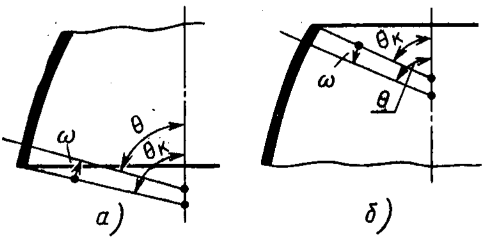


Рис. 10.15

Введем новую независимую переменную ω, представляющую собой угловую координату, отсчитываемую от края оболочки. Если рассматривается нижний край (рис. 10.15, *а*), то

$$\omega=\theta_к-\theta.$$

Если рассматривается верхний край (рис. 10.15, *б*), то угол ω отсчитывается в обратную сторону и тогда

$$\omega=\theta-\theta_к.$$

Так как в обоих этих случаях

$$\frac{d^4V}{d\theta^4}=\frac{d^4V}{d\omega^4},$$

то при переходе к новой переменной дифференциальное уравнение (10.101) не изменяет своего вида, т. е.

$$\frac{d^4V}{d\omega^4}+4\alpha^4V=0. \qquad (10.102)$$

Решение дифференциального уравнения (10.102) записывается так же, как для длинной цилиндрической оболочки:

$$V=e^{-\alpha\omega}(C_1\sin\alpha\omega+C_2\cos\alpha\omega)+e^{\alpha\omega}(C_3\sin\alpha\omega+C_4\cos\alpha\omega). \qquad (10.103)$$

Ввиду того, что функция V с возрастанием угла ω должна затухать, второе слагаемое в выражении (10.103), содержащее множитель $e^{\alpha\omega}$, должно отсутствовать. Поэтому постоянные C_3 и C_4 следует приравнять к нулю, тогда

$$V=e^{-\alpha\omega}(C_1\sin\alpha\omega+C_2\cos\alpha\omega). \qquad (10.104)$$

Вычислим производные функции V по θ. При дифференцировании следует учитывать, что на верхнем краю пояса оболочки угол ω отсчитывается в сторону возрастания θ, поэтому $\frac{dV}{d\theta}=\frac{dV}{d\omega}$. На нижнем краю направления отсчета углов ω и θ — противоположны, поэтому $\frac{dV}{d\theta} = -\frac{dV}{d\omega}$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dV}{d\theta} &= \pm \alpha e^{-\alpha\omega} [C_1 (\cos\alpha\omega - \sin\alpha\omega) - \\
&\quad - C_2 (\cos\alpha\omega + \sin\alpha\omega)]; \\
\frac{d^2V}{d\theta^2} &= \begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix} 2\alpha^2 e^{-\alpha\omega} [C_1 (-\cos\alpha\omega) + C_2 \sin\alpha\omega]; \\
\frac{d^3V}{d\theta^3} &= \pm 2\alpha^3 e^{-\alpha\omega} [C_1 (\cos\alpha\omega + \sin\alpha\omega) + \\
&\quad + C_2 (\cos\alpha\omega - \sin\alpha\omega)]
\end{aligned}\right\} \qquad (10.105)$$

(знаки, указанные сверху, — для верхнего края, знаки, указанные снизу, — для нижнего).

Так как в данном случае рассматриваются только краевые нагрузки, то $p_1 = 0$; $p_2 = 0$; $F(\theta) = 0$ и $\Phi(\theta) = 0$ [см. равенства (10.19) и (10.27)]. В этом случае внутренние силовые факторы и перемещения связаны с функцией V следующими зависимостями:

$$\left.\begin{aligned}
&T_m = -\frac{V}{R_t}\operatorname{ctg}\theta; \quad T_t = -\frac{dV}{R_m\, d\theta}; \quad Q = \frac{V}{R_t}; \\
&\vartheta = \frac{R_t}{R_m^2 Eh}\frac{d^2V}{d\theta^2}; \quad M_m = -D\frac{d\vartheta}{R_m d\theta} = -\frac{R_t D}{R_m^3 Eh}\frac{d^3V}{d\theta^3}; \\
&M_t \cong \mu M_m; \quad \varepsilon_t = \frac{1}{Eh}(T_t - \mu T_m); \quad \xi = \varepsilon_t r.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.106)$$

На основании малости ϑ по сравнению с ее производной слагаемые, содержащие ϑ, в выражениях изгибающих моментов отброшены.

Запишем уравнения граничных условий для рассматриваемого случая нагружения краевой нагрузкой:

$$\begin{aligned}
&\text{при } \omega = 0 \quad M_m = M_{m0}; \\
&\text{при } \omega = 0 \quad Q = Q_0
\end{aligned}$$

или с учетом равенств (10.104), (10.105) и (10.106):

$$M_{m0} = -\frac{R_t D}{R_m^3 Eh}\left[\frac{d^3V}{d\theta^3}\right] = \mp \frac{R_m}{2R_t\alpha}(C_1 + C_2);$$

$$Q_0 = \frac{1}{R_t} C_2,$$

откуда

$$C_2 = Q_0 R_t; \quad C_1 = \mp \frac{M_{m0} 2R_t\alpha}{R_m} - Q_0 R_t.$$

В результате подстановки функции V и ее производных, с учетом значений C_1 и C_2, выражения внутренних силовых факторов и перемещений принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
&T_m = \operatorname{ctg}\theta\left[\pm M_{m0}\frac{2\alpha}{R_m}e^{-\alpha\omega}\sin\alpha\omega \mp\right.\\
&\left.\mp Q_0 e^{-\alpha\omega}(\cos\alpha\omega - \sin\alpha\omega)\right];\\
&T_t = \frac{2\alpha R_t}{R_m}\left[\begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix} M_{m0}\frac{\alpha}{R_m}e^{-\alpha\omega}(\cos\alpha\omega -\right.\\
&\left.-\sin\alpha\omega) \pm Q_0 e^{-\alpha\omega}\cos\alpha\omega\right];\\
&M_m = M_{m0}e^{-\alpha\omega}(\cos\alpha\omega + \sin\alpha\omega) \pm\\
&\pm\frac{Q_0 R_m}{\alpha}e^{-\alpha\omega}\sin\alpha\omega; \quad M_t = \mu M_m;\\
&\vartheta = \pm M_{m0}\frac{R_m}{\alpha D}e^{-\alpha\omega}\cos\alpha\omega \begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix}\\
&\begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix} Q_0\frac{R_m^2}{2\alpha^2 D}e^{-\alpha\omega}(\cos\alpha\omega + \sin\alpha\omega).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.107)$$

На краю оболочки при $\omega = 0$

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta = \pm\frac{M_{m0}R_m}{\alpha D}\begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix}\frac{Q_0 R_m^2}{2\alpha^2 D};\\
&T_t = \begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix} M_{m0}\frac{2\alpha^2 R_t}{R_m^2} \pm Q_0\frac{2\alpha R_t}{R_m};\\
&T_m = \mp Q_0\operatorname{ctg}\theta_к; \quad \varepsilon_{t0} = \frac{1}{Eh}\left[M_{m0}\frac{2\alpha^2 R_t}{R_m^2} \pm\right.\\
&\left.\pm Q_0\frac{2\alpha R_t}{R_m}\begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix}\mu Q_0\operatorname{ctg}\theta_к.\right.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.108)$$

Верхние знаки относятся к верхнему краю пояса оболочки, а нижние — соответственно к нижнему.

При действии на оболочку произвольной осесимметричной нагрузки к решению, определяемому равенствами (10.107), надо добавить еще частное решение неоднородной задачи, которое в большинстве случаев определяется по безмоментной теории.

Точность расчета, выполненного по изложенному методу, тем выше, чем ближе угол наклона нормали на краю оболочки к 90° и чем меньше величина $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{R_t}{R_m^2}\right)$. Практически этим методом можно пользоваться, если угол на краю $\theta_к > 35°$.

Пример 10.6. Определить перемещения на краю сферической оболочки, изображенной на рис. 10.12, *б*. Дано: $R_m = R_t = R = 50$ см; $h = 0{,}3$ см.

Воспользуемся изложенной теорией краевого эффекта. Вычислив параметр α [см. формулу (10.100)] и изгибную жесткость D:

$$\alpha = R\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2h^2}} = \sqrt[4]{\frac{R^2 3(1-\mu^2)}{h^2}} = 16{,}6;$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = 2{,}475\cdot 10^{-3}E \text{ Н}\cdot\text{см},$$

по формулам (10.108) определим ϑ, ε_{t0}, ξ при $\theta = 90°$. Знаки берем нижние:

$$\vartheta = -\frac{M_{m1}R}{\alpha D} + \frac{Q_1R^2}{2\alpha^2 D} = -\frac{M_{m1}1220}{E} + \frac{Q_1 1840}{E};$$

$$\xi_{(\theta=90°)} = r\varepsilon_{t_0} = \frac{R}{Eh}\left[\frac{M_{m1}2\alpha^2}{R} - Q_1 2\alpha\right] = \frac{M_{m1}1835}{E} - \frac{5330Q_1}{E}.$$

Эти значения совпадают с полученными в примере 10.3, где та же задача была решена на основе точных уравнений.

Высокая точность решения по методу Штаермана — Геккелера в данном случае объясняется тем, что угол $\theta_к$ равен 90° и радиусы кривизны имеют постоянное значение.

Пример 10.7. Сравнить значения внутренних силовых факторов и напряжений в сферическом куполе для четырех вариантов граничных условий (рис. 10.16);

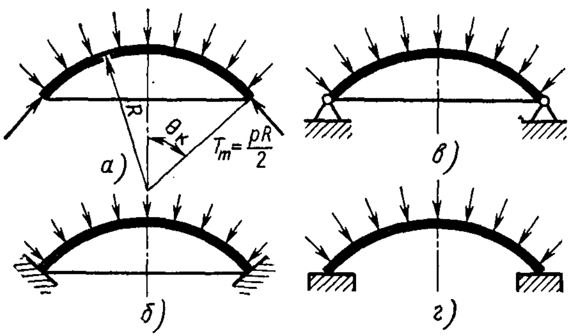


Рис. 10.16

а) купол нагружен по краю только нормальной меридиональной силой — безмоментное напряженное состояние (рис. 10.16, *а*)

б) край купола жестко заделан (рис. 10.16, *б*);

в) край шарнирно закреплен (рис. 10.16, *в*);

г) край свободно опирается на плоскость (рис. 10.16, *г*). Дано: $R = 30h$; $\theta_к = 35°$.

В первом варианте возникают только нормальные усилия T_m и T_t. Согласно уравнению Лапласа при $R_m = R_t = R$

$$\bar{T}_m = \bar{T}_t = -\frac{pR}{2}.$$

По углу θ эти усилия постоянны (рис. 10.17, *а*).

Напряжения

$$\bar{\sigma}_t = \bar{\sigma}_m = -\frac{pR}{2h} = -15p$$

и относительное окружное удлинение

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{\bar{T}_t - \mu\bar{T}_m}{Eh} = -\frac{pR(1-\mu)}{2Eh} = -10{,}5\frac{p}{E}$$

также по углу θ постоянны.

Угол поворота нормалей в этом состоянии равен нулю ($\vartheta = 0$).

Рассмотренное безмоментное напряженное состояние оболочки соответствует частному решению разрешающих уравнений.

Запишем граничные условия для второго варианта:

$$\text{при } \theta=35^\circ \quad \vartheta=\bar{\vartheta}+\mathring{\vartheta}=0;$$
$$\text{при } \theta=35^\circ \quad \varepsilon_t=\bar{\varepsilon}_t+\mathring{\varepsilon}_t=0.$$

Подставив в эти граничные условия значения $\bar{\vartheta}$ и $\bar{\varepsilon}_t$, а также $\mathring{\vartheta}$ и $\mathring{\varepsilon}_t$, согласно зависимостям (10.108), получим два уравнения:

$$-\frac{M_{m0}R}{\alpha D}+\frac{Q_0R^2}{2\alpha^2D}=0;$$
$$\frac{1}{Eh}\left[\frac{M_{m0}2\alpha^2}{R}-Q_0 2\alpha+\mu Q_0\operatorname{ctg}35^\circ\right]-\frac{pR(1-\mu)}{2Eh}=0\,.$$

В результате решения этих уравнений при

$$R=30h,\quad \operatorname{ctg}35^\circ=1{,}4281,\quad \mu=0{,}3,$$
$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{R^2 3(1-\mu^2)}{h^2}}=7{,}04$$

найдем

$$Q_0=-1{,}59ph;\quad M_{m0}=-3{,}38ph^2.$$

Далее по формулам (10.96), используя табличные значения функций (см. табл. 8.1), нетрудно определить внутренние силовые факторы при промежуточных значениях угла θ и построить соответствующие эпюры (рис. 10.17, *б*).

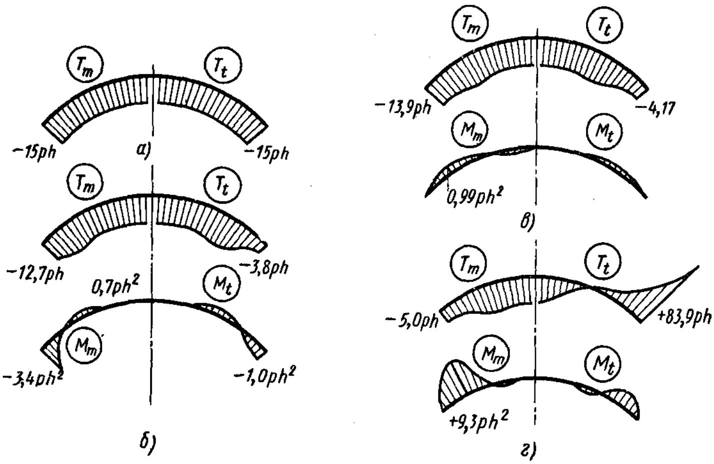


Рис. 10.17

Аналогично, но более просто рассчитывается третий вариант.

В этом случае граничные условия следующие:

$$\text{при } \theta=35^\circ \quad M_{m0}=0;$$
$$\text{при } \theta=35^\circ \quad \varepsilon_t=\bar{\varepsilon}_t+\mathring{\varepsilon}_t=0.$$

На основании второго условия с учетом последней формулы (10.108):

$$\frac{1}{Eh}\left[-Q_0 2\alpha+\mu Q_0\operatorname{ctg}35^\circ\right]-\frac{pR(1-\mu)}{2Eh}=0,$$

откуда

$$Q_0=-2{,}57\cdot10^{-2}pR=-0{,}77ph.$$

Эпюры внутренних силовых факторов для третьего варианта приведены на рис. 10.17, *в*.

Наконец, в последнем четвертом варианте в силу того, что купол свободно опирается на плоскость, изгибающий момент и сила распора на краю купола равны нулю, т. е.

$$\text{при } \theta=35^\circ \quad M_{m0}=0;$$
$$\text{при } \theta=35^\circ \quad T_{m0}\cos 35^\circ - Q_0 \sin 35^\circ = 0.$$

Согласно второму условию, реакция опоры имеет только вертикальную составляющую, интенсивность которой определяется по уравнению равновесия

$$R=\frac{pR\sin\theta_к}{2}=8{,}59ph.$$

Спроектировав эту реакцию на направление нормали к поверхности оболочки, найдем поперечную силу на краю

$$Q_0=-R\cos\theta_к=-8{,}59ph\cos 35^\circ=-7{,}03ph.$$

Подставив в формулы (10.107) $M_0 = 0$ и $Q_0 = -7{,}03\,ph$ и добавив частное решение, получим значения силовых факторов, указанные на эпюрах рис. 10.17, *г*.

Вычислим максимальные напряжения при различных вариантах закрепления.

В первом варианте (см. рис. 10.16, *а*) напряжения σ_m и σ_t постоянны как по углу θ, так и по толщине оболочки и составляют $\sigma_t = \sigma_m = -15p$ (безмоментное напряженное состояние).

Во втором варианте (см. рис. 10.16, *б*) максимальное напряжение возникает около края:

$$\sigma_{m\max}=\frac{T_m}{h}+\frac{M_m 6}{h^2}=12{,}7p+20{,}3p=33{,}0p.$$

В окружном направлении напряжения значительно меньше.

В третьем варианте (см. рис. 10.16, *в*) наибольшие напряжения возникают на некотором удалении от края и составляют

$$\sigma_{m\max}\cong 15{,}2p;\quad \sigma_{t\max}=15{,}6p.$$

В четвертом варианте (см. рис. 10.16, *г*) наибольшее напряжение возникает за счет окружного растяжения $\sigma_{t\max} = 83{,}9p$.

Напряжения изгиба в этом случае имеют максимальное значение на некотором расстоянии от края и достигают величины $\sigma_m = \pm 55p$ или с учетом меридионального усилия $\sigma_{m\max} = -71p$.

Как показывают результаты расчетов, наиболее неблагоприятный вариант — четвертый. Это объясняется тем, что при свободном опирании купола не обеспечено восприятие силы распора, вследствие чего оболочка находится в состоянии, наиболее далеком от безмоментного.

Рассмотрим вопрос о применении метода Штаермана — Геккелера к расчету конической оболочки.

Поскольку угол θ в этом случае постоянный, он не может быть принят в качестве независимой переменной. За независимую переменную необходимо принять координату s, отсчитываемую вдоль образующей.

После перехода от переменной θ к переменной s на основании соотношений

$$ds=R_m\,d\theta \quad\text{и}\quad \frac{d\,(*)}{d\theta}=R_m\frac{d\,(*)}{ds}$$

уравнение (10.99) принимает следующий вид:

$$\frac{d^4V}{ds^4}+\frac{Eh}{R_t^2D}V=0$$

или

$$\frac{d^4V}{ds^4}+4\beta^4V=0, \tag{10.109}$$

где

$$\beta=\sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_t^2h^2}}. \tag{10.110}$$

Напомним, что при выводе разрешающего уравнения краевого эффекта было принято допущение, что младшие производные функции, а также сами функции пренебрежимо малы по сравнению со старшими производными и что радиус R_t около края изменяется незначительно. Эти допущения выполняются удовлетворительно для конических оболочек с большим углом наклона образующих ($\theta > 35° - 40°$).

Обозначим через x координату, отсчитываемую от рассматриваемого края оболочки.

Для верхнего края $x = s - s_0$;
для нижнего края $x = s_0 - s$,
где s_0 — координата, соответствующая данному краю.

При переходе к переменной x уравнение (10.109) не изменяет своего вида:

$$\frac{d^4V}{dx^4}+4\beta^4V=0. \tag{10.111}$$

Уравнение (10.111) решается аналогично. В результате получаются следующие формулы для внутренних силовых факторов и перемещений:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathring{V}=\mp M_{m0}2\beta R_t e^{-\beta x}\sin\beta x \pm Q_0R_te^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x);\\
&\mathring{T}_m=\operatorname{ctg}\theta\left[\pm M_{m0}2\beta e^{-\beta x}\sin\beta x \mp Q_0e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x)\right];\\
&\mathring{T}_t=2\beta R_t\left[\pm M_{m0}\beta e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x)\pm Q_0e^{-\beta x}\cos\beta x\right];\\
&\qquad\mathring{M}_m=\pm M_{m0}e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x)\pm\\
&\qquad\qquad\pm Q_0\frac{1}{\beta}e^{-\beta x}\sin\beta x;\quad \mathring{M}_t=\mu\mathring{M}_m;\\
&\mathring{\vartheta}=\pm M_{m0}\frac{1}{\beta D}e^{-\beta x}\cos\beta x\pm Q_0\frac{1}{2\beta^2D}e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x);\\
&\qquad\mathring{\xi}=\mathring{\varepsilon}_t\, r=R_t\sin\theta\frac{1}{Eh}(\mathring{T}_t-\mu\mathring{T}_m),
\end{aligned}\right\} \tag{10.112}$$

где M_{m0} и Q_0 — силовые факторы на краю оболочки. Положительные направления этих силовых факторов показаны на рис. 10.14, *а*, *б*.

Верхние знаки в формулах (10.112) относятся к верхнему краю пояса оболочки; нижние — соответственно к нижнему.

Пример 10.8. Определить внутренние силовые факторы в конической оболочке, изображенной на рис. 10.9.

Размеры оболочки: $h = 0{,}5$ см; $\theta = 60°$; $s_1 = 10$ см; $s_2 = 30$ см; $R_{t2} = s_2 \operatorname{ctg} \theta = 17{,}3$ см.

Параметр β для нижнего края согласно формуле (10.110):

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R_{t_2}^2 h^2}} = 0{,}4365.$$

Силовые факторы на нижнем краю

$$M_{m0} = M; \quad Q_0 = P \sin 60° = 0{,}866P.$$

По формулам (10.112), полагая в них $x = 0$, вычислим угловое перемещение и силовые факторы на нижнем краю оболочки:

$$\vartheta = -\frac{M}{\beta D} + \frac{Q_0}{2\beta^2 D} = -2{,}29\frac{M}{D} + 2{,}28\frac{P}{D};$$

$$T_m = -Q_0 \operatorname{ctg} \theta = -P \sin \theta = -0{,}5P;$$

$$T_t = 2\beta R_t (M\beta - Q_0) = 6{,}58M - 13{,}1P.$$

Сравнивая эти значения со значениями, полученными в примере 10.2, можно увидеть, что погрешность приближенного расчета в данном случае не превышает 1%.

§ 5. Численный метод расчета

Применение ЭЦВМ в расчетной практике открыло в области расчета оболочек новые широкие возможности. В частности, стало возможно рассчитывать оболочки вращения с произвольной формой меридиана, при любом законе изменения толщины вдоль меридиана и при произвольном законе распределения поверхностной нагрузки.

В рассматриваемом методе расчета осесимметричных оболочек разрешающие уравнения Мейсснера не используются. Решение основывается на исходных уравнениях равновесия и перемещений и выполняется одинаково при любой форме меридиана.

Преобразуем исходные уравнения моментной теории осесимметричных оболочек к виду, удобному для решения на ЭЦВМ. В качестве основных переменных примем безразмерные величины

$$\chi = \frac{s}{h_0}; \quad x_1 = \frac{\xi}{h_0}; \quad x_2 = \vartheta; \quad x_3 = \frac{N}{Eh_0}; \quad x_4 = \frac{M_m}{Eh_0^2}, \qquad (10.113)$$

где s — независимая координата, отсчитываемая вдоль дуги меридиана;

h_0 — толщина стенки в некоторой фиксированной точке;

ξ и ϑ — радиальное и угловое перемещения в произвольной точке;

M_m — меридиональный изгибающий момент;

N — сила распора;

$$N = T_m \cos\theta - Q \sin\theta. \qquad (10.114)$$

Величины X_1, X_2, X_3, X_4 можно рассматривать как компоненты четырехмерного вектора

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix}. \qquad (10.115)$$

Вектор X полностью определяет напряженно деформированное состояние в произвольной точке оболочки.

Выведем зависимости, связывающие первые производные функций X_1, X_2, X_3, X_4 с самими функциями. Для этого предварительно выразим T_m, Q, T_t, M_t через N и M_m. Из уравнений (10.18) и (10.114) получим

$$T_m=N\cos\theta+\frac{F(s)}{r}\sin\theta; \qquad (10.116)$$

$$Q=-N\sin\theta+\frac{F(s)}{r}\cos\theta. \qquad (10.117)$$

Из уравнения (10.13) с учетом зависимости (7.34):

$$T_t=\mu T_m+\frac{Eh\xi}{r}$$

или

$$T_t=\mu\cos\theta\,N+\frac{Eh}{r}\xi+\frac{\mu\sin\theta}{r}F(s). \qquad (10.118)$$

Из уравнений (10.10) и (10.11) в результате исключения производной $\frac{d\vartheta}{ds}$ и подстановки $R_t=\frac{r}{\sin\theta}$ найдем

$$M_t=\mu M_m-\frac{D(1-\mu^2)\cos\theta}{r}\vartheta. \qquad (10.119)$$

Для определения первой производной функции X_1 используем уравнение (10.1). С учетом равенств (10.12), (10.113), (10.116) и (10.118) это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dX_1}{d\chi}=-\frac{\mu\cos\theta}{r}h_0X_1-\sin\theta X_2+\frac{(1-\mu^2)\cos^2\theta\,h_0}{h}X_3+$$
$$+\frac{F(s)(1-\mu^2)\sin\theta\cos\theta}{rEh}. \qquad (10.120)$$

Производную функции $X_2=\vartheta$ определим из уравнения (10.10):

$$\frac{dX_2}{d\chi}=-\frac{\mu h_0\cos\theta}{r}X_2-\frac{Eh_0^3}{D}X_4. \qquad (10.121)$$

Для определения производной функции X_3 воспользуемся уравнением равновесия (10.14). Подставив в него выражения (10.113), (10.116)—(10.118), а также приняв во внимание равенства:

$$R_t \sin\theta = r; \quad \frac{dr}{ds} = \cos\theta;$$

$$\frac{d}{ds}(F(s)\cos\theta) = -\frac{F(s)\sin\theta}{R_m} + \cos\theta\frac{dF(s)}{ds} =$$

$$= -\frac{F(s)\sin\theta}{R_m} + \cos\theta r(p_1\cos\theta - p_2\sin\theta);$$

$$\frac{d}{ds}(Nr\sin\theta) = \frac{dN}{ds} r\sin\theta + N\cos\theta\left(\sin\theta + \frac{r}{R_1}\right),$$

получим

$$\frac{dX_3}{d\chi} = \frac{hh_0}{r^2}X_1 - \frac{h_0(1-\mu)\cos\theta}{r}X_3 + \\ + \frac{F(s)\mu\sin\theta}{Er^2} - \frac{1}{E}(p_1\sin\theta + p_2\sin\theta). \qquad (10.122)$$

Наконец, для определения производной X_4 используем уравнение (10.16). Выразив из этого уравнения $\frac{dM_m}{ds}$ и приняв во внимание равенства (10.113), (10.117) и (10.119), найдем

$$\frac{dX_4}{d\chi} = -\frac{(1-\mu^2)D\cos^2\theta}{r^2Eh_0}X_2 - \sin\theta X_3 - \\ - \frac{h_0(1-\mu)\cos\theta}{r}X_4 + \frac{F(s)\cos\theta}{rEh_0}. \qquad (10.123)$$

Дифференциальные уравнения (10.120)—(10.123) можно записать более кратко:

$$\frac{dX}{d\chi} = LX + F, \qquad (10.124)$$

где L — матрица коэффициентов;

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{\mu h_0\cos\theta}{r} & -\sin\theta & \frac{(1-\mu^2)h_0\cos^2\theta}{h} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu h_0\cos\theta}{r} & 0 & -\frac{Eh_0^3}{D} \\ \frac{hh_0}{r^2} & 0 & -\frac{(1-\mu)h_0\cos\theta}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{(1-\mu^2)D\cos^2\theta}{r^2Eh_0} & -\sin\theta & -\frac{(1-\mu)h_0\cos\theta}{r} \end{pmatrix}. \qquad (10.125)$$

Величины h, r, θ, D в общем случае — функции χ;
F — столбец функций нагрузки;

$$F = \begin{pmatrix} \frac{(1-\mu^2)F(s)\sin\theta\cos\theta}{rEh} \\ 0 \\ \frac{\mu F(s)\sin\theta}{Er^2} - \frac{p_1\sin\theta + p_2\cos\theta}{E} \\ \frac{F(s)\cos\theta}{rEh_0} \end{pmatrix}. \qquad (10.126)$$

В такой форме уравнения моментной теории осесимметричных оболочек предложены В. Л. Бадерманом.

Уравнение (10.124) эквивалентно двум разрешающим дифференциальным уравнениям (10.26) и (10.28). Это уравнение интегрируется на ЭЦВМ численным методом по методу Рунге—Кутта по стандартной программе.

Ввиду того, что значения компонентов вектора X в начальной точке обычно не бывают известны полностью, решение производится или по методу начальных параметров с применением способа нескольких расчетов, или по методу прогонки (см. гл. 8). Если оболочка пологая, то все функции изменяются вдоль меридиана медленно. В этом случае удовлетворительные результаты дает метод начальных параметров, причем, если из граничных условий в начальной точке известны значения двух компонентов вектора X, то применяется способ трех расчетов; если же начальные значения компонентов вектора X подлежат определению из условий сопряжения с другими конструктивными элементами, то приходится делать пять расчетов. В четырех расчетах функции нагрузки не учитывают, а начальные значения вектора X принимают равными

$$X(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\qquad X(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\qquad X(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\qquad X(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

В пятом расчете учитывают заданную нагрузку, принимая нулевые значения начальных параметров.

При расчете оболочек с большим углом подъема применение метода начальных параметров связано с необходимостью вычисления малых разностей больших величин. В этом случае целесообразно применять метод прогонки.

В частном случае при $\theta = 90°$ уравнение (10.124) переходит в уравнение осесимметричной цилиндрической оболочки, а при $\theta = 0°$ — распадается на уравнение круглых осесимметричных пластин и уравнение дисков.

§ 6. Осесимметричная деформация тороидальных оболочек

Детали конструкций, имеющие форму тороидальной оболочки, применяются в машиностроении достаточно часто. Примерами могут служить корпусы насосов и гидромуфт, резервуары, гофрированные коробки (сильфоны) и др.

Форма тороидальной оболочки характеризуется радиусами r_0 и R_0 (рис. 10.18), а также параметрами:

$$\alpha = \frac{r_0}{R_0}; \qquad \beta = \frac{r_0}{h}. \tag{10.127}$$

Главные радиусы кривизны в произвольной точке срединной поверхности соответственно равны

$$O_1A = R_m = r_0; \qquad O_2A = R_t = R_0 \frac{1+\alpha \sin\theta}{\sin\theta}, \qquad (10.128)$$

где θ — угловая координата, изменяющаяся в пределах $-180° < \theta < 180°$.

Общие разрешающие уравнения осесимметричной деформации оболочек вращения (10.26) и (10.28) при подстановке в них значений радиусов кривизны (10.128) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &L_4(V) + \mu V = Ehr_0\vartheta + \Phi_4(\theta); \\ &L_4(\vartheta) - \mu\vartheta = -\frac{r_0 V}{D}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.129)$$

где

$$L_4(\ ) = \frac{1+\alpha\sin\theta}{\alpha\sin\theta}\frac{d^2}{d\theta^2}(\ ) + \operatorname{ctg}\theta\frac{d}{d\theta}(\ ) - \frac{\alpha\operatorname{ctg}\theta\cos\theta}{(1+\alpha\sin\theta)}(\ ), \qquad (10.130)$$

$$\Phi_4(\theta) = r_0^2\frac{d}{d\theta}\left[p_1\frac{(1+\alpha\sin\theta)^2}{\alpha^2\sin^2\theta}\right] + p_2r_0^2\frac{(1+\alpha\sin\theta)}{\alpha\sin\theta}\left(\frac{1+\alpha\sin\theta}{\alpha\sin\theta} + \mu\right) + \frac{F(\theta)\cos\theta(2+3\alpha\sin\theta)}{\alpha\sin^4\theta(1+\alpha\sin\theta)}. \qquad (10.131)$$

Уравнения (10.129) могут быть решены в рядах [28] или асимптотическим методом [6], а также численным методом.

Приведем решение, основанное на использовании разрешающего уравнения в комплексной форме [18].

В качестве основной неизвестной функции принимается комплексная функция $\tilde{T}$, связанная с функциями V и ϑ следующей зависимостью:

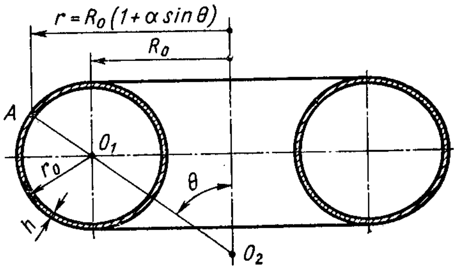


Рис. 10.18

$$\frac{d\tilde{T}}{d\theta} = -Eh\frac{R_m}{R_t}\left(\vartheta - i\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}V\right). \qquad (10.132)$$

Общие разрешающие уравнения осесимметричной деформации (10.26), и (10.28) преобразуются к одному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\tilde{T}}{d\theta^2} + \left[\left(2\frac{R_m}{R_t} - 1\right)\operatorname{ctg}\theta - \frac{dR_m}{R_m d\theta}\right]\frac{d\tilde{T}}{d\theta} + i\frac{R_m^2}{cR_t}\tilde{T} = i\frac{R_m^2}{cR_t}\tilde{F}(\theta). \qquad (10.133)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&c=\frac{h}{\sqrt{12(1-\mu^2)}};\\
&\tilde F(\theta)=p_1R_t-\left(\frac{1}{R_m}-\frac{1}{R_t}\right)\frac{F(\theta)}{\sin^2\theta}=\\
&=\overline{T}_m+\overline{T}_t=p_1R_t+\overline{T}_m\left(1-\frac{R_t}{S_m}\right);
\end{aligned}\right\}\qquad(10.134)$$

здесь $F(\theta)$ — осевая составляющая усилия в окружном сечении оболочки, отнесенная к единице полярного угла;

$\overline{T}_m$ и $\overline{T}_t$ — интенсивности нормальных сил, вычисленные по безмоментной теории.

Внутренние силовые факторы и перемещения определяют в зависимости от функции $\tilde T$ по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&T_m=-\frac{c}{R_m}\operatorname{ctg}\theta\operatorname{Im}\left(\frac{d\tilde T}{d\theta}\right)+\tilde T_m;\\
&T_t=\operatorname{Re}(\tilde T)-T_m;\\
&M_m=-(1-\mu)\frac{c^2}{R_m}\operatorname{ctg}\theta\operatorname{Re}\left(\frac{d\tilde T}{d\theta}\right)+c\operatorname{Im}(\tilde T);\\
&M_t=(1+\mu)\,c\operatorname{Im}(\tilde T)-M_m;\\
&V=c\frac{R_t}{R_m}\operatorname{Im}\left(\frac{d\tilde T}{d\theta}\right);\quad Q=\frac{c}{R_m}\operatorname{Im}\left(\frac{d\tilde T}{d\theta}\right);\\
&\vartheta=-\frac{R_t}{EhR_m}\operatorname{Re}\left(\frac{d\tilde T}{d\theta}\right);\\
&\xi=\varepsilon_{t_0}r=\frac{1}{E}(T_t-\mu T_m)R_t\sin\theta;\\
&\eta=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\left[\frac{1}{E}(T_m-\mu T_t)\sin\hat\theta+\vartheta\cos\hat\theta\right]R_m\,d\hat\theta;
\end{aligned}\right\}\qquad(10.135)$$

здесь через Re ( ) и Im ( ) обозначены действительная часть и коэффициент при мнимой части соответствующей комплексной функции.

Положительные направления силовых факторов указаны на рис. 10.19. Необходимо заметить, что в некоторых книгах по тороидальным оболочкам за положительные направления M_m, M_t и Q приняты направления, противоположные указанным, и соответственно знаки в формулах изменены на обратные.

Применим уравнение (10.133) к тороидальной оболочке. Подставив значения радиусов кривизны, получим

$$\frac{d^2\tilde T}{d\theta^2}+\left(\frac{2\alpha\sin\theta}{1+\alpha\sin\theta}-1\right)\operatorname{ctg}\theta\frac{d\tilde T}{d\theta}+i\frac{r_0\alpha\sin\theta}{c(1+\alpha\sin\theta)}\tilde T=i\frac{r_0\alpha\sin\theta}{c(1+\alpha\sin\theta)}\tilde F(\theta).\qquad(10.136)$$

Введем обозначение для параметра, характеризующего геометрию оболочки:

$$2k^2 = \frac{r_0^2}{R_0 h}\sqrt{12(1-\mu^2)}. \tag{10.137}$$

Это обозначение соответствует принятому в работе [18].

После несложных преобразований, с учетом принятых обозначений [см. равенства (10.127) и (10.137)], уравнение (10.136) приводится к следующему виду:

$$\frac{1}{1+\alpha\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left[\frac{(1+\alpha\sin\theta)^2}{\sin\theta}\,\frac{d\tilde{T}}{d\theta}\right] + i2k^2\tilde{T} = i2k^2\tilde{F}(\theta). \tag{10.138}$$

Функция $\tilde{F}(\theta)$, входящая в правую часть уравнения (10.127), зависит от нагрузки. На оболочку могут действовать нагрузки следующих видов: осевая сила P, Н, радиальная сила q, Н/см, равномерно распределенный момент m, Н·см/см (рис. 10.20, *а*); нормальное давление p, Н/см^2; последнее может иметь постоянную

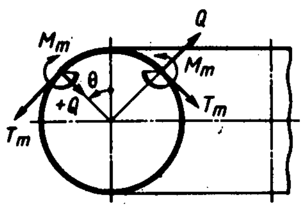


Рис. 10.19

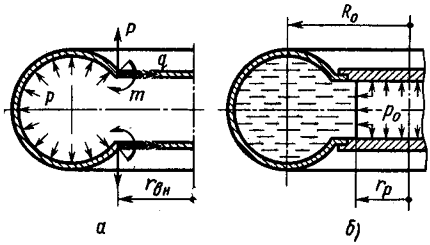


Рис. 10.20

составляющую p_0 и переменную составляющую от вращения жидкости, заполняющей оболочку; полное давление равно

$$p = p_0 + \frac{\gamma_ж\omega^2_ж}{g}\,(r^2 - r_p^2), \tag{10.139}$$

где $\omega_ж$ — угловая скорость жидкости;

r — текущий радиус;

r_p — радиус, соответствующий той точке, где давление $p = p_0$.

Давление жидкости от ее собственного веса обычно можно не учитывать.

Если, например, тороидальная оболочка с днищами заполнена жидкостью частично, так что при ее вращении свободная поверхность располагается по цилиндру радиуса r_p, как показано на рис. 10.20, *б*, то под p_0 следует подразумевать давление, действующее на свободную поверхность жидкости; если же последнее равно атмосферному давлению, то p_0 следует приравнять нулю. При отсутствии вращающейся жидкости второе слагаемое в формуле (10.139) следует отбросить; если же инерционная нагрузка возникает вследствие вращения самой оболочки, то интенсивность этой нагрузки

$$p_\omega = \frac{h\gamma_0\omega_0^2 r}{g} = \frac{h\gamma_0\omega_0^2 R_0(1+\alpha\sin\theta)}{g}. \tag{10.140}$$

Нагрузка p_ω направлена перпендикулярно оси оболочки. Разложив ее на нормальную и касательную составляющие, получим

$$p_{1\omega}=p_\omega \sin\theta=\frac{h\gamma_0\omega_0^2R_0(1+\alpha\sin\theta)\sin\theta}{g}; \qquad (10.141)$$

$$p_{2\omega}=p_\omega \cos\theta=\frac{h\gamma_0\omega_0^2R_0(1+\alpha\sin\theta)\cos\theta}{g}, \qquad (10.142)$$

где γ_0 — удельный вес материала оболочки;
ω_0 — угловая скорость оболочки.

Введем величину Q_0, равную интенсивности поперечной силы при $\theta=0$. Эту величину можно легко определить, составив уравнение равновесия части оболочки, отсеченной по окружности радиуса $r=R_0$. Так, например, для оболочки, изображенной на рис. 10.20, *а*, при $p=\text{const}$

$$Q_0=\frac{P+p\pi(R_0^2-r_{\text{вн}}^2)}{2\pi R_0}. \qquad (10.143)$$

Для оболочки с днищами, частично заполненной вращающейся жидкостью, при наличии давления p_0 (см. рис. 10.20, *б*)

$$Q_0=\left(p_0\pi r_p^2+\int_{r_p}^{R_0}p2\pi r\,dr\right)\frac{1}{2\pi R_0}.$$

Подставив под знак интеграла выражение (10.139) и выполнив интегрирование, получим

$$Q_0=\frac{p_0R_0}{2}+\frac{\gamma_{\text{ж}}\omega_{\text{ж}}^2}{4R_0g}(R_0^2-r_p^2)^2. \qquad (10.144)$$

Заметим, что в работе [18] вместо величины Q_0 используется величина A, связанная с Q_0 зависимостью

$$A=-\frac{1}{\alpha}Q_0. \qquad (10.145)$$

При действии одних только краевых нагрузок m и q или при действии инерционной нагрузки за счет вращения самой оболочки величина Q_0, очевидно, равна нулю.

Вычислим осевое усилие $F(\theta)$ в текущем сечении, приходящееся на единицу полярного угла:

$$F(\theta)=\frac{1}{2\pi}\left(2\pi R_0Q_0-\int_{R_0}^{r}p\,2\pi\hat r\,d\hat r\right)=$$

$$=R_0Q_0+p_0\frac{r^2-R_0^2}{2}+\frac{\gamma_{\text{ж}}\omega_{\text{ж}}^2}{2}\left[\frac{r^4-R_0^4}{4}-r_p^2\frac{r^2-R_0^2}{2}\right]=R_0Q_0+$$

$$+\frac{p_0R_0^2\alpha\sin\theta(2+\alpha\sin\theta)}{2}+$$

$$+\frac{\gamma_{\text{ж}}\omega_{\text{ж}}^2}{4g}R_0^4\alpha\sin\theta(2+\alpha\sin\theta)\left[2\left(1-\frac{r_p^2}{R_0^2}\right)+2\alpha\sin\theta+\alpha^2\sin^2\theta\right]. \qquad (10.146)$$

Подставив $F(\theta)$ в формулу (10.134) и приняв во внимание равенства

$$R_m = r_0 = \alpha R_0; \qquad R_t = \frac{R_0 + r\sin\theta}{\sin\theta} = R_0\frac{1+\alpha\sin\theta}{\sin\theta};$$

$$p_1 = p + p_{1\omega} = p_0 + \frac{\gamma_ж\omega_ж^2}{g}(r^2 - r_p^2) + \frac{h\gamma_0\omega_0^2 R_0(1+\alpha\sin\theta)\sin\theta}{g},$$

получим выражение функции $\tilde{F}(\theta)$ в общем виде, т. е. при одновременном действии всех рассмотренных нагрузок

$$\tilde{F}(\theta) = -\frac{Q_0}{\alpha\sin^2\theta(1+\alpha\sin\theta)} + \frac{p_0R_0\alpha(3+2\alpha\sin\theta)}{2(1+\alpha\sin\theta)} +$$
$$+ \frac{\gamma_ж\omega_ж^2R_0^3\alpha}{g(1+\alpha\sin\theta)}\left[-\frac{r_p^2}{2R_0^2}(3+2\alpha\sin\theta) + \frac{5}{2} +\right.$$
$$\left.+5\alpha\sin\theta + \frac{15}{4}\alpha^2\sin^2\theta + \alpha^3\sin^3\theta\right] + \frac{\gamma_0 h\omega_0^2R_0^2}{g}(1+\alpha\sin\theta)^2. \tag{10.147}$$

Разрешающее уравнение (10.138) и входящая в него функция $\tilde{F}(\theta)$ имеют особенность: при $\theta \to 0$ слагаемые, содержащие $\sin\theta$, в знаменателе обращаются в бесконечность. Для устранения этой особенности заменим комплексную переменную $\tilde{T}$ новой комплексной переменной $\tilde{V}$ согласно зависимости

$$\frac{d\tilde{T}}{d\theta}\frac{(1+\alpha\sin\theta)^2}{\sin\theta} = \tilde{V} + i\,2k^2\frac{Q_0}{\alpha}\operatorname{ctg}\theta. \tag{10.148}$$

Продифференцировав уравнение (10.138) по θ и подставив выражение (10.148), получим разрешающее уравнение тороидальной оболочки, не содержащее особенности:

$$(1+\alpha\sin\theta)\frac{d^2\tilde{V}}{d\theta^2} - \alpha\cos\theta\frac{d\tilde{V}}{d\theta} + i\,2k^2\sin\theta\,\tilde{V} =$$
$$= -i\,2k^2\cos\theta\,\tilde{f}(\theta), \tag{10.149}$$

где

$$\tilde{f}(\theta) = i\,2k^2\frac{Q_0}{\alpha} + \frac{p_0\alpha r_0}{2} - \frac{\gamma_ж\omega_ж^2R_0r_0^2}{g}\left(\frac{1}{2}\frac{r_p^2}{R_0^2} + \frac{5}{2} +\right.$$
$$\left.+\frac{15}{2}\alpha\sin\theta + \frac{27}{4}\alpha^2\theta + 2\alpha^3\sin^3\theta\right) -$$
$$-\frac{2\gamma_0h\omega_0^2R_0r_0}{g}(1+\alpha\sin\theta)^3. \tag{10.150}$$

Напишем еще выражения силовых факторов и перемещений в зависимости от функции $\tilde{V}$. На основании формул (10.135) с учетом равенства

$$\overline{T}_m = \frac{F(\theta)}{R_0(1+\alpha\sin\theta)\sin\theta},$$

а также зависимостей (10.146), (10.147) и (10.148) получим

$$T_m = -\frac{\alpha\cos\theta}{2k^2(1+\alpha\sin\theta)^2}\,\mathrm{Im}(\tilde V) + Q_0\frac{\alpha+\sin\theta}{(1+\alpha\sin\theta)^2} + p_0\frac{r_0(2+\alpha\sin\theta)}{2(1+\alpha\sin\theta)} + \frac{\gamma_ж\omega_ж^2R_0^2r_0}{4g(1+\alpha\sin\theta)}(2+\alpha\sin\theta)\left[2\left(1-\frac{r_p^2}{R_0^2}\right)+2\alpha\sin\theta+\alpha^2\sin^2\theta\right]; \tag{10.151}$$

$$T_t = -\frac{1}{2k^2(1+\alpha\sin\theta)}\,\mathrm{Im}\left(\frac{d\tilde V}{d\theta}\right) + \frac{\alpha\cos\theta}{2k^2(1+\alpha\sin\theta)^2}\,\mathrm{Im}(\tilde V) - Q_0\frac{(\alpha+\sin\theta)}{(1+\alpha\sin\theta)^2} + \frac{p_0r_0}{2} + \frac{\gamma_ж\omega_ж^2R_0^2r_0}{2g}\left[-\frac{r_p^2}{R_0^2} + \frac{1}{(1+\alpha\sin\theta)}\left(3+7\alpha\sin\theta+\frac{11}{2}\alpha^2\sin^2\theta+\frac{3}{2}\alpha^3\sin^3\theta\right)\right] + \frac{\gamma_0\omega_0^2hR_0^2}{g}(1+\alpha\sin\theta)^2. \tag{10.152}$$

При выводе последней формулы использована зависимость

$$\mathrm{Re}(\tilde T) = -\frac{1}{2k^2(1+\alpha\sin\theta)}\,\mathrm{Im}\left(\frac{d\tilde V}{d\theta}\right) + \frac{Q_0}{(1+\alpha\sin\theta)\,\alpha\sin^2\theta} + \tilde F(\theta),$$

полученная из уравнения (10.138) с учетом соотношения (10.148). Угол поворота нормали и изгибающие моменты определяют по следующим формулам:

$$\vartheta = -\frac{1+\alpha\sin\theta}{Eh\,\alpha\sin\theta}\,\mathrm{Re}\left(\frac{dT}{d\theta}\right) = -\frac{1}{Eh\alpha(1+\alpha\sin\theta)}\,\mathrm{Re}(\tilde V); \tag{10.153}$$

$$M_m = D\left[\frac{1}{R_m}\frac{d\vartheta}{d\theta} + \mu\frac{\vartheta}{R_t}\operatorname{ctg}\theta\right] = \frac{\alpha r_0}{4k^4}\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\tilde V}{1+\alpha\sin\theta}\right)\right] + \mu\frac{\alpha\cos\theta}{(1+\alpha\sin\theta)^2}\,\mathrm{Re}(\tilde V)\right\}; \tag{10.154}$$

$$M_t = D\left[\frac{\vartheta}{R_t}\operatorname{ctg}\theta + \mu\frac{1}{R_m}\frac{d\vartheta}{d\theta}\right] = \frac{\alpha r_0}{4k^4}\left\{\frac{\alpha\cos\theta}{(1+\alpha\sin\theta)^2}\,\mathrm{Re}(\tilde V) + \mu\,\mathrm{Re}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\tilde V}{1+\alpha\sin\theta}\right)\right]\right\}; \tag{10.155}$$

$$Q = \frac{1}{(1+\alpha\sin\theta)^2}\left[Q_0\cos\theta + \frac{\alpha\sin\theta}{2k^2}\,\mathrm{Im}(\tilde V)\right]. \tag{10.156}$$

Дифференциальное уравнение (10.149) может быть проинтегрировано различными методами. Если параметр $2k^2$ велик [$2k^2 > 5$, см. формулу (10.137)], то достаточную точность обеспечивает метод асимптотического интегрирования. При выполнении расчетов по этому методу следует пользоваться таблицами специальных функций [29]. При малых значениях параметра $2k^2$ решение может быть получено в рядах.

При решении уравнения (10.149) численным методом его необходимо представить в безразмерной форме, что достигается умножением всех членов уравнения на некоторый постоянный размерный множитель [6].

Решение задачи об осесимметричной деформации тороидальной оболочки также можно получить путем численного интегрирования общих уравнений осесимметричных оболочек (10.124)—(10.126).

Пример 10.9. Определить напряжения в тороидальной оболочке, изображенной на рис. 10.21, *а*. Дано: $h = \text{const}$; $r_0 = 10h$; $R_0 = 5r_0$; $\mu = 0{,}3$; $\frac{p}{E} = 10^{-5}$.

Применим метод расчета, изложенный в § 5. В данном случае в уравнение (10.124) следует подставить

$$r = R_0 + r_0 \sin\theta = r_0 (5 + \sin\theta);\ \frac{d}{d\chi} = \frac{h}{r_0}\frac{d}{d\theta} = \frac{1}{10}\frac{d}{d\theta};$$

$$F(s) = \frac{pr^2}{2} = \frac{pr_0^2}{2}(5 + \sin\theta)^2;$$

$$p_1 = p; \quad p_2 = 0.$$

В результате уравнение принимает вид

$$\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{0{,}3\cos\theta}{5+\sin\theta} & -10\sin\theta & 9{,}1\cos^2\theta & 0 \\ 0 & -\frac{0{,}3\cos\theta}{5+\sin\theta} & 0 & -109{,}2 \\ \frac{0{,}1}{(5+\sin\theta)^2} & 0 & -\frac{0{,}7\cos\theta}{5+\sin\theta} & 0 \\ 0 & -0{,}1\cos^2\theta & -10\sin\theta & -\frac{0{,}7\cos\theta}{5+\sin\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 455\sin\theta\cos\theta\,(5+\sin\theta) \\ 0 \\ -85\sin\theta \\ 500\cos\theta\,(5+\sin\theta) \end{pmatrix} 10^{-6}.$$

Считая, что пластины, с которыми сопрягается оболочка, абсолютно жесткие, и учитывая симметрию оболочки, получим следующие уравнения граничных условий:

$$\text{при } \theta = 0 \quad \xi = 0 \text{ и } \vartheta = 0, \text{ т. е. } X_1 = 0 \text{ и } X_2 = 0,$$

$$\text{при } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \vartheta = 0 \text{ и } N = 0, \text{ т. е. } X_2 = 0 \text{ и } X_3 = 0.$$

Так как известны только два начальных параметра, применим способ трех расчетов. Искомый вектор X представим в виде суммы

$$X = \bar{X}C_1 + \bar{\bar{X}}C_2 + \bar{\bar{\bar{X}}}.$$

В первом и втором расчете заданную нагрузку не учитываем, т. е. последнее слагаемое в дифференциальном уравнении отбрасываем. Начальные значения вектора X в первом и втором расчете принимаем следующие:

$$\overline{X}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\qquad \overline{\overline{X}}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Третий расчет выполняем с учетом заданной нагрузки при нулевых значениях начальных параметров.

Дифференциальное уравнение (10.124) интегрируется на ЭЦВМ по методу Рунге — Кутта по стандартной программе. При решении данной задачи была

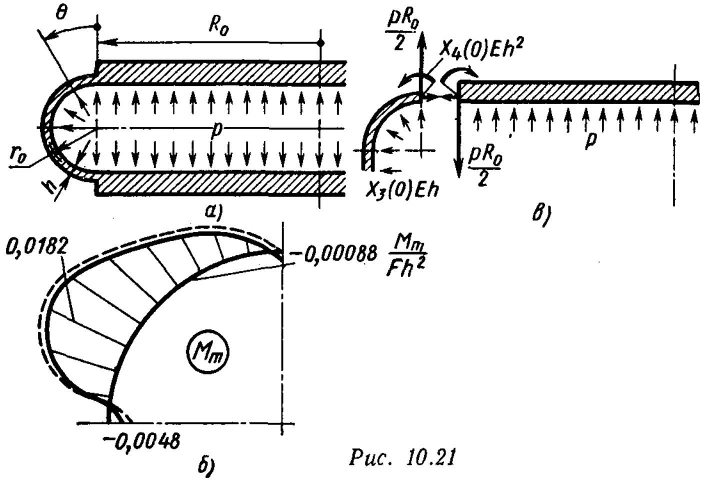


Рис. 10.21

использована машина «Наири». Шаг интегрирования был принят равным $\frac{\pi}{200}$; шаг вывода на печать $\frac{\pi}{40}$; время, необходимое для трех расчетов, — около 2 ч.

Значения компонентов вектора X в конечной точке $\left(\text{при } \theta=\frac{\pi}{2}\right)$

$$\overline{X}_1=-1950{,}57;\ \overline{X}_2=470{,}58;\ \overline{X}_3=-0{,}7647;\ \overline{X}_4=-4{,}932;$$
$$\overline{\overline{X}}_1=775{,}90;\ \overline{\overline{X}}_2=-49{,}608;\ \overline{\overline{X}}_3=1{,}1132;\ \overline{\overline{X}}_4=-2{,}834;$$
$$\overline{\overline{\overline{X}}}_1=1{,}245;\ \overline{\overline{\overline{X}}}_2=-0{,}2026;\ \overline{\overline{\overline{X}}}_3=0{,}001239;\ \overline{\overline{\overline{X}}}_4=-0{,}000675.$$

Граничные условия при $\theta=\frac{\pi}{2}$ приводят к двум уравнениям:

$$470{,}58C_1-49{,}608C_2-0{,}2026=0;$$
$$-0{,}7647C_1+1{,}1132C_2+0{,}001239=0,$$

из которых находим

$$C_1=3{,}38\cdot10^{-4};\quad C_2=-8{,}82\cdot10^{-4}.$$

Далее нетрудно вычислить компоненты суммарного вектора X и по ним найти значения величин ξ, ϑ, N и M_m. Значения остальных силовых факторов определяются согласно формулам (10.116) — (10.119).

На рис. 10.21, *б* приведены эпюры меридионального изгибающего момента. Сплошной линией показана эпюра суммарного момента, а штриховой линией — эпюра, построенная по результатам только третьего расчета. Величина максимального момента, найденная по результатам третьего расчета, т. е. без учета граничных условий, достаточно близка к действительной.

В том случае, когда жесткость пластин не бесконечна, сопряжение оболочки с пластиной следует рассматривать как упругую заделку. Отделив оболочку от пластины (рис. 10.21, *в*), вычислим угол поворота нормали на краю пластины (см. гл. 5):

$$\vartheta_0 = \frac{pR_0^3}{8D_1(1+\mu)} - \frac{X_4(0)\,Eh^2R_0}{D_1(1+\mu)},$$

где D_1 — изгибная жесткость пластин.

С учетом найденной величины угла ϑ_0 примем следующие значения начальных параметров первого, второго и третьего расчетов:

$$\overline{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{\overline{X}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{Eh^2R_0}{D_1(1+\mu)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{\overline{\overline{X}}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{pR_0^3}{8D_1(1+\mu)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что при этих начальных значениях вектора X условия сопряжения оболочки и пластины выполняются.

Дальнейшее решение не отличается от изложенного выше. Постоянные множители C_1 и C_2 определяются из граничных условий при $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреева Л. Е.** Упругие элементы приборов. М., Машгиз, 1962, 454 с.
2. **Бидерман В. Л.** Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики. — «Механика твердого тела», 1967, № 5, с. 62—66.
3. **Биргер И. А.** Круглые пластинки и оболочки вращения. М., Оборонгиз, 1961, 367 с.
4. **Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Шнейдорович Р. М.** Расчет на прочность деталей машин. Справ. пособие. Изд. 2-е. М., «Машиностроение», 1966, 616 с.
5. **Бицено К. Б., Граммель Р.** Техническая динамика. М. — Л., ГИТТЛ, 1950, Т. 1, 900 с.
6. **Булгаков В. Н.** Статика тороидальных оболочек. Киев, Изд-во АН УССР, 1962, 100 с.
7. **Ван Цзи-Де.** Прикладная теория упругости. М. Физматгиз, 1959, 400 с.
8. **Власов В. З.** Тонкостенные пространственные системы. Изд. 2-е, М., Стройгиз, 1958, 502 с.
9. **Власов В. З.** Избранные труды. В 3-х т. М., Изд-во АН СССР.
Т. I, 1962, 528 с.
Т. II. 1963, 507 с.
10. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. Изд. 2-е, М. —Л., Физматгиз, 1959, 568 с.
11. **Гольденвейзер А. Л.** Теория тонких упругих оболочек. М., ГИТТЛ, 1953, 544 с.
12. **Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Лобкова И. А.** Расчет конических оболочек линейно переменной толщины. Киев, Изд-во АН УССР, 1961, 327 с.
13. **Колкунов Н. В.** Основы расчета упругих оболочек. М., Высшая школа, 1972, 296 с.
14. **Лейбензон Л. С.** Вариационные методы решения задач теории упругости. М. — Л., Гостехиздат, 1948, 287 с.
15. **Лурье А. И.** Статика тонкостенных упругих оболочек. М. — Л., Гостехиздат, 1947, 252 с.
16. **Лурье А. И.** Пространственные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1955, 491 с.
17. **Малинин Н. Н.** Прочность турбомашин. М., Машгиз, 1962, 292 с.
18. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1952, 344 с.
19. **Основы** строительной механики ракет. Под ред. Балабух Л. И., М., «Высшая школа», 1969, 494 с.
20. **Пономарев С. Д.** Жесткость тарельчатых пружин. В сб. «Расчеты на прочность», вып. № 5, с 3 — 14, М., Машгиз, 1960.
21. **Расчеты на прочность в машиностроении.** В 3-х т. Под ред. Пономарева С. Д. М., Машгиз. Т. I, 1956, 884 с. ТII, 1958, 974 с.
22. **Соколов С. Н.** Расчет круглых кольцевых пластин. Сб. «Расчеты на прочность», вып. № 3, М., Машгиз, 1958, с. 88—121.
23. **Справочник** машиностроителя. В 6-ти т. Т.3, М., Машгиз, 1962, 651 с.
24. **Справочник** «Прочность, устойчивость, колебания». В 3-х т. Под ред. Биргер И. А., Пановко Я. Г.. Т. 1, М., «Машиностроение», 1968, 831 с.
25. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М., ГИФМЛ, 1963, 635 с.
26. **Уманский А. А.** Строительная механика самолета. М., «Оборонгиз», 1961, 529 с.
27. **Ушаков Б. Н.** Применение муаровых картин для исследования перемещений и деформаций. В сб. «Расчеты на прочность», вып. № 12, М., «Машиностроение», 1966, с. 128—153.
28. **Феодосьев В. И.** Упругие элементы точного приборостроения. М., Оборонгиз, 1949, 341 с.
29. **Чернина В. С.** Статика тонкостенных оболочек вращения. М., «Наука», 1968, 465 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава 1. **Изгиб и кручение тонкостенных стержней** 5

§ 1. Некоторые общие вопросы теории тонкостенных стержней 5
§ 2. Свободное кручение тонкостенных стержней замкнутого и незамкнутого профиля 12
§ 3. Секториальные характеристики тонкостенных профилей 23
§ 4. Стесненное кручение тонкостенных стержней незамкнутого профиля 32
§ 5. Поперечный изгиб открытых тонкостенных профилей 46
§ 6. Общий случай нагружения тонкостенных стержней незамкнутого профиля 49

Глава 2. **Осесимметрично нагруженные толстостенные цилиндры** 60

§ 1. Вывод основных зависимостей 60
§ 2. Напряжения и деформации в толстостенном цилиндре при действии внутреннего и наружного давления 63
§ 3. Расчет посадок с гарантированным натягом. Составные цилиндры 68
§ 4. Температурные напряжения в толстостенных цилиндрах 77

Глава 3. **Напряжения и деформации в дисках при вращении и неравномерном нагреве** 80

§ 1. Вывод основных уравнений 80
§ 2. Вращающиеся неравномерно нагретые диски постоянной толщины при постоянных по радиусу характеристиках упругости E и μ . . . 83
§ 3. Диски равного сопротивления и конические диски. 89
§ 4. Расчет дисков переменной толщины методом начальных параметров с применением способа двух расчетов 93
§ 5. Метод последовательных приближений 104
§ 6. Посадочные напряжения в дисках, определение освобождающего и разрушающего числа оборотов. 108

Глава 4. **Напряжения и деформации в кольцевых деталях при осесимметричной нагрузке, при плоском и пространственном изгибе**. 113

§ 1. Осесимметричная деформация кольцевых деталей. 113
§ 2. Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях колец при плоском и пространственном изгибе 126
§ 3. Деформации плоских колец 135
§ 4. Деформации колец, нагруженных перпендикулярно их плоскости 151

Глава 5. **Простейшие случаи изгиба пластин** 158

§ 1. Основные гипотезы теории изгиба пластин. 158
§ 2. Цилиндрический и чистый изгиб тонких пластин. 159

§ 3. Осесимметричный изгиб круглых пластин 167
§ 4. Расчет круглых осесимметричных пластин по методу начальных параметров 178
§ 5. Круглые пластины ступенчато переменной толщины, подкрепленные кольцевыми ребрами 189
§ 6. Круглые осесимметричные пластины переменной толщины 200
§ 7. Круглые конструктивно ортотропные пластины 207
§ 8. Температурные напряжения в пластинах 211

Глава 6. **Общий случай изгиба пластин** 220

§ 1. Вывод основного дифференциального уравнения упругой поверхности пластины 220
§ 2. Изгиб прямоугольных и эллиптических пластин 228
§ 3. Несимметричный изгиб круглых пластин 238
§ 4. Изгиб анизотропных пластин 245
§ 5. Приближенные методы расчета пластин 252

Глава 7. **Безмоментная теория оболочек вращения** 271

§ 1. Некоторые геометрические свойства поверхностей вращения 271
§ 2. Условия существования безмоментного напряженного состояния оболочки 274
§ 3. Уравнения безмоментной теории оболочек вращения 276
§ 4. Осесимметрично нагруженные оболочки вращения 281
§ 5. Осесимметричное кручение оболочек 292
§ 6. Несимметрично нагруженные оболочки вращения 295

Глава 8. **Моментная теория осесимметричных цилиндрических оболочек** 309

§ 1. Вывод основных уравнений 309
§ 2. Особенности расчета длинных цилиндрических оболочек 316
§ 3. Короткие осесимметрично нагруженные цилиндрические оболочки 326
§ 4. Расчет цилиндрических оболочек, имеющих несколько участков по методу начальных параметров 337
§ 5. Численный метод расчета цилиндрических оболочек 346
§ 6. Напряжения в тонкостенных цилиндрических оболочках при неравномерном нагреве 352
§ 7. Применение теории тонкостенных цилиндрических оболочек к расчету толстостенных цилиндров 357

Глава 9. **Несимметричная деформация цилиндрических оболочек** 362

§ 1. Полубезмоментная теория цилиндрических оболочек В. З. Власова 362
§ 2. Расчет цилиндрических оболочек по полубезмоментной теории при отсутствии поверхностной нагрузки 368
§ 3. Расчет цилиндрических оболочек, находящихся под действием поверхностной нагрузки 380
§ 4. Моментная теория несимметричной деформации цилиндрических оболочек 386

Глава 10. **Моментная теория осесимметричных оболочек вращения** 394

§ 1. Уравнения моментной теории 394
§ 2. Осесимметричные конические оболочки 405
§ 3. Осесимметричные сферические оболочки 418
§ 4. Приближенный метод учета краевого эффекта (метод Штаермана — Геккелера) 432
§ 5. Численный метод расчета 441
§ 6. Осесимметричная деформация тороидальных оболочек 444

Список литературы 454