VAFOYEV B.R.

SPORTDA MATEMATIKA

TOSHKENT

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

O'ZBEKISTON DAVLAT JISMONIY TARBIYA INSTITUTI

VAFOYEV BOBURJON RASULOVICH

SPORTDA MATEMATIKA

O'quv qo'llanma

Bilim sohasi:	*100 000 – Gumanitar* *600 000 – Xizmatlar* *200 000 – Ijtimoiy soha, iqtisod va huquq*
Ta'lim sohasi:	*110 000 – Pedagogika* *610 000 – Xizmat ko'rsatish* *210 000 – Sotsiologiya va psixologiya*
Ta'lim yo'nalishi:	*5110000 – Kasb ta'limi (5610500 Sport faoliyati (faoliyat turlari bo'yicha))* *5610500 – Sport faoliyati (faoliyat turlari bo'yicha)* *5210200 – Psixologiya (sport)*

TOSHKENT - 2018

UO‘K: 796(075.8)
KBK: 75ya73

Vafoyev B.R. Sportda matematika. O‘quv qo‘llanma. – T.: Ilmiy texnika axboroti-press nashriyoti, 2018. – 252 bet.

Muallif:
Vafoyev B.R. – Informatika va axborot texnologiyalari kafedrasi mudiri, iqt.f.n.dots.

Taqrizchilar:
Jo‘rayev T.F. – Nizomiy nomidagi TDPU, “Umumiy matematika” kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.
Kerimov F.A. – O‘zDJTI, Jismoniy tarbiya nazariyasi va uslubiyati kafedrasi professori, p.f.d.

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamonaviy talablarga javob bera oladigan jismoniy tarbiya va sport sohasidagi kadrlar tayyorlashda ularga chuqur matematik bilimlar berish va bu bilimlarni sportga oid masalalarni yechishga tatbiq eta olishga o‘rgatish dolzarb ahamiyatga ega.

O‘quv qo‘llanmada oliy matematikaga doir asosiy tushuncha va tasdiqlar yoritilgan bo‘lib, ularning sport bilan bog‘liq mazmuni va tatbiqlari ko‘rsatilgan. Mavzular bo‘yicha tayanch iboralar ro‘yxati, nazorat savollari, testlardan namunalar va talabalar mustaqil ishi uchun topshiriqlar berilgan. Asosiy tayanch iboralarning izohli lug‘ati ham keltirilgan.

O‘quv qo‘llanmada matematikaning to‘plamlar nazariyasi, chiziqli algebra, vektorlar algebrasi, differensial va integral hisob, bir o‘zgaruvchili funksiyalar, differensial tenglamalar va integral kabi asosiy tushunchalarning tahlili bayon etilgan.

Mazkur qo‘llanmadan jismoniy tarbiya va sport sohasidagi talabalarning ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlari, mustaqil ta’lim soatlarini shakl va mazmunan boyitish yo‘lida keng foydalanish mumkin. Mazkur qo‘llanma jismoniy tarbiya va sport sohasidagi OTMlar hamda jismoniy madaniyat fakulteti talabalari va magistrantlari uchun mo‘ljallangan.

O‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2017-yil 28-iyundagi 434-sonli buyrug‘iga asosan nashrga ruxsat etilgan.

ISBN 978-9943-5067-8-7

АННОТАЦИЯ

В подготовке высококвалифицированных конкурентноспособных специалистов, отвечающих современным требованиям в области физической культуры и спорта, первостепенное значения имеет овладение ими знаниями и умениями применения и внедрения на практике методики решения спортивных задач с использованием математического аппарата.

В данном учебном пособии приведены основные математические понятия и термины, указаны основные способы их практического применения в спорте. Кроме того, в пособии приведены глоссарий, вопросы для контроля знаний, образцы тестовых вопросов, а также темы для самостоятельной подготовки.

В данном учебном пособии рассмотрены такие темы высшей математики и математического анализа как: теория множества, линейная и векторная алгебра, дифференциальные и интегральные вычисления, линейные функции, дифференциальные уравнения, а также методика вычисления интегралов.

Данное пособие рекомендуется для применения при подготовке и проведения лекционных, практических занятий, а также для самообразования. Данное учебное пособие предназначено для учащихся бакалавриата и магистратуры ВУЗов физической культуры и факультетов физического воспитания.

ANNOTATION

For the preparation of highly qualified specialists in the field of physical culture and sports who meet modern requirements, to understand them modern knowledge of the method of solving sports problems by a mathematical apparatus and is of paramount importance for implementation in practice.

In this methodical manual, the main concept and statement are given and the main methods for their application in sports are indicated. The lists of basic reference words and word combinations, questions of control works, samples of test questions, as well as a list of tasks of independent work are listed. A list of glossary of basic reference words are given.

Methodological development covers such subjects of mathematics as: set theory, linear and vector algebra, differential and integral computation, functions of one variable, differential equations and also the method of calculating integrals and their applications.

This methodical instruction can be used in lecture, practical classes, as well as when doing independent work.

SO‘Z BOSHI

Mamlakatimiz mustaqillikka erishgach, ta’lim tizimini tubdan islohat qilishga katta ahamiyat berildi. “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”dagi eng asosiy vazifalaridan biri – yuksak ma’naviy va axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali mutaxassislar tayyorlashdan iboratdir. Bu vazifani amalga oshirishda o‘quv-tarbiya jarayoni uchun o‘quv adabiyotlarining yangi avlodini yaratish, uni yuqori sifatli o‘quv-uslubiy majmualar bilan ta’minlash muhim ahamiyatga ega ekanligi dasturda ta’kidlab o‘tilgan.

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamonaviy talablarga javob bera oladigan jismoniy tarbiya va sport sohasidagi kadrlar tayyorlashda ularga chuqur matematik bilimlar berish va bu bilimlarni sportga oid masalalarni yechishga tatbiq eta olishga o‘rgatish katta ahamiyatga ega. Shu sababli jismoniy tarbiya va sport yo‘nalishlari bo‘yicha ta’lim oluvchi bakalavrlarning o‘quv rejalarida “Sportda matematika” fanini o‘qitish ko‘zda tutilgan. Hozirgi davrda bu fanni o‘qitish alohida ahamiyatga ega bo‘lgani uchun oxirgi yillarda chet ellarda, jumladan, Rossiyada bu fan bo‘yicha juda ko‘p o‘quv-uslubiy adabiyotlar yaratilmoqda. Ulardan bir qismi kitobning adabiyotlar ro‘yxatida ko‘rsatilgan va bu ro‘yxatni Internet tizimi yordamida ancha kengaytirish mumkin.

Bu kitobda jismoniy tarbiya va sport sohasidagi kadrlar uchun “Sportda matematika” fanining namunaviy dasturida rejalashtirilgan barcha mavzular o‘z o‘rnini topgan. Bu mavzular jismoniy tarbiya va sport sohasi bo‘yicha bo‘lg‘usi mutaxassislar uchun zarur bo‘lgan matematikaning to‘plamlar nazariyasi, chiziqli algebra, vektorlar algebrasi, differensial va integral hisob, bir o‘zgaruvchili funksiyalar, differensial tenglamalar va integral kabi asosiy bo‘limlarini tashkil etadi.

Bu bo‘limlar bo‘yicha nazariy ma’lumotlarni yoritishda ikkita muammoni hal etish lozim bo‘ldi. Bir tomondan, ushbu kitob matematika bo‘yicha o‘quv adabiyoti bo‘lgani uchun undagi mavzularni iloji boricha to‘liq va izchil, yetarli darajadagi matematik qat’iylik va aniqlikda bayon etish talab qilinadi. Ikkinchi tomondan esa, bu kitob jismoniy tarbiya va sport yo‘nalishi bo‘yicha ta’lim olayotgan bakalavrlar uchun mo‘ljallanganligi tufayli undagi ayrim teorema va formulalarni isbotsiz keltirishni, matematika bo'yicha nazariy ma'lumotlarning sportga oid mazmuni va tatbiqlarini kengroq yoritishni taqozo etadi. Shu maqsadda berilayotgan tushuncha va tasdiqlarni ko'p sonli misollar va chizmalar orqali ham mustahkamlashga harakat qilindi. Yuqorida ko'rsatilgan muammolarni qanchalik darajada hal eta olganimizni baholash o'quvchiga havola qilinadi.

Hozirgi davrda talabalarning mustaqil ishiga katta e'tibor berilmoqda va shu sababli ayrim tasdiqlarning isbotlari talabalarga havola etilgan. Bundan tashqari, bir qator mavzular kengaytirilgan va nisbatan chuqurroq yoritilgan bo'lib, o'qituvchi ulardan talabalarning mustaqil ishini tashkil etish uchun foydalanishi mumkin. Deyarli har bir mavzu oxirida talabalar mustaqil ishi uchun n parametrga bog'liq topshiriqlar ham keltirilgan.

Har bir mavzu oxirida uning qisqacha mazmunini ifodalovchi xulosalar, unga doir tayanch iboralar va olingan bilimlarni tekshirish uchun savollar ro'yxati keltirilgan. Bundan tashqari, o'zbek tilidagi adabiyotlarda matematika bo'yicha testlar deyarli yoritilmaganligini hisobga olib, har bir mavzu bo'yicha testlardan namunalar keltirishni joiz deb hisobladik.

Ushbu kitob nihoyasida o'quvchilarga qulaylik yaratish maqsadida jismoniy tarbiya va sport sohasidagi kadrlar uchun "Sportda matematika" fani bo'yicha bizga ma'lum bo'lgan adabiyotlar ro'yxati va asosiy tayanch iboralarning izohli lug'ati o'z o'rnini topgan.

I BOB. SPORTDA MATEMATIKA FANIGA KIRISH. TO‘PLAMLAR NAZARIYASINING TUSHUNCHA VA ASOSLARI

Hozirgi zamon matematikasi tarkibiga cheksiz to‘plam tushunchasini kirishi uni tubdan revolyutsionlashtirdi.
Aleksandrov P.S.

REJA:

- Jismoniy tarbiya va sportda matematikaning o‘rni
- To‘plam haqida tushuncha
- To‘plam ustida amallar
- Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar

Tayanch iboralar: matematika, taraqqiyot davrlari, model, matematik model, to‘plam, to‘plam elementi, bo‘sh to‘plam, to‘plam qismi, to‘plamlar tengligi, chekli to‘plam, cheksiz to‘plam, aks ettirish, o‘zaro bir qiymatli moslik, ekvivalent to‘plamlar, to‘plam quvvati, sanoqli to‘plam, sanoqsiz to‘plam, kontinuum quvvatli to‘plam, to‘plamlar birlashmasi, to‘plamlar kesishmasi, to‘plamlar ayirmasi, universal to‘plam, to‘plam to‘ldiruvchisi, dekart ko‘paytma, kombinatorik masala, kombinatorika, qo‘shish qoidasi, ko‘paytirish qoidasi, o‘rin almashtirish, kombinatsiya, Nyuton binomi, o‘rinlashtirish.

1.. Jismoniy tarbiya va sportda matematikaning o‘rni

Hozirgi kunda amalda o‘z ijrosini namoyon etayotgan O‘zbekiston Konstitutsiyasi, qator qonunlar, jumladan, “Ta’lim to‘g‘risida”gi va “Jismoniy tarbiya va sport to‘g‘risida”gi qonunlar, Prezident farmonlari hamda Hukumat qarorlari mamlakatimizda jismoniy tarbiya va sport sohasini bozor munosabatlariga moslashtirish va uni rivojlantirish sur’atini jadallashtirishga qaratilgan moddiy-huquqiy imkoniyatlarini yaratib bermoqda.

Biz maktabdan boshlab tanishgan, endi esa uni o'rganishni davom ettirayotgan matematika eng qadimgi fanlardan biri bo'lib hisoblanadi. "Matematika" atamasi yunon tilidagi "matema" so'zidan olingan bo'lib, "bilim, fan" degan ma'noni bildiradi. "Matematika fani nimani o'rganadi?" degan savolga umumiy javob berish uchun juda ko'p matematik va faylasuflar harakat qilganlar. XX asrning buyuk matematigi, rus olimi akademik ***A.N.Kolmogorov*** (1903-1987) tomonidan 1954-yilda yozilgan va "Matematika" deb atalgan maqolada matematika quyidagicha ifodalanadi:

Ta'rif: Matematika haqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fandir.

Yuqorida ko'rsatilgan maqolada A.N.Kolmogorov matematika taraqqiyotini to'rt davrga ajratadi.

❖ ***Matematikaning shakllanish davri*** eramizdan oldingi VI-V asrgacha davom etdi. Bu davrda insoniyat turli predmetlarni sanashni o'rgandi va natijada natural son va ular uchun "katta", "kichik", "teng" tushunchalari paydo bo'ldi. Turli ko'rinishdagi ish qurollarini yasash, dehqonchilikda ekin maydonlari chegarasini o'tkazish, kulolchilikda har xil idishlar tayyorlash natijasida geometrik shakllar va jismlar tushunchalari shakllana boshlandi.

❖***Elementar matematika davri*** eramizdan oldingi V asrdan boshlab, XVII asr boshlarigacha davom etdi. Oldingi davrdagi matematik bilimlar tarqoq, xususiy ko'rinishdagi natijalardan, qonun-qoidalardan iborat edi. Ularni birlashtirish, umumiy ko'rinishga keltirish qadimgi Yunon davlatida boshlandi va eramizdan oldingi III asrlarda yunon olimi ***Evklid*** tomonidan uning "Negizlar" asarida matematika fanini ilmiy poydevoriga asos solindi.

Ko'rilayotgan davrning IX-XV asrlarida matematikaning rivojlanishiga O'rta Osiyo olimlarining hissasi katta bo'ldi. IX asrda yashab ijod etgan xorazmlik olim ***Muhammad ibn Muso al Xorazmiy*** birinchi bo'libm o'zining "Aljabr" asarida algebra faniga asos soldi. Yevropalik olimlar bu kitob orqali kvadrat tenglamalarni yechish usuli bilan tanishdilar. XV asrda buyuk astronom va matematik ***Mirzo Ulug'bek*** (1394-1449) o'zining "Ziji Kuragoniy" nomli asarida 1018 ta yulduzning koordinatalarini nihoyatda katta aniqlik bilan hisoblab berdi.

❖ ***Oliy matematika davri*** XVII asrdan boshlanib, XIX asrgacha davom etdi. Elementar matematikada kattaliklar va geometrik ob'yektlar qo'zg'almas, o'zgarmas miqdorlar kabi qaralar edi. Matematikada endi harakatlanuvchi va o'zgaruvchi miqdorlarni ko'rishga to'g'ri kela boshladi. Turli masalalarni yechishda ikki o'zgaruvchi miqdor orasidagi o'zaro bog'lanishni o'rganishga to'g'ri keldi va bunday bog'lanishlar funksiya tushunchasiga olib keldi. Nemis matematigi ***Leybnits*** 1682-1686- yillarda va ingliz matematigi, mexanigi ***Nyuton*** 1665-1666-yillarda amaliy masalalarni yechishning kuchli matematik quroli bo'lgan differensial va integral hisobni kashf etdilar.

❖ ***Hozirgi zamon matematikasi davri*** XIX asr boshidan hisoblanadi. Oldingi davrlarda matematika asosan, amaliy masalalarni yechish natijasida rivojlangan bo'lsa, endi matematika o'zining ichki qonuniyatlari bo'yicha ham rivojlana boshladi. Bu rivojlanish oldin topilgan tushunchalarni, natijalarni umumlashtirish, ularni mantiqiy jihatdan tugallanganligiga erishish, oldingi natijalarni hozirgi zamon yutuqlari asosida qayta ko'rib chiqish, tahlil etish kabi yo'nalishlarda amalga oshadi.

O'zbekistonda matematika fanining rivojlanishiga, o'zbek matematika maktabiga asos solishda akademik ***V.I.Romanovskiy*** (1879-1954) juda katta hissa qo'shdi. O'zbek matematika maktabining ilk qaldirg'ochi akademik ***T.N.Qori-Niyoziy*** (1897-1970) bo'lib hisoblanadi. Dunyoga tanilgan o'zbek olimlari, akademiklar ***T.A.Sarimsoqov*** (1915-1995), ***S.X.Sirojiddinov*** (1920-1988), ***N.Y.Sotimov*** (1939-2005), ***T.J.Jo'raev*** va ***T.A.Azlarov***lar hozirgi zamon matematikasiga salmoqli hissalarini qo'shdilar. Akademiklarimizdan M.S.Saloxitdinov, Sh.O.Alimov, Sh.A.Ayupov, Sh.Q.Farmonov, A.Sa'dullayev va boshqalar matematik fizika tenglamalari, funksional tahlil, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, matematik tahlil kabi yo'nalishlar bo'yicha juda katta kashfiyotlar qilib, O'zbekistonda matematika rivojlanishini davom ettirmoqdalar.

Hozirgi paytda matematik usullar qo'llanilmaydigan fan yoki sohani ko'rsatish juda qiyin. Bunga matematikaning quyidagi xususiyatlarini sabab qilib ko'rsatish mumkin.

➢ Matematika biror xulosani keltirib chiqarishda ma'lum bir qoidalardan hech qanday chetlashmaydi, ya'ni u izchillikka egadir.

➢ Matematikada xulosalar aksiomatik asosda keltirib chiqariladi. Bunda poydevor sifatida aksiomalarning ma'lum bir tizimi olinib, matematik tushuncha va natijalar unga asoslangan holda yaratiladi.

➢ Matematika ob'yektlarning real ma'nosi qanday bo'lishidan qat'iy nazar ularni abstraktlashtirgan, umumlashtirilgan holda qaraydi. Shu sababli olinadigan natijalar ham umumiy xususiyatga ega bo'ladi.

Tarixan matematika dastlab astronomiya va mexanika, fizika, elektrotexnika kabi texnik fanlarga tatbiq qilingan bo'lsa, XIX asr boshlarida iqtisodiy masalalar ham matematik usullar yordamida o'rganila boshlandi. Xalq xo'jaligini matematika yordamida tadqiqot etish jahonda birinchi marta farang olimi F.Kane tomonidan amalga oshirildi. Uning asari tarixga "Iqtisodiy jadval" nomi bilan kirdi. Bu jadval asosida F.Kane ishlab chiqarishni, mahsulot almashtirish va taqsimlashning juda ko'p xususiyatlarini xalq xo'jaligi nuqtai nazaridan umumlashtirishga muvaffaq bo'ldi. Hisoblash texnikasining paydo bo'lishi bilan matematikaning tatbiqlar doirasi va imkoniyatlari keskin kengaydi.

Qolaversa, bugungi kunda sportga oid masalalarni matematiklashtirish tez sur'atlar bilan rivojlanmoqda. Bunga sabab shuki, sportga oid jarayonlar juda murakkabdir va shuning uchun ularni aniq usullardan foydalanmasdan turib tahlil qilib bo'lmaydi. Bundan tashqari, sportga oid masalalarda ko'pincha sonli parametrlar bilan ish ko'riladi, bu esa matematik usullardan foydalanishga qulaylik yaratadi. Ammo hozirgi kunda ham sportga oid ayrim masalalar o'zining matematik yechimini kutmoqda, chunki hozircha sportning ehtiyojlari matematikaning imkoniyatlaridan ortiqroqdir.

Sportda matematika fanining o'qitilishida – talabalarni matematikaning zaruriy ma'lumotlari majmuasi (tushunchalar, tasdiqlar va ularning isboti, amaliy masalalarni yechish usullari va boshqalar) bilan tanishtirish hamda sport yo'nalishlarini matematika bilan uzviy bog'liqliklarini o'rganishdan iboratdir. Ayni paytda, u talabalarni mantiqiy fikrlashga, to'g'ri xulosa chiqarishga, matematik madaniyatini oshirishga xizmat qiladi.

Oliy ta'limning Davlat ta'lim standartlariga ko'ra, "***Sportda matematika***" fani talabalarda jismoniy tarbiya va sportda matematik hisoblashlarni bajarish bo'yicha bilim, malaka va ko'nikmalarni tizimli shakllantirishga yo'naltirilgan. Talabalarni mantiqiy fikrlashga, nazariy bilimlarni amaliyotga bevosita tatbiq etishga, to'g'ri xulosa chiqarish va qaror qabul qilishga o'rgatish mazkur fanning asosiy vazifalaridan hisoblanadi.

"***Sportda matematika***" fanining o'qitilishidan maqsad – talabalarni matematikaning zaruriy ma'lumotlari majmuasi (tushunchalar, tasdiqlar va ularning isboti, amaliy masalalarni yechish usullari va boshqalar) bilan tanishtirish hamda sport yo'nalishlarining matematika bilan uzviy bog'liqliklarini o'rgatishdan iboratdir. Ayni paytda, u talabalarni mantiqiy fikrlashga, to'g'ri xulosa chiqarishga, matematik madaniyatini oshirishga xizmat qiladi.

Jismoniy tarbiya va sport ta'limida matematikani o'qitishning vazifasi – hozirgi zamon bozor iqtisodiyoti sharoitlarini hisobga olgan holda har bir jamiyat a'zosining jismoniy va mehnat faoliyati va kundalik hayoti uchun zarur bo'lgan matematik bilim, ko'nikma va malakalarni berish, shuningdek, talabalarning hayotiy tasavvurlari bilan amaliy faoliyatlarini umumlashtirib borib, matematik tushuncha va munosabatlarni ular tomonidan ongli o'zlashtirishlariga hamda hayotga tatbiq eta olishga intilish, talabalarda izchil mantiqiy fikrlashni shakllantirib borish natijasida ularning aql-zakovati rivojiga, tabiat va jamiyatdagi muammolarni hal etishning maqbul yo'llarini topa olishlariga ko'maklashish, umuminsoniy madaniyatning tarkibiy qismi sifatida matematika to'g'risidagi tasavvurlarni shakllantirishdan iborat.

Mazkur fan jismoniy tarbiya va sport faoliyati mashg'ulotlarini to'g'ri taqsimlashda va matematik tahlil qilishda zarur bo'ladigan bilim, malaka va ko'nikmalarni shakllantirishda muhim ahamiyatga ega. Jumladan, bo'lajak o'qituvchi va murabbiylar sportchilarning jismoniy tayyorgarlik va natijalarning murakkab tomonlarini aniqlash yo'llarini, ularga ta'sir ko'rsatadigan turli omillarni baholash, o'qitish va mashq jarayonlarining sonli ma'lumotlarini aniqlash, hisob-kitob qilish va tahlil qilish malakasi va ko'nikmalarini egallashlari talab qilinadi.

Matematikaning amaliy tatbiqlarida model tushunchasi muhim ahamiyatga ega. Inson hamma vaqt biror jarayon, hodisa yoki ob'yektni o'rganishda uning u yoki bu ko'rinishdagi modelidan foydalaniladi. Masalan, Yer uning modeli bo'lmish globus, turli mashina va qurilmalar ularning maketlari yordamida aks ettirilishi mumkin. Model tushunchasi juda keng va turli ma'nolarga ega. Jumladan, unga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

Ta'rif: O'rganilayotgan ob'yektning ma'lum bir muhim xususiyatlarini ifodalovchi moddiy yoki ideal ko'rinishdagi qurilma ***model*** deb ataladi.

- Moddiy modellarga misol sifatida turli ob'yektlarning maketlarini, tasvirlarini va turli mexanik, elektron qurilmalarni ko'rsatish mumkin. Ideal modellarga misol sifatida ob'yektlarni turli matematik belgi va ifodalar, tushunchalar orqali ifodalashni ko'rsatish mumkin. Bular ***matematik modellar*** bo'lib hisoblanadi. Matematik modellarda turli munosabatlar tenglamalar, tengsizliklar va hokazolar orqali ifodalanadi.

Modelda qaralayotgan ob'yektning faqat o'rganilayotgan xususiyatlari aks ettiriladi, ya'ni model ob'yektning barcha jihatlarini ifodalashi shart emas. Modellar bevosita kuzatib bo'lmaydigan ob'yekt va jarayonlarni o'rganishda keng qo'llaniladi.

O'rganilayotgan jarayonning modeli tuzilgach, uning yordamida ma'lum bir natijalar olinadi. Agar bu natijalar real natijalar bilan solishtirilganda, ular orasida qoniqarli darajada yaqinlik kuzatilmasa, tuzilgan modelni takomillashtirish yoki butunlay boshqa bir modelni tuzishga o'tiladi.

Sportga oid masalani matematik modellar yordamida yechishni shartli ravishda quyidagi besh bosqichga ajratish mumkin.

✓Masalani qo'yilishi, ya'ni tadqiqotning mazmuni va maqsadini aniqlash;

✓Masalaning matematik modelini yaratish, ya'ni qaralayotgan ob'yekt yoki jarayonning o'rganilayotgan belgilarini ajratib olib, ular orasidagi munosabatlarni matematik ifodalash;

✓Tuzilgan modelga asoslangan holda izlangan yechimni topish va uni haqiqatga yaqinligini, sifatini tekshirish;

✓Model va undan hosil qilingan yechim haqiqatga yetarli darajada yaqin bo'lmasa, modelni takomillashtirish yoki yangilash;

✓Olingan yechimni amalga oshirish, hayotga tatbiq etish.

Sportga oid matematik modellar yordamida ob'yektning muhim tarkibiy qismlarini aniqlash, ayrim ko'rsatkichlarning optimal qiymatlarini topish, kelgusidagi holatni bashorat etish kabi masalalarni yechish mumkin.

Matematik modellarning o'ziga xos xususiyati shundan iboratki, unda sport tajribalari o'tkazish, turli g'oyalarni tekshirish real hayotda emas, balki modellarda amalga oshiriladi. Hozirgi davrda bu modellar kompyuterlar yordamida tahlil etilib, minglab variantlar orasidan eng yaxshisi tanlanadi.

1.2. To'plam haqida tushuncha

To'plamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarning asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879-1884-yillarda nemis matematigi ***Georg Kantor*** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. ***To'plam*** matematikaning poydevorida yotgan boshlang'ich tushunchalardan biri bo'lgani uchun u ta'rifsiz qabul etiladi. To'plam deyilganda biror bir xususiyati bo'yicha umumiylikga ega bo'lgan ob'yektlar majmuasi tushuniladi. Masalan, I kurs talabalari to'plami, futbol maydonidagi o'yinchilar to'plami, [0;1] kesmadagi nuqtalar to'plami, natural sonlar to'plami, firma xodimlari to'plami, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar to'plami va hokazo. Matematikada to'plamlar A,B,C,D,... kabi bosh harflar bilan belgilanadi. A,B,C,D,... to'plamlarga kiruvchi ob'yektlar ularning ***elementlari*** deyiladi va odatda, mos ravishda kichik $a,b,c,d,\ldots$ kabi harflar bilan belgilanadi. Bunda «a element A to'plamga tegishli (tegishli emas)» degan tasdiq $a\in$A ($a\notin$A) kabi yoziladi.

Ta'rif: Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam ***bo'sh to'plam*** deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

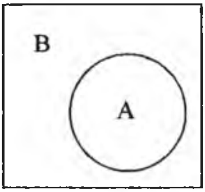
Masalan, {sin$x$=2 tenglamaning yechimlari}$=\varnothing$, {perimetri 0 bo'lgan kvadratlar}$=\varnothing$, {kvadrati manfiy bo'lgan haqiqiy sonlar}$=\varnothing$.

Algebrada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to'plamlar nazariyasida $\varnothing$ to'plam shunga o'xshash vazifani bajaradi.

Ta'rif: Agar A to'plamga tegishli har bir a element boshqa bir B to'plamga ham tegishli bo'lsa ($a\in$A $\Rightarrow$ $a\in$B), u holda A to'plam B ***to'plamining qismi*** deyiladi va A$\subset$B (yoki B$\supset$A) kabi belgilanadi.

Quyidagi 1-rasmda B kvadratdagi, A esa uning ichida joylashgan doiradagi nuqtalar to'plamini ifodalasa, unda A$\subset$B bo'ladi.

1-rasm



Masalan, "Bunyodkor" futbol klubida to'p suradigan futbolchilar to'plamini A, mamlakatdagi barcha futbolchilar to'plamini esa B deb olsak, unda A⊂B bo'ladi.

Ta'rifdan ixtiyoriy A to'plam uchun A⊂A va ∅⊂A tasdiqlar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Shu sababli to'plamlar uchun ⊂ belgisi sonlar uchun ≤ belgiga o'xshash ma'noga egadir.

Ta'rif: Agarda A va B to'plamlar uchun A⊂B va B⊂A shartlar bir paytda bajarilsa, bu to'plamlar ***teng*** deyiladi va A=B kabi yoziladi.

Masalan, A={–1;1} va B={x^2–1=0 tenglama ildizlari}, C={badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar} va D={alfavitdagi harflar} to'plamlari uchun A=B, C=D bo'ladi[1].

Chekli to'plamlar. To'plamlar nazariyasida barcha to'plamlar chekli va cheksiz to'plamlarga ajratiladi. Bu to'plamlarni ta'riflash uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

Ta'rif: Agar A va B to'plamlar berilgan bo'lib, har bir a∈A elementga biror f qonun-qoida asosida bitta va faqat bitta b∈B element mos qo'yilgan bo'lsa (a→b), A to'plam B to'plamga ***aks ettirilgan*** deyiladi va f: A → B kabi ifodalanadi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ akslantirishda X=(–∞, ∞) haqiqiy sonlar to'plami Y=[–1, 1] kesmaga (f: X → Y), $g(x)=x^3$ akslantirishda esa X=(–∞, ∞) to'plamni o'ziga (g: X → X) akslantiriladi.

Ta'rif: Agar f : X → Y akslantirish berilgan bo'lsa, Y to'plamning $y=f(x)$ elementi X to'plamning x elementining ***tasviri***, x esa y elementning ***asli*** deyiladi.

Ta'rif: Agar f : X → Y akslantirishda har bir y∈Y tasvirga uning faqat bitta x∈X asli mos kelsa (buni x⇔y kabi ifodalaymiz), bu akslantirish X va Y to'plamlar orasidagi ***o'zaro bir qiymatli moslik*** deyiladi.

---

[1] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. P. – 175.

Masalan, $f(x)=\sin x$: X=(–∞, ∞) → Y=[–1, 1] akslantirish o'zaro bir qiymatli moslik bo'lmaydi, chunki $y=\sin x, y\in[-1,1]$, tenglama X=(–∞, ∞) haqiqiy sonlar to'plamida cheksiz ko'p yechimga egadir. $g(x)=x^3$: X → X akslantirish esa o'zaro bir qiymatli moslikdir, chunki $y=x^3$ tenglama X=(–∞, ∞) haqiqiy sonlar to'plamida faqat bitta yechimga egadir.

Ta'rif: Agar A to'plamning elementlari bilan natural sonlar to'plami N ning dastlabki biror *m* ta elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatib bo'lsa, unda A ***chekli to'plam*** deyiladi.

Masalan, A={Yer yuzidagi barcha odamlar}, B={Kitobdagi varaqlar}, C={Sport zalidagi snaryadlar}, D={Futbol federatsiyasidagi a'zolar} kabi to'plamlar chekli bo'ladi.

Ba'zi hollarda chekli to'plamdagi elementlar sonini aniq ko'rsatib bo'ladi, ba'zi hollarda esa, bu sonni aniq ko'rsatib bo'lmaydi. Masalan, A={O'zbekistondagi viloyatlar} to'plami chekli va uning elementlari soni m(A)=12 deb ko'rsatish mumkin. Ammo B={Yer yuzidagi barcha daraxtlar} to'plami ham chekli bo'lsada, undagi elementlar soni m(B) ni aniq ko'rsata olmaymiz.

Umumiy holda chekli A to'plamning elementlar soni m(A)=*m* bo'lsa, bu to'plamni A={$a_1, a_2, \ldots, a_m$} ko'rinishda yozish mumkin[2].

Teorema: Agarda chekli A va B to'plamlarning elementlari soni mos ravishda m(A) va m(B) bo'lsa, unda ularning birlashmasi $A\cup B$ va kesishmasi $A\cap B$ elementlarining soni o'zaro

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$$

tenglik bilan bog'langan.

Isbot: Faqat A yoki B to'plamga tegishli elementlar sonini m_A yoki m_B deb belgilaymiz. Faqat A to'plamga tegishli elementlar undagi barcha elementlar orasidan uning B to'plamga kiradigan elementlarini chiqarib tashlashdan hosil bo'ladi va shu sababli $m_A=m(A)-m(A\cap B)$ tenglikni yoza olamiz. Xuddi shunday $m_B=m(B)-m(A\cap B)$ bo'ladi. $A\cup B$ to'plamdagi elementlar faqat A to'plamga, faqat B to'plamga va ularning ikkalasiga ham, ya'ni $A\cap B$ to'plamga tegishli elementlardan tashkil topadi. Demak,

---

[2] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. P. – 176.

$$m(A\cup B)=m_A+m_B+m(A\cap B)=[m(A)-m(A\cap B)]+[m(B)-m(A\cap B)]+$$
$$+m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$$

Masala: Futbol akademiyasi tarbiyalanuvchilaridan 300 nafarining sifati tekshirildi. Bunda futbolchi oliy toifali, I toifali, II toifali yoki sifatsiz bo'lishi mumkin deb hisoblanadi. Tekshiruv natijalaridan 270 nafar futbolchi sifatli va 150 nafar futbolchi oliy toifali emasligi ma'lum. I va II toifali futbolchilarning umumiy sonini toping.

Yechish: Tekshiruvda sifatli deb topilgan futbolchilarning to'plamini A, oliy toifali bo'lmagan futbolchilarning to'plamini B kabi belgilaymiz. Masala shartiga asosan, $m(A)=270$ va $m(B)=150$ ekanligi ma'lum. To'plamlar birlashmasi ta'rifiga asosan, $A\cup B$ futbol akademiyasi tarbiyalanuvchilari to'plamini ifodalaydi, shu sababli $m(A\cup B)=300$ bo'ladi. To'plamlar kesishmasi ta'rifiga asosan, $A\cap B$ tekshiruv natijasida sifatli va oliy toifali bo'lmagan, ya'ni I yoki II toifali deb baholangan futbolchilar to'plamini ifodalaydi. Unda, yuqorida isbotlangan formuladan foydalanib, masala javobini quyidagicha topamiz:

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)\Rightarrow m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cup B)=$$
$$=270+150-300=120.$$

Demak, I va II toifali futbolchilarning umumiy soni 120 nafar ekan.

Cheksiz to'plamlar. Endi cheksiz to'plam tushunchasini kiritamiz va u bilan bog'liq tasdiqlar bilan tanishamiz.

Ta'rif: Chekli bo'lmagan A to'plam ***cheksiz to'plam*** deyiladi.

Masalan, natural sonlar to'plami $N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$, Q={Ratsional sonlar}, A={[0;1] kesmadagi nuqtalar}, B={$\sin x=a$ ($|a|\leq 1$) tenglama ildizlari} va D={Tekislikdagi barcha to'g'ri chiziqlar} kabi to'plamlar cheksiz bo'ladi.

A va B chekli to'plamlarni ularning elementlari soni m(A) va m(B) bo'yicha $m(A)>m(B)$, $m(A)=m(B)$, $m(A)<m(B)$ munosabatlarning biri bilan o'zaro taqqoslash mumkin. Bunda chekli to'plamlarni ikki xil usulda taqqoslash mumkin.

1-usul: A va B to'plamdagi elementlar soni m(A) va m(B) bevosita sanash orqali topiladi va so'ngra ular o'zaro taqqoslanadi.

2-usul: Har bir $a \in A$ elementga bitta va faqat bitta $b \in B$ elementini mos qo'yamiz. Agar bu mos qo'yishda A to'plamdagi elementlar ortib qolsa (ya'ni, bir qancha $a \in A$ elementlarga B to'plamda ularga mos qo'yiladigan elementlar yetmay qolsa), unda $m(A)>m(B)$ va aksincha, B to'plamning elementlari ortib qolsa, $m(A)<m(B)$ bo'ladi. Uchinchi holda A to'plamda ham, B to'plamda ham elementlar ortib qolmaydi va bunda $m(A)=m(B)$ bo'ladi.

Masalan, A={Viloyatdagi sport maktablari}, B={Viloyatdagi murabbiylar} to'plamlarni ulardagi sport maktablari va murabbiylar sonini sanamasdan, 2-usulda taqqoslaymiz. Buning uchun har bir sport maktabiga bittadan murabbiyni jo'natamiz. Agar bir qism sport maktablariga jo'natish uchun murabbiylar yetmay qolsa, unda $m(A)>m(B)$; hamma sport maktablariga murabbiylar jo'natilib, ularning bir qismi ortib qolgan bo'lsa, unda $m(A)<m(B)$; hamma sport maktablariga murabbiylar jo'natilib, boshqa murabbiy qolmagan bo'lsa, unda $m(A)=m(B)$ bo'ladi.

Har qanday chekli A to'plamning elementlar soni har qanday cheksiz B to'plamdagi elementlar sonidan kichik ekanligi tushunarli. Endi A va B cheksiz to'plamlar bo'lsin. Bu holda ularni elementlari soni bo'yicha o'zaro taqqoslash masalasi paydo bo'ladi. Bunda A va B cheksiz to'plamlar bo'lgani uchun bu masalani 1-usul bilan hal qilib bo'lmaydi. Ammo 2-usul bilan cheksiz to'plamlarni o'zaro taqqoslash mumkin. Buning uchun to'plamlarning ekvivalentligi tushunchasidan foydalanamiz.

Ta'rif: Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatib bo'lsa, bu to'plamlar ***ekvivalent*** deyiladi va $A \sim B$ kabi belgilanadi.

Masalan, A={toq sonlar}, B={juft sonlar} bo'lsin. Unda $A \ni 2n-1 \Leftrightarrow 2n \in B$, ya'ni $1 \Leftrightarrow 2$, $3 \Leftrightarrow 4$, $5 \Leftrightarrow 6$, $\cdots$, $2n-1 \Leftrightarrow 2n$, $\cdots$ ko'rinishda A va B to'plam elementlari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin va shu sababli $A \sim B$ bo'ladi. Demak, A va B to'plamlar ekvivalent, ya'ni $A \sim B$ bo'lsa, ularni elementlar soni bo'yicha bir xil deb qarash mumkin.

Teorema: Agarda $A \sim B$, $B \sim C$ bo'lsa, unda $A \sim C$ bo'ladi.

Isbot: $A \sim B$ bo'lgani uchun $A \ni a \Leftrightarrow b \in B$ va $B \sim C$ bo'lgani uchun $B \ni b \Leftrightarrow c \in C$. Unda $A \ni a \Leftrightarrow c \in C$ desak, A va C to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi, ya'ni $A \sim C$ bo'ladi.

Ta'rif: Agar A~B bo'lsa, ular ***teng quvvatli*** to'plamlar deb ataladi.

Chekli A va B to'plamlarning quvvati ulardagi elementlar soni m(A) va m(B) kabi aniqlanadi. Shu sababli chekli A va B to'plamlar ekvivalent, ya'ni teng quvvatli bo'lishi uchun ularning elementlari soni m(A)=m(B) shartni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.

Cheksiz to'plamlar ichida eng "kichligi" natural sonlar to'plami

$$N=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$$

bo'lib hisoblanadi.

Ta'rif: Natural sonlar to'plami N va unga ekvivalent barcha cheksiz to'plamlar ***sanoqli to'plam*** deyiladi.

Agarda A sanoqli to'plam bo'lsa, uning elementlarini natural sonlar yordamida belgilab (nomerlab) chiqish mumkin, ya'ni A=$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ deb yozish mumkin.

Endi sanoqli to'plamlarga misollar keltiramiz.

1) Z={butun sonlar}=$\{\cdots, -2,-1,0,1,2, \cdots\}$ sanoqli to'plam bo'ladi. Bunga $Z\ni n\Leftrightarrow 2n+1\in$N, agar $n\geq 0$ bo'lsa va $Z\ni n\Leftrightarrow 2|n|\in$N, agar $n<0$ bo'lsa, ya'ni nomanfiy butun sonlarga toq natural sonlarni, manfiy butun sonlarga esa juft natural sonlarni mos qo'yish bilan ishonch hosil qilish mumkin[3]. Bunda N$\subset$Z bo'lsada N~Z ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

2) A={juft sonlar}=$\{2,4,6,8, \cdots, 2n, \cdots\}$~N. Bunga A$\ni 2n \Leftrightarrow n\in$N o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish orqali ishonch hosil etish mumkin.

Sanoqli to'plamlar quyidagi xossalarga ega bo'lishini ko'rsatish mumkin:

I. Har qanday sanoqli to'plamning qism to'plami chekli yoki sanoqli bo'ladi.

II. Sanoqli va chekli to'plam birlashmasi sanoqli to'plam bo'ladi.

III. Chekli yoki sanoqli sondagi sanoqli to'plamlar birlashmasi sanoqlidir.

IV. Barcha sanoqli to'plamlar o'zaro ekvivalent bo'ladi.

Oxirgi tasdiqdan barcha sanoqli to'plamlar bir xil quvvatga ega ekanligi kelib chiqadi.

Teorema: Ratsional sonlar to'plami Q sanoqli.

---

[3] Естественно-научные основы физической культуры и спорта: учебник / под ред. А.В.Самсоновой, Р.Б.Цаллаговой. – М.: Советский спорт, 2014. – С. 8.

Isbot: Q^+ va Q^- orqali mos ravishda musbat va manfiy ratsional sonlar to'plamini belgilab, $Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ deb yozish mumkin. Bunda $Q^+ \ni r \Leftrightarrow -r \in Q^-$ deb, $Q^+ \sim Q^-$ ekanligini ko'ramiz. Shu sababli, II va III xossalarga asosan, Q^+ to'plamni sanoqli ekanligini ko'rsatish kifoya. Har qanday $r \in Q^+$ ratsional sonni $r=p/q$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda p va q – natural sonlar bo'lib, ularni o'zaro tub deb hisoblash mumkin. $r=p/q$ sonning balandligi deb $h=|p|+q$ songa aytiladi. Balandligi $h=m\geq 2$ bo'lgan ratsional sonlar cheklita va ularni balandligi oshib borishi bo'yicha birin-ketin nomerlab chiqish mumkin. Masalan, balandligi $h=2$ bo'lgan bitta ratsional sonni $r_1=1/1=1$, $h=3$ bo'lgan ikkita ratsional sonlarni $r_2=1/2$ va $r_3=2/1$, $h=2$, $h=4$ bo'lgan ratsional sonlarni $r_4=1/3$ va $r_5=3/1=3$ kabi nomerlaymiz. Demak, har bir musbat ratsional sonni r_n, $n \in N$, kabi belgilab chiqish mumkin va shu sababli $Q^+ \sim N$ bo'ladi[4].

Sanoqsiz to'plamlar. Har qanday cheksiz to'plam sanoqli bo'lavermaydi.

Ta'rif: Sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plam ***sanoqsiz to'plam*** deb aytiladi.

Ushbu teorema sanoqsiz to'plamlar mavjudligini ko'rsatadi.

Teorema: [0,1] kesmaga tegishli barcha nuqtalar (haqiqiy sonlar) to'plami sanoqsizdir.

Teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Ta'rif: [0,1] kesma va unga ekvivalent barcha to'plamlar ***kontinuum*** quvvatli deyiladi.

Ixtiyoriy a, b ($b>a$) haqiqiy sonlar uchun $[a,b] \sim [0,1]$, ya'ni ixtiyoriy kesmadagi nuqtalar (haqiqiy sonlar) kontinuum quvvatli sanoqsiz to'plam bo'ladi. Bunga $y=a+(b-a)x$ ($y\in[a,b]$, $x\in[0,1]$) o'zaro bir qiymatli akslantirish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

Natija: Ixtiyoriy ikkita $[a,b]$ va $[c,d]$ kesmalar ekvivalent, ya'ni $[a,b] \sim [c,d]$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, yuqorida ko'rsatilganga asosan, $[a,b] \sim [0,1]$ va $[c,d] \sim [0,1]$. Bu yerdan, 1-teoremaga asosan, $[a,b] \sim [c,d]$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda ixtiyoriy chekli yoki cheksiz oraliq $(a,b) \sim [0,1]$, ya'ni kontinuum quvvatli sanoqsiz to'plam bo'lishini isbotlash

---

[4] Ion Goian, Raisa Grigor, Vasile Marin, Florentin Smarandache. Algebraic problems and exercises for high school. – USA: The Educational Publisher Columbus, 2015. – P. 11.

mumkin. Jumladan, barcha haqiqiy sonlar to'plami R=(–∞, ∞) kontinuum quvvatli sanoqsiz to'plam bo'ladi.

Har qanday chekli to'plamning quvvati sanoqli to'plam quvvatidan kichik, o'z navbatida, sanoqli to'plam quvvati kontinium quvvatidan kichikdir. Unda quvvati kontiniumdan katta to'plamni mavjud yoki mavjud emasligini aniqlash masalasi paydo bo'ladi. Bu masala o'z yechimini quyidagi teorema orqali topadi.

Teorema: A to'plam quvvati m(A) bo'lsin. U holda A to'plamning barcha qism to'plamlaridan iborat B to'plam quvvati m(B)>m(A) bo'ladi.

Bu teoremadan quvvati eng katta bo'lgan cheksiz to'plam mavjud emasligi kelib chiqadi. Jumladan, quvvati kontiniumdan katta bo'lgan sanoqsiz to'plamlar mavjud.

Agar A va B cheksiz to'plamlar quvvati m(A) va m(B) bo'lsa, bu yerda yoki m(A)=m(B) yoki m(A)<m(B) yoki m(A)>m(B) munosabatlardan biri o'rinli bo'ladi. Bunda m(A)=m(B) tenglik A~B ekanligini bildiradi. m(A)>m(B) yozuv A to'plamning biror qismi B to'plamga ekvivalent, ammo B to'plamda A to'plamga ekvivalent qism yo'qligini bildiradi.

1.3. To'plam ustida amallar

Algebrada a va b sonlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallari kiritilgan bo'lib, ular

$a+b=b+a$ va $ab=ba$ (kommutativlik, ya'ni o'rin almashtirish),

$a+(b+c)=(a+b)+c$ va $a(bc)=(ab)c$ (assotsiativlik, ya'ni guruhlash),

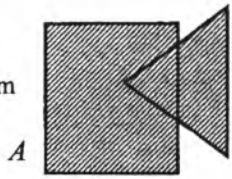
$a(b+c)=ab+ac$ (distributivlik, ya'ni taqsimot)

qonunlariga bo'ysunadilar. Bulardan tashqari, har qanday a soni uchun $a+0=a$ va $a*0=0$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi[5].

Endi to'plamlar ustida algebralik amallar kiritamiz.

Ta'rif: A va B to'plamlarning ***birlashmasi (yig'indisi)*** deb shunday C to'plamga aytiladiki, u A va B to'plamlardan kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan bo'ladi va A∪B kabi belgilanadi.

[5] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 178.



2-rasm

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to'plamidan iborat bo'lsa, unda ularning birlashmasi $A \cup B$ quyidagi 2-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi.

Shunday qilib $A \cup B$ to'plam yoki A to'plamga, yoki B to'plamga, yoki A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli elementlardan iboratdir.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo'lsa $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$, C={I razryadli sportchilar} va D={II razryadli sportchilar} bo'lsa, unda $C \cup D$={I yoki II razryadli sportchilar} to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarni birlashtirish amali, sonlarni qo'shish amali singari,

$A \cup B = B \cup A$ (kommutativlik),

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (assotsiativlik)

qonunlarga bo'ysunadi. Bulardan tashqari, $A \cup \varnothing = A$ va sonlardan farqli ravishda $A \cup A = A$, $B \subset A$ bo'lsa, $A \cup B = A$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi. Bu tasdiqlarning barchasi to'plamlar tengligi ta'rifidan foydalanib isbotlanadi. Misol sifatida oxirgi tenglikni isbotlaymiz:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ yoki } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A \cup B) \subset A;$$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \subset (A \cup B)$$

Demak, $(A \cup B) \subset A$, $A \subset (A \cup B)$ va ta'rifga asosan, $A \cup B = A$.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ to'plamlarning yig'indisi

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_p = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va ulardan kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlar to'plami sifatida aniqlanadi[6].

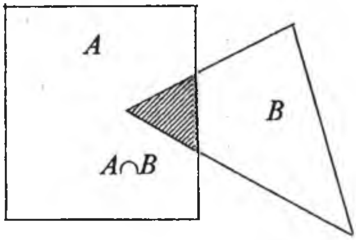
---

[6] Rajabov F., Masharipova S., Madrahimov R. Oliy matematika. O'quv qo'llanma. – T.: Turon-Iqbol, 2007. – B. 119.

__Ta'rif:__ A va B to'plamlarning ***kesishmasi (ko'paytmasi)*** deb shunday C to'plamga aytiladiki, u A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan bo'ladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning $A \cap B$ kesishmasi 3-rasmdagi shtrixlangan soha kabi ifodalanadi:

3-rasm



Shunday qilib $A \cap B$ to'plam A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan bo'ladi. Shu sababli agar ular umumiy elementlarga ega bo'lmasa, ya'ni kesishmasa, unda $A \cap B = \varnothing$ bo'ladi.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo'lsa $A \cap B=\{2,4\}$, C={Futbol bo'yicha O'zbekiston terma jamoa a'zolari} va D={O'zbekiston davlat jismoniy tarbiya instituti talabalari} bo'lsa, unda $C \cap D$={O'zbekiston davlat jismoniy tarbiya institutida o'qiyotgan futbol bo'yicha O'zbekiston terma jamoa a'zolari} to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarni kesihmasi amali quyidagi qonunlarga bo'ysunadi:

$A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik),

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiativlik),

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivlik)

Shu bilan birga, $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$ va $B \subset A$ bo'lsa $A \cap B = B$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi. Bu tasdiqlarning o'rinli ekanligiga yuqorida ko'rsatilgan usulda ishonch hosil etish mumkin[7].

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ to'plamlarning kesishmasi

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

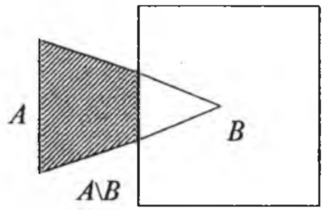
[7] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 179.

kabi belgilanadi va barcha A_k (k=1,2, ⋯, n) to'plamlarga tegishli bo'lgan umumiy elementlardan tuzilgan to'plam kabi aniqlanadi.

Ta'rif: A va B to'plamlarning ***ayirmasi*** deb A to'plamga tegishli, ammo B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va A\B kabi belgilanadi.

Agar A uchburchakdagi, B esa kvadratdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning A\B ayirmasi 4-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi:

4-rasm



Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={1,3,7,9} bo'lsa, unda A\B={2,4,5}, B\A={7,9}; C={Futbol akademiyasida tarbiyalanayotgan futbolchilar} va D={Sifatli futbolchilar} bo'lsa, C\D={Futbol akademiyasida tarbiyalanayotgan sifatsiz futbolchilar}.

Demak, A\B to'plam A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan hosil bo'ladi. To'plamlar ayirmasi uchun

$$A \setminus A = \varnothing,\ A \setminus \varnothing = A,\ \varnothing \setminus A = \varnothing$$

va $A \subset B$ bo'lsa $A \setminus B = \varnothing$ munosabatlar o'rinlidir.

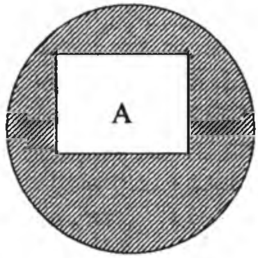
Ta'rif: Agar ko'rilayotgan barcha to'plamlarni biror Ω to'plamning qism to'plamlari kabi qarash mumkin bo'lsa, unda Ω ***universal to'plam*** deb ataladi[8].

Masalan, sonlar bilan bog'liq barcha to'plamlar uchun $\Omega=(-\infty, \infty)$, insonlardan iborat to'plamlar uchun Ω={Barcha odamlar} universal to'plam bo'ladi.

Ta'rif: Agar A to'plam Ω universal to'plamning qismi bo'lsa, unda $\Omega \setminus A$ to'plam ***A to'plamning to'ldiruvchisi*** deb ataladi va C(A) kabi belgilanadi.

[8] Ion Goian, Raisa Grigor, Vasile Marin, Florentin Smarandache. Algebraic problems and exercises for high school. – USA: The Educational Publisher Columbus, 2015. – P. 17.

5-rasm



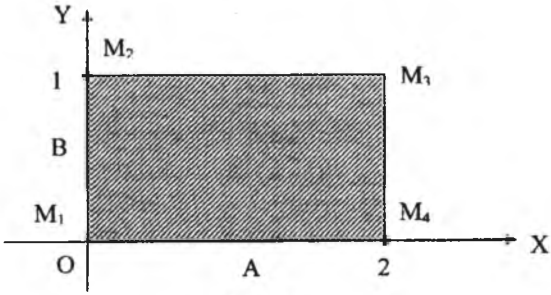
C(A)

Agar yuqoridagi chizmada Ω universal to'plam doiradagi, A to'plam esa uning ichida joylashgan to'g'ri to'rtburchakdagi nuqtalardan iborat bo'lsa, uning to'ldiruvchisi C(A) 5-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi.

Demak, C(A) to'plam A to'plamga kirmaydigan elementlardan tashkil topgan bo'ladi, ya'ni $x \in A \Rightarrow x \notin C(A)$, $x \notin A \Rightarrow x \in C(A)$[9].

Masalan, Ω={Barcha sportchilar}, A={Natijaga erishgan sportchilar} bo'lsa, unda C(A)={Natijaga erishmagan sportchilar} to'plami bo'ladi; $\Omega=\{1,2,3, \cdots, n, \cdots\}$ – natural sonlar to'plami, $A=\{2,4,6, \cdots, 2n, \cdots\}$ – juft sonlar to'plami, $B=\{5,6,7, \cdots, n, \cdots\}$ – 4dan katta natural sonlar to'plami bo'lsa, unda $C(A)=\{1,3,5, \cdots, 2n-1, \cdots\}$ – toq sonlar, $C(B)=\{1,2,3,4\}$ – 5 dan kichik natural sonlar to'plamlarini ifodalaydi.

Ta'rif: A va B to'plamlarning ***Dekart ko'paytmasi*** deb A×B kabi belgilanadigan va (x, u) ($x \in$A, $u \in$B) ko'rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to'plamga aytiladi.



6-rasm.

[9] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 181.

Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] bo‘lsa, A×B to‘plam tekislikdagi (x,y) $(x \in A=[0,2]$, $y \in B=[0,1])$ nuqtalardan, ya’ni uchlari $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(2,1)$ va $M_4(2,0)$ nuqtalarda joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat bo‘ladi (6-rasm).

Agar C={Tajribali o‘yinchilar} va D={Yosh o‘yinchilar} bo‘lsa, unda C×D tajribali va yosh ishchidan iborat bo‘lgan turli “***ustoz-shogird***” juftliklaridan iborat to‘plamni ifodalaydi.

Umuman olganda, to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun A×B≠B×A, ya’ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi. Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] to‘plamlar uchun A×B asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni, B×A esa asosining uzunligi 1, balandligi 2 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni ifodalaydi va bunda A×B≠B×A bo‘ladi.

1.4. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar

Bir qator amaliy masalalarni yechish uchun berilgan to‘plamdan uning qandaydir xossaga ega bo‘lgan elementlarini tanlab olish va ularni ma’lum bir tartibda joylashtirishga to‘g‘ri keladi.

Ta’rif: Biror chekli to‘plam elementlari ichidan ma’lum bir xossaga ega bo‘lgan elementlardan iborat qism to‘plamlarni tanlab olish yoki to‘plam elementlarini ma’lum bir tartibda joylashtirish bilan bog‘liq masalalar ***kombinatorik masalalar*** deyiladi.

Masalan, o‘nta o‘yinchidan to‘rt kishidan iborat guruhlarni necha xil usulda tuzish mumkinligi (mashg‘ulotlarni tashkil etish), molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (kimyo), oqsil moddalarda aminokislotalarni qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turli tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarini almashtirib ekish (agronomiya), davlat budjetini ishlab chiqarish tarmoqlari bo‘yicha taqsimoti (iqtisodiyot) kabilar kombinatorika masalalarga keladi va kombinatorikani inson faoliyatining turli yo‘nalishlarida qo‘llanilishini ko‘rsatadi[10].

Ta’rif: Kombinatorik masalalar bilan shug‘ullanadigan matematik fan ***kombinatorika*** deyiladi.

---

[10] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 191.

Masalan: O'nta yakkakurashchilarni (boks, kurash, qilichbozlik, ...) bellashuvga bir necha xil usulda o'tkazish mumkin:

- jismoniy sifatlardagi sifatlarni (kuch, tezkorlik, chaqqonlik, egiluvchanlik, chidamlilik) turlicha tartibda birlashtirish;
- sport turlarida jismoniy sifatlarni (kuch, tezkorlik, chaqqonlik, egiluvchanlik, chidamlilik) har xil tartibda rivojlantirish.

Kombinatorikani mustaqil fan sifatida birinchi bo'lib, nemis matematigi ***G.Leybnits*** o'rgangan va 1666-yilda "Kombinatorika san'ati haqida" asarini chop etgan.

Kombinatorikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi dab ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud.

Qo'shish qoidasi: Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa va bu yerda α tanlovni ixtiyoriy tanlash usuli β tanlovni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda «α yoki β» tanlovni amalga oshirish usullari soni

$$m(\alpha \text{ yoki } \beta) = m(\alpha) + m(\beta)$$

formula bilan topiladi.

Masala: Musobaqada 10 ta erkak va 8 ta ayol sportchi ishtirok etadi. Shu musobaqadan bitta ishtirokchini necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechish: α - erkak ishtirokchini tanlash, β - ayol ishtirokchini tanlash bo'lsin. Unda, shartga ko'ra, $m(\alpha)=10$, $m(\beta)=8$ bo'lgani uchun bitta ishtirokchini

$$m(\alpha \text{ yoki } \beta) = m(\alpha) + m(\beta) = 10+8 = 18$$

usulda tanlash mumkin.

Ko'paytirish qoidasi: Agarda biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda «α va β» tanlovni (yoki (α,β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni

$$m(\alpha \text{ va } \beta) = m(\alpha) \cdot m(\beta)$$

formula bilan topiladi.

Masalan, musobaqada 10 ta suzuvchi va 8 ta eshkak eshuvchi ishtirok etsa, ulardan bir suzuvchi va bir eshkak eshuvchidan iborat juftlikni $m(\alpha \text{ va } \beta)=10\cdot 8=80$ usulda tanlash mumkin.

Masala: 10 ta talabadan iborat guruhga olimpiadaga ikkita yo'llanma berildi. Bu yo'llanmalarni necha xil usulda tarqatish mumkin?

Yechish: α I yo'llanmani, β esa II yo'llanmani tarqatishni ifodalasin. Unda m(α)=10 va m(β)=9, chunki bitta talabaga I yo'llanma berilganda II yo'llanmaga 9 talaba da'vogar bo'ladi. Demak, ikkita yo'llanmani tarqatishlar soni m(α va β) = =10·9=90 bo'ladi.

Umumiy holda α_1, α_2, …, α_n tanlovlarni mos ravishda m(α_1), m(α_2), …, m (α_n) usullarda amalga oshirish mumkin bo'lsa,

m(α_1 yoki α_2 yoki….yoki α_n) = m(α_1)+ m(α_2)+…+m(α_n), (1)

m(α_1 va α_2 va…. va α_n) = m(α_1) · m(α_2) ·…· m(α_n) (2)

formulalar o'rinli bo'ladi.

Kombinatsiya – bu kombinatorikaning asosiy tushunchasidir. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to'plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning ***o'rin almashtirishlar***, ***o'rinlashtirishlar*** va ***guruhlashlar*** deb ataluvchi asosiy ko'rinishlari o'rganiladi.

O'rin almashtirishlar. Kombinatorik masalalarni yechishda keng qo'llaniladigan tushunchalar bilan tanishishni boshlaymiz.

Ta'rif: Chekli va n ta elementdan iborat to'plamning barcha elementlarini faqat joylashish tartibini o'zgartirib qism to'plam hosil qilish ***n elementli o'rin almashtirish*** deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan tashkil topadigan o'rin almashtirishlar soni P_n kabi belgilanadi. P fransuzcha "***Permution***", ya'ni o'rin almashtirish so'zining bosh harfidir.

Teorema: n ta elementdan o'rin almashtirishlar soni

$$P_n = n! \quad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu yerda $n!$ - "en faktorial" deb o'qiladi va $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ kabi aniqlanadi. Bunda 0! = 1 deb olinadi. Masalan, 3!=1·2·3=6, 4!= 1·2·3·4=24. Faktoriallarni hisoblashda $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$ tenglikdan foydalanish qulay. Masalan, 5!=4!·5=120 bo'ladi.

Isbot: Bu formulani isbotlash uchun quyidagi tanlovlarni kiritamiz:

α_k={o'rin almashtirishning k-elementini tanlash}, k=1,2,3,…, n.

O'rin almashtirishning 1-elementi sifatida to'plamdagi n ta elementdan ixtiyoriy bittasini olishimiz mumkin va shu sababli m(α_1)=n bo'ladi. 2-element sifatida to'plamdagi qolgan n–1 ta element orasidan ixtiyoriy bittasini tanlab olishimiz mumkin bo'lgani uchun m(α_2)=n–1. Xuddi shunday tarzda birin-ketin m(α_3)=n–2, m(α_4)=n–

3,..., $m(\alpha_{n-1})=n-(n-2)=2$, $m(\alpha_n)=n-(n-1)=1$ ekanligini topamiz. Unda, ko'paytirish qoidasini ifodalovchi (2) formulaga asosan,

$$P_n= m(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va... va } \alpha_n) = m(\alpha_1) \cdot m(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot m(\alpha_n)=n\cdot(n-1) \cdot \ldots \cdot 2\cdot 1=n!.$$

Masalan, $n=3$ elementli $\{a,b,c\}$ to'plamdan hosil bo'ladigan o'rin almashtirishlar $\{a,b,c\}$, $\{b,a,c\}$, $\{a,c,b\}$, $\{b,c,a\}$, $\{c,b,a\}$, $\{c,a,b\}$ bo'lib, ularning soni $R_3=3!=6$.

Masala: Nazoratchi akademiya tarbiyalanuvchilaridan 5 nafar sportchining sifatini ketma-ket tekshirishi kerak. Nazoratchi buni nechta usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechish: Bu 5 nafar sportchining sifatini ketma-ket tekshirishlar 5 tadan o'rin almashtirishlardan iboratdir va shu sababli ularning soni $P_5= 5!=120$ bo'ladi.

Kombinatsiyalar. Kombinatorik tushunchalardan yana biri kombinatsiya bo'lib hisoblanadi.

Ta'rif: Chekli n ta elementli to'plamning k ($k \leq n$) ta elementli va kamida bitta elementi bilan farqlanadigan qism to'plamini hosil qilish ***n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiya*** deyiladi.

Masalan, $\{a,b,c\}$ ko'rinishdagi $n=3$ elementli to'plamdan ikkita elementli kombinatsiyalar $\{a;b\}$, $\{a;c\}$, $\{b;c\}$ bo'lib, ularning soni 3 tadir. Bu yerda $\{b;a\}=\{a;b\}$, $\{c;a\}=\{a;c\}$, $\{b;c\}=\{c;b\}$ deb hisoblanadi.

Umumiy holda n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiyalar soni C_n^k kabi belgilanadi, C fransuzcha "***Combinasion***", ya'ni guruhlash degan so'zning bosh harfi, uning qiymati quyidagi formula orqali hisoblanishini isbotlash mumkin:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4)$$

Misol uchun beshta odamdan uch kishidan iborat komissiyani

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10$$

usulda tuzish mumkin[11].

Masala: Sportchiga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Sportchi dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?

---

[11] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 192.

Yechish: Hafta kunlarini n=7 elementli {1,2,3, ... ,7} to'plam singari qarasak, dam olish kunlari {1,2}, {1,3}, {2,4},... kabi juftliklardan iborat bo'ladi. Bunda $\{i,j\}$ va $\{j,i\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash n=7 elementdan k=2 tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va shu sababli ularning soni

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$$

bo'ladi.

Nyuton binomi va binomial koeffitsiyentlar. Yuqorida (4) formula orqali kiritilgan C_n^k sonlari yordamida quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k \quad (5)$$

Bu tenglikda n ixtiyoriy natural son bo'lib, u maktabda o'rganiladigan $(a+b)^2$ va $(a+b)^3$ qisqa ko'paytirish formulalarini umumlashtirmasini ifodalaydi va matematikada ***Nyuton binomi*** (binom ikkihad degan ma'noni bildiradi)[12], unga kiruvchi C_n^k sonlari esa ***binomial koeffitsiyentlar*** deb ataladi. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, keyinchalik (5) formula Nyuton tomonidan ixtiyoriy ratsional daraja uchun umumlashtirildi. Nyutondan oldin bu formulani ***Umar Xayyom*** (1048-1131), ***G'iyosiddin ali-Qushchi*** (1430) ham bilishgan. Nyutonning xizmati shuki, u formulani nafaqat natural n soni uchun, balki kasr sonlar uchun ham o'rinli ekanligi ko'rsatgan.

1. Agar (5) Nyuton binomida a=b=1 yoki a=1, b=–1deb olsak, unda

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

tengliklar o'rinlini ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

2. Agar (4) formulada k o'rniga n–k qo'yilsa yoki k=0 yoki k=n deb olinsa, unda

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \; C_n^0 = C_n^n = 1$$

tengliklar hosil bo'ladi. Ular kombinatsiyalarni hisoblashni osonlashtiradi.

O'rinlashtirishlar. Bir qator kombinatorik masalalar o'rinlashtirish yordamida yechiladi.

---

[12] Ion Goian, Raisa Grigor, Vasile Marin, Florentin Smarandache. Algebraic problems and exercises for high school. – USA: The Educational Publisher Columbus, 2015. – P. 104.

Ta'rif: Chekli va n ta elementdan iborat to'plamdan bir-biridan yoki elementlari, yoki elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladigan va k ta elementdan iborat qism to'plamlarni hosil qilish ***n ta elementdan k tadan o'rinlashtirish*** deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan k tadan o'rinlashtirish soni A_n^k kabi belgilanadi, A fransuzcha "***Arrangement***", ya'ni o'rinlashtirish degan so'zning bosh harfidir, uning qiymati quyidagi formula bilan hisoblanishini isbotlash mumkin:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $\{a,b,c\}$ to'plamdan n=3 ta elementdan k=2 tadan o'rinlashtirishlar $\{a;b\},\{a;c\},\{b;c\},\{b;a\},\{c;a\},\{c;b\}$ bo'lib, ularning soni

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$ [13].

Masala: Talaba 4 ta fan bo'yicha qo'shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo'ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlar uchun haftaning tanlagan kunlarini k=4 ta elementli $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to'plam, hafta kunlarini esa n=7 elementdan iborat $H=\{1,2,3, \ldots ,7\}$ to'plam singari qaraymiz. Bu holda $X \subset H$ bo'lib, uni hosil etish n=7 ta elementdan k=4 tadan o'rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bunda elementlarning joylashish tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, {2,4,6,7} taqsimotda I fanga dushanba (2), II fanga chorshanba (4), III fanga juma (6) va IV fanga shanba (7) kunlari ajratilgan bo'ladi. Unda {4,2,6,7}, {6,4,2,7} kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

usulda taqsimlashi mumkin.

XULOSA. To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri bo'lib hisoblanadi. Hozirgi zamon matematika-

[13] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 196.

sining poydevorini to‘plamlar nazariyasi tashkil etadi. To‘plamlar nazariyasining asoschisi Kantor bo‘lib hisoblanadi. To‘plamlar ustida ularning birlashmasi (yig‘indisi), kesihmasi (ko‘paytmasi) va ayirmasi kabi algebrik amallar aniqlanadi. Bu amallar kommutativlik, assotsiativlik va distributivlik kabi asosiy algebrik qonunlarga bo‘ysunadi. Bulardan tashqari, to‘plamlar uchun Dekart ko‘paytmasi amali ham kiritilgan.

To‘plamlar ularga tegishli elementlarga qarab chekli va cheksiz to‘plamlarga ajratiladi. Chekli to‘plamlar quvvati ularga tegishli elementlar soni orqali o‘zaro taqqoslanadi. Cheksiz to‘plamlarni taqqoslash uchun ularning ekvivalentligi tushunchasi kiritiladi. Ekvivalent to‘plamlar teng quvvatli hisoblanadi. Natural sonlar to‘plamiga ekvivalent to‘plamlar sanoqli deb ataladi. [0,1] kesmadagi nuqtalar to‘plami sanoqli emas va bunday to‘plamlar sanoqsiz deyiladi. [0,1] kesmaga ekvivalent to‘plamlar kontinium quvvatli deb olinadi. Chekli to‘plamlar uchun ham, cheksiz to‘plamlar uchun ham quvvati eng katta bo‘lgan to‘plam mavjud emas.

Chekli to‘plam elementlaridan ma’lum bir qoida asosida qism to‘plamlar hosil qilish bilan bog‘liq masalalar kombinatorik masalalar deyiladi. Bunday masalalar amaliyotda, jumladan sportda ko‘p uchraydi. Matematikaning kombinatorik masalalari bilan shug‘ullanadigan bo‘limi kombinatorika deb ataladi. Kombinatorikaning ikkita asosiy qoidasi bo‘lib, ular qo‘shish va ko‘paytirish qoidalaridan iboratdir. Kombinatorik masalalarni yechish uchun o‘rin almashtirish, kombinatsiya va o‘rinlashtirish kabi tushunchalar kiritiladi. Ikkihadning ixtiyoriy natural darajasini hisoblash formulasi Nyuton binomi, undagi darajalar oldidagi sonlar esa binomial koeffitsiyentlar deb ataladi. Bu tushunchalar matematikaning turli bo‘limlarida keng qo‘llaniladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. “Matematika” atamasining ma’nosi nimadan iborat?
2. Matematikaning rivojlanishi nechta va qanday davrlardan iborat?
3. O‘rta osiyolik qaysi mutafakkirlar matematika rivojlanishiga munosib hissa qo‘shganlar?
4. O‘zbek matematiklaridan kimlarni bilasiz?
5. Model deganda nima tushuniladi?

6. Modellar qanday ko‘rinishlarda bo‘ladi?
7. To‘plamlar nazariyasining ahamiyati nimadan iborat?
8. To‘plamlar nazariyasiga kim asos solgan?
9. To‘plam deganda nima tushuniladi?
10. To‘plam elementi qanday aniqlanadi?
11. Qanday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi?
12. Qachon ikkita to‘plam teng deyiladi?
13. To‘plamlar birlashmasi qanday kiritiladi?
14. To‘plamlar birlashmasi amali qanday xossalarga ega?
15. To‘plamlar kesishmasi qanday ta’riflanadi?
16. To‘plamlar kesishmasi amali qanday xossalarga ega?
17. To‘plamlar ayirmasi qanday aniqlanadi?
18. Universal to‘plam nima?
19. To‘plam to‘ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
20. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
21. Qanday to‘plamlar chekli deyiladi?
22. Chekli to‘plamlarga misollar keltiring.
23. Qachon to‘plam cheksiz deyiladi?
24. Cheksiz to‘plamlarga misollar keltiring.
25. To‘plamlarni aks ettirish nima?
26. O‘zaro bir qiymatli moslik deb nimaga aytiladi?
27. Qachon to‘plamlar ekvivalent deyiladi?
28. Qaysi shartda chekli to‘plamlar ekvivalent bo‘ladi?
29. To‘plam quvvati deganda nima tushuniladi?
30. Sanoqli to‘plam qanday ta’riflanadi?
31. Sanoqli to‘plamlarga misollar keltiring.
32. Sanoqli to‘plamlar qanday xossalarga ega?
33. Sanoqsiz to‘plam qanday ta’riflanadi?
34. Sanoqsiz to‘plamlarga misollar keltiring.
35. Qachon to‘plam kontinuum quvvali deyiladi?
36. Qanday masalalar kombinatorik deyiladi?
37. Kombinatorikaning qo‘shish qoidasi qanday ifodalaydi?
38. Kombinatorikada ko‘paytirish qoidasi mazmuni nimadan iborat?
39. O‘rinlashtirish deb nimaga aytiladi?
40. O‘rinlashtirishlar soni qanday topiladi?
41. Kombinatsiya ta’rifi qanday ifodalanadi?

42. Kombinatsiyalar soni qanday formula bilan hisoblanadi?
43. Nyuton binomi qanday ko'rinishda bo'ladi?
44. O'rin almashtirish qanday ta'riflanadi?
45. O'rin almashtirishlar soni qanday topiladi?

Testlardan namunalar:

1. Matematika fanining rivojlanishi necha davrdan iborat?
A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.
2. Matematikaning rivojlanish davrlari qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?
A) shakllanish davri; B) elementar matematika davri;
C) oliy matematika davri; D) hozirgi zamon matematikasi davri;
E) barcha javoblarda davrlar to'g'ri ko'rsatilgan.
3. Birinchi bo'lib geometriyaning aksiomatik asosini kim yaratdi?
A) Arximed; B) Pifagor; C) Geron; D) Sokrat; E) Evklid.
4. Geometriya fanining aksiomatik poydevori yoritilgan Evklidning asari qanday nomlanadi?
A) Asoslar; B) Postulatlar; C) Boshlang'ichlar;
D) Negizlar; E) Aksiomalar.
5. Quyidagilardan qaysi biri model bo'lmaydi?
A) maket; B) qurilma; C) formula; D) tasvir;
E) ko'rsatilganlarni bari model bo'ladi.
6. To'plamlar nazariyasining asoschisi kim?
A) Pifagor; B) Dekart; C) Kantor; D) Ferma; E) Gauss.
7. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri bo'sh to'plam emas?
A) Kvadrati manfiy bo'lgan haqiqiy sonlar;
B) $sinx = 2$ tenglama yechimlari to'plami;
C) Ikkita burchagi o'tmas bo'lgan uchburchaklar to'plami;
D) Kubi manfiy bo'lgan sonlar to'plami;
E) Ikkiga bo'linmaydigan juft sonlar to'plami.
8. Qachon A to'plam B to'plamning qismi deyiladi?
A) Agar A va B bir xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa.
B) Agar A va B har xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa.
C) Agar B to'plamning har bir elementi A to'plamga tegishli bo'lsa.
D) Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamga tegishli bo'lsa.
E) To'g'ri javob keltirilmagan.
9. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto'g'ri?

A) bo‘sh to‘plam barcha to‘plamlarning to‘plam ostisi bo‘ladi;
B) har bir to‘plam o‘zining to‘plam ostisi bo‘ladi;
C) Agar $A\subset B$ va $C\subset A$ bo‘lsa, unda $C\subset B$ bo‘ladi;
D) Agar $B\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cap B=B$ bo‘ladi;
E) Agar $B\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cup B=B$ bo‘ladi.

10. A va B to‘plamlar birlashmasi amali qayerda ifodalangan?
A) $A \cup B$; B) $A \cap B$; C) $A \subset B$; D) $A \supset B$; E) $A \setminus B$.

11. Agar $x\in A \cup B$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas?
A) $x\in A$, $x\notin B$; B) $x\notin A$, $x\in B$; C) $x\notin A$, $x\notin B$;
D) $x\in A$, $x\in B$; E) barcha tasdiqlar o‘rinli bo‘ladi.

12. To‘plamlar birlashmasi amalining xossasi qayerda noto‘g‘ri ko‘rsatilgan? (Ω – universal to‘plam, $\varnothing$ – bo‘sh to‘plam)
A) $A \cup B = B \cup A$; B) $A\cup\varnothing=A$; C) $A \cup A = A$;
D) $A\cup\Omega=\Omega$. E) Barcha xossalar to‘g‘ri ko‘rsatilgan.

13. $A=[-3;0]$ va $B=(-1;5]$ to‘plamlar birlashmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
A) $[-3;5]$; B) $[-3;-1]$; C) $(-1;0)$; D) $(0;5]$; E) $[-1;5]$.

14. A va B to‘plamlar kesishmasi amali qayerda ifodalangan?
A) $A \cup B$; B) $A \cap B$; C) $A \subset B$; D) $A \supset B$; E) $A \setminus B$.

15. Agar $x\in A \cap B$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli bo‘ladi?
A) $x\in A$, $x\notin B$; B) $x\notin A$, $x\in B$; C) $x\notin A$, $x\notin B$;
D) $x\in A$, $x\in B$; E) barcha tasdiqlar o‘rinli emas.

16. Agar universal to‘plam $\Omega=(-\infty, \infty)$ va $A=(2,5]$ bo‘lsa, $C(A)$ to‘plam qayerda to‘g‘ri ifodalangan?
A) $C(A)=[-\infty,2]$; B) $C(A)=(5, \infty]$; C) $C(A)=[0,2] \cup (5, \infty)$;
D) $C(A)= (-\infty, 2] \cup (5, \infty)$; E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

17. Tasdiqni to‘ldiring: Absolyut qiymati 2 dan kichik bo‘lgan ... sonlar to‘plami cheklidir.
A) haqiqiy; B) ratsional; C) irratsional; D) butun; E) o‘nli kasr.

18. Quyidagi to‘plamlardan qaysi biri cheksiz to‘plam bo‘ladi?
A) $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglama ildizlari to‘plami;
B) $ax+b=c$ ($a\neq 0$) chiziqli tenglama ildizlari to‘plami;
C) $\sin x=a$ ($|a|\leq 1$) trigonometrik tenglama ildizlari to‘plami;
D) $\log_a x=b$ ($a>0$, $a\neq 1$) logarifmik tenglama ildizlari to‘plami;

E) $a^x = b$ ($a>0$, $a\neq 1$) ko'rsatkichli tenglama ildizlari to'plami.

19. Quyidagi to'plamlaridan qaysi biri sanoqli emas?

A) butun sonlar; B) ratsional sonlar; C) juft sonlar;

D) toq sonlar; E) irratsional sonlar.

20. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri sanoqsiz?

A) butun sonlar; B) ratsional sonlar; C) irratsional sonlar;

D) toq sonlar; E) juft sonlar.

21. Quyidagi to'plamlaridan qaysi biri sanoqli?

A) (a,b) oraliqdagi haqiqiy sonlar to'plami; B) ratsional sonlar to'plami; C) irratsional sonlar to'plami; D) haqiqiy sonlar to'plami;

E) musbat sonlar to'plami.

22. Qaysi masala kombinatorik bo'lmaydi?

A) To'plam elementlaridan ma'lum sondagi elementli barcha qism to'plamlar sonini topish;

B) To'plam elementlaridan ma'lum sondagi elementlarni tanlab olishlar sonini topish;

C) To'plamning ma'lum sondagi bir qism elementlari o'rnini almashtirishlar sonini topish;

D) To'plamdagi barcha elementlar o'rnini almashtirishlar sonini topish;

E) To'plamning eng katta va eng kichik elementlarini topish.

23. Kim birinchi bo'lib kombinatorikani mustaqil fan sifatida o'rgangan?

A) Dekart; B) Nyuton; C) Kantor; D) Leybnits; E) Paskal.

24. Agarda α tanlovni $n(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $n(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, kombinatorikaning qo'shish qoidasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) n (α yoki β) = $n(\alpha) + n(\beta)$; B) n (α va β) = $n(\alpha) + n(\beta)$;

C) n (α yoki β) = $n(\alpha) + n(\beta) - n$ (α va β);

D) n(α yoki β)=$n(\alpha) + n(\beta) + n$ (α va β); E) $n(\alpha+\beta)=n(\beta)+n(\alpha)$.

25. Agarda α tanlovni $n(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $n(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, kombinatorikaning ko'paytirish qoidasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) n (α yoki β) = $n(\alpha) \cdot n(\beta)$; B) n (α va β)= $n(\alpha) \cdot n(\beta)$;

C) $n(\alpha \cdot \beta) = n(\alpha) \cdot n(\beta)$; D) n (α va β)= $n(\alpha)$en(β)–n (α yoki β);

E) n (α va β) = $n(\alpha)$en(β)+n (α yoki β).

26. I o‘quv guruhida 20, II o‘quv guruhida esa 25 talaba o‘qiydi. Kengashga ikkala guruhdan bitta talabani vakil sifatida tanlash kerak. Buni necha usulda amalga oshirish mumkin?

A) 20; B) 25; C) 35; D) 45; E) aniq ko‘rsatib bo‘lmaydi.

27. Mahsulotlar partiyasida 20 ta mahsulot bor. Bu partiyadan ikkita mahsulotni necha usulda tanlab olish mumkin?

A) 20; B) 40; C) 85; D) 240; E) 380.

28. I qutida 8 dona oq, II qutida esa 7 dona qora sharlar bo‘lib, ular nomerlangan. Oq va qora sharlardan iborat juftlikni necha usulda tanlab olish mumkin?

A) 8; B) 7; C) 15; D) 56; E) 72.

29. Berilgan n ta elementdan k tadan kombinatsiyalar soni C_n^k qaysi formula bilan topiladi?

A) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$; B) $C_n^k = \frac{n!}{k!}$; C) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;

D) $C_n^k = \frac{k!}{n!(n+k)!}$; E) $C_n^k = \frac{k!}{n!(n-k)!}$.

30. Shaxmat musobaqasida 130 partiya (o‘yin) o‘ynaldi. Barcha qatnashchilar bir-birlari bilan bittadan partiya o‘ynashdi, biroq ikkita o‘yinchi har biri 5 tadan o‘yin o‘tkazgach, musobaqadan chiqib ketdi. Musobaqada dastlab qancha o‘yinchi bo‘lgan?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

31. Xokkey komandasi tarkibida 3 ta hujumchi, 2 ta himoyachi va 1 darvozabon bo‘ladi. Agar murabbiy ixtiyorida 6 ta hujumchi, 4 ta himoyachi va 2 ta darvozabon bo‘lsa, u nechta turli hokkey komandasi tuzishi mumkin?

A) 240 B) 420 C) 402 D) 204 E) 400

32. Futbol chempionatidagi komandalarning barchasi bir-biri bilan bir martadan o‘ynagandan keyin hammasi bo‘lib, 120 match o‘tkazildi. Chempionatda nechta komanda ishtirok etgan?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 20

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi A va B to‘plamlar bo‘yicha A$\cup$B, A$\cap$B, A/B va B/A to‘plamlarni toping: A=$\{n-3, n-2, n-1, n, n+1\}$, B=$\{n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4\}$.

2. Quyidagi A va B to‘plamlar bo‘yicha $A \cup B$, $A \cap B$, A/B va B/A to‘plamlarni toping: $A=[n-3, n+1]$, $B=(n-1, n+5)$

3. Quyidagi A va B to‘plamlarning $A \times B$ va $B \times A$ Dekart ko‘paytmalarini aniqlang: $A=\{n-3, n-2, n-1\}$, $B=\{n, n+1, n+2, n+3\}$

4. Ingliz yoki rus tilini biladigan sayohatchilar guruhi n ($n>8$) kishidan iborat. Ingliz tilida gaplasha oladigan sayohatchilar A, rus tilida gaplasha oladigan sayohatchilar to‘plami esa B bo‘lsin. Agar $m(A)=n-3$ va $m(B)=n-5$ bo‘lsa, ikkala tilda gaplasha oladigan sayohatchilar sonini toping.

5. $A=[-n+3, n+2]$ kesmadagi har bir x nuqtaga f: $x \to y=3x+5$ akslantirish bilan y tasvir mos qo‘yilmoqda. Tasvirlar to‘plami B topilsin.

6. $[-n+3, n+2]$ va $[n-3, n+1]$ kesmalar ekvivalentligini ko‘rsatuvchi o‘zaro bir qiymatli akslantirishni toping.

7. $n(n>2)$ ta elementdan $n-3$ tadan kombinatsiyalar va o‘rinlashtirishlar sonini aniqlang.

8. $(2+e^n)^5$ binomning yoyilmasini yozing.

9. $(x-3)^n$ ($n>5$) binom yoyilmasidagi x^4 daraja oldidagi koeffitsiyentni toping.

10. Sport to‘garagi qatnashchilari bir o‘yin uchun uch xil rangdagi raqamlardan yozishga kelishdilar. Birinchi o‘ringa uchta qizil rangdagi raqam, ikkinchi o‘ringa ikkita sariq rangdagi raqam, uchinchi o‘rindagi 4 ta ko‘k rangdagi raqam yoziladi. Agar qizil rangda 1,2,3,4,6 raqamlarni, sariq rangda 0,2,5,7 raqamlarni va ko‘k rangda 1,3,5,6,7,8,9 raqamlarni yozish mumkin bo‘lsa, hammasi bo‘lib, necha xil raqamlar yozish mumkin?

II BOB. MATRITSA VA DETERMINANT TUSHUNCHALARI. CHIZIQLI TENGLAMALAR TIZIMINI MATRITSA USULIDA YECHISH

Algebra songa taalluqli turli xil masalalarni yechishni qisqartirish, soddalashtirish va ayniqsa, umumlashtirish bilan shug'ullanadi.
Bertran J.L.

REJA:

- Matritsalar va ular ustida amallar
- Determinantlar va ularning xossalari
- Teskari matritsa
- Chiziqli tenglamalar tizimi. Chiziqli tenglamalar tizimini matritsa yordamida yechish

Tayanch iboralar: matritsa, matritsa tartibi, matritsa elementi, to'rtburchakli matritsa, kvadrat matritsa, ustun matritsa, satr matritsa, teng matritsalar, diagonal element, diagonal matritsa, birlik matritsa, nol matritsa, matritsalar yig'indisi, matritsalar ayirmasi, matritsalar ko'paytmasi, matritsaning darajasi, matritsaning transponirlangani, determinant, determinantning elementi, determinantning satri, determinantning ustuni, minor, algebraik to'ldiruvchi, teskari matritsa, chiziqli tenglamalar tizimi, tizim koeffitsiyentlari, tizim ozod hadlari, tizim yechimi, birgalikda bo'lgan tizim, matritsalar usuli, Kramer usuli, Gauss usuli.

2.1. Matritsalar va ular ustida amallar

Matritsalar va ularning turlari. Matritsa bir qator matematik va sportga oid masalalarni yechishda juda ko'p qo'llaniladigan tushuncha bo'lib, uning yordamida bu masalalar va ularning yechimlarini sodda hamda ihcham ko'rinishda ifodalanadi.

Ta'rif: m ta satr va n ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak shaklidagi $m \cdot n$ ta sondan tashkil topgan jadval $m \times n$ tartibli ***matritsa***, uni tashkil etgan sonlar esa ***matritsaning elementlari*** deb ataladi.

Matritsalar $A, B, C, \ldots$ kabi bosh harflar bilan, ularning i-satr va j-ustunida joylashgan elementlari esa odatda,+++++

++++++++ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi[14]. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsa 2×3 tartibli, ya'ni 2 ta satr va 3 ta ustun ko'rinishidagi $2\cdot3=6$ ta sondan tashkil topgan. Uning 1-satr elementlari $a_{11}=1$, $a_{12}=-3$, $a_{13}=1.2$ va 2-satr elementlari $a_{21}=0$, $a_{22}=7.5$, $a_{23}=-1$ sonlardan iborat. Bu matritsaning 1-ustuni $a_{11}=1$ va $a_{21}=0$, 2-ustuni $a_{12}=-3$ va $a_{22}=7.5$, 3-ustuni esa $a_{13}=1.2$ va $a_{23}=-1$ elementlardan tuzilgan.

Agar biror A matritsaning tartibini ko'rsatishga ehtiyoj bo'lsa, u $A_{m\times n}$ ko'rinishda yoziladi va umumiy holda

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yoki qisqacha $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ko'rinishda ifodalanadi.

Ta'rif: A_{mxn} matritsada $m=n\neq1$ bo'lsa, u ***kvadrat matritsa***, $m\neq n$ ($m\neq1$, $n\neq1$) bo'lsa ***to'g'ri burchakli matritsa***, $m=1$, $n\neq1$ holda ***satr matritsa*** va $m\neq1$, $n=1$ bo'lganda ***ustun matritsa*** deb ataladi.

A_{nxn} kvadrat matritsa qisqacha A_n kabi belgilanadi va n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Masalan, xalq xo'jaligining n ta tarmoqlari orasidagi o'zaro mahsulot ayirboshlash $A_n=(a_{ij})$ kvadrat matritsa yordamida ifodalanadi. Bunda a_{ij} ($i,j=1,2,\ \ldots,\ n$ va $i\neq j$) i-tarmoqda ishlab chiqarilgan mahsulotning j-tarmoq uchun mo'ljallangan miqdorini, a_{ii} ($i=1,2,\ \ldots,\ n$) esa i-tarmoqning o'zi ishlab chiqargan mahsulotga ehtiyojini bildiradi.

[14] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 50.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $m=1$ va $n=1$ bo'lganda $A_{1\times 1}$ matritsa bitta sonni ifodalaydi va shu sababli ma'lum bir ma'noda matritsa son tushunchasini umumlashtiradi.

Ta'rif: A va B matritsalar bir xil tartibli va ularning mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, ya'ni $a_{ij} = b_{ij}$ shart bajarilsa, ular ***teng matritsalar*** deyiladi.

A va B matritsalarning tengligi $A=B$ yoki $(a_{ij})= (b_{ij})$ ko'rinishda belgilanadi. Masalan, ixtiyoriy $a\neq 0$ soni uchun

$$A=\begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a\cdot a \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

matritsalar o'zaro teng, ya'ni $A = B$ bo'ladi.

Ta'rif: $A=\{a_{ij}\}$ matritsada i=j bo'lgan a_{ii} elementlar ***diagonal elementlar*** deb ataladi.

Masalan, yuqorida ko'rilgan $A_{2\times 3}$ matritsaning diagonal elementlari $a_{11}=1$ va $a_{22}=7.5$ bo'ladi.

Ta'rif: Diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo'lgan ($a_{ij}=0$, $i\neq j$) kvadrat matritsa ***diagonal matritsa*** deyiladi.

Diagonal matritsaning diagonal elementlari nolga ham teng bo'lishi mumkin.

Masalan,

$$A_{2\times 2}=A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad , \quad B_{3\times 3}=B_3=\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonal matritsalar bo'ladi.

Ta'rif: Barcha diagonal elementlari $a_{ii}=1$ bo'lgan n-tartibli diagonal matritsa n-tartibli birlik matritsa yoki qisqacha ***birlik matritsa*** deyiladi.

Odatda, n-tartibli birlik matritsa E_n yoki qisqacha E kabi belgilanadi. Masalan,

$$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli birlik matritsalardir[15].

---

[15] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 51.

Ta'rif: Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij} = 0$) bo'lgan ixtiyoriy $m \times n$ tartibli matritsa ***nol matritsa*** deyiladi.

$m \times n$ tartibli nol matritsa $O_{m \times n}$ yoki qisqacha O kabi belgilanadi. Masalan,

$$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ O_{3\times 3} = O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rsatilgan tartibli nol matritsalar bo'ladi.

Matritsalar ustida amallar. Endi matritsalar ustida algebrik amallar kiritib, matritsalar algebrasini hosil etamiz.

Ta'rif: Ixtiyoriy tartibli $A_{m\times n} = (a_{ij})$ matritsaning istalgan λ ***songa ko'paytmasi*** deb $C_{m\times n} = \{\lambda\ a_{ij}\}$ kabi aniqlanadigan matritsaga aytiladi.

Bunda A matritsaning λ songa ko'paytmasi λA deb belgilanadi. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 6A = \begin{pmatrix} 6\cdot 5 & 6\cdot 4 & 6\cdot(-1) \\ 6\cdot 0 & 6\cdot 2 & 6\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}.$$

Ta'rif: Bir xil tartibli $A_{m\times n} = (a_{ij})$ va $B_{m\times n} = (b_{ij})$ ***matritsalar yig'indisi*** deb elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C_{m\times n} = (c_{ij})$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning yig'indisi $A+B$ ko'rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini qo'shish orqali hisoblanadi. Masalan,

$$A = A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix},\quad B = B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 & 3+0 & -1+1 \\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni songa ko'paytirish va o'zaro qo'shish amallari quyidagi qonunlarga bo'ysunishi bevosita ularning ta'riflaridan kelib chiqadi:

I. $A+B=B+A$ (qo'shish uchun kommutativlik qonuni);

II. $A+(B+C) = (A+B)+C$ (qo'shish uchun assotsiativlik qonuni);

III. $\lambda (A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (distrubutivlik qonuni).

Bundan tashqari, yuqoridagi ta'riflar orqali bu amallar ushbu xossalarga ham ega bo'lishini ko'rsatish qiyin emas:

$$A + O = A,\ A+A = 2A,\ 0 \cdot A = O,\ \lambda \cdot O = O.$$

Ta'rif: Bir xil tartibli $A_{m\times n} = (a_{ij})$ va $B_{m\times n} = (b_{ij})$ ***matritsalar ayirmasi*** deb $A_{m\times n}$ va $(-1)B_{m\times n}$ matritsalarning yig'indisiga, ya'ni $A_{m\times n}+(-1)B_{m\times n}$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarning ayirmasi $A-B$ ko'rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini o'zaro ayirish orqali hisoblanadi[16]. Masalan,

$$A = A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun

$$A - B = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-0 & -1-1 \\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ta'rif: $A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{p\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalarning ko'paytmasi*** deb shunday $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari ushbu

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

yig'indilar kabi aniqlanadi.

Shunday qilib, $A_{m\times r}=(a_{ij})$ va $B_{q\times n}=(b_{ij})$ matritsalar uchun $p=q$, ya'ni A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lgandagina ularning ko'paytmasi mavjud bo'ladi va AB kabi belgilanadi. Bunda $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaning satrlar soni m birinchi A ko'paytuvchi matritsa, ustunlar soni n esa ikkinchi B ko'paytuvchi matritsa orqali aniqlanadi. Bundan tashqari, $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ ko'paytma matritsaning c_{ij} elementi A matritsaning i-satr elementlarini B matritsaning j-ustunidagi mos elementlariga ko'paytirib, hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish orqali hisoblanadi. Bu "satrni ustunga ko'paytirish" qoidasi deb aytiladi. Masalan,

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[16] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 53

matritsalar uchun m=3, p=q=2, n=2 bo'lgani uchun ularning ko'paytirish mumkin va ko'paytma matritsa $AB=C_{3x2}$ quyidagicha bo'ladi:

$$C_{3\times2}=\begin{pmatrix}3\cdot6+1\cdot1 & 3\cdot(-4)+1\cdot2\\ 0\cdot6+(-2)\cdot1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot2\\ 4\cdot6+5\cdot1 & 4\cdot(-4)+5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -10\\ -2 & -4\\ 29 & -6\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko'paytmasi uchun $AB\neq BA$, ya'ni kommutativlik qonuni o'rinli bo'lmaydi. Masalan, $A_{m\times q}\cdot B_{q\times n}=C_{m\times n}$ ko'paytma mavjud, ammo $B_{q\times n}\,A_{m\times q}$ ko'paytma har doim ham mavjud emas va mavjud bo'lgan taqdirda, ya'ni $n=m$ holda ham ular teng bo'lishi shart emas[17]. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $AB\neq BA$, chunki

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 22\\ 8 & 23\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 33\\ -4 & -5\end{pmatrix}$$

Matritsalar ko'paytmasi va yig'indisi quyidagi qonunlarga bo'ysunadi hamda ushbu xossalarga ega bo'ladi:

I. $A(BC)=(AB)C$, $(\lambda A)B=A(\lambda B)$ (ko'paytirish uchun assotsiativlik qonuni);

II. $A(B+C)=AB+AC$ (ko'paytirish va qo'shish amallari $(A+B)C=AC+BC$ uchun distributivlik qonunlari);

III. $AE=EA=A$, $\mathrm{O}\cdot A=\mathrm{O}$, $A\cdot\mathrm{O}=\mathrm{O}$, $0\cdot A=\mathrm{O}$.

Bunda E va O mos ravishda tegishli tartibli birlik va nol matritsalarni ifodalaydi.

Matritsa ko'paytmasi ta'rifidan ko'rinadiki, har qanday n-tartibli A kvadrat matritsani o'ziga-o'zini ko'paytirish mumkin va natijada yana n-tartibli kvadrat matritsa hosil bo'ladi.

<u>Ta'rif:</u> A kvadrat matritsani o'zaro m marta (m – birdan katta ixtiyoriy natural son) ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan kvadrat matritsa ***A matritsaning m- darajasi*** deyiladi.

A matritsaning m-darajasi A^m kabi belgilanadi. Bunda $A^0=E$ va $A^1=A$ deb olinib, A^m daraja ixtiyoriy nomanfiy butun m soni uchun

[17] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 55.

aniqlanadi. Bu holda A^m daraja ta'rifdan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi (m, k-natural sonlar, λ-haqiqiy son):

$$1.\ A^m \cdot A^k = A^{m+k};\quad 2.\ (A^m)^k = A^{mk};\quad 3.\ (\lambda A)^m = \lambda^m A^m;$$

$$4.\ E^m = E;\quad 5.\ O^m = O.$$

Shunday qilib, har qanday kvadrat matritsa uchun natural darajaga ko'tarish amalini kiritish mumkin ekan. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 14 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 60 \\ 12 & -47 \end{pmatrix}.$$

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, 5-xossaning teskarisi o'rinli emas, ya'ni A^m=O tenglikdan har doim ham A=O ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Kelgusida matritsani darajaga ko'tarish amalini ixtiyoriy m butun son uchun umumlashtiramiz.

Ta'rif: $B=(b_{ij})$ matritsa $A=(a_{ij})$ matritsaning ***transponirlangani*** deyiladi, agar i va j indekslarning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida $a_{ij}=b_{ji}$ shart bajarilsa.

A matritsaning transponirlangani A^{T} kabi belgilanadi. Agar A matritsa $m\times n$ tartibli bo'lsa, uning transponirlangani A^{T} $n\times m$ tartibli bo'ladi. Masalan,

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Matritsani transponirlanganini topish ***transponirlash amali*** deyiladi va u quyidagi xossalarga ega bo'lishini ko'rsatish mumkin:

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; 2. $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$ (λ– ixtiyoriy haqiqiy son);
3. $(A\pm B)^{\mathrm{T}}= A^{\mathrm{T}}\pm B^{\mathrm{T}}$; 4. $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}= B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

Ta'rif: Agar A kvadrat matritsa uchun $A^{\mathrm{T}}=A$ bo'lsa, u ***simmetrik matritsa***, $A^{\mathrm{T}}=-A$ bo'lganda esa ***kososimmetrik matritsa*** deb ataladi.

Ta'rifdan har qanday simmetrik matritsaning elementlari $a_{ij} = a_{ji}$, kososimmetrik matritsaning elementlari esa $a_{ij} = -a_{ji}$ shartni qanoatlantirishi bevosita kelib chiqadi. Bundan kososimmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsalardan A simmetrik, B kososimmetrik bo'ladi.

Matritsalarning sportga oid va iqtisodiy tatbiqlari. Ushbu mavzu nihoyasida matritsalarning sportga oid va iqtisodiy ma'nosi, tatbiqlarini ifodalovchi misollar keltiramiz.

Misol: Sport turlari o'rtasida ayrim jismoniy sifat ko'rsatkichlarining taqsimoti quyidagi jadval orqali berilgan bo'lsin (umumiyga nisbatan foiz hisobida, raqamlar shartli):

Jismoniy sifat ko'rsatkichlari	Sport turlari		
	Kurash	Gimnastika	Futbol
1. Kuch	45	30	25
2. Chaqqonlik	53	27	20
3. Tezkorlik	38	21	41
4. Egiluvchanlik	40	48	12

Bu jadvalni matritsa yordamida quyidagi qulay ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$A_{4\times3} = \begin{pmatrix} 45 & 30 & 25 \\ 53 & 27 & 20 \\ 38 & 21 & 41 \\ 40 & 48 & 12 \end{pmatrix}$$

Bu yozuvda A matritsaning har bir elementi aniq sportga oid ma'noga ega. Masalan, a_{11}=45 va a_{21}=53 kurash sport turi kuchning 45 % va chaqqonlikning 53 %da bo'lishini talab etadi, a_{22}=27 gimnastika sport turi chaqqonlikning 27 %da bo'lishini talab etadi,

$a_{33}=41$ esa futbol sport turi tezkorlikning 41 %da bo'lishini talab etadi va hokazo.

Misol: Korxona M_1, M_2, M_3 va M_4 kabi belgilangan 4 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil C_1, C_2 va C_3 xom-ashyolardan foydalaniladi. Bunda a_{ij} ($i=1,2,3,4$; $j=1,2,3$) orqali M_i mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun C_j xom-ashyodan qancha birlik sarflanishini belgilab, mahsulotlar birligini ishlab chiqarish uchun xom-ashyolar sarfi meyorini ushbu $A_{4\times3}=(a_{ij})$ matritsa orqali ifodalaymiz[18]:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 3 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Bunda M_i ($i=1,2,3,4$) mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini ifodalovchi C satr va C_j ($j=1,2,3$) xom-ashyo birligining bahosini ko'rsatuvchi B ustun matritsalar quyidagicha bo'lsin:

$$C=\begin{pmatrix}90 & 110 & 80 & 100\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7\\ 4\\ 5\end{pmatrix}.$$

Bu holda CA matritsalar ko'paytmasi mavjud va u rejalangan mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan C_1, C_2 va C_3 xom-ashyolar miqdorini ifodalovchi quyidagi D satr matritsadan iboratdir:

$$D=C\cdot A=\begin{pmatrix}90 & 110 & 80 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 5\\ 3 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1210 & 730 & 1150\end{pmatrix}.$$

Demak, biz ishlab chiqarish rejasini bajarishimiz uchun C_1, C_2 va C_3 xom-ashyolardan mos ravishda 1210, 730 va 1150 birlik miqdorda ega bo'lishimiz kerak.

---

[18] Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Darslik. – T., 2012. – B. 38.

Xom-ashyo miqdorini ifodalovchi topilgan D matritsani xom-ashyo birligi bahosini ko'rsatuvchi B matritsaga ko'paytmasi DB ham mavjud va u bizga zarur miqdordagi xom-ashyolarni sotib olish xarajatimizni determinant sondan iborat bo'ladi:

$$DB = \begin{pmatrix} 1210 & 730 & 1150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 1210 \cdot 7 + 730 \cdot 4 + 1150 \cdot 5 = 17140.$$

2.2. Determinantlar va ularning xossalari

Determinantlar va ularni hisoblash. Matritsaning bir qator xususiyatlarini ta'riflash va o'rganish uchun uning determinanti tushunchasi kerak bo'ladi.

Ta'rif: n-tartibli A kvadrat matritsaning elementlaridan ma'lum bir qoida asosida hosil qilinadigan son ***n-tartibli determinant*** deyiladi.

A kvadrat matritsaning determinanti $|A|$ yoki $\det A$ kabi belgilanadi. Ayrim o'quv adabiyotlarida determinant atamasi aniqlovchi deb aytiladi. Umumiy holda n-tartibli determinant quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ta'rif: Berilgan $|A|$ determinantni tashkil etgan a_{ij} (i,j=1,2, … ,n) sonlar ***determinantning elementlari***, gorizontal ko'rinishda joylashgan a_{ij} (j=1,2, … ,n) elementlar ***determinantning i-satri*** (i=1,2, … ,n), vertikal ko'rinishda joylashgan a_{ij} (i=1,2, … ,n) elementlar esa ***determinantning j-ustuni*** (j=1,2, … ,n) deyiladi.

Endi I, II va III tartibli determinantlarni hisoblash qoidasini formula ko'rinishida aniq ifodalaymiz.

I tartibli $|A|$ determinant faqat bitta a_{11} sondan iborat bo'lib, uning qiymati shu sonni o'ziga teng, ya'ni $|A|=|a_{11}|= a_{11}$ deb olinadi.

II tartibli determinantning qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21} \quad (1)$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=3\cdot 6-4\cdot 5=18-20=-2, \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}=5\cdot 10-4\cdot(-2)=50+8=58$$

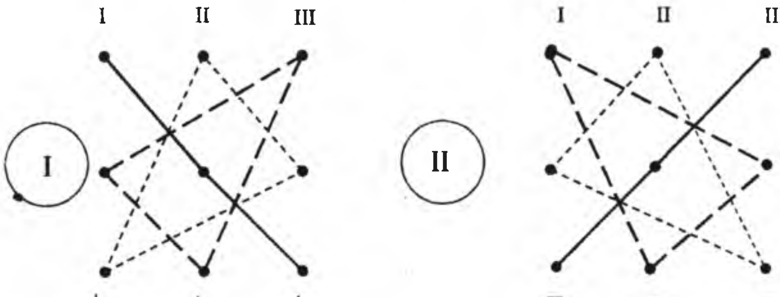
III tartibli determinant esa quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} \quad (2)$$

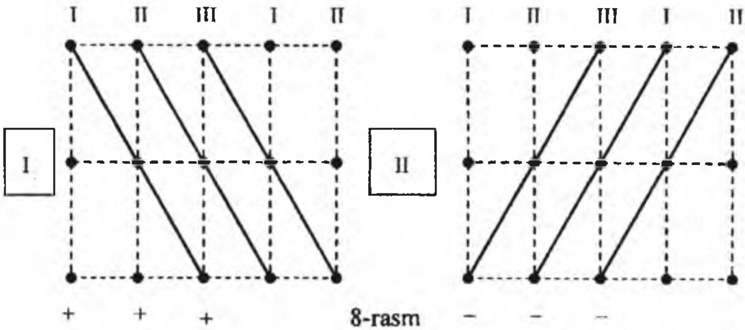
Bu yerda (2) formulani eslab qolish oson emas va shu sababli III tartibli determinantlarni quyidagi usullarda hisoblash mumkin.

❖ **Uchburchaklar usuli.** Bu usulda determinantning elementlari sxematik ko'rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (7-rasm). So'ngra asoslari determinantning diagonallariga parallel bo'lgan uchburchaklar qaraladi. Bu uchburchaklarning uchlarida va diagonallarda joylashgan elementlarning ko'paytmalari hosil qilinadi. I holda chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko'paytmalari o'z ishorasi, II holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.



7-rasm

❖ **Sarrius usuli.** Bu usulda determinantning o'ng tomoniga uning I va II ustunlari takroran yozilib, 3×5 tartibli matritsa hosil qilinadi. Bu matritsaning elementlari sxematik ko'rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (8-rasm) va chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko‘paytmasi I holda o‘z ishorasi, II holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.



8-rasm

III tartibli determinantni hisoblashga doir misol keltiramiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 6 & -2\\ 1 & 5 & 4\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot5\cdot0+6\cdot4\cdot3+1\cdot(-1)\cdot(-2)-$$

$$-(-2)\cdot5\cdot3-6\cdot1\cdot0-4\cdot(-1)\cdot(2)=112.$$

Determinantlar va matritsalar orasida quyidagi o‘xshashlik va farqlar mavjud:

1) matritsa sonlar jadvalini ifodalaydi. Determinant esa sonlar jadvalidan hosil qilinadigan sonli ifoda bo‘lib, uning qiymati sondan iboratdir;

2) matritsa sonlar jadvalini dumaloq qavslar ichiga olish bilan belgilansa, determinant bu jadvalni vertikal chiziqlar orasiga olish bilan belgilanadi;

3) A matritsa va $|A|$ determinantni tashkil etuvchi sonlar ularning elementlari deyiladi;

4) matritsa va determinant satrlar va ustunlardan iborat;

5) determinantlarda ustun va satrlar soni teng bo‘lishi kerak, matritsalarda esa bunday bo‘lishi shart emas.

Determinantlarning asosiy xossalari. Endi ixtiyoriy tartibli determinantlar uchun o‘rinli bo‘lgan xossalar bilan tanishamiz.

Aniqlik va soddalik uchun umumiy holda ifodalangan bu xossalarni uchinchi tartibli determinantlar misolida ko'rsatamiz va isbotlaymiz.

1-xossa. Agar determinantda har bir i-satr (i=1,2,3, ⋯,n) i-ustun bilan almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu tenglik bevosita III tartibli determinantni (2) hisoblash formulasidan kelib chiqadi.

Demak, determinantning satr va ustunlari teng kuchlidir, ya'ni satr (ustun) uchun o'rinli bo'lgan tasdiq ustun (satr) uchun ham o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, bu xossadan matritsani transponirlashda uning determinanti o'zgarmay qolishi, ya'ni $\det A = \det A^T$ bo'lishi kelib chiqadi. Shu sababli determinantning keyingi xossalarini faqat satrlar uchun ifodalaymiz[19].

2-xossa. Determinantda ixtiyoriy ikkita satrlar o'rni o'zaro almashtirilsa, determinantning qiymati faqat ishorasini o'zgartiradi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

Bu tasdiq ham bevosita (2) formuladan kelib chiqadi.

3-xossa. Agar determinantda ikkita satr elementlari bir xil bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.

Isbot: Berilgan determinantning qiymatini Δ, uning bir xil elementli satrlarining o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan determinantning qiymatini esa Δ' deb belgilaymiz. Unda, 2-xossaga asosan, $\Delta' = -\Delta$ bo'ladi. Ammo determinantda bir xil elementli satrlarning o'rinlari almashtirilganligi uchun uning ko'rinishi o'zgarmay qoladi va shu sababli $\Delta' = \Delta$ bo'ladi. Bu tengliklardan $\Delta = -\Delta$ natijani olamiz va undan $\Delta=0$ ekanligi kelib chiqadi.

---

[19] Howard Anton, Chris Rorres. Elementary Linear Algebra: Applications Version, 10th. – USA: Lehigh University, John Wiley & Sons, 2010. – P. 175.

Masalan, hozircha biz IV tartibli determinantni hisoblash formulasini bilmasakda, 3-xossaga asosan, birinchi va uchinchi satrlari bir xil bo'lgan ushbu determinantning qiymatini yozishimiz mumkin:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

4-xossa. Determinantda biror satr elementlari umumiy λ ko'paytuvchiga ega bo'lsa, uni determinant belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Isbot: III tartibli determinantni (2) hisoblash formulasidagi yig'indining har bir qo'shiluvchisida λ umumiy ko'paytuvchi qatnashadi. Bu λ umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, 4-xossadagi tasdiqning o'rinli ekanligiga ishonch hosil etamiz.

5-xossa. Agar determinantda biror satr faqat nollardan iborat bo'lsa, uning qiymati nolga tang bo'ladi.

Bu xossaning isboti oldingi xossadan λ=0 bo'lgan holda kelib chiqadi.

Masalan, quyidagi III tartibli determinantning qiymatini (2) formula bilan hisoblab o'tirmay, 4-xossaga asosan to'g'ridan-to'g'ri

$$\begin{vmatrix} 11 & 20 & 401 \\ -8 & 37 & 139 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

deb ta'kidlay olamiz.

6-xossa. Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr elementlari o'zaro proporsional bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Isbot: 4-xossaga asosan, λ proporsionallik koeffitsiyentini determinant belgisi oldiga umumiy ko'paytuvchi sifatida chiqarish mumkin. Bu holda ikkita satri bir xil bo'lgan determinant hosil bo'ladi va uning qiymati, 3-xossaga asosan, nolga teng. Bundan berilgan determinantning ham qiymati nol ekanligi kelib chiqadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7.5 & -4.5 \end{vmatrix} = 0,$$

Chunki, bu determinantda I va III satrlar proporsional va proporsionallik koeffitsiyenti λ=1.5 ga teng.

7-xossa. Agar determinantning biror i-satri ikkita qo'shiluvchi yig'indisidan iborat, ya'ni $a_{ij}+b_{ij}$ ko'rinishda bo'lsa, bu determinantni ikkita determinantlar yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin. Bunda bu determinantlarning i-satri mos ravishda a_{ij} va b_{ij} elementlardan iborat bo'lib, qolgan satrlari berilgan determinantniki singari bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu xossaning o'rinli ekanligiga bevosita (2) formula orqali ishonch hosil qilish mumkin.

8-xossa. Agar $|A|$ determinantning a_{ii} diagonal elementlaridan yuqorida yoki pastda joylashgan barcha elementlari nolga teng bo'lsa, uning qiymati diagonal elementlar ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Isbot: Bu determinantlar uchun ularni (2) hisoblash formulasidagi $a_{11}a_{22}a_{33}$ qo'shiluvchidan boshqa hamma qo'shiluvchilari nolga teng bo'ladi va shuning uchun ularning yig'indisi, ya'ni determinantning qiymati shu ko'paytmaga teng bo'ladi.

Masalan, ushbu IV tartibli determinantni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 5\cdot 2\cdot(-1) = 30.$$

9-xossa. Diagonal matritsaning determinanti uning diagonal elementlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Bu xossa isboti bevosita oldingi xossadan kelib chiqadi. Jumladan har qanday birlik matritsaning determinanti birga tengdir.

Navbatdagi xossani ifodalash uchun ikkita yangi tushuncha kiritamiz.

Ta'rif: Ixtiyoriy n-tartibli determinantning a_{ij} (i,j=1,2, … , n) elementining ***minori*** deb, bu determinantdan shu element joylashgan i-satr va j-ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan (n–1)-tartibli determinant qiymatiga aytiladi.

Determinantning a_{ij} elementining minori M_{ij} deb belgilanadi va ularning soni n^2 ta bo'ladi. Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

determinantning II satr elementlarining minorlarini yozamiz va hisoblaymiz:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Bunda III tartibli determinantning minorlari II tartibli determinantlar ekanligini yana bir marta ta'kidlab o'tamiz.

Ta'rif: Ixtiyoriy n-tartibli determinantning a_{ij} $(i,j=1,2, \ldots, n)$ elementining ***algebraik to'ldiruvchisi*** deb $(-1)^{i+j}$ M_{ij} kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

Determinantning a_{ij} $(i,j=1,2, \ldots, n)$ elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} kabi belgilanadi va ta'rifga asosan,

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & i+j \text{ - juft bo'lsa;} \\ -M_{ij}, & i+j \text{ - toq bo'lsa.} \end{cases}$$

formula bilan hisoblanadi. Masalan, (3) determinantning II satr elementlarining algebraik to'ldiruvchilari quyidagicha bo'ladi:

$$A_{21} = -M_{21}=1, A_{22} = M_{22}=1, A_{23} = -M_{23}=2. \quad (4)$$

10-xossa (Laplas teoremasi). Determinantning ixtiyoriy bir i-satrida joylashgan a_{ij} $(j=1,2, \ldots, n)$ elementlarini ularning A_{ij} $(j=1,2, \ldots, n)$ algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi shu determinantning qiymatiga teng bo'ladi.

Isbot: Bu xossa III tartibli $|A|$ determinantning birinchi satri uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A| \quad (5)$$

Bu tenglikni isbotlash uchun algebraik to'ldiruvchi ta'rifidan va determinantlarni hisoblashning (1), (2) formulalaridan quyidagicha foydalanamiz:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = |A|.$$

Xuddi shunday tarzda determinantning ikkinchi va uchinchi satrlari uchun

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A| \quad (6)$$

tengliklar o'rinli bo'lishi isbotlanadi

Ta'rif: Yuqoridagi (5) va (6) tengliklar determinantning ***satrlar bo'yicha yoyilmasi*** deb ataladi.

Shunga o'xshash determinantning ***ustunlar bo'yicha yoyilmasini*** ham quyidagicha yozish mumkin:

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=|A|, \qquad a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=|A|,$$
$$a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=|A|. \qquad (7)$$

Masalan, yuqorida keltirilgan (3) determinant qiymatini uning II satrining (4) algebraik to'ldiruvchilari yordamida hisoblaymiz:

$$\Delta=2A_{21}+(-3)A_{22}+7A_{23}=2\cdot1+(-3)\cdot1+7\cdot2=13.$$

Laplas teoremasidan foydalanib, yuqori tartibli determinantlarni hisoblash mumkin. Bunda n-tartibli determinantni hisoblash n ta (n–1)-tartibli determinantni (A_{ij} algebraik to'ldiruvchilarni) hisoblash va uning ixtiyoriy satr yoki ustuni bo'yicha yoyilmasidan foydalanishga keltiriladi. Jumladan, I tartibli determinant qiymati $|A|=|a_{11}|=a_{11}$ ekanligidan foydalanib, (1) va (2) formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Determinant qiymatini Laplas teoremasi yordamida hisoblash uchun uning ixtiyoriy satr yoki ustun bo'yicha yoyilmasidan foydalanish mumkin. Ammo, amaliy nuqtai nazardan, ko'proq elementlari nolga teng bo'lgan satr yoki ustunni tanlash (agar shundaylar mavjud bo'lsa) maqsadga muvofiqdir. Bu holda nolga teng elementlarning algebraik to'ldiruvchilarini topishga hojat bo'lmaydi va hisoblashlar hajmi ancha kamayadi.

Misol: Ushbu IV tartibli determinantni hisoblang:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & 10\\ 6 & 7 & 5 & -2\\ 3 & 0 & 9 & 1\end{vmatrix}$$

Yechish: Bu determinantni II ustun bo'yicha yoyilmasidan foydalanib hisoblash qulaydir. Bunga sabab shuki, bu ustunda nol elementlar boshqa satr va ustunlarga qaraganda, ko'proq hamda $a_{22}=0$, $a_{42}=0$ elementlarning A_{22}, A_{42} algebraik to'ldiruvchilarini hisoblash shart emas.

Dastlab A_{12} va A_{32} algebraik to'ldiruvchilarni hisoblab, $A_{12}=-389$ va $A_{32}=45$ ekanligini aniqlaymiz. Endi determinant qiymatini II ustunga Laplas teoremasini tatbiq etib hisoblaymiz:

$$|A|=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}+a_{42}A_{42}=$$
$$=(-3)\cdot(-389)+0\cdot A_{22}+7\cdot45+0\cdot A_{42}=1482.$$

11-xossa. Agar $|A|$ determinantni biror i-satrining algebraik to'ldiruvchilari A_{ij} (j=1,2, ..., n) va b_j (j=1,2, ..., n) ixtiyoriy sonlar bo'lsa, unda

$$b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+b_3A_{i3}+\cdots+b_nA_{in}=|B|$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda $|B|$ determinant $|A|$ determinantdan faqat i-satri bilan farq qilib, uning i-satri b_j (j=1,2, ..., n) sonlardan tashkil topgan bo'ladi.

Isbot: Bu xossa isbotini III tartibli $|A|$ determinantning, masalan, birinchi satri uchun keltiramiz. Bu holda

$$b_1A_{11}+b_2A_{12}+b_3A_{13}=|B|$$

yig'indining qo'shiluvchilari $|A|$ determinantning birinchi satr bo'yicha yoyilmasini ifodalovchi

$$a_1A_{11}+a_2A_{12}+a_3A_{13}=|A|$$

yig'indi qo'shiluvchilaridan faqat birinchi ko'paytuvchilari, ya'ni birinchi satr elementlari bilan farq qiladi. Shu sababli $|A|$, $|B|$ determinantlar bir-biridan faqat birinchi satri bilan farq qiladi va $|B|$ determinantning birinchi satri b_1, b_2 va b_3 sonlardan iborat bo'ladi.

Masalan, A_{11}, A_{12} va A_{13}

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 0 & 7 & 3\\ 9 & 12 & -4\end{vmatrix}$$

determinantni birinchi satri elementlarining algebraik to'ldiruvchilari bo'lsa, unda

$$11A_{11}+12A_{12}+13A_{13}=|B|=\begin{vmatrix}11 & 12 & 13\\ 0 & 7 & 3\\ 9 & 12 & -4\end{vmatrix}.$$

12-xossa. Agar $|A|$ determinantni biror i-satrining a_{ij} (j=1,2, ..., n) elementlari boshqa bir k-satr ($i \neq k$) mos elementlarining A_{kj} (j=1,2, ..., n) algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirilgan bo'lsa, bu ko'paytmalar yig'indisi nolga teng bo'ladi.

Isbot: Oldingi xossada $b_j = a_{ij}$ (j=1,2, ... , n) deb olsak, unda

$$b_1A_{k1}+b_2A_{k2}+b_3A_{k3}+\cdots+b_nA_{kn}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+a_{i3}A_{k3}+\cdots+a_{in}A_{kn}=|B|$$

Bu yerda $|B|$ determinant berilgan $|A|$ determinantning k-satriga i-satrining a_{ij} elementlarini qo'yish bilan hosil qilinadi. Shu sababli $|B|$

determinantning i-satri va k-satri bir xil bo'lib, 3-xossaga asosan, uning qiymati nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad i,k = 1,2,\cdots,n; \quad i \neq k. \quad (8)$$

13-xossa. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo'lsa ularning ko'paytmasining determinanti har birining determinantlari ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ tenglik o'rinlidir.

Bu xossani isbotsiz keltiramiz.

Ko'rib o'tilgan bu xossalar determinantlarni hisoblash va ularning turli tatbiqlarida qo'llaniladi.

2.3. Teskari matritsa

Biz matritsalar ustida qo'shish, ayirish va ko'paytirish amallarini ko'rib o'tgan edik. Matritsalar son tushunchasini umumlashtirishdan hosil qilinganligi haqida ham aytilgan edi. Sonlar uchun qo'shish, ayirish va ko'paytirish amallaridan tashqari bo'lish amali ham mavjud. Bunda ikkita b va a ($a\neq 0$) sonlar bo'linmasini quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a}b = a^{-1}b.$$

Bundan ko'rinadiki, bo'lish amalini $a\neq 0$ songa teskari bo'lgan a^{-1} son yordamida ko'paytirish amali orqali ifodalash mumkin. Bunda ixtiyoriy $a\neq 0$ va unga teskari a^{-1} sonlar orasida $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu tenglik faqat o'zaro teskari sonlar uchun o'rinlidir va shu sababli teskari sonni ta'rifi sifatida qabul qilinishi mumkin. Shu sababli bu tenglikdan berilgan A matritsaga teskari matritsa tushunchasini kiritish uchun foydalaniladi.

Ta'rif: Berilgan n-tartibli A kvadrat matritsaga ***teskari matritsa*** deb $AB=BA=E$ (E – n-tartibli birlik matritsa) shartni qanoatlantiruvchi n-tartibli B kvadrat matritsaga aytiladi.

Berilgan A matritsaga teskari matritsa A^{-1} kabi belgilanadi va ta'rifga asosan, ular uchun $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy $a\neq 0$ soni uchun a^{-1} teskari son mavjud va yagonadir. $a=0$ sonining esa teskarisi mavjud emas. Shu sababli matritsalar uchun quyidagi savollar paydo bo'ladi:

1. Qanday matritsalar uchun ularning teskarisi mavjud?
2. Teskari matritsa yagonami va uni qanday topish mumkin?

3. Qanday matritsalarning teskarisi mavjud emas?

Ta'rif: Agar A matritsaning determinanti $|A|=0$ bo'lsa, u ***maxsus matritsa***, aks holda, ya'ni $|A|\neq 0$ bo'lsa, ***maxsusmas matritsa*** deb ataladi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 11 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsalardan A maxsus (chunki $|A|=0$), B esa maxsusmas (chunki $|B|=19\neq 0$) matritsa bo'ladi.

Ta'rif: $\overline{A}$ berilgan A matritsaga ***biriktirilgan matritsa*** deb ataladi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

matritsa determinantining algebraik to'ldiruvchilari

$$A_{11}=5, A_{12}=-12, A_{13}=-20, A_{21}=3, A_{22}=-2, A_{23}=-12,$$
$$A_{31}=4, A_{32}=6, A_{33}=10$$

bo'lgani uchun unga birkitilgan matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -12 & -2 & 6 \\ -20 & -12 & 10 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Teskari matritsalar quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. $E^{-1}=E$.

Isbot: Bu xossa (3) teskari matritsani topish formulasidan bevosita kelib chiqadi.

2-xossa. $(A^{-1})^{-1}=A$.

Isbot: Bu xossa bevosita teskari matritsaning ta'rifidan, ya'ni $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ tenglikdan kelib chiqadi.

3-xossa. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Isbot: Teskari matritsa ta'rifi va matritsalar ko'paytmasining assotsiativlik xossasiga asosan quyidagi tengliklarni olamiz:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E.$$

Bu tengliklardan AB va $B^{-1}A^{-1}$ o'zaro teskari matritsalar ekanligi ko'rinadi.

4-xossa. $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Isbot: Matritsalarni transponirlash amalining $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ va $E^{\mathrm{T}}=E$ xossalaridan foydalanib ushbu tengliklarga ega bo'lamiz:

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E,\ (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(A\,A^{-1})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E.$$

Bu tengliklardan, teskari matritsa ta'rifiga asosan, $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ ekanligi kelib chiqadi.

5-xossa. $|A^{-1}|=1/|A|=|A|^{-1}$.

Isbot: Matritsalar ko'paytmasining determinanti uchun $|AB|=|A||B|$ formula va $|E|=1$ tenglik hamda teskari son ta'rifidan foydalanib, ushbu natijaga kelamiz:

$$\left|A^{-1}\right|\cdot|A|=\left|A^{-1}A\right|=|E|=1\Rightarrow\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}.$$

Matritsaning rangi. Endi kelgusida kerak bo'ladigan matritsa rangi tushunchasini kiritamiz. Dastlab oldin kvadrat matritsalar uchun aniqlangan minor tushunchasini ixtiyoriy to'rtburchakli matritsa uchun umumlashtiramiz.

Ta'rif: Har qanday $A_{m\times n}$ matritsaning ixtiyoriy ravishda tanlangan k ta ($k\leq\min(m,n)$) satr va ustunlarining kesishmasida joylashgan elementlaridan tuzilgan k-tartibli determinant bu matritsaning ***k-tartibli minori*** deyiladi.

Masalan,

$$A_{4\times 3}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

matritsaning har bir elementi uning I tartibli ,

$$\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}$$

kabi determinantlar II tartibli,

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

determinantlar esa berilgan matritsaning III tartibli minorlariga misol bo‘ladi.

Ta’rif: Berilgan *A* ***matritsaning rangi*** deb uning noldan farqli minorining eng katta tartibiga aytiladi.

Matritsaning rangi r(A) kabi belgilanadi va uni quyidagicha topish mumkin. Agar matritsaning barcha elementlari nolga teng, ya’ni u nol matritsa bo‘lsa, uning rangi r(A)=0 bo‘ladi. Matritsaning noldan farqli elementi mavjud bo‘lsa, uning rangi r(A)$\geq$1 bo‘ladi. Bu noldan farqli elementni o‘z ichiga olgan barcha II tartibli minorlarni hisoblaymiz. Agar barcha II tartibli minorlar nolga teng bo‘lsa, unda r(A)=1 bo‘ladi. Aks holda r(A) $\geq$2 bo‘ladi va noldan farqli biror II tartibli minorni o‘z ichiga olgan barcha III tartibli minorlarni qaraymiz. Ularning hammasi nolga teng bo‘lsa r(A)=2, aks holda r(A)$\geq$2 bo‘ladi. Bu jarayonni shunday tarzda davom ettiramiz. Natijada, biror qadamda noldan farqli k-tartibli minorni o‘z ichiga oluvchi barcha (k+1)-tartibli minorlar nolga teng bo‘lgan holga kelamiz va bundan matritsaning rangi r(A)=k ekanligini topamiz.

Masalan,

$$A_{4\times3} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini aniqlaymiz. Bu matritsaning noldan farqli elementi mavjud va shu sababli r(A) $\geq$1. Endi noldan farqli ixtiyoriy bir, masalan, a_{11}= -2 elementni, o‘z ichiga olgan va noldan farqli bo‘lgan II tartibli minor mavjud yoki yo‘qligini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2-9=-11\neq0.$$

Demak, r(A) $\geq$2 bo‘ladi. Bu noldan farqli II tartibli minorni o‘z ichiga olgan ikkita III tartibli minorlarni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu yerdan ko'rilayotgan matritsaning rangi r(A)=2 ekanligi kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, n-tartibli maxsusmas A matritsaning rangi r(A)=n bo'ladi.

Ta'rif: Agar A matritsaning rangi r(A)=k bo'lsa, uning noldan farqli ixtiyoriy bir k-tartibli minori ***bazis minor*** deb ataladi.

Masalan, yuqoridagi rangi r(A)=2 bo'lgan $A_{4\times 3}$ matritsa uchun bazis minor sifatida ushbu II tartibli minorni olish mumkin:

$$M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.4. Chiziqli tenglamalar tizimi. Chiziqli tenglamalar tizimini matritsa yordamida yechish

Chiziqli tenglamalar tizimi va ularning yechimi. Ko'pgina amaliy, jumladan, sportga oid masalalar chiziqli tenglamalar tizimi tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif: n noma'lumli m ta ***chiziqli tenglamalar tizimi*** deb quyidagi ko'rinishdagi tizimga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu yerda a_{ij} va b_i (i=1,2, ..., m; j=1,2, ..., n) – berilgan va ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lib, a_{ij} sonlari (1) tizimning

koeffitsiyentlari, b_i esa ***ozod hadlari*** deyiladi. Bu tizimda x_j ($j=1,2, \ldots, n$) noma'lumlar bo'lib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi[20].

Yig'indi belgisi yordamida (1) tizimni qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\cdots,m. \quad (2)$$

Endi (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar tizimining a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan to'rtburchakli A matritsani, x_j noma'lumlar va b_i ozod hadlardan hosil qilingan X va B ustun matritsalarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (3)$$

Unda, matritsalarni ko'paytirish amalidan foydalanib, (1) tizimni ixcham va qulay bo'lgan quyidagi matritsaviy ko'rinishda yozish mumkin:

$$AX=B. \quad (4)$$

<u>Ta'rif:</u> (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar tizimining ***yechimi*** deb shunday $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$ sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar tizimiga qo'yilganda, har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya'ni to'gri tenglikka aylanadi.

Tizimning yechimlari

$$X=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_k \quad \cdots \quad \alpha_n)^T$$

ustun matritsa ko'rinishda yozilsa, u (4) matritsaviy tenglamani to'gri tenglikka aylantiradi. Bunda n-ta sondan tuzilgan X ustun matritsa tizimining bitta yechimi bo'lib hisoblanadi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-6 \\ 2x_1-5x_2+4x_3=32 \end{cases} \quad (5)$$

$n=3$ noma'lumli $m=2$ ta tenglamalar tizimi uchun $x_1=1$, $x_2=-2$ va $x_3=5$ yoki

$$X=(1 \quad -2 \quad 5)^T$$

[20] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 7.

ustun matritsani tashkil etgan sonlar yechim bo'ladi. Haqiqatan ham bu sonlarni berilgan (5) tizim tenglamalariga qo'ysak,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 5 \equiv -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 \equiv 32 \end{cases}$$

to'gri tengliklarga ega bo'lamiz.

Tizimning yechimini mavjudligini tekshirish va yechim mavjud bo'lgan taqdirda, uni topish ***tizimini yechish*** deb ataladi[21]. Chiziqli tenglamalar tizimini yechishda uch hol bo'lishi mumkin.

1-hol. Tizim yechimga ega va bu yechim yagona. Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -14 \\ 2x_1 - 3x_2 = 19 \end{cases}$$

tizim uchun x_1=2 va x_2= –5 yagona yechim bo'ladi.

2-hol. Tizim yechimga ega va bu yechim bittadan ortiq. Masalan, yuqoridagi (5) tizim uchun ko'rsatilgan yechimdan tashqari x_1=–5, x_2=26 va x_3=43 ham yechim bo'lishini bevosita tekshirish mumkin.

3-hol. Tizim yechimga ega emas. Masalan,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

tizim yechimga ega emas, chunki yig'indisi bir paytning o'zida ham 1, ham 0 bo'ladigan sonlar mavjud emas.

Ta'rif: Agar chiziqli tenglamalar tizimi hech bo'lmaganda bitta yechimga ega bo'lsa, u holda bu tizim ***birgalikda*** deyiladi; agar yechimga ega bo'lmasa tizim ***birgalikda emas*** deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar tizimi yagona yechimga ega bo'lsa, u ***aniq*** deyiladi; bittadan ortiq yechimga ega bo'lsa, u ***aniqmas*** tenglamalar tizimi deyiladi.

Berilgan (1) tenglamalar tizimini birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlash uchun uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan (3) $m \times n$ tartibli A matritsaga B ozod hadlar ustunini birlashtirishdan hosil bo'lgan $m \times (n+1)$ tartibli

[21] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 9.

$$A^b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (6)$$

matritsani qaraymiz .

__*Ta'rif:*__ A^b matritsa A matritsaning ***kengaytirilgani*** deb ataladi.

__*Kroneker-Kapelli teoremasi:*__ (1) chiziqli tenglamalar tizimi birgalikda bo'lishi uchun uning matritsasi A va kengaytirilgan matritsa A^b ranglari o'zaro teng, ya'ni r(A)=r(A^b)=r shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Birgalikda bo'lgan chiziqli tenglamalar tizimi uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin:

1. Agar birgalikdagi (1) tizim matritsasining rangi r(A) va unga kiruvchi noma'lumlar soni n o'zaro teng, ya'ni r(A)=n bo'lsa, unda bu tizim yagona yechimga ega, ya'ni aniq bo'ladi.

2. Agar birgalikdagi (1) tizim matritsasining rangi r(A)<n bo'lsa, bu tizim cheksiz ko'p yechimga ega, ya'ni aniqmas bo'ladi.

Kroniker-Kapelli teoremasi va yuqorida keltirilgan tasdiqlar (1) tizim yechimini mavjud yoki mavjud emasligi, ularning soni haqida xulosa chiqarishga imkon beradi, ammo tizimning yechimini topish yo'lini ko'rsatmaydi. Shu sababli endi chiziqli tenglamalar tizimini yechish masalasiga o'tamiz.

Dastlab (1) tizimda $m=n$, ya'ni noma'lumlar va tenglamalar soni o'zaro teng hamda r(A)=n bo'lgan holni ko'ramiz. Bu shartlarda ko'rilayotgan tizim yagona yechimga ega bo'lib, uni yechishning turli usullari mavjud.

Matritsalar usuli. Bu usulda tizimning matritsaviy ko'rinishda yozilgan (4) ifodasidan foydalaniladi. Bunda r(A)=n shartdan tizimning n-tartibli A kvadrat matritsasi maxsusmas ekanligi kelib chiqadi, chunki matritsa rangi ta'rifiga asosan, $\Delta=|A|\neq 0$ bo'ladi. Bu holda A matritsaga teskari matritsa A^{-1} mavjud va (4) matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini unga chap tomondan ko'paytirish mumkin[22]. Natijada, teskari matritsa ta'rifi va birlik matritsa xossasidan foydalanib, ushbu formulani hosil etamiz:

---

[22] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 57.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B. \quad (7)$$

(4) matritsaviy ko‘rinishdagi n noma’lumli chiziqli n ta tenglamalar tizimi yechimini ifodalovchi (7) formula bir noma’lumli $ax=b$ ($a\neq 0$) chiziqli tenglamaning yechimini determinant $x=b/a=a^{-1}b$ formulaga o‘xshash ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

Misol: Ushbu tenglamalar tizimini matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Dastlab tizimning A matritsasini yozib, uning determinantini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43 \neq 0.$$

Demak A matritsa maxsusmas, unga teskari matritsa mavjud va uni quyidagicha topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}.$$

Endi (7) formula bo‘yicha noma’lumlardan tuzilgan X ustun matritsani aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Demak, tizimning yagona yechimi $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib, matritsalar usuli har qanday n noma’lumli n ta tenglamali aniq tizim yechimini oddiy va ixcham ko‘rinishdagi (7) formula bilan ifodalash imkonini beradi. Bu formula nazariy tadqiqotlar uchun qulaydir, ammo n oshib borishi bilan uning amaliy tatbig‘i murakkablashib boradi. Bunga sabab shuki, bu holda A^{-1} teskari matritsani topish uchun yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga to‘g‘ri keladi[23].

---

[23] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 59.

Kramer (determinantlar) usuli. Matritsaviy ko'rinishda (7) formula bilan ifodalanuvchi (1) tizim ($m=n$) yechimini teskari matritsa formulasidan foydalanib quyidagicha yozamiz:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bu yerdan tizimning x_k ($k=1, 2, \ldots, n$) yechimi uchun ushbu formulalar kelib chiqadi:

$$x_k=\frac{1}{\Delta}(b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk})=\frac{1}{\Delta}\Delta_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},\ k=1,2,\cdots,n. \quad (8)$$

Bunda determinantning 11-xossasidan foydalanib, $k=1, 2, \ldots, n$, uchun ushbu

$$b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik-1} & b_i & a_{ik+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\equiv\Delta_k$$

tengliklar o'rinli bo'lishidan foydalandik. (8) formulalarda (1) tizimning a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

determinant tizimning ***asosiy determinanti***, uning k-ustunini ozod hadlar ustuni B bilan almashtirishdan hosil bo'lgan Δ_k (k=1,2, ..., n) determinantlar esa ***yordamchi determinantlar*** deyiladi.

<u>Ta'rif:</u> (1) chiziqli tenglamalar tizimining yechimini asosiy va yordamchi determinantlar orqali ifodalovchi (8) tengliklar ***Kramer formulalari*** deb ataladi.

Kramer usulining afzalligi shundan iboratki, u orqali tizimning ma'lum bir noma'lumlarini ham (masalan, faqat x_1 va x_2 noma'lumlarni) topish mumkin. Ammo, bu usul ham n katta bo'lganda, yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni taqozo etadi va shu sababli uni amalda qo'llash katta qiyinchiliklar bilan bog'liq.

Kramer formulalarini n=2 hol uchun yozamiz. Bunda (1) chiziqli tenglamalar tizimi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

ko'rinishda bo'ladi[24].

Shunga o'xshash n=3 bo'lganda sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

[24] Естественно-научные основы физической культуры и спорта: учебник / под ред. А.В.Самсоновой, Р.Б.Цаллаговой. – М.: Советский спорт, 2014. С. – 18.

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

ko'rinishda bo'ladi[25].

Misol: Ushbu uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hosil etamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=18,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-5,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-1,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=7.$$

Kramer formulalariga asosan, tizim yechimini topamiz:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{5}{18},\quad x_{21}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{1}{18},\quad x_3=\frac{\Delta_{31}}{\Delta}=\frac{7}{18}.$$

Shuni yana bir marta ta'kidlab o'tamizki, (1) tizim $n=m$ holda yagona yechimga ega, ya'ni birgalikda va aniq bo'lishi uchun uning

[25] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 61.

asosiy determinanti $\Delta\neq0$ bo'lishi kerak va bunda yechim matritsalar usulida (7), Kramer usulida esa (8) formulalar bilan topiladi.

Ko'rsatish mumkinki, agar $n=m$ holda (1) tizimning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lsa, unda quyidagi ikki hol bo'ladi:

1) Barcha yordamchi determinantlar $\Delta_k=0$ ($k=1,2, \ldots,n$) bo'lsa, unda (1) tizim cheksiz ko'p yechimga ega, ya'ni birgalikda va aniqmas bo'ladi.

2) Agar yordamchi Δ_k ($k=1,2, \ldots,n$) determinantlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, unda (1) tizim yechimga ega emas, ya'ni birgalikda bo'lmaydi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ 6x_1 - 10x_2 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ 6x_1 - 10x_2 = 12 \end{cases}$$

tizimlarning birinchisi uchun $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$ va u $x_1=c$, $x_2=(3c-4)/5$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p yechimga ega. Ikkinchi tizim uchun esa $\Delta=0$, ammo $\Delta_1=20\neq0$ bo'lgani uchun u yechimga ega emas. Haqiqatan ham tizimning II tenglamasidan $3x_1-5x_2=6$ ekanligi kelib chiqadi va u tizimning I tenglamasiga ziddir.

Gauss (noma'lumlarni yo'qotish) usuli. Chiziqli tenglamalar tizimini matritsalar yoki Kramer usulida yechishda bevosita berilgan (1) tizimning o'zi bilan ish ko'riladi. Endi qaralayotgan Gauss usulida esa berilgan (1) tizim boshqa bir tizimga keltiriladi shu sababli bizga quyidagi tushuncha kerak bo'ladi.

Ta'rif: Agar ikkita chiziqli tenglamalar tizimlarining yechimlar to'plami o'zaro teng bo'lsa, ular ***ekvivalent (teng kuchli) tizimlar*** deyiladi.

Masalan,

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = -23 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

tizimlar ekvivalent, chunki ular bir xil $x_1=-2$, $x_2=5$ yechimga ega.

Teorema: Agar (1) tizimning ikkita tenglamalari o'rni o'zaro almashtirilsa yoki ulardan biri ixtiyoriy λ songa ko'paytirilib boshqa bir tenglamasiga qo'shilsa, natijada berilgan tizimga ekvivalent tizimi hosil bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

tizimning ikkinchi va uchinchi tenglamalarining o'rnini almashtirish va hosil bo'lgan tizimning birinchi tenglamasini $\lambda=-2$ songa ko'paytirib, uchinchi tenglamasiga qo'shish natijasida hosil bo'lgan quyidagi tizim berilgan tizimga ekvivalent bo'ladi:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -11x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Haqiqatan ham bu tizimlarni Kramer yoki matritsalar usulida yechib, ularning ikkalasini ham bir xil

$$x_1 = -\frac{11}{63}, \quad x_2 = \frac{25}{63}, \quad x_3 = -\frac{10}{63}$$

yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Endi birgalikda va aniq bo'lgan quyidagi n noma'lumli n ta chiziqli tenlamalar tizimini Gauss usulida yechishga o'tamiz[26]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots a_{kn}x_n = b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (9)$$

1-qadam. (9) tizimda $a_{11}\neq0$ deb olish mumkin, chunki bu shart bajarilmagan bo'lsa, (9) tizimdagi tenglamalar o'rnini almashtirish orqali unga erishish mumkin. Tizimning 1-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k1}/a_{11}$ songa ko'paytirib, uning k-tenglamasiga (k=2,3, ..., n) qo'shamiz. Natijada hosil bo'ladigan ekvivalent tizimning k-tenglamasida noma'lum x_1 qatnashmaydi va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

[26] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 67.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad a_{k2}^{(1)}x_2 + a_{k3}^{(1)}x_3 + \cdots a_{kn}^{(1)}x_n = b_k^{(1)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}
\end{cases} \quad (9^{(1)})
$$

2-qadam. Hosil bo'lgan $(9^{(1)})$ tizimda yuqoridagi singari yana $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb olish mumkin. Bu tizimning 2-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ songa ko'paytirib, uning k-tenglamasiga (k=3,4,...,n) qo'shamiz. Natijada hosil bo'ladigan ekvivalent tizimining k-tenglamasida noma'lum x_2 qatnashmaydi va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\
\qquad\qquad a_{43}^{(2)}x_3 + \cdots a_{4n}^{(2)}x_n = b_4^{(2)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}
\end{cases} \quad (9^{(2)})
$$

***n*-qadam.** Yuqoridagi jarayonni ketma-ket n–1 marta takrorlab, quyidagi ko'rinishdagi ekvivalent tizimiga kelamiz:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\
\qquad\qquad\quad a_{44}^{(3)}x_4 + \cdots a_{4n}^{(3)}x_n = b_4^{(3)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}
\end{cases} \quad (9^{(n-1)})
$$

Bu ***Gauss usulining to'g'ri yo'li***, uning natijasida hosil bo'lgan $(9^{(n-1)})$ tizim ***uchburchakli*** deyiladi.

Endi $(9^{(n-1)})$ tizimning oxirgi tenglamasidan x_n noma'lumning qiymatini topamiz. So'ngra x_n qiymati $(9^{(n-1)})$ yoki $(9^{(n-2)})$ tizimning oxirgidan oldingi tenglamasiga qo'yib, undan x_{n-1} noma'lumning qiymatini aniqlaymiz. Shunday tarzda davom etib, birin-ketin x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1 noma'lumlar qiymatlarini topamiz. Bu jarayon ***Gauss usulining teskari yo'li*** deyiladi[27].

Gauss usulining matritsalar va Kramer usullaridan afzalliklari quyidagilardan iborat:

- bu usul yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni talab etmaydi va faqat arifmetik amallar orqali bajariladi;
- bu usulni deyarli yuqorida ko'rsatilgan ko'rinishda amalga oshirib, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar tizimini, jumladan, noaniq tizimlarni ham yechish mumkin;
- bu usul sodda hisoblash algoritmiga ega bo'lib, uni kompyuterda amalga oshirish oson.

Misol: Ushbu tizimni Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu tizimdan noma'lumlarni birin-ketin yo'qotamiz.

1-qadam. Tizimning ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Kasr sonlarga kelmaslik va bu orqali hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida buni quyidagicha amalga oshiramiz. Dastlab 1-tenglamani ikkala tomonini –3 soniga, 2-tenglamani esa 2 soniga ko'paytirib, ularni o'zaro qo'shamiz. So'ngra 1-tenglamani ikkala tomonini – 2 soniga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamani 3-tenglamaga qo'shamiz. Natijada quyidagi ekvivalent tizimiga kelamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}.$$

2-qadam. Oldingi qadamda hosil qilingan tizimning 2-tenglamasini – 8 soniga, 3-tenglamasini 17 soniga ko'paytirib o'zaro qo'shamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ 43x_3 = 129 \end{cases}$$

[27] Howard Anton, Chris Rorres. Elementary Linear Algebra: Applications Version, 10th. – USA: Lehigh University, John Wiley & Sons, 2010. – P. 27.

Dastlab, bu uchburchakli tizimning 3-tenglamasidan $x_3=3$ ekanligini topamiz.

So'ngra bu natijani tizimning 2-tenglamasiga qo'yib, undan $x_2=-2$ ekanligini aniqlaymiz. Yakuniy qadamda $x_2=-2$ va $x_3=3$ natijalarni tizimning 1-tenglamasiga qo'yib, undan $x_1=1$ ekanligini topamiz. Demak, berilgan tizimning yagona yechimi $x_1=1$, $x_2=-2$ va $x_3=3$ ekan.

n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar tizimsi. Endi (1) tizimni $m \neq n$ holda yechish masalasi ustida to'xtalib o'tamiz. Bunda doimo $m \leq n$, ya'ni tenglamalar soni noma'lumlar sonidan katta emas, deb hisoblashimiz mumkin. Agar $m>n$ bo'lsa, unda noma'lumlarni yo'qotish usulidan quyidagicha foydalanib, $m \leq n$ holga kelamiz. 1-qadamda tizimning ikkinchi va undan keyingi barcha tenglamalaridan x_1 noma'lumni yo'qotib, ularda faqat x_2, x_3, …, x_n noma'lumlar qatnashishiga erishamiz. 2-qadamda tizimning uchinchi va undan keyingi barcha tenglamalaridan x_2 noma'lumni yo'qotib, ularda faqat x_3, x_4, …, x_n noma'lumlar qatnashishiga erishamiz. Bu jarayonni davom ettirib, $(n-1)$-qadamda n-tenglama va undan keyingi tenglamalarda faqat bitta x_n noma'lum qolishiga erishamiz. Navbatdagi qadamda n- tenglamadan foydalanib, $(n+1)$-tenglama va undan keyingi barcha tenglamalardan oxirgi x_n noma'lumni yo'qotamiz. Natijada bu tenglamalar o'rnida $0=b_k$ ($k=n+1, n+2, \ldots, m$) ko'rinishidagi ifodalar paydo bo'ladi. Agar (1) tizim birgalikda, ya'ni yechimga ega bo'lsa, unda hamma b_k sonlar nollardan iborat bo'ladi va aksincha. Agar b_k sonlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, unda (1) tizim birgalikda emas, ya'ni yechimga ega bo'lmaydi. Ikkala holda ham tizimda qolgan tenglamalar soni n ga teng yoki undan kichik bo'ladi, chunki qolgan tenglamalar orasida ham $0=b_k$ ko'rinishdagi ifodalar bo'lishi mumkin[28].

Misol sifatida $m=4$, $n=3$ bo'lgan ushbu tizimni qaraymiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 10x_1 - 3x_2 \qquad = 11 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

[28] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 71.

Bu tizimning 1-tenglamasidan foydalanib, keyingi tenglamalaridan x_1 noma'lumni yo'qotamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases}.$$

Hosil bo'lgan tizimning 2-tenglamasidan foydalanib, keyingi tenglamalaridan x_2 noma'lumni yo'qotamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Demak, berilgan sistema m=2, n=3 (m<n) bo'lgan ushbu tizimga ekvivalent ekan:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 11x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases}.$$

Shunday qilib, (1) tizimda $m \leq n$ bo'lsin. Bu tizim yechimga ega, ya'ni (3) va (6) matritsalarning ranglari teng va $r(A)=r(A^b)=r$ bo'lsin. Bunda $r \leq m$ bo'ladi. Agar $r=m=n$ bo'lsa, unda tizimning asosiy determinanti $\Delta=|A|\neq 0$ bo'ladi, ya'ni oldin ko'rib o'tilgan holga kelamiz va tizim yechimini matritsalar, Kramer yoki Gauss usullaridan birining yordamida topamiz.

Endi (1) tizim matritsasining rangi $r(A)=r<n$ bo'lgan holni ko'ramiz (har doim $r \leq m$ bo'lishini eslatib o'tamiz). Bunga oldin qaralmagan $m=n$, ammo $\Delta=|A|=0$ bo'lgan hol ham kiradi. Bu holda matritsaning biror r-tartibli M bazis minorini qaraymiz. (1) tizimning koeffitsiyentlari shu bazis minorga kirgan r ta tenglamalarini qoldirib, qolgan m–r ta tenglamasini o'chirib tashlaymiz. Bunga sabab shuki, bu m–r ta tenglamani qoldirilgan r ta tenglamalardan hosil qilish mumkin, ya'ni ular noma'lumlar to'g'risida yangi ma'lumot bermaydi. Qoldirilgan r ta tenglamalarni (1) tizimning dastlabki r ta tenglamasi deb qarash mumkin (aks holda tizimdagi tenglamalar o'rnini almashtirish orqali bunga erishib bo'ladi). Bu holda (1) tizimga ekvivalent bo'lgan ushbu tizimga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kr}x_r + a_{kr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Bu tizimning tenglamalaridagi koeffitsiyentlari bazis minorga kirgan noma'lumli (ularni x_1, x_2, …, x_r deb olishimiz mumkin) qo'shiluvchilarni o'z joyida qoldirib, boshqa x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n noma'lumli qo'shiluvchilarni tenglamalarni o'ng tomoniga o'tkazib, (10) tizimga kelamiz. Bu tizimdagi x_1, x_2, …, x_r noma'lumlar ***asosiy o'zgaruvchilar***, qolgan n–r ta x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n noma'lumlar esa ***erkli o'zgaruvchilar*** deb ataladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kr}x_r = b_k - (a_{kr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{kn}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r == b_m - (a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n) \end{cases} \qquad (10)$$

Erkli o'zgaruvchilarga ixtiyoriy bir $x_{r+1}=C_1$, $x_{r+2}=C_2$, …, $x_n=C_{n-r}$ qiymatlarni beramiz. Unda (10) x_1, x_2, …, x_r asosiy o'zgaruvchilarga nisbatan r noma'lumli r ta chiziqli tenglamalar tizimini ifodalaydi. Bu tizimning asosiy determinanti M bazis minordan iborat bo'lib, noldan farqlidir. Unda (10) tizim yagona yechimga ega bo'lib, uni matritsalar yoki Kramer yoki Gauss usulida topish mumkin. Demak, asosiy x_1, x_2, …, x_r o'zgaruvchilarning qiymatlari $x_{r+1}=C_1$, $x_{r+2}=C_2$, …, $x_n=C_{n-r}$ erkli o'zgaruvchilar qiymatlariga bog'liq holda aniqlanadi, ya'ni:

$$x_1 = x_1(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}), x_2 = x_2(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}), \cdots, x_r = x_r(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r})$$

ko'rinishda bo'ladi. Unda (1) yoki unga ekvivalent (10) tizim cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, ular

$$X = (x_1 = x_1(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}) \quad \cdots \quad x_r = x_r(C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}) \quad C_1 \quad \cdots \quad C_{n-r})^T$$

ustun matritsani tashkil etadi va tizimning ***umumiy yechimi*** deyiladi. Bunda $C_1=0$, $C_2=0$, …, $C_{n-r}=0$ holga mos keladigan X ***bazis yechim*** deb ataladi.

Misol: Ushbu tizimni yeching:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 7x_1 + 12x_2 - 11x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu tizimda $m=n=3$ va uning asosiy determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 7 & 12 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu tizim matritsasining rangi $r(A)=2$ bo'lib, bazis minor sifatida, masalan, ushbu II tartibli minorni olish mumkin:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 .$$

Bu minorga tizimning dastlabki ikkita tenglamalarini koeffitsiyentlari kirgan va shu sababli ularni qoldirib, 3-tenglamani o'chirib tashlaymiz hamda x_3 erkli o'zgaruvchini tenglamani o'ng tomoniga o'tkazamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_3 + 7 \\ x_1 - 3x_2 = -4x_3 + 6 \end{cases}.$$

Oxirgi tizimda $x_3=C$ deb va Kramer usulidan foydalanib, berilgan tiziming umumiy yechimini topamiz:

$$x_1 = -\frac{1}{11}(5C - 33), \quad x_2 = \frac{1}{11}(13C - 11), \quad x_3 = C.$$

Topilgan umumiy yechimda $C=0$ deb

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0$$

bazis yechimga ega bo'lamiz.

Misol: Ushbu tizimni tekshiring va uning umumiy hamda bazis yechimni toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Yechish: Bu tizimda $m=3$ va $n=4$, ya'ni $m<n$. Bu tizimning matritsasi va uning kengaytirilganini qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad A^b=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Bu matritsalarning rangi r(A)= r(A^b)= r=2 ekanligini tekshirib ko‘rish mumkin. Demak, bu tizim birgalikda va uning rangi noma’lumlar sonidan kichik, ya’ni r=2<4 bo‘lgani uchun bu tizim cheksiz ko‘p yechimga egadir. Bu tizimning x_1 va x_2 noma’lumlari oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli va shu sababli uni bazis minor, x_1 va x_2 noma’lumlarni esa asosiy o‘zgaruvchilar deb olish mumkin. Bundan tashqari, tizim matritsasining rangi r=2 bo‘lgani uchun uning bir tenglamasini, masalan uchinchisini, o‘chirib tashlash mumkin. Asosiy o‘zgaruvchilarni hosil qilingan tenglamalar tizimining chap tomonida qoldirib, qolgan x_3 va x_4 erkli o‘zgaruvchilarni tenglamalarning o‘ng tomoniga o‘tkazamiz:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=2x_3-3x_4-6\\ 2x_1-x_2=-x_3+x_4+5\end{cases}$$

Bu tizimda erkli o‘zgaruvchilarga ixtiyoriy $x_3=C_1$ va $x_4=C_2$ qiymatlar beramiz va uning umumiy yechimini Kramer usulida topamiz:

$$x_1=\frac{1}{5}(4-C_2),\quad x_2=\frac{1}{5}(5C_1-7C_2-17),\quad x_3=C_1,\quad x_4=C_2\ .$$

Bu yerda $C_1=0$, $C_2=0$ deb ushbu bazis yechimni hosil etamiz:

$$x_1=\frac{4}{5},\quad x_2=-\frac{17}{5},\quad x_3=0,\quad x_4=0\ .$$

Misol: Ushbu tizimni tekshiring:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+3x_4=-6\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=5\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=3\end{cases}$$

Yechish: Bu tizimda $m=3$ va $n=4$, ya’ni $m<n$. Bu tizimning matritsasi va uning kengaytirilganini qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad A^b=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Bunda A matritsalarning rangi r(A)=2, kengaytirilgan matritsa rangi esa r(A^b)=3 bo'ladi. Haqiqatan ham uning ushbu III tartibli minori

$$M=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -6\\ 1 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-14\neq 0.$$

Bundan r(A)≠r(A^b) ekanligini ko'ramiz va shu sababli, Kroniker-Kapelli teoremasiga asosan, bu tizim birgalikda emas, ya'ni uning yechimi mavjud emas.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar tizimi. Endi (1) n noma'lumli m ta tenglamalar tizimining maxsus bir holini alohida ko'rib o'tamiz.

Ta'rif: Agar (1) chiziqli tenglamalar tizimning o'ng tomonidagi barcha ozod hadlar nolga teng bo'lsa, u holda bu tizim ***bir jinsli chiziqli tenglamalar tizimi*** deyiladi.

Demak, n noma'lumli m ta bir jinsli chiziqli tenglamalar tizimi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+a_{k3}x_3+\cdots+a_{kn}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\quad (11)$$

Chiziqli bir jinsli tenglamalar tizimi hamma vaqt birgalikdadir, chunki u hech bo'lmaganda bitta x_1=0, x_2=0, ..., x_n=0 yechimga ega.

Ta'rif: (11) bir jinsli tizimning yechimi faqat nollardan iborat bo'lsa, u ***trivial yechim***, aks holda, ya'ni tizimning yechimi ichida kamida bitta noldan farqli son mavjud bo'lsa, u ***notrivial yechim*** deb ataladi.

Kroniker-Kapelli teoremasidan quyidagi tasdiq bevosita kelib chiqadi.

Teorema: Agar (11) bir jinsli tizim determinantining rangi $r(A)=n$ bo'lsa, bu tizim faqat trivial yechimga ega bo'ladi. Bu tizim notrivial yechimga ega bo'lishi uchun $r(A)=r<min(m,n)$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli sistemalardan birinchisi faqat trivial yechimga ega (chunki $r(A)=2=n$), ikkinchisi uchun esa notrivial yechimlar ham mavjud (chunki $r(A)=2<n=3$).

2-teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija: Bir jinsli (11) tizim $m=n$ holda notrivial yechimga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar (11) bir jinsli tizimning notrivial yechimi mavjud bo'lsa, u yuqorida ko'rsatilgan asosiy va erkli o'zgaruvchilarni tanlab olish orqali topiladi[29].

Misol: Ushbu bir jinsli tizimni tekshiring va uning notrivial yechimi mavjud bo'lsa, bu yechimni toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Bu tizim matritsasining rangi $r(A)=2<n=4$. Demak, uning notrivial yechimi mavjud. Asosiy o'zgaruvchilar sifatida x_1 va x_2, erkli o'zgaruvchilar sifatida x_3 va x_4 noma'lumlarni tanlashimiz hamda tizimning uchinchi tenglamasini o'chirib tashlashimiz mumkin va natijada berilgan tizimga ekvivalent bo'lgan ushbu tizimga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}.$$

[29] Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – P. 79.

Bu tizimda erkli o‘zgaruvchilarga ixtiyoriy $x_3=C_1$ va $x_4=C_2$ qiymatlar berib, x_1 va x_2 asosiy o‘zgaruvchilarni Kramer usulida topamiz:

$$x_1=-\frac{1}{5}C_2\,,\quad x_2=-\frac{1}{5}(5C_1-7C_2)\ .$$

Demak, berilgan bir jinsli tizim cheksiz ko‘p notrivial yechimga ega va ular quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x_1=-\frac{1}{5}C_2\,,\quad x_2=-\frac{1}{5}(5C_1-7C_2)\,,\quad x_3=C_1\,,\quad x_4=C_2\ .$$

Bu yerda $C_1=C_2=0$ desak, trivial yechimga, qolgan hollarda esa notrivial yechimlarga ega bo‘lamiz. Masalan, $C_1=5$, $C_2=-10$ bo‘lganda tizimning ushbu notrivial yechimi kelib chiqadi:

$$x_1=-1\,,\quad x_2=19\,,\quad x_3=5\,,\quad x_4=-10\,.$$

Bir jinsli (11) tizimning $x_1=k_1$, $x_2=k_2$, ..., $x_n=k_n$ yechimini $X=(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n)$ satr matritsa ko‘rinishda belgilaymiz. Chiziqli bir jinsli tenglamalar tizimining yechimlari quyidagi xossalarga ega bo‘lishini tekshirib ko‘rish mumkin:

1-xossa. Agar $X=(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n)$ bir jinsli (11) tizimining yechimi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy λ soni uchun

$$\lambda X=\lambda(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n)=(\lambda k_1,\lambda k_2,\lambda k_3,\ldots,\lambda k_n)$$

ham shu tizimning yechimi bo‘ladi.

2-xossa. Agar $X_1=(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n)$ va $X_2=(l_1,l_2,l_3,\ldots,l_n)$ bir jinsli (11) tizimning yechimlari bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C_1 va C_2 sonlar uchun

$$X=C_1X_1+C_2X_2=(C_1k_1+C_2l_1,\ C_1k_2+C_2l_2,\ldots,\ C_1k_n+C_2l_n)$$

ham (11) tizimning yechimi bo‘ladi. Bunda $C_1X_1+C_2X_2$ algebraik yig‘indi X_1 va X_2 yechimlarning ***chiziqli kombinatsiyasi*** deyiladi.

Ta’rif: (11) tizimning qandaydir X_1, X_2, ..., X_k yechimlari ***chiziqli bog‘liqmas*** deyiladi, agarda

$$C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_kX_k=O$$

tenglik faqat va faqat $C_1=C_2=\ldots=C_k=0$ bo‘lganda bajarilsa. Aks holda, bu yechimlar ***chiziqli bog‘liq*** deyiladi. Bu yerda $O=(0,0,\ldots,0)=O_{1\times n}$ – nol satr matritsani ifodalaydi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar tizimi yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi yana shu tizimning yechimi bo'lishi yuqoridagi xossalardan kelib chiqadi. Shuning uchun shunday chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarni topish kerakki, ular orqali tizimning barcha qolgan yechimlari chiziqli ifodalansin.

Ta'rif: Agar (11) bir jinsli tenglamalar tizimning har qanday X yechimini qandaydir chiziqli bog'liq bo'lmagan X_1, X_2, ..., X_k yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalab bo'lsa, unda X_1, X_2, ..., X_k ***fundamental yechimlar tizimi*** deyiladi.

Chiziqli tenglamalar tizimining sportga oid va iqtisodiy tatbiqlari. Chiziqli tenglamalar tizimi sportga oid va iqtisodiy masalalarni yechishda juda keng qo'llanishini aytib o'tgan edik. Masalan, mashqlardan foydalanishning eng optimal yo'lini topish, transportda yuk tashishni tashkil etishda eng kam xarajatga erishish, katta sportda sportchilarning ovqatlanish ratsionini oqilona tuzish va hokazo. Bunday masalalarni o'rganish va yechish natijasida "Chiziqli dasturlash" deb ataladigan matematikaning yangi bir yo'nalishi yaratildi va unda chiziqli tenglamalar tizimi ko'p ishlatiladi. Bunga misol sifatida ikkita masalani ko'ramiz.

Masala: Respublika, Osiyo va Jahoh miqyosida musobaqalar o'tkaziladi. Bu musobaqalarga sportchi ishtirok etishi uchun sport klubida mashg'ulot turi sifatida mashq 1, mashq 2 va mashq 3 bajariladi. Bir nafar sportchining musobaqaga ishtirok etishi uchun bajariladigan mashg'ulotlar normasi va mashqlarning zaxirasi bo'yicha ma'lumotlar quyidagi jadvalda berilgan:

Mashg'ulot turi	Bir nafar sportchining musobaqaga ishtirok etishi uchun bajariladigan mashg'ulotlar normasi			Mashqlar-ning zaxirasi
	Respublika	Osiyo	Jahoh	
Mashq 1	2	5	2	2350
Mashq 2	7	3	5	2750
Mashq 3	1	2	3	1400

Bu ma'lumotlar asosida mashqlardan to'liq foydalanish maqsadida har bir musobaqa turining o'tkazilish sonini toping.

Yechish: Respublika, Osiyo va Jahoh miqyosida o'tkaziladigan musobaqalar sonini mos ravishda x_1, x_2 va x_3 deb belgilaymiz. Jadvaldagi ma'lumotlar asosida uchala musobaqaga ishtirok uchun bajariladigan har bir mashqlar miqdorini topamiz va uni mashqlar zaxirasi bilan tenglashtiramiz. Natijada quyidagi chiziqli tenglamalar tizimiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2350 \\ 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2750 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1400 \end{cases}$$

Bu chiziqli tenglamalar tizimini yuqorida ko'rib o'tilgan usullardan biri yordamida yechib, x_1=100, x_2=350 va x_3=200 ekanligini topamiz. Demak, sport klubi 200 marta Respublika, 350 marta Osiyo va 200 marta Jahoh miqyosidagi musobaqalarda ishtirok etsa mashqlar to'liq bajariladi.

Masala: Buxoro va Kogon paxta zavodlari Qorako'l va G'ijduvon to'qimachilik korxonalariga momiq (paxta tolasi) yetkazib beradi. Buxoro va Kogon paxta zavodlari oy davomida mos ravishda 400 va 250 birlik momiq ishlab chiqaradi. Qorako'l va G'ijduvon to'qimachilik korxonalari oy davomida mos ravishda 300 va 350 birlik momiq ishlatadi. Har bir paxta zavodidan har bir to'qimachilik korxonasiga birlik momiqni yetkazishning transport xarajatlari pul birligida quyidagi jadvalda ko'rsatilgan[30]:

Paxta zavodi	Bir birlik momiqni transportda tashish xarajatlari (pul birligida)	
	G'ijduvon to'qimachilik korxonasi	Qorako'l to'qimachilik korxonasi
Buxoro	10	15
Kogon	8	20

Transport xarajatlari uchun 7500 pul birligi ajratilgan. Paxta zavodlaridan momiqni to'qimachilik korxonalariga transportda tashishning oqilona rejasini toping.

Yechish: Buxoro va Kogon paxta zavodlaridan G'ijduvon hamda Qorako'l to'qimachilik korxonalariga yetkaziladigan momiq hajmini mos ravishda x_1 va x_2 hamda x_3 va x_4 noma'lumlar kabi belgilaymiz.

[30] Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Darslik. – T., 2012. – B 76.

Bu holda, masala shartlariga asosan, izlanayotgan noma'lumlar uchun quyidagi tenglamalarni yozishimiz mumkin:

$x_1 + x_3 = 400$ (Buxoro paxta zavodi ishlab chiqargan momiq miqdori),

$x_2 + x_4 = 250$ (Kogon paxta zavodi ishlab chiqargan momiq miqdori),

$x_1 + x_2 = 350$ (G'ijduvon to'qimachilik korxonasi ishlatgan momiq miqdori),

$x_3 + x_4 = 300$ (Qorako'l to'qimachilik korxonasi ishlatgan momiq miqdori),

$10x_1 + 8x_3$ (G'ijduvon to'qimachilik korxonasiga momiq tashish xarajatlari), $15x_2 + 20x_4$ (Qorako'l to'qimachilik korxonasiga momiq tashish xarajatlari), $10x_1 + 15x_2 + 8x_3 + 20x_4 = 7500$ (umumiy transport xarajatlari).

Bu yerdan ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 400 \\ x_2 + x_4 = 250 \\ x_1 + x_2 = 350 \\ x_3 + x_4 = 300 \\ 15x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 25x_4 = 7500 \end{cases}$$

Bu $n=4$ ta noma'lumli $m=5$ ta chiziqli tenglamadan iborat tizim bo'lib, uning matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 20 & 8 & 25 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning 2-4-satrlaridan tashkil topgan IV tartibli minorini Laplas teoremasi yordamida birinchi satr bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 20 & 8 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & 8 & 25 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 20 & 8 \end{vmatrix} = -17 - (-5) = -12 \neq 0.$$

Demak, $r(A)=4=n$ va shu sababli bu tizim yagona yechimga ega. Gauss usulidan foydalanib tizimning yechimi $x_1=150$, $x_2=200$, $x_3=250$ va $x_4=50$ ekanligini topamiz. Bu yechimning iqtisodiy ma'nosini ifodalaymiz.

Buxoro paxta zavodi o'zi ishlab chiqargan 400 birlik momiqni $x_1=150$ birligini G'ijduvon, $x_3=250$ birligini Qorako'l to'qimachilik korxonasiga jo'natadi.

Kogon paxta zavodi o'zi ishlab chiqargan 250 birlik momiqni $x_2=200$ birligini G'ijduvon, $x_4=50$ birligini Qorako'l to'qimachilik korxonasiga jo'natadi.

Shunday va faqat shunday taqsimotda transport xarajatlari rejalashtirilgan 7500 pul birligini tashkil etadi.

Xulosa. Matritsa – satrlar va ustunlar shaklida joylashtirilgan sonlar jadvali bo'lib, ma'lum bir ma'noda son tushunchasini umumlashtiradi. Matritsalar matematikaning ham nazariy, ham amaliy (jumladan, sportga oid mazmunli) masalalarida keng qo'llaniladi. Matritsalar ustida ularni songa ko'paytirish, o'zaro qo'shish, ayirish va ko'paytirish kabi algebraik amallar aniqlangan. Bunda hosil bo'ladigan matritsalar algebrasidagi ko'paytirish amalining o'ziga xos xususiyati shundan iboratki, u kommutativlik qonuniga bo'ysunmaydi. Bu algebrada nol va birlik matritsa 1 va 0 sonlariga o'xshash xossalarga ega. Matritsalar uchun ko'rsatilgan algebraik amallardan tashqari transponirlash amali ham aniqlangan.

Kvadrat matritsa elementlaridan ma'lum bir usulda hosil qilinadigan sonli ifoda uning determinanti deyiladi. Bu tushuncha matematikaning turli bo'limlarida ko'p qo'llaniladi va natijalarni ixcham ko'rinishda ifodalashga imkon beradi. II va III tartibli determinantlarning hisoblash formulalari nisbatan sodda, ammo yuqori tartibli determinantlar uchun ular juda murakkab ko'rinishga ega. Shu sababli bunday determinantlar ularning algebraik to'ldiruvchilari va Laplas teoremasi yordamida quyi tartibli determinantlarga keltirish orqali hisoblanadi. Bundan tashqari, bir qator hollarda determinantlarning qiymatlari ularning xossalaridan foydalanib topilishi mumkin. Birlik matritsa va kvadratik nol matritsalarning determinantlari mos ravishda 1 va 0 qiymatga ega.

Matritsalar algebrasida teskari matritsa tushunchasi teskari songa o'xshash ko'rinishda aniqlanadi. Bunda faqat determinanti noldan farqli bo'lgan matritsalar uchun teskari matritsa mavjud bo'ladi va yagona ravishda aniqlanadi. Teskari matritsani topish algoritmida algebraik to'ldiruvchilarni hisoblash va transponirlash amalidan foydalaniladi. Matritsalarning tatbiqlarida uning rangi va bazis minorlari tushunchalari muhim ahamiyatga egadir.

Chiziqli tenglamalar sistemasi matematikaning sportga oid masalalarni yechishda eng ko'p qo'llaniladigan tushunchalaridan biri bo'lib hisoblanadi. Chiziqli tenglamalar tizimining yechimi mavjud va yagona, mavjud va cheksiz ko'p hamda mavjud bo'lmasligi mumkin. Chiziqli tenglamalar tizimini umumiy holda yechish usullari ishlab chiqilgan. Bunda oldin ko'rib o'tilgan matritsa va determinantlar tushunchalari muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Tizim yechimining mavjudligi yoki mavjud emasligi, yagona yoki cheksiz ko'pligi matritsalarning rangi yordamida aniqlanadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning tartibi qanday aniqlanadi?
3. Matritsaning elementi deb nimaga aytiladi?
4. Matritsalar qanday turlarga ajratiladi?
5. Qachon ikkita matritsa teng deyiladi?
6. Matritsaning qanday elementi diagonal deyiladi?
7. Birlik matritsa qanday ta'riflanadi?
8. Qachon matritsa nol matritsa deyiladi?
9. Matritsani songa ko'paytirish qanday aniqlanadi?
10. Qaysi shartda matritsalarni qo'shish yoki ayirish mumkin?
11. Matritsalar yig'indisi yoki ayirmasi qanday topiladi?
12. Matritsalarni qo'shish amali qanday qonunlarga bo'ysunadi?
13. Matritsalarni qo'shish amali qanday xossalarga ega?
14. Qaysi shartda matritsalarni ko'paytirish mumkin?
15. Ko'paytma matritsa tartibi qanday topiladi?
16. Matritsalarning ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
17. Matritsalarni ko'paytirish amali qanday qonunlarga bo'ysunadi?
18. Matritsalarni ko'paytirish amali qanday xossalarga ega?
19. Matritsaning natural darajasi qanday aniqlanadi?

20. Matritsani darajaga ko'tarish amali qanday xossalarga ega?
21. Matritsalarni transponirlash nima?
22. Matritsalarni transponirlash amali qanday xossalarga ega?
23. Qachon matritsa simmetrik deyiladi?
24. Qanday shartda matritsa kososimmetrik deb ataladi?
25. Matritsaning sportga oid tatbig'iga misol keltiring.
26. Determinant deyilganda nima tushuniladi?
27. II tartibli determinant qanday hisoblanadi?
28. III tartibli determinant uchburchak usulida qanday hisoblanadi?
29. III tartibli determinant Sarrius usulida qanday hisoblanadi?
30. Determinant va matritsa o'rtasida qanday o'xshashlik va farqlar bor?
31. Determinantda satr va ustunlar o'zaro qanday xususiyatga ega?
32. Determinantda ikkita satr yoki ikkita ustun o'rni almashtirilsa nima bo'ladi?
33. Qaysi hollarda hisoblamasdan determinantning qiymati nol bo'lishini aytish mumkin?
34. Determinant elementining minori deb nimaga aytiladi?
35. Determinant elementining algebraik to'ldiruvchisi qanday aniqlanadi?
36. Determinantlar uchun Laplas teoremasi qanday ifodalanadi?
37. Laplas teoremasining ahamiyati nimadan iborat?
38. Matritsalar ko'paytmasining determinanti qanday hisoblanishi mumkin?
39. Teskari matritsa qanday ta'riflanadi?
40. Qachon matritsa maxsus deb ataladi?
41. Qanday matritsa maxsusmas deyiladi?
42. Qaysi shartda teskari matritsa mavjud bo'ladi?
43. Teskari matritsa qanday topiladi?
44. Teskari matritsa qanday xossalarga ega?
45. Matritsaning rangi deb nimaga aytiladi?
46. Matritsaning rangi qanday topiladi?
33. Chiziqli tenglamalar sistemasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
34. Tizimning koeffitsiyentlari, noma'lumlari va ozod hadlari deb nimaga aytiladi?

35. Tizimning yechimlari qanday ta'riflanadi?

36. Qachon tizim birgalikda yoki birgalikda emas deyiladi?

37. Qachon tizim aniq va qachon aniqmas deyiladi?

38. Kroniker-Kapelli teoremasi nimani ifodalaydi?

39. Qaysi shartda chiziqli tenglamalar tizimi yagona yechimga ega?

40. Qaysi shartda chiziqli tenglamalar tizimi cheksiz ko'p yechimga ega?

41. Chiziqli tenglamalar tizimi matritsa ko'rinishda qanday yoziladi?

42. Tizim matritsa usulida qanday yechiladi?

43. Matritsalar usulining qanday qulayliklari va kamchiliklari bor?

44. Tizimni Kramer usulida yechishning mohiyati nimadan iborat?

45. Tizimning asosiy determinanti deb nimaga aytiladi?

46. Tizim yechimi uchun Kramer formulalari qanday ko'rinishda bo'ladi?

47. Gauss usulining mohiyati nimadan iborat?

48. Tizimning asosiy o'zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?

49. Tizimning erkli o'zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?

50. Chiziqli tenglamalar tizimining qanday sportga oid tatbiqlarini bilasiz?

Testlardan namunalar:

1. Matritsa mazmuni qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) sonlar yig'indisi; B) sonlar ko'paytmasi;

C) sonlar to'plami; D) sonlar jadvali; E) sonlar birlashmasi.

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini aniqlang.

A) 2×2; B) 2×3; C) 3×2; D) 3×3; E) $2\times3=6$.

3. Elementlari a_{ij} bo'lgan matritsa qachon nol matritsa deyiladi?

A) Barcha a_{ij} elementlarning yig'indisi nolga teng bo'lsa;

B) Barcha a_{ij} elementlari nolga teng bo'lsa;

C) Barcha a_{ij} elementlarning ko'paytmasi nolga teng bo'lsa;

D) Biror satridagi barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo'lsa;

E) Biror ustundagi barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo'lsa.

4. Quyidagi matritsalarning qaysi biri nol matritsa bo‘lmaydi?

$A)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B)(0 \quad 0 \quad 0)$; $C)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

E) Keltirilgan barcha matritsalar nol matritsa bo‘ladi.

5. Elementlari a_{ij} bo‘lgan kvadrat matritsa qachon birlik matritsa deyiladi?

A) Barcha a_{ij} elementlar birga teng bo‘lsa;

B) $a_{ii}=1$ va $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ bo‘lsa;

C) Barcha a_{ii} diagonal elementlar birga teng bo‘lsa;

D) Biror satrdagi barcha a_{ij} elementlar birga teng bo‘lsa;

E) Biror ustundagi barcha a_{ij} elementlar birga teng bo‘lsa.

6. Birlik matritsani ko‘rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Birlik matritsani ko‘rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) bu yerda birlik matritsa yo‘q .

8. Qaysi shartda A_{mn} va B_{pq} matritsalarni ko‘paytirish mumkin?

A) m=p; B) m=q; C) n=p; D) n=q; E) mq=np.

9. Quyidagi A va B matritsalar ustida qanday amallar bajarish mumkin?

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

A) $A-B$; B) $A\cdot B$; C) $B\cdot A$; D) $B-A$; E) $A+B$.

10. Quyidagi |A| determinantning a_{12} va a_{32} elementlari yig‘indisini toping:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

A) 5; B) 2; C) 7; D) – 6; E) 6.

11. Quyidagi |A| determinantning diagonal elementlari yig‘indisini toping:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 9 & 5 \\ -2 & 6 & -10 \end{vmatrix}.$$

A) 14; B) 0; C) 20; D) –6; E) 4.

12. Quyidagi determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

A) 14; B) –26; C) 26; D) –14; E) 0.

13. Ushbu determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$

A) 0; B) –12; C) 12; D) 2; E) 3.

14. Quyidagi tenglamani yeching: $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0$

A) $x=7$; B) $x=-1$; C) $x=2$; D) $x=4$; E) $x=8$.

15. Tenglamani yeching: $\begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ x & -21 \end{vmatrix}=1$

A) $x_1=4$; $x_2=1$; B) $x_1=-2$; $x_2=3$; C) $x_1=1$; $x_2=-1$;

D) tenglama yechimga ega emas; E) tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega.

16. Ushbu determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

A) 1; B) 0; C) –2; D) 4; E) 12.

17. Ushbu determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

A) 0; B) 12; C) 10; D) –10; E) –12.

18. A va unga teskari A^{-1} matritsalar ko‘paytmasi uchun qaysi tasdiq o‘rinli?

A) AA^{-1} faqat nollardan iborat matritsa bo‘ladi;

B) AA^{-1} faqat birlardan iborat matritsa bo‘ladi;

C) AA^{-1} diagonal elementlari 0, qolgan barcha elementlari 1 bo‘lgan matritsa bo‘ladi.

D) AA^{-1} diagonal elementlari 1, qolgan barcha elementlari 0 bo‘lgan matritsa bo‘ladi.

E) AA^{-1} ixtiyoriy kvadrat matritsa bo‘ladi.

19. Qaysi shartda A matritsa maxsus deyiladi?

A) $|A|<0$; B) $|A|>0$; C) $|A|\neq 0$; D) $|A|=0$; E) $|A|\leq 0$.

20. Qaysi shartda A matritsa maxsusmas deyiladi?

A) $|A|<0$; B) $|A|>0$; C) $|A|\neq 0$; D) $|A|=0$; E) $|A|\leq 0$.

21. Quyidagi matritsalardan qaysi biri maxsusmas?

A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

22. Quyidagi matritsalardan qaysi biri maxsus?

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

23. A va unga teskari A^{-1} matritsalar uchun quyidagi tengliklardan qaysi biri o‘rinli emas (E – birlik matritsa, O – nol matritsa)?

A) $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A$; B) $A\cdot A^{-1}=E$; C) $A^{-1}\cdot A=E$;

- D) $AA^{-1}-A^{-1}A=O$; E) $A-A^{-1}=O$.

24. Agar A kvadrat matritsaning determinanti Δ bo‘lsa, qaysi shartda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo‘lmaydi?

A) $\Delta=0$ B) $\Delta<0$ C) $\Delta>0$ D) $\Delta\neq 0$ E) Δ ixtiyoriy qiymatli.

25. $A_{m\times n}$ matritsaning rangi nimaga teng?

A) satrlar soni m ga; B) ustunlar soni n ga; C) noldan farqli minorlar soniga;

D) barcha elementlar soni mn ga; E) noldan farqli minorlarning eng katta tartibiga.

26. Quyidagi tizimlardan qaysi biri chiziqli tenglamalar sistemasini ifodalaydi?

A) $\begin{cases} a_{11}x_1^2+a_{12}x_2^2=b_1 \\ a_{21}x_1^2+a_{22}x_2^2=b_2 \end{cases}$; B) $\begin{cases} \dfrac{a_{11}}{x_1}+\dfrac{a_{12}}{x_2}=b_1 \\ \dfrac{a_{21}}{x_1}+\dfrac{a_{22}}{x_2}=b_2 \end{cases}$; C) $\begin{cases} a_{11}x_1^2+a_{12}x_2^2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$;

D) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1^2+a_{22}x_2^2=b_2 \end{cases}$; E) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$.

27. Ushbu chiziqli tenglamalar tizimi koeffitsiyentlarining yig'indisini toping: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$

A) 10; B) 0; C) 5; D) 15; E) to'g'ri javob yo'q.

28. Ta'rifni to'ldiring: α, β va γ sonlarga uch noma'lumli chiziqli tenglamalar tizimining yechimi deyiladi, agarda ular tizimning ... tenglamalarini ayniyatga aylantirsa.

A) birinchi; B) ikkinchi; C) birorta; D) kamida bitta; E) uchala.

29. Qachon chiziqli tenglamalar tizimi birgalikda deb ataladi?

A) yechimga ega bo'lmasa; B) kamida bitta yechimga ega bo'lsa;

C) yagona yechimga ega bo'lsa; D) cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa;

E) keltirilgan barcha hollarda.

30. Tenglamalar tizimini yeching va $x_1^2 + x_2^2$ ifodaning qiymatini aniqlang: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$

A) 5; B) 1; C) 4; D) 2; E) 3.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. A va B matritsalar bo'yicha $(n+2)$A, $(1-n)$B, A+B, A–B va nA+$(n-3)$B matritsalarni toping:

$$A = \begin{pmatrix} n & 1-n & n+1 \\ 2n+1 & n & 2n-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2n & n+3 & n-2 \\ n+1 & n-4 & 1-2n \end{pmatrix}.$$

2. Berilgan A va B matritsalar bo'yicha A·B va B·A matritsalarni toping hamda A·B=B·A yoki A·B≠B·A ekanligini aniqlang:

$$A = \begin{pmatrix} n & n+1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2n & 2n-3 & n+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2n & 2n+1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{pmatrix}.$$

3. II tartibli determinantni hisoblang: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2n+1 & n+3 \\ n-2 & 2n+3 \end{vmatrix}$.

4. III tartibli determinant qiymatini toping:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ 2n-1 & n+3 & n-4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Laplas teoremasi yordamida IV tartibli determinantni hisoblang:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 & n+3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

6. Berilgan A matritsa uchun teskari matritsa A^{-1} mavjudligini aniqlang. Agar teskari matritsa A^{-1} mavjud bo'lsa, uni toping va $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ tenglik o'rinli bo'lishini tekshiring:

$$A = \begin{pmatrix} n+1 & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2n & 2n-1 & 2n+1 \end{pmatrix}.$$

7. Berilgan $B_{3\times4}$ matritsaning rangini aniqlang:

$$B_{3\times4} = \begin{pmatrix} n & n+1 & n+2 & 4n+7 \\ n-2 & n-1 & n & 4n-1 \\ n+2 & n+3 & n+4 & 4n+15 \end{pmatrix}.$$

8. Ushbu ikki noma'lumli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida yeching:

$$\begin{cases} nx_1 + (n+1)x_2 = n+2 \\ (n-1)x_1 + (n+3)x_2 = n-2 \end{cases}.$$

9. Ushbu uch noma'lumli tenglamalar sistemasini Kramer (determinantlar) usulida yeching:

$$\begin{cases} nx_1 + (n+1)x_2 + (n+2)x_3 = 1 \\ (n-2)x_1 + (n-1)x_2 + nx_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = n \end{cases}.$$

III BOB. VEKTORLAR ALGEBRASI TUSHUNCHA VA ASOSLARI. DEKART KOORDINATALAR TIZIMIDA VEKTORLAR

XVII-XVIII asr matematiklarining geometrik masalalarga bog'liq ishlarida sonlar hisobiga o'xshash va koordinatalar tizimi bilan bog'liq geometrik hisobga ehtiyoj paydo bo'ldi. Bu ehtiyoj g'oyalari XVIII asr oxirida Karno tomonidan kiritilgan vektorial algebra orqali qondirildi.

Petrova V.G.

REJA:

- Vektor tushunchasi va ular ustida amallar. Vektorlarni qo'shish va ayirish
- Dekart koordinatalar tizimida vektorlar
- Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi
- Ikki vektorning vektorial ko'paytmasi

Tayanch iboralar: skalyar, vektor, vektorning moduli, vektorning geometrik talqini, vektorning boshi, vektorning uchi, nol vektor, kollinear vektorlar, vektorlarning tengligi, komplanar vektorlar, vektorni songa ko'paytmasi, qarama-qarshi vektorlar, vektorlarni qo'shish, parallelogramm qoidasi, uchburchak qoidasi, ko'pburchak qoidasi, parallelepiped qoidasi, vektorlarni ayirish, ort vektorlar, vektorning o'qdagi proyeksiyasi, vektorning yoyilmasi, vektorning koordinatlari, skalyar ko'paytma, skalyar ko'paytmaning mexanik ma'nosi, ortogonal vektorlar, vektorlarning ortogonallik sharti, vektorial ko'paytma, vektorial ko'paytmaning mexanik ma'nosi, vektorial ko'paytmaning xossalari, vektorial ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi, vektorlarning kollinearlik sharti.

3.1. Vektorlar va ular ustida amallar. Vektorlarni qo'shish va ayirish

Vektorlar va ular bilan bog'liq tushunchalar. Hayotda uchraydigan harorat, bajarilgan ish, ish haqi, jismning massasi, ishlab chiqarish hajmi, tovarning narxi, partiyadagi mahsulotlar soni kabi kattaliklar ularni ifodalovchi sonli qiymatlar orqali to‘liq aniqlanadi.

__*Ta’rif:*__ Sonli qiymatlari bilan to‘liq aniqlanadigan kattaliklar ***skalyarlar*** deb ataladi.

“Skalyar” atamasi lotin tilidagi “scala” so‘zidan olingan bo‘lib, “pog‘ona” degan ma’noni ifodalaydi. Skalyarlar a, b, c, ... kabi harflar bilan belgilanadi.

Kuch, kuch momenti, tezlik, tezlanish, bosim, siljish, elektr maydonining kuchlanishi, oqim kabi kattaliklarni aniqlash uchun ularning sonli qiymatlaridan tashqari yo‘nalishlarini ham ko‘rsatish zarurdir.

__*Ta’rif:*__ Ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklar ***vektorlar*** deyiladi.

“***Vektor***” lotincha ”vehere” so‘zidan olingan va “***yo‘llovchi***” ma’nosiga ega. Vektorlar $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,... yoki $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... kabi belgilanadi.

__*Ta’rif:*__ Har qanday $\boldsymbol{a}$ vektorning sonli qiymati uning ***moduli*** yoki ***uzunligi*** deb ataladi va $|\boldsymbol{a}|$ kabi belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan vektorlar yo‘naltirilgan kesmalar singari qaraladi. Boshi A va oxiri B nuqtada bo‘lgan yo‘naltirilgan kesma bilan aniqlanadigan vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Bunda A nuqta ***vektorning boshi***, B nuqta esa ***vektorning uchi*** (oxiri) deyiladi. Bu yerda AB kesma uzunligi vektor modulini ifodalaydi, ya’ni $|AB| = |\overrightarrow{AB}|$ bo‘ladi.

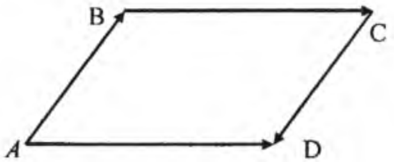
__*Ta’rif:*__ Boshi va uchi bitta nuqtadan iborat bo‘lgan vektor ***nol vektor*** deyiladi.

Nol vektor $\mathbf{0}$ kabi belgilanib, uning moduli $|\mathbf{0}|=0$ bo‘ladi. Nol vektorning yo‘nalishi to‘g‘risida so‘z yuritib bo‘lmaydi.

__*Ta’rif:*__ Bir to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda joylashgan vektorlar ***kollinear vektorlar*** deb ataladi.

Kelgusida $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning kollinear ekanligini $\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}$ kabi belgilaymiz.

Masalan, $ABCD$ parallelogramm bo‘lsa (9-rasm), unda $\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}$, ammo $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar kolllinear bo‘lmaydi.



9-rasm.

__Izoh.__ Nol vektor $\mathbf{0}$ har qanday $\boldsymbol{a}$ vektorga kollinear deb hisoblanadi.

__Ta'rif:__ Quyidagi uchta shartlar bajarilganda $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ ***teng vektorlar*** deyiladi:

1. $\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}$, ya'ni bu vektorlar kollinear;
2. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, ya'ni bu vektorlar bir xil uzunlikka ega;
3. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega.

Agar $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ teng vektorlar bo'lsa, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ deb yoziladi. Masalan, yuqoridagi *ABCD* parallelogrammda $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ bo'ladi. Bu yerdan vektorlarni parallel ko'chirish mumkinligi kelib chiqadi.

__Ta'rif:__ Bitta yoki parallel tekisliklarda joylashgan uch va undan ortiq vektorlar ***komplanar*** deyiladi.

Masalan, uchburchakning turli tomonlarida joylashgan vektorlar komplanar bo'ladi.

Vektorlar ustida amallar. Endi vektorlar ustida arifmetik amallar kiritamiz.

__Ta'rif:__ $\boldsymbol{a}$ vektorni λ songa (skalyarga) ko'paytmasi deb quyidagi uchta shart bilan aniqlanadigan yangi bir c vektorga aytiladi:

1. $|c|=|\lambda||a|$, ya'ni $\boldsymbol{a}$ vektorning uzunligi $|\lambda|$ marta o'zgaradi;

2. $\boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{a}$, ya'ni bu vektorlar kollinear;

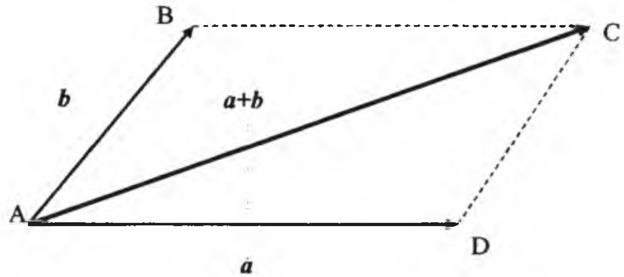
3. $\lambda>0$ bo'lsa c va $\boldsymbol{a}$ bir xil yo'nalgan, $\lambda<0$ bo'lsa c va $\boldsymbol{a}$ qarama-qarshi yo'nalgan.

$\boldsymbol{a}$ vektorni λ songa ko'paytmasi $\lambda\boldsymbol{a}$ kabi belgilanadi. Masalan, *ABCD* trapetsiya bo'lib, uning *AD* va *BC* asoslarining uzunliklari $|AD|=8$ va $|BC|=4$ bo'lsa, unda $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{CB}$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Vektorlarni songa ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\lambda(\beta\boldsymbol{a})=\beta(\lambda\boldsymbol{a})$
2. $(\lambda\pm\beta)\boldsymbol{a}=\lambda\,\boldsymbol{a}\pm\beta\,\boldsymbol{a}$
3. $0\cdot\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

Bu yerda λ va β ixtiyoriy sonlarni, ***a*** esa ixtiyoriy vektorni ifodalaydi.



10-rasm.

Ta'rif: (–1) ***a*** vektor ***a*** vektorga ***qarama-qarshi vektor*** deyiladi va – ***a*** kabi belgilanadi.

Masalan, yuqorida ko'rilgan *ABCD* parallellogramda $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ qarama-qarshi vektorlar, ya'ni $\overrightarrow{AD}= -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}= -\overrightarrow{CD}$ bo'ladi.

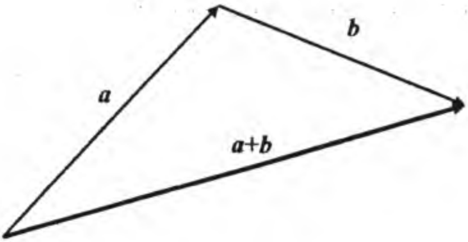
Endi ikkita ***a*** va ***b*** vektorlarni qo'shish amalini kiritamiz. Buning uchun parallel ko'chirish orqali ularning boshlarini bitta *A* nuqtaga keltiramiz. Unda bu vektorlarni ***a***$=\overrightarrow{AD}$, ***b***$=\overrightarrow{AB}$ kabi belgilab, *ABCD* parallelogrammni hosil qilamiz (10-rasm).

Ta'rif: ***a*** va ***b vektorlarning yig'indisi*** deb *ABCD* parallelogrammning *A* uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi va ***a+b*** kabi belgilanadi[31].

Vektorlar yig'indisining bu usulda aniqlash ***parallelogramm qoidasi*** deyiladi va unga moddiy nuqtaga qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisini topish asos qilib olingan. Bu yig'indini ***uchburchak qoidasi*** deb ataladigan quyidagi usulda ham topish mumkin. Bunda dastlab parallel ko'chirish orqali ***b*** vektorning boshi ***a*** vektorning uchi ustiga keltiriladi (11-rasm). So'ngra ***a*** boshidan chiqib, ***b*** uchida tugaydigan vektor hosil qilinadi va u ***a+b*** yig'indini ifodalaydi.

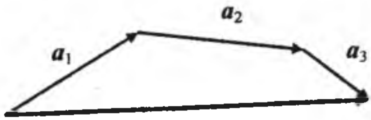
---

[31] Естественно-научные основы физической культуры и спорта: учебник / под ред. А.В.Самсоновой, Р.Б.Цаллаговой – М.: Советский спорт, 2014. – С. 14.



11-rasm

Bir nechta $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ ($n \geq 3$) vektorlarning yig'indisi parallelogramm qoidasini bir necha marta ketma-ket qo'llash yoki ***ko'pburchak qoidasi*** deb ataladigan ushbu usulda topiladi. Bu usulda parallel ko'chirish orqali $\boldsymbol{a}_1$ uchiga $\boldsymbol{a}_2$ boshi, $\boldsymbol{a}_2$ uchiga $\boldsymbol{a}_3$ boshi va hokazo $\boldsymbol{a}_{n-1}$ uchiga $\boldsymbol{a}_n$ boshi keltirib qo'yiladi. Hosil bo'lgan siniq chiziqning boshi ($\boldsymbol{a}_1$ vektor boshi) bilan oxiri ($\boldsymbol{a}_n$ vektor uchi) tutashtirilib, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+ \boldsymbol{a}_2+ \boldsymbol{a}_3+ \ldots+ \boldsymbol{a}_n$ yig'indi vektor topiladi. Masalan, uchta $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ vektorlarning $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig'indisini topish quyidagi 12-rasmda ko'rsatilgan:



$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1+ \boldsymbol{a}_2+ \boldsymbol{a}_3$

12-rasm.

Agar $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ bir tekislikda joylashmagan vektorlar bo'lsa, ko'pburchak qoidasi bilan topilgan $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig'indi qo'shiluvchi vektorlarni parallel ko'chirish orqali umumiy bir 0 boshga keltirib hosil qilinadigan parallelepipedning 0 uchidan chiquvchi diagonali kabi ham topilishi mumkin. Bu ***parallelepiped qoidasi*** deb ataladi.

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ — kommutativlik (o'rin almashtirish) qonuni;

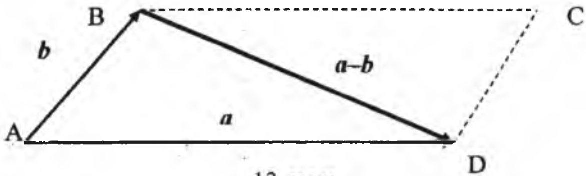
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ — assotsiativlik (guruhlash) qonuni;

3. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+ \lambda\boldsymbol{b}$;

4. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} =\boldsymbol{a}$.

<u>Ta'rif:</u> ***a*** va ***b vektorlarning ayirmasi*** deb ***a*** va $-\boldsymbol{b}$ vektorlarning yig'indisiga aytamiz.

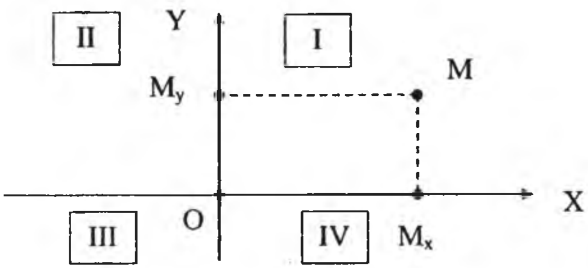
a va *b* vektorlarning ayirmasi *a–b* kabi belgilanadi, bu vektorlardan hosil qilingan *ABCD* parallelogrammning B uchidan chiquvchi $\overrightarrow{BD}$ diagonalidan iborat bo'ladi (13-rasm).



13-rasm

3.2. Dekart koordinatalar tizimida vektorlar

Vektorlarning koordinatalari. Dastlab tekislikdagi vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritamiz. Buning uchun tekislikda o'zaro perpendikulyar bo'lgan va O nuqtada kesishuvchi OX (abssissalar o'qi) va OY (ordinatalar o'qi) o'qlaridan tuzilgan XOY Dekart koordinatalar tizimini olamiz. Bu tizimda tekislikdagi har bir M nuqta o'zining OX va OY o'qlardagi proyeksiyalari bo'lmish M_x va M_y nuqtalar orqali (14-rasm) quyidagicha aniqlanadi. M_x va M_y nuqtalardan O koordinata boshigacha bo'lgan $|OM_x|$ va $|OM_y|$ masofalar orqali M ***nuqtaning koordinatalari*** deb ataladigan $x=\pm|OM_x|$ (abssissa) va $y=\pm|OM_y|$ (ordinata) sonlar aniqlanadi.

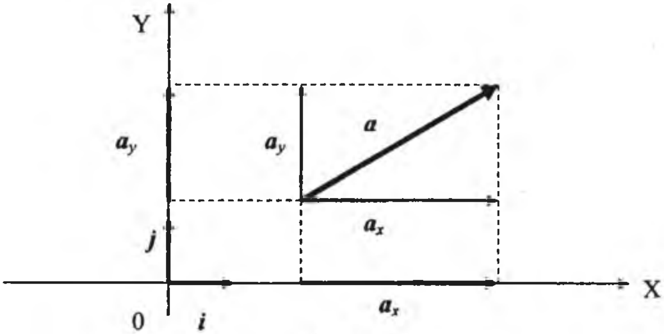


14-rasm

Bunda (x,y) koordinatalarning ishoralari I-IV choraklarda mos ravishda (+,+), (–,+), (–,–) va (+,–) kabi olinadi. Shunday qilib, tekislikdagi har bir M nuqta o'zining koordinatalari bo'lmish (x,y)

sonlar juftligi orqali bir qiymatli aniqlanadi va bu hol M(x,y) kabi yoziladi.

Xuddi shunday tarzda tekislikdagi har bir $\boldsymbol{a}$ vektorni sonlar juftligi orqali ifodalash mumkin. Buning uchun mos ravishda OX va OY koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalishga ega va uzunliklari birga teng bo‘lgan $\boldsymbol{i}$ va $\boldsymbol{j}$ vektorlarni kiritamiz (15-rasm).



15-rasm

Kiritilgan $\boldsymbol{i}$ va $\boldsymbol{j}$ vektorlar ***ort vektorlar*** yoki qisqacha ***ortlar*** deb ataladi. Endi berilgan $\boldsymbol{a}$ vektorni yo‘naltirilgan kesma sifatida qarab, uning OX va OY o‘qdagi proyeksiyalarini qaraymiz. Bu proyeksiyalar ham yo‘naltirilgan kesmalar bo‘lib, ular $\boldsymbol{a}$ vektorning OX va OY o‘qdagi ***proyeksiyalari*** deb ataladi va $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ kabi belgilanadi[32]. Koordinatalar o‘qlarida joylashgan $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ vektorlar mos ravishda shu o‘qlardagi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ ortlarga kollinear bo‘ladi va shu sababli $\boldsymbol{a}_x=\pm|a_x|\boldsymbol{i}$ hamda $\boldsymbol{a}_y=\pm|a_y|\boldsymbol{j}$ deb yozish mumkin. Bunda proyeksiyalar va ortlar bir xil yo‘nalishda bo‘lsa +, qarama-qarshi bo‘lsa – ishorasi olinadi. Unda vektorlarni qo‘shish ta’rifiga asosan quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y=(\pm|a_x|)\boldsymbol{i}+(\pm|a_y|)\boldsymbol{j}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}. \quad (1)$$

<u>Ta’rif:</u> (1) tenglik $\boldsymbol{a}$ vektorning ortlar bo‘yicha ***yoyilmasi***, x va y sonlari esa uning ***koordinatalari*** deb ataladi.

Koordinatalari x va y, ya’ni (1) yoyilmaga ega bo‘lgan $\boldsymbol{a}$ vektor qisqacha $\boldsymbol{a}=(x,u)$ kabi ifodalanadi. Masalan, yoyilmasi $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$

[32] Howard Anton, Chris Rorres. Elementary Linear Algebra: Applications Version, 10th. – USA: Lehigh University, John Wiley & Sons, 2010. – P. 233.

bo‘lgan vektorning koordinatalari $x=2$, $y=-3$ bo‘ladi va $a=(2,-3)$ deb yoziladi. Nol vektor uchun yoyilma $0 = 0 \cdot i+0 \cdot j=(0,0)$, ya’ni uning koordinatalari $x=0$, $y=0$ bo‘ladi.

Shunday qilib, tekislikdagi ixtiyoriy a vektor o‘zining x va u koordinatalari, ya’ni (x,u) sonlar juftligi bilan (1) tenglik orqali to‘liq aniqlanadi.

Xuddi shunday tarzda fazodagi nuqta va vektorlar uchun koordinatalar tushunchasi kiritiladi. Buning uchun fazoda o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan va O nuqtada kesishuvchi OX, OY va OZ (applikatalar) o‘qlarini kiritamiz. Bunda fazodagi har bir M nuqta o‘zining OX, OY va OZ o‘qlaridagi proyeksiyalari M_x, M_y va M_z orqali tekislikda qaralgani singari x, y va z koordinatalari bilan bir qiymatli aniqlanadi va bu $M(x, y, z)$ kabi ifodalanadi.

Vektorlarning koordinatalarini aniqlash uchun oldin kiritilgan $\boldsymbol{i}$ va $\boldsymbol{j}$ ortlarga qo‘shimcha ravishda OZ koordinata o‘qida joylashgan $\boldsymbol{k}$ ort vektorni kiritamiz. Unda, fazodagi vektorlarni qo‘shishning parallelepiped qoidasidan foydalanib,

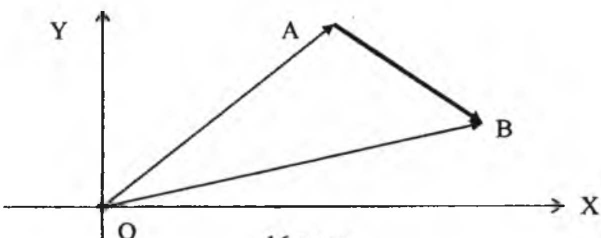
$$\boldsymbol{a}= \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y+ \boldsymbol{a}_z = (\pm|\boldsymbol{a}_x|)\boldsymbol{i} +(\pm|\boldsymbol{a}_y|)\boldsymbol{j}+(\pm|\boldsymbol{a}_z|)\boldsymbol{k} =x\boldsymbol{i} +y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \quad (2)$$

yoyilmani hosil etamiz. Bu yerda x, y, z sonlar uchligi fazodagi $\boldsymbol{a}$ vektorning koordinatalari bo‘lib, $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ deb yoziladi.

- Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tengligi va ular ustidagi qo‘shish, ayirish, songa ko‘paytirish amallarining natijalari oson aniqlanadi. Bularni fazodagi vektorlar uchun ifodalaymiz. Tekislikdagi vektorlar uchun tegishli natijalar $z=0$ holda kelib chiqadi.

Masala: Boshi $A(x_1, y_1, z_1)$ va uchi $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtada joylashgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish: Berilgan vektorning A boshi va B uchini koordinatalar boshi O bilan tutashtirib $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlarni hosil etamiz (16-rasm).



16-rasm

Bunda $\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2, y_2, z_2)$ bo'ladi va vektorlarning ayirmasi ta'rifiga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$\overrightarrow{AB}=(x, y, z)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2, z_2)-(x_1, y_1, z_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1). \quad (4)$$

Demak, vektorning koordinatalarini topish uchun uchining koordinatalaridan boshini koordinatalarini ayirish kerak. Masalan, boshi A(5,–4, 2) va uchi B(7, 1, 0) nuqtalarda joylashgan vektorning koordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$$x=x_2-x_1=7-5=2,\ y=y_2-y_1=1-(-4)=5,\ z=z_2-z_1=0-2=-2.$$

Masala: Uchlari $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarda joylashgan AB kesmani berilgan λ ($\lambda>0$) nisbatda bo'luvchi $C(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish: Oldingi masalaga asosan,

$$\overrightarrow{AC}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1),\ \overrightarrow{CB}=(x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0)$$

deb yozishimiz mumkin. Masala sharti, vektorni songa ko'paytirish ta'rifiga asosan ushbu tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$|\overrightarrow{AC}|=\lambda|\overrightarrow{CB}| \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)=\lambda(x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)=(\lambda x_2-\lambda x_0, \lambda y_2-\lambda y_0, \lambda z_2-\lambda z_0).$$

Bu yerdan, izlanayotgan x_0 koordinata ushbu tenglamadan topiladi:

$$x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0) \Rightarrow (1+\lambda)x_0=\lambda x_2+x_1 \Rightarrow x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Xuddi shunday tarzdagi mulohazalar orqali izlangan nuqtaning koordinatalari

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z_0=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \quad (5)$$

formulalar bilan topilishini aniqlaymiz.

Masalan, uchlari A(2,–3, 1) va B(16, 11, 15) nuqtalarda joylashgan AB kesmani $\lambda=2:5$ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalari (5) formulaga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$x_0=\frac{2+\frac{2}{5}\cdot 16}{1+\frac{2}{5}}=6,\quad y_0=\frac{-3+\frac{2}{5}\cdot 11}{1+\frac{2}{5}}=1,\quad z_0=\frac{1+\frac{2}{5}\cdot 15}{1+\frac{2}{5}}=7$$

Xususiy, $\lambda=1$ bo‘lgan, holda AB kesmaning o‘rta nuqtasi koordinatalari uchun ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z_0=\frac{z_1+z_2}{2}. \quad (6)$$

Masalan, uchlari A(4,–1, 5) va B(2, 11, –13) nuqtalarda joylashgan AB kesmaning o‘rta nuqtasining koordinatalari (6) formulaga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$x_0=(4+2)/2=3,\ y_0=(-1+11)/2=5,\ z_0=(5+(-13))/2=-4\ .$$

3.3. Ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi

Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va uning xossalari. Biz vektorlarni songa ko‘paytirish, qo‘shish va ayirish amallarini ko‘rib o‘tdik. Endi vektorlarni o‘zaro ko‘paytirish masalasiga o‘tamiz. Buning uchun dastlab fizikadan kuch bajargan ishni hisoblash formulasini eslaymiz. Biror moddiy nuqtaga f kuch vektori ta’sir etib, uni s vektor bo‘yicha harakatlantirgan bo‘lsin. Bunda kuch va harakat vektorlari orasidagi burchak φ bo‘lsa, unda moddiy nuqtani ko‘chirishda bajarilgan ish $A=|f|\cdot|s|\cdot\cos\varphi$ formula bilan hisoblanadi. Bu formulada $|f|$ – kuch kattaligini, $|s|$ – bosib o‘tilgan masofani ifodalaydi.

<u>Ta’rif:</u> Ikkita $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning ***skalyar ko‘paytmasi*** deb ularning modullari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko‘paytmalariga aytiladi.

$\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi $\boldsymbol{a\cdot b}$, $\boldsymbol{ab}$ yoki $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ kabi belgilanadi va ta’rifga asosan,

$$\boldsymbol{a\cdot b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi \quad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda φ orqali $(0\le\varphi\le\pi)$ $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchak belgilangan bo‘lib, u $\boldsymbol{a}$ vektordan $\boldsymbol{b}$ vektorgacha eng qisqa burilish burchagi kabi aniqlanadi. Ikki vektorni (1) ko‘rinishda ko‘paytirish natijasida son, ya’ni skalyar kattalik hosil bo'ladi va shu sababli $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb ataladi[33].

Skalyar ko'paytma ta'rifi bo'yicha yuqorida ko'rib o'tilgan ish formulasini $A=f\cdot s$ deb yozish mumkin. Demak, kuch va harakat lektorlarining skalyar ko'paytmasi bajarilgan ishni ifodalaydi va bu skalyar ko'paytmani mexanik ma'nosi bo'ladi.

Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$, ya'ni skalyar ko'paytma uchun kommutativlik qonuni bajariladi.

Haqiqatan ham, skalyar ko'paytma ta'rifini ifodalovchi (1) formulaga asosan

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot \mathrm{sos}\varphi=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot \mathrm{sos}\varphi=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$, ya'ni vektorni o'ziga - o'zining skalyar ko'paytmasi (bu ba'zan vektorning skalyar kvadrati deyiladi va $\boldsymbol{a}^2$ kabi belgilanadi) uning moduli kvadratiga teng. Bu xossa ham skalyar ko'paytma ta'rifini ifodalovchi (1) formuladan bevosita kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot \mathrm{sos}0=|\boldsymbol{a}|^2 .$$

3. Ixtiyoriy λ soni uchun $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Dastlab $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$ tenglikni o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. (1) formulaga asosan,

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}|\cdot|\lambda|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos\varphi= (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}).$$

Endi $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ tenglikni to'g'riligini ko'rsatamiz. Agar $\lambda\geq 0$ bo'lsa,

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi =\lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda\, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Agar $\lambda<0$ bo'lsa, $\lambda\boldsymbol{a}$ vektor $\boldsymbol{a}$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan va shu sababli $\lambda\boldsymbol{a}$ bilan $\boldsymbol{b}$ vektor orasidagi burchak $\pi-\varphi$ bo'ladi. Bu holda $\cos(\pi-\varphi)= -\cos\varphi$ va $\lambda = -|\lambda|$ bo'lgani uchun

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\varphi) =-|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda\, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Jumladan, $\lambda=0$ holda har qanday $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$ natijani olamiz.

---

[33] Rajabov F., Masharipova S., Madrahimov R. Oliy matematika. O'quv qo'llanma. – T.: Turon-Iqbol, 2007. - B. 34.

4. $a(b+c)=ab+ac$, ya'ni vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun distributivlik qonuni bajariladi.

Bu xossani isbotsiz qabul etamiz.

Ta'rif: Agar a va b vektorlar orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo'lsa, ular ***ortogonal vektorlar*** deyiladi.

Kelgusida a va b vektorlarning orthogonalligini $a\perp b$ kabi belgilaymiz. Masalan, oldin kiritilgan i, j va k ort vektorlar o'zaro ortogonal, ya'ni $i\perp j$, $i\perp k$ va $j\perp k$ bo'ladi.

Teorema: Noldan farqli a va b vektorlar ortogonal bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi $ab=0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot: Dastlab teorema shartini zaruriyligini ko'rsatamiz:

$$a\perp b \Rightarrow \varphi=90^0 \Rightarrow a\cdot b = |a|\cdot|b|\cdot \text{sos}90^0 = |a|\cdot|b|\cdot 0=0;$$

Endi teorema shartini yetarli ekanligini ko'rsatamiz:

$$a\cdot b = |a|\cdot|b|\cdot \text{sos}\varphi=0\ ,\ |a|\neq 0\ ,\ |b|\neq 0 \Rightarrow \text{sos}\varphi=0 \Rightarrow \varphi=90^0 \Rightarrow a\perp b\,.$$

Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Oldingi mavzuda koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida songa ko'paytirish, qo'shish va ayirish amallari oson bajarilishini ko'rib o'tgan edik. Endi bu masalani vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun qaraymiz. Tekislikda koordinatalari bilan berilgan $a=(x_1, u_1)$ va $b=(x_2, u_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini topamiz. Skalyar ko'paytmaning 2-xossasi va yuqoridagi teoremadan ortlar uchun ushbu tengliklar o'rinli ekanligini ko'ramiz:

$$i\cdot i=|i|^2=1,\ j\cdot j=|j|^2=1,\ i\cdot j=j\cdot i=0.$$

Endi $a=(x_1, u_1)$ va $b=(x_2, u_2)$ vektorlarning yoyilmasi hamda skalyar ko'paytmaning 3 va 4-xossalaridan foydalanamiz:

$$a\cdot b=(x_1 i+u_1 j)\cdot(x_2 i+u_2 j)=x_1x_2\, i\cdot i+x_1u_2\, i\cdot j+u_1x_2\, j\cdot i+u_1u_2\, j\cdot j=$$
$$=x_1x_2\cdot 1+x_1u_2\cdot 0+u_1x_2\cdot 0+u_1u_2\cdot 1=x_1x_2+u_1u_2.$$

Demak,

$$a\cdot b=x_1u_2+u_1u_2 \quad (2)$$

ya'ni vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Masalan, $a=(3,6)$ va $b=(5,-2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$a\cdot b=x_1u_2+u_1u_2=3\cdot 5+6\cdot(-2)=15-12=3.$$

Xuddi shunday tarzda fazodagi $a=(x_1, u_1, z_1)$ va $b=(x_2, u_2, z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun

$$a\cdot b=x_1x_2+u_1u_2+z_1z_2 \quad (3)$$

formula o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Skalyar ko'paytmaning tatbiqlari. Endi skalyar ko'paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni ko'ramiz.

1-masala. Fazoda koordinatalari bilan berilgan $a=(x,\ u,\ z)$ vektorning modulini toping.

Yechish. Skalyar ko'paytmaning 2-xossasiga va (3) formulaga asosan,

$$|a|^2=a\cdot a=xx+uu+zz=x^2+u^2+z^2 \Rightarrow |a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .\ (4)$$

Masalan, $a=(3,4,12)$ vektorning moduli

$$|a|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13\ .$$

(4) formulada $z=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $a=(x,u)$ vektorning moduli

$$|a|=\sqrt{x^2+y^2}$$

formula bilan hisoblanishini ko'ramiz.

Masala: Fazodagi koordinatalari bilan berilgan $a=(x_1,\ u_1,\ z_1)$ va $b=(x_2,\ u_2,\ z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish: Skalyar ko'paytma ta'rifi (1), (3) va (4) formulalarga asosan,

$$cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\ .\ (5)$$

Masalan, $a=(1,0,1)$ va $b=(0,1,1)$ vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$cos\varphi=\frac{1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi=60^0$ ekanligini topamiz.

(5) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $a=(x_1,\ u_1)$ va $b=(x_2,\ u_2)$ vektorlar orasidagi φ burchak

$$cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

formula bilan topilishini ko'ramiz.

Masala: $a=(x_1,\ u_1,\ z_1)$ va $b=(x_2,\ u_2,\ z_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini toping.

Yechish: $a\perp b$ bo'lgani uchun ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo'ladi va shu sababli sosφ=0. Unda (5) formuladan

$$x_1x_2+u_1u_2+z_1z_2=0\ (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikki vektorning ortogonallik shartidir.

Masalan, $a=(3,-2,1)$ va $b=(5,7,\ -1)$ vektorlar ortogonaldir, chunki

$$x_1x_2+u_1u_2+z_1z_2=3\cdot5+(-2)\cdot7+1\cdot(-1)=15-14-1=0.$$

(6) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, u_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, u_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini topamiz:

$$x_1x_2+u_1u_2=0$$

Masala: Fazodagi $A(x_1,u_1,z_1)$ va $V(x_2,u_2,z_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.

Yechish: Bu nuqtalarni kesma bilan tutashtirib, boshi $A(x_1,u_1,z_1)$ nuqtada va uchi $V(x_2,u_2,z_2)$ nuqtada bo'lgan $\boldsymbol{a}$ vektorni hosil qilamiz. Ma'lumki, bu vektorning koordinatalari uning uchi bilan boshi koordinatalari ayirmasiga teng bo'ladi, ya'ni $\boldsymbol{a}=(x_2-x_1, u_2-u_1, z_2-z_1)$. Unda $d=|\boldsymbol{a}|$ va (4) formulaga asosan,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (7)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Masalan, A(5,–3,1) va B(8,1,13) nuqtalar orasidagi masofa

$$d=\sqrt{(8-5)^2+(1-(-3))^2+(13-1)^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

bo'ladi.

(7) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $A(x_1, u_1)$ va $B(x_2, u_2)$ nuqtalar orasidagi d masofa uchun

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

formula o'rinli bo'lishini ko'ramiz.

Masala: Futbol klubi transfer qiladigan futbolchilarning transfer bahosi (z_i) va hajmi (q_i) bo'yicha ma'lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Ko'rsatkich	I futbolchi	II futbolchi	III futbolchi
Transfer bahosi (z_i), so'm	350	500	250
Transfer hajmi (q_i), dona	500	700	1200

Futbolchilarning transfer qilishdan olgan daromadlarini toping.

Yechish: Transfer qilingan futbolchilarning bahosi vektorini $z=(z_1,z_2,z_3)$, hajm vektorini $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)$ deb belgilasak, unda transferdan olgan daromadlari

$$z_1q_1+z_2q_2+z_3q_3=\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{q},$$

ya'ni $\boldsymbol{z}$ va $\boldsymbol{q}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasiga teng bo'ladi. Bizning masalada

$$\boldsymbol{q}=(500, 700, 1200), \boldsymbol{z}=(350, 500, 250),$$

$$\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{q}=z_1q_1+z_3q_2+z_3q_3=350\cdot500+500\cdot700+250\cdot1200=825000.$$

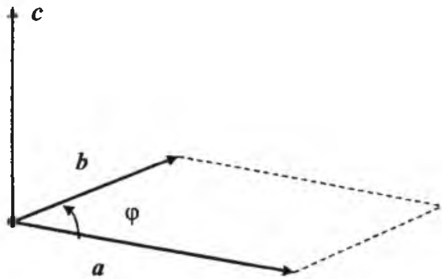
Demak, ko'rsatilgan futbolchilarni transfer qilish orqali futbol klubi 825 ming so'm daromad olgan.

3.4. Ikki vektorning vektorial ko'paytmasi

Vektorial ko'paytma va uning xossalari. Ikkita ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar ko'paytmasi natijasida son hosil bo'lishini ko'rib o'tdik. Endi bu vektorlarning shunday ko'paytmasini aniqlaymizki, natijada yana vektor hosil bo'lsin.

Ta'rif: Fazodagi ***a*** va ***b*** vektorlarning ***vektorial ko'paytmasi*** deb, quyidagi uchta shart bilan aniqlanuvchi yangi ***c*** vektorga (17-rasm) aytiladi:

1. ***c*** vektorning moduli ***a*** va ***b*** vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga teng bo'lib, $|c|=|a|\cdot|b|\cdot\sin\varphi$ formula bilan aniqlanadi. Bunda φ berilgan ***a*** va ***b*** vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.
2. ***c*** vektor ***a*** va ***b*** vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar, ya'ni $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ bo'ladi .
3. ***c*** vektor shunday yo'nalganki, uning uchidan qaraganda ***a*** vektordan ***b*** vektorga eng qisqa burilish soat mili harakatiga teskari bo'ladi.



17-rasm

a va ***b*** vektorlarning vektorial ko'paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ yoki $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ kabi belgilanadi.

Vektorial ko'paytma ta'rifi fizikadan kuch tushunchasi bilan bog'liq masaladan kelib chiqqan. Agar radius vektori ***r*** bo'lgan moddiy A nuqtaga ***f*** kuch ta'sir etayotgan bo'lsa, unda $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{r}$ vektorial ko'paytma ***f*** kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi.

Vektorial ko'paytma xossalari bilan tanishamiz.

1. Vektorial ko'paytmada ko'paytuvchilar o'rni almashsa, natijada faqat ishora o'zgaradi, ya'ni

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

Bu tasdiq vektorial ko'paytma ta'rifining 3-shartidan bevosita kelib chiqadi. Demak, vektorial ko'paytma uchun kommutativlik qonuni bajarilmaydi.

2. Vektorial ko'paytmada o'zgarmas λ ko'paytuvchini tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Jumladan, $\lambda=0$ holda har qanday $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $[\boldsymbol{a},\mathbf{0}]=[\mathbf{0}, \boldsymbol{a}]=\mathbf{0}$ ekanligini ko'ramiz.

3. Vektorial ko'paytma uchun taqsimot qonuni o'rinli, ya'ni

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

4. Agar $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar bo'lsa, ularning vektorial ko'paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ bo'ladi. Aksincha noldan farqli $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar uchun $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ bo'lsa, bu vektorlar kollinear bo'ladi.

Isbot: 1) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar bo'lsin. Bu holda ular orasidagi burchak $\varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$ va shu sababli $\sin\varphi=0$ bo'ladi. Unda vektorial ko'paytma ta'rifining 1-shartiga asosan,

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 0=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}.$$

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ va $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$ bo'lsin. Unda

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0 \Rightarrow \sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0 \text{ yoki } \varphi=\pi.$$

Bundan $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar ekanligi kelib chiqadi.

Natija: Ixtiyoriy $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ bo'ladi.

Misol: $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ ko'paytmani soddalashtiring.

Yechish: Vektorial ko'paytmaning ko'rib o'tilgan xossalariga asosan

$$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-4\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-2\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\cdot\mathbf{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+4\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-2\cdot\mathbf{0}=5\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

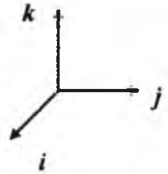
Vektorial ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Endi fazoda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini topish masalasi bilan shug'ullanamiz. Dastlab $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ va $\boldsymbol{k}$ ortlarning vektorial ko'paytmalarini hisoblaymiz. Vektorial ko'paytmaning 4-xossasidan kelib chiqqan natijaga asosan,

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\mathbf{0},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\mathbf{0},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\mathbf{0}.$$

Vektorial ko‘paytma va ortlar ta’riflaridan (18-rasm) quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

18-rasm



Yuqoridagi natijalarni 18-rasmdan topish uchun vektorial ko‘paytmadagi ikkinchi ko‘paytuvchidan soat miliga teskari yo‘nalishda burilib, vektorial ko‘paytmani topamiz. Masalan, $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$ ko‘paytmani topish uchun $\boldsymbol{j}$ ortdan soat miliga teskari yo‘nalishda burilib, $\boldsymbol{k}$ ort vektorga kelamiz.

Vektorial ko‘paytmaning 1- xossasiga binoan

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$$

tengliklarni olamiz. Bu natijalarni yuqoridagi rasmda soat mili bo‘yicha burilib topishimiz mumkin.

Yuqoridagi ortlar uchun tengliklar va vektorial ko‘paytma xossalaridan foydalanib ushbu natijaga kelamiz:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \times (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) = x_1x_2\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + x_1y_2\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + x_1z_2\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} +$$

$$+ y_1x_2\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + y_1y_2\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} + y_1z_2\, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} + z_1x_2\, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + z_1y_2\, \boldsymbol{k} \times c\boldsymbol{j} + z_1z_2\, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} =$$

$$= x_1y_2\, \boldsymbol{k} - x_1z_2\, \boldsymbol{j} - y_1x_2\, \boldsymbol{k} + y_1z_2\, \boldsymbol{i} + z_1x_2\, \boldsymbol{j} - z_1y_2\, \boldsymbol{i} =$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\boldsymbol{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\boldsymbol{k} =$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2,\ z_1x_2 - x_1z_2,\ x_1y_2 - y_1x_2).$$

Demak, $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (x, y, z)$ koordinatalari

$$x = y_1z_2 - z_1y_2,\ y = z_1x_2 - x_1z_2,\ z = x_1y_2 - y_1x_2$$

formulalar bilan topiladi. Ammo bu formulalarni esda saqlab qolish oson emas. Shu sababli bu natijalarni qulayroq ko‘rinishda yozish maqsadida koordinatalar uchun topilgan natijalarni ikkinchi tartibli determinantlar orqali ifodalaymiz:

$$x = y_1z_2 - z_1y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad y = z_1x_2 - x_1z_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad (1)$$

$$z = x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix};$$

Laplas teoremasidan foydalanib, ushbu uchinchi tartibli determinantga kelamiz:

$$\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b}=xi+yj+zk=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\mathrm{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\mathrm{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\mathrm{k}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini determinant orqali

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \quad (2)$$

formula bilan topish mumkin.

Misol: $\boldsymbol{a}=(2;\ 3;\ -1)$ va $\boldsymbol{b}=(3;\ -1;\ -4)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini toping.

Yechish: (2) formulaga asosan,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=-13\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}=(-13,\ 5,\ -11).\ (3)$$

Vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari. Endi vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni yechamiz.

Masala: $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ vektorlardan hosil qilingan parallelogramm yuzini toping.

Yechish: Vektorial ko‘paytma ta’rifining 1-sharti va (1) formulaga asosan, parallelogramm yuzi S quyidagicha topiladi:

$$S=|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2} \quad (4)$$

Misol: $\boldsymbol{a}=(2;\ 3;\ -1)$ va $\boldsymbol{b}=(3;\ -1;\ -4)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

Yechish: Bunda (3) tenglikdan $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-13\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}=(-13,\ 5,\ -11)$ ekanligi ma’lum. Shu sababli (4) formulaga asosan,

$$S=\sqrt{(-13)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{169+25+121}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

Natija: $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2} \quad (5)$$

formula bilan topiladi.

Masala: $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

Yechish: Oldin ko'rilgan vektorial ko'paytmaning 4-xossasiga asosan, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun ularning vektorial ko'paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ bo'lishi kerak. Unda (1) formuladan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$x = y_1z_2 - z_1y_2 = 0; \quad y = z_1x_2 - x_1z_2 = 0; \quad z = x_1y_2 - y_1x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}; \ \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2}; \ \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (6)$$

shart bajarilishi, ya'ni ularning mos koordinatalari proporsional bo'lishi kerak.

Misol: $\boldsymbol{a}=(m,3,2)$ va $\boldsymbol{b}=(4,6,n)$ vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo'lishini aniqlang.

Yechish: (6) kollinearlik shartiga asosan,

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{6} = \frac{2}{n} \Rightarrow m = 2, n = 4.$$

Xulosa. Amaliyotdan kelib chiqqan holda matematikada skalyar va vektor tushunchalari kiritiladi. Bunda skalyar faqat son qiymati bilan, vektor esa ham sonli qiymati, ham yo'nalishi bilan aniqlanadi. Vektorlar ustida ularni songa ko'paytirish, o'zaro qo'shish va ayirish amallari kiritilib, vektorlar algebrasi hosil qilinadi. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar o'zlarining koordinatalari bilan ifodalanadi. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar ularning koordinatalari orqali oson amalga oshiriladi. Vektorlar algebrasi yordamida bir qator matematik masalalar oson hal etiladi.

Vektorlarning skalyar ko'paytma tushunchasi kuch bajargan ish qiymatini hisoblash masalasidan kelib chiqadi. Skalyar ko'paytma kommutativlik va distributivlik qonunlariga bo'ysunadi. Skalyar ko'paytmani vektorlarning koordinatalari yordamida hisoblash juda qulay. Skalyar ko'paytma yordamida vektorlarning modulini topish, ular orasidagi burchakni aniqlash, ikki vektorning ortogonallik shartini ifodalash kabi masalalar oson yechiladi. Skalyar ko'paytma sportga oid masalalarni yechishda ham keng qo'llaniladi.

Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi natijasida son hosil bo‘ladi. Ammo fizika, mexanikaning bir qator masalalarida ikkita vektorning shunday ko‘paytmasini kiritishga to‘g‘ri keladiki, ko‘paytmada vektor hosil bo‘lishi kerak. Shu sababli vektorlarning vektorial ko‘paytmasi tushunchasi kiritilgan. Bu ko‘paytma uchun kommutativlik qonuni bajarilmasada, distributivlik qonuni o‘z kuchini saqlab qoladi. Vektorial ko‘paytma koordinatalar orqali III tartibli determinant yordamida algebraik usulda ham topilishi mumkin. Vektorial ko‘paytma orqali vektorlarning kollinearlik sharti oddiy ko‘rinishda ifodalanadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Qanday kattaliklar skalyarlar deyiladi?
2. Skalyarlarga qanday misollar bilasiz?
3. Qanday kattaliklar vektorlar deb ataladi?
4. Vektorlarning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
5. Vektorning moduli deb nimaga aytiladi?
6. Qanday vektor nol vektor deyiladi?
7. Qanday vektorlar kollinear deyiladi?
8. Qachon vektorlar teng deb hisoblanadi?
9. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
10. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday xossalarga ega?
11. Vektorlar yig‘indisi qanday aniqlanadi?
12. Vektorlar yig‘indisi qanday xossalarga ega?
13. Ort vektorlar deb qanday vektorlarga tushuniladi?
14. Vektorning ortlar bo‘yicha yoyilmasi qanday aniqlanadi?
15. Vektorning koordinatalari qanday topiladi?
16. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tenglik sharti nimadan iborat?
17. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida arifmetik amallar qanday bajariladi?
18. Vektorning koordinatalari uning boshi va uchi bo‘yicha qanday topiladi?
19. Kesmani berilgan nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari qanday topiladi?
20. Kesma o‘rta nuqtasining koordinatalari qanday topiladi?
22. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?

23. Vektorlar skalyar ko‘paytmasining mexanik ma’nosi nimadan iborat?

24. Skalyar ko‘paytma qanday xossalarga ega?

25. Qanday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi?

26. Vektorlar ortogonalligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?

27. Skalyar ko‘paytma vektorlarning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?

28. Ikki vektor orasidagi burchak qanday topiladi?

29. Ikki vektorning ortogonallik sharti koordinatalarda qanday ifodalanadi?

30. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?

31. Vektorial ko‘paytma qanday ta’riflanadi?

32. Vektorial ko‘paytmaning mexanik ma’nosi nimadan iborat?

33. Vektorial ko‘paytma qanday xossalarga ega?

34. Ortlarning vektorial ko‘paytmasi qanday topiladi?

35. Vektorial ko‘paytma koordinatalarda qanday ifodalanadi?

36. Vektorlarning kollinearlik sharti nimadan iborat?

Testlardan namunalar:

1. Skalyar deb nimaga aytiladi?

A) Faqat yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.

B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.

C) Ham son qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.

D) Yo‘nalgan kesmaga skalyar deb aytiladi.

E) Har qanday kattalik skalyar deyiladi.

2. Vektor kattalik deb nimaga aytiladi?

A) Faqat yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.

B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.

C) Ham son qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.

D) Har qanday kesmaga vektor deb aytiladi.

E) Har qanday kattalik vektor deyiladi.

3. Quyidagi kattaliiklardan qaysi biri vektor bo‘ladi?

A) sirt yuzasi; B) jism hajmi; C) kesma uzunligi;

D) kuch; E) Birorta ham kattalik vektor bo‘lmaydi.

4. Qachon vektorlar kollinear deb aytiladi?

A) Bir xil yo‘nalgan vektorlar kollinear deb aytiladi.

B) Har qanday $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar kollinear vektorlar deb aytiladi.

C) Bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lgan vektorlar kollinear deb aytiladi.

D) Bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

E) Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

5. Qachon vektorlar teng deb aytiladi?

A) Bir xil yo‘nalgan vektorlar teng deb aytiladi.

B) Bir xil uzunlikli $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarga teng vektorlar deb aytiladi.

C) Bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lgan vektorlar teng deb aytiladi.

D) $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar kollinear, bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lsa, ular teng vektorlar deb aytiladi.

E) Kollinear va bir xil yo‘nalgan vektorlar teng deb aytiladi.

6. Ta’rifni to‘ldiring: Uchta vektor komplanar deyiladi, agar ular ... joylashgan bo‘lsa.

A) bitta to‘g‘ri chiziqda; B) bitta tekislik yoki parallel tekisliklarda;

C) parallel to‘g‘ri chiziqlarda; D) o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarda;

E) o‘zaro perpendikulyar tekisliklarda.

7. Fazodagi ort vektorlar qanday aniqlanadi?

A) OX, OY, OZ koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalishda ega va uzunliklari birga teng bo‘lgan vektorlar;

B) Uzunliklari birga teng bo‘lgan uchta vektor;

C) O‘zaro perpendikulyar bo‘lgan uchta vektor;

D) O‘zaro kollinear bo‘lgan uchta birlik vektor;

E) Uchta komplanar birlik vektorlar.

8. $\boldsymbol{a}=(2, -5)$ vektorning $\bar{i}$ va $\bar{j}$ ortlar bo‘yicha yoyilmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $a=2i-5j$; B) $a=-5i+2j$; C) $a=-2i+5j$; D) $a=5i-2j$; E) $a=2i+5j$.

9. ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar ko‘paytmasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$; B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$; C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$;

D) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{tg}\varphi$; E) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{ctg}\varphi$.

10. Qaysi holda ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar ko‘paytmasi $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ sartni qanoatlantiradi?

A) ***a*** va ***b*** bir xil uzunlikka ega bo‘lsa; B) ***a*** va ***b*** ort vektorlar bo‘lsa;

C) ***a*** va ***b*** orthogonal bo‘lsa; D) ***a*** va ***b*** kollinear bo‘lsa;

E) hech qaysi ***a*** va ***b*** vektorlar uchun bu shart bajarilmaydi.

11. ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar ko‘paytmasining xossasi qayerda noto‘g‘ri ifodalangan?

A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$; B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$; C) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

D) $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$; E) Barcha xossalar to‘g‘ri.

12. ***i, j, k*** ort vektorlarning skalyar ko‘paytmalari boyicha quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas?

A) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$; B) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$;

C) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0$; D) $\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})=0,\ \boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})=0,\ \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=0$;

E) $\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})=0,\ \boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i})=0,\ \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=0$.

13. Agar $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas?

A) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ (φ– ***a*** va ***b*** vektorlar orasidagi burchak);

B) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$; C) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$; D) ***c***, ***a*** va ***b*** vektorlar bir tekislikda yotadi;

E) Barcha tasdiqlar o‘rinli.

14. Qanday ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar va vektorial ko‘paytmalari o‘zaro teng bo‘ladi?

A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;

C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;

E) Bunday vektorlar mavjud emas.

15. Qaysi shartda ***a*** va ***b*** vektorlar uchun $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ tenglik o‘rinli?

A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;

C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;

E) Bunday vektorlar mavjud emas.

16. Agar $|a|=4$, $|b|=5$ va $\varphi=30^0$ bo'lsa, $|a\times b|=?$
A) 20; B) 10; C) $10\sqrt{3}$; D) 41; E) 0.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Boshi A(n, $2n+3$, $5-2n$), uchi esa B($2n+3$, $2n-1$, n) nuqtada joylashgan ***a*** vektorning koordinatalarini toping.

2. Berilgan $a=(n-2, n+3, n-1)$ va $b=(n, n-4, n+2)$ vektorlar bo'yicha ***na***, ***a+b***, ***a–b*** va ***3a+nb*** vektorlarni toping.

3. Boshi A($n-2$, $n+3$, n) va uchi B($n+1$, $n-3$, $n-1$) nuqtada joylashgan vektorning koordinatalarini toping.

4. Uchlari A($n-2$, $n+3$, n) va B($n+1$, $n-3$, $n-1$) nuqtalarda joylashgan AB kesmani $\lambda=(n-1):(n+2)$ nisbatda bo'luvchi C(x,y,z) nuqta koordinatalarini aniqlang.

5. Berilgan $a=(n, n+1, n-2)$ va $b=(n+2, n, n-1)$ vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusini toping.

6. λ parametrning qanday qiymatida $a=(\lambda n, n-2, n+1)$ va $b=(n-3, \lambda n, n-1)$ vektorlar orthogonal bo'lishini aniqlang.

7. Fazodagi A($n+2$, $n+4$, $n-3$) va B($2n+1$, $n+1$, $2n-1$) nuqtalar orasidagi masofani toping.

8. Berilgan $a=(n-3, n+1, 2n-1)$ va $b=(n+2, n, n-1)$ vektorlardan tuzilgan parallelogramm yuzasini toping.

9. $a=(\lambda n, n-2, n+1)$ va $b=(n-3, \mu n, n-1)$ vektorlar λ va μ parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo'lishini aniqlang.

IV BOB. FUNKSIYA HAQIDA TUSHUNCHA

Matematik analiz haqli ravishda matematik fanlar ichida birinchisi bo'lib hisoblanadi.

Appel P.E.

REJA:

- Sonli to'plamlar. Sonning absolyut qiymati
- Sonli ketma-ketlik va uning limiti
- Funksiya tushunchasi va uning ta'rifi
- Funksiya limiti va uning asosiy xossalari
- Uzluksiz va uzlukli funksiyalar

Tayanch iboralar: sonli to'plamlar, natural sonlar to'plami, butun sonlar to'plami, ratsional sonlar to'plami, irratsional sonlar to'plami, haqiqiy sonlar to'plami, sonlar o'qi, oraliq, kesma, chegaralangan to'plam, chegaralanmagan to'plam, sonning absolyut qiymati, sonli ketma-ketlik, chegaralangan ketma-ketlik, chegaralanmagan ketma-ketlik, sonli ketma-ketlik limiti, limit hisoblash qoidalari, ajoyib limit, funksiya, aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi, funksiya grafigi, asosiy elementar funksiyalar, elementar funksiyalar, funksiyaning limiti, limitning yagonaligi, funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi, argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, kesmadagi eng katta qiymat, kesmadagi eng kichik qiymat.

4.1. Sonli to'plamlar. Sonning absolyut qiymati

Sonli to'plamlar va ularning turlari. Yuqorida biz to'plam tushunchasi haqida so'z yuritgan edik. Unda asosan, to'plam elementlari ixtiyoriy ko'rinishda bo'lgan umumiy hol qaralgan edi. Bizga kelgusida to'plamlarning xususiy, ammo juda muhim bir holi kerak bo'ladi.

Ta'rif: Elementlari sonlardan iborat to'plam ***sonli to'plam*** deb ataladi.

Eng asosiy sonli to'plamlarni eslatib o'tamiz.

- ***Natural sonlar to'plami.*** Bu to'plam $1,2,3, \cdots ,n, \cdots$ natural sonlardan iborat bo'lib, N kabi belgilanadi.
- ***Butun sonlar to'plami.*** Bu to'plam $\cdots, -3,-2,-1,0,1,2,3, \cdots$ butun sonlardan tashkil topgan va Z deb belgilanadi.
- ***Ratsional sonlar to'plami.*** Bu to'plam m/n ($m\in Z$, $n\in N$) ko'rinishdagi ratsional sonlardan tuzilgan va Q kabi belgilanadi.
- ***Irratsional sonlar to'plami.*** Bu to'plam m/n ($m\in Z$, $n\in N$) ko'rinishda ifodalab bo'lmaydigan sonlarni o'z ichiga oladi va I kabi belgilanadi. Bunday sonlar mavjud va I bo'sh to'plam emas ekanligini ko'rsatamiz. Masalan, $\sqrt{2}$ irratsional son ekanligini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $\sqrt{2}$ ratsional son deb olamiz. Bu holda uni $\sqrt{2}=m/n$ ko'rinishda ifodalab bo'ladi. Bunda m butun va n natural sonlarni o'zaro tub, ya'ni umumiy ko'paytuvchilarga ega emas, deb olish mumkin. Agar bunday ko'paytuvchilar mavjud bo'lsa, ularni o'zaro qisqartirish orqali ko'rilayotgan holga keltirish mumkin. Yuqoridagi tenglikni kvadratga oshirib, $m^2 =2n^2$ tenglikni hosil etamiz. Undan m juft son ekanligi va shu sababli uni $m=2k$ ko'rinishda yozish mumkinligi kelib chiqadi. Bu yerdan esa

$$m^2 =2n^2 \Rightarrow (2k)^2=2n^2 \Rightarrow n^2=2k^2 \Rightarrow n=2r,$$

ya'ni n ham juft son ekanligi kelib chiqadi. U holda m va n sonlari 2 sonidan iborat umumiy ko'paytuvchiga ega ekanligi kelib chiqadi. Bu esa biz qilgan farazga ziddir. Demak, bizning faraz noto'g'ri va $\sqrt{2}$ ratsional son emas.

- ***Haqiqiy sonlar to'plami.*** Bu to'plam ratsional va irratsional sonlardan tashkil topgan bo'lib, R kabi belgilanadi. Bundan R ratsional va irratsional sonlar to'plamlarining birlashmasidan iborat, ya'ni $R=Q\cup I$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu sonli to'plamlar kengayib borish tartibida berildi, ya'ni bu yerda $N\subset Z\subset Q\subset R$, $I\subset R$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Kelgusida son deyilganda haqiqiy sonlarni ko'zda tutamiz.

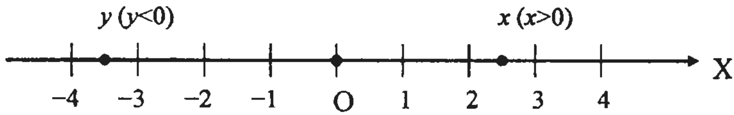
Haqiqiy sonlar to'plamini geometrik ko'rinishda ifodalash uchun ***haqiqiy sonlar o'qi*** yoki qisqacha ***sonlar o'qi*** tushunchasi kiritiladi. Buning uchun biror L to'g'ri chiziq tanlanib, quyidagi ishlar bajariladi:

✓Bu to‘g‘ri chiziqda musbat yo‘nalish tanlanadi va u strelka orqali ifodalanadi. Odatda, chapdan o‘ng tomonga bo‘lgan yo‘nalish musbat deb qabul etiladi.

✓Bu to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy bir nuqta tanlanib, u ***sonlar o‘qining boshi*** deb ataladi va O kabi belgilanadi.

✓Bu to‘g‘ri chiziqda bir birlikni ifodalovchi masshtab kiritiladi.

✓Har bir musbat x soniga O nuqtadan o‘ng tomonda x masofada joylashgan nuqtani, har bir manfiy y soniga O nuqtadan chap tomonda $(-y)$ masofada joylashgan nuqtani, 0 soniga esa O sonlar o‘qi boshini mos qo‘yamiz (19-rasm).



19-rasm

Bu tarzda hosil qilingan sonlar o‘qida har bir x soniga faqat bitta nuqta (uni ham x deb belgilaymiz) mos keladi va aksincha, undagi har bir nuqtaga faqat bitta son mos keladi. Natijada, sonlar o‘qi yordamida, algebraik tushuncha bo‘lgan son va geometrik tushuncha bo‘lgan nuqta orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatildi. Shu sababli kerak bo‘lgan paytlarda “x soni” o‘rniga “x nuqta” deb aytiladi.

Chekli a va b $(a<b)$ sonlari uchun $a<x<b$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar to‘plamini ***interval yoki oraliq*** deb ataymiz va uni (a,b) kabi belgilaymiz. $a\leq x\leq b$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar to‘plami ***segment yoki kesma*** deyiladi va $[a,b]$ kabi belgilanadi. $a<x\leq b$ yoki $a\leq x<b$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar to‘plami ***yarim interval yoki yarim oraliqlar*** deb ataladi va mos ravishda $(a,b]$ yoki $[a,b)$ ko‘rinishda ifodalanadi. Bunda a va b sonlari (a,b) oraliq yoki $[a,b]$ kesma yoki $(a,b]$, $[a,b)$ yarim oraliqlarning mos ravishda ***chap va o‘ng chegaralari*** (umuman olganda ***chegaralari***), $d=b-a$ soni esa ularning ***uzunligi*** deyiladi. Masalan, $(-2,6)$ oraliq, $[-2,6]$ kesma, $(-2,6]$ va $[-2,6)$ yarim oraliq chegaralari $a=-2$ va $b=6$, uzunligi esa $d=6-(-2)=8$ bo‘ladi.

Endi a va b chegaralardan birortasi cheksiz (∞ yoki $-\infty$) bo'lgan hollarni qaraymiz. Bunda $(-\infty,b)$ yoki (a,∞), $(-\infty,b]$ yoki $[a,\infty)$ ***yarim cheksiz oraliqlar***, $(-\infty,\infty)$ esa ***cheksiz oraliq*** deyiladi. Bu sonli to'plamlarning uzunliklari cheksiz bo'lishi tushunarlidir.

Chegaralari o'ziga tegishli bo'lmagan (a,b) oraliq ***ochiq***, chegaralaridan faqat bittasi o'ziga tegishli bo'lgan $[a,b)$, $(a,b]$ yarim oraliqlar ***yarim ochiq***, ikkala chegarasi ham o'ziga tegishli $[a,b]$ kesma ***yopiq to'plam*** deyiladi.

Ta'rif: Qaralayotgan c nuqtani o'z ichiga olgan har qanday (a,b) oraliq $(a<c<b)$ ***c nuqtaning atrofi*** deb ataladi. Xususan, har qanday $\varepsilon>0$ soni uchun $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ oraliq ***c nuqtaning ε atrofi*** deyiladi.

Masalan, (1,9; 2,1) oraliq $c=2$ nuqtaning $\varepsilon=0{,}1$ atrofi bo'ladi.

Ta'rif: Berilgan X sonli to'plam uchun shunday M (yoki m) soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x\in X$ uchun $x\leq M$ (yoki $x\geq m$) shart bajarilsa, X ***yuqoridan (quyidan) chegaralangan to'plam*** deyiladi. Agar X ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan ($m\leq x\leq M$) bo'lsa, u ***chegaralangan to'plam*** deb ataladi.

Masalan, $(-\infty, 2]$ yuqoridan chegaralangan ($x\leq 2$), $(-1,\infty)$ quyidan chegaralangan ($x>-1$), $[-3,5)$ chegaralangan ($x\geq -3$, $x<5$) to'plam bo'ladi.

Ta'rif: Berilgan X sonli to'plam uchun har qanday $M>0$ soni uchun shunday $x_0\in X$ element mavjud bo'lsaki, uning uchun $x_0>M$ yoki $-x_0>M$ shart bajarilsa, X ***chegaralanmagan to'plam*** deyiladi.

Masalan, $(-\infty,b)$, (a,∞), $(-\infty,b]$, $[a,\infty)$ va $(-\infty,\infty)$ chegaralanmagan sonli to'plamlardir.

Sonning absolyut qiymati va uning xossalari. Dastlab bizga maktabdan tanish bo'lgan sonning absolyut qiymati ta'rifini eslatib o'tamiz.

Ta'rif: Har qanday $x\in R$ sonining ***absolyut qiymati (yoki moduli)*** deb shu sondan sonlar o'qining O boshigacha bo'lgan masofaga aytiladi.

Berilgan $x\in R$ sonining absolyut qiymati $|x|$ kabi belgilanadi va ta'rifga asosan,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Masalan, $|3|=3$, $|-4|=4$, $|0|=0$ bo'ladi.

Teorema: Sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1. Har qanday $x \in R$ soni uchun $|x| \geq 0$;

2. Har qanday $x \in R$ soni uchun $|x|=|-x|$;

3. $|x|=0$ faqat va faqat $x=0$ bo'lsa;

4. Har qanday $x \in R$ soni uchun $|x| \geq x$ va $x \geq -|x|$;

5. Har qanday $x,y \in R$ sonlari uchun $|xy|=|x| \cdot |y|$;

6. Har qanday $x \in R$ va $0 \neq y \in R$ sonlari uchun $|x/y|=|x|/|y|$;

7. Har qanday $x,y \in R$ sonlari uchun $|x+y| \leq |x|+|y|$;

8. Har qanday $x,y \in R$ sonlari uchun $|x-y| \geq |x|-|y|$.

Isbot: Dastlabki ikkita xossa bevosita absolyut qiymat ta'rifidan kelib chiqadi.

3. Agar $x=0$ bo'lsa unda, ta'rifga asosan, $|x|=0$ bo'ladi. Endi, aksincha, $|x|=0$ bo'lsin. Bu holda 2-xossadan $x=-x$ => $2x=0$ => $x=0$ ekanligi kelib chiqadi.

4. (1) formulaga asosan, $x \geq 0$ holda $|x|=x$ va $x<0$ holda $|x|=-x>x$ bo'ladi. Bu yerdan umumiy holda $|x| \geq x$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda $x \geq -|x|$ tengsizlik o'rinli ekanligi isbotlanadi.

5. Agar $x \geq 0, y \geq 0$ => $xy \geq 0$ => $|xy|= xy =|x| \cdot |y|$;

$x<0, y<0$ => $xy>0$ => [(1) formulaga asosan] $|xy|= xy = (-x)(-y)= |x| \cdot |y|$;

$x<0, y>0$ => $xy<0$ => [(1) formulaga asosan] $|xy|=- xy = (-x)\, y= |x| \cdot |y|$;

$x<0, y>0$ => $xy<0$ => $|xy|=- xy = (-x)\, y= |x| \cdot |y|$.

Demak, barcha hollarda $|xy|=|x| \cdot |y|$ tenglik o'rinli bo'ladi.

6. Xuddi 5-holdagidek isbotlanadi.

7. Yuqorida ko'rilgan 4-xossaga asosan, $-|x| \leq x \leq |x|$ va $-|y| \leq y \leq |y|$ qo'sh tengsizliklarni yozish mumkin. Bu tengsizliklarni hadma-had qo'shib, ushbu natijani olamiz:

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|.$$

Bu yerda ikki holni ko'ramiz. Agar $x+y \geq 0$ bo'lsa, unda $x+y=|x+y|$ bo'lishidan va oldingi qo'sh tengsizlikning o'ng tomonidan foydalanib, talab etilgan

$$x+y \leq |x|+|y| \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$$

natijani hosil qilamiz. Agar $x+y<0$ bo'lsa, unda $-(x+y)=|x+y|$ bo'lishidan va oldingi qo'sh tengsizlikning chap tomonidan foydalanib, isbotlanishi kerak bo'lgan tengsizlikka quyidagicha erishamiz:

$$-(|x|+|y|)\leq x+y \Rightarrow |x|+|y|\geq -(x+y) \Rightarrow |x|+|y|\geq |x+y| .$$

8. 7-xossadan foydalanib, quyidagi natijalarni olamiz:

$$x=(x-y)+y \Rightarrow |x|=|(x-y)+y|\leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x-y|\geq |x|-|y|.$$

Absolut qiymatning bu xossalaridan kelgusida keng foydalaniladi.

4.2. Sonli ketma-ketlik va unung limiti

Dastlab sonli ketma-ketlik tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif: Agar har bir $n\in N$ natural songa biror qonun-qoida asosida ma'lum bir $a_n\in R$ haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, unda a_1 , a_2 , a_3 , … , a_n , … ***sonli ketma-ketlik*** deb ataladi. Bunda a_i $(i\in N)$ sonlari ***ketma-ketlikning hadlari***, a_n esa ***umumiy hadi*** deyiladi.

Sonli ketma-ketliklarga bir nechta misol keltiramiz.

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, \quad a_n=\frac{1}{n}$;

2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots, \quad a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$;

3) $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots, a_n=(-1)^n$;

4) $3, 3, 3, 3, \cdots, 3, \cdots, a_n=3$;

5) $-1, -4, -9, -16, \cdots, -n^2, \cdots, a_n=-n^2$;

6) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots, a_n=2^n$;

7) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \cdots, n^{(-1)^n}, \cdots, \quad a_n=n^{(-1)^n}$;

8) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \cdots, (-1)^n\cdot n, \cdots, a_n=(-1)^n\cdot n$.

Kelgusida a_1 , a_2 , a_3 , … , a_n , … sonli ketma-ketlikni qisqacha ketma-ketlik deb yuritamiz va $\{a_n\}$ kabi belgilaymiz.

Ta'rif: Agar shunday M (yoki m) soni mavjud bo'lsaki, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $a_n\leq M$ (yoki $a_n\geq m$)shart bajarilsa, unda bu ketma-ketlik ***yuqoridan (quyidan) chegaralangan*** deb ataladi. Ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik ***chegaralangan*** deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan 5) ketma-ketlik yuqoridan $M=-1$ soni bilan, 6) va 7) ketma-ketliklar quyidan mos ravishda $m=2$ va $m=0$ soni bilan chegaralangan. 1) -4) ketma-ketliklar esa chegaralangan bo'ladi.

Ta'rif: Ixtiyoriy $M>0$ soni uchun $\{a_n\}$ ketma-ketlikning kamida bitta hadi $|a_n|>M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik ***chegaralanmagan*** deyiladi.

Masalan, 8) ketma-ketlik chegaralanmagan bo'ladi. Bunda 8) quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan ketma-ketlik bo'ladi.

Endi oliy matematikaning eng muhim tushunchalaridan biri bo'lgan limit ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun unga bog'liq shunday N_ε son topilsaki, $n>N_\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar va biror chekli A haqiqiy son uchun $|a_n - A|< \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu A soni $\{a_n\}$ ketma-ketlikning ***chekli limiti*** deyiladi.

A soni $\{a_n\}$ ketma-ketlikning chekli limiti ekanligi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{yoki } \lim a_n=A \text{ yoki } a_n\to A$$

kabi yoziladi. Bu yozuv "***$\{a_n\}$ ketma-ketlik A soniga intiladi yoki yaqinlashadi***" deb o'qiladi.

Masalan, 1) ketma-ketlik limiti $A=0$ ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonini olib, limit ta'rifidagi N_ε sonini topishga harakat etamiz:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = N_\varepsilon .$$

Demak, 1) ketma-ketlikda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun $N_\varepsilon=1/\varepsilon$ deb olsak, unda barcha $n>N_\varepsilon$ uchun $|a_n-0|=|(1/n)-0|<\varepsilon$ bo'ladi va limit ta'rifga asosan, $\lim (1/n)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunday tarzda 2) ketma-ketlik limiti ham 0 bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Endi yana $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti ta'rifiga murojaat etamiz. Unda $a_n\to A$ bo'lsa, tartib raqami $n>N_\varepsilon$ bo'lgan barcha a_n hadlar uchun

$$| a_n - A|< \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon< a_n - A< \varepsilon \Rightarrow A-\varepsilon< a_n < A+\varepsilon \Rightarrow a_n \in(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\{a_n\}$ ketma-ketlik chekli A limitga ega bo'lsa, unda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun uning tartib raqami $n>N_\varepsilon$ bo'lgan barcha a_n hadlari A nuqtaning ε-atrofiga tegishli va undan tashqarida faqat chekli sondagi hadlar joylashgan bo'ladi. Limit ta'rifining bu ifodasidan foydalanib, 3) ketma-ketlik limiti mavjud emasligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz va 3) ketma-ketlik limiti biror A sonidan iborat deb olamiz. Bu limit nuqtaning $(A-0.5, A+0.5)$ atrofini qaraymiz. Unda bu atrofdan tashqarida 3) ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari joylashgan bo'lishi kerak. Ammo A limit nuqtaning bu atrofiga 3) ketma-ketlikning ham 1, ham –1 hadlari bir paytda tegishli bo'la olmaydi. Bunga sabab shuki, olingan (A–0.5, A+0.5) atrof uzunligi 1 bo'lib, –1 va 1 hadlar orasidagi masofa esa 2 ga tengdir. Bu holda, masalan, agar $1\in(A-0.5, A+0.5)$ bo'lsa, unda –1 bu atrofdan tashqarida joylashgan bo'ladi. Bundan esa (A–0.5, A+0.5) atrofdan tashqarida 3) ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashganligi kelib chiqadi. Ammo bu xulosa limit ta'rifiga ziddir. Demak, farazimiz noto'g'ri va 3) ketma-ketlik limitga ega emas ekan.

Ta'rif: Hamma hadlari bir xil a soniga teng bo'lgan ketma-ketlik ***o'zgarmas ketma-ketlik*** deyiladi.

Har qanday $\{a_n=C\}$ o'zgarmas ketma-ketlik uchun $\lim a_n=\lim C=C$ tenglik o'rinli bo'lishi bevosita limit ta'rifidan kelib chiqadi. Masalan, yuqoridagi 4) $\{a_n=3\}$ o'zgarmas ketma-ketlikdir va uning uchun $\lim a_n=\lim 3=3$ bo'ladi.

Ta'rif: Ixtiyoriy $M>0$ soni uchun bu songa bog'liq shunday N_M soni topilsaki, $\{a_n\}$ ketma-ketlik tartib raqami $n>N_M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha hadlar uchun $|a_n|>M$ tengsizlik bajarilsa, unda bu ketma-ketlik ***cheksiz limitga*** ega deyiladi[34].

Berilgan $\{a_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz ekanligi $\lim a_n=\infty$ yoki $\lim a_n=\pm\infty$ kabi ifodalanadi. Masalan, 5) ketma-ketlik uchun $\lim a_n=-\infty$ ekanligini ko'rsatamiz. ixtiyoriy $M>0$ uchun

$$|a_n|>M\Rightarrow\left|-n^2\right|>M\Rightarrow n^2>M\Rightarrow n>\sqrt{M}=N_M\,.$$

Demak, 5) ketma-ketlikda ixtiyoriy $M>0$ soni uchun $N_M=\sqrt{M}$ deb olsak, unda barcha $n>N_M$ uchun $|a_n|=|-n^2|>M$ bo'ladi va barcha $a_n<0$ ekanligidan hamda cheksiz limit ta'rifiga asosan, $\lim(-n^2)=-\infty$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shundek, 6) ketma-ketlik uchun $\lim a_n=\lim 2^n=+\infty$ ekanligini ko'rsatish mumkin. 8) sonli ketma-ketlik ham chegaralanmagan, ammo uning cheksiz limiti aniq bir ishoraga ega emas va shu sababli $\lim a_n=\lim(-1)^n n=\infty$ deb yoziladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, cheksiz limitga ega har qanday ketma-ketlik albatta, chegaralanmagan bo'ladi. Ammo teskari tasdiq har doim ham o'rinli bo'lmaydi. Masalan, yuqorida keltirilgan 7) ketma-ketlik chegaralanmagan, ammo uning limiti mavjud emas.

---

[34] Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. – Tomsk, 2009. – P. 121.

Ta'rif: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u ***yaqinlashuvchi***, aks holda esa ***uzoqlashuvchi ketma-ketlik*** deyiladi.

Masalan, yuqoridagi 1), 2) va 4) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi, 3), 5)–8) ketma-ketliklar esa uzoqlashuvchidir.

Ta'rif: Agar ixtiyoriy n=1,2,3, ··· uchun $a_{n+1}>a_n$ $(a_{n+1}<a_n)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda $\{a_n\}$ ketma-ketlik ***monoton o'suvchi (kamayuvchi)*** deyiladi.

Masalan, $\{1-1/n\}$ monoton o'suvchi, $\{1+1/n\}$ esa monoton kamayuvchi ketma-ketlik bo'ladi.

Berilgan $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti mavjudligi ma'lum bo'lsa, uni limit ta'rifi bo'yicha aniqlab bo'lmaydi, chunki bunda limit qiymati ma'lum bo'lishi kerak. Shu sababli turli ketma-ketliklarning limitini topish uchun quyidagi teorema orqali ifodalanadigan ***limit hisoblash qoidalaridan*** foydalaniladi.

4.3. Funksiya tushunchasi va uning ta'rifi

Funksiya va u bilan bog'liq tushunchalar. Atrofimizdagi turli jarayonlarni matematik usullarda tadqiqot qilayotganimizda o'zgarmas va o'zgaruvchi miqdorlarga duch kelamiz.

Ta'rif: Faqat bitta sonli qiymat qabul qiladigan kattaliklar ***o'zgarmas miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, yorug'lik tezligi c, erkin tushish tezlanishi g, aylana uzunligini uning diametriga nisbati π, izotermik jarayonlarda harorat t^0 o'zgarmas miqdorlardir.

Ta'rif: Turli sonli qiymatlar qabul qila oladigan kattaliklar ***o'zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, tekis harakatda v tezlik o'zgarmas miqdor bo'lib, vaqt t va bosib o'tilgan masofa s o'zgaruvchi miqdorlardir. Biror jarayonni o'rganayotganimizda bir nechta o'zgaruvchi miqdorlar o'rtasidagi o'zaro bog'lanishlarga duch kelamiz.

Masalan, tekis harakatda tezlikni v, vaqtni t va bosib o'tilgan masofani s desak, u holda t va s o'zgaruvchilar o'zaro $s=v\cdot t$ ko'rinishda bog'langan bo'ladi. Bunday bog'lanishlarni juda ko'p keltirish mumkin va shu sababli ularni atroflicha o'rganish maqsadida funksiya tushunchasi kiritiladi.

Ta'rif: Agarda x o'zgaruvchining biror D sonli to'plamga tegishli har bir qiymatiga ma'lum bir qonun-qoida asosida u o'zgaruvchining biror E to'plamga tegishli yagona bir qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, ya'ni $f: D \rightarrow E$ bo'lsa, unda u o'zgaruvchi x o'zgaruvchining ***funksiyasi*** deyiladi.

Biror y o'zgaruvchi x o'zgaruvchining funksiyasi ekanligi $y=f(x)$ kabi belgilanadi (f harfi o'rniga F, h, g, φ kabi boshqa harflar ham qo'llanilishi mumkin). Bu yerda x ***erkli o'zgaruvchi yoki argument***, y esa ***erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya*** deb ataladi[35].

Masalan, $y=2x+3$, $y=3x^2+4x-1$, $y=2/x$, $y=5xe^x+6$ funksiyalarga misol bo'ladi.

Ta'rif: Berilgan $f: D \rightarrow E$ funksiyada D – funksiyaning ***aniqlanish sohasi***, E – ***o'zgarish yoki qiymatlar sohasi*** deyiladi.

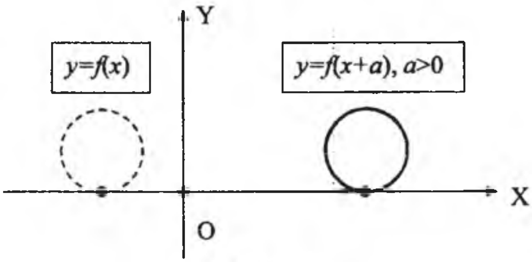
$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D\{f\}$, qiymatlar sohasi esa $E\{f\}$ kabi belgilanadi. Masalan, $f(x)=\sin\sqrt{x}$ funksiya uchun $D\{f\}=[0,\infty)$, $E\{f\}=[-1,1]$.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, oldingi mavzuda ko'rilgan $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikni aniqlanish sohasi $D\{f\}=N$ – natural sonlar to'plami, qiymatlar sohasi esa $f(n)=a_n$, $n\in N$, haqiqiy sonlardan iborat funksiya deb qarash mumkin.

Matematik analiz fanida asosan, funksiyalar, ular bilan bog'liq bo'lgan tasdiqlar o'rganiladi.

Funksiya grafigi. Funksiya haqida geometrik tasavvur hosil etish uchun uning grafigi tushunchasi kiritiladi.

Ta'rif: XOY koordinata tekislikdagi $(x,y)=(x, f(x))$, $x\in D\{f\}$, koordinatali nuqtalarning geometrik o'rni $y=f(x)$ funksiyaning ***grafigi*** deyiladi.



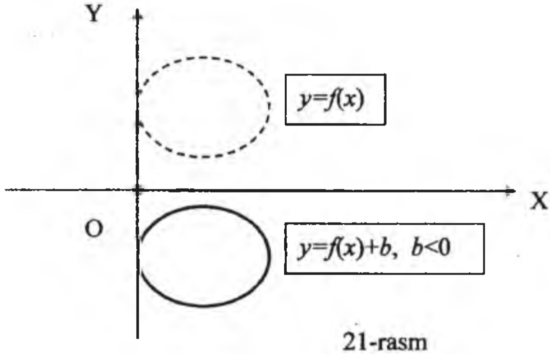
20-rasm

[35] Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. – Tomsk, 2009. – P. 134.

Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi paraboladan, $y=\cos x$ funksiya grafigi sinus oidadan, $y=2x+5$ funksiya grafigi esa to'g'ri chiziqdan iboratdir.

Turli masalalarni yechishda berilgan $y=f(x)$ funksiyaning L grafigini ma'lum bir ko'rinishda o'zgartirishga to'g'ri keladi.

$y=f(x+a)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o'qi bo'yicha $|a|$ birlik chapga (agar $a>0$ bo'lsa) yoki o'ngga (agar $a<0$ bo'lsa) parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi (20-rasm).



21-rasm

➢ $y=f(x)+b$ funksiyaning grafigi L chiziqni OY o'qi bo'yicha $|b|$ birlik yuqoriga (agar $b>0$ bo'lsa) yoki pastga (agar $b<0$ bo'lsa) parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi (21-rasm).

➢ $y=\alpha f(x)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OY o'qi bo'yicha α marta cho'zish (agar $\alpha>1$ bo'lsa, 22-rasm) yoki qisish (agar $0<\alpha<1$ bo'lsa, 23-rasm) orqali hosil bo'ladi. Agar $\alpha<0$ bo'lsa, unda L chiziq OX o'qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.

➢ $y=f(kx)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o'qi bo'yicha k marta cho'zish (agar $k>1$ bo'lsa, 24-rasm) yoki qisish (agar $0<k<1$ bo'lsa, 25-rasm) orqali hosil bo'ladi. Agar $k<0$ bo'lsa, unda L chiziq OY o'qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.

Funksiyani berilish usullari. Turli masalalarni qarashda funksiya asosan to'rt usulda berilishi mumkin.

❖ ***Analitik usul.*** Ko'p hollarda funksiyalar analitik usulda, ya'ni x argument ustida bajariladigan matematik amallarni formulalar orqali ifodalash orqali beriladi. Masalan, aylana radiusi x va uning yuzasi y

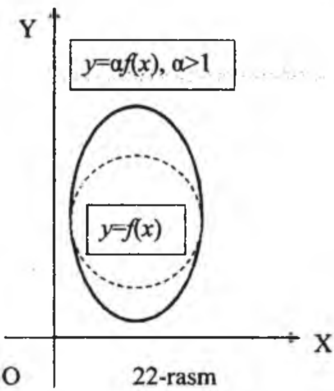
orasidagi bog‘lanish funksiyasi $y=\pi x^2$ formula orqali analitik usulda aniqlanadi.

❖ ***Jadval usuli.*** Bu usulda funksiya

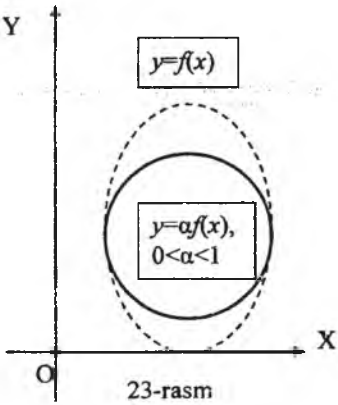
x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_1	y_2	y_3	...	y_{n-1}	y_n

Ko‘rinishdagi jadval orqali beriladi. Masalan, Bradisning to‘rt xonali matematik jadvallar kitobchasida funksiyalarning qiymatlari shunday ko‘rinishda berilgan. Odatda, x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish tajriba yoki kuzatuvlar asosida o‘rganilayotgan bo‘lsa, funksiya qiymatlari jadval ko‘rinishda ifodalanadi.

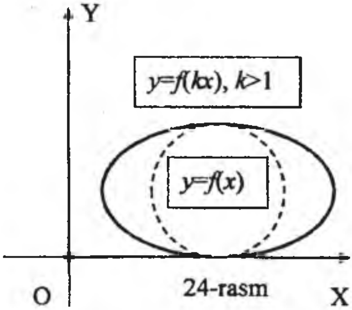
❖ ***Grafik usul.*** Bunda, x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish bu funksiyaning grafigi orqali beriladi. Masalan, yurak faoliyatini ifodalovchi funksiya kardiogramma orqali grafik ko‘rinishda ifodalanadi. Shuningdek, bu usuldan tenglamalarni grafik usulda yechishda ham foydalaniladi.



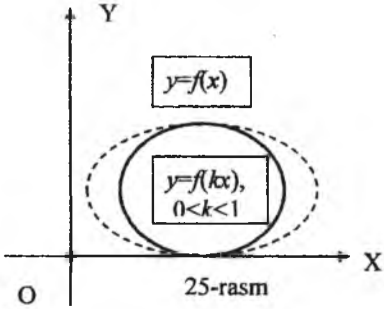
22-rasm



23-rasm



24-rasm



25-rasm

❖ ***Ta'rif usuli.*** Bu usulda funksiya qiymatini aniqlash qonuni uni ta'riflash orqali beriladi. Masalan, ***Dirixle funksiyasi*** deb ataluvchi va [0,1] kesmada aniqlangan D(x) funksiyani analitik, jadval yoki grafik ko'rinishlarda ifodalab bo'lmaydi. Bu funksiya qiymatlari ta'rif bo'yicha quyidagicha aniqlanadi:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa};\\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa}.\end{cases}$$

Funksiya ko'rinishlari. Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab turli ko'rinishlarga ajratiladi.

Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy x_1, $x_2 \in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)<f(x_2)$ [$f(x_1)\leq f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa, u shu D sohada ***o'suvchi (kamaymovchi) funksiya*** deyiladi.

Masalan, $y=x^3$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(0,\infty)$ oralig'ida o'suvchi bo'ladi. ***Ante funksiya*** deb ataladigan $y=[x]$ funksiyaning qiymati argument x qiymatiga eng yaqin va undan katta bo'lmagan butun son kabi aniqlanadi. Masalan, $[1.2]=1$, $[2.98]=2$, $[12]=12$, $[-1.5]=-2$. Bu holda $f(x)=[x]$ funksiya uchun $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=Z=\{0,\pm1, \pm2,\cdots\}$ bo'lib, u aniqlanish sohasida kamaymoqchi funksiya bo'ladi[36].

Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy x_1, $x_2\in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)>f(x_2)$ [$f(x_1)\geq f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa, u shu D sohada ***kamayuvchi (o'smoqchi) funksiya*** deyiladi.

[36] Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. – Tomsk, 2009. – P. 148.

Masalan, $y=-2x$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(-\infty,0)$ oralig'ida kamayuvchi bo'ladi. $y=1-[x]$ funksiya esa $(-\infty;\infty)$ oraliqda o'smoqchi bo'ladi.

O'suvchi yoki kamaymoqchi, kamayuvchi yoki o'smoqchi funksiyalar birgalikda ***monoton funksiyalar*** deyiladi.

Ta'rif: Aniqlanish sohasi $D\{f\}$ nol nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan $y=f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $f(-x)=f(x)$ $[f(-x)=-f(x)]$ shartni qanoatlantirsa, u ***juft*** [***toq***] ***funksiya*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ – juft funksiya, $f(x)=x^3$ esa toq funksiya bo'ladi. Lekin har qanday funksiya juft yoki toq bo'lishi shart emas. Masalan, $f(x)=x^2-3x+1$ yoki $f(x)=2x-3$ funksiyalar na juft va na toqdir.

Ta'rifdan juft funksiya grafigi OY koordinata o'qiga, toq funksiya grafigi esa O koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lishi kelib chiqadi.

Ta'rif: Agar $y=f(x)$ funksiya uchun shunday $T>0$ son mavjud bo'lsaki, $\forall x\in D\{f\}$ uchun $x\pm T\in D\{f\}$ bo'lib, $f(x\pm T)=f(x)$ shart bajarilsa, u ***davriy funksiya*** deb ataladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik musbat T soni shu funksiyaning ***davri*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ davri $T=2\pi$, $y=\mathrm{tg}x$ esa davri $T=\pi$ bo'lgan davriy funksiyalardir. $y=\{x\}=x-[x]$ funksiya qiymati argument x qiymatining nomanfiy kasr qismiga teng bo'ladi. Masalan, $\{1.2\}=0.2$, $\{2.98\}=0.98$, $\{\pm 8\}=0$, $\{-1.7\}=0.3$ (bunda $-1.7=-2+0.3$ deb qaraladi). Bu holda $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=[0,1)$ bo'lib, ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ va $n\in N=\{1,2,3,\cdots\}$ uchun $\{x+n\}=\{x\}$ bo'ladi. Bundan $f(x)=\{x\}$ davri $T=1$ bo'lgan davriy funksiya ekanligini ko'rish mumkin. $y=x^2$ yoki $y=e^x$ funksiyalar esa davriymas funksiyalarga misol bo'ladi.

Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun shunday $M>0$ soni topilsaki, ixtiyoriy $x\in D$ uchun $|f(x)|\leq M$ shart bajarilsa, u D sohada ***chegaralangan funksiya*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ ***chegaralanmagan funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $y=\sin x$ chegaralangan funksiya, chunki barcha x uchun $|\sin x|\leq 1$. $y=2^x$ funksiya $(-\infty,0)$ oraliqda chegaralangan va $2^x\leq 1$, ammo bu funksiya $(0,\infty)$ oraliqda chegaralanmagan, chunki ixtiyoriy $M>0$ katta soni uchun $x>\log_2 M$ bo'lganda $2^x>M$ bo'ladi.

Ta'rif: Agar $y=f(x)$ funksiya biror D sohaning har bir x nuqtasida o'zgarmas C soniga teng bo'lsa, u D sohada ***o'zgarmas funksiya*** deyiladi.

Masalan, $x\in(-\infty,\infty)$ sohada $f(x)=\sin^2x+\cos^2x=1$, $x\in(-\infty,0)$ sohada $f(x)=x/|x|=-1$ o'zgarmas funksiya bo'ladi.

Murakkab va teskari funksiyalar. Funksiyalar bilan bog'liq yana ikkita tushunchani kiritamiz.

Ta'rif: Agar $z=\varphi(x)$ funksiya X→Z, $y=f(z)$ esa Z→Y akslantirishni ifodalasa, unda $y=f(\varphi(x))$ funksiya X→Y akslantirishni ifodalaydi va ***murakkab funksiya*** deb ataladi. Bu yerda φ ***ichki***, f esa ***tashqi funksiya*** deyiladi. $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya f va φ funksiyalarning ***superpozitsiyasi*** deb ham aytiladi.

Masalan, $y=\sin x^2$ murakkab funksiya bo'lib, unda $\varphi(x)=x^2$ ichki, $f(\varphi)=\sin\varphi$ esa tashqi funksiya bo'ladi. $y=\sin^2x$ murakkab funksiyada esa $\varphi(x)=\sin x$ ichki, $f(\varphi)=\varphi^2$ tashqi funksiya bo'ladi.

Ta'rif: Aniqlanish sohasi D{f} va qiymatlar sohasi E{f} bo'lgan $y=f(x)$ funksiya uchun har bir $y\in$E{f} soniga $f(x)=y$ shartni qanoatlantiradigan yagona $x\in$D{f} sonini mos qo'yadigan $x=\varphi(u)$ funksiya mavjud bo'lsa, u berilgan f funksiyaga ***teskari funksiya*** deb ataladi.

Berilgan f funksiyaga teskari funksiya f^{-1} kabi belgilanadi. Bunda f^{-1} faqat belgilash bo'lib, u $1/f$ degan ma'noni ifodalamasligini ta'kidlab o'tamiz.

Odatda, argument x, funksiya esa y orqali belgilanganligi uchun, $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya $y=\varphi(x)$ yoki $y=f^{-1}(x)$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lsa, unga teskari funksiya $y=f^{-1}(x)$ mavjudligini va uni $f(y)=x$ tenglama yechimi kabi topishimiz mumkinligini isbotlash mumkin. Masalan, $f(x)=3x-1$ bo'lsa, unda $3y-1=x$ tenglamadan teskari funksiya $f^{-1}(x)=(a+1)/3$ ekanligini aniqlaymiz.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, o'zaro teskari funksiyalar uchun D{f}=E{f^{-1}} va E{ f}=D{f^{1}}, $f\ [f^{-1}(x)]=x$ va $f^{-1}\ [f\ (x)]=x$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, ularning grafiklari $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi

Asosiy elementar funksiyalar. Maktab matematikasidan bizga ma'lum bo'lgan quyidagi funksiyalarni eslatib o'tamiz:

❖ ***Darajali funksiya.*** Bu funksiya $y=x^{\alpha}$ ko'rinishda bo'lib, o'zgarmas daraja ko'rsatkichi $\alpha\in$ R bo'ladi. Masalan,

$$y=1=x^0,\quad y=x^2,\quad y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\quad y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

darajali funksiyalardir. Darajali funksiyaning xossalari α daraja ko'rsatkichi qiymatiga bog'liq bo'ladi. Masalan, α musbat butun son bo'lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ aniqlanish sohasi $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, qiymatlar sohasi esa toq α uchun $E\{f\}=(-\infty,\infty)$, juft α uchun $E\{f\}=[0,\infty)$ bo'ladi. Agar α manfiy butun son bo'lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ aniqlanish sohasi $D\{f\}=\{x: x\neq 0\}$, qiymatlar sohasi esa $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo'ladi. Bundan tashqari, α juft son bo'lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ juft, α toq bo'lsa, toq funksiya bo'ladi.

❖ ***Ko'rsatkichli funksiya.*** Bu funksiya $y=a^x$ ko'rinishda va unda daraja asosi $a>0$ va $a\neq 1$ shartni qanoatlantiruvchi o'zgarmas son bo'ladi. Masalan, $y=3^x$, $y=(1/10)^x$, $y=e^x$ ko'rsatkichli funksiyalardir. Bu funksiya uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, $E\{f\}=(0,\infty)$ bo'ladi. Agar $a>1$ bo'lsa, $f(x)=a^x$ o'suvchi, $0<a<1$ bo'lsa kamayuvchi funksiyaga ega bo'lamiz.

❖ ***Logarifmik funksiya.*** Bu funksiya $y=\log_a x$, ($a>0$, $a\neq 1$), ko'rinishda bo'lib, $y=a^x$ ko'rsatkichli funksiyaga teskari funksiyani ifodalaydi.

Masalan, $y=\log_2 x$, $y=\log_{0.8} x$, $y=\log_{10} x=\lg x$, $y=\log_e x=\ln x$ logarifmik funksiyalardir. Logarifmik $f(x)=\log_a x$ funksiya uchun $D\{f\}=(0,\infty)$, $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo'ladi. Agar logarifm asosi $a>1$ bo'lsa, $f(x)=\log_a x$ o'suvchi, $0<a<1$ holda esa kamayuvchi bo'ladi[37].

❖ ***Trigonometrik funksiyalar.*** Bular $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$ va $y=\mathrm{ctg}\,x$ funksiyalardan iborat. Bu yerda $f(x)=\sin x$ va $f(x)=\cos x$ funksiyalar uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$ va $E\{f\}=[0,1]$ bo'lib, ular $T=2\pi$ davrli va chegaralangan bo'ladi. Bunda $f(x)=\sin x$ — toq, $f(x)=\cos x$ — juft funksiyalardir.

$f(x)=\mathrm{tg}\,x$ va $f(x)=\mathrm{ctg}\,x$ funksiyalarning aniqlanish sohalari mos ravishda $D\{f\}=\{x: x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in Z\}$ va $D\{f\}=\{x: x\neq k\pi,\ k\in Z\}$, qiymatlar sohasi $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo'ladi. Bu funksiyalar $T=\pi$ davrli, toq va chegaralanmagan bo'ladi.

❖ ***Teskari trigonometrik funksiyalar.*** Bularga $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y=\mathrm{arcctg}\,x$ funksiyalar kiradi. Ular mos trigonometrik funksiyalarga teskari bo'ladi. $f(x)=\arcsin x$ va $f(x)=\arccos x$ uchun $D\{f\}=[-1,1]$, qiymatlar sohasi esa mos ravishda

---

[37] Естественно-научные основы физической культуры и спорта: учебник / под ред. А.В.Самсоновой, Р.Б.Цаллаговой. – М.: Советский спорт, 2014. – С. 22.

$E\{f\}=[-\pi/2, \pi/2]$ va $E\{f\}=[0, \pi]$ bo'ladi. $f(x)=\text{arctg}x$ va $f(x)=\text{arcctg}x$ uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, qiymatlar sohasi esa mos ravishda $E\{f\}=(-\pi/2, \pi/2)$ va $E\{f\}=(0, \pi)$ bo'ladi. Bundan tashqari, $f(x)=\arcsin x$ va $f(x)=\text{arctg}x$ toq funksiyalardir.

Ta'rif: 1-5 funksiyalar ***asosiy elementar funksiyalar*** deb ataladi. Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida chekli sondagi arifmetik va superpozitsiallash amallari orqali hosil qilingan funksiyalar ***elementar funksiyalar*** deyiladi. Masalan, $y=2\ln\sin x+x^2/5$, $y=a^x\ln(x+1)$ elementar funksiya bo'ladi. $y=\{x\}$ va $y=[x]$ elementar bo'lmagan funksiyalarga misol bo'ladi.

Funksiyalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari. Ishlab chiqarish funksiyasi (ishlab chiqarish natijalarini turli omillarga bog'liqligi), xarajatlar funksiyasi (ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi bilan xarajatlar o'rtasidagi bog'lanish), talab funksiyasi (mahsulotga talab hajmi va narx, foyda kabi turli omillar orasidagi bog'lanishlar) kabi funksiyalar iqtisodiyotda ko'p qo'llaniladi.

Yana bir misol sifatida aholining daromadi x va uning turli tovarlarga ehtiyoji y orasidagi bog'lanishlarni o'rganish uchun shved iqtisodchi olimi ***Tornkvist*** tomonidan taklif etilgan quyidagi funksiyalarini qaraymiz[38]:

- $y=\dfrac{a(x-b)}{x-c}$ $(x>b)$, y – inson hayoti uchun birinchi navbatda, zarur bo'lgan oziq-ovqat mahsulotlari, kiyim-kechak kabi tovarlarga ehtiyoj;
- $y=\dfrac{a(x-d)}{x-c}$ $(x>d>b)$, y – inson hayoti uchun ikkinchi navbatda, zarur bo'lgan televizor, mebel, kosmetika kabi tovarlarga ehtiyoj;
- $y=ax\dfrac{x-m}{x-c}$ $(x>m>d>b)$, y – avtomobil, tilla bezaklar, dala hovlisi kabi qimmatbaho buyumlarga ehtiyoj.

Bu funksiyalar quyidagi iqtisodiy qonuniyatlarni ifodalaydi:

✓Daromad x ma'lum bir b, d yoki m qiymatdan oshgandan keyin tegishli tovarlarni xarid etish mumkin;

---

[38] Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Darslik. – T., 2012. – B. 213.

✓Daromad x oshib borishi bilan birinchi va ikkinchi navbatda, zarur bo'lgan tovarlarga ehtiyojni ifodalovchi y funksiya o'sishi sekinlashibdi;

✓I va II navbatda zarur bo'lgan tovarlarga ehtiyojni ifodalovchi y yuqoridan a soni (to'yinish nuqtasi) bilan chegaralangan, chunki ularning iste'moli cheksiz o'sishi mumkin emas;

✓Daromad x oshib borishi bilan qimmatbaho buyumlarga ehtiyoj ham o'sib boradi va yuqoridan chegaralanmagan.

4.4. Funksiya limiti va uning asosiy xossalari

Funksiya limiti. Biz sonli ketma-ketlik uchun oliy matematikaning poydevorida yotgan asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan limit tushunchasini kiritgan edik. Endi bu tushunchani funksiya uchun umumlashtiramiz.

Ta'rif: Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun unga bog'liq shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ va biror A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $y=f(x)$ ***funksiyaning*** $x\to a$ ***bo'lgandagi limiti*** deb ataladi.

Ta'rifdagi tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

ko'rinishda yoziladi. Misol sifatida,

$$\lim_{x\to 3} x^2=9$$

ekanligini ta'rif bo'yicha ko'rsatamiz. Bu yerda $x\to 3$ bo'lgani uchun $2<x<4$, ya'ni $|x+3|<7$ deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun $|x-3|<\varepsilon/7$, ya'ni $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/7$ deb olish mumkin. Demak, limit ta'rifiga asosan, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ tenglik o'rinli bo'ladi[39].

Ta'rif: Agar har qanday katta $N>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(N)>0$ son mavjud bo'lsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda $y=f(x)$ funksiya

[39] Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. Tomsk. 2009. P. – 163.

$x \to a$ (a–chekli son) bo'lganda ***cheksiz limitga*** ($+\infty$ yoki $-\infty$) ega deyiladi .

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^3-8)^2}=+\infty$$

ekanligini ko'rsatish mumkin. Bu yerda $x\to 2$ bo'lgani uchun $1<x<3$ deb olishimiz mumkin. Bu holda berilgan $N>0$ soni bo'yicha $\delta=\delta(N)>0$ sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\frac{1}{(x^3-8)^2}=\frac{1}{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2}>\frac{1}{(x-2)^2(3^2+2\cdot 3+4)^2}=$$

$$=\frac{1}{361(x-2)^2}>N\Rightarrow (x-2)^2<\frac{1}{361N}\Rightarrow |x-2|<\frac{1}{19\sqrt{N}}=\delta(N)\quad .$$

Demak, ta'rifga asosan, yuqoridagi limit cheksiz bo'ladi.

<u>Ta'rif:</u> Agar har qanday kichik $\varepsilon>0$ soni uchun shunday katta $M=M(\varepsilon)>0$ son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ va biror chekli A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda ***chekli limitga*** ega deyiladi.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}=M(\varepsilon),$$

ya'ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu yerdan, ta'rifga asosan, yuqoridagi limit qiymati haqiqatan ham birga teng ekanligi kelib chiqadi.

<u>Ta'rif:</u> Agar har qanday katta $N>0$ soni uchun shunday $M=M(N)$ son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda ***cheksiz limitga*** ega deyiladi,

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, ta'rifdan foydalanib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

Ta'rif: $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x qandaydir chekli a soniga faqat chap ($x<a$) yoki o'ng ($x>a$) tomondan yaqinlashib borganda ($x\to a-0$ yoki $x\to a+0$ kabi belgilanadi) funksiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo'lsa, bu sonlar funksiyaning a nuqtadagi ***chap yoki o'ng limiti*** deb ataladi[40].

$y=f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o'ng limiti

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0) \quad \text{yoki} \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$$

kabi belgilanadi. Masalan, ***signum funksiya*** deb ataladigan ushbu

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \quad (1) \\ -1, x<0 \end{cases}$$

funksiya uchun $x=0$ nuqtadagi chap va o'ng limitlar mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$\operatorname{sgn}(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1,$$

$$\operatorname{sgn}(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0+0} 1=1.$$

Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari. Limitlarga doir turli tasdiqlarni isbotlashda cheksiz kichik miqdor va ularning xossalari muhim ahamiyatga ega.

Ta'rif: Agar $\alpha(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a–ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo'lganda, ***cheksiz kichik miqdor*** deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x)=x^2$ funksiya $x\to 0$, $\alpha(x)=(x-3)^2$ funksiya $x\to 3$ va $\alpha(x)=x^{-2}$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor bo'ladi[41].

Ta'rif: $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar va

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$$

bo'lsin. Bunda $A=0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo'lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\alpha(x)=o(\beta(x))$ kabi

[40] Rajabov F., Masharipova S., Madrahimov R. Oliy matematika. O'quv qo'llanma. – T.: Turon-Iqbol, 2007. – B. 153.
[41] Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. – Tomsk, 2009. – P. 185.

belgilanadi. Agar $A\neq0$ va chekli son bo'lsa, unda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)=0(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Jumladan, $A=1$ bo'lsa $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)\sim\beta(x)$ kabi belgilanadi. Agar $A=\pm\infty$ bo'lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo'lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***quyi tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\beta(x)=o(\alpha(x))$ kabi belgilanadi.

Cheksiz katta miqdorlar. Endi cheksiz katta miqdor tushunchasi va uning xossalari bilan tanishamiz.

Ta'rif: Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a–ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo'lganda ***cheksiz katta miqdor*** deb ataladi .

Masalan, $f(x)=\mathrm{tg}x$ funksiya $x\to\pi/2$, $f(x)=(x-1)^{-3}$ funksiya $x\to1$ va $f(x)=x^2$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Funksiya limitini hisoblash qoidalari. Funksiya limitini uning ta'rifi bo'yicha hisoblash har doim ham oson emas. Shu sababli funksiya limiti asosan uni hisoblash qoidalari yordamida topiladi.

Lemma: $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo'lganda chekli A limitga ega bo'lishi uchun uni $f(x)=A+\alpha(x)$ ko'rinishda bo'lishi zarur va yetarli. Bunda $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ bo'lganda biror cheksiz kichik miqdorni ifodalaydi.

Lemma isboti limit va cheksiz kichik miqdor ta'riflaridan kelib chiqadi.

Asosiy teorema: Agar $x\to a$ bo'lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar chekli A va B limitlarga ega bo'lsa, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=A\pm B, \quad (2)$$

$$\lim_{x\to a} Cf(x)=C\lim_{x\to a} f(x)=CA \quad (C=\text{const.}), \quad (3)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=A\cdot B \quad (4)$$

va agar $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B\neq0$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B} \quad (5)$$

tengliklar o'rinlidir.

Isbot: Teorema shartlari va lemmaga asosan $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$ tengliklarni yoza olamiz. Bu yerda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x\to a$ bo'lganda cheksiz kichik miqdorlardir. Bu tengliklardan foydalanib

$$f(x)\pm g(x)=[A+\alpha(x)]\pm[B+\beta(x)]=(A\pm B)+[\alpha(x)\pm\beta(x)]$$

natijani olamiz. Cheksiz kichik miqdorlar xossasiga asosan bu yerda $\gamma(x)=\alpha(x)\pm\beta(x)$ funksiya $x\to a$ bo'lganda, cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Bu holda yuqoridagi tenglikdan va lemmaga asosan,

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

tenglik o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Teoremadagi qolgan tengliklar ham shu tarzda isbotlanadi.

Asosiy teoremada keltirilgan limit hisoblash qoidalari va $f(x)=C$ (C – const.) o'zgarmas funksiyaning limiti shu sonni o'ziga teng bo'lishidan foydalanib, murakkabroq limitlarni soddaroq limitlarga keltirish orqali hisoblash mumkin.

Masalan,

$$\lim_{x\to 1}x^2e^x=\lim_{x\to 1}x^2\cdot\lim_{x\to 1}e^x=1\cdot e=e,\quad \lim_{x\to 1}(x^2+e^x)=\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}e^x=1+e,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}e^x}{\lim\limits_{x\to 1}x^2}=\frac{e}{1}=e,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}(2-\frac{3}{x})=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=2-0=2.$$

Ajoyib limitlar. Turli funksiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ \text{(I)},\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2{,}718281...\ \text{(II)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a\ \text{(III)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ \text{(IV)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\ \text{(V)}.$$

Bu tengliklar matematikada ***ajoyib limitlar*** deb ataladi[42].

Funksiya limitining bir iqtisodiy tatbig'i. Endi funksiya limiti tushunchasini bir iqtisodiy masalani yechish uchun tatbiq etamiz.

Bankka yillik R foiz ustama to'lash sharti bilan omonatga qo'yilgan jamg'armaning boshlang'ich qiymati a_0 bo'lsa, ustama n-marta hisoblangandan keyin uning qiymati

$$a_n=(1+i)^n a_0,\ n=1, 2, 3, \cdots$$

[42] Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. – Tomsk, 2009. – P. 191.

formula bilan topiladi. Bunda $i=R/k$ bo'lib, k – yillik R foiz ustama jamg'armaga yil davomida necha martada hisoblanishini ifodalaydi.

Endi bank jamg'armaga R foiz ustamani yil davomida uzluksiz ravishda hisoblab borganda, jamg'arma qiymati qanday aniqlanishini ko'rib chiqamiz. Bu holda $k\to\infty$ bo'ladi va har qanday k uchun $t=n/k$ omonatga jamg'arma qo'yilgandan keyin o'tgan yillar sonini ifodalaydi. Bu holda yuqoridagi a_n uchun formula va (II) ajoyib limit yordamida quyidagi natijani olamiz[43]:

$$a_t=\lim_{k\to\infty}a_n=\lim_{k\to\infty}(1+i)^n a_0=a_0\lim_{k\to\infty}(1+\frac{R}{k})^n=a_0\lim_{k\to\infty}\left\{(1+\frac{R}{k})^{\frac{k}{R}}\right\}^{R\frac{n}{k}}=$$

$$=a_0\left\{\lim_{k\to\infty}(1+\frac{R}{k})^{\frac{k}{R}}\right\}^{Rt}=a_0\left\{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\right\}^{Rt}=a_0e^{Rt}.$$

Bu yerda $k/R=x, k\to\infty\Rightarrow x\to\infty$ ekanligidan foydalanilgan. Demak, jamg'armaga bankning yillik R foiz ustamasi uzluksiz tarzda hisoblab borilsa, uning t yildan keyingi qiymati $a_t=a_0e^{Rt}$ formula bilan aniqlanadi va ko'rsatkichli funksiya orqali ifodalanadi.

4.5. Uzluksiz va uzlukli funksiyalar

Uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari. Bu rejada matematik analizning muhim tushunchalaridan biri bo'lgan uzluksiz funksiya tushunchasi bilan tanishib, unga doir asosiy tasdiqlarni ko'rib o'tamiz.

Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya o'zining aniqlanish sohasiga biror atrofi bilan kiruvchi x_0 nuqtada

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\ (1)$$

shartni qanoatlantirsa, bu funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, oldingi rejada $f(x)=x^2$ funksiya uchun $x\to3$ holda hisoblangan limit qiymatidan foydalanib,

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}x^2=9=3^2=f(3)$$

[43] Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Darslik. – T., 2012. – B. 222.

ekanligini ko‘ramiz. Demak, $f(x)=x^2$ funksiya $x=3$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Yuqoridagi funksiya uzluksizlik shartini, $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ ekanligini hisobga olib,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

kabi yozish mumkin. Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun funksiya olish va limit olish amallarini o‘rnini almashtirish mumkin bo‘lishi kerak ekan.

Amaliy masalalarda funksiya uzluksizligini orttirma tushunchasi orqali tekshirish qulay. Agar x nuqta x_0 nuqta atrofidan olingan bo‘lsa, $x-x_0$ ayirma ***argument orttirmasi*** deyiladi va Δx kabi belgilanadi. Bu holda $f(x)-f(x_0)$ ayirma ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va Δf yoki Δu kabi belgilanadi.

Demak, Δx orttirma argumentning o‘zgarishini, Δf esa funksiya o‘zgarishini ifodalaydi. Agarda $x\to x_0$ bo‘lsa, u holda $\Delta x\to 0$ bo‘ladi. Bundan, $x=x_0+\Delta x$ ekanligidan foydalanib, (1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0) \quad (2)$$

ko‘rinishida yozish mumkin. Bu shartni o‘z navbatida, $\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ekanligidan foydalanib,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \quad (3)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Demak, $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lishi uchun argumentning “kichik” Δx o‘zgarishiga funksiyaning ham “kichik” Δf o‘zgarishi mos kelishi kerak.

Misol sifatida $y=f(x)=x^2$ funksiyaning har qanday x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini (3) shart yordamida ko‘rsatamiz:

$$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=$$
$$=x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x^2)-x_0^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0.$$

<u>Ta’rif:</u> Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u shu ***oraliqda uzluksiz funksiya*** deyiladi.

Masalan, yuqorida ko‘rsatilganga asosan, $f(x)=x^2$ funksiya ixtiyoriy (a,b) oraliqda uzluksizdir. $y=(1-x^2)^{-1}$ funksiya esa $(-1,1)$ va uning ichida joylashgan ixtiyoriy oraliqda uzluksiz bo‘ladi, ammo $x=\pm 1$ nuqtalardan kamida bittasi kirgan sohalarda uzluksiz bo‘lmaydi.

Geometrik nuqtai nazardan biror (a,b) oraliqda uzluksiz funksiyani grafigi shu oraliqda yaxlit bir (uzluksiz) chiziqdan iborat funksiya deb qarash mumkin. Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi ixtiyoriy (a,b) oraliqda uzluksiz bo'lgan paraboladan iborat[44].

Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $x=a$ nuqtada aniqlangan bo'lib, bu nuqtada uning o'ng (chap) limiti mavjud va

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a) \quad \left(\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=f(a)\right)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $f(x)$ funksiya a nuqtada ***o'ngdan (chapdan) uzluksiz*** deyiladi.

Masalan,

$$y=f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\ge 3 \\ 2x-1, & x<3 \end{cases} \quad (4)$$

funksiya $x=3$ nuqtada o'ngdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3}(2x+1)=7=f(3).$$

Ammo bu funksiya $x=3$ nuqtada chapdan uzluksiz emas, chunki

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3}(2x-1)=5\ne f(3).$$

Aksincha,

$$y=f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases} \quad (5)$$

funksiya $x=1$ nuqtada chapdan uzluksiz, o'ngdan esa uzluksiz emas.

Oldin ko'rib o'tilgan

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases} \quad (6)$$

funksiya $x=0$ nuqtada chapdan ham, o'ngdan ham uzluksiz bo'lmaydi, chunki

$$\operatorname{sgn}(0-0)=-1\ne 0=\operatorname{sgn}(0),\ \operatorname{sgn}(0+0)=1\ne 0=\operatorname{sgn}(0).$$

Kesmada uzluksiz funksiyalar uchun asosiy teoremalar. Dastlab funksiyaning kesmada uzluksizligi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz, $x=a$ $(x=b)$ chegaraviy nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz bo'lsa, bu funksiya $[a,b]$ ***kesmada uzluksiz*** deyiladi.

[44] Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. – Tomsk, 2009. – P. 205

Masalan, $y=\sin x$, $y=x^2$ funksiyalar har qanday $[a,b]$ kesmada uzluksizdir.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, uning grafigini shu kesmaga mos keluvchi qismi yaxlit (uzluksiz) chiziqdan iborat bo'ladi. Uzluksizlikning bu geometrik talqini uzluksiz funksiyalarning quyidagi xossalari va ularning isbotini tasavvur etishga imkon beradi.

Teorema: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada kamida bitta shunday x_1 (yoki x_2) nuqta mavjudki, har qanday $x\in[a,b]$ uchun $f(x_1)\geq f(x)$ (yoki $f(x_2)\leq f(x)$) munosabat o'rinli bo'ladi.

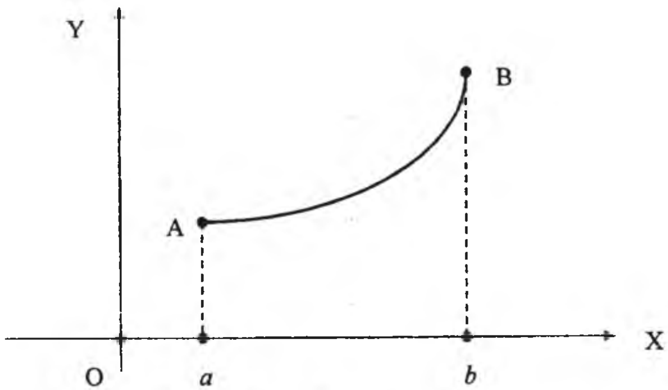
Isbot: Ushbu teoremani funksiya grafigiga asoslangan va shu sababli qat'iymas bo'lgan isbotini keltirish bilan chegaralanamiz. $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada grafigining OY o'qi bo'ycha eng yuqorida va eng quyida joylashgan nuqtalaridan bittadan vakil olib, ularning abssissasini mos ravishda x_1 va x_2 deb belgilaymiz. 26-rasmda bu nuqtalar A va B, ularning abssissasi $x_1=a$ va $x_2=b$ bo'ladi.

Bu holda ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun teoremadagi tasdiqlar bajariladi.

Bu teoremadagi $f(x_1)$ yoki $f(x_2)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ ***kesmadagi eng katta yoki eng kichik qiymati*** deb ataladi va

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=M, \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x)=m$$

kabi belgilandi.



26-rasm

Masalan, $f(x)=x^2$, $x\in[2,4]$ funksiya uchun $x_1=2$, $x_2=4$ bo'ladi, chunki bu kesmada $m=4\le x^2\le 16=M$, ya'ni $f(2)\le f(x)\le f(4)$ munosabat o'rinli.

Kiritilgan yangi tushunchadan foydalanib, teoremani quyidagicha ifodalash mumkin.

<u>Teorema (Veyershtrass):</u> Berilgan $[a,b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya shu kesmada o'zining eng katta M va eng kichik m qiymatiga erishadi, ya'ni bu kesmada kamida bittadan shunday x_1 va x_2 nuqta mavjudki, $f(x_1)=M$ va $f(x_2)=m$ tenglik o'rinli bo'ladi.

<u>Ta'rif:</u> Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni bo'yicha shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ soni topilsaki, biror $D\subset D\{f\}$ sohadagi $|x_1-x_2|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalar uchun $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, unda $y=f(x)$ funksiya D sohada ***tekis uzluksiz*** deb ataladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, agar $y=f(x)$ funksiya biror D sohada tekis uzluksiz bo'lsa, unda bu funksiya D sohaning har bir x_0 nuqtasida albatta, uzluksiz bo'ladi. Haqiqatan ham tekis uzluksizlik ta'rifida $x_2=x_0$ va $x_1=x$ deb olsak, unda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni bo'yicha shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ soni topiladiki,

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Ammo teskari tasdiq har doim ham o'rinli emas. Masalan, $f(x)=\sin(1/x)$ funksiya $(0,1)$ oraliqda uzluksiz, lekin uni bu oraliqda tekis uzluksiz emasligini ko'rsatish mumkin.

<u>Teorema (Kantor):</u> Agar $y=f(x)$ funksiya biror $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, unda bu funksiya shu kesmada tekis uzluksiz bo'ladi.

Teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Bu teoremadan yuqorida ko'rilgan $f(x)=\sin(1/x)$ funksiya ixtiyoriy $[\varepsilon, 1]$ kesmada $(\varepsilon>0)$ tekis uzluksiz ekanligi kelib chiqadi, chunki u bu kesmada uzluksiz.

Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari. Endi funksiyaning uzlukliligi ustida to'xtalib o'tamiz.

<u>Ta'rif:</u> $y=f(x)$ funksiya uchun uzluksizlikka qo'yiladigan shartlardan kamida bittasi bajarilmaydigan nuqtalar uning ***uzilish nuqtalari***, funksiyaning o'zi esa bu nuqtalarda ***uzlukli*** deb ataladi.

Ta'rifga asosan, biror $x=a$ nuqtada $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud va $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud bo'lmasa, bu nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Masalan, $f(x)=(1-x^2)^{-2}$ funksiya uchun $x=\pm1$ uning uzilish nuqtasi bo'ladi, chunki bu nuqtalarda $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x)=\infty$. (6) signum funksiya uchun $x=0$ uzilish nuqtasi bo'ladi, chunki $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{sgn}(x)$ mavjud emas.

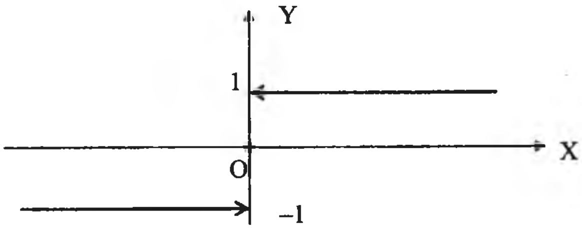
Funksiyaning uzilish nuqtalari uch sinfga ajratiladi.

Ta'rif: Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ uzilish nuqtasida $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ limit mavjud, ammo $a\notin D\{f\}$ yoki $f(a)\neq A$ bo'lsa, unda $x=a$ funksiyaning ***tuzatib bo'ladigan uzilish nuqtasi*** deyiladi.

Bu yerda $x=a$ funksiyaning tuzatib bo'ladigan uzilish nuqtasi deyilishiga sabab shuki, agar $f(a)=A$ deb olsak, unda funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz funksiyaga aylanadi. Masalan, yuqorida ko'rib o'tilgan (7) funksiya $f(x)=\sin x/x$ uchun $f(0)=0$ demasdan, $f(0)=1$ desak, u hamma joyda uzluksiz bo'ladi[45].

Ta'rif: Agarda $x=a$ nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lib, bu nuqtada funksiyaning chap $f(a-0)$ va o'ng $f(a+0)$ limitlari mavjud hamda chekli sonlardan iborat bo'lsa, $x=a$ funksiyaning ***I tur uzilish nuqtasi*** deyiladi. Bunda $\Delta=f(a+0)-f(a-0)$ soni funksiyaning a uzilish nuqtasidagi ***sakrashi*** deb ataladi.

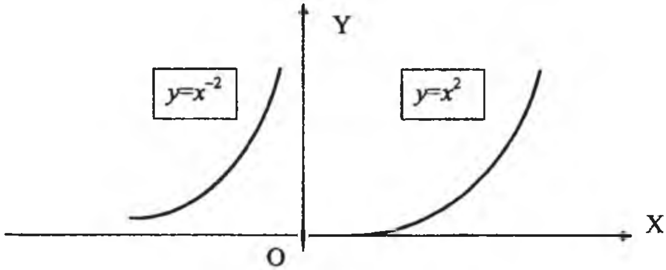
Masalan, (6) signum funksiya uchun $x=0$ I tur uzilish nuqtasi bo'ladi. Bu holda $\operatorname{sgn}(0-0)=-1$, $\operatorname{sgn}(0+0)=1$ va funksiya bu nuqtada o'z qiymatini uzluksiz ravishda o'zgartirmasdan, $\Delta=1-(-1)=2$ sakrash bilan o'zgartiradi (27-rasm).



27-rasm

[45] Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. – Tomsk, 2009. – P. 219.

Ta'rif: Agarda $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ uzilish nuqtasida uning chap va o'ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, $x=a$ funksiyaning ***II tur uzilish nuqtasi*** deyiladi.



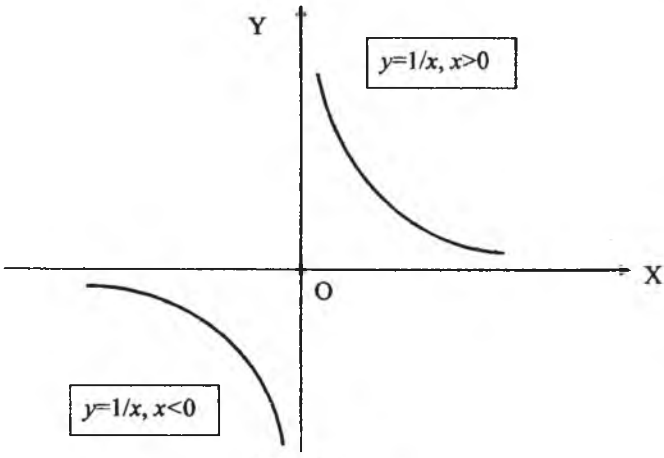
28-rasm

Masalan,

$$y=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ x^{-2}, x<0 \end{cases}$$

funksiya $x=0\in D\{f\}$ nuqtada II tur uzilishga ega, chunki $f(0+0)=0, f(0-0)=\infty$ bo'lmoqda (28-rasm).

$f(x)=x^{-1}$ funksiya uchun $x=0\notin D\{f\}$ II tur uzilish nuqtasi bo'ladi, chunki bu nuqtada $f(0-0)=-\infty$ va $f(0+0)=\infty$, ya'ni chap va o'ng limitlardan ikkalasi ham cheksiz bo'lmoqda (29-rasm).



29-rasm

Endi ushbu funksiyani qaraymiz:

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \sin\frac{1}{x}, & x>0. \end{cases}$$

Bu funksiya barcha nuqtalarda, jumladan, $x=0$ nuqtada aniqlangan. Bunda $x\to 0$ bo'lganda $|\cos(1/x)|\leq 1$, ya'ni chegaralangan funksiya bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0=f(0)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, bu funksiya uchun $x=0$ nuqtada chap limit mavjud va bundan tashqari u chapdan uzluksiz. Endi bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o'ng limitini qaraymiz. Agar $x=(2\pi n+\pi/2)^{-1}$, $n\in N$, deb olsak, unda $n\to\infty$ bo'lganda $x\to 0+0$ bo'ladi va bu holda

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

natijani olamiz. Xuddi shu tarzda $x=(2\pi n)^{-1}$, $n\in N$, deb olsak, unda $n\to\infty$ bo'lganda yana $x\to 0+0$ bo'ladi, ammo bu holda

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin 2\pi n=\lim_{n\to\infty}\sin 0=\lim_{n\to\infty}0=0$$

natijaga kelamiz. Oxirgi ikki tenglikdan qaralayotgan funksiyaning $x=0$ nuqtada o'ng limiti mavjud emasligi kelib chiqadi. Demak, bu funksiya uchun $x=0$ II tur uzilish nuqtasi bo'ladi.

Xulosa. Matematik analiz fanida asosan, elementlari sonlardan iborat to'plamlar qaraladi. Bularga natural, butun, ratsional, haqiqiy sonlar to'plamlarini ko'rsatish mumkin. Algebraik tushuncha bo'lgan haqiqiy son va geometrik tushuncha bo'lgan nuqta orasida o'zaro bir qiymatli moslik sonlar o'qi yordamida o'rnatiladi. Sonlar o'qida kesma ,chekli va cheksiz oraliq, yarim oraliq kabi sonli to'plamlar qaraladi. Bu sonli to'plamlar ochiq yoki yopiq, chegaralangan yoki chegaralanmagan bo'lishi mumkin.

Sonning absolyut qiymati (moduli) tushunchasi va uning xossalaridan kelgusida keng foydalaniladi.

Limit – oliy matematikaning poydevorida yotgan tushunchalardan biri bo'lib hisoblanadi. Juda ko'p matematik tushuncha va tasdiqlar limit yordamida aniqlanadi va isbotlanadi. Bu yerda limit tushunchasi sonli ketma-ketlik uchun kiritiladi. Bunda sonli ketma-ketlik yagona limitga ega bo'ladi. Agar sonli ketma-ketlik limiti mavjud va chekli sondan iborat bo'lsa, u yaqinlashuvchi, aks holda esa uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi. Turli sonli ketma-ketlik limitlarini topishda limit hisoblash qoidalari va ajoyib limitdan foydalaniladi. Sonli ketma-ketlikka sportga oid mazmunli misol sifatida, sportda erishilgan natijalarning vaqt bo'yicha o'zgarishini aniqlash masalasini ko'rsatish mumkin.

Matematik analiz fanida funksiyalar va ular bilan bog'liq turli tushuncha hamda tasdiqlar qaraladi. Funksiya deyilganda turli o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanishning matematik ifodasi tushuniladi. Funksiyalar analitik, jadval, grafik va ta'rif usullarida berilishi mumkin. Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab monoton, juft-toq, davriy, chegaralangan va chegaralanmagan kabi ko'rinishlarda bo'lishi mumkin. Berilgan funksiyalar orqali murakkab va teskari funksiyalarni aniqlash mumkin. Darajali, ko'rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar asosiy elementar funksiyalar bo'lib hisoblanadi. Ulardan tuzilgan turli funksiyalar esa elementar funksiyalar deyiladi. Matematikada elementar bo'lmagan funksiyalar ham qaraladi.

Matematik analiz fanining asosida yotgan eng muhim tushunchalardan biri funksiya limiti bo'lib hisoblanadi. Undan biz oldin ko'rib o'tgan sonli ketma-ketlik limiti tushunchasi xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Funksiya limiti yagona ravishda aniqlanadi. Funksiya uchun chap, o'ng limit tushunchalari ham kiritiladi va ular orqali limitning mavjudlik sharti ifodalanadi. Funksiya limitini bevosita uning ta'rifi asosida hisoblash har doim ham oson kechmaydi va shu sababli funksiya limitini hisoblash qoidalari ishlab chiqilgan. Bunda cheksiz kichik miqdor tushunchasi va uning xossalari muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Bundan tashqari ayrim funksiyalarning limitini hisoblashda ajoyib limitlardan foydalanish mumkin.

Funksiyaning eng muhim xususiyatlaridan biri uning uzluksizligi bo'lib hisoblanadi. Bunga sabab shuki, atrofimizdagi ko'p jarayonlar uzluksiz ravishda davom etadi va ular uzluksiz funksiyalar orqali ifodalanadi. Funksiya uzluksizligi uning limiti orqali aniqlanadi. Oraliqda uzluksiz funksiyani grafigi uzluksiz, yaxlit chiziqdan iborat funksiya singari tasavvur etish mumkin. Barcha asosiy elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladi. Kesmada uzluksiz funksiya shu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi. Biror nuqtada uzluksiz bo'lmagan funksiya shu nuqtada, bu nuqta esa uning uzilish nuqtasi deyiladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Qanday to'plamlar sonli deb ataladi?
2. Asosiy sonli to'plamlarni ko'rsatib o'ting.
3. Qanday sonli to'plam oraliq deb ataladi?
4. Kesma deb qanday sonli to'plamga aytiladi?
5. Yarim oraliq deganda nima tushuniladi?
6. Nuqta atrofi deb nimaga aytiladi?
7. Qachon sonli to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi?
8. Qanday sonli to'plam chegaralangan deyiladi?
9. Sonning absolyut qiymati deb nimaga aytiladi?
10. Sonning absolyut qiymati qanday xossalarga ega?
14. Sonli ketma-ketlik nima?
15. Sonli ketma-ketliklarga misol keltiring.
16. Qachon ketma-ketlik quyidan chegaralangan deyiladi?
17. Qanday ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan deb ataladi?
18. Chegaralangan ketma-ketlik deyilganda nima tushuniladi?
19. Qanday ketma-ketlik chegaralanmagan deb ataladi?
20. Sonli ketma-ketlikning chekli limiti qanday ta'riflanadi?
21. Limit hisoblashning asosiy qoidalari nimalardan iborat?
22. Umumiy hadi ko'phadlar nisbatiga teng ketma-ketlik limiti qanday usulda hisoblanadi?
23. Ketma-ketlik limitini hisoblashning umumiy usuli mavjudmi?
24. Ajoyib limit qanday ko'rinishda bo'ladi?
25. Sonli ketma-ketlikning sportga oid tatbig'iga misol keltiring.
26. Qanday miqdorlar o'zgarmas deyiladi? Misollar keltiring.
27. Qanday miqdorlar o'zgaruvchi deyiladi? Misollar keltiring.
28. Funksiya qanday ta'riflanadi?
29. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
30. Funksiyaning o'zgarish (qiymatlar) sohasi qanday ta'riflanadi?
31. Funksiya grafigi deb nimaga aytiladi?

32. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
33. Qaysi shartda funksiya o‘suvchi (kamaymoqchi) deyiladi?
34. Qanday funksiya kamayuvchi (o‘smoqchi) deb ataladi?
35. Qaysi funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi?
36. Elementar funksiyalar deb qanday funksiyalarga aytiladi?
37. Elementar bo‘lmagan funksiyalarga qanday misollar bilasiz?
38. Funksiyaning chekli limiti qanday ta’riflanadi?
39. Funksiyaning cheksiz limiti qanday ta’riflanadi?
40. Funksiyaning limiti yagonami?
41. Funksiyaning chap (o‘ng) limiti deb nimaga aytiladi?
42. Qanday shartda funksiyaning limiti mavjud bo‘ladi?
43. Limiti mavjud bo‘lmagan funksiyaga misol keltiring.
44. Ajoyib limitlarni yoza olasizmi?
45. Limit tushunchasining sportga oid tatbig‘iga misol keltiring.
46. Qachon funksiya nuqtada uzluksiz deyiladi?
47. Argument va funksiya orttirmalari qanday aniqlanadi?
48. Orttirmalar tilida funksiya uzluksizligi qanday ifodalanadi?
49. Qaysi shartda funksiya oraliqda uzluksiz deyiladi?
50. Asosiy elementar funksiyalar uzluksizligi to‘g‘risida nima deyish mumkin?
51. Elementar funksiyalar uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
52. Qachon funksiya nuqtada chap (o‘ng) tomondan uzluksiz deyiladi?
53. Qaysi shartda funksiya kesmada uzluksiz deyiladi?
54. Funksiyaning kesmadagi eng katta qiymati deb nimaga aytiladi?
55. Funksiyaning kesmadagi eng kichik qiymati deb nimaga aytiladi?

Testlardan namunalar:

1. Ta’rifni to‘ldiring: To‘plam sonli deb ataladi, agar uning elementlari ... sonlardan iborat bo‘lsa.

A) butun; B) natural; C) haqiqiy; D) ratsional; E) irratsional.

2. Natural, butun, ratsional va haqiqiy sonlar to‘plamlari N, Z, Q va R orasidagi munosabat qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?

A) $N \subset Z \subset Q \subset R$; B) $Z \subset N \subset Q \subset R$; C) $R \subset Q \subset Z \subset N$;

D) $Q \subset Z \subset N \subset R$; E) $N \subset Z \subset R \subset Q$.

3. Quyidagilardan qaysi biri natural sonlar to'plamiga tegishli?

A) cos0; B) cos(π/4); C) cos(π/2); D) cosπ; E) cos(3π/4).

4. Quyidagi ildizlardan qaysi biri irratsional sonlar to'plamiga kiradi?

A) $\sqrt{25}$; B) $\sqrt{2.5}$; C) $\sqrt{0.25}$; D) $\sqrt{1/25}$;

E) bu ildizlarning birortasi ham irratsional sonlar to'plamiga kirmaydi.

5. Quyidagi ildizlardan qaysi biri ratsional sonlar to'plamiga kiradi?

A) $\sqrt{16.9}$; B) $\sqrt{1.69}$; C) $\sqrt{0.169}$; D) $\sqrt{1690}$;

E) bu ildizlarning birortasi ham ratsional sonlar to'plamiga kirmaydi.

6. Sonlar o'qida quyidagi tushunchalardan qaysi biri qatnashmaydi?

A) sonlar o'qining boshi; B) sonlar o'qining burilish nuqtasi;

C) sonlar o'qining masshtab birligi; D) sonlar o'qining musbat yo'nalishi;

E) keltirilgan barcha tushunchalar qatnashadi.

7. Quyidagi sonli to'plamlardan qaysi biri oraliqni ifodalaydi?

A) (a,b); B) $[a,b)$; C) $(a,b]$; D) $[a,b]$; E) $\{a,b\}$.

8. Absolut qiymat xossasi qayerda xato ko'rsatilgan?

A) $|x|=|-x|$; B) $|xy|=|x||y|$; C) $|x/y|=|x|/|y|$ $(y\neq 0)$;

D) $|x+y|=|x|+|y|$; E) Barcha xossalar to'g'ri ko'rsatilgan.

9. Absolut qiymat uchun quyidagi tengsizliklardan qaysi biri o'rinli emas?

A) $|x|\geq 0$; B) $|x-y|\geq|x|-|y|$; C) $|x|\geq x$; D) $|x+y|\leq|x|+|y|$;

E) Barcha tengsizliklar o'rinli.

10. $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ sonli ketma-ketlikning quyi va yuqori chegaralarini ko'rsating.

A) $\frac{1}{2}$,10; B) $\frac{1}{2}$,1; C) $\frac{1}{2}$, 3; D) 0, 1; E) 1, 2.

11. Qaysi sonli ketma-ketlik chegaralangan?

A) $\{n^2+3\}$; B) $\{(-1)^n\cdot n\}$; C) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$; D) $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$; E) $\left\{\frac{(-1)^n}{3}\right\}$.

12. Quyidagilarning qaysi biri yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo‘ladi?

$x_n=\frac{1}{n^2+1}$, $y_n=\frac{1}{2n^2-1}$, $z_n=(-1)^n$

A) x_n; B) x_n, y_n; C) z_n; D) y_n, z_n; E) x_n, z_n.

13. Ta’rifni to‘ldiring: $y=f(x)$ funksiya deb x o‘zgaruvchining har bir $x\in D$ qiymatiga y o‘zgaruvchining ... $y\in E$ qiymatini mos qo‘yilishiga aytiladi.

A) bir nechta; B) kamida bitta; C) faqat bitta; D) ikkita; E) kamida ikkita.

14. Ta’rifni to‘ldiring: $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi deb x argumentning $y=f(x)$ funksiya ... bo‘ladigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

A) musbat; B) manfiy; C) nol; D) ma’noga ega; E) cheksiz.

15. $f(x)=\sqrt{2x+1}-\lg x$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A) $(-1,+\infty)$; B) $(0,+\infty)$; C) $(2,11)$; D) $(-\infty,+\infty)$; E) $(1,+\infty)$.

16. $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A) $[1,+\infty)$; B) $[0,+\infty)$; C) $(-\infty,+\infty)$; D) $(-\infty,1)$; E) $(1,+\infty)$.

17. $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A) $[0,1]$; B) $[1,2]$; C) $(-\infty,+\infty)$; D) $[-1,3]$; E) $[-1,1]$.

18. Funksiya limiti ta’rifini to‘ldiring: $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda A soniga teng limitga ega deyiladi, agarda ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki, $|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x uchun … bo‘lsa.

A) $|f(x)+A|<\varepsilon$; B) $||f(x)-A|>\varepsilon$; C) $|f(x)+A|>\varepsilon$;
D) $|f(x)-A|<\varepsilon$; E) $|f(x)-A|=\varepsilon$.

19. $y=2x^2+5x-1$ funksiyaning $x\to 2$ bo‘lgandagi limiti topilsin.

A) 10; B) 12; C) 17; D) 21; E) -1.

20. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ limitni hisoblang:

A) 0; B) ∞; C) $-\infty$; D) 3; E) -1.

21. Ushbu funksiyaning $x=1$ nuqtadagi chap limitini toping:

$$y=\begin{cases}3x-1, & x<1;\\ 2x+1, & x\geq 1.\end{cases}$$

A) –2; B) –1; C) 1; D) 2; E) 3.

22. Ushbu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o‘ng limitini toping:

$$y=\begin{cases}3x^2+2x-1, & x\leq 0;\\ 2x^2+1, & x>0.\end{cases}$$

A) –2; B) –1; C) 1; D) 3; E) ∞.

23. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $x\to 0$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor emas?

A) $\sin x$; B) x^3; C) 2^x-1; D) $\cos x$;

E) keltirilgan barcha funksiyalar cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.

24. $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizlik sharti qayerda noto‘g‘ri ifodalangan?

A) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$; B) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$; C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$;

D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$; E) Barcha javoblarda to‘g‘ri ifodalangan.

25. Teoremani yakunlang: Asosiy elementar funksiyalar … uzluksiz.

A) barcha nuqtalarda; B) ba’zi bir nuqtalarda; C) (0;∞) sohada;

D) aniqlanish sohasiga tegishli har bir nuqtada; E) (–∞;0) sohada.

26. Agarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, shu nuqtada quyidagi funksiyalardan qaysi biri uzluksiz bo‘lishi shart emas?

A) $f(x)+g(x)$; B) $f(x)-g(x)$; C) $f(x)\cdot g(x)$; D) $f(x)/g(x)$;

E) Barcha funksiyalar uzluksiz bo‘ladi.

27. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz va $g(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, shu nuqtada quyidagi funksiyalarning qaysi biri uzluksiz bo‘lmaydi?

A) $f(x)+g(x)$; B) $f(x)-g(x)$; C) $f(x)\cdot g(x)$; D) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

E) Ko‘rsatilgan barcha funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

28. Qaysi shartda $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada chapdan uzluksiz bo‘ladi?

A) $f(a+0)=f(a)$; B) $f(a-0)=f(a)$; C) $f(a-0)=f(a+0)$;

D) $f(a-0)\neq f(a+0)$; E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

29. Qaysi shartda $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘ladi?

A) $f(a+0)=f(a)$; B) $f(a-0)=f(a)$; C) $f(a-0)=f(a+0)$;
D) $f(a-0)\neq f(a+0)$; E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Quyidagi sonli ketma-ketliklarning limitlarini hisoblang:

$a)\ \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{4m^n+3m^{n-2}+n+1}{2m^n-5m^{n-1}+m^{n-3}-2n+3}$;

$b)\ \lim\limits_{m\to\infty}[1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}+......+(-1)^m\dfrac{1}{n^m}]$; $c)\ \lim\limits_{m\to\infty}(1+\dfrac{n+1}{m})^{2mn}$.

2. $f(x)=\ln\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

3. $f(x)=\sqrt{n^2-x^{2n}}$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

4. Quyidagi funksiyalarni juft-toqlikka tekshiring:
$f(x)=\sin^n x\cdot\cos nx$, $g(x)=\sin^n x+\cos nx$.

5. $f(x)=\dfrac{x+n}{x-n}$ ($x>n$) funksiyaga teskari $f^{-1}(x)$ funksiyani toping.

6. $f(x)=x^n$, $g(x)=\ln(n+x)$ funksiyalar bo‘yicha $y=f(g(x))$ va $y=g(f(x))$
murakkab funksiyalarni yozing.

7. Quyidagi funksiyaning $x=0$ nuqtadagi chap va o‘ng limitini toping:

$$f(x)=\begin{cases} n-\sin nx, & x<0; \\ n-e^{nx}, & x\geq 0. \end{cases}$$

8. Quyidagi funksiyani $x=0$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko‘rsating:

$$f(x)=\begin{cases} 1-\cos^n x, & x\leq 0; \\ \sin(n+1)x, & x>0. \end{cases}$$

V BOB. FUNKSIYA HOSILASI VA DIFFERENSIALI

Funksiyaning maksimum-minimumini yoki urinmasini topish va shunga o'xshash juda ko'p murakkab masalalar bizning usulda hayratga qoldiradigan darajada oson va yengil yechiladi.

Leybnits G.W.

REJA:

- Funksiya hosilasi. Uning mexanik, geometrik va iqtisodiy ma'nosi
- Funksiyani differensiallash qoidalari. Hosilalar jadvali
- Funksiya differensiali. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

Tavanch iboralar: funksiyaning hosilasi, hosilaning mexanik ma'nosi, hosilaning geometrik ma'nosi, hosilaning iqtisodiy ma'nosi, differensiallanuvchi funksiya, differensiallash amali, hosilani hisoblash algoritmi, o'zgarmas son hosilasi, algebraik yig'indi hosilasi, ko'paytmaning hosilasi, bo'linmaning hosilasi, teskari funksiya hosilasi, murakkab funksiya hosilasi, logarifmik differensiallash, darajali-ko'rsatkichli funksiya, hosilalar jadvali, funksiya differensiali, differensialning mavjudlik sharti, algebraik yig'indi differensiali, ko'paytma differensiali, bo'linma differensiali.

5.1. Funksiya hosilasi. Uning mexanik, geometrik va iqtisodiy ma'nosi

Differensial hisob oliy matematikaning eng asosiy va eng kuchli, samarali usullaridan biri bo'lib hisoblanadi. Matematik tahlilning bu bo'limi nisbatan yosh bo'lib, uning dastlabki kurtaklari XVII asrda ***Ferma***, ***Paskal***, ***Dekart*** kabi matematiklarning ishlarida shakllangan va XVIII asrda buyuk ingliz olimi ***Nyuton*** (1642-1727) va mashhur nemis matematigi ***Leybnits*** (1646-1716) tomonidan unga asos solingan va turli masalalarni yechish uchun keng qo'llanilgan.

Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar. Differensial hisob asosida funksiya hosilasi tushunchasi yotadi va u tarixan quyidagi amaliy masalalarni yechish jarayonida paydo bo'lgan.

❖ **Oniy tezlik masalasi.** Bizga ma'lumki, to'g'ri chiziq bo'yicha tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning ixtiyoriy t vaqtdagi tezligi $v(t)=v_0=\text{const}$, ya'ni o'zgarmas bo'ladi. Bunda harakat boshlangandan keyin t vaqt o'tgach nuqtaning bosib o'tgan masofasi $S(t)=vt$ funksiya bilan aniqlanadi va ***harakat tenglamasi*** deb ataladi. Endi bu nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha notekis harakatda bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda moddiy nuqtaning tezligi t vaqt o'tishi bilan o'zgarib boradi va biror $v=v(t)$ funksiyani hosil qiladi. Moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi tezligi ***oniy tezlik*** deb ataladi. Biz notekis harakat tenglamasi $S=S(t)$ ma'lum bo'lgan taqdirda moddiy nuqtaning biror t_0 vaqtdagi $v_0=v(t_0)$ oniy tezligini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun ikkinchi bir $t=t_0+\Delta t$ vaqtni qaraymiz. Unda moddiy nuqtaning ko'rilayotgan $(t_0, t)=(t_0, t_0+\Delta t)$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan masofasi

$$S(t)-S(t_0)= S(t_0+\Delta t)-S(t_0)= \Delta S,$$

ya'ni harakat tenglamasini ifodalovchi $S=S(t)$ funksiyaning orttirmasiga teng bo'ladi. Agar notekis harakatdagi moddiy nuqtaning bu vaqt oralig'idagi o'rtacha tezligini $\bar{v}(\Delta t)$deb belgilasak, uning qiymati $\bar{v}(\Delta t)=\Delta S/\Delta t$ formula bilan aniqlanadi. Bu holda $v(t_0)$ oniy tezlik $\bar{v}(\Delta t)$ o'rtacha tezlikning $t\to t_0$, ya'ni $\Delta t\to 0$ bo'lgandagi limiti kabi aniqlanadi. Demak, notekis harakatda $v(t_0)$ oniy tezlik

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (1)$$

limitni hisoblash orqali topiladi.

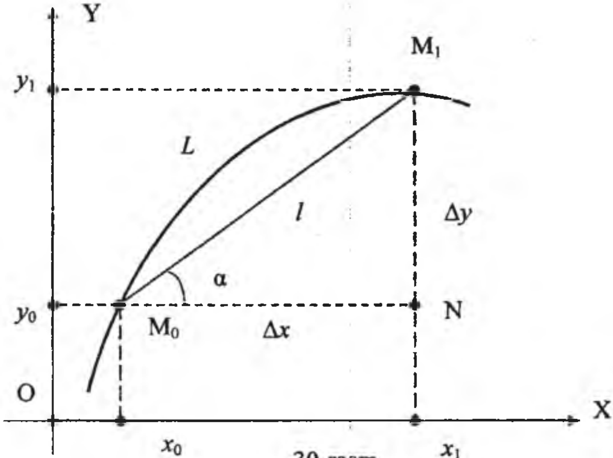
❖ **Urinma masalasi.** Dastlab tekislikdagi berilgan L chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tushunchasini kiritamiz.

Berilgan L chiziqda yotuvchi ikkita M_0 va M_1 nuqtalarni tutashtiruvchi M_0M_1 kesma ***vatar*** deb ataladi (30-rasm).

Bu vatar yotgan to'g'ri chiziq M_0 nuqtadan o'tgani uchun uning tenglamasi

$$y-y_0=k(x-x_0), \quad k=tg\alpha=\frac{|NM_1|}{|NM_0|}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ko'rinishda bo'ladi.



30-rasm

Ta'rif: Agar L chiziqning M_0M_1 vatari yotgan l to'g'ri chiziq M_1 nuqta L chiziq bo'ylab M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlashib borganda ($M_1 \to M_0$) biror l_0 to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa ($l \to l_0$), unda l_0 berilgan L chiziqning M_0 nuqtadagi ***urinmasi*** deyiladi.

Egri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi urinmasi shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'lgani uchun (31-rasm) uning ham tenglamasi vatar tenglamasi singari $y-y_0=k_0(x-x_0)$ ko'rinishda bo'ladi[46]. Bu tenglamadagi k_0 burchak koeffitsiyentini topish uchun L chiziq tenglamasini ifodalovchi $y=\varphi(x)$ funksiya berilgan deb hisoblaymiz. Urinma ta'rifiga asosan

$$M_1 \to M_0 \Rightarrow x_1 \to x_0\,,\, y_1 \to y_0 \Rightarrow \Delta x \to 0\,,\, \Delta y \to 0$$

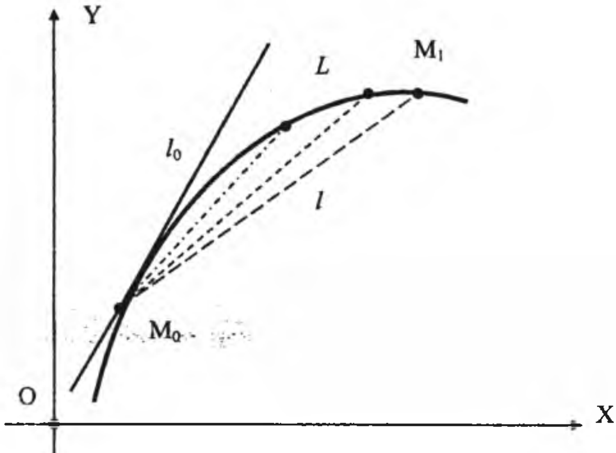
bo'lgani uchun M_0M_1 vatarning k burchak koeffitsiyenti uchun yuqorida keltirilgan formulaga asosan,

$$k_0 = \lim_{M_1 \to M_0} k = \lim_{M_1 \to M_0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \quad (2)$$

natijani olamiz.

---

[46] Rajabov F., Masharipova S., Madrahimov R. Oliy matematika. O'quv qo'llanma. – T.: Turon-Iqbol, 2007. – B. 173.



31-rasm

❖ **Mehnat unumdorligi masalasi.** Ishchining ish kuni davomidagi mehnat unumdorligi o‘zgaruvchi miqdor bo‘ladi. Ertalab ish kuni boshlangach, ma’lum bir paytgacha u ishga kirishish jarayonida bo‘lib, bu davrda uning mehnat unumdorligi oshib boradi. So‘ngra ma’lum bir vaqt davomida ishchi deyarli bir xil mehnat unumdorligi bilan ishini davom ettiradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari toliqish natijasida ishchining mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib, ish kuni davomida t vaqt o‘zgarib borishi bilan ishchining mehnat unumdorligi biror $z=z(t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Uni topish uchun ishchining ish kuni boshlangandan keyin t vaqt o‘tgach ishlab chiqargan mahsulot hajmini ifodalovchi $h=h(t)$ funksiya ma’lum deb olamiz. Bu funksiya yordamida ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topamiz. Bu maqsadda ish kunining t_0 va $t_1=t_0+\Delta t$ vaqt oralig‘ini qaraymiz. Bu vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $h(t_0+\Delta t)-h(t_0)=\Delta h$ kabi aniqlanadi. U holda uzunligi Δt bo‘lgan bu vaqt oralig‘idagi ishchining o‘rtacha mehnat unumdorligi $\bar{z}(\Delta t)=\Delta h/\Delta t$ nisbat orqali aniqlanadi. Bu yerdan ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topish uchun $\Delta t\to 0$ deb olishimiz kerak va natijada

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{z}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t} \quad (3)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Bu uchala masala mazmunan turlicha bo'lsa ham, ularni yechish bir xil matematik usulda amalga oshirilganligi va bu yechimlar (1)–(3) formulalar orqali bir xil ko'rinishida ifodalanganligini ta'kidlab o'tamiz.

Hosila ta'rifi va uning amaliy ma'nolari. Yuqoridagi masalalarni yechish uchun amalga oshirilgan ishlarni umumiy holda qaraymiz. Bizga biror $y=f(x)$ funksiya berilgan. Bu funksiyaning aniqlanish sohasiga kiruvchi x_0 va $x=x_0+\Delta x$ argument qiymatlarini qaraymiz, ya'ni x_0 nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz. Argumentning bu Δx orttirmasiga mos keluvchi $y=f(x)$ funksiyaning $\Delta y=\Delta f= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmasini topamiz. So'ngra Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatini $\Delta x\to 0$ holdagi limitini hisoblaymiz.

<u>Ta'rif:</u> Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo'lganda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati funksiyaning x_0 nuqtadagi ***hosilasi*** deb ataladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ yoki $y'(x_0)$ kabi belgilanadi va ta'rifga asosan,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (4)$$

tenglik orqali aniqlanadi[47].

Misol sifatida $f(x)=x^2$ funksiya hosilasini uning ta'rifiga asosan topamiz:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x) = (x+\Delta x)^2 -x^2 =2x\Delta x +(\Delta x)^2 \Rightarrow$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Demak, $(x^2)'=2x$. Shunday tarzda $x'=1$ va $(x^3)'=3x^2$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

Oldin ko'rilgan masalalarning (1)–(3) javoblarini kiritilgan hosila tushunchasi orqali ifodalaymiz. Harakat tenglamasi $S=S(t)$ funksiya bilan ifodalanadigan notekis harakatda t_0 vaqtdagi oniy tezlik uchun topilgan (1) natijadan

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t_0) \quad (1')$$

[47] Естественно-научные основы физической культуры и спорта: учебник / под ред. А.В.Самсоновой, Р.Б.Цаллаговой. – М.: Советский спорт, 2014. – С. 26.

formulani hosil qilamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning o'zgarish tezligini ifodalaydi va bu ***hosilani mexanik ma'nosi*** deyiladi. Nyuton hosila tushunchasiga mana shu yo'nalishdagi tadqiqotlari orqali kelgan va uni "flyuktsiya" deb atagan. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, bu yerda "tezlik" tushunchasi faqat harakat tezligini ifodalamasdan, u keng ma'noda tushuniladi. Masalan, kimyoviy reaksiya tezligi, texnologik jarayon tezligi, sport ko'rsatkichlarining o'zgarish tezligi va hokazo.

Endi $y=\varphi(x)$ funksiya orqali berilgan L chiziqning $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0,\varphi(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan l_0 urinmaning k burchak koeffitsiyenti ifodalovchi (2) formulani eslab, undan

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\varphi'(x_0)\quad (2')$$

natijaga kelamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning grafigini $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0,\ f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi va bu ***hosilani geometrik ma'nosi*** deyiladi. Nyutonning hosila bo'yicha ishlaridan bexabar holda Leybnits mana shunday geometrik masalalarni yechish jarayonida hosila tushunchasiga kelgan.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0,f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\quad (5)$$

ko'rinishda topiladi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ parabolaning $x_0=3$ abssissali nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini topamiz. Bunda $f(x_0)=f(3)=3^2=9$, $f'(x_0)=2\ x_0=2\cdot3=6$ va shu sababli, (5) formulaga asosan, izlangan urinma tenglamasi

$$y=6(x-3)+9 \Rightarrow y=6x-9$$

ko'rinishda bo'ladi.

Mehnat unumdorligi to'g'risidagi masalaning (3) javobini hosila orqali

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=h'(t_0)\quad (3')$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, $y=f(x)$ funksiya x vaqtgacha ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ifodalasa, uning hosilasi $f'(x)$ shu x vaqtdagi mehnat unumdorligini ifodalaydi va buni ***hosilaning iqtisodiy ma'nosi*** deb qarash mumkin.

Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi. Dastlab differensiallanuvchi funksiya tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif: Agar $y=f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada ***differensiallanuvchi*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada ***differensiallanmovchi*** deb ataladi. Funksiyani $f'(x)$ hosilasini topish amali ***differensiallash amali*** deb ataladi.

Funksiyaning differensiallanuvchiligi va uzluksizligi orasidagi bog'lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

Teorema: Agarda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot: Teoremani isbotlash uchun, funksiyaning uzluksizligi ta'rifiga asosan,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \quad (6)$$

shart bajarilishini ko'rsatish kifoya. Hosila ta'rifini ifodalovchi (4) tenglik va limitni mavjudligi haqidagi oldin ko'rib o'tilgan lemmaga asosan

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \Delta f = (f'(x) + \alpha(\Delta x))\Delta x$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerda $\Delta x \to 0$ bo'lganda $\alpha(\Delta x)$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Bu holda, limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x) + \alpha(\Delta x))\Delta x = f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = f'(x) \cdot 0 + 0 = 0 .$$

Demak, (6) shart o'rinli va shu sababli $f(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz bo'ladi[48].

Izoh: Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o'rinli emas. Masalan, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differensiallanuvchi emas. Haqiqatan ham, $x=0$ nuqtada argumentga Δx orttirma berganimizda funksiya orttirmasi uchun $\Delta f=f(0+\Delta x)-f(0)= f(\Delta x)= |\Delta x|$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan ko'rinadiki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0 ,$$

ya'ni $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz. Ammo

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 .$$

---

[48] Sultonov J.S. Oliy matematika (Hosila va differensial). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2010. – B. 21.

Bu yerdan ko'rinadiki, $\Delta x \to 0$ bo'lganda $\Delta f/\Delta x$ nisbat limitga ega emas va shu sababli $x=0$ nuqtada $f'(0)$ hosila mavjud emas.

Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u shu ***oraliqda differensiallanuvchi*** deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya har qanday (a,b) oraliqda differensiallanuvchi. $y=|x|$ funksiya esa $x=0$ nuqtani o'z ichiga olmaydigan barcha oraliqlarda differensiallanuvchi, ammo $x=0$ nuqtani o'z ichiga oluvchi oraliqlarda differensiallanuvchi bo'lmaydi

Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari. Hosilani iqtisodiy mazmunini ifodalovchi mehnat unumdorligi haqidagi masalani yuqorida ko'rib o'tgan edik. Ammo hosilani iqtisodiyotga tatbig'i bu bilan chegaralanib qolmasdan, u iqtisodiyotda juda keng qo'llaniladi. Masalan, ishlab chiqarish xarajatlari y va mahsulot hajmi x orasidagi bog'lanish biror $y=f(x)$ ishlab chiqarish funksiyasi bilan berilgan bo'lsa, unda $y'=f'(x)$ hosila ishlab chiqarishning ***limitik xarajati*** deyiladi va bir birlik qo'shimcha mahsulot ishlab chiqarish uchun kerak bo'ladigan qo'shimcha xarajatlarning taqribiy qiymatini ifodalaydi. Shunday tarzda limitik daromad, limitik tushum, limitik mahsulot, limitik unumdorlik kabi muhim iqtisodiy tushunchalar hosila orqali ifodalanadi[49]. Iqtisodiy tatbiqlarda hosila biror iqtisodiy jarayon, ob'yektni vaqt yoki boshqa bir omil bo'yicha o'zgarish tezligini o'rganish uchun ham qo'llaniladi.

Hosila tushunchasini yana bir iqtisodiy tatbig'iga misol sifatida, iqtisodiy jarayonlarni o'rganish va bir qator amaliy masalalarni yechish uchun qo'llaniladigan funksiyaning elastikligi tushunchasini qaraymiz.

Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $\Delta f/f$ funksiya nisbiy orttirmasini $\Delta x/x$ argument nisbiy orttirmasiga nisbatini $\Delta x \to 0$ bo'lgandagi limiti ***funksiyaning elastikligi*** deb ataladi .

Berilgan $y=f(x)$ funksiya elastikligi $E_x(f)$ kabi belgilanadi va ta'rifga asosan,

$$E_x(f) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{f} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{f}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x}{f}\cdot f'(x) = \frac{x}{y}\cdot f'(x) \quad (7)$$

---

[49] Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Darslik. – T., 2012. – B. 241.

formula bilan hisoblanadi. Funksiyaning elastikligi x argument qiymati 1% o'zgarganda $y=f(x)$ funksiya qiymati taqriban necha % o'zgarishini ifodalaydi.

Masalan, korxonaning ishlab chiqarayotgan mahsulotiga aholining talabi y va bu mahsulot narxi x orasidagi $y=f(x)$ bog'lanishni o'rganishda funksiyaning elastikligi $E_x(f)$ keng qo'llaniladi. Bu holda $E_x(f)$ mahsulot narxi x 1% o'zgarganda aholining talabi taqriban necha % o'zgarishini ifodalaydi.

Agar $|E_x(f)|>1$ bo'lsa, talab narxga nisbatan ***elastik***, $|E_x(f)|<1$ bo'lsa – ***noelastik***, $|E_x(f)|=1$ bo'lsa – ***bir elastikli*** deb ataladi. Bu tushuncha ma'nosini aniqlash uchun korxonaning Mr kabi belgilanadigan limitik daromadini qaraymiz. Bu iqtisodiy ko'rsatkich talab elastikligi orqali

$$Mr = (1 - |E_x(f)|^{-1})x$$

formula bilan ifodalanadi. Bu yerdan ko'rinadiki, talab elastik bo'lganda narx o'sishi (kamayishi) bilan mahsulotni sotishdan olinadigan umumiy daromad ham oshadi (kamayadi). Noelastik talabda esa narx o'sishi (kamayishi) bilan mahsulotni sotishdan olinadigan umumiy daromad aksincha kamayadi (oshadi).

5.2. Funksiyani differensiallash qoidalari. Hosilalar jadvali

Hosilani hisoblash algoritmi. Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topish, ya'ni uni differensiallash, oldingi mavzuda keltirilgan ta'rifga asosan, quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshiriladi:

- funksiyaning x argumentiga $\Delta x\neq 0$ orttirma berib, $x+\Delta x$ nuqtani topamiz;
- funksiya orttirmasini $\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)$ formula bo'yicha hisoblaymiz;
- $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni topamiz;
- $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo'lgandagi limitini aniqlaymiz.

Misol sifatida asosiy elementar funksiyalardan biri bo'lgan $f(x)=\sin x$ hosilasini yuqorida keltirilgan algoritm bo'yicha topamiz:

✓ x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funksiyaning $f(x)=\sin x$ va $f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$ qiymatlarini hisoblaymiz;

✓ trigonometrik ayirmani ko'paytmaga keltirish formulasidan foydalanib, Δf funksiya orttirmasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2);$$

✓ $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2);$$

✓ Ko'paytmaning limiti, I ajoyib limit hamda $y=\cos x$ funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo'lgandagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\right] = \left(\frac{\Delta x}{2}=\alpha\right)$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\cos(x+\alpha) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Demak,

$$(\sin x)' = \cos x \quad (1)$$

formula o'rinli ekan. Xuddi shunday tarzda

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (2)$$

ekanligini aniqlaymiz.

Yana bir misol sifatida $f(x)=a^x$ ko'rsatkichli funksiya hosilasini topamiz:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a. \quad (3)$$

Bu yerda ajoyib limitlardan biri bo'lgan

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

limit qiymatidan foydalanildi. Jumladan, $a=e$ holda $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$ natijaga ega bo'lamiz.

Differensiallash qoidalari. Har qanday funksiya hosilasini yuqoridagi algoritm bo'yicha hisoblash oson emas va ancha murakkab hisoblashlarni talab etadi. Shu sababli amalda $y=f(x)$ funksiya hosilasini hisoblash quyidagi ***differensiallash qoidalari*** yordamida osonroq amalga oshirilishi mumkin[50].

1-qoida: O'zgarmas funksiya, ya'ni ixtiyoriy C o'zgarmas sonning hosilasi nolga teng, ya'ni

$$(C)'=0 \ (C\text{–const}). \quad (4)$$

[50] Sultonov J.S. Oliy matematika (Hosila va differensial). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2010. – B. 45.

Isbot: Har qanday o'zgarmas $f(x)=C$ funksiya uchun argumentning ixtiyoriy $\Delta x\neq 0$ orttirmasida

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0,\ \Delta f/\Delta x=0$$

tenglik o'rinli ekanligidan va hosila ta'rifidan

$$(C)'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $(3{,}2)'=0$, $(-7)'=0$, $(\sin 25^0)'=0$, $(\pi)'=0$ va hokazo.

2-qoida: Agar $y=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, bu nuqtada $y=u(x)\pm v(x)=u\pm v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasini

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \quad (5)$$

formula bilan hisoblash mumkin.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta'rifidan foydalanib, har qanday Δx argument orttirmasida $\Delta(u\pm v)=\Delta u\pm\Delta v$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Bu yerdan hosila ta'rifi va limit hisoblash qoidasiga asosan kerakli tenglikni olamiz:

$$(u\pm v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\pm v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\pm\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'\pm v'\ .$$

Demak, ikkita differensiallanuvchi funksiyalarning algebraik yig'indisi differensiallanuvchi funksiya bo'lib, algebraik yig'indining hosilasi hosilalarning algebraik yig'indisiga teng bo'ladi.

Masalan,

$(x^2+\sin x)'=(x^2)'+(\sin x)'=2x+\cos x$, $(5-\cos x)'=(5)'-(\cos x)'=0-(-\sin x)=\sin x$.

Natija: Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaga ixtiyoriy C o'zgarmas sonni qo'shsak, uning hosilasi o'zgarmaydi.

Haqiqatan ham $(f(x)+C)'=f'(x)+C'=f'(x)+0=f'(x)$.

Izoh: Yuqoridagi 2-qoidada keltirilgan tasdiqning teskarisi umuman olganda o'rinli emas. Masalan, $y=|x|$ va $v=1-|x|$ funksiyalar yig'indisi $u+v=1$ o'zgarmas funksiya sifatida barcha x nuqtalarda, jumladan, $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi. Ammo u va v qo'shiluvchi funksiyalar $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emas.

3-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, bu nuqtada $y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \quad (6)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta'rifiga asosan,

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u,$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x) \Rightarrow v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$$

ekanligidan foydalanib, $\Delta(u\cdot v)$ funksiya orttimasini topamiz:

$$\Delta(u\cdot v) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) = [u(x)+\Delta u]\cdot[v(x)+\Delta v] - u(x)\cdot v(x) =$$

$$= u(x)\cdot\Delta v + v(x)\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v.$$

Bu yerdan, hosila ta'rifi va limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$(u\cdot v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot\Delta v + v(x)\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v$$

natijani olamiz. Shartga asosan, $y=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi, demak uzluksiz ham bo'lgani uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$$

tengliklar o'rinli bo'ldi. Bu tengliklarni oldingi natijaga qo'yib, $y=u\cdot v$ funksiya differensiallanuvchi va

$$(u\cdot v)' = u\cdot v' + v\cdot u' + u'\cdot 0 = u\cdot v' + v\cdot u',$$

ya'ni (6) formula o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Masalan,

$$(e^x\cdot\sin x)' = (e^x)'\cdot\sin x + e^x\cdot(\sin x)' = e^x\cdot\sin x + e^x\cdot\cos x = (\sin x + \cos x)e^x.$$

Natija: O'zgarmas C ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Haqiqatan ham, (4) va (6) formulalarga asosan

$$[C\cdot f(x)]' = C'\cdot f(x) + C\cdot f'(x) = 0\cdot f(x) + C\cdot f'(x) = C\cdot f'(x).$$

Masalan, $(5x^2)' = 5\cdot(x^2)' = 5\cdot 2x = 10x$[51].

4-qoida: Agar $y=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi va bu yerda $v=v(x)\neq 0$ shart bajarilsa, unda bu nuqtada $y=u(x)/v(x)=u/v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (7)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Bu tasdiqni isboti oldingi qoida isbotiga o'xshash tarzda amalga oshiriladi va o'quvchiga mustaqil ish sifatida taklif etiladi.

[51] Tojiyev Sh.I. Oliy matematikadan masalalar yechish. Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik. – Toshkent: O'zbekiston, 2002. – B. 37.

Bu qoidadan foydalanib, y=tg$x$ va y=ctg$x$ asosiy elementar funksiyalarning hosilasini topamiz. cos$x$≠0 shartda, ya'ni $x\neq(\pi/2)\pm\pi n$ (n=0,1,2,3, ...) bo'lganda

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Xuddi shunday ravishda, sin$x$≠0 shartda, ya'ni $x\neq\pm\pi n$ (n=0,1,2,3, ...) bo'lganda, (ctg$x$)'=–1/(sin^2x) ekanligi topiladi. Demak, y=tg$x$ va y=ctg$x$ funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo'lib, ularning hosilalari

$$(\text{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\text{tg}^2x,\quad (\text{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\text{ctg}^2x)\quad (8)$$

formula bilan topiladi.

5-qoida: Berilgan $y=f(x)$ funksiya x nuqtaning biror atrofida qat'iy monoton (o'suvchi yoki kamayuvchi) va uzluksiz bo'lsin. Bundan tashqari $y=f(x)$ funksiya bu x nuqtada differensiallanuvchi va $f'(x)\neq0$ bo'lsin. Bu shartlarda $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud va differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi uchun

$$\{f^{-1}(y)\}'=\frac{1}{f'(x)}\ \text{yoki}\ x'_y=\frac{1}{y'_x}\quad (9)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot: Keltirilgan shartlarda tegishli $y=f(x)$ nuqtaning biror atrofida $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud, qat'iy monoton va uzluksiz bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bu funksiyani differensiallanuvchi bo'lishini aniqlash uchun uning y argumentiga $\Delta y\neq0$ orttirma beramiz. Bu holda $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya

$$\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)$$

orttirma oladi. Bunda $f^{-1}(y)$ teskari funksiya qat'iy monoton ekanligidan $\Delta x\neq0$, uzluksiz ekanligidan esa $\Delta y\to0 \Rightarrow \Delta x\to0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu holda, $f'(x)$ mavjud va noldan farqli ekanligi hamda hosila ta'rifidan ushbu natijani olamiz:

$$\{f^{-1}(y)\}'=x'_y=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1}=\left(\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1}=(y'_x)^{-1}=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{f'(x)}.$$

Demak, $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya differensiallanuvchi va (9) formula o'rinli.

Bu qoidadan foydalanib yana bir nechta asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini aniqlaymiz.

Dastlab $y=f(x)=\arcsin x$ teskari trigonometrik funksiya hosilasini topamiz. Ta'rifga asosan, $x\in(-1, 1)$ bo'lganda bu funksiya $y\in(-\pi/2, \pi/2)$ qiymatlarni qabul etadi hamda $x=\sin y$ funksiyaga teskari bo'ladi. Bu yerda $y\in(-\pi/2, \pi/2)$ bo'lgani uchun $x=\sin y$ teskari funksiyaning hosilasi

$$x'_y=(\sin y)'=\cos y>0,$$

ya'ni noldan farqli bo'ladi. Bu holda, (9) formulaga asosan,

$$(\arcsin x)'=y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

natijani hosil qilamiz. Demak,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1)\ (10)$$

formula o'rinli ekan. Xuddi shunday usulda

$$(\arccos x)'=-(\arcsin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\mathrm{arctg}x)'=-(\mathrm{arcctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}\ (11)$$

formulalarni isbotlash mumkin.

Endi $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ logarifmik funksiya hosilasini topamiz. Bunda $x\in(0,\infty)$ va $y\in(-\infty, \infty)$ hamda logarifmik funksiya qat'iy monoton bo'lib, u $x=a^y$ ko'rsatkichli funksiyaga teskaridir. Bundan tashqari, $x=a^y$ differensiallanuvchi va $(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$[52]. Shu sababli (9) formulaga asosan, logarifmik funksiya hosilasi mavjud va

$$(\log_a x)'=y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

ekanligini topamiz. Demak,

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x},\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}.\ (12)$$

6-qoida: Berilgan $y=f(u)$ murakkab funksiyada tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funksiyalar argumentlari bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsin. Bu holda $y=f(u)$ murakkab funksiya x bo'yicha differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi

$$f'_x(u)=f'_u(u)\cdot u'(x)\ (13)$$

[52] Sultonov J.S. Oliy matematika (Hosila va differensial). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2010. – B. 69.

formula bilan, ya'ni tashqi va ichki funksiyalar hosilalarining ko'paytmasi kabi topiladi.

Isbot: *u(x)* funksiya differensiallanuvchi ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqadi va shu sababli $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0$ bo'ladi. Bu yerdan, hosila ta'rifi va limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$f'_x(u) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u(u) \cdot u'(x),$$

ya'ni $y=f(u)$ murakkab funksiya differensiallanuvchi va (13) formula o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $(\sin x^2)' = (u=x^2) = (\sin u)'_x = (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot (x^2)' = 2x\cos x^2$,

$(\sin^2 x)' = (u=\sin x) = (u^2)'_x = (u^2)'_u \cdot u' = 2u \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Bu qoidadan foydalanib, $y=x^\alpha$ (α–ixtiyoriy haqiqiy son), $x \in (0, \infty)$, darajali funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun darajali funksiyani $y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ ko'rinishdagi murakkab ko'rsatkichli funksiya kabi ifodalaymiz. Unda, (13) formula, ko'rsatkichli va logarifmik funksiya hosilasidan foydalanib,

$$y' = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (u = \alpha \ln x) = (e^u)' = e^u u' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

natijaga kelamiz. Demak, $y=x^\alpha$, $x \in (0, \infty)$, darajali funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (14)$$

formula orqali hisoblanadi. Masalan,

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (x^{-1})' = (\frac{1}{x})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$(x^{1/2})' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x^{1/3})' = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Izoh: (15) formula nafaqat $x \in (0, \infty)$ sohada, balkim $y=x^{\alpha-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasida ham o'rinli bo'ladi. Jumladan, $\alpha = n \in N$, ya'ni natural son bo'lsa, (15) formula ixtiyoriy $x \in (-\infty, \infty)$, $\alpha = -n \in Z^-$, ya'ni manfiy butun son bo'lganda esa barcha $x \neq 0$ uchun o'rinli bo'ladi.

Logarifmik differensiallash usuli. Ba'zi hollarda differensiallanuvchi $y=f(x)>0$ funksiya hosilasini uning logarifmi orqali quyidagicha topish mumkin:

$$[\ln f(x)]' = (u = f(x)) = (\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = [\ln f(x)]' \cdot f(x). \quad (16)$$

Ta'rif: Funksiyaning $f'(x)$ hosilasini (16) formula orqali topish ***logarifmik differensiallash usuli*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2e^{2x}(1+x^4)^3$ funksiya hosilasini bevosita hisoblash ancha murakkab. Biroq logarifmik differensiallash usulida bu hosila osonroq topiladi:

$$\ln f(x)=\ln[x^2e^{2x}(1+x^4)^3]=2\ln x+2x+3\ln(1+x^4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[\ln f(x)]'=[2\ln x+2x+3\ln(1+x^4)]'=\frac{2}{x}+2+\frac{12x^3}{1+x^4}=\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=(\frac{2}{x}+2+\frac{12x^3}{1+x^4})f(x)=(\frac{2}{x}+2+\frac{12x^3}{1+x^4})\cdot x^2e^{2x}(1+x^4)^3=$$

$$=2xe^{2x}(1+x^4)^3+2x^2e^{2x}(1+x^4)^3+12x^5e^{2x}(1+x^4)^2=$$

$$=2xe^{2x}(1+x^4)^2[1+x^4+x(1+x^4)+6x^4]=2xe^{2x}(1+x^4)^2(x^5+7x^4+x+1).$$

Yana bir misol sifatida $f(x)=x^{\alpha}$ ($x>0$, α-ixtiyoriy haqiqiy son) darajali funksiya hosilasini logarifmik differensiallash usulida aniqlaymiz:

$$\ln f(x)=\ln x^{\alpha}=\alpha\ln x\Rightarrow[\ln f(x)]'=(\alpha\ln x)'=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow(x^{\alpha})'=\frac{\alpha}{x}\cdot x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Bu yerdan (15) formula o'rinli ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

Ta'rif: Agar $u=u(x)>0$, $v=v(x)$ esa ixtiyoriy funksiya bo'lsa, unda $y=u(x)^{v(x)}=u^v$ ko'rinishdagi murakkab funksiya ***darajali-ko'rsatkichli funksiya*** deyiladi.

Agar $u=u(x)>0$ va $v=v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, unda $y=u^v$ darajali-ko'rsatkichli funksiya ham differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasini logarifmik differensiallash usulida quyidagicha hisoblash mumkin:

$$\ln y=v\cdot\ln u\Rightarrow(\ln y)'=(v\cdot\ln u)'\Rightarrow\frac{y'}{y}=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\Rightarrow y'=y\cdot(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u})$$

Bu natijani ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$(u^v)'=u^v\cdot\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u' \quad (17)$$

Bu yerdan ko'rinadiki, $y=u^v$ darajali-ko'rsatkichli funksiya hosilasi ikkita qo'shiluvchidan iborat. Bunda birinchi qo'shiluvchi $y=u^v$ funksiyani murakkab ko'rsatkichli funksiya (u o'zgarmas) singari qarab, undan hosila olish natijasida hosil bo'ladi. Ikkinchi qo'shiluvchi esa bu funksiyani murakkab darajali funksiya (v o'zgarmas) deb, undan hosila olish orqali topilishi mumkin.

Misol sifatida $y=x^x$ funksiya hosilasini (17) formula orqali topamiz:

$$(x^x)'= x^x\cdot\ln x\cdot x'+x\cdot x^{x-1}\cdot x'= (1+\ln x)\, x^x. \quad (18)$$

Hosilalar jadvali. Oldin ko'rilganlarga asosan, barcha asosiy elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo'ladi. Ularning hosilalari va differensiallash qoidalarini ***hosilalar jadvali*** ko'rinishda ifodalaymiz. Bu jadvaldan foydalanib ixtiyoriy elementar funksiyani hosilasini topish mumkin va u matematik tahlil "Differensial hisob" bo'limining asosiy quroli bo'lib hisoblanadi. Bunda elementar funksiyalarning hosilalari yana elementar funksiya bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Hosilalar jadvali:

	I. Darajali funksiyalar		
1	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$	2	$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u',\ u=u(x)$
3	$(x)'=1,\ (x^2)'=2x\ ,\ (x^3)'=3x^2,$ $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2},\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	4	$(u^2)'=2uu',\ (u^3)'=3u^2u',$ $(\frac{1}{u})'=-\frac{u'}{u^2},\ (\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
	II. Ko'rsatgichli funksiyalar		
5	$(a^x)'=a^x\ln a, a>0, a\neq 1$	6	$(a^u)'=a^u u'\ln a, u=u(x)$
7	$(e^x)'=e^x,\ (10^x)'=10^x\ln 10$	8	$(e^u)'=e^u\cdot u',\quad u=u(x)$
	III. Logarifmik funksiyalar		
9	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}$	10	$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}=\frac{u'\log_a e}{u}, u=u(x$
11	$(\ln x)'=\frac{1}{x}\ (\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}=\frac{\lg e}{x}$	12	$(\ln u)'=\frac{1}{u}u',\quad u=u(x)$
	IV. Trigonometrik funksiyalar		
13	$(\sin x)'=\cos x\ ,$ $(\cos x)'=-\sin x$	14	$(\sin u)'=\cos u\cdot u',$ $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
15	$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x},$ $(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	16	$(\mathrm{tg}u)'=\frac{u'}{\cos^2 u},$ $(\mathrm{ctg}u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$
	V. Teskari trigonometrik funksiyalar		

17	$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18	$(\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
19	$(\mathrm{arctg}x)' = -(\mathrm{arcctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$	20	$(\mathrm{arctg}u)' = -(\mathrm{arcctg}u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
VI. Differensiallash qoidarlari			
21	$(C)'=0$, $(C\text{–const.})$, $(C\cdot u)' = C\cdot u'$	22	$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$
23	$(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(\frac{u}{v})' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$	24	$[f(u)]'_x = f'_u(u)\cdot u'$, $u = u(x)$
25	$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(x)}$, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$	26	$(u^v)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'$

5.3. Funksiya differensiali. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

Differensial va uni hisoblash. Berilgan $y=f(x)$ funksiyada x argument Δx orttirma olganda funksiya orttirmasi $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ kabi aniqlanishini eslatib o‘tamiz. Masalan, $f(x)=x^2$ va $g(x)=x^3$ funksiyalar uchun ularning orttirmalari

$$\Delta f=2x\Delta x+(\Delta x)^2,\ \Delta g=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=3x^2\Delta x+[3x+\Delta x](\Delta x)^2$$

ko‘rinishda bo‘lib, birinchi qo‘shiluvchi Δx argument orttirmasiga nisbatan chiziqli (birinchi darajali), ikkinchi qo‘shiluvchi esa Δx orttirmaning ikkinchi va uchinchi darajalaridan iborat bo‘lmoqda. Bunda $\Delta x\to 0$, ya’ni cheksiz kichik miqdor bo‘lsa, unda ikkinchi qo‘shiluvchi Δx argument orttirmasiga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor, ya’ni $o(\Delta x)$ bo‘ladi. Shunday qilib, yuqorida ko‘rilgan funksiyalarning orttirmalari

$$\Delta f=2x\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta g=3x^2\Delta x+o(\Delta x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

<u>Ta’rif:</u> Agar $y=f(x)$ funksiya orttimasi $\Delta x\to 0$ holda

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\ (1)$$

ko‘rinishda ifodalansa va bunda A ko‘paytuvchi Δx argument orttirmasiga bog‘liq bo‘lmasa (x argumentni o‘ziga bog‘liq bo‘lishi mumkin), unda $A\cdot\Delta x$ ifoda funksiyaning ***differensiali***, funksiyani o'zi esa x nuqtada ***differensiallanuvchi*** deb ataladi.

Funksiya differensiali df kabi belgilanadi va ta'rifga asosan, $df=A\cdot\Delta x$, ya'ni Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatan chiziqli qismini ifodalaydi.

Yuqorida ko'rilgan funksiyalarning orttirmalari ifodalaridan $df=d(x^2)=2x\cdot\Delta x$, $dg=d(x^3)=3x^2\cdot\Delta x$ ekanligini ko'ramiz.

Ammo umumiy holda $y=f(x)$ funksiyaning df differensialini ta'rif bo'yicha, ya'ni (1) tenglik orqali topish ancha murakkab masaladir. Shu sababli bu differensialni osonroq usulda topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masala quyidagi teoremada o'z yechimini topadi.

Teorema: Agar $y=f(x)$ funksiya biror x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, uning shu nuqtadagi differensiali

$$df=f'(x)\cdot\Delta x \quad (2)$$

formula bilan topilishi mumkin.

Isbot: Hosila ta'rifi va funksiya limitning mavjudligi haqidagi lemmaga asosan, quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)\Rightarrow\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)\Rightarrow$$

$$\Delta f=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\Rightarrow\Delta f=f'(x)\Delta x+o(\Delta x).$$

Oxirgi tenglikni (1) bilan solishtirib va differensial ta'rifidan foydalanib, (2) formulaga ega bo'lamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Endi $f(x)=x$ xususiy holni ko'ramiz. Bu holda $df=dx$ va (2) formulaga asosan $dx=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$. Demak, x erkli o'zgaruvchi (argument) uchun $\Delta x=dx$, ya'ni orttirma va differensial o'zaro teng bo'ladi. Shu sababli differensial uchun (2) formulani

$$df=f'(x)\cdot dx=f'(x)dx \quad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, df funksiya differensialini topish uchun uning $f'(x)$ hosilasini dx argument differensialiga ko'paytirish kifoya. Masalan,

$$dx^2=(x^2)'dx=2xdx,\ dx^3=(x^3)'dx=3x^2dx,\ d\sin x=(\sin x)'dx=\cos x dx.$$

(3) formuladan yoki 1-teoremadan ko'rinadiki, agar biror x nuqtada $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, unda df differensial ham mavjuddir. Bu yerda teskari teorema ham o'rinli bo'ladi.

Teorema: Agar $y=f(x)$ funksiyaning biror x nuqtada df differensiali mavjud bo'lsa, uning shu nuqtadagi $f'(x)$ hosilasi ham mavjud va

$$f'(x)=\frac{df}{dx} \quad (4)$$

formula bilan topilishi mumkin.

Isbot: Differensial ta'rifidagi (1) tenglikka asosan, ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$\Delta f = A\cdot\Delta x + o(\Delta x) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + o(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+o(1)) = A + \lim_{\Delta x\to 0} o(1) = A + 0 = A.$$

Demak, (1) tenglik o'rinli, ya'ni df differensial mavjud bo'lsa, unda $f'(x)$ hosila mavjud va $f'(x)=A$ bo'ladi. Ammo, ta'rifga asosan, $A\cdot\Delta x=Adx=df$ bo'lgani uchun $A=df/dx$ deb yozish mumkin va bundan (4) formula o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Bu ikkala teoremadan $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning chekli $f'(x)$ hosilasi mavjud bo'lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli hosilaga ega funksiyani differensiallanuvchi deb ataganimiz bejiz emas va ba'zan hosila (4) kasr ko'rinishida ham belgilanadi.

(3) tenglik va hosila olish qoidalaridan differensiallarni hisoblashning quyidagi qoidalari kelib chiqadi:

1. $dC=0$, C – const.;

2. $d[Cf(x)] = Cdf(x)$;

3. $d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x)$;

4. $df(x)g(x)= f(x)dg(x)+g(x)df(x)$;

5. $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x)\neq 0).$

Endi $y=f(u)$, $u=u(x)$, murakkab funksiyaning differensialini hisoblash masalasini qaraymiz. Bunda tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi deb qaraladi. Differensial hisoblashning (3) formulasi va murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasiga asosan ushbu tenglikni hosil etamiz:

$$df(u)=(f(u))'_x dx = f'(u)\cdot u'dx = f'(u)\cdot du \quad (5)$$

Bu yerdan, (3) va (5) formulalarni taqqoslab, oddiy va murakkab funksiya differensiali bir xil usulda hisoblanishini ko'ramiz. Bu ***differensialning invariantlik xossasi*** deyiladi.

Masalan, $y=\cos\sqrt{x}$ murakkab funksiya uchun

$$dy=d\cos\sqrt{x}=(\cos\sqrt{x})'dx=-\sin\sqrt{x}\,(\sqrt{x})'dx=-\sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}).$$

Differensialni taqribiy hisoblashlarda qo'llanilishi. (1) tenglik va differensial ta'rifidan foydalanib,

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)=df+o(\Delta x) \quad (6)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikdan argument orttirmasi Δx kichik son bo'lganda, funksiya orttirmasi Δf va differensiali df qiymatlari bir-biriga yaqin, ya'ni $\Delta f \approx df$ taqribiy tenglik o'rinli bo'lishini ko'ramiz[53].

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning $x=40$ va $\Delta x=dx=0{,}01$ bo'lgandagi Δf orttirmasi va df differensialini topamiz. Bu yerda

$$\Delta f=2x\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot 40\cdot 0{,}01+0{,}0001=0{,}8001,$$
$$df=2xdx=2\cdot 40\cdot 0{,}01=0{,}8.$$

Bu natijalardan ko'rinib turibdiki, Δf va df qiymatlarining farqi atigi 0,0001 bo'lib, bir-biriga juda yaqin.

Shu sababli (6) tenglik bo'yicha funksiya uchun ushbu taqribiy hisoblash formulasini yozish mumkin:

$$\Delta f\approx df \Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x \quad (7)$$

(7) formula yordamida, funksiyaning ma'lum yoki oson hisoblanadigan $f(x)$ qiymatidan foydalanib, uning noma'lum yoki hisoblanishi qiyin bo'lgan $f(x+\Delta x)$ qiymati taqribiy hisoblanadi.

Misol sifatida sin31° taqribiy qiymatini topamiz. Buning uchun $f(x)=\sin x$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyada $x=30°$, $x+\Delta x=31°$ deb olamiz. Bu holda $\Delta x=1°$ va $f'(x)=\cos x$ bo'lgani uchun (7) formulaga asosan, quyidagi natijani olamiz:

$$\sin 31^0=\sin(30^0+1^0)\approx\sin 30^0+\cos 30^0\cdot 1^0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0{,}515.$$

Bu yerda $\sqrt{3}\approx 1.73$, $\pi\approx 3.14$ deb olindi. Bu natijani aniqligi to'g'risida xulosa chiqarish uchun trigonometrik funksiyalarning

[53] Sultonov J.S. Oliy matematika (Hosila va differensial). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2010. – B. 72.

jadvaliga asosan, to‘rt xona aniqlikda $\sin 31^0 \approx 0.5150$ ekanligini ko‘rsatib o‘tamiz.

Differensial yordamida funksiyalar uchun taqribiy formulalar ham hosil qilish mumkin. Bu maqsadda (7) formulada $x=0$ deb olib, kichik Δx qiymatlari uchun

$$f(\Delta x) \approx f(0)+f'(0)\Delta x$$

natijani olamiz. Bu yerda Δx o‘rniga x qo‘yib, argumentning kichik qiymatlarida $y=f(x)$ funksiya uchun

$$f(x) \approx f(0)+f'(0)\cdot x \quad (8)$$

taqribiy formulaga ega bo‘lamiz. Masalan, x kichik son bo‘lganda,

$$\sin x \approx x,\ (1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x,\ e^x \approx x,\ \ln(1+x) \approx x,\ \mathrm{tg}x \approx x \quad (9)$$

taqribiy formulalardan foydalanish mumkin.

Yuqori tartibli hosila va differensiallar. Endi funksiyaning yuqori tartibli hosilasi va differensiali tushunchalarini kiritamiz.

Ma’lumki, $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, uning hosilasi $f'(x)$ shu oraliqda aniqlangan yangi bir funksiya bo‘ladi. Shu sababli $f'(x)$ funksiyaning hosilasi to‘g‘risida so‘z yuritish mumkin.

Ta’rif: Agar $f'(x)$ hosila differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, uning hosilasi $y=f(x)$ ***funksiyaning II tartibli hosilasi*** deyiladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)$, y'' yoki $f^{(2)}(x)$, $y^{(2)}$ kabi belgilanadi va ta’rifga asosan, $f''(x)=[f'(x)]'$ formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $f(x)=x^4$ funksiya uchun $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$ bo‘ladi.

Agar moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $S=S(t)$ tenglama bilan harakatlanayotgan bo‘lsa, unda $S'(t)$ uning t vaqtdagi $v(t)$ oniy tezligini ifodalashini ko‘rib o‘tgan edik. Unda $S''(t)$ nuqtaning harakat davomidagi tezligini o‘zgarish tezligini, ya’ni $a(t)$ tezlanishini ifodalaydi.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan tarzda differensiallanuvchi II tartibli $f''(x)$ hosila bo‘yicha ***III tartibli hosila*** $[f''(x)]'$ kabi aniqlanadi va $f'''(x)$ yoki $f^{(3)}(x)$ kabi belgilanadi. Bu jarayonni davom ettirilib, $f^{(n)}(x)$ ***n-tartibli hosila*** tushunchasi quyidagi rekkurent formula orqali kiritiladi:

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))',\ n=2,3,4,\ \ldots \quad (10)$$

Izoh: Hosila tartibi tushunchasi kiritilgach, qulaylik uchun $f(x)$ funksiyaning o'zi 0-tartibli hosila, ya'ni $f(x)=f^{(0)}(x)$, $f'(x)$ esa I tartibli hosila, ya'ni $f'(x)=f^{(1)}(x)$ deb qaraladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $f^{(0)}(x)=x^3$, $f^{(1)}(x)=3x^2$, $f^{(2)}(x)=6x$, $f^{(3)}(x)=6$ va $n\geq 4$ holda $f^{(n)}(x)=0$ bo'ladi. Umuman olganda, $f(x)=P_m(x)$ – m-darajali ko'phad bo'lsa, unda $n>m$ holda $f^{(n)}(x)=0$ bo'ladi.

Ta'rif: Agar $y=f(x)$ funksiya uchun n–tartibli hosila mavjud bo'lsa, u ***n marta differensiallanuvchi*** funksiya deb ataladi.

n–tartibli hosila ta'rifini ifodalovchi (10) formuladan ko'rinadiki, umuman olganda, $f^{(n)}(x)$ berilgan funksiyadan ketma-ket n marta hosila olish orqali birin-ketin topiladi. Ammo ba'zi funksiyalar uchun n–tartibli hosila ifodasini birdaniga yozish mumkin. Masalan,

$$(e^x)^{(n)}= e^x,\ (a^x)^{(n)}=a^x \ln^n a,\ (\sin x)^{(n)}=\sin(x+\pi n/2),$$
$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\pi n/2).$$

n–tartibli hosila hisoblanadigan (11) formula va hosila olish qoidalaridan foydalanib, n marta differensiallanuvchi $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar uchun

$$(C)^{(n)}=0\ (C\text{-const}),\ (C\cdot u)^{(n)}=C\cdot u^{(n)},\ (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

formulalar o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Ammo $y=uv$ ko'paytmaning n–tartibli hosilasi uchun formula murakkab bo'lib, quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\cdots+nu'v^{(n-1)}+v^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$$

Bu tenglik ***Leybnits formulasi*** deyiladi va unda qatnashadigan binomial koeffitsiyentlar

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$$

formula bilan hisoblanishini eslatib o'tamiz.

Berilgan $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, uning differensiali $df=f'(x)dx$ ko'rinishda bo'ladi. Demak, df differensialning qiymati x argument va $dx=\Delta x$ argument orttirmasiga (differensialiga) bog'liq bo'ladi. Biz argument differensiali dx ixtiyoriy, ammo o'zgarmas va x argumentning qiymatiga bog'liq bo'lmagan son deb qaraymiz. Bu holda df differensial x argumentning biror funksiyasidan iborat bo'ladi va shu sababli uning differensiali to'g'risida so'z yuritish mumkin.

Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning differensiali df o'z navbatida, differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, uning differensiali $y=f(x)$ funksiyaning ***ikkinchi tartibli differensial*** deb ataladi[54].

$y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali d^2f kabi belgilanadi va ta'rifga asosan, quyidagi formula bilan topiladi:

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)dx)=[f'(x)dx]'dx=[f'(x)]'\,dx\,dx=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2.$$

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali uning II tartibli hosilasi orqali

$$d^2f=f''(x)dx^2,\ dx^2=(dx)^2,$$

formula yordamida topiladi. Xuddi shunday tarzda $y=f(x)$ funksiyaning ***n-tartibli differensiali*** d^nf

$$d^nf=d(d^{n-1}f)=f^{(n)}(x)(dx)^n=f^{(n)}(x)dx^n,\ n=2,3,4,\ \ldots \quad (11)$$

kabi aniqlanadi va hisoblanadi.

Bunda funksiyaning o'zi $f=d^0f$ – 0-tartibli, differensiali esa $df=d^1f$ – 1- tartibli differensial singari qaraladi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $df=3x^2dx$, $d^2f=6xdx^2$, $d^3f=6dx^3$ va $n\geq4$ holda $d^nf=0$ bo'ladi.

Yuqori tartibli differensiallardan foydalanib, yuqori tartibli hosilalarni

$$f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2},\quad f'''(x)=\frac{d^3f}{dx^3},\cdots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$$

kabi yozish mumkin.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash. Bir qator masalalarni yechishda funksiyaning parametrik ko'rinishdagi ifodasi qulay bo'ladi.

Ta'rif: Agar x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish bevosita emas, balki uchinchi bir t o'zgaruvchi yordamida biror $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$, funksiyalar orqali bevosita berilgan bo'lsa, unda x argumentning y funksiyasi ***parametrik*** ko'rinishda berilgan, t esa ***parametr*** deyiladi.

Masalan, $x=t^3=\varphi(t)$, $y=t^6=\psi(t)$, $t\in(-\infty,\ \infty)$, parametrik ko'rinishda bavosita berilgan funksiya $y=f(x)=x^2$, $x\in(-\infty,\ \infty)$, ko'rinishdagi bevosita berilgan funksiyani ifodalaydi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning x bo'yicha hosilasini topish uchun dastlab uni $y=f(x)$ ko'rinishda yozib, so'ngra uning

[54] Sultonov J.S. Oliy matematika (Hosila va differensial). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2010. – B. 76.

hosilasini hisoblab topish mumkin. Masalan, yuqoridagi misolda parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi $y'=f'(x)=2x$ ekanligi oson topiladi. Ammo har doim ham bu usul qulay bo‘lmaydi, chunki parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyani $y=f(x)$ ko‘rinishda yozish qiyin yoki $y=f(x)$ funksiya ko‘rinishi juda murakkab bo‘lib, undan hosila olish noqulay bo‘lishi mumkin. Shu sababli parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar orqali topish masalasi paydo bo‘ladi. Bizni qiziqtiradigan $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar orqali parametrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. Agar $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar keraklicha marta differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda hosilani differensiallar orqali ifodasi va differensiallash qoidalaridan foydalanib,

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ (12)$$

$$y''_x=(y'_x)'_x=\frac{d(y'_x)}{dx}=\frac{d(y'_x)/d(t)}{dx/d(t)}=\frac{[\psi'(t)/\varphi'(t)]'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}\quad (13)$$

formulalar o‘rinli ekanligini ko‘ramiz. Bu formulalar parametrik ko‘rinishda berilgan funksiya hosilalarini topishni ifodalaydi.

Masalan, $x=2\cos t$ va $y=3\sin t$, $t\in[0,\pi/2]$, funksiyalar orqali parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyani qaraymiz. Bunda

$$\frac{x}{2}=\cos t,\ \ \frac{y}{3}=\sin t\Rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

tenglik o‘rinli va shu sababli bu funksiya yarim o‘qlari $a=2$ va $b=3$ bo‘lgan ellipsni I chorakdagi bo‘lagini ifodalaydi. Bu funksiya uchun $y'(x)$ va $y''(x)$ hosilalarni (12) va (13) formulalardan topamiz:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3\cos t}{-2\sin t}=-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t,\quad y''_x=\frac{y''x'-y'x''}{[x']^3}=\frac{6\sin^2 t+6\cos^2 t}{-8\sin^3 t}=\frac{-3}{4\sin^3 t}$$

Xulosa. Funksiya hosilasi matematik tahlilning asosiy tushunchasi bo‘lib, juda ko‘p nazariy va amaliy tatbiqlarga egadir. Notekis harakatda tezlik, egri chiziqqa urinmaning burchak koeffitsiyenti, iqtisodiyotda mehnat unumdorligi yoki ishlab chiqarish sur’ati hosila yordamida aniqlanadi. Kelgusida hosila funksiya xususiyatlarini o‘rganishning kuchli quroli ekanligini ko‘ramiz. Har qanday funksiya ham hosilaga ega bo‘lavermaydi. Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas. Hosilasi mavjud funksiya differensiallanuvchi deyiladi. Agar funksiya biror oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, unda u bu oraliqda uzluksiz bo‘ladi.

Istalgan differensiallanuvchi funksiya hosilasini uning ta'rifidan kelib chiqadigan algoritm bo'yicha bevosita hisoblash noqulay va murakkab bo'ladi. Shu sababli funksiyalar hosilasini hisoblash uchun differensiallash qoidalaridan foydalaniladi. Ular yordamida funksiyalar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasining hosilalarini topish mumkin. Bundan tashqari, murakkab va teskari funksiyalarning hosilalarini hisoblash formulalari ham mavjud. Ayrim hollarda funksiya hosilasini logarifmik differensiallash usulidan foydalanib osonroq hisoblash mumkin. Barcha asosiy elementar funksiyalar differensiallanuvchi, ularning hosilalari va differensiallash qoidalari hosilalar jadvalini tashkil etadi. Bu jadvaldan foydalanib, ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiyaning hosilasini hisoblab bo'ladi.

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatan chiziqli qismi mavjud bo'lsa, u differensial deb ataladi. Funksiya differensiali mavjud bo'lishi uchun uning hosilasi mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir. Shu sababli ham hosilaga ega funksiyalar differensiallanuvchi deyiladi. Bu holda funksiya differensiali uning hosilasini argument orttirmasiga (differensialiga) ko'paytirish orqali topilishi mumkin. Differensial yordamida funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblash va natijalarni baholash mumkin.

Funksiyaning hosilasi yana biror funksiyadan iborat bo'ladi va shu sababli uning hosilasi to'g'risida so'z yuritib bo'ladi. Agar bu hosila mavjud bo'lsa, u berilgan funksiyaning II tartibli hosilasi deb ataladi. Shunday tarzda n-tartibli ($n \geq 2$) hosilalar aniqlanadi. Shuningdek n-tartibli ($n \geq 2$) differensiallar tushunchasi ham qaraladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Oniy tezlik masalasi qanday ifodalanadi?
2. Urinma haqidagi masala qanday mazmunga ega?
3. Mehnat unumdorligi masalasi nimadan iborat?
4. Funksiyaning nuqtadagi hosilasi ta'rifi qanday ifodalanadi?
5. Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
6. Hosilaning geometrik ma'nosi qanday ifodalanadi?
7. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi qanday misol bilasiz?
8. Qachon funksiya differensiallanuvchi deyiladi?
9. Differensiallanuvchi funksiyaning uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
10. Uzluksiz funksiya differensiallanuvchi bo'lishi shartmi?
11. Qachon funksiya oraliqda differensiallanuvchi deyiladi?

14.Funksiya hosilasini topish algoritmi qanday qadamlardan iborat?

15.O'zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?

16.Funksiyalar algebraik yig'indisining hosilasi qanday hisoblanadi?

17.Funksiyalar algebraik yig'indisi differensiallanuvchi bo'lsa, qo'shiluvchilar differensiallanuvchi bo'lishi shartmi?

18.Funksiyalar ko'paytmasining hosilasi qanday topiladi?

19.Differensiallashda o'zgarmas ko'paytuvchini nima qilish mumkin?

20.Funksiyalar nisbatining hosilasi qanday hisoblanadi?

21.Teskari funksiyaning hosilasi qaysi shartda mavjud va qanday topiladi?

22.Murakkab funksiyaning hosilasi qanday hisoblanadi?

23.Logarifmik differensiallash usulining mohiyati nimadan iborat?

24.Darajali-ko'rsatkichli funksiya qanday ko'rinishda bo'ladi?

25.Darajali-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi qaysi formula bilan aniqlanadi?

26.Elementar funksiyalarning hosilasi qanday funksiyadan iborat bo'ladi?

27. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini yozing.

28.Funksiya differensiali deb nimaga aytiladi?

29.Differensial mavjudligini zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?

30.Funksiya orttirmasi va differensiali orasida qanday bog'lanish mavjud?

31.O'zgarmas son differensiali nimaga teng?

32.Algebraik yig'indining differensiali qanday topiladi?

33.Ko'paytmaning differensiali qanday hisoblanadi?

34.Bo'linmani differensiallash qoidasi qanday ifodalanadi?

35.Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi nimadan iborat?

Testlardan namunalar:

1.$y=f(x)$ funksiyaning Δx argument orttirmasiga mos keladigan Δf orttirmasi qayerda to'g'ri ifodalangan?

A) $\Delta f=f(x)-f(\Delta x)$; B) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(\Delta x)$; C) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$;
D) $\Delta f=f(x+\Delta x)-f((x-\Delta x)$; E) $\Delta f=f(x)\Delta x$.

2. $y=x^3$ funksiyaning Δy orttirmasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $3x^2\Delta x+(\Delta x)^3$; B) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; C) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2$;

D) $3x(\Delta x)^2(x+3\Delta x)$; E) $3x\Delta x(x+\Delta x)+(\Delta x)^3$.

3. $y=x^3$ funksiya uchun $\Delta y/\Delta x$ orttirmalar nisbatini toping.

A) $3x^2+(\Delta x)^2$; B) $3x(x+3\Delta x)$; C) $3x^2+3x\Delta x$;

D) $3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$; E) $3x\Delta x(x+\Delta x)+(\Delta x)^3$.

4. $y=f(x)$ funksiya hosilasini ta'rif bo'yicha hisoblashda quyidagilardan qaysi biri bajarilmaydi?

A) argument orttirmasi Δx hisoblanadi;

B) funksiya orttirmasi Δf hisoblanadi;

C) orttirmalar nisbati $\Delta f/\Delta x$ hisoblanadi;

D) $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo'lgandagi limiti hisoblanadi;

E) ko'rsatilganlarning barchasi bajariladi.

5. $y=f(x)$ funksiya hosilasining ta'rifi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$; B) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta f}$; C) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

D) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{\Delta x}{\Delta f}$; E) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta f\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta f}$.

6. Hosilaning mexanik ma'nosi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) harakatda bosib o'tilgan masofa; B) harakatda sarflangan vaqt;

C) harakatda oniy tezlik; D) harakatda to'xtash holati;

E) to'g'ri javob keltirilmagan.

7. $y=x^3$ kubik parabolaning $x_0=-1$ abssissali nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini aniqlang.

A) $y=3x+2$; B) $y=3x+4$; C) $y=3x-2$; D) $y=3x-4$; E) $y=3x$.

8. $y=x^2$ funksiyaning $x=5$ nuqtadagi elastikligini hisoblang.

A) 1; B) 2; C) 5; D) 8; E) 10.

9. Differensiallash qoidasi qayerda xato ko'rsatilgan?

A) $(Cu)'=Cu'$ (C-const.); B) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; C) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

D) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v+uv'}{v^2}$; E) $(f(u))'=f'(u)u'$.

10. Ikkita u va v differensiallanuvchi funksiyalar u/v nisbatining hosilasini hisoblash formulasi to'g'ri yozilgan javobni ko'rsating.

A) $\frac{u'v+uv'}{v}$; B) $\frac{u'v+uv'}{v^2}$; C) $\frac{u'v-uv'}{v^2}$; D) $\frac{u'v-uv'}{v}$; E) $\frac{u'v'-uv}{v^2}$.

11.$y=x^2/\sin x$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y'=x^2/\cos x$; B) $y'=2x/\sin x$; C) $y'=2x/\cos x$;

D) $y'=x(2\sin x+x\cos x)/\sin^2 x$; E) $y'=x(2\sin x-x\cos x)/\sin^2 x$.

12.Ikkita u va v differensiallanuvchi funksiyalar $u\cdot v$ ko'paytmasining hosilasini hisoblash formulasi qayerda to'g'ri yozilgan?

A) $u'v'$; B) $u'v'+uv$; C) $u'v+uv'$; D) $u'v-uv'$; E) $u'v'-uv$.

13.$y=x^2\sin x$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y'=x^2\cos x$; B) $y'=x(x\sin x-2\cos x)$; C) $y'=2x\sin x$;

D) $y'=x(x\cos x+2\sin x)$; E) $y'=x(x\cos x-2\sin x)$.

14.Agar $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ mavjud va chekli bo'lsa, uning df differensiali qanday topiladi?

A) $df=f'(x)+dx$; B) $df=f'(x)-dx$; C) $df=f'(x)/dx$;

D) $df=f'(x)dx$; E) $df=f'(x)$.

15.Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya argumentining orttirmasi Δx kichik bo'lganda, uning differensiali df va orttirmasi Δf orasidagi munosabat qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $\Delta f=df$; B) $\Delta f>df$; C) $\Delta f<df$; D) $\Delta f\cdot df>0$; E) $\Delta f\approx df$.

16.Differensiallanuvchi funksiyaning differensialini topish qoidasi qayerda noto'g'ri ko'rsatilgan?

A) $dCf=Cdf$; B) $d(u+v)=du+dv$; C) $d(u-v)=du-dv$;

D) $d(uv)=udv-vdu$; E) $df(u)=f'(u)du$.

17.$y=\cos(3x+4)$ funksiya differensiali dy qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $dy=\sin(3x+4)dx$; B) $dy=4\sin(3x+4)dx$; C) $dy=-3\sin(3x+4)dx$;

D) $dy=-4\sin(3x+4)dx$; E) $dy=3\sin(3x+4)dx$.

18.$y=x\ln x$ funksiyaning dy differensialini toping.

A) $dy=xdx$; B) $dy=\ln x dx$; C) $dy=(1/x)dx$;

D) $dy=(1+\ln x)dx$; E) $dy=(1-\ln x)dx$.

19.Funksiyani differensial yordamida taqribiy hisoblash formulasi qayerda to'g'ri ifodalangan?

A) $f(x+\Delta x)\approx f(x)df$; B) $f(x+\Delta x)\approx f(x)+df$; C) $f(x+\Delta x)\approx f(x)/df$;

D) $f(x+\Delta x)\approx df/f(x)$; E) $f(x+\Delta x)\approx f(x)\pm df$.

20.Qaysi funksiyaning n-tartibli hosilasi noto'g'ri yozilgan?

A) $(e^x)^{(n)}=e^x$; B) $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$; C) $(x^n)^{(n)}=n!$;

D) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$; E) barcha hosilalar to‘g‘ri yozilgan.

21.$y=x\ln x$ funksiyaning II tartibli y''hosilasi topilsin.

A) $y''=1+\ln x$; B) $y''=\ln x$; C) $y''=1$; D) $y''=1/x$; E) $y''=1-\ln x$.

22.$y=xe^x$ funksiyaning n-tartibli hosilasi $y^{(n)}$ topilsin.

A) $y^{(n)}= xe^x$; B) $y^{(n)}= nxe^x$; C) $y^{(n)}=(x+n)e^x$; D) $y^{(n)}=(x-n)e^x$;

E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

23.$y=(t+1)^2$, $x=t^2+1$ parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning $y'(x)$ hosilasini toping.

A) $y'=\frac{1}{t}$; B) $y'=1+\frac{1}{t}$; C) $y'=1-\frac{1}{t}$; D) $y'=t+\frac{1}{t}$; E) $y'=t-\frac{1}{t}$.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. $f(x)=n^2x+e^{nx}$ funksiyaning argument orttirmasi Δx bo‘lgandagi Δf orttirmasini toping.

2. $f(x)=n^2x+nx^2$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini ta’rif asosida toping.

3. Quyidagi funksiyalarning hosilasini differensiallash qoidalari yordamida hisoblang:

a) $f(x)=nx^n+(n+1)\sin x-n^2\cos x-2n^x$; *b*) $f(x)=x^ne^x$; *c*) $f(x)=\frac{\ln x}{x+n}$.

4. Ushbu murakkab funksiyalarning hosilasini hisoblang:

a) $f(x)=\ln(nx+\cos x)$; *b*) $f(x)=\sin^{2n}(x^2+2nx+1)$.

5. $f(x)=(x+n)^{nx}$ darajali-ko‘rsatgichli funksiya hosilasini toping.

6. Ushbu funksiyaning III tartibli $f'''(x)$ hosilasini hisoblang: $f(x)=n\sin x+\cos nx-x^n$.

7. $f(x)=e^x\cos nx$ funksiyaning II tartibli $f''(x)$ hosilasini hisoblang.

8. Differensial yordamida $f(x)=\sqrt{n^2+nx}$ funksiyaning x=0.05 nuqtadagi taqribiy qiymatini toping.

9. $y=(t+1)^n$, $x=t^{2n}+1$ parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning $y'(x)$ hosilasini toping.

VI BOB. INTEGRAL

Integral – har xil jarayon va hodisalarning hajmdor qo'yilmasi bo'lib, bu mo'jizani yaratgan Leybnits va Nyuton ijodiy fantaziyasining aqlga sig'maydigan portlashining mevasidir.

Feynberg E.L.

REJA:

- Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Integrallar jadvali
- Aniqmas integralni hisoblash usullari. Kvadrat uchhadli ayrim integrallarni hisoblash
- Aniq integral va uning xossalari
- Aniq integrallarni hisoblash usullari
- Aniq integrallarning ayrim tatbiqlari

Tayanch iboralar: boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integral ostidagi funksiya, integral ostidagi ifoda, integrallash o'zgaruvchisi, aniqmas integralning geometrik ma'nosi, integrallash amali, integralning chiziqlilik xossasi, integrallar jadvali, yoyish usuli, differensial ostiga kiritish usuli, o'zgaruvchilarni almashtirish usuli, bo'laklab integrallash usuli, integral yig'indi, aniq integral, integral ostidagi funksiya, integral ostidagi ifoda, integrallash o'zgaruvchisi, quyi chegara, yuqori chegara, integrallanuvchi funksiya, integralning geometrik ma'nosi, integralning mexanik ma'nosi, integralning iqtisodiy ma'nosi, Nyuton-Leybnits formulasi, bo'laklab integrallash formulasi, o'zgaruvchilarni almashtirish usuli.

6.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Integrallar jadvali

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Differensial hisob mavzusida berilgan $y=F(x)$ funksiyasining $F'(x)=f(x)$ hosilasini topish masalasi bilan shug'ullangan edik. Ammo bir qator savollarga javob izlashda teskari, ya'ni $y=F(x)$ funksiyani uning ma'lum bo'lgan $F'(x)=f(x)$ hosilasi bo'yicha topish masalasiga duch kelamiz.

Masalan, moddiy nuqtaning harakat tenglamasi $S=S(t)$ berilgan bo'lsa, unda t_0 vaqtgacha bosib o'tilgan masofa $S_0=S(t_0)$ kabi aniqlanadi. Ammo harakat tenglamasi $S=S(t)$ noma'lum bo'lib, uning hosilasi $S'(t)=v(t)$, ya'ni oniy tezlik berilgan holda $S_0=S(t_0)$ masofani qanday topish masalasi paydo bo'ladi. Bu kabi masalalar integral tushunchasiga olib keladi va uni o'rganishga kirishamiz.

Ta'rif: Biror chekli yoki cheksiz (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada differensiallanuvchi va hosilasi

$$F'(x)=f(x) \quad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiya uchun ***boshlang'ich funksiya*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, $x\in(-\infty,\infty)$, funksiya uchun $F(x)=a^x/\ln a$ boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki ixtiyoriy x uchun

$$F'(x)=(a^x/\ln a)'=a^x\ln a/\ln a=a^x=f(x)$$

tenglik o'rinlidir.

Xuddi shunday $F(x)=x^5/5$ funksiya barcha x nuqtalarda $f(x)=x^4$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki bunda (1) tenglik bajariladi.

Berilgan $y=F(x)$ funksiyaning $y'=F'(x)=f(x)$ hosilasi bir qiymatli aniqlanadi. Masalan, $y=x^2$ funksiya yagona $y'=2x$ hosilaga ega. Ammo $y=f(x)$ funksiyaning boshlang'ich $F(x)$ funksiyasini topish masalasi bir qiymatli hal qilinmaydi. Haqiqatan ham, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy C o'zgarmas son uchun $F(x)+C$ funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi[55]. Haqiqatan ham, differensiallash qoidalariga asosan,

$$(F(x)+C)'=F'(x)+(C)'=f(x)+0=f(x)$$

va ta'rifga asosan, $F(x)+C$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

Masalan, $f(x)=2x$ uchun ixtiyoriy C o'zgarmasda x^2+C boshlang'ich funksiyalar bo'ladi.

Demak, berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $F(x)+C$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p boshlang'ich funksiya mavjud bo'ladi. Bunda $F(x)$ birorta boshlang'ich funksiyani, C esa ixtiyoriy o'zgarmas sonni ifodalaydi.

Ta'rif: Agar $F(x)$ biror (a,b) oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, unda $F(x)+C$ (C – ixtiyoriy o'zgarmas son)

---

[55] Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2009. – B. 21.

funksiyalar to‘plami shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning ***aniqmas integrali*** deyiladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi va ta’rifga asosan, birorta $F(x)$ boshlang‘ich funksiya bo‘yicha

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (2)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas son ekanligini yana bir marta eslatib o‘tamiz.

(2) tenglikda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ ***integral ostidagi funksiya***, $f(x)dx$ ***integral ostidagi ifoda***, x esa ***integrallash o‘zgaruvchisi*** deyiladi. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $\int f(x)dx$ aniqmas integralini topish amali bu funksiyani ***integrallash*** deb ataladi.

Izoh: Berilgan $f(x)$ uchun qaysi shartda $F(x)$ boshlang‘ich funksiya, demak $\int f(x)dx$ aniqmas integral mavjud.

Yuqorida topilgan boshlang‘ich funksiyalar bo‘yicha quyidagi aniqmas integrallarni yozish mumkin:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C, \quad \int 2x dx = x^2 + C.$$

Aniqmas integral ta’rifini ifodalovchi (2) tenglikdan ko‘rinadiki, aniqmas integral $y=F(x)+C$ (C – ixtiyoriy o‘zgarmas son) funksiyalar sinfini ifodalaydi. Shu sababli, geometrik nuqtai-nazardan, aniqmas integral $y=F(x)$ funksiya grafigini OY koordinata o‘qi bo‘ylab parallel ko‘chirishdan hosil bo‘ladigan chiziqlar sinfidan iborat bo‘ladi (32-rasm).

Aniqmas integral xossalari. Aniqmas integral ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

I. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya’ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

II. Aniqmas integral differensiali integral ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

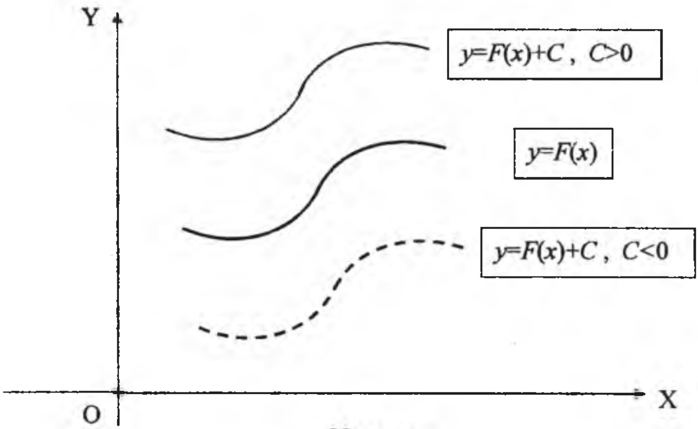
Izoh: Bu yerdan differensiallash amali integrallash amaliga teskari amal ekanligini ko‘ramiz.

III. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy C o‘zgarmasning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

IV. Biror funksiyaning differensialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan o'zgarmas yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$



32-rasm

Izoh: Bu yerdan integrallash amali differensiallash amaliga o'zgarmas son aniqligida teskari amal ekanligini ko'ramiz.

V. O'zgarmas k ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Bu tenglik o'zgarmas son aniqligida tushuniladi.

VI. Ikkita funksiya algebraik yig'indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Bu yerda ham tenglik o'zgarmas son aniqligida tushuniladi.

Izoh: VI xossa chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig'indisi uchun ham o'rinli bo'ladi.

Ta'rif: V va VI xossalar aniqmas integralning ***chiziqlilik xossalari*** deyiladi.

Aniqmas integralning chiziqlilik xossalarini bitta

$$\int [Af(x)+Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx \quad (3)$$

tenglik orqali ham ifodalash mumkin.

VII. Agar a va b o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, unda quyidagi tasdiq o‘rinlidir:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$ [56].

Integrallar jadvali. Hosilalar jadvali, oldin hisoblangan hosilalar va aniqmas integral ta’rifidan foydalanib, asosiy integrallar jadvalini yozamiz. Bunda aniqmas integral javobining to‘g‘riligini tenglikning o‘ng tomonidan hosila olish orqali tekshirish mumkin. Natijada integral ostidagi funksiya hosil bo‘lishi kerak. Masalan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

integral javobi to‘g‘riligini tekshiramiz. Murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}(x^2 \pm a^2)'\right] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}+x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Differensiallash natijasida integral ostidagi funksiya hosil bo‘ldi. Demak, integral javobi to‘g‘ri ko‘rsatilgan.

Integrallar jadvali:

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
6. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\int e^x dx = e^x + C$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
10. $\int \cos x dx = \sin x + C$

[56] Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo‘llanma. – Samarqand, 2009. – B. 44

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x)dx = \mathrm{tg}x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

13. $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

14. $\int \mathrm{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

15. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C \\ -\mathrm{arcctg}x + C \end{cases}$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$ 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Bu jadval, integralning ko'rib o'tilgan xossalari va kelgusida qaraladigan integrallash usullaridan foydalanib, juda ko'p integrallarni hisoblash mumkin.

6.2. Aniqmas integralni hisoblash usullari. Kvadrat uchhadli ayrim integrallarni hisoblash

Oldingi mavzularda differensiallanuvchi har qanday elementar funksiyaning hosilasini hosilalar jadvali va differensiallash qoidalari yordamida topish mumkin ekanligini ko'rib o'tgan edik. Bunda elementar funksiyaning hosilasi yana elementar funksiyadan iborat bo'ladi. Endi berilgan funksiyani integrallash masalasiga kelsak, vaziyat ancha murakkab bo'ladi. Bunda berilgan elementar funksiya uchun boshlang'ich funksiya (aniqmas integral) mavjudligini aniqlash bir masala bo'lib, integral mavjudligi ma'lum taqdirda uni hisoblash ancha qiyin muammo bo'ladi. Bundan tashqari, bir qator elementar funksiyalarning aniqmas integrali elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Masalan,

$$I_1 = \int e^{-x^2} dx, \quad I_2 = \int \cos x^2 dx, \quad I_3 = \int \frac{dx}{\ln x} (x > 0, x \neq 1), \quad I_4 = \int \frac{\sin x}{x} dx$$

kabi integrallar mavjud, ammo elementar funksiya bo'lmaydi. Bu integrallar bilan aniqlanadigan funksiyalar maxsus funksiyalar deb ataladi va ular turli amaliy masalalarni yechishda qo'llaniladi. Masalan, I_1 orqali aniqlanadigan maxsus funksiya ***Puasson*** (farang olimi, 1781-1840) integrali deb ataladi va ehtimolliklar nazariyasida, diffuziya va issiqlik o'tkazish masalasini o'rganishda keng qo'llaniladi. I_2 ***Frenel*** (farang fizigi va matematigi, 1788-1827) integrali deyiladi va optika masalalarini yechishda juda ko‘p qo‘llaniladi. I_3 va I_4 mos ravishda integral logarifm va integral sinus deb ataladi[57].

Shunday qilib, aniqmas integralni hisoblashning umumiy usuli mavjud bo‘lmasdan, har bir integral o‘ziga xos bir usulda topilishi mumkin. Ammo ma’lum bir hollar uchun integralni hisoblash usullari ishlab chiqilgan va ular bilan tanishishga o‘tamiz.

Yoyish usuli. Bu usulda dastlab berilgan integral ostidagi murakkabroq $f(x)$ funksiya soddaroq (masalan, integrallari bevosita jadval orqali topiladigan) $f_k(x)$ (k=1,2,…,n) funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasiga yoyiladi. So‘ngra bu chiziqli yoyilma integrali oldingi mavzuda ko‘rilgan integralning chiziqlilik xossalaridan foydalanilib hisoblanadi. Bu usulni matematik ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \cdots + A_n f_n(x)]dx = \\ &= A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx + \cdots + A_n \int f_n(x)dx\end{aligned} \qquad (1)$$

Misol sifatida bu usulda quyidagi integrallarni hisoblaymiz:

❖ $$\int \frac{7x-5x^2+1}{x^2}dx = \int\left(\frac{7}{x} - 5 + \frac{1}{x^2}\right)dx = 7\int\frac{dx}{x} - 5\int dx + \int\frac{dx}{x^2} =$$
$$= 7\ln|x| - 5x - \frac{1}{x} + C;$$

❖ $$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$
$$= \int\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C\ ;$$

❖ $$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \int\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]dx = \frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a} - \int\frac{dx}{x+a}\right] =$$
$$= \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Bu asosiy integrallar jadvalidagi 17-integral ekanligini eslatib o‘tamiz.

Differensial belgisi ostiga kiritish usuli. Bu usul aniqmas integralning ushbu ***invariantlik xossasi*** orqali amalga oshiriladi:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C. \quad (2)$$

[57] Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo‘llanma. – Samarqand, 2009. – B. 56.

Bu tenglik differensialning invariantlik xossasidan kelib chiqadi va unda $u=u(x)$ ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiyani ifodalaydi. Shunday qilib, integrallash o'zgaruvchisi x biror differensiallanuvchi $u=u(x)$ funksiya bilan almashtirilsa, integral javobida ham x o'rniga $u=u(x)$ funksiya qo'yiladi.

Ko'p hollarda bu usulni qo'llash uchun dastlab integral ostidagi funksiyaning bir qismi differensial ostiga kiritiladi va integral kerakli ko'rinishga keltiriladi. Misol sifatida quyidagi integrallarni hisoblaymiz.

- $\int \ln x d\ln x = (u = \ln x) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.
- $\int (x+4)^{99} dx = \int (x+4)^{99} d(x+4) = (u = x+4) =$

$$= \int u^{99} du = \frac{u^{100}}{100} + C = \frac{(x+4)^{100}}{100} + C .$$

Bu yerda $dx=d(x+4)$ ekanligidan foydalandik.

- $\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d\cos x}{\cos x} = (u = \cos x) =$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C .$$

Bu asosiy integrallar jadvalidagi 13-integral javobining isbotini ifodalaydi.

Bu usul yordamida quyidagi ko'rinishdagi integrallarni ham hisoblash mumkin:

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \ , \ \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C \ .$$

O'zgaruvchilarni almashtirish usuli. Bu usulda berilgan $\int f(x)dx$ integraldagi "eski" x o'zgaruvchidan "yangi" t o'zgaruvchiga biror $x=\varphi(t)$ funksiya orqali o'tamiz. Bunda $\varphi(t)$ funksiya ***almashtirma*** deb ataladi va u differensiallanuvchi, hosilasi uzluksiz hamda teskari funksiyasi $t=\varphi^{-1}(x)$ mavjud deb olinadi. Bu holda

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (3)$$

tenglik (o'zgarmas son aniqligida) o'rinli bo'ladi. Bunda tenglikning o'ng tomonidagi integral hisoblangandan keyin, t o'zgaruvchi o'rniga $t=\varphi^{-1}(x)$ qo'yilib, berilgan integral javobi olinadi[58].

[58] Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2009. – B. 61.

Yuqoridagi (3) tenglikni o'rinli ekanligini isbotlash uchun uning har ikki tomonining hosilalari o'zaro teng ekanligini ko'rsatish kifoya. Bunda oldingi mavzuda ko'rsatilgan aniqmas integralning I xossasiga asosan, chap tomondagi integral hosilasi integral ostidagi $f(x)$ funksiyaga teng bo'ladi. O'ng tomondagi integralda $t=\varphi^{-1}(x)$ bo'lgani uchun u x o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'ladi. Shu sababli murakkab funksiyani differensiallash qoidasi va teskari funksiya hosilasi formulasiga asosan,

$$(\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt)'_x = (\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt)'_t\cdot\frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]' = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

natijani olamiz. Demak, haqiqatan (3) tenglikning ikkala tomoni bir xil $f(x)$ hosilaga ega va shu sababli u o'rinlidir.

Berilgan integralni (3) tenglik yordamida hisoblash ***o'zgaruvchilarni almashtirish usuli*** deb ataladi. Agar (3) tenglikda $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=g(t)$ deb belgilasak, unda o'zgaruvchilarni almashtirish usulida $f(x)$ funksiyani integrallash masalasi $g(t)$ funksiyani integrallash masalasiga keladi. Ayrim hollarda $x=\varphi(t)$ yoki $t=\varphi^{-1}(x)$ almashtirmani shunday tanlash mumkinki, $g(t)$ funksiya oson integrallanadi. Bu almashtirmani tanlash berilgan integral ko'rinishiga qarab, amalga oshiriladi va integral hisoblovchini mahorati va tajribasiga bog'liq bo'ladi.

O'zgaruvchilarni almashtirish usuliga misol sifatida ushbu integrallarni hisoblaymiz.

- $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \begin{bmatrix}\sqrt{x+4}=t,\ x+4=t^2\\ x=t^2-4,\ \ dx=2tdt\end{bmatrix} = \int\frac{2tdt}{(t^2-4)\cdot t} =$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-2^2} = 2\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$$

- $$\int\frac{dx}{x^2+a^2} = (a\neq 0) = \begin{bmatrix}x=at, & t=x/a,\\ dx=d(at)=adt\end{bmatrix} = \int\frac{adt}{a^2t^2+a^2} =$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\text{arctg}\,t+C = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Xuddi shunday tarzda

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

ekanligini ko'rsatish mumkin. Bu natijalar asosiy integrallar jadvaldagi 15-16 integrallarni umumlashtiradi.

Bo'laklab integrallash usuli. Faraz qilaylik, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Bu funksiyalar ko'paytmasining differensialini yozamiz:

$$d(uv)=vdu+udv\ .$$

Bu yerdan

$$udv=d(uv)-vdu$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini hadma-had integrallab, quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu\ .$$

Bu yerdan, integralning oldingi mavzuda ko'rsatilgan IV xossasiga asosan, ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$\int udv=uv-\int vdu\ .\ (4)$$

Bu natija ***bo'laklab integrallash formulasi*** deyiladi. Ayrim hollarda (4) formulaning chap tomonidagi integralni hisoblash murakkab, o'ng tomondagi integral esa osonroq hisoblanadi.

Demak, berilgan $\int f(x)dx$ integralni (4) formula orqali bo'laklab integrallash usulida hisoblash quyidagi algoritm asosida amalga oshirilishi mumkin:

- Integral ostidagi $f(x)dx$ ifodani ikki bo'lakka ajratamiz;
- Hosil bo'lgan bo'laklardan dx qatnashganini dv, ikkinchisini esa u orqali belgilaymiz;
- Hosil qilingan dv differensial bo'yicha biror v boshlang'ich funksiyani topamiz. Buning uchun $v=\int dv$ aniqmas integralni hisoblab, unda ixtiyoriy C o'zgarmas sonni $C=0$ deb olish mumkin;
- Hosil qilingan u funksiya bo'yicha du differensialni hisoblaymiz;
- (4) tenglikni o'ng tomonidagi $\int vdu$ integralni hisoblaymiz;
- Berilgan $\int f(x)dx=\int udv$ integralni (4) tenglikning o'ng tomoni orqali topamiz.

Bunda $f(x)dx=udv$ bo'laklashda u va dv shunday tanlanishi kerakki, (4) formuladagi $\int vdu$ jadval integrali yoki hisoblanishi osonroq bo'lgan integraldan iborat bo'lsin.

Bo'laklab integrallash usuliga misol sifatida $\int xe^x dx$ integralni hisoblaymiz. Bunda ikki holni qaraymiz.

1-hol. Integral ostidagi $xe^x dx$ ifodani $u=e^x$, $dv=xdx$ ko'rinishda bo'laklaymiz. Bu holda

$$du = de^x = (e^x)'dx = e^x dx\,, \quad v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

bo'lgani uchun, C=0 deb, (4) formuladan

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$$

tenglikka kelamiz. Ammo, bunda hosil bo'lgan o'ng tomondagi integral berilgan integralga nisbatan murakkabroq ko'rinishga ega. Demak, bunday bo'laklash maqsadga muvofiq emas[59].

2-hol. Bu holda $u=x$, $dv=e^x dx$ deb olamiz. Bunda

$$du = dx\,, \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x + C$$

bo'ladi. Bu yerda C=0 deb va (4) formuladan foydalanib, berilgan integralni quyidagicha oson hisoblaymiz:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C\,.$$

Ayrim integrallarni hisoblash uchun bo'laklab integrallash formulasini bir necha marta qo'llashga to'g'ri keladi. Bunga misol sifatida ushbu integralni qaraymiz:

$$\int x^2 \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, & dv = \sin x dx, \\ du = 2xdx, & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, & dv = \cos x dx, \\ du = dx, & v = \int \cos x dx = \sin x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2(x\sin x - \int \sin x dx) =$$

$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C\,.$$

Shunday qilib, bu yerda (4) bo'laklab integrallash formulasidan ikki marta foydalandik.

Izoh: Yuqoridagidek mulohaza yuritib, $\int x^n \sin x dx$, n=1,2,3, ..., integral bo'laklab integrallash formulasini n marta qo'llash orqali hisoblanishini ko'rish mumkin.

Ba'zi integrallarni hisoblash uchun dastlab bo'laklab integrallash orqali ularga nisbatan tenglama hosil qilinib, so'ngra bu tenglamani yechib ko'zlangan maqsadga erishiladi. Misol sifatida $I = \int\sqrt{1-x^2}\,dx$ integralni hisoblaymiz.

[59] Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2009. – B. 81.

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=\begin{bmatrix} u=\sqrt{1-x^2}, & dv=dx, \\ du=\dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}, & v=x \end{bmatrix}=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}-I+\arcsin x+C.$$

Shunday qilib izlanayotgan I integral uchun

$$I=x\sqrt{1-x^2}-I+\arcsin x+C\Rightarrow 2I=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$$

chiziqli tenglamani hosil qildik. Bu tenglamani yechib,

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=I=\frac{x\cdot\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}+C$$

natijaga erishamiz.

Bo‘laklab integrallash usulida

$$\int x^n\cos axdx,\quad \int x^n\sin axdx,\quad \int\sqrt{a^2-x^2}dx,\quad \int x^n a^x dx,\quad \int x^n\ln xdx,$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx,\quad \int e^{ax}\sin bxdx,\quad \int x^n\arccos xdx,\quad \int x^n \mathrm{arctg} xdx,\quad \int\sin\ln xdx$$

va shularga o‘xshash integrallarni hisoblash mumkin.

Kvadrat uchhadli integrallarni hisoblash. Endi kvadrat uchhad qatnashgan ayrim aniqmas integrallarni hisoblash masalasini ko‘rib chiqamiz.

Dastlab ushbu integrallarni qaraymiz:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\qquad I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Avvalo, maxrajdagi kvadrat uchhaddan to‘liq kvadratni ajratib olamiz:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2\right]=$$

$$=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a})\right]=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2\right].$$

Bu yerda

$$\pm k^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{D}{4a^2}$$

belgilash kiritilgan. Bunda, agar kvadrat uchhad diskriminanti $D=b^2-4ac>0$, ya’ni uning ildizlari haqiqiy sonlar bo‘lsa, k^2 manfiy ishora bilan; $D<0$ bo‘lsa k^2 musbat ishora bilan olinadi. Ikkala holda ham $k\neq 0$ bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz. $D=0$ holni keyinchalik ko‘ramiz.

Yuqoridagi tenglik asosida I_1 integralni o‘zgaruvchilarni almashtirish usulida quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2}=\left[\begin{array}{l} t=x+\frac{b}{2a}, \\ dt=d(x+\frac{b}{2a})=dx \end{array}\right]=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm\kappa^2}.$$

Bu tenglikning o‘ng tomonida jadval integrali turibdi va

$$\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\text{arctg}\frac{t}{k}+C, \qquad \int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C$$

ekanligini eslatib o‘tamiz.

Bu ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashga misollar keltiramiz.

1. $$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}=\left[\begin{array}{l} t=x+1, \\ dt=dx \end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{dt}{t^2+2^2}=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

2. $$\int\frac{dx}{x^2-6x-7}=\int\frac{dx}{(x-3)^2-4^2}=\left[\begin{array}{l} t=x-3, \\ dt=dx \end{array}\right]=\int\frac{dt}{t^2-4^2}=$$
$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+C.$$

Endi $D=0$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda $k=0$ va

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2}=\left[\begin{array}{l} t=x+\frac{b}{2a}, \\ dt=d(x+\frac{b}{2a})=dx \end{array}\right]=$$
$$=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{at}+C=-\frac{1}{a(x+b/2a)}+C=-\frac{2}{2ax+b}+C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Xuddi shunday tarzda $a>0$ va $k\neq 0$ bo‘lganda

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2}}=\left[\begin{array}{l} t=x+\frac{b}{2a}, \\ dt=dx \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm\kappa^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm\kappa^2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2}\right|+C,$$

$a>0$ va $k=0$ bo'lganda esa

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d(x+\frac{b}{2a})}{\left|x+\frac{b}{2a}\right|}=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}\right|+C$$

natijalarni olamiz.

Masalan,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+9/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1/2}}=$$

$$=\begin{bmatrix}t=x-2,\\ dt=dx\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+(\sqrt{1/2})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+(\sqrt{1/2})^2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{1/2})^2}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+9/2}\right|+C$$

Endi $a<0$ holni ko'ramiz. Bu holda kvadrat uchhad diskriminanti $D>0$ deb olishimiz kerak, chunki aks holda barcha nuqtalarda $ax^2+bx+c\leq 0$ va I_2 integral ostidagi funksiya aniqlanmagan bo'ladi. Bu shartda

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-(x+\frac{b}{2a})^2}}=\begin{bmatrix}t=x+\frac{b}{2a},\\ dt=dx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{\kappa^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{t}{k}+C=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{2ax+b}{2ak}+C.$$

Endi umumiyroq ko'rinishdagi quyidagi integrallarni qaraymiz:

$$I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\quad I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Oldin I_3 integralni hisoblash yo'lini ko'rsatamiz:

$$I_3=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1.$$

Bu yerda I_1 yuqorida ko'rib o'tilgan integraldir va uni hisoblashni bilamiz.

Misol sifatida ushbu integralni qaraymiz:

$$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)+5}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-4)dx}{x^2-4x+8}+5\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}+5\int\frac{dx}{(x-2)^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C$$

I_4 integral ham shu kabi hisoblanadi:

$$I_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_2=$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_2.$$

Bu yerdagi I_2 integralni hisoblash usuli yuqorida ko'rsatilgan edi.

I_4 ko'rinishdagi integralni hisoblashga misol keltiramiz:

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+4)-7}{\sqrt{(x+2)^2+6}}dx=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C.$$

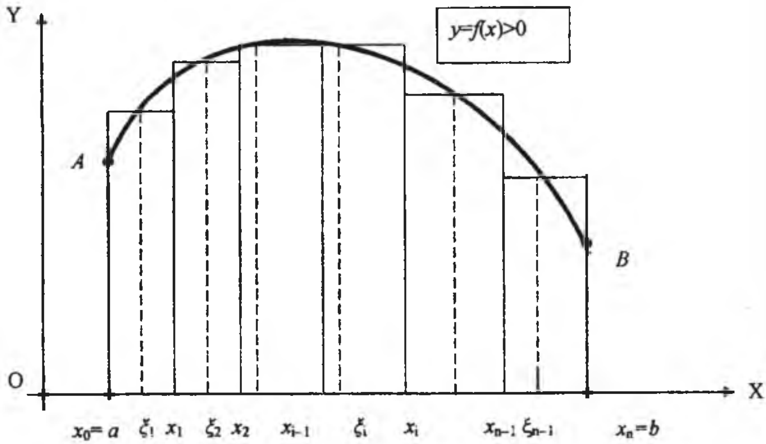
6.3. Aniq integral va uning xossalari

Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar. Bir qator matematik, fizik, mexanik, sportga oid va iqtisodiy masalalarni yechish uchun aniq integral tushunchasi juda katta ahamiyatga ega. Bu tushunchani kiritishdan oldin unga olib keladigan ayrim masalalarni qaraymiz.

• ***Egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash masalasi.*** Turli geometrik shakllarning yuzalarini topish masalasi matematikaning eng qadimgi masalalaridan biri bo‘lib hisoblanadi. Qadimgi Vavilon va Misrda ko‘pburchaklarning yuzalarini hisoblay olganlar. Buyuk yunon olimi ***Arximed*** (miloddan oldingi 287-212 y.) parabola segmentining yuzasini hisoblashni bilgan. O‘rta osiyolik yurtdoshlarimiz ***Beruniy*** va ***Al-Xorazmiy*** doira va doiraviy sektor yuzalarini topa olganlar. Ammo bu geometrik shaklarning yuzalari o‘ziga xos usullarda aniqlangan bo‘lib, ixtiyoriy geometrik shaklning yuzasini hisoblashga imkon beradigan umumiy usul ma’lum emas edi. Differensial va integral hisob yaratilgach, bu masala geometrik shakllarning nisbatan keng sinfi uchun o‘z yechimini topdi.

Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar hamda OX o‘qi bilan chegaralangan geometrik shakl ***egri chiziqli trapetsiya*** deb ataladi.

Quyidagi 33-rasmda ko‘rsatilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning *S* yuzasini topish masalasini qaraymiz.



33-rasm

Buning uchun dastlab *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning asosini ifodalovchi $[a,b]$ kesmani $x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots<x_{n-1}$ bo‘lgan ixtiyoriy $n-1$ ta nuqta yordamida bo‘laklarga ajratamiz. Bu nuqtalarga $a=x_0$ va $b=x_n$ nuqtalarni birlashtirsak, $[a,b]$ kesma ular orqali

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

n ta kichik kesmachalarga bo'linadi.

So'ngra x_i , i=1,2, ..., $n-1$ bo'linish nuqtalaridan OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib berilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga ajratamiz. Ravshanki, *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari yig'indisiga teng bo'ladi[60]. Shu sababli, agar asosi $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1,2,3,..., n) bo'lgan egri chiziqli kichik trapetsiyalarning yuzalarini ΔS_i kabi belgilansa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_i + \cdots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \quad (1)$$

Bu yerda ΔS_i (i=1,2, ..., n) ham egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari bo'lgani uchun ularning aniq qiymatlarini topa olmaymiz. Bu yuzalarning taqribiy qiymatini aniqlash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1,2, ..., n) kesmalarning har biridan ixtiyoriy ravishda ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda AB egri chiziqni ifodalovchi $y=f(x)>0$ funksiyaning $f(\xi_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Endi har bir ΔS_i (i=1,2, ..., n) yuzalarni asoslari $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ va balandliklari $h_i = f(\xi_i)>0$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarning yuzalari bilan almashtirib, quyidagi taqribiy tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\Delta S_1 \approx f(\xi_1)\Delta x_1,\ \Delta S_2 \approx f(\xi_2)\Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i,\ \ldots,\ \Delta S_n \approx f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Bu taqribiy tengliklarni (1) yig'indiga qo'yib berilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning izlanayotgan S yuzasi uchun ushbu taqribiy tenglikka ega bo'lamiz:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \quad (2)$$

(2) taqribiy tenglikning geometrik ma'nosi shundan iboratki, biz hozircha hisoblay olmaydigan egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi to'g'ri to'rtburchaklardan hosil qilingan pog'onasimon shakl yuzasi bilan almashtirildi. Bunda bo'laklar soni n qanchalik katta qilib olinsa, pog'onasimon shaklning yuzasi egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini shunchalik darajada aniqroq ifodalaydi. Bu mulohazadan izlanayotgan S yuzaning aniq qiymati

---

[60] Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2009. – B. 88.

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (3)$$

limit bilan aniqlanishi mumkinligini ko‘ramiz.

• ***O‘zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash masalasi.*** Yo‘nalishi va kattaligi o‘zgarmas bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta L to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qilayotgan bo‘lsin. Bunda kuch yo‘nalishi bilan moddiy nuqtaning harakat yo‘nalishi bir xil deb olamiz. Agar bu shartlarda kattaligi f bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta L to‘g‘ri chiziq bo‘ylab a nuqtadan b nuqtaga ko‘chirilsa, ya’ni $b-a$ masofaga siljigan bo‘lsa, unda bajarilgan ish $A=f\cdot(b-a)$ formula bilan aniqlanishi bizga maktab fizika kursidan ma’lum.

Endi yuqoridagi shartlardan kuch kattaligi o‘zgarmas degan shartdan voz kechib, u harakatning har bir x nuqtasida biror uzluksiz $f(x)$ funksiya bo‘yicha o‘zgarib boradigan umumiyroq holni qaraymiz. Bu holda kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo‘yicha harakatlantirganda bajarilgan A ishni hisoblash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalani yechish uchun moddiy nuqtani bosib o‘tgan yo‘lini ifodalovchi $[a,b]$ kesmani oldingi masaladagi singari n ta bo‘laklarga ajratib, har bir $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2, ..., n)$ kichik kesmada o‘zgaruvchi kuchning bajargan ishini ΔA_i deb belgilaymiz. Bu holda $[a, b]$ kesmada bajarilgan umumiy A ish qiymatini

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \quad (4)$$

yig‘indi ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bu yerda ham ΔA_i ishning aniq qiymatini hisoblay olmaymiz. Ularning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning har biridan ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlab olamiz va unda kuchning $f(\xi_i)$ qiymatini hisoblaymiz. Uzunligi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ bo‘lgan bu kichik kesmada kuch kattaligi o‘zgarmas va $f(\xi_i)$ deb hisoblab, ushbu taqribiy tengliklarni yoza olamiz:

$$\Delta A_1 \approx f(\xi_1)\cdot \Delta x_1,\ \Delta A_2 \approx f(\xi_2)\cdot \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot \Delta x_i,\ \ldots,\ \Delta A_n \approx f(\xi_n)\cdot \Delta x_n .$$

Bularni (4) yig‘indiga qo‘yib, izlanayotgan A ishning taqribiy qiymatini topamiz:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \quad (5)$$

Bu yerda ham $[x_{i-1}, x_i]$ bo‘laklar soni n oshib borgan sari (5) taqribiy tenglik xatoligi tobora kamayib boradi, deb kutish mumkin. Shu sababli A ishning aniq qiymati

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (6)$$

limit orqali ifodalanadi.

• ***Mahsulot hajmini topish masalasi.*** Agar ish kuni davomida mehnat unumdorligi o‘zgarmas, ya’ni ixtiyoriy t vaqtda uning kattaligi f bo‘lsa, unda (T_1,T_2) vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $V=f\cdot(T_2-T_1)$ formula bilan hisoblanadi. Masalan, sozlangan avtomatik qurilma uchun bu holni o‘rinli deb olish mumkin.

Ammo ishchining mehnat unumdorligi to‘g‘risida bunday deb bo‘lmaydi. Masalan, ish kunining boshlang‘ich davrida (ishga ko‘nikish) uning mehnat unumdorligi ma’lum bir vaqtgacha o‘sib boradi. So‘ngra, ishga kirishib ketgandan keyin, ma’lum bir vaqt oralig‘ida bir xil unumdorlik bilan mahsulot ishlab chiqaradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari, charchash tufayli, mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib mehnat unumdorligi o‘zgaruvchan va t vaqtga bog‘liq ravishda biror uzluksiz $f(t)$ funksiya orqali aniqlangan bo‘ladi. Bu holda (T_1,T_2) vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi V uchun yuqoridagi formula o‘rinli bo‘lmasligi ravshandir va uni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala ham oldingi masalalardagi mulohazalar asosida quyidagicha yechiladi. (T_1,T_2) vaqt oralig‘ini ixtiyoriy ravishda tanlangan

$$T_1=t_0< t_1< t_2< \cdots t_i<\cdots t_{n-1}< t_n=T_2$$

nuqtalar bilan n ta (t_{i-1}, t_i) $(i=1,2,3, \cdots, n)$ vaqt oraliqchalariga bo‘laklaymiz. Bu vaqt oraliqchalarida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ΔV_i $(i=1,2,3, \cdots, n)$ deb belgilasak, unda butun vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \quad (7)$$

yig‘indi kabi ifodalanadi. Bu yig‘indidagi qo‘shiluvchilarning taqribiy qiymatlarini topish maqsadida (t_{i-1}, t_i) $(i=1,2,3, \cdots, n)$ vaqt oraliqchalaridan ixtiyoriy bir ξ_i vaqtni tanlab olamiz va unda $f(\xi_i)$ mehnat unumdorligini aniqlaymiz. Kichkina (t_{i-1}, t_i) oraliqda uzluksiz $f(t)$ funksiya o‘z qiymatini unchalik ko‘p o‘zgartira olmaydi va shu sababli bu yerda mehnat unumdorligini o‘zgarmas va uning qiymati

$f(\xi_i)$ deb olishimiz mumkin. Shu sababli $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi uchun

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta t_i,\ i=1,2,3,\cdots,n,$$

taqribiy tengliklarni yozish mumkin. Bu taqribiy tengliklarni (7) yig'indiga qo'yib,

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \quad (8)$$

taqribiy natijaga ega bo'lamiz. Bu holda mahsulot hajmining aniq qiymati

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \quad (9)$$

limit orqali topiladi[61].

Yuqoridagi geometrik, fizik va iqtisodiy mazmunli uchta turli masala bir xil matematik usulda o'z yechimini topib, (3), (6) va (9) ko'rinishdagi bir xil limit orqali ifodalandi. Shu sababli bu usul va limitni umumiy holda qarash ma'noga egadir.

Aniq integralning ta'rifi va mavjudlik sharti. Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin. Bu kesmani ixtiyoriy

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots x_{n-1}<x_n=b$$

bo'linish nuqtalari yordamida n ta

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

kichik kesmachalarga ajratamiz. Hosil bo'lgan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) kichik kesmachalardan ixtiyoriy bir ξ_i nuqtani tanlaymiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda berilgan $f(x)$ funksiyaning $f(\xi_i)$ ($i=1,2,3,\ldots,n$) qiymatlarini va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) uzunliklarini hisoblaymiz. Bu qiymatlaridan foydalanib, ushbu yig'indini tuzamiz:

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (10)$$

Ta'rif: (10) tenglik bilan aniqlanadigan $S_n(f)$ yig'indi $y=f(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo'yicha ***integral yig'indi*** deb ataladi[62].

$S_n(f)$ integral yig'indi ta'rifidan ko'rinadiki uning qiymati $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalar uzunligi Δx_i, ularning soni n va tanlangan ξ_i nuqtalarga bog'liq bo'ladi. $\Delta_n = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$ belgilash kiritamiz.

---

[61] Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Darslik. – T., 2012. – B. 349.

[62] Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2009. – B. 95.

Ta'rif: Agar $S_n(f)$ integral yig'indilar ketma-ketligi $n \to \infty$ va $\Delta_n \to 0$ bo'lganda x_i bo'linish nuqtalari hamda $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan biror chekli $S(f)$ limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati $S(f)$ berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan ***aniq integral*** deyiladi[63].

Berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi va ta'rifga asosan, quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = S(f) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} S_n(f) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,. \quad (11)$$

Bu yerda a – aniq integralning ***quyi chegarasi***, b – ***yuqori chegarasi***, $[a, b]$ –***integrallash kesmasi***, x – ***integrallash o'zgaruvchisi***, $f(x)$ – ***integral ostidagi funksiya***, $f(x)dx$ – ***integral ostidagi ifoda*** deyiladi.

Ta'rif: Agar $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ mavjud bo'lsa, unda $f(x)$ bu kesmada ***integrallanuvchi funksiya*** deb ataladi.

Izoh: Aniq integralning yuqorida keltirilgan ta'rifi nemisiyalik buyuk matematik ***Riman*** (1826-1866 y.) tomonidan taklif etilgan va shu sababli Riman integrali deb yuritiladi. Bundan tashqari, aniq integralning Koshi, mashhur farang matematigi ***Lebeg*** (1875-1941) va niderlandiyalik matematik ***Stiltes*** (1856-1894) tomonlaridan kiritilgan ta'riflari ham mavjud va keng qo'llaniladi.

Oldin ko'rilgan masalalarga qaytsak, (3) va (11) tengliklarga asosan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

(6) va (11) tengliklarga asosan o'zgaruvchi kuch bajargan ish

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

[63] Rajabov F., Masharipova S., Madrahimov R. Oliy matematika. O'quv qo'llanma. – T.: Turon-Iqbol, 2007. – B. 225.

(9) va (11) tengliklarga asosan, ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V=\int_a^b f(t)dt$$

aniq integrallar orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Bu tengliklarni aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma'nolari deb olishimiz mumkin.

Aniq integral ta'rifidan ko'rinadiki, berilgan $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lishi uchun ancha og'ir shartlarni qanoatlantirishi kerak. Haqiqatan ham, qaralayotgan $[a,b]$ kesmani bo'linish nuqtalari x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmalardan tanlanadigan ξ_i nuqtalar qanday bo'lmasin aniq integralni ifodalovchi (11) limit qiymati $S(f)$ bir xil bo'lishi kerak. Bu esa har qanday funksiya uchun bajarilavermaydi. Masalan, [0,1] kesmada aniqlangan $D(x)$ Dirixle funksiyasi uchun integral yig'indini qaraymiz. Agar $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalar ratsional sonlarni ifodalasa, unda $D(\xi_i)=1$ va integral yig'indi

$$S_n(D)=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1-0=1\ ;$$

agar ξ_i nuqtalar irratsional sonlarni ifodalasa, unda $D(\xi_i)=0$ va integral yig'indi

$$S_n(D)=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0$$

bo'ladi. Bu yerdan ko'rinadiki, $n\to\infty$ bo'lganda $S_n(f)$ integral yig'indi limitining qiymati ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq. Bundan esa $D(x)$ funksiya [0,1] kesmada integrallanuvchi emasligi kelib chiqadi.

Shu sababli (11) limitni, ya'ni $\int_a^b f(x)dx$ integralni qaysi shartda mavjud bo'lishini aniqlashimiz kerak. Bu savolga javob isbotsiz beriladigan ushbu teoremalarda keltiriladi.

Aniq integralning xossalari. Avvalo, yuqorida ko'rib o'tilgan aniq integral ta'rifiga ikkita qo'shimcha kiritamiz.

❖ Agar aniq integralda quyi a va yuqori b chegaralar ($a<b$) o'rni almashsa, unda

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \quad (12)$$

tenglik o‘rinli deb qabul etamiz. Bunday qarorni quyidagicha tushuntirish mumkin. (12) tenglikning chap tomonidagi integralda x integrallash o‘zgaruvchisi OX o‘qda $x=a$ nuqtadan $x=b$ nuqtaga qarab o‘sadi va shu sababli $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0$ bo‘ladi. O‘ng tomondagi integralda esa aksincha bo‘lib, x integrallash o‘zgaruvchisi $x=b$ nuqtadan $x=a$ nuqtaga qarab kamayib boradi va unda $\delta x_i= x_{i-1}-x_i= -\Delta x_i<0$ bo‘ladi. Demak, (12) tenglikdagi integrallar uchun ularning integral yig‘indilari faqat ishoralari bilan farq qiladi. Bu yerdan, limit xossasiga asosan, (12) tenglikni qabul etish mumkinligini ko‘ramiz.

❖ (12) tenglikdan

$$\int_a^a f(x)dx=0 \quad (13)$$

deb qabul qilishimiz mumkinligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, bu holda

$$\int_a^a f(x)dx=-\int_a^a f(x)dx \Rightarrow 2\int_a^a f(x)dx=0 \Rightarrow \int_a^a f(x)dx=0.$$

Izoh: Aniq integral ta’rifini ifodalovchi (11) tenglikdan ko‘rinadiki, uning qiymati biror sondan iborat bo‘ladi. Bu son faqat integral ostidagi $f(x)$ funksiya va $[a,b]$ integrallash kesmasiga bog‘liq bo‘lib, integrallash o‘zgaruvchisiga bog‘liq emas. Shu sababli aniq integralda integrallash o‘zgaruvchisini har xil belgilash mumkin, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(s)ds=\cdots .$$

I xossa: Aniq integralda o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni k o‘zgarmas son bo‘lsa, unda

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx \quad (14)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

II xossa: Ikki yoki undan ortiq funksiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_m(x)]dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx\pm\cdots\pm\int_a^b f_m(x)dx$$

(15)

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi aniq integrallar mavjud deb hisoblanadi.

III xossa: Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ va integrallanuvchi bo'lsa, unda uning aniq integrali uchun

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (16)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

IV xossa: Agar $[a, b]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar integrallanuvchi hamda $f(x) \leq g(x)$ bo'lsa, unda ularning aniq integrallari uchun

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (17)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

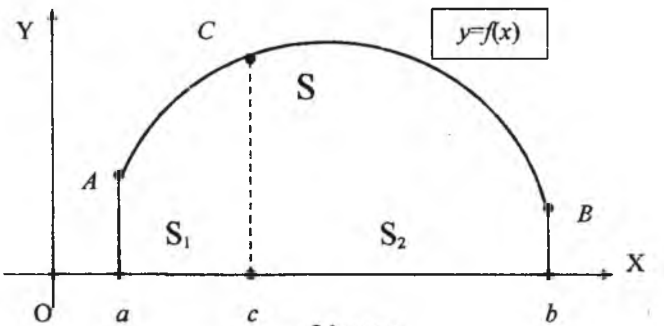
V xossa: Agar $a<c<b$ va $f(x)$ funksiya $[a,c]$, $[c,b]$ kesmalarda integrallanuvchi bo'lsa, unda u $[a,b]$ kesmada ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (18)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Bu xossani qat'iy matematik isbotini keltirmasdan, uni integralning geometrik mazmuniga asoslangan (34-rasm) talqinini keltirish bilan chegaralanamiz.

(18) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral $y=f(x)$ funksiya grafigi orqali hosil qilingan $aACc$ egri chiziqli trapetsiyaning S_1 yuzasini, ikkinchi integral $cCBb$ egri chiziqli trapetsiyaning S_2 yuzasini ifodalaydi. (18) tenglikning chap tomondagi integral esa $y=f(x)$ funksiya grafigi orqali hosil qilingan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini ifodalaydi. Bu yerda $S=S_1+S_2$ tenglik o'rinli va uni integrallar orqali ifodalab, (18) tenglikni hosil etamiz.



34-rasm

Izoh: III xossani ifodalovchi (18) tenglik $c<a$ va $c>b$ holda ham o'rinli bo'ladi. Masalan, $c>b$ holda $a<b<c$ bo'lgani uchun (18) tenglik yuqoridagi mulohazalar va (12) tenglikka asosan quyidagicha keltirib chiqariladi:

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_b^c f(x)dx.$$

VI xossa: Har qanday $[a,b]$ kesmada o'zgarmas $f(x)=1$ funksiya integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dx=b-a \quad (19)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Izoh: Integralning geometrik ma'nosiga ko'ra (19) tenglikdagi aniq integral asosi $[a,b]$ kesmadan iborat va balandligi $f(x)=1$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzasini ifodalaydi va bu yuza $S=1\cdot(b-a)=b-a$ ekanligidan ham (19) tenglikka ishonch hosil etish mumkin.

VII xossa: Agar $[a,b]$ kesmada $(a<b)$ integrallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m va M bo'lsa, unda aniq integral uchun

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a) \quad (20)$$

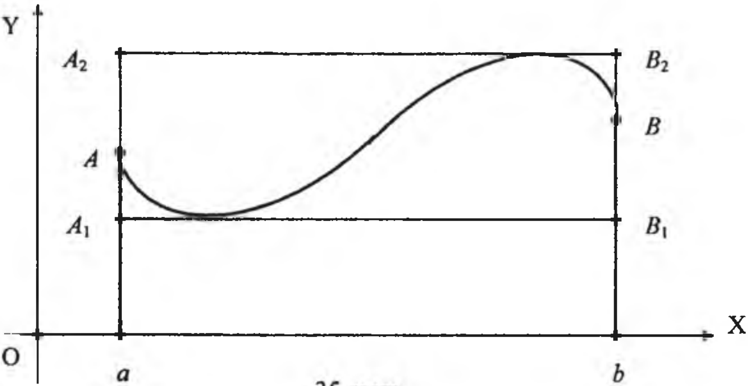
qo'sh tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Shartga asosan $[a,b]$ kesmada $m\le f(x)\le M$ bo'lgani uchun IV xossa va (19) tenglikdan hamda I xossadan foydalanib, quyidagilarni olamiz:

$$\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx \Rightarrow m\int_a^b dx\le\int_a^b f(x)dx\le M\int_a^b dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx\le M\int_a^b dx \Rightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

Bu xossaning geometrik ma'nosi shundan iboratki (35-rasm), $[a,b]$ kesmada $y=f(x)$ funksiya grafigi orqali hosil qilingan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi asoslari $b-a$, balandliklari esa mos ravishda m va M bo'lgan aA_1B_1b va aA_2B_2b to'g'ri to'rtburchaklar yuzalari orasida joylashgan bo'ladi.



35-rasm

VIII xossa: Agar $|f(x)|$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, unda $f(x)$ funksiya ham bu kesmada integrallanuvchi va quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (21)$$

IX xossa (O'rta qiymat haqidagi teorema): Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada shunday ξ nuqta mavjudki, unda

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (22)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ta'rif: (22) tenglik orqali aniqlanadigan

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

soni $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***o'rta qiymati*** deb ataladi.

6.4. Aniq integrallarni hisoblash usullari

Aniq integralni ta'rif bo'yicha hisoblash. Biz aniq integral ta'rifi va asosiy xossalarini o'rgangan bo'lsak ham, ammo hozircha faqat bitta $f(x)=1$ o'zgarmas funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral qiymatini bilamiz, xolos. Bu yo'nalishda yana bir misol sifatida $f(x)=x$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan

$$I = \int_a^b xdx$$

aniq integralni uning ta'rifidan foydalanib hisoblaymiz. $f(x)=x$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun u integrallanuvchi, ya'ni I aniq integral mavjud. Unda, ta'rifga asosan, $[a,b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda kichik $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarga bo'laklab va ulardan istalgan ξ_i nuqtalarni tanlab,

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x_i-x_{i-1})$$

integral yig'indini hosil etib, uning $n\to\infty$, $\max\Delta x_i\to 0$ bo'lgandagi limitini topsak, bu limit qiymati doimo bir xil bo'ladi va I integral qiymatini ifodalaydi. Shu sababli biz $[a,b]$ kesmani o'zaro teng bo'lgan n bo'lakka ajratamiz. Bu holda hosil bo'lgan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachaning uzunligi bir xil va $\Delta x_i=h=(b-a)/n$, ularning chegaralari esa $x_i=a+ih$, $i=0,1,2,\cdots, n-1, n$ kabi aniqlanadi. Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan ξ_i nuqta sifatida uning chap chegarasini, ya'ni $\xi_i=x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots, n)$ deb olamiz. Bu holda integral yig'indi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i=h\sum_{i=1}^{n}\xi_i=h\sum_{i=1}^{n}[a+(i-1)h]=h[\sum_{i=1}^{n}a+h\sum_{i=1}^{n}(i-1)]=$$

$$=h[na+h\frac{n(n-1)}{2}]=(b-a)[a+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n-1}{2}]\,.$$

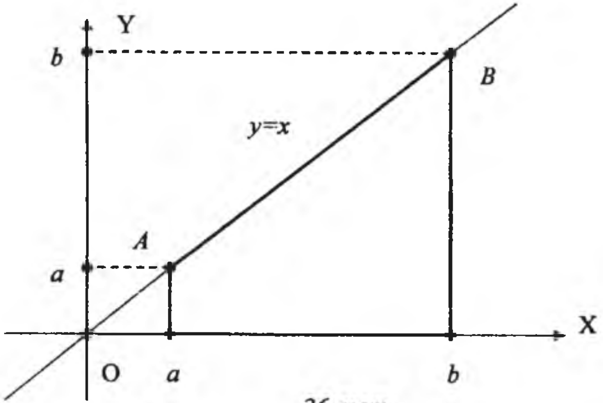
Bu yerdan, aniq integral ta'rifi va limit xossalariga asosan,

$$I=\lim_{n\to\infty}S_n(f)=\lim_{n\to\infty}(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{n-1}{n}]=(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}]=$$

$$=(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\cdot 1]=(b-a)\cdot\frac{b+a}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

natijani olamiz. Demak,

$$\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}\,.\ (1)$$



36-rasm

Bu natijaga aniq integralning geometrik ma'nosidan foydalanib ham kelish mumkin. Haqiqatan ham, (1) aniq integral $y=x$, $x=a$, $x=b$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan $aABb$ trapetsiya (36-rasm) yuzini ifodalaydi. Chizmadan ko'rinadiki, bu trapetsiyaning balandligi $H=b-a$, asoslari esa a va b. Shu sababli

$$I=\int_a^b xdx=S_{aABb}=\frac{a+b}{2}H=\frac{a+b}{2}(b-a)=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Nyuton-Leybnits formulasi. Oldingi natijalardan ko'rinadiki, aniq integralni uning ta'rifi, ya'ni integral yig'indining limiti orqali topish masalasi hatto oddiy $y=x$ funksiya misolida ancha qiyinchilik bilan yechiladi. Shu sababli aniq integralni hisoblashning qulayroq, osonroq usulini topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masala integral hisobning asosiy formulasi bo'lmish Nyuton-Leybnits formulasi orqali o'z yechimini topadi. $y=f(x)$ biror $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiya bo'lsin. Unda $y=f(x)$ bu $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya bo'ladi. Bu yerdan ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (2)$$

aniq integral mavjud ekanligi kelib chiqadi. Bunda quyi chegara a o'zgarmas, yuqori chegara x esa o'zgaruvchi deb qaralsa, unda (2) tenglik $[a,b]$ kesmada aniqlangan biror $F(x)$ funksiyani ifodalaydi va ***yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral*** deb ataladi. Bu funksiya differensial va integral hisob orasidagi chuqur bog'lanishni ifodalovchi quyidagi muhim xususiyatga ega[64].

Teorema: Agar (1) tenglikda $f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa, unda $F(x)$ funksiya differensiallanuvchi va

$$\Phi'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = f(x) \quad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: $F(x)$ funksiya differensiallanuvchi ekanligini va uning hosilasini ta'rif bo'yicha topamiz. Buning uchun uning x argumentiga Δx orttirma berib va aniq integralning oldin ko'rib o'tilgan V xossasidan foydalanib, $\Delta F(x)$ funksiya orttirmasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Bu tenglikni, aniq integralning oldin ko'rsatilgan o'rta qiymati haqidagi xossasiga asosan,

$$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x\,, \quad \xi \in [x, x+\Delta x]$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerdan, hosila ta'rifi va $f(x)$ funksiya uzluksizligiga asosan,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

natijani, ya'ni isbotlanishi kerak bo'lgan (3) tenglikni hosil qilamiz. Bu natijani olishda $\xi \in [x, x+\Delta x]$ bo'lgani uchun $\Delta x \to 0$ holda $\xi \to x$ bo'lishidan foydalanildi.

Izoh: Bu teoremadan (2) tenglik bilan aniqlangan $F(x)$ berilgan uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lishi kelib chiqadi. Demak, har qanday uzluksiz funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasi mavjud va uni (2) formula orqali topish mumkin ekan.

Teorema: Agar $F(x)$ uzluksiz $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (4)$$

[64] Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand, 2009. – B. 102.

tenglik o‘rinlidir.

Isbot: $F(x)$ uzluksiz $f(x)$ funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. Oldingi teoremaga asosan (2) tenglik bilan aniqlangan $F(x)$ funksiya ham $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi. Bizga ma’lumki, $f(x)$ funksiyaning har qanday ikkita boshlang‘ich funksiyalari bir-biridan faqat biror C o‘zgarmas qo‘shiluvchi bilan farq qiladi, ya’ni

$$\Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) + C \;.$$

Bu tenglikda $x=a$ deb va $\int_a^a f(x)dx = 0$ ekanligidan foydalanib, $C=-F(a)$ ekanligini aniqlaymiz. Bu natijani oldingi tenglikka qo‘yib, ushbu formulaga kelamiz:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Oxirgi tenglikda $x=b$ desak,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bu formulada t integrallash o‘zgaruvchisini x bilan almashtirib (aniq integralda integrallash o‘zgaruvchisini ixtiyoriy tarzda belgilash mumkinligini eslatib o‘tamiz), isbotlanishi kerak bo‘lgan (4) formulani hosil qilamiz.

Izoh: (4) formulada $F(x)$ sifatida $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy bir boshlang‘ich funksiyasini olish mumkin. Bunga sabab shuki, $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy ikkita $F_1(x)$ va $F_2(x)$ boshlang‘ich funksiyalari bir-biridan faqat biror C o‘zgarmas son bilan farqlanadi va $F_1(b)-F_1(a)=F_2(b)-F_2(a)$ bo‘ladi.

Ta’rif: (4) tenglik aniq integralni hisoblashning ***Nyuton-Leybnits formulasi*** deyiladi.

Aniqmas va aniq integral tushunchalari bir-biriga bog‘liqmas ravishda kiritilgan edi. Aniqmas integral $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalari sinfi singari, aniq integral esa $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indilarining limiti singari kiritilganligini eslatamiz. Ammo, bu ikkala tushuncha orasida chambarchas bog‘lanish mavjudligi va ularning ikkalasi ham "*integral*" deb atalishi bejiz emasligini ko'rsatish uchun Nyuton-Leybnits formulasini shartli ravishda quyidagicha yozamiz[65]:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = [F(x)+C]\Big|_a^b = \int f(x)dx\Big|_a^b \quad (5)$$

Demak, aniq integralni Nyuton-Leybnits formulasi bo'yicha hisoblash uchun dastlab uning chegaralarini "unutib", uni aniqmas integral singari qaraymiz va hisoblaymiz. So'ngra chegaralar borligini "eslab", aniqmas integralni hisoblangan ifodasiga x o'rniga yuqori chegara b va quyi chegara a qiymatlarini qo'yamiz. Natijada hosil bo'lgan sonlar ayirmasini olib, berilgan aniq integral qiymatini topamiz. Bunda aniqmas integral javobidagi ixtiyoriy C o'zgarmas sonni hisobga olmasak ham bo'ladi.

Misol sifatida, $f(x)=x^\alpha$ ($\alpha\neq-1$) darajali funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integralni (4) Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Bevosita ta'rif bo'yicha hisoblangan (1) natija bu yerdan $\alpha=1$ bo'lganda kelib chiqadi.

Shunday qilib, Nyuton-Leybnits formulasi orqali aniq integralni hisoblash masalasi bizga tanish bo'lgan aniqmas integralni hisoblash masalasiga keltiriladi. Bunga yana bir nechta misol keltiramiz:

- $\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$; $\int_a^b e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_a^b = \frac{e^{4b}-e^{4a}}{4}$;
- $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x d\ln x = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{\ln^2 e - \ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 e = \frac{1}{2}$;
- $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2-1=1.$

Bo'laklab integrallash usuli. $u=u(x)$ va $v=v(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Bu holda $(iv)'=u'v+iv'$ ekanligidan iv funksiya $u'v+iv'$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Shu sababli Nyuton-Leybnits formulasiga asosan,

---

[65] Естественно-научные основы физической культуры и спорта: учебник / под ред. А.В.Самсоновой, Р.Б.Цаллаговой. – М.: Советский спорт, 2014. – С. 35.

$$\int_a^b [u'v + uv']dx = uv\Big|_a^b$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerdan, aniq integralning II xossasi va $u'dx=du$, $v'dx=dv$ ekanligidan foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$\int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv\Big|_a^b \Rightarrow$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \quad (6)$$

__*Ta'rif:*__ (6) tenglik aniq integralni ***bo'laklab integrallash formulasi*** deb ataladi.

Bu yerdan ko'rinadiki, aniq integralni bo'laklab integrallash xuddi aniqmas integralga o'xshash usulda amalga oshiriladi. Buni quyidagi misollarda ko'ramiz:

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos xdx = \begin{bmatrix} u = x, & dv = \cos xdx \\ du = dx, & v = \sin x \end{bmatrix} = x \cdot \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin xdx =$

  $\displaystyle= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2};$

- $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = 2\sqrt{x} \end{bmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \sqrt{x}\frac{dx}{x} =$

  $\displaystyle= 4e - 4\sqrt{x}\Big|_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4;$

Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish usuli. Berilgan uzluksiz $y=f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni ba'zi hollarda biror $x=\varphi(t)$ differensiallanuvchi funksiya orqali "eski" x o'zgaruvchidan "yangi" t o'zgaruvchiga o'tish usulida hisoblash mumkin bo'ladi. Bunda $\varphi(t)$ funksiya ***almashtirma*** deb ataladi va unga quyidagi shartlar qo'yiladi:

1. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;
2. $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ funksiyalar $t\in[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz;
3. $f[\varphi(t)]$ murakkab funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz.

Bu shartlarda ushbu formula o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (7)$$

Isbot: $F(x)$ berilgan integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Unda Nyuton-Leybnits formulasiga asosan,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerdan, integralni invariantlik xossasi va yuqoridagi 1-3 shartlardan foydalanib, ushbu natijaga kelamiz:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]d\varphi(t) = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Oldingi va bu tenglikning o'ng tomonlarini taqqoslab, (7) formula o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Ta'rif: (7) tenglik aniq integralda ***o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi*** deb ataladi.

Ushbu aniq integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi yordamida hisoblaymiz.

➢ $$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+1} = t, & x = t^2 - 1, dx = 2tdt \\ \alpha = \sqrt{0+1} = 1, & \beta = \sqrt{3+1} = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} =$$

$$= 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2(\frac{t^3}{3} - t)\Big|_1^2 = 2(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3};$$

➢ $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = \sin t, \ dx = \cos tdt, \ 1 - x^2 = \cos^2 t \\ \alpha = \arcsin 0 = 0, \quad \beta = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Aniq integrallarni taqribiy hisoblash. Yuqorida ko'rib o'tilgan usullarda $I = \int_a^b f(x)dx$ aniq integral qiymatini hisoblash masalasi integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning biror $F(x)$ boshlang'ich funksiyani topish va uning qiymatlarini hisoblash masalasiga keltiriladi. Ammo ayrim aniq integrallar uchun bu usullarni qo'llashda quyidagi muammolar paydo bo'lishi mumkin:

1) $F(x)$ boshlang'ich funksiyani topish murakkab;

2) $F(x)$ boshlang'ich funksiya murakkab ko'rinishda bo'lib, uning $F(a)$ va $F(a)$ qiymatlarini hisoblash qiyinchilik tug'diradi;

3) $F(x)$ boshlang'ich funksiya elementar funksiyalarda ifodalanmaydi;

4) integral ostidagi $f(x)$ funksiya jadval ko'rinishida berilgan.

Bunday hollarda aniq integralning qiymatini taqribiy hisoblash masalasi paydo bo'ladi. Bu masalani yechish uchun matematikada turli formulalar topilgan bo'lib, ular umumiy holda ***kvadratur formulalar*** deb ataladi. Shu formulalardan eng soddalaridan ikkitasini qisqacha ko'rib o'tamiz.

I. ***To'g'ri to'rtburchaklar formulasi.*** Bu formulani keltirib chiqarish uchun dastlab $[a,b]$ kesmani uzunligi bir xil va $\Delta x=(b-a)/n$ bo'lgan n ta $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarga ($i=1, 2, \cdots, n$) ajratamiz. Bunda x_i bo'linish nuqtalari

$$x_i = a + i\Delta x = a + \frac{b-a}{n}i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n \quad (8)$$

formula bilan topiladi.

So'ngra integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning x_i bo'linish nuqtalaridagi $f(x_i)$ ($i=1,2, \cdots,n$) qiymatlarini hisoblaymiz. Bu qiymatlar va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalar uzunligi Δx bo'yicha

$$S_n(f)= f(x_1)\Delta x+ f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x+ \cdots + f(x_n)\Delta x$$

integral yig'indini hosil qilamiz. Ta'rifga asosan, I aniq integral $S_n(f)$ integral yig'indilar ketma – ketligining $n\to\infty$ bo'lgandagi limitiga teng. Shu sababli, n katta son bo'lganda, $I \approx S_n(f)$ deb olish mumkin. Natijada ushbu taqribiy formulaga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n)] = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \quad (9)$$

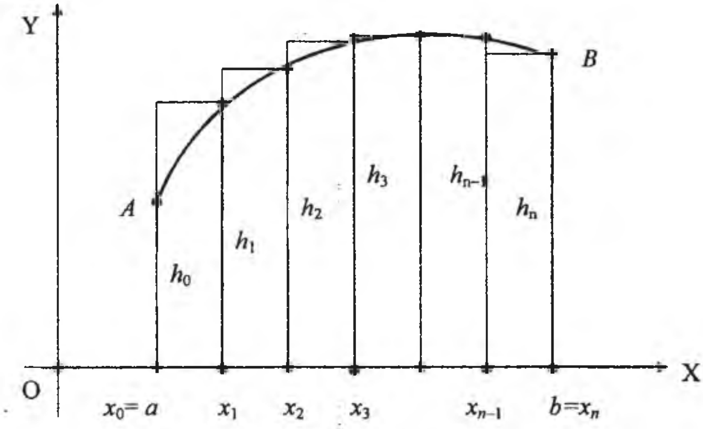
Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)>0$ deb olsak, unda (9) taqribiy tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi asoslari bir xil Δx uzunlikni $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan, balandliklari esa $h_i= f(x_i)$ ($i=1,2, \cdots, n$) bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon geometrik shaklning (37-rasm) yuzini ifodalaydi. Chap tomondagi aniq integral qiymati esa *aABb* egri chiziqli trapetsiya yuziga teng.

Ta'rif: Aniq integral uchun (9) taqribiy tenglik ***to'g'ri to'rtburchaklar formulasi*** deyiladi.

To'g'ri to'rtburchaklar formulasining xatoligi

$$\Delta \le M_1 \frac{(b-a)^2}{4n}, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \quad (10)$$

formula bilan baholanadi[66].



37-rasm

Misol sifatida to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi yordamida

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} \quad (11)$$

aniq integralning taqribiy qiymatini topamiz. Buning uchun [0,1] integrallash kesmasini n=10 teng bo‘lakka ajratamiz va hisoblashlar natijalarini quyidagi jadval ko‘rinishida ifodalaymiz.

i	x_i=0.1i	1+x_i^2	$f(x_i) = \frac{1}{1+x_i^2}$	$\sum_i f(x_i)$
1	0.1	1.01	0.9901	0.9901
2	0.2	1.02	0.9615	1.9516
3	0.3	1.09	0.9174	2.8690
4	0.4	1.16	0.8621	3.7311
5	0.5	1.25	0.8000	4.5311
6	0.6	1.36	0.7353	5.2664

[66] Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo‘llanma. – Samarqand, 2009. – B. 110.

7	0.7	1.49	0.6711	5.9375
8	0.8	1.64	0.6098	6.5473
9	0.9	1.81	0.5525	7.0998
10	1.0	2.0	0.5000	7.5998

Bizning misolda Δx=(1–0)/10=0.1 bo'lgani uchun (9) formulaga asosan, ushbu natijani olamiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1 \cdot 7.5998 = 0.75998 \ .$$

Bu taqribiy natijani xatoligini (10) formula bo'yicha baholaymiz. Bizning misolda

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow |f'(x)|=\left|-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right|<\frac{2\cdot 1}{(1+0^2)^2}=2$$

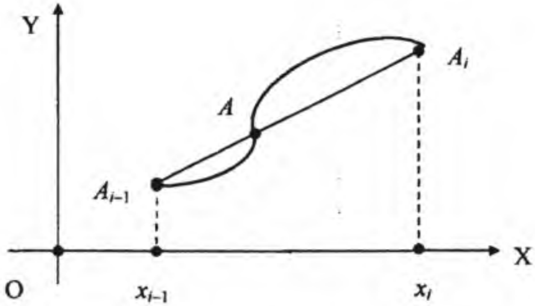
va shu sababli (10) formulada M_1=2 deb olish mumkin. Bu holda

$\Delta \le 2\cdot(1-0)^2/(4\cdot 10)=1/20=0.05$

bo'lgani uchun (11) aniq integralning qiymati

0.75998–0.05 < I < 0.75998+0.05 => 0.70998 < I < 0.80998 oraliqda yotadi. Bu natijani (11) integralning aniq qiymati $\pi/4 \approx 0.7854$ bilan taqqoslab, yo'l qo'yilgan absolyut xatolik Δ=0.0255 ekanligini ko'rishimiz mumkin. Shunday qilib, hatto unchalik katta bo'lmagan n=10 holda ham (9) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi ancha yaxshi natija berdi.

II. ***Trapetsiyalar formulasi.*** Soddalik uchun bu formulani I integral ostidagi funksiya $f(x)>0$ bo'lgan holda qaraymiz. Bu yerda ham $[a,b]$ integrallash kesmasini (8) nuqtalar bilan bir xil Δx uzunlikli n ta $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, ⋯, n) kesmachalarga bo'laklaymiz. So'ngra $y=f(x)$ funksiya grafigidagi $A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ va $A_i(x_i, f(x_i))$ nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmasi (vatar) bilan tutashtirib, egri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}$ AA_ix_i trapetsiyani to'g'ri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}A_ix_i$ trapetsiya bilan (38-rasm) almashtiramiz.



38-rasm

Bu holda to‘g‘ri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}A_ix_i$ trapetsiyaning yuzi

$$S_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x \quad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

egri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}AA_ix_i$ trapetsiyaning yuziga taqriban teng deb olish mumkin. Unda bu yuzalarning yig‘indisi aniq integralning taqribiy qiymatiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] \quad (12)$$

taqribiy formula o‘rinli bo‘ladi.

Ta’rif: Aniq integral uchun (12) taqribiy tenglik ***trapetsiyalar formulasi*** deyiladi.

Trapetsiyalar formulasining absolyut xatoligi

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \quad , \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)| \quad (13)$$

formula bilan baholanadi.

Misol sifatida (11) aniq integralning taqribiy qiymatini n=10 bo‘lgan holda trapetsiyalar formulasi orqali hisoblaymiz. Oldingi hisoblash natijalaridan foydalanib,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1 \cdot [\frac{1+0.5}{2} + 7.0998] = 0.78498$$

taqribiy tenglikni hosil etamiz. Bunda hosil qilingan taqribiy natijaning absolyut xatoligi

$$\Delta = \pi/4 - 0.78498 = 0.7854 - 0.78498 = 0.0004$$

bo‘lib, to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi absolyut xatoligiga (unda Δ=0.0255 ekanligini eslatib o‘tamiz) qaraganda, ancha kichikdir. Demak, trapetsiyalar formulasi to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasiga nisbatan aniqroq natija beradi. Buni ularning xatoliklarini ifodalovchi (10) va (13) formulalar orqali ham ko‘rish mumkin.

Ko‘rib o‘tilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar va trapetsiyalar formulalariga nisbatan aniq integralning taqribiy qiymatini aniqroq hisoblashga imkon beradigan boshqa kvadratur formulalar ham mavjudligini ta’kidlab o‘tamiz. Masalan, ingliz matematigi ***Simpson*** (1710-1761) tomonidan topilgan parabolalar formulasi, Chebishevning kvadratur formulasi shular jumlasidandir.

6.5. Aniq integrallarning ayrim tatbiqlari

Aniq integral yordamida egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi, o‘zgaruvchi kuch bajargan ishni va mehnat unumdorligi o‘zgaruvchan bo‘lgan holda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini topish mumkinligini oldin ko‘rib o‘tgan edik. Ammo aniq integralning amaliy tatbiqlari bu bilan chegaralanib qolmasdan, bulardan tashqari, uning yordamida yana juda ko‘p masalalar o‘z yechimini topadi. Bu mavzuda ulardan ayrimlari bilan tanishamiz.

Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash. Bizga ma’lumki, $y=f(x)\geq 0$ funksiya grafigi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar hamda y=0Y, ya’ni OX koordinata o‘qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi aniq integral orqali

$$S=\int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi. Bu formulani umumiyroq hollarda qaraymiz.

❖ Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)\leq 0$ bo‘lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiya OX o‘qidan pastda joylashgan va aniq integral qiymati manfiy son bo‘ladi. Shu sababli bu holda egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S=-\int_a^b f(x)dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \quad (2)$$

formula orqali topiladi.

Masalan, $x\in[\pi/2,\pi]$ holda $y=\cos x\leq 0$ va bunda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S=\left|\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x dx\right|=\left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right|=|0-1|=1 .$$

❖ Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)$ ishorasi o‘zgaruvchan funksiya bo‘lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiyaning bir qismi OX o‘qidan yuqorida, bir qismi esa pastda joylashgan bo‘ladi (39-rasm).

Bu holda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi (1) va (2) formulalardan foydalanib, topiladi va ularni birlashtirib

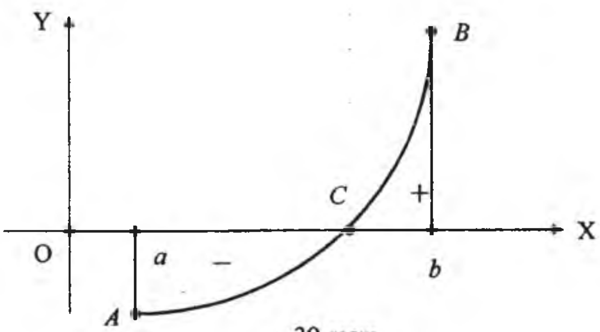
$$S=\int_a^b|f(x)|dx \quad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Masalan, $x\in[0,\pi]$ holda $y=\cos x$ funksiya $[0,\pi/2)$ sohada musbat, $(\pi/2,\pi]$ sohada esa manfiy qiymatlar qabul etadi. Bunda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

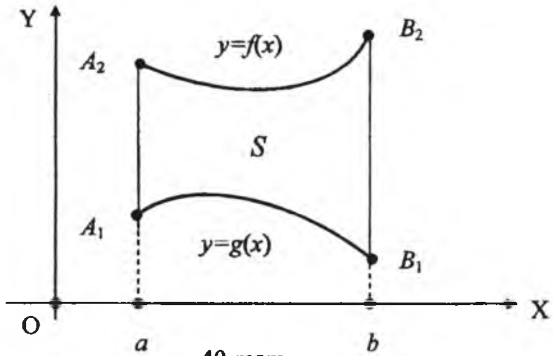
$$S=\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi/2}\cos x dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=1-(-1)=2$$

❖ $y=f(x)$ va $y=g(x)$ $[f(x)\geq g(x)]$ egri chiziqlar hamda $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan geometrik shaklning (40-rasm) S yuzasini hisoblash talab etiladi[67].



39-rasm

[67] Tojiyev Sh.I. Oliy matematikadan masalalar yechish. Oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun darslik. Toshkent: O‘zbekiston, 2002. – B. 228.



40-rasm

Chizmadan va aniq integralning geometrik ma'nosidan foydalanib, quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$S = S_{A_1A_2B_2B_1} = S_{aA_2B_2b} - S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \,. \quad (4)$$

Masalan, $y=x^2$ va $y=x$, $x=2$ va $x=4$ chiziqlar bilan chegaralangan yassi geometrik shakl yuzasini (4) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$S = \int_2^4 (x^2 - x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{56}{3} - 6 = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

❖ Endi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ parametrik tenglama bilan berilgan chiziqdan hosil qilingan egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash masalasini qaraymiz. Unda (1) formuladagi aniq integralda x o'zgaruvchini t o'zgaruvchi bilan almashtirib, quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

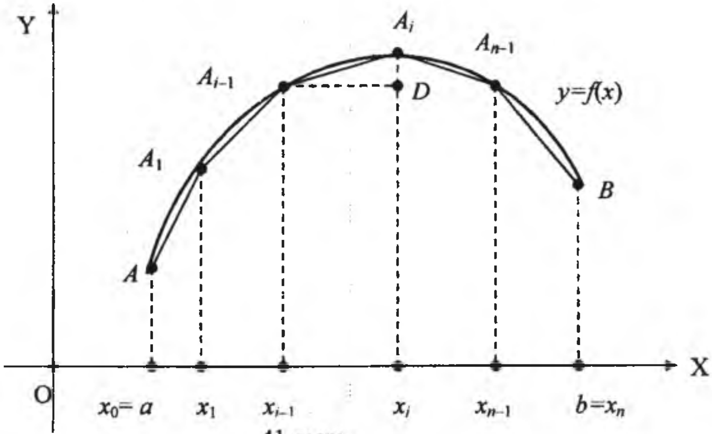
$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx = \int_\alpha^\beta \psi(t)d\varphi(t) = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \,. \quad (5)$$

Misol sifatida yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsning S yuzasini topamiz. Bu ellipsning parametrik tenglamasi $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(t\in[0,2\pi])$ ekanligi bizga ma'lum. Ellipsning simmetrikligidan hamda (5) formuladan foydalanib, uning yuzasi S uchun

$$S = 4\int_0^a f(x)dx = 4\int_{\pi/2}^0 b\sin t(-a\sin t)dt = -4ab\int_{\pi/2}^0 \sin^2 tdt =$$

$$= -4ab\int_{\pi/2}^0 \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^0 = \pi ab$$

formulaga ega bo'lamiz. Bunda $a=b=R$ desak, unda ellips aylanaga o'tadi va yuqoridagi formuladan doira yuzasi uchun bizga tanish bo'lgan $S=\pi R^2$ formula kelib chiqadi.



41-rasm

Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash. Maktab geometriyasidan biz faqat eng sodda jismlar bo'lmish prizma, piramida, konus, silindr va shar hajmlarini hisoblash formulalarini bilamiz. Aniq integral yordamida bir qator murakkabroq jismlarning hajmini hisoblash imkoniyatiga ega bo'lamiz.

- ***Jism hajmini uning ko'ndalang kesimi yuzasi bo'yicha hisoblash.*** Bizga biror J jism berilgan bo'lib, uni OX o'qiga perpendikular tekisliklar bilan kesganimizda hosil bo'ladigan kesimlarning yuzasi ma'lum va bu yuza biror uzluksiz $S(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya orqali ifodalansin. Bu holda J jismning V hajmini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

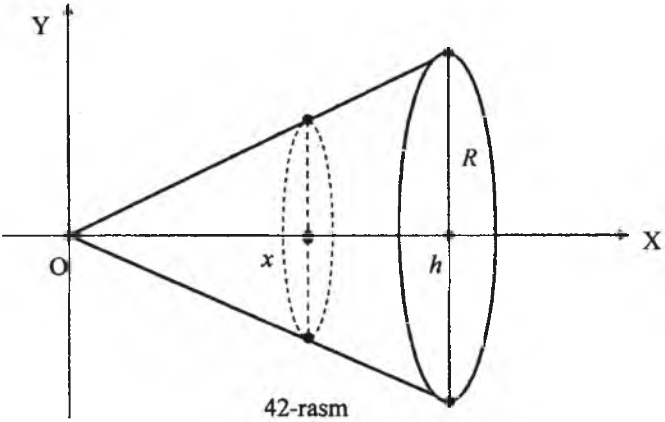
nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo'lakka ajratamiz va bu nuqtalar orqali OX o'qiga perpendikular tekisliklar o'tkazamiz. Bu tekisliklar jismni J_i $(i=1,2,\cdots,n)$ qatlamlarga ajratadi. Bu qatlamlarning hajmlarini ΔV_i $(i=1,2,\cdots,n)$ deb belgilasak, unda izlangan V hajmni $V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n$ yig'indi ko'rinishida yozish mumkin. Yuqorida ko'rsatilgan x_i bo'linish nuqtalari orqali hosil qilingan har bir $[x_{i-1},x_i]$ kesmachalardan $(i=1,2,\cdots,n)$ ixtiyoriy bir ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Endi J_i $(i=1,2,\cdots,n)$ qatlamlarning har birini balandligi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, asosining yuzasi esa $S(\xi_i)$ bo'lgan silindrik jismlar bilan almashtiramiz. Bu holda $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i$ taqribiy tenglik o'rinli ekanligini nazarga olsak, yuqoridagi yig'indidan

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = V_n$$

taqribiy natijaga ega bo'lamiz. Bu taqribiy tenglikda bo'laklar soni n qanchalik katta va $\Delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ qanchalik kichik bo'lsa, V_n yig'indi izlanayotgan V hajm qiymatiga shunchalik yaqin bo'ladi deb olish mumkin. Shu sababli J jismning hajmi V yuqoridagi V_n yig'indilar ketma-ketligining $n\to\infty$, $\Delta_n\to 0$ bo'lgandagi limiti deb olinadi. Unda V_n yig'indi $S(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo'yicha integral yig'indi ekanligini hisobga olib va aniq integral ta'rifidan foydalanib, berilgan J jismning V hajmini uning ko'ndalang kesimi yuzasi $S(x)$ bo'yicha hisoblash uchun quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} V_n=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx\ . \quad (6)$$

Misol sifatida asosining radiusi R, balandligi esa h bo'lgan doiraviy konusning (42-rasm) V hajmini (6) formula yordamida topamiz.



42-rasm

Bunda ko'ndalang kesimlar doiralardan iborat bo'lib, ularning radiuslari $r=Rx/h$, $x\in[0,h]$, funksiya bilan aniqlanadi. Demak, ko'ndalang kesim yuzasi

$$S(x)=\pi r^2=\pi(Rx/h)^2$$

funksiya bilan ifodalanadi. Unda bu konus hajmi uchun (8) tenglikka asosan,

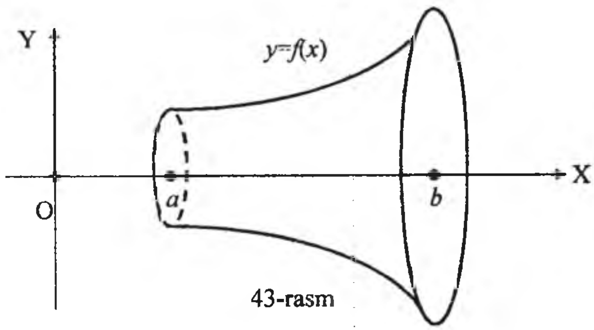
$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h \frac{\pi R^2x^2}{h^2}dx=\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\bigg|_0^h=\frac{\pi R^2h^3}{3h^2}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{1}{3}S_{asos}\cdot h$$

formulaga, ya'ni bizga maktabdan tanish bo'lgan natijaga kelamiz.

▪ ***Aylanma jismlarining hajmini hisoblash.*** Endi $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya grafigi orqali hosil qilingan egri chiziqli trapetsiyaning OX koordinata o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan J aylanma jismning (43-rasm) V hajmini topish masalasini ko'ramiz.

Bunda aylanma jismning ko'ndalang kesimlari doiralardan iborat bo'lib, ularning yuzasi $S(x)=\pi f^2(x)$ funksiya bilan ifodalanadi. Demak, (6) formulaga asosan, aylanma jism hajmi V uchun ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \quad (7)$$



43-rasm

Misol sifatida oldin ko'rib o'tilgan doiraviy konusning hajmini yana bir marta hisoblaymiz. Bu konusni uning $y=Rx/h$ tenglamali yasovchisini OX koordinata o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma jism deb qarash mumkin va shu sababli (7) formulaga asosan,

$$V=\pi\int_0^h \frac{R^2x^2}{h^2}dx=\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\bigg|_0^h=\frac{\pi R^2h^3}{3h^2}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{1}{3}S_{asos}\cdot h$$

natijaga, ya'ni oldin hosil qilingan formula o'rinli ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

Yana bir misol sifatida yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsni OX o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan ellipsoidning hajmini topamiz. Ellipsning kanonik tenglamasidan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2}),\, x\in[-a,a]$$

ekanligini topamiz. Bu natijani (7) formulaga qo'yib, ellipsoidning V hajmini hisoblaymiz:

$$V=\pi\int_{-a}^{a} f^2(x)dx=\pi\int_{-a}^{a} y^2dx=\pi b^2\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\pi b^2(x-\frac{x^3}{3a^2})\bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

Agar bunda $a=b=R$ deb olsak, unda ellipsoid radiusi R bo'lgan sharga aylanadi va bu holda sharning halmi uchun yuqoridagi natijadan bizga maktabdan tanish bo'lgan $V=4\pi R^3/3$ formula kelib chiqadi.

Aniq integralni mexanika masalalariga tatbiqlari. Biz oldin kattaligi o'zgaruvchan va $f(x)$ funksiya bilan aniqlanadigan kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo'yicha harakatlantirganda bajarilgan A ish qiymati aniq integral orqali

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

formula bilan hisoblanishini ko'rsatgan edik. Ammo bu bilan aniq integralni mexanika masalalarini yechishga tatbig'i chegaralanib qolmaydi. Bunga misol sifatida bu yo'nalishda yana ikkita masalani ko'rib o'tamiz.

• ***Notekis harakatda bosib o'tilgan masofani hisoblash.*** Ma'lumki, biror v o'zgarmas tezlik bilan to'g'ri chiziq bo'ylab tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan s masofasi $s=v(b-a)$ formula bilan hisoblanadi. Endi tezligi har bir t vaqtda o'zgaruvchan va $v=v(t)$ funksiya bilan aniqlanadigan notekis harakatda moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig'ida bosib o'tadigan s masofani hisoblash masalasini ko'ramiz. Buning uchun $[a,b]$ vaqt oralig'ini $a=t_0$, t_1, t_2, ….. , t_{n-1}, $t_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo'lakka ajratamiz. Har bir (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalari uzunliklarini Δt_i

kabi belgilaymiz va undan ixtiyoriy bir $\tilde{t}_i$ nuqtani tanlaymiz. Moddiy nuqtaning (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalarida bosib o'tgan masofasini s_i kabi belgilab, bu vaqtda uning v_i tezligi taqriban o'zgarmas va $v_i=v(\tilde{t}_i)$ deb olamiz. Bu holda $s_i \approx v_i\,\Delta t_i = v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$ bo'lib, bosib o'tilgan s masofa uchun

$$s=\sum_{i=1}^{n} s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v_i\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$$

taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Bu masofaning aniq qiymatini topish maqsadida bo'lakchalar soni n ni cheksiz oshirib boramiz. Bunda $\Delta_n = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$ cheksiz kamayib boradi, deb hisoblaymiz. Natijada, aniq integral ta'rifiga asosan,

$$s=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} v(\tilde{t}_i)\Delta t_i = \int_a^b v(t)dt \quad (10)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Misol sifatida tezligi $v(t)=t^2+3t$ qonun bo'yicha o'zgaradigan notekis harakatda [3,8] vaqt oralig'ida bosib o'tilgan s masofani (10) formulaga asosan topamiz:

$$s=\int_3^8 (3t^2+4t)dt = (t^3+2t^2)\Big|_3^8 = (8^3+2\cdot 8^2)-(3^3+2\cdot 3^2) = 640-45=595.$$

Bundan tashqari, aniq integral bir jinsli bo'lmagan sim massasini, yassi chiziq va geometrik shaklning og'irlik markazi, inersiya momentlarini hisoblash uchun ham qo'llaniladi.

Aniq integralning ayrim iqtisodiy tatbiqlari. Aniq integral tushunchasi kiritilayotganda, o'zgaruvchan mehnat unumdorligi bo'yicha mahsulot hajmini aniqlash masalasini ko'rgan edik. Masalan, korxonada mehnat unumdorligi har bir ish kuni davomida

$$z=f(t)=-0{,}0033t^2-0{,}089t+20{,}96$$

funksiya bilan berilgan bo'lsin. Bunda $0\le t\le 8$ bo'lib, t vaqtni soatda ifodalaydi. Bu korxonaning yil (258 ish kuni) davomida ishlab chiqargan mahsulot hajmini topamiz[68]:

$$Q=258\int_0^8(-0{,}0033t^2-0{,}089t+20{,}96)dt = 258\cdot(-0{,}0011t^3-0{,}0445t^2+20{,}96t)\Big|_0^8 =$$

$$=258\cdot(-0{,}5632-2{,}848+167{,}68)=258\cdot 164{,}2688=42381{,}3504.$$

[68] Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Darslik. – T., 2012. – B. 378.

Demak, bu korxona bir yilda 42381 dona mahsulot ishlab chiqaradi.

Xulosa. Matematik tahlilda hosila bilan bir qatorda yana bir muhim tushuncha integral bo'lib hisoblanadi. Hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo'lgan differensiallanuvchi $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya deb ataladi. Berilgan funksiya uchun boshlang'ich funksiyalar cheksiz ko'p bo'lib, ular bir-biridan faqat o'zgarmas C soniga farq qiladi. Berilgan $f(x)$ funksiya uchun barcha boshlang'ich funksiyalar sinfi $F(x)+C$ (C – ixtiyoriy o'zgarmas son) shu funksiyaning aniqmas integrali deyiladi. Funksiyaning aniqmas integralini topish integrallash amali deyiladi va u differensiallash amaliga teskari bo'ladi. Berilgan funksiyaning integralini topish integral xossalari va jadvali yordamida amalga oshirilishi mumkin.

Differensiallash amaliga nisbatan integrallash amali ancha murakkabdir. Hatto ayrim elementar funksiyalarning aniqmas integrallari elementar funksiyalar sinfida mavjud bo'lmasdan, ular maxsus (noelementar) funksiyalar orqali ifodalanadi. Bundan tashqari, ixtiyoriy aniqmas integralni hisoblashga imkon beradigan universal, umumiy usul mavjud emas. Shu sababli faqat ayrim, ma'lum bir xususiyatlarga ega bo'lgan, aniqmas integrallarni hisoblash usullarini ko'rsatish mumkin. Ularga yoyish, differensial ostiga kiritish, o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash usullari kiradi.

Juda ko'p amaliy masalalarni yechish aniq integral tushunchasiga olib keladi. Masalan, geometriyada egri chiziqli trapetsiya yuzasini topish, fizikada o'zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash, iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini aniqlash kabi masalalar shular jumlasidandir. Aniq integral berilgan funksiya va kesma bo'yicha tuziladigan integral yig'indining limiti kabi aniqlanadi. Berilgan kesmada chegaralangan va faqat chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lgan funksiya uchun aniq integral mavjud bo'ladi. Yuqorida ko'rsatilgan masalalardan aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma'nolari kelib chiqadi. Aniq integral qiymatini hisoblash yoki baholash uchun uning bir qator xossalaridan foydalanish mumkin.

Oldin aniq integral ta'rifga asosan, integral yig'indining limiti singari aniqlanishini ko'rgan edik. Ammo kamdan-kam funksiyaning aniq integralini bevosita ta'rif bo'yicha hisoblash mumkin. Bunda juda murakkab hisoblashlarni bajarishga to'g'ri keladi. Shu sababli aniq integralni qulay va osonroq hisoblash usulini topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masalaning javobi Nyuton-Leybnits formulasi orqali beriladi. Bu formula integral hisobning eng asosiy formulasi bo'lib, aniq va aniqmas integrallar orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Agar berilgan aniq integralni to'g'ridan-to'g'ri Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash murakkab bo'lsa, unda ayrim hollarda bo'laklab integrallash yoki o'zgaruvchilarni almashtirish usullaridan foydalanish mumkin.

Bir qator hollarda integralning aniq qiymatini topish masalasi juda murakkab bo'lishi mumkin. Bunday hollarda aniq integral qiymatini taqribiy hisoblash usullariga murojaat qilinadi. Ularga to'g'ri to'rtburchaklar va trapetsiyalar formulalarini misol qilib ko'rsatib bo'ladi.

Oldin aytilgandek, aniq integral juda ko'p amaliy masalalarni yechish uchun qo'llaniladi. Geometriyada aniq integraldan turli ko'rinishdagi egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalarini hisoblash, egri chiziq yoyining uzunligini topish, jismlar hajmini aniqlash kabi masalalarni yechishda foydalaniladi. Aniq integralning mexanik tatbiqlariga misol sifatida kuch bajargan ishni hisoblash, notekis harakatda bosib o'tilgan masofani aniqlash, sim massasini topish kabilarni ko'rsatish mumkin. Iqtisodiy nazariyada esa aniq integral yordamida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini topish, iqtisodiy ko'rsatkich bo'lgan Djini koeffitsiyentini hisoblash, iste'molchi va ishlab chiqaruvchining yutug'ini aniqlash kabi masalalar o'z yechimini topadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Boshlang'ich funksiya qanday xossalarga ega?
3. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali qanday ta'riflanadi?
4. Integral ostidagi funksiya deb nimaga aytiladi?
5. Integral ostidagi ifoda deb nimaga aytiladi?
6. Integrallash amali nimani ifodalaydi?
7. Aniqmas integralning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
8. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
9. Integrallash va differensiallash amallari o'zaro qanday bog'langan?
10. Aniqmas integralning chiziqlilik xossasi nimadan iborat?
11. Integral hisoblash natijasini qanday tekshirish mumkin?
12. Darajali funksiyaning aniqmas integrali nimadan iborat?

13. Ko‘rsatkichli funksiya qanday integrallanadi?

14. Trigonometrik funksiyalarning integrallarini yozing.

15. Elementar funksiyalarning integrali har doim ham elementar funksiyadan iborat bo‘ladimi?

16. Elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydigan integrallarga misol keltiring.

17. Yoyish usulida integral qanday hisoblanadi?

18. Integralni yoyish usulida hisoblashga misol keltiring.

19. O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli nimadan iborat?

20. Almashtirma deb nimaga aytiladi?

21. Aniqmas integralni o‘zgaruvchilarni almashtirish usulida hisoblashga doir misol keltiring.

22. Bo‘laklab integrallash formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

23. Bo‘laklab integrallashda qanday hollar bo‘lishi mumkin?

24. Qanday ko‘rinishdagi aniqmas integrallarni bo‘laklab integrallash usulida hisoblash mumkin?

25. Funksiyaning berilgan kesma bo‘yicha integral yig‘indisi qanday hosil qilinadi?

26. Aniq integral qanday ta’riflanadi?

27. Qaysi shartda funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi deyiladi?

28. Qaysi shartda funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi bo‘ladi?

29. Integralning geometrik ma’nosi nimadan iborat?

30. Integralning mexanik ma’nosi qanday ifodalanadi?

31. Integralning iqtisodiy ma’nosi nimadan iborat?

32. Aniq integralning quyi va yuqori chegaralari nima?

33. Funksiyalarning algebraik yig‘indisidan olingan aniq integral qanday xossaga ega?

34. O‘zgarmas funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha aniq integrali nimaga teng?

35. Funksional tengsizlikni hadlab integrallash mumkinmi?

36. Funksiyaning kesma bo‘yicha orta qiymati deb nimaga aytiladi?

37. Yuqori chegarasi o‘zgaruvchan integralning hosilasi nimaga teng?

38. Nyuton-Leybnits formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

39. Aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.

40. Aniq integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

41. Aniq integralni taqribiy hisoblash masalasi qayerdan paydo bo‘ladi?

42. Kvadratur formulalar nima?

43. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasining mazmuni nimadan iborat?

44. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasining xatoligi qanday baholanadi?

45. Trapetsiyalar formulasi qanday aniqlanadi?

46. Trapetsiyalar formulasining xatoligi qanday baholanadi?

47. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzasi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?

48. Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?

49. Jism hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi orqali hisoblash formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

50. Aylanma jismning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?

51. O‘zgaruvchi kuch bajargan ish aniq integral orqali qanday ifodalanadi?

52. Notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani hisoblash formulasini yozing.

53. Lorents egri chizig‘i deyilganda nima tushuniladi?

54. Djini koeffitsiyenti orqali nima aniqlanadi?

55. Djini koeffitsiyenti aniq integral orqali qanday ifodalanadi?

Testlardan namunalar:

1. Quyidagilardan qaysi biri $f(x)=\ln x$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi?

A) $\frac{1}{x}$; B) $x\ln x$; C) $x\ln x+x$; D) $x\ln x-x$; E) $\frac{1}{x}\ln x - x$.

2. Teoremani to‘ldiring: Agar $F(x)$ biror $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, unda ixtiyoriy C o‘zgarmas soni uchun ... funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.

A) $C\cdot F(x)$; B) $C-F(x)$; C) $C+F(x)$; D) $C/F(x)$; E) $F(x+C)$.

3. Agar $F(x)$ biror $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, unda $\int f(x)dx$ aniqmas integral ta'rif bo'yicha qanday aniqlanadi?

A) $C\cdot F(x)$; B) $C-F(x)$; C) $C+F(x)$; D) $C/F(x)$; E) $F(x+C)$.

4. Qaysi darajali funksiyaning aniqmas integrali noto'g'ri yozilgan?

A) $\int\sqrt{x}dx=\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$; B) $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$; C) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$;

D) $\int\sqrt[3]{x}dx=\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}+C$; E) $\int\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{x^2}+C$.

5. Aniqmas integralni hisoblashning qaysi usuli mavjud emas?

A) ko'paytirish usuli; B) o'zgaruvchini almashtirish usuli;

C) differensial ostiga kiritish usuli; D) yoyish usuli;

E) bo'laklab integrallash usuli.

6. $\int\frac{2x^2-3x+5}{x^2}dx$ integralni yoyish usulida hisoblang.

A) $2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+C$; B) $2x-3\ln|x|+\frac{5}{x^2}+C$; C) $2x-\frac{3}{x}-\frac{5}{3x^3}+C$;

D) $2x-3\ln|x|-\frac{5}{x}+C$; E) $2x+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}+C$.

7. $\int f(x)dx$ aniqmas integralda $x=\varphi(t)$ almashtirma bajarilganda u qanday ko'rinishga keladi?

A) $\int f(\varphi(t))\varphi(t)dt$; B) $\int f(t)\varphi'(t)dt$; C) $\int f(\varphi(t))dt$;

D) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$; E) to'g'ri javob keltirilmagan.

8. $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-1}}$ integral qaysi almashtirma orqali jadval integraliga keltiriladi?

A) $t=x^2$; B) $t=x^3$; C) $t=x^4$; D) $t=x^5$; E) $t=x^6$.

9. Qaysi tenglik bo'laklab integrallash usulini ifodalaydi?

A) $\int f(x)dx=\int udv=uv-\int vdu$; B) $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$;

C) $\int f(x)dx=\int\sum_{k=1}^{n}a_kf_k(x)dx=\sum_{k=1}^{n}a_k\int f_k(x)dx$; D) $\int f(x)dx=F(x)+C$;

E) to'g'ri javob keltirilmagan.

10. $\int x^2\ln x dx$ integralni hisoblash uchun integral ostidagi ifodani qanday bo'laklash kerak?

A) $u=x$, $dv=x\ln x dx$; B) $u=x^2$, $dv=\ln x dx$; C) $u=\ln x$, $dv=x^2dx$;

D) $u=x\ln x$, $dv=xdx$; E) $u=x^2\ln x$, $dv=dx$.

11. Aniq integralning geometrik ma'nosini ko'rsating.

A) egri chiziqli trapetsiyaning og'ma tomonning burchak koeffitsiyenti;

B) egri chiziqli trapetsiyaning perimetri;

C) egri chiziqli trapetsiyaning o'rta chizig'i uzunligi;

D) egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi;

E) to'g'ri javob keltirilmagan.

12. Aniq integralning mexanik ma'nosini ko'rsating.

A) o'zgaruvchi kuchning eng katta qiymati;

B)o'zgaruvchi kuchning eng kichik qiymati;

C) o'zgaruvchi kuchning momenti;

D) o'zgaruvchi kuchning bajargan ish;

E) o'zgaruvchi kuchning o'rta qiymati.

13. Aniq integralning iqtisodiy ma'nosini ko'rsating.

A) mahsulot ishlab chiqarishda mehnat unumdorligi;

B) ishlab chiqarilgan mahsulot tannarxi;

C) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi;

D) ishlab chiqarilgan mahsulot chakana narxi;

E) mahsulot ishlab chiqarishda sarflangan xom ashyo.

14. $[a,b]$ kesma bo'yicha $y=f(x)$ funksiya uchun $S_n(f)$ integral yig'indi tuzishda quyidagi amallardan qaysi biri bajarilmaydi?

A) $[a,b]$ kesma x_i ($i=1,2,\cdots,n-1$) va $x_0=a$, $x_n=b$ nuqtalar bilan n bo'lakka ajratiladi;

B) $[x_{i-1},x_i]$ ($i=1,2,\cdots,n$) kesmalardan ξ_i nuqtalar olinadi;

C) tanlangan ξ_i nuqtalarda $f(x)$ funksiya qiymatlari hisoblanadi;

D) $[x_{i-1},x_i]$ ($i=1,2,\cdots,n$) kesmalarning uzunliklari $x_i - x_{i-1}=\Delta x_i$ topiladi;

E) ko'rsatilgan barcha amallar bajariladi .

15. $[a,b]$ kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun tuzilgan

$$S_n(f)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

integral yig'indi orqali uning aniq integral qanday aniqlanadi?

A) $\int_a^b f(x)dx = S_n(f)$; B) $\int_a^b f(x)dx = \max S_n(f)$;

C) $\int_a^b f(x)dx = \min S_n(f)$; D) $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty,\\ \max\Delta x\to 0}} S_n(f)$;

E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

16. [a, b] kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral qanday shartda doimo mavjud bo‘ladi?

A) yuqoridan chegaralangan; B) quyidan chegaralangan;

C) o‘suvchi; D) kamayuvchi; E) uzluksiz.

17. Aniq integralning xossasi qayerda xato ko‘rsatilgan?

A) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

B) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$;

C) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$;

D) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\,(k-const.)$;

E) barcha qoidalar to‘g‘ri ko‘rsatilgan.

18. Aniq integral xossasini ifodalovchi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik bajarilishi uchun c nuqta qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

A) $c< a$; B) $c> b$; C) $c=a$ yoki $c=b$; D) $a< c<b$;

E) ko‘rsatilgan barcha shartlarda tenglik bajariladi .

19. Aniq integral uchun quyidagi tengliklardan qaysi biri o‘rinli emas?

A) $\int_a^a f(x)dx = 0$; B) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$; C) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;

D) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$; E) keltirilgan barcha tengliklar o‘rinli.

20. Agar $y=F(x)$ berilgan [a,b] kesmada $y=f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, unda aniq integral uchun Nyuton-Leybnits formulasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

A) $\int_a^b f(x)dx = F(x)$; B) $\int_a^b f(x)dx = F(a)\cdot F(b)$;

C) $\int_a^b f(x)dx = F(b)/F(a)$; D) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;

E) $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$.

21. $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$ aniq integral qiymatini Nyuton-Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) $\pi/2$; C) $\pi/3$; D) $\pi/4$; E) $\pi/6$.

22. $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$ aniq integral qiymatini Nyuton-Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) $\pi/2$; C) $\pi/3$; D) $\pi/4$; E) $\pi/6$.

23. Aniq integralni bo'laklab integrallash formulasini ko'rsating.

A) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$; B) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int_a^b vdu$; C) $\int_a^b udv = \int_a^b vdu$;

D) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b$; E) To'g'ri javob ko'rsatilmagan.

24. $y=x^3$, $x=0$, $x=2$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini toping.

A) $S=1$; B) $S=2$; C) $S=3$; D) $S=4$; E) $S=5$.

25. $y=f(x)$ va $y=g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, funksiyalarning grafiklari, $x=a$ va $x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan geometrik shaklning S yuzasini hisoblash formulasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $S = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx$; B) $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$;

C) $S = \int_a^b f(x)g(x)dx$; D) $S = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$;

E) $S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

26. $y=x^2$ va $y=x^4$ egri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning S yuzasini toping.

A) $S=4$; B) $S=2$; C) $S=3/10$; D) $S=2/15$; E) $S=3/8$.

27. $y=f(x)$, $x\in[a, b]$, funksiya grafigidan iborat yoyining l uzunligini hisoblash formulasini ko'rsating.

A) $l=\int_a^b f(x)dx$; B) $l=\int_a^b \sqrt{1+f^2(x)}dx$; B) $l=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)}dx$;

C) $l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$; D) $l=\int_a^b \sqrt{1-[f'(x)]^2}dx$; E) $l=\int_a^b f^2(x)dx$.

28. Ko'ndalang kesimining yuzasi $S=3x^2$, $x\in[1,2]$, bo'lgan jismning V hajmini toping.

A) $V=3$; B) $V=1$; C) $V=2$; D) $V=5/3$; E) $V=7$.

29. $y=\sqrt{5}x^2$, $x\in[2,3]$, parabola yoyini OX koordinata o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma jismning V hajmini toping.

A) $V=5\pi$; B) $V=211\pi$; C) $V=24\pi^2$; D) $V=(5\pi)^2$; E) $V=45\pi$.

30. Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $v(t)=2t+5$ o'zgaruvchan tezlik bilan notekis harakat qilganda [4,8] vaqt oralig'ida bosib o'tgan s masofani toping.

A) $s=28$; B) $s=48$; C) $s=68$; D) $s=88$; E) $s=108$.

Mustaqil ish topshiriqlari:

1. Ushbu aniqmas integrallarni hisoblang va olingan natijani differensiallash orqali tekshiring:

$a)$ $\int(x^n - n\sin nx + \mathrm{tg}(x+n) + n)dx$; $b)$ $\int(e^{nx} - \frac{n}{x+n} + 2\sqrt{x-n} + n^x)dx$;

$c)$ $\int(\frac{n}{x^2-n^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}})dx$; $d)$ $\int(\frac{n}{\cos^2(1+nx)} + \frac{1}{\sin^2(n+x)})dx$.

2. $\int(\mathrm{tg}^2 nx + \frac{x^{2n}-1}{x^n})dx$ aniqmas integralni yoyish usulida hisoblang.

3. Ushbu aniqmas integralni invariantlik xossasidan foydalanib hisoblang:

$$\int[\sin^2 nx\cos nx + \frac{\ln^n(x+n)}{x+n}]dx.$$

4. Ushbu aniqmas integralni o'zgaruvchilarni almashtirish usulida hisoblang:

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{x^{2n}+n^2}}.$$

5. Ushbu aniqmas integralni bo'laklab integrallash usulida hisoblang:

$$\int x^n \ln nx dx.$$

6. Agar $\int_a^b f(x)dx = 5, \quad \int_a^b g(x)dx = -3$ bo'lsa quyidagi integrallarning qiymatlarini toping:

$$a) \int_a^b (n+1)f(x)dx; \quad b) \int_a^b (n-1)g(x)dx; \quad c) \int_a^b [nf(x) + (2n+1)g(x)]dx.$$

7. Quyidagi aniq integrallarni Nyuton-Leybnits formulasi bo'yicha hisoblang:

$$a) \int_0^1 [nx^{n-1} + (n+1)x - 2n]dx; \ b) \int_0^\pi [\sin(2n+1)x + n\cos 2nx]dx.$$

8. Quyidagi aniq integrallarni bo'laklab integrallash usulida hisoblang:

$$a) \int_0^1 xe^{nx}dx; \ b) \int_1^e x^n \ln x dx; \ c) \int_0^\pi e^{nx}\cos(n+1)x dx.$$

9. Quyidagi aniq integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish yordamida hisoblang:

$$a) \int_0^n \frac{x+n}{\sqrt{n^2+3nx}}dx; \ b) \int_{01}^n \frac{\sqrt{5nx+4n^2}}{x}dx; \ c) \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x\sqrt{n^2x^2+1}}.$$

10. $y^2=n^2x$ va $y=nx$ chiziqlar bilan chegaralangan geometrik shaklning yuzasini toping.

11. Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{4n^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ bo'lgan ellipsni OX koordinata o'qi atrofida aylanishidan hosil qilingan aylanma jism hajmini aniqlang.

12. Tenglamasi $y^2=nx^3$ bo'lgan yarim kubik parabolaning koordinata boshi va $x=n$ abssissali nuqtalari orasidagi yoyining uzunligini toping.

ASOSIY TAYANCH IBORALARNING IZOHLI LUG‘ATI

Tayanch ibora	*Tayanch ibora mazmuni*
Aniq integral	$[a,b]$ kesma bo‘yicha $f(x)$ funksiyaning aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi va $S_n(f)$ integral yig‘indining $n\to\infty$, $\max\Delta x_i\to 0$ bo‘lgandagi chekli limiti kabi aniqlanadi.
Aniqmas integral	Berilgan $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalari sinfi. $\int f(x)dx$ kabi belgiladi va $F(x)$+C kabi aniqlanadi. Bunda $F(x)$-birorta boshlang‘ich funksiya, C-ixtiyoriy o‘zgarmas son.
Aralash hosilalar	Funksiyadan ketma-ket turli argumentlar boyicha olingan hosila.
Argument orttirmasi	Argument qiymati x berilgan x_0 qiymatdan qancha farqlanishini ifodalovchi $x-x_0=\Delta x$ ayirma.
Asosiy elementar funksiyalar	Darajali $y=x^\alpha$ ($\alpha\in$R), ko‘rsatkichli $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$), logarifmik $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$), trigonometrik $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\text{tg}x$, $y=\text{ctg}x$ va teskari trigonometrik $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\text{arctg}x$, $y=\text{arcctg}x$ funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi.
Aylana	Markaz deb ataluvchi O nuqtadan bir xil R masofada joylashgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni. R aylana radiusi deyiladi.
Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi	Barcha ozod hadlari nolga teng bo‘lgan chiziqli tengamalar sistemasi.
Birlik matritsa	Barcha diagonal elementlari $a_{ii}=1$, qolgan

	elementlari $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ bo‘lgan kvadrat matritsa.
Boshlang‘ich funksiya	Differensiallanuvchi va hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lgan $F(x)$ funksiya.
Boshlang‘ich shartlar	n-tartibli differensial tenglamaning $y=y(x)$ yechimi va uning hosilalariga berilgan x_0 nuqtada qo‘yiladigan $y^{(i)}(x_0)=y_{0i}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ ko‘rinishdagi shartlar.
Burilish nuqtasi	Funksiya grafigining botiqlik va qavariqlik sohalarini ajratib turuvchi nuqta.
Butun sonlar to‘plami	$Z=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ sonli to‘plam.
Chekli to‘plam	Elementlar soni chekli bo‘lgan to‘plam.
Cheksiz kichik miqdor	Argument $x\to a$ bo‘lganda limiti nolga teng bo‘lgan funksiya.
Cheksiz to‘plam	Chekli bo‘lganmagan to‘plam.
Chiziqli tenglamalar sistemasi	Noma’lumlar birinchi darajada, chiziqli ko‘rinishda qatnashgan n noma’lumli m ta tenglamalardan iborat sistema.
Davriy funksiya	Biror $T>0$ soni va barcha $x\in D\{f\}$ uchun $f(x+T)=f(x)$ shartni qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ funksiya.
Determinant	Kvadrat matritsaning elementlaridan ma’lum bir qoida asosida hosil qilinadigan son.
Differensial tenglama	Noma’lum $y=y(x)$ funksiyaning hosilalari qatnashgan tenglama.
Differensiallanuvchi funksiya	To‘la orttirmasini $\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ ko‘rinishda ifodalab bo‘ladigan funksiya. Bunda Ava B Δx, Δy argument orttirmalariga bog‘liq bo‘lmagan ifodalar, α va β esa $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdorlardir.

Ekvivalent to'plamlar	O'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatib bo'ladigan to'plamlar.
Elementar funksiyalar	Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida arifmetik amallar va murakkab hamda teskari funksiya olish orqali hosil qilingan funksiyalar.
Ellips	Fokuslar deb ataluvchi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining yig'indisi o'zgarmas son bo'lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rni.
Eng kichik kvadratlar usuli	Tajriba yoki kuzatuv natijasida topilgan empirik formuladagi noma'lum parametrlarni baholash usuli.
Funksiya	O'zgaruvchi $x \in D$ qiymatiga ikkinchi bir $y \in E$ o'zgaruvchining aniq bir qiymatini mos qo'yish. Bunda x erkli o'zgaruvchi yoki argument, y erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi va $y=f(x)$ kabi ifodalanadi.
Funksiya differensiali	Agar funksiya orttirmasi $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$ ko'rinishda bo'lsa, funksiya differensiali $df = A\Delta x$ kabi aniqlanadi.
Funksiya grafiginiug botiqlik (qavariqlik) sohasi	Berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigi o'zining urinmalaridan pastda (yuqorida) joylashadigan x nuqtalar to'plami.
Funksiya grafigining og'ma asimptotasi	Argument $x \to \pm\infty$ bo'lgan holda $y=f(x)$ funksiya grafigi cheksiz yaqinlashib boradigan og'ma to'g'ri chiziq.
Funksiya grafigining vertikal asimptotasi	Argument $x \to a$ bo'lgan holda $y=f(x)$ funksiya grafigi cheksiz yaqinlashib boruvchi $x=a$ vertikal to'g'ri chiziq
Funksiya hosilasi	Δf funksiya orttirmasini Δx argument orttirmasiga nisbatining Δx nolga intilgandagi limiti.

Funksiya orttirmasi	Argument qiymati x_0 dan x ga o‘zgarganda $y=f(x)$ funksiyaning o‘zgarishini ifodalovchi $\Delta f=f(x)-f(x_0)$ ayirma.
Funksiyaning aniqlanish sohasi	x argumentning $y=f(x)$ funksiya ma’noga ega bo‘ladigan qiymatlari to‘plami va $D\{f\}$kabi belgilanadi.
Funksiyaning limiti	$y=f(x)$ funksiyada argument x berilgan a soniga cheksiz yaqinlashib borganda $(x\to a)$ funksiya biror A soniga cheksiz yaqinlashib borsa $(y\to A)$, unda A soni funksiyaning limiti deyiladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ kabi ifodalanadi.
Funksiyaning lokal maksimumi (minimumi)	Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning biror x_0 nuqta atrofidagi barcha x nuqtalar uchun $f(x)<f(x_0)$ $[f(x)>f(x_0)]$ shart bajaraladigan $f(x_0)$ qiymati.
Funksiyaning monotonlik sohasi	Funksiya o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘ladigan sohalar.
Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi	Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ shart bajarilsa,unda funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz deyiladi.
Funksiyaning qiymatlar sohasi	$y=f(x)$ funksiyada $x\in D\{f\}$ bo‘lganda y funksiya qabul etadigan qiymatlarining $E\{f\}$ to‘plami.
Funksiyaning uzilish nuqtalari	$y=f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ shart bajarilmaydigan nuqtalar.
Giperbola	Fokuslar deb ataluvchi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalar ayirmasining absolyut qiymati o‘zgarmas son bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni.
Global ekstremumlar	Funksiyaning global maksimum va minimumlari.
Global maksimum	Funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi barcha x

(minimum)	nuqtalar uchun $f(x) \leq f(x_0)$ $[f(x) \geq f(x_0)]$ shartni qanoatlantiradigan $f(x_0)$ qiymati.
Gradient	Funksiyaning berilgan nuqtadagi eng katta tezlik bilan o‘zgaradigan yo‘nalishni ifodalovchi vektor.
Haqiqiy sonlar to‘plami	Ratsional va irratsional sonlar birlashmasi.
I ajoyib limit	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
I tartibli chiziqli differensial tenglama	$y' + P(x)y = Q(x)$ ko‘rinishdagi I tartibli differensial tenglama. $Q(x) \equiv 0$ holda bir jinsli, aks holda bir jinslimas tenglama deyiladi.
I tur xosmas integral	Quyi yoki yuqori chegaralaridan kamida bittasi cheksiz bo‘lgan aniq integral.
II ajoyib limit	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = 2{,}718281...$
II tur xosmas integral	$[a,b]$ kesmada chegaralanmagan funksiyaning aniq integrali.
Irratsional sonlar to‘plami	Ratsional bo‘lmagan sonlar to‘plami. Masalan, $\sqrt{2}$.
Juft (toq) funksiya	$f(-x) = f(x)$ $[f(-x) = -f(x)]$ shartni qanoatlantiruvchi $y = f(x)$ funksiya.
Ko‘phad	$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ko‘rinishdagi funksiya. Bunda a_k berilgan sonlar bo‘lib, ko‘phadning koeffitsiyentlari, n esa ko‘phadning darajasi deyiladi.
Kollinear vektorlar	Bir to‘g‘ri chiziq yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda joylashgan vektorlar.
Kombinatorik masala	Chekli to‘plamning turli qism to‘plamlarini hosil qilish bilan bog‘liq masalalar.
Kombinatorika	Matematikaning kombinatorik masalalar

	bilan shug'ullanadigan bo'limi.
Komplanar vektorlar	Bitta yoki parallel tekisliklarda joylashgan uch va undan ortiq vektorlar.
Kompleks son	Mavhum birlik i va ixtiyoriy x, y haqiqiy sonlar orqali $z=x+iy$ ko'rinishda aniqlanadigan ifoda.
Kontinuum quvvatli to'plam	[0,1] kesmaga ekvivalent bo'lgan to'plam.
Kritik nuqta	Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ nolga teng yoki mavjud bo'lmagan nuqtalar.
Lokal ekstremumlar	Funksiyaning lokal maksimum yoki lokal minimumlari.
Matematika	Haqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fan.
Matritsa	m ta satr va n ta ustun shaklida joylashtirilgan $m \cdot n$ ta sondan iborat jadval.
Mavhum birlik	$i=\sqrt{-1}$ tenglik bilan aniqlanadigan ifoda .
Model	O'rganilayotgan ob'yektning ma'lum bir muhim xususiyatlarini ifodalovchi moddiy yoki ideal ko'rinishdagi qurilma.
Monoton funksiyalar	O'suvchi (kamaymovchi) va kamayuvchi (o'smovchi) funksiyalar birgalikda monoton funksiyalar bo'ladi.
Murakkab funksiya	$y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalardan hosil qilinadigan $y=f(\varphi(x))$ funksiya. f-tashqi, φ-ichki funksiya deyiladi.
***n* - tartibli hosila**	Funksiyadan ketma-ket n marta hosila olish natijasida hosil bo'ladigan funksiya. $f^{(n)}(x)$ kabi belgilanadi va $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ rekkurent formula bilan aniqlanadi.
n o'lchovli vektor	Tartiblashtirilgan n ta sondan iborat

	matematik ifoda.
Natural sonlar to'plami	$N=\{1,2,3, \ldots, n, \ldots\}$ sonli to'plam.
Nol matritsa	Barcha elementlari $a_{ij}=0$ bo'lgan matritsa.
Nol vektor	Boshi va uchi bitta nuqtada bo'lgan vektor.
Nuqta atrofi	Berilgan nuqtani o'z ichiga olgan ixtiyoriy bir oraliq.
Nyuton-Leybnis formulasi	Aniq integral qiymatini ifodalaydigan $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$ formula. Bunda $F(x)$- integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun biror boshlang'ich funksiya.
Ort vektorlar (ortlar)	Koordinata o'qlarida joylashgan, musbat yo'nalgan va modullari birga teng bo'lgan vektorlar.
Parabola	Berilgan l to'g'ri chiziq bilan berilgan F nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rni. Bunda l-direktrisa, F-fokus deyiladi.
Ratsional kasr (ratsional funksiya)	Ikkita $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ ko'phadlarning $P_n(x)/Q_m(x)$ nisbatidan iborat funksiya.
Ratsional sonlar to'plami	$Q=\{m/n,\ m\in Z,\ n\in N\}$ ko'rinishdagi sonlar to'plami.
Sanoqli to'plam	Natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lgan to'plam.
Sanoqsiz to'plam	Sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plam.
Skalyar	Sonli qiymati bilan to'liq aniqlanadigan miqdor
Sonli ketma-ketlik	$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ko'rinishda yozilgan haqiqiy sonlarning cheksiz qatori.
Sonli ketma-ketlik limiti	$\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikning a_n umumiy hadi $n\to\infty$ bo'lganda cheksiz yaqinlashib boradigan biror A soni. $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ kabi yoziladi.

Sonli qator	$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ cheksiz sonli ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ ko'rinishdagi ifoda.
Sonli to'plam	Elementlari sonlardan iborat to'plam.
Sonning absolyut qiymati	Har qanday x soni uchun bu sondan koordinata boshigacha bo'lgan masofani ifodalovchi va $\|x\|$ kabi belgilanuvchi nomanfiy son.
Sportga oid matematik model	Jismoniy tarbiya va sport jarayonlarini soddalashtirilgan, formallashtirigan ko'rinishda ifodalovchi matematik modellar.
Teskari funksiya	$y=f(x)$ funksiya bo'yicha x o'zgaruvchini y o'zgaruvchi orqali ifodalovchi $x=\varphi(y)$ funksiya. $f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $f^{-1}(x)$ kabi belgilanadi.
To'la differensial	$f(x,y)$ funksiya $\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ to'la orttirmasining chiziqli $A\Delta x+B\Delta y$ qismi.
To'plam	Biror xususiyati bo'yicha umumiylikga ega bo'lgan ob'yektlar majmuasi.
To'plamlar birlashmasi	A va B to'plamlardan kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlar to'plami va $A\cup B$ kabi belgilanadi.
To'plamlar kesishmasi	A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo'lgan elementlar to'plami va $A\cap B$ kabi belgilanadi.
To'plamlarning Dekart ko'paytmasi	$a\in A$ va $b\in B$ elementlardan tuzilgan (a,b) juftliklar to'plami va $A\times V$ kabi belgilanadi.
Umumiy yechim	n-tartibli differensial tenglamaning ixtiyoriy n ta o'zgarmas sonlar qatnashadigan yechimlari.

Vektor	Ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalik.
Vektor fazo	Vektorlar to‘plami va unda aniqlangan chiziqli amallardan iborat tizim.
Vektorning koordinatlari	Vektor yoyilmasidagi ortlar oldidagi sonli koeffitsiyentlar.
Vektorning moduli	Vektorning sonli qiymati, uzunligi.
Xususiy hosilalar	$\Delta_x f$ ($\Delta_y f$) xususiy orttirmaning Δx (Δy) argument orttirmasiga nisbatining $\Delta x \to 0$ ($\Delta y \to 0$) bo‘lgandagi limiti.
Xususiy yechim	Umumiy yechimdan o‘zgarmas sonlarning aniq bir qiymatlarida hosil bo‘ladigan yechim.
Yuqori tartibli differensiallar	$d^n f = d[d^{n-1} f]$ rekurrent formula bilan aniqlanadigan differensiallar.
Yuqori tartibli xususiy hosilalar	Funksiyadan biror argumenti bo‘yicha ikki yoki undan ortiq marta ketma-ket olingan xususiy hosila.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Howard Anton, Chris Rorres. Elementary Linear Algebra: Applications Version, 10th. – USA: Lehigh University, John Wiley & Sons, 2010. – 1276 p.
2. Ion Goian, Raisa Grigor, Vasile Marin, Florentin Smarandache. Algebraic problems and exercises for high school. – USA: The Educational Publisher Columbus, 2015. – 146 p.
3. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to'plami. 1,2-qism. 2014.
4. Karimov M. Oliy matematika. O'quv qo'llanma (1-qism). – T.: Iqtisod-Moliya, 2005. – 110 b.
5. Karimov M. Oliy matematika. O'quv qo'llanma (2-qism). – T.: Iqtisod-Moliya, 2006. – 125 b.
6. Konev V.V. Limits of Sequences and Functions. Textbook. The second edition. Tomsk. TPU Press, 2009.
7. Muminova R., Turdaxunova S. Oliy matematika. Masalalar to'plami. – T.: "Iqtisod-Moliya" nashriyoti, 2007. – 204 b.
8. Rajabov F., Masharipova S. Oliy matematika asoslari. O'quv qo'llanma. 2008. – 343 b.
9. Rajabov F., Masharipova S., Madrahimov R. Oliy matematika. O'quv qo'llanma. – T.: Turon-Iqbol, 2007. – 400 b.
10. Rasulov N.P., Safarov I.I., Muxitdinov R.T. Oliy matematika. (Iqtisodchi va muhandis-texnologlar uchun). Darslik. – T., 2012. – 554 b.
11. Rupinder Sekhon. Applied Finite Mathematics. – USA: Rice University, Connexions. 2011. – 341 p.
12. Soatov Yo.U. Oliy matematika kursi. III tom. –T: O'qituvchi, 1999.
13. Sultonov J.S. Oliy matematika (Funksiya va limitlar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand: 2010. – 73 b.
14. Sultonov J.S. Oliy matematika (Hosila va differnsial). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand: 2010. – 89 b.
15. Sultonov J.S. Oliy matematika (Integrallar). Uslubiy qo'llanma. – Samarqand: 2009. – 121 b.
16. Tojiyev Sh.I. Oliy matematikadan masalalar yechish. Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik. –T.: O'zbekiston, 2002. – 512 b.

17. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (I,II). – М.: Высшая школа, 1998.
18. Естественно-научные основы физической культуры и спорта: учебник / под ред. А.В.Самсоновой, Р.Б.Цаллаговой. – М.: Советский спорт, 2014. – 456 с.
19. Курганов К.А. Варианты домашних и контролных работ по высшей математике, УзМУ. – 2005.
20. Луре Л.И. Основы высшей математики. – М.: 2003.
21. Шипачов В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1999.

Internet manbaalari:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_algebra
2. https://www.math.ucdavis.edu/~linear/linear-guest.pdf
3. www.mcce.ru
4. www.lib.mexmat.ru
5. www.a-geometry.narod.ru
6. www.allmath.ru
7. www.ziyonet.uz

MUNDARIJA:

O'zbekiston Respublikasi, 100017,Toshkent shahar, Yunusobod tumani, Markaz-5, 45/4 ,
h/r 20208000200267921001,
MFO: 00898, INN: 207198075, OKONX: 87100,
XOATB "Turkiston bank", Yunusobod filiali
Tel./Faks (+99871) 234-98-37
(+99899) 807-72-79
E mail: ita-press@mail.ru
Facebook: sport books
Instagram: sportbooks_shop
Telegram: sportbooks_shop

VASHRIYOTI

Республика Узбекистан,100017, город Ташкент, Юнусабадский район, Центр - 5,45/4,
р/с 20208000200267921001
МФО: 00898, ИНН: 207198075 ОКОНХ: 87100,
ЧОАКИБ "Туркистон банк" Юнусабадский филиал
Тел./Факс (+99871) 234-98-37
(+99899) 807-72-79
E mail: ita-press@mail.ru
Facebook: sport books
Instagram: sportbooks_shop
Telegram: sportbooks_shop

"ИТА-ПРЕСС НАШРИЁТИ"

ЖИСМОНИЙ ТАРБИЯ ВА СПОРТ СОҲАСИ БЎЙИЧА ТАЙЁРЛАНГАН ВА ЧОП ЭТИЛГАН КИТОБЛАР РЎЙХАТИНИ СИЗГА ТАҚДИМ ЭТАДИ

1. Керимов Ф.А. Спортда илмий тадкикотлар. – Т., 2018. – б. 300
2. Керимов Ф.А. Научные исследования в спорте. – Т., 2018. – 316 с.
3. Абдуллаев А.А. Жисмоний маданият назарияси ва методикаси. – Т., 2018. – б. 320
4. Саламов Р.С. Жисмоний тарбия назарияси ва услубияти. 1-жилд. – Т., 2018. – б. 296.
5. Саламов Р.С. Жисмоний тарбия назарияси ва услубияти. 2-жилд. – Т., 2018. – б. 182.
6. Керимов Ф.А., Нарзуллаев Д.З. Применение статистических методов в спорте. – Т., 2018. – 268 с.
7. Kerimov F.A., Tastanov N.A., Qodirov E.I. Yunon-rim kurashi. –T., 2018. – b. 132.
8. Kerimov F.A. Sportda dopingga qarshi kurash. – T., 2018. – 220 b.
9. Керимов Ф.А. Вольная борьба. – Т., 2018. – 148 с.
10. Керимов Ф.А. Подвижные игры с элементами единоборств. – Т., 2018. – 78 с.
11. Гончарова О.В. Болалар жисмоний сифатларини тарбиялаш. – Т., 2018. – б. 204.
12. Безверхов В.П. Воспоминание об учителе. – Т., 2018. – 136 с.
13. Нуримов Р.И. Спорт ва миллий ўйинлар. – Т., 2018. – б. 180.
14. Нуримов Р.И. Футбол назарияси ва услубияти. – Т., 2018. – б. 396.
15. Исеев Ш.Т. Футболчиларни йиллик тайёргарлашни режалаштириш. – Т., 2018. – б. 460.
16. Гончарова О.В. Внимание: допинг. – Т., 2018. – 36 с.
17. Палибаева З.Х. Валеология асослари. –Т., 2018. – б. 224.
18. Салимов У.З., Пўлатов А.А. ва б. Теннис. –Т., 2018. – б. 132.
19. Қурбонов С.Н., Ғанибоев И.Д. ва б. Енгил атлетика. – Т., 2018. – б. 140.
20. Нуримов З.Р. ва б. Футбол. – Т., 2018. – б. 144.
21. Эштоева В.Б., Хусанова Н.Р. Бадиий гимнастика. – Т., 2018. – б. 132.
22. Арслонов Ш.А. Дзюдо. – Т., 2018. – б. 132.
23. Гуфранова Р. Стол тенниси. – Т., 2018. – б. 132.
24. Корбут В.М., Исроилова В.И. Сузиш. – Т., 2018. – б. 144.
25. Қодиров Э.И. Оғир атлетика. – Т., 2018. – б. 132.
26. Павлов Ш.К., Исроилова Р.И. Гандбол. – Т., 2018. – б. 148.

27. Beak Mun Jong, Sultonbekov R.M. Qurbonov S.N. Taekvando. – T., 2018. – 132 b.
28. Хайлиев М. Шахмат. –Т., 2018. – б. 132.
29. Ганиева Ф.В. Баскетбол. –Т., 2018. – б. 148.
30. Пулатов А.А., Умматов А.А.. Пулатов Ф.А. Волейбол. – Т., 2018. – б. 132.
31. Салимов У.З. ва б. Бадминтон. –Т., 2018. – б. 132.
32. Холмуҳамедов Р.Д., Шин В.Н. ва б. Бокс. –Т., 2018. – б. 132.
33. Абдуллаев Ш.А., Холмуродов Л.З. Эркин кураш. – Т., 2018. – б. 132.
34. Усманова А.А. Спорт психологияси. – Т., 2018. – б. 48.
35. Усманова А.А. Спортивная психология. – Т., 2018. – б. 48.
36. Абдурахмонов М. Махмудов А.Т.Жисмоний тарбия ва спорт тиббиёти. – Т., 2018. – б. 84.
37. Абдурахмонов М. Одам анатомияси ва физиология асослари. – Т., 2018. – б. 132.
38. Пулатов Ф.А. "Ўнақай" ва "Чапақай"лар ёки амбидекстр бўлиш афзалми? – Т., 2018. – б. 88.
39. Исеев Ш.Т. Технико-тактическая подготовка футболистов. – Т., 2018. – 228 с.
40. Усманова А.А. Спортивная педагогика. – Т., 2018. – 84 с.
41. Усманова А.А. Спорт педагогикаси. – Т., 2018. – б. 72.
42. Гуломов З.Т., Истомин А.А., Камилова Г.З., Набиуллин Р.Х., Маткаримов Р.М. Спорт менежменти. – Т., 2018. – б. 372.
43. Безверхов В.П. Теннис. – Т., 2018. – 160 с.
44. Турсуналиев И.А. Греко-римская борьба. – Т., 2018. – 160 с.
45. Югай Л.П., Нурышов Д.Е. Дзюдо. – Т., 2018. – б. 160.
46. Акрамов Ж.А. ва б. Гандбол. – Т., 2018. – б. 160.
47. Абдурасулова Г.Б. ва б. Қиличбозлик назарияси ва услубияти. – Т., 2018. – б. 276.
48. Радинов А.В. Практика психологии спорта. – Т., 2018. – 132 с.
49. Сафарова Д.Д. Анатомия. 1-том. –Т., 2018. – 272 с.
50. Сафарова Д.Д. Анатомия. 2-том. – Т., 2018. – 376 с.
51. Сафарова Д.Д. Спорт физиологияси. – Т., 2018. – б. 208.
52. Сафарова Д.Д. Ёшга оид физиология. – Т., 2018. – б. 176.
53. Олимов М.С., Шакиржанова К.Т. ва б. Енгил атлетика назарияси ва услубияти. –Т., 2018. – 362 с.
54. Халмухамедов Р.Д. ва б. Бокс назарияси ва услубияти. –Т., 2018. – 344 с.
55. Асатова Г.Р. Халқаро спорт ҳуқуқи асослари. – Т., 2018. – б. 140.
56. Сафарова Д.Д. Одам физиологияси. – Т., 2018. – б. 124.
57. Корбут В.М., Исламов И.С. Сузиш назарияси ва услубияти. – Т., 2018. – б. 168
58. Пулатов А.А., Уматов А.А. Волейбол: мусобақа ўтказиш тартиби ва коидалари. – Т., 2018. – б. 96.
59. Ашуркова С.Ф. Волейбол. – Т., 2018. – 108 с.
60. Умаров Д.Х., Усмонхужаев Т.С. Спорт педагогик маҳоратини ошириш. – Т., 2018. – б. 228.
61. Сирлиев Э.Н., Мирзаев О.С. Психология тарихи. – Т., 2018. – б. 268.
62. Арзикулов Д.Н., Гаппаров З.Г., Вахобова Д.Б. Психология ва спорт психологияси. – Т., 2018. – б. 280.

63. Вафоев Б.Р. Спортда математика. – Т., 2018. – б. 252.
64. Хасанова Н.Р., Фетхулова Н.Х. ва бош. Спорт педагогик маҳоратини ошириш (Бадиий гимнастика). – Т., 2018. – б. 172.
65. Ахмедова Г.И., Ахмедов И.И. Спорт педагогик маҳоратини ошириш (Синхрон сузиш). –Т., 2018. – 52 б.
66. Корбут В.М., Матназаров Х.Й. Эшкак эшиш назарияси ва услубияти. – Т., 2018. – б. 160.
67. Черникова Й.Т. ва бошқ. Спорт педагогик маҳоратини ошириш (велоспорт). – Т., 2018. – б. 168
68. Корбут В.М., Исроилова Р.Г. Спорт педагогик маҳоратини ошириш (эшкак эшиш). –Т., 2018. – б. 124
69. Мирзакулов Ш.А., Мирзанов Ш.С. ва бошқ. Спорт педагогик маҳоратини ошириш (белбоғли кураш). –Т., 2018. – б. 172.
70. Ганиева Ф.В., Хусанова Д.Т. ва бошқ. Спорт ва ҳаракатли ўйинлар (баскетбол). – Т., 2018. – б. 152.
71. Ахмедова Г.И., Ахмедов И.И. Синхрон сузиш назарияси ва услубияти. – Т., 2018. – б.96.
72. Корбут В.М., Зоитова Г.М. Спорт педагогик маҳорати ошириш (сузиш). – Т., 2018. – б. 128
73. Ходжаев А.З. Спорт педагогик маҳоратини ошириш (Оғир атлетика). – Т., 2018. – б. 132.
74. Маткаримов Р.М., Ходжаев А.З. ва бошқ. Оғир атлетика назарияси ва услубияти. – Т., 2018. – б. 248.
75. Ярашев К.Д., Умаров М.Н., Федорова С.В. Организация и проведение учебных занятий по художественной гимнастике в образовательных заведениях. – Т., 2018. – 300 с.
76. Керимов Ф.А. Теория и методика спортивной борьбы. – Т., 2018. – 340 с.
77. Керимов Ф.А. Спорт кураши назарияси ва услубияти. – Т., 2018. – б. 356.
78. Керимов Ф.А., Гончарова О.В. Основы физической подготовки юных спортсменов. – Т., 2018. – 188 с.
79. Керимов Ф.А., Умаров М. Прогнозирование и моделирование в спорте. – Т., 2018. – 300 с.
80. Гончарова О.В. Контрольно-нормативные требования физической подготовки спортсменов. – Т., 2018. – 320 с.
81. Саламов Р.С., Керимов Ф.А. Жисмоний тарбияда педагогик технологиялар. – Т., 2018. – б. 160.
82. Пулатов А.А., Саватюгин О.М. ва б. Бадминтон назарияси ва услубияти. – Т., 2018. – б. 300.
83. Павлов Ш.К. ва б. Гандбол назарияси ва услубияти. – Т., 2018. – б. 448.
84. Таймуродов А.Р., Атажанов С.Ф. Спорт педагогик маҳоратини ошириш (кураш). – Т., 2018. – б. 272.
85. Тастанов Н., ва б. Спорт педагогик маҳорати ошириш (Юнон-рим ва эркин кураш). – Т., 2018. – б. 264.
86. Шарипов А., Жамматов Ж. Малакавий педагогик амалиёти. – Т., 2018. – б 114.
87. Хайдаров Б.Т. Физиология ва спорт физиологияси. – Т., 2018. – б. 256.
88. Абдалимов О.Х., Абдалимов А.О. Рукопашные бой. – Т., 2018. –144 с.

VAFOYEV B. R.

SPORTDA MATEMATIKA

O'quv qo'llanma

Muharrir:
Aripjanova D.U.

Dizayner:
Imomov Sh.

Kompyuterda sahifalovchi:
Dalabayeva N.I.

Nashr.lits. AI№ 283, 11.01.16. Bosishga ruxsat etildi 26.04.2018
Bichimi 60×84 $^1/_{16}$ «Times New Roman» garniturada raqamli bosma usulida bosildi. Shartli bosma tabog'i 16. Nashriyot bosma tabog'i 15,75.
Adadi 100. Buyurtma №13

«ILMIY TEXNIKA AXBOROTI - PRESS NASHRIYOTI»
100017. Toshkent sh, M-5, 45/4